



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SIMULACIÓN DE LA FORMACIÓN DE UN
TETRAQUARK POR RECOMBINACIÓN DE DOS
MESONES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

IVÁN ALEJANDRO TOLEDANO JUÁREZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ**

2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, mi hermana y a pocho

...

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Toledano

Juárez

Iván

Alejandro

56 36 62 87

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

407072280

2. Datos del tutor

Dr.

Genaro

Toledo

Sánchez

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Roelof

Bijker

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Myriam

Mondragón

Ceballos

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Erick

Leonardo

Patiño

Jaidar

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Gabriela

Murguía

Romero

7. Datos del trabajo escrito

Simulación de la formación de un tetraquark por recombinación de dos mesones

64p

2012

Agradecimientos

La presente tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad.

Agradezco a mi tutor, el Dr. Genaro Toledo Sánchez por haber confiado en mi persona, por la paciencia y por la dirección de este trabajo. A mis sinodales, el Dr. Roelof Bijker, la Dra. Myriam Mondragón, la Dra. Gabriela Murguía, al Dr. Leonardo Patiño, por su atenta lectura de este trabajo y por sus comentarios en el proceso de revisión de la tesis.

Gracias a mis queridos compañeros, que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos 5 años de convivir dentro y fuera del salón de clases. Miguel, Martín, Diana, Edgar y Tonatiuh, gracias.

A mis padres Mario y Adriana, que me apoyaron con su cariño en toda la carrera, y que, de forma incondicional entendieron mis ausencias y mis malos momentos. A mi hermana Danielle, que hasta el día de hoy sigue inspirándome para continuar con mi carrera.

Gracias a todos.

Prefacio

El Modelo Estándar de Partículas Elementales nos dice que la materia hadrónica está compuesta por quarks (q), y la naturaleza nos dice qué estados deben de ser singletes de color. Los estados conocidos son los mesones ($q - \bar{q}$) y los bariones ($3q$) y sus correspondientes antipartículas. Las llamadas partículas exóticas como los *glueballs* (su nombre en inglés), híbridos y estados multiquark también son singletes de color, y son predichas como estados ligados en modelos basados en la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés). En particular, los mesones exóticos pueden ser de distintos tipos: mesones híbridos ($q - \bar{q} - \text{gluón}$), estados multiquark ($q - q - \bar{q} - \bar{q}, \dots$) o estados multimesón (M_1, M_2, \dots). El estado multiquark de la forma ($q - q - \bar{q} - \bar{q}$) es el más sencillo de su tipo y es estudiado tanto teórica como experimentalmente, para encontrar claras muestras de su existencia.

En este trabajo se estudia la formación de un estado de este tipo a partir de la presencia de dos estados ($q - \bar{q}$) no relacionados inicialmente entre sí, que son forzados externamente a aproximarse. Este sistema es analizado utilizando un modelo basado en QCD (*String-Flip*), donde se incorpora un potencial de muchos cuerpos capaz de confinar quarks en singletes de color. El sistema es hecho evolucionar tridimensionalmente incluyendo las correlaciones cuánticas entre las partículas. En condiciones donde la distancia entre partículas puede ser potencialmente grande, el sistema describe propiedades de hadrones aislados. De manera opuesta, donde la distancia entre quarks es forzada a ser muy corta, el sistema describe un gas de partículas fermiónicas libres. Consideramos a todos los quarks (antiquarks) con una misma masa y con el mismo número cuántico de color (anticolor).

Las obseables consideradas (energía, radio promedio al cuadrado y funciones de correlación), resultan ser sensibles a la presencia de tetraquarks en el sistema. Dentro de nuestras observaciones, el estado de tetraquark no es estable. Esperamos que con los ingredientes incluidos en el modelo, las propiedades relevantes de la física de la interacción fuerte hayan sido consideradas, dando solidez a nuestros resultados.

Índice general

Agradecimientos	v
Prefacio	vii
1. Introducción	1
1.1. Las interacciones fundamentales y el Modelo Estándar	1
1.2. Interacción Fuerte	4
1.2.1. Evidencia de carga de color	6
1.2.2. Evidencia de gluones	6
1.3. Estados multiquark	7
1.4. Trabajos similares y candidatos	10
1.5. Presentación y objetivo del trabajo	12
2. El problema de 2 y 3 cuerpos: mesones y bariones	13
2.1. Oscilador armónico cuántico de 1 cuerpo	13
2.2. Problema de 2 cuerpos: Mesones	14
2.3. Problema de 3 cuerpos: Bariones	17
2.4. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de 2 cuerpos: $\langle r_M^2 \rangle$	19
2.5. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de 3 cuerpos: $\langle r_B^2 \rangle$	20
3. El modelo String-Flip	23
3.1. Función de onda variacional	23
3.2. Potencial de muchos cuerpos	25
3.2.1. Potencial de mesón	26
3.2.2. Potencial Tetraquark	26
3.3. Energía variacional	28
3.4. Cálculo Monte Carlo	30
4. Resultados	35
4.1. Parámetro variacional óptimo	35
4.2. Evolución de la energía	38
4.3. Distribución radial	42

4.4. Funciones de correlación	45
4.5. Identificación de la formación hadrónica	50
5. Conclusiones	53
A. Término Cinético $\langle W \rangle_\lambda$	55
B. Algoritmo de Metrópolis	59
C. Conversión de unidades	61
Referencias	63

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presentan los elementos de la teoría del Modelo Estándar de las Partículas Elementales, poniendo énfasis en la interacción fuerte, y se plantea la motivación y el objetivo de este trabajo.

1.1. Las interacciones fundamentales y el Modelo Estándar

El **Modelo Estándar de partículas elementales** [1] intenta explicar los fenómenos asociados a la física de partículas en términos de las propiedades e interacciones de un número pequeño de partículas de 3 diferentes tipos: dos familias de fermiones (partículas de espín $\frac{1}{2}$), llamados *leptones* y *quarks*, y una familia de bosones (partículas de espín 1), llamados *Bosones de Norma*. Esta última familia actúa como “portadores” de fuerza en la teoría. Adicionalmente, el modelo postula una partícula de espín 0, llamado *Bosón de Higgs* para explicar el origen de la masa en el modelo, pues todas las partículas en él se predicen con masa cero. Estas partículas son consideradas elementales en el sentido que son tratadas como partículas puntuales sin estructura interna ni estados excitados.

El ejemplo más común de un leptón es el *electrón*, que se encuentra ligado a los átomos debido a la *interacción electromagnética*, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. Otro leptón conocido es el *neutrino del electrón*, una partícula ligera y neutral observada en productos del decaimiento β . La fuerza responsable del decaimiento β es llamada *interacción débil*.

Otra clase de partículas, llamadas *hadrones*, es observada en la naturaleza. Ejemplos comunes de hadrones son el *protón* y el *neutrón*, constituyentes del núcleo atómico. Los hadrones no son partículas elementales, sino que se encuentran constituidas por quarks ligados entre sí, debido a una tercera fuerza, la *interacción fuerte*. Ésta es inusual, debido al hecho de que los quarks no son observados

directamente, sino sus estados ligados, los hadrones. Aún así, existe evidencia que avala su existencia.

Además de las interacciones fuerte, débil y electromagnética, existe otro tipo de interacción en la naturaleza, la *interacción gravitacional*. Sin embargo, la interacción gravitacional entre partículas elementales es tan pequeña, que puede ser descartada en el modelo.

El Modelo Estándar explica el origen de estas fuerzas:

Tomemos por ejemplo la interacción electromagnética. En física clásica la interacción entre dos partículas cargadas se transmite por medio de ondas electromagnéticas, las cuales se emiten y absorben de manera continua. Mientras que a largas distancias, ésta es una descripción adecuada, a muy cortas distancias la naturaleza cuántica de la interacción debe tomarse en cuenta. Cuánticamente, la interacción es transmitida por el intercambio de *fotones*, siendo éste el bosón de norma para la interacción electromagnética. La naturaleza de largo alcance de la interacción tiene que ver con el hecho de que los fotones tienen una masa cero. De la misma forma, las interacciones débil y fuerte están asociadas con el intercambio de bosones. Para la interacción débil, éstos son llamados bosones W y Z , con una masa aproximadamente 90 veces la del protón. Debido a que éstas partículas tienen esta masa, la interacción débil tiene un alcance limitado ($10^{-18}m$).

Las partículas equivalentes para la interacción fuerte son llamadas gluones. Existen ocho tipos de ellos, todos los cuales tienen masa cero y son eléctricamente neutros, como el fotón. Entonces, por analogía, la interacción fuerte entre quarks debería ser de largo alcance, sin embargo, se observa que los quarks se encuentran confinados en los hadrones, y la interacción fuerte residual entre los estados ligados de los quarks (hadrones), es de corto alcance.

Una de las características de los quarks es que vienen en seis *sabores* o tipos distintos (ver Cuadro 1.2). Además, cada uno de éstos sabores de quarks tiene asignada una de tres *cargas de color*: **blue (b)**, **green (g)** o **red (r)** (azul, verde y rojo, respectivamente). Así, un quark u puede ser blue (u_b), green (u_g), o red (u_r), y lo mismo para los sabores restantes. Para referirse a un antiquark se usará la notación (\bar{q}). El color marca una diferencia importante entre la interacción electromagnética y la fuerte, pues los gluones tienen asociada una carga de color. Ésto se refleja en los fenómenos asociados a cada tipo de interacción [2]¹.

Los números cuánticos de los leptones y quarks se encuentran resumidos en los cuadros 1.1 y 1.2 respectivamente. Tanto los quarks como los leptones están apareados en 3 dobletes, donde los miembros de cada doblete participan en los procesos de interacción débil juntos. Dado esto, existen 3 generaciones de quarks y leptones, donde la única propiedad que distingue a éstas generaciones es la masa.

Cabe mencionar que el término *color* no tiene nada que ver con su significado

¹Como los leptones no poseen color, éstos no participan en la interacción fuerte

	Q	L_e	L_τ	L_μ	Masa
e	-1	+1	0	0	$\cong 0.511$ MeV
ν_e	0	+1	0	0	< 3 eV
μ	-1	0	+1	0	$\cong 105.66$ MeV
ν_μ	0	0	+1	0	< 0.19 MeV
τ	-1	0	0	+1	$\cong 1777.0$ MeV
ν_τ	0	0	0	+1	< 18.2 MeV

Cuadro 1.1: Números cuánticos de los leptones: Q (carga eléctrica), L_e (número leptónico del electrón), L_μ (número leptónico de muón), L_τ (número leptónico del tauón). Éstos número cuántico cambian de signo para anti-leptones

Sabor	Q	I_3	S	C	B	T	Masa
u (up)	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1.5 ~ 5 MeV
d (down)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	3 ~ 9 MeV
s (strange)	$-\frac{1}{3}$	0	-1	0	0	0	60 ~ 170 MeV
c (charm)	$+\frac{2}{3}$	0	0	+1	0	0	1.47 ~ 1.83 GeV
b (bottom)	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	-1	0	4.6 ~ 5.1 GeV
t (top)	$+\frac{2}{3}$	0	0	0	0	+1	$174.3 \pm 3.2 \pm 4.0$ GeV

Cuadro 1.2: Números cuánticos de los quarks: Q (carga eléctrica), I_3 (tercer componente de isospín), S (extrañeza), C (encanto), B (bottom), T (top), y la masa respectiva

convencional, sólo es una forma de llamar a un número cuántico adicional que los quarks y gluones poseen. Usando esta terminología, la teoría dice que *todas las partículas en la naturaleza son incoloras*. Esto significa que, ya sea que los tres colores (anticolores) se encuentran en la misma cantidad, o que la cantidad total de cada color es cero (ej. *red-antired*), lo que es llamado *confinamiento de color*. Esta regla explica, por ejemplo, el por qué no hay en la naturaleza quarks individuales, así como no puede haber una partícula constituida por dos quarks de colores distintos ($q_r q_g$) o cuatro quarks de la forma ($q_b q_g q_r q_b$) solamente. Las combinaciones incoloras típicas son quark-antiquark con la misma carga de color (anticolor) ($q_r \bar{q}_r, q_g \bar{q}_g, q_b \bar{q}_b$) llamados mesones, y combinaciones de 3 quarks (antiquarks) con distinta carga de color $q_b q_g q_r$ ($\bar{q}_b \bar{q}_g \bar{q}_r$), llamados bariones.

De forma general, las únicas combinaciones $q^m \bar{q}^n$ permitidas por el confinamiento de color son de la forma:

$$(3q)^p (q\bar{q})^n; \quad (p, n \geq 0)$$

Combinaciones inusuales como $qq\bar{q}\bar{q}$ y $qqq\bar{q}$ pueden ser mesones y bariones denominados *exóticos*. Existen experimentos que buscan mostrar evidencia convincente de su existencia [13].

En este trabajo estamos interesados en un estado de la forma $(q\bar{q})^2$.

En la siguiente sección veremos algunos detalles con respecto a la interacción fuerte, que serán las bases para la realización del trabajo.

1.2. Interacción Fuerte

Es más común hablar de la interacción fuerte en la física nuclear, donde las interacciones de protones y neutrones son estudiadas a energías relativamente bajas (decenas de MeV). Aún así, en 1947 se descubrieron nuevos tipos de hadrones en rayos cósmicos, que no estaban presentes en la materia ordinaria. Para crear a estas partículas se requería de energías altas, y con el tiempo, al tener una tecnología más avanzada en aceleradores de partículas, y por lo tanto mayor energía en las colisiones, se fueron descubriendo un número más grande de hadrones. Para finales de la década de los 60's se descubrieron tantos hadrones que fue necesario un esquema teórico para interpretar esta multitud de estados; el resultado fue el *Modelo de Quarks*. En 1964, Gell-Mann e independientemente Zweig, propusieron que todos los hadrones observados pueden ser interpretados como estados ligados de sólo tres partículas fundamentales de espín $\frac{1}{2}$: los quarks [1].

Como se había mencionado anteriormente, las fuerzas entre los quarks tienen que ser de largo alcance, puesto que los gluones no tienen masa. Esto no implica que las fuerzas entre los hadrones tengan que ser de largo alcance, pues no tienen color; las fuerzas entre estos son fuerzas residuales que experimentan sus quarks constituyentes y que se cancelan cuando los hadrones se alejan.

La cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) es la teoría que describe a la interacción fuerte en el Modelo Estándar, o sea, la dinámica de los quarks y de los gluones. QCD es una teoría de norma no-abeliana con simetría **SU(3)** de color, lo que implica una independencia del sabor en la interacción. Aunque QCD no ha sido probada con la misma precisión que la teoría de la interacción electromagnética (QED por sus siglas en inglés), aún no ha estado en contradicción con ningún experimento [3].

QCD es parecida a QED, en el sentido en que los vértices fundamentales de las interacciones son parecidos (tomando el color el papel de la carga eléctrica), como se muestra en la figura 1.1. Sin embargo, como los gluones también poseen una carga de color la teoría permite otro tipo de vértices fundamentales, como son la interacción entre gluones solamente.

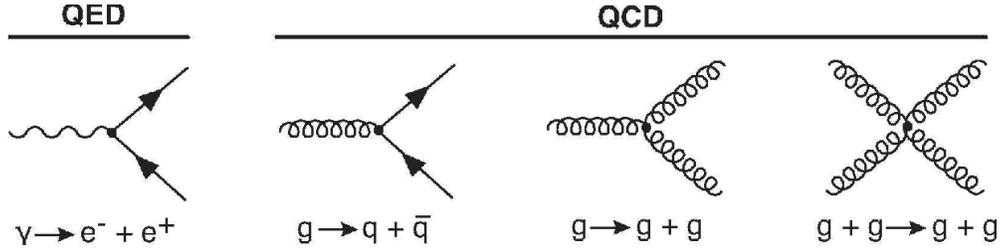


Figura 1.1: Vértices fundamental para QED y QCD. El color de un quark cambia en un vértice quark gluón, puesto que en el vértice se tiene carga de color neutra.

La representación fundamentales de la simetría SU(3) es un triplete. Las tres cargas de color de los quarks r , g y b , forman la representación fundamental de la simetría de grupo SU(3). En esta representación los generadores son matrices de 3×3 , donde una de las representaciones está dada por las matrices de Gell-Mann λ_i ; $i = 1, \dots, 8$, que satisfacen la siguiente relación:

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda_c}{2},$$

donde f^{abc} son constantes de estructura del grupo.

Aunque los sabores de quarks llevan una masa distinta, éstas son indistintas en la teoría. Si consideramos la transformación de norma local SU(3) de quarks $q_i \rightarrow e^{-ig_s T^\alpha \theta_\alpha(x)} q_i$, donde g_s es una constante, T^α son los generadores del grupo con $\alpha = 1, \dots, 8$, el lagrangiano más simple invariante bajo esta transformación está dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \sum \bar{q}_j (i\gamma_\mu D_{jk}^\mu - m) q_k \quad (1.1)$$

donde $D_{jk}^\mu = \delta_{jk} \partial^\mu + ig_s (T_\alpha)_{jk} A_\alpha^\mu$, siendo A_α^μ un campo de gluones que transforma como:

$$A_\mu^\alpha \rightarrow A_\mu^\alpha + \partial_\mu \theta^\alpha - g_s f^{abc} A_\mu^\alpha \theta^c$$

con

$$G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

En el cuadro 1.3 se muestra una descripción de cada uno de los términos del lagrangiano de QCD.

Término	Descripción
$\bar{q}\gamma_\mu\partial_\mu q$	Término cinético del quark
$m\bar{q}q$	Término de masa
$-g_s\bar{q}_j\gamma_\mu(T_\alpha)_{jk}A_\alpha^\mu q_k$	Término de interacción quark-gluón
$G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$	Término cinético de los gluones
g_s	Constante de acoplamiento quark-gluón

Cuadro 1.3: Descripción de los términos del lagrangiano de QCD

Existen múltiples evidencias de las propiedades descritas por este lagrangiano. En las siguientes secciones se presentan algunas de las evidencias del color y de los gluones.

1.2.1. Evidencia de carga de color

Una evidencia directa de que el color viene en tres tipos se obtiene experimentalmente de la comparación de las secciones eficaces de la colisión electrón positrón (e^+e^-) cuando se producen hadrones en el estado final respecto al caso cuando se producen muones [1].

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (1.2)$$

Esta razón se predice que sea igual a $\sum_q e_q^2$ donde e_q es la carga eléctrica de los quarks producidos en la colisión e^+e^- . Si se excede el umbral de energía para la producción del quark s , de tal forma que sólo los quarks u , d y s contribuyen a la razón R , se tiene que:

$$R = e_u^2 + e_d^2 + e_s^2 = \frac{2}{3}(\text{sin color}); \quad R = 2(\text{con tres colores})$$

Esto ocurre similarmente si la energía de la colisión es suficiente para producir un quark c o b , de tal forma que éstos se incluyan en el cálculo. Los datos experimentales concuerdan con el valor de R para tres colores en todos los casos [3].

1.2.2. Evidencia de gluones

Una de las evidencias de la existencia de gluones se puede observar en la dispersión $e^-p \rightarrow e^-p$, donde se estudia la estructura interna del protón, además de la dispersión $e^-n \rightarrow e^-n$ en una colisión de un electrón con un blanco fijo de deuterio [2]. Para esto, la corriente hadrónica se parametriza usando las funciones de

estructura $F_1(x)$ y $F_2(x)$, que están relacionadas con propiedades electromagnéticas del protón. Estas funciones satisfacen las siguientes relaciones, para protón (ep) y neutrón (en) respectivamente:

$$\frac{1}{x}F_2^{ep}(x) = \frac{4}{9}u^p(x) + \frac{1}{9}d^p(x) \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{x}F_2^{en}(x) = \frac{4}{9}d^p(x) + \frac{1}{9}u^p(x) \quad (1.4)$$

donde $u^p(x)$ y $d^p(x)$ son las funciones de probabilidad de que el quark correspondiente se lleve una fracción del momento (x). Observamos que se desprecia la contribución de quarks s puesto que llevan una fracción muy pequeña del momento del nucleón. Al integrar los datos experimentales en $F_2^{ep,en}$ se tiene la siguiente información:

$$\int_0^1 F_2^{ep}(x)dx = \frac{4}{9}\epsilon_u + \frac{1}{9}\epsilon_d = 0.18 \quad (1.5)$$

$$\int_0^1 F_2^{en}(x)dx = \frac{1}{9}\epsilon_u + \frac{4}{9}\epsilon_d = 0.12 \quad (1.6)$$

donde ϵ_q es la fracción de momento llevada por el quark q .

$$\epsilon_u \equiv \int_0^1 dx x(u + \bar{u}), \quad \epsilon_d \equiv \int_0^1 dx x(d + \bar{d})$$

Resolviendo para ϵ_u y ϵ_d y tomando que $\epsilon_g \sim 1 - \epsilon_u - \epsilon_d$, siendo ϵ_g un elemento ajeno a los quarks u y d se tiene que:

$$\epsilon_u = 0.36; \quad \epsilon_d = 0.18; \quad \epsilon_g = 0.46$$

Entonces, ϵ_g se lleva cerca de 50 % del momento del protón, lo cual se identifica como los gluones (g).

En la sección 1 se habló un poco sobre la posibilidad de tener más de tres quarks en un hadrón, teniendo mesones y bariones exóticos. En la siguiente sección se profundizará sobre este tipo de estados, pues un estado de este tipo es el tema principal de este trabajo.

1.3. Estados multiquark

Los mesones con números cuánticos exóticos pueden ser de distintos tipos: mesones híbridos ($q\bar{q}g$), estados multiquark ($q\bar{q}q\bar{q}\dots$) o estados multimesón (M_1, M_2, \dots).

El tetraquark fue inicialmente propuesto por Jaffe [6] como un estado ligado formado por dos quarks y dos antiquarks. Los más recientes candidatos a tetraquark son $Z_b^+(10610)$ y $Z_b^+(10650)$. En los últimos años, el potencial estático de un tetraquark ha sido estudiado en Lattice QCD [7], donde se concluye que cuando un sistema quark-quark está lo suficientemente separado de un sistema antiquark-antiquark, el potencial de un tetraquark es consistente con el potencial coulombiano de intercambio de un gluón más un potencial confinante de cuatro cuerpos, que sugiere la formación de un doble tubo-Y de flujo gluónico (figura 1.2). Cuando uno de estos quarks se aproxima a un antiquark, el potencial mínimo puede cambiar a la suma de dos potenciales quark-antiquark, que indica un estado de dos mesones. Ésto es consistente con un potencial Flip-Flop [17], donde se minimiza la longitud de tubo gluónico del sistema para conectar quarks y antiquarks.

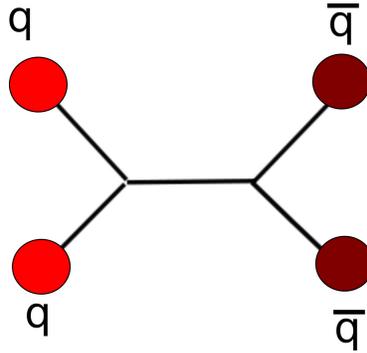


Figura 1.2: Modelo de tubos de flujo (“string model”) para el potencial de tetraquark

Para justificar el uso de este tipo de potencial podemos fijarnos en los fundamentos básicos de la espectroscopía hadrónica, que viene de dos propiedades de QCD:

- Sólo singletes de color pueden existir como partículas observables (confinamiento)
- Sólo algunas combinaciones de estados de color producen un potencial atractivo, produciendo un estado ligado

En particular, la combinación de un triplete de color y un triplete de anticolor, $3_C \otimes \bar{3}_C$, producen un octete y un singlete, $1_C + \bar{8}_C$, caracterizado por un potencial atractivo y repulsivo, respectivamente [9]. Entonces, un quark y un antiquark pueden producir un estado ligado $q\bar{q}'$ en un estado singlete, que puede existir como

una partícula observable; un mesón en este caso. Similarmente, la combinación $3_C \otimes 3_C \otimes 3_C = 10_C \oplus 8_C \oplus 8_C \oplus 1_C$, donde otra vez el singlete tiene un potencial atractivo y los estados qqq pueden producirse; los bariones.

Otro tipo de estados ligados son permitidos por QCD, además de los mesones y bariones. En particular, la combinación de dos tripletes de color, $3_C \otimes 3_C$, produce un sextete con potencial repulsivo, pero también un triplete de color con potencial atractivo. Cuando un estado es obtenido con dos quarks, es llamado *diquark* (qq'). El triplete de color obtenido de esta combinación puede ser combinado nuevamente con un triplete de anti-color, y de acuerdo a lo dicho anteriormente para mesones, se obtiene un singlete de color con potencial atractivo.

De ésto, la representación irreducible del grupo SU(3) puede ser construida para un sistema $qq\bar{q}\bar{q}$ [8]:

$$\begin{aligned} (\bar{3} + 6) \otimes (3 + \bar{6}) &= \bar{3} \otimes 3 + \bar{3} \otimes \bar{6} + 6 \otimes 3 + 6 \otimes \bar{6} \\ &= 1 + 8 + 8 + 10 + 8 + \bar{10} + 1 + 8 + 27 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Un diquark y un anti-diquark pueden producir un singlete de color en un estado ligado; esto es llamado *tetraquark*. En particular, un tetraquark que está formado por quarks pesados podría ser tratado en una aproximación no relativista de QCD.

La existencia de hadrones multiquark más allá de mesones ordinarios y bariones ha sido una pregunta desde el comienzo del modelo de quarks. La independencia de sabor es una propiedad clave de QCD, al menos en el límite de quarks pesados. Los quarks son acoplados al campo gluónico por su color, de la misma forma que la interacción coulombiana actúa en antiprotones, muones y electrones cuando moléculas y átomos exóticos son estudiados. El mecanismo por el cual una molécula de hidrógeno se encuentra más fuertemente ligada que una de positronio también sería válido en física hadrónica con independencia de sabor, donde entonces es favorecido el estado ligado ($QQ\bar{q}\bar{q}$) debajo del umbral de dos mesones de sabor pesado, cuando la razón de masas de quarks Q/q se incrementa [11, 10].

Este tipo de modelos, donde se introduce un potencial efectivo entre partículas, generalmente es utilizado para trabajar el régimen no perturbativo de QCD, donde no se trabaja con el lagrangiano de QCD, por lo que es necesario tratar de incorporar las características de esta teoría en su estudio. En este trabajo se utilizará un modelo de este estilo. Es importante mencionar que si bien el potencial efectivo utilizado no distingue el sabor de partículas (y por lo tanto no distingue la masa), la descripción de los quarks sí explota este hecho.

1.4. Trabajos similares y candidatos

Existen abundantes análisis en la literatura [12] que involucran la mezcla de estados de meson, glueballs e híbridos utilizando una variedad de métodos incluyendo teoría de perturbaciones, Integrales Feynman-Schwinger relativistas, Lattice QCD y aproximaciones quirales efectivas.

En este trabajo se utilizará el llamado modelo *String-flip* o *flip-flop*, donde se introduce un potencial efectivo para introducir interacción entre partículas. En este modelo, la interacción utiliza tubos de flujo gluónico o *flux-tubes* para ligar a los quarks unos con otros, donde los tubos son recombinados para describir distintos tipos de sistemas, como es en este caso el de mesones o tetraquarks. Mientras que para mesones, el sistema es descrito por un sólo tubo de flujo entre un quark y un antiquark, para un estado de cuatro quarks tenemos que considerar una forma distinta para acomodar estos tubos de flujo.

Algunos trabajos [13, 14] realizan un estudio detallado del potencial de 4 quarks en SU(3) lattice QCD, donde concluyen que para un sistema de dos quarks q y dos antiquarks \bar{q} , cuando qq y $\bar{q}\bar{q}$ se encuentran lo suficientemente alejados, el potencial de 4 quarks puede ser expresado como la suma de un término de Coulomb de tipo *one-gluon-exchange* (OGE) y un término lineal en forma de Y, como aquél en la figura 1.2. Por otro lado, cuando un quark y un antiquark se encuentran lo suficientemente cerca, el sistema es descrito como un estado de dos mesones, donde el potencial *flip-flop* actúa al recombinar los tubos de flujo de una configuración a otra.

Trabajos anteriores que utilizan este modelo fueron revisados para explorar que tipo de consideraciones utilizan para estudiar el estado de 4 quarks. Aunque a veces las diferencias entre estos trabajos son grandes, podemos resumir sus consideraciones en: qué tipo de función de onda utilizan para describir al sistema, qué tipo de potencial *flip-flop* utilizan, y qué grados de libertad tienen.

En un trabajo realizado por Vijande et. ál. [10] se utilizan potenciales lineales para describir a los mesones y tetraquarks, siendo:

$$V_f = \lambda \min(r_{13} + r_{24}, r_{14} + r_{23}) \text{ potencial de mesones}$$

$$V_b = \lambda \min_{lk} (r_{1k} + r_{2k} + r_{kl} + r_{3l} + r_{4l}) \text{ potencial de tetraquark}$$

donde λ es la tensión del tubo de flujo utilizado. El potencial mínimo entre ambas configuraciones es el que describe al sistema total.

Las funciones de onda que se utilizan para modelar al sistema son simétricas ante intercambio de quarks del mismo tipo, donde también se considera una constante

de interacción diferente para cada tipo de sistema. El término de energía cinética se calcula mediante el teorema del virial. El estudio está realizado en 2 dimensiones, con todos los quarks y antiquarks en un mismo plano. Con estas consideraciones encuentran que la energía del estado base de un sistema de 4 quarks, se encuentra por debajo del umbral de energía de dos mesones, y por lo tanto sería estable.

En el trabajo realizado por P. Bicudo y M. Cardoso [15] se utilizan potenciales lineales de largo alcance para confinar a las partículas en clusters, además de un término de corto alcance proporcional a $1/r$, siendo r la distancia entre quarks en un cluster. Para estudiar el sistema, en dos dimensiones, se reduce el potencial de 4 quarks con dos variables de Jacobi. Se estudiaron resonancias por encima del umbral de dos mesones, incluyendo sus funciones de onda, y sus anchos de decaimiento. Se concluye que es más fácil formar resonancias con un momento angular orbital alto.

Otro trabajo realizado por Chengrong et. ál. [16] utiliza un potencial cuadrático para confinar a las partículas, de tal forma que el potencial de tetraquark tiene la siguiente forma

$$V^C = k [(r_1 - y_1)^2 + (r_2 - y_1)^2 + (r_3 - y_2)^2 + (r_4 - y_2)^2 + k_d(y_1 - y_2)^2]$$

donde k es la tensión de los tubos de flujos y k_d es la tensión del tubo de flujo adicional en la configuración de tetraquark. Con una transformación a coordenadas canónicas, se calcula la energía cinética del sistema como la suma de la energía cinética de cada uno de los quarks. En este trabajo se estudia la forma de candidatos a estado multiquark $f_0(600)$, $f_0(980)$, $Y(4008)$ y $Y(4260)$. Sin embargo, no se utiliza una mezcla con estados de mesón.

En el trabajo a realizarse en esta tesis, se trabajará con dos quarks y dos antiquarks, donde utilizaremos un potencial cuadrático para simular los tubos de flujo gluónico. A diferencia de los trabajos antes mencionados, se utilizarán 3 dimensiones para describir al sistema, y se introducirán correlaciones cuánticas entre las partículas, de tal forma que el principio de exclusión de Pauli esté presente y que la función de onda sea antisimétrica ante intercambio de quarks idénticos.

En estos años, varios candidatos a hadrones multiquark han sido experimentalmente observados: $\Theta^+(1540)$, $\Xi^{--}(1862)$, y $\Theta_C(3099)$, son candidatos a ser estados pentaquark (5Q); $X(3872)$ y $D_s(2317)$ son candidatos a tetraquark [13].

A continuación presentamos el objetivo del trabajo así como la forma en que se encuentra distribuida la información en los diversos capítulos.

1.5. Presentación y objetivo del trabajo

En este trabajo se plantea estudiar, mediante una simulación Monte Carlo, cómo evoluciona un sistema de 2 quarks y 2 antiquarks (del mismo sabor), donde es posible formar dos estados de mesones o un estado diquark-antidiquark (tetraquark), conforme la distancia entre los quarks se hace cada vez más pequeña. Esto ayudará a entender cómo está formada la estructura hadrónica de un tetraquark a partir de dos mesones, tratando de identificar observables que sean sensibles a la formación de este estado.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 estudiamos a detalle los problemas relativos a un sistema de dos y tres cuerpos, interactuando a través de un potencial armónico, describiendo a un mesón y a un barión, respectivamente, en un caso aislado. También realizamos el cálculo del valor promedio del radio al cuadrado, con respecto al centro de masa para ambos sistemas. Ésto nos servirá como punto de referencia en nuestra simulación.

En el capítulo 3 hacemos una descripción del modelo que utilizaremos para simular la evolución del sistema de quarks ligados por gluones (Modelo *String Flip*), en el cual consideramos una aproximación variacional. Primero empezamos a describir la función de onda variacional del sistema y el tipo de potencial armónico utilizado para el caso mesónico y de tetraquark. A partir de esto, mostraremos cómo se puede calcular la energía variacional. En el capítulo también se explica un poco la forma de implementar la simulación Monte Carlo que se utilizará.

En el capítulo 4 presentamos los resultados obtenidos en la simulación para diferentes casos. Sistemas independientes de mesones y tetraquarks, y el sistema de la mezcla entre los estados. Determinamos el parámetro variacional óptimo para distintas condiciones, minimizando el valor de la energía variacional. Obtenemos las distribuciones radiales de los estados y las funciones de correlación entre quarks y entre mesones.

En el capítulo 5 exponemos las conclusiones derivadas de estos resultados y sus perspectivas.

Incluimos 3 apéndices. En el apéndice A se muestran a detalle los cálculos para obtener el término cinético para los sistemas mesónico y de tetraquark.

Dado que la simulación Monte Carlo está basada en el *Algoritmo de Metrópolis*, en el apéndice B, explicamos a más detalle este algoritmo.

En el apéndice C establecemos los factores de conversión de unidades para el caso mesónico, basado en valores experimentales de las propiedades de los mesones.

Capítulo 2

El problema de 2 y 3 cuerpos: mesones y bariones

Estudiaremos primero el límite de un sistema de partículas (quarks) a muy bajas densidades, donde la distancia entre partículas es lo suficientemente grande para que el sistema se comporte como un arreglo de hadrones aislados. Por lo tanto, por simplicidad, consideramos a un mesón o a un barión como un sistema no relativista de quarks interactuando por medio de un potencial armónico, el cual provee el efecto confinante que necesitamos.

En este capítulo calculamos las eigen-funciones y eigen-energías correspondientes a dicho potencial, así como el valor promedio del radio al cuadrado de ambos sistemas, con respecto al centro de masa de dicho sistema. Ésto se calcula con el fin de tener valores de referencia cuando estudiemos el sistema de muchos cuerpos.

2.1. Oscilador armónico cuántico de 1 cuerpo

El potencial de un oscilador armónico unidimensional está dado por:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (2.1)$$

donde k es la constante del resorte y la frecuencia angular ω está dada por la ecuación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2)$$

A partir de esto, podemos construir la ecuación de Schrödinger estacionaria para el oscilador armónico unidimensional.

$$\hat{H}\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Psi(x) = E\Psi(x) \quad (2.3)$$

La solución a esta ecuación diferencial es bien conocida [5]:

$$\Psi_n = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \quad (2.4)$$

donde $\xi^2 = x^2 \frac{m\omega}{\hbar}$, $H_n(\xi)$ son polinomios de Hermite de orden n , y C_n es una constante de normalización dada por:

$$C_n = (\sqrt{\pi}\alpha_0 2^n n!)^{-\frac{1}{2}}; \quad \alpha_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \quad (2.5)$$

Las eigenenergías están dadas por:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.6)$$

En el caso de 3 dimensiones, se puede hacer una separación de variables (una por cada coordenada), de tal forma que se tendrían que resolver tres osciladores armónicos desacoplados, por lo que la solución en 3 dimensiones para las eigenfunciones es un producto de tres funciones independientes (una por cada dimensión espacial) de la forma (2.4) y las eigenenergías serán tres sumandos similares a (2.6).

2.2. Problema de 2 cuerpos: Mesones

Consideramos a un mesón como un sistema formado por dos cuerpos (quarks) de masas m_1 y m_2 distintas, respectivamente, interactuando por un potencial armónico. Entonces, el hamiltoniano de este sistema estará entonces descrito por:

$$H_2 = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}k |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 \quad (2.7)$$

siendo \vec{P}_1 y \vec{P}_2 las magnitudes de los momentos de los cuerpos 1 y 2 respectivamente, y k la constante del resorte.

Para resolver la ecuación de Schrödinger pasamos a un sistema de coordenadas de centro de masa y relativo

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.8)$$

donde $M = m_1 + m_2$.

A partir de esto se puede tener a las coordenadas originales en términos de las nuevas:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}; \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \quad (2.9)$$

Entonces, los momentos $\vec{P}_1 = m\dot{\vec{r}}_1$ y $\vec{P}_2 = m\dot{\vec{r}}_2$ se pueden escribir en términos del momento en el sistema de coordenadas del centro de masa y el momento relativo del sistema:

$$\vec{P}_R = M\dot{\vec{R}}; \quad \vec{P}_r = \mu\dot{\vec{r}} \quad (2.10)$$

donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida.

Sustituyendo las nuevas coordenadas en \vec{P}_1 y \vec{P}_2 tenemos que:

$$\vec{P}_1 = m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} \right) \quad (2.11)$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}} \right) \quad (2.12)$$

De aquí, las magnitudes de los momentos pueden ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \frac{P_1^2}{2m_1} &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{R}^2 + 2\frac{m_2}{M}\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_2^2}{M}\dot{r}^2 \right) \\ \frac{P_2^2}{2m_2} &= \frac{m_2}{2} \left(\dot{R}^2 - 2\frac{m_1}{M}\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{m_1^2}{M}\dot{r}^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} &= \frac{P_R^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Con esto podemos entonces reescribir el hamiltoniano como:

$$H_2 = \frac{P_R^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kr^2$$

Tomando en cuenta que en el sistema del centro de masa el momento es cero ($\vec{P}_R = 0$) el hamiltoniano se reduce a:

$$H_2 = \frac{P_r^2}{2\mu} + \frac{1}{2}kr^2 \quad (2.14)$$

Entonces, de acuerdo a (2.4) las eigenfunciones correspondientes serían:

$$\Psi_n = C_n e^{-\frac{\mu\omega}{\hbar}r^2} H_{n_x}(x)H_{n_y}(y)H_{n_z}(z) \quad (2.15)$$

donde en este caso $C_n = (\sqrt{\pi}\alpha_0 2^n n!)^{-\frac{1}{2}}$; $\alpha_0^2 = \frac{\hbar}{\mu\omega}$

Por otra parte, las eigenenergías se calculan de acuerdo a (2.6):

$$E_n = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (2.16)$$

siendo n_x, n_y, n_z enteros positivos, y $H_{n_x}(x) H_{n_y}(y) H_{n_z}(z)$ los polinomios de Hermite de orden n correspondiente.

En este caso, la frecuencia angular está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (2.17)$$

Podemos identificar en las eigenfunciones descritas por (2.15) la siguiente forma en el exponente de la exponencial: $-\frac{1}{2}\lambda_2 k r^2 = -\lambda_2 V$, donde:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\omega\hbar}; \quad V = \frac{1}{2} k r^2 \quad (2.18)$$

Este valor será de gran utilidad cuando introduzcamos la función de onda del sistema de varios cuerpos.

Por otra parte, si consideramos masas iguales ($m_1 = m_2 = m$) para los quarks del mesón, en el estado base ($n_x = n_y = n_z = 0$) el valor de la energía es:

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega = \frac{3}{\sqrt{2}}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.19)$$

La energía que está dada por (2.19) se encuentra en función de la masa y de la constante de interacción k entre los quarks. Ésta correspondería a la energía que se tiene por mesón, pero a fin de tener una descripción completa sólo en términos de los quarks, usaremos la energía por partícula E_2 , siendo la energía total dividida entre el número de quarks (en este caso 2).

Entonces, en resumen, tomando el sistema en el cual $\hbar = k = m = 1$ los valores de λ_2 y E_2 son:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.20)$$

$$E_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (2.21)$$

2.3. Problema de 3 cuerpos: Bariones

Describimos a un barión como un sistema compuesto de 3 cuerpos de masas iguales m , interactuando a través de un potencial armónico. El hamiltoniano de este sistema es entonces:

$$H_3 = T_3 + V_3 \quad (2.22)$$

donde

$$T_3 = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{P_3^2}{2m} \quad (2.23)$$

$$V_3 = \frac{1}{2}k [|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] \quad (2.24)$$

siendo P_i^2 $i = 1, 2, 3$ la magnitud del momento de cada uno de los cuerpos en el sistema, y k la constante del resorte, que se considera idéntica entre todos los pares.

Para resolver la ecuación de Schrödinger en este caso, usamos coordenadas centro de masa y dos relativas:

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \quad (2.25)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad (2.26)$$

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.27)$$

Entonces, las transformaciones para el cambio de sistema de referencia de las coordenadas originales son:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} \quad (2.28)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} \quad (2.29)$$

$$\vec{r}_3 = \vec{R} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{\lambda} \quad (2.30)$$

Entonces,

$$\dot{r}_1^2 = \dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{6}\dot{\lambda}^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\dot{R} \cdot \dot{\lambda} + \sqrt{2}\dot{R} \cdot \dot{\rho} + \frac{2}{\sqrt{12}}\dot{\rho} \cdot \dot{\lambda}$$

$$\begin{aligned}\dot{r}_2^2 &= \dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{6}\dot{\lambda}^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\dot{R} \cdot \dot{\lambda} - \sqrt{2}\dot{R} \cdot \dot{\rho} - \frac{2}{\sqrt{12}}\dot{\rho} \cdot \dot{\lambda} \\ \dot{r}_3^2 &= \dot{R}^2 + \frac{4}{6}\dot{\lambda}^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\dot{R} \cdot \dot{\lambda}\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de coordenadas podemos reescribir el término cinético como:

$$T_3 = \frac{m}{2} \left(3\dot{R}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{\lambda}^2 \right)$$

$$T_3 = \frac{P_{CM}^2}{2M} + \frac{P_\lambda^2}{2m_\lambda} + \frac{P_\rho^2}{2m_\rho}$$

con: $M = 3m$, $m_\rho = m_\lambda = m$.

Por otro lado, tenemos que con el cambio de coordenadas el término de potencial resulta:

$$V_3 = \frac{3}{2}k (\lambda^2 + \rho^2)$$

Entonces, tomando en cuenta que en el sistema centro de masa $\vec{P}_R = 0$ podemos reescribir el hamiltoniano como:

$$H_3 = \left(\frac{P_\rho^2}{2m_\rho} + \frac{3}{2}k\rho^2 \right) + \left(\frac{P_\lambda^2}{2m_\lambda} + \frac{3}{2}k\lambda^2 \right) \quad (2.31)$$

lo cual es análogo a tener dos osciladores armónicos desacoplados. La mecánica cuántica nos dice que la solución a este problema estacionario es el producto de las soluciones individuales (separación de variables), las cuales son exactas.

$$\Psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \Psi(\vec{\rho})\Psi(\vec{\lambda})$$

En particular, el estado base tiene la siguiente forma:

$$\Psi_{00}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \left(\frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{\alpha_\rho^2 \rho^2 + \alpha_\lambda \lambda^2}{2} \right) \quad (2.32)$$

con: $\alpha_\rho^2 = \sqrt{3k_\rho m_\rho}$, $\alpha_\lambda^2 = \sqrt{3k_\lambda m_\lambda}$, $k_\rho^2 = \frac{3km_\rho}{\hbar}$, $k_\lambda^2 = \frac{3km_\lambda}{\hbar}$

Como consideramos que los quarks tienen masas iguales m , podemos reescribir el argumento de la exponencial con la forma: $\frac{-\lambda_3(\rho^2 + \lambda^2)}{2}$, ($\lambda_3 = \alpha_\rho^2 = \alpha_\lambda^2$).

Por otra parte, los valores de la eigenenergía están dados por:

$$E = (E_{n\rho} + E_{n\lambda}) \hbar\omega; \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

donde en particular para el estado base ($n_\rho = n_\lambda = 0$) E esta dado por:

$$E = \hbar\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

A fin de tener una descripción sólo en términos de los quarks, dividimos este valor entre el número de quarks del sistema ($N = 3$), para obtener la energía por partícula E_3 . Entonces, en un sistema donde $\hbar = k = m = 1$, λ_3 y E_3 toman los siguientes valores:

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{2.33}$$

$$E_3 = \frac{E}{3} = \sqrt{3} \tag{2.34}$$

2.4. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de 2 cuerpos: $\langle r_M^2 \rangle$

El valor esperado del radio al cuadrado de una partícula, con respecto al centro de masa del sistema del cual forma parte, lo podemos definir de la siguiente manera:

$$\langle r_M^2 \rangle \equiv \left\langle \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm} \right)^2 \right\rangle \tag{2.35}$$

En el caso de los mesones, de acuerdo a las ecuaciones (2.8) y (2.9), llegamos a:

$$\langle r_M^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle r^2 \rangle$$

donde $r^2 \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2$. Tomando la función de onda, ec. (2.15), en su estado base tenemos

$$\langle r^2 \rangle = \int \Psi_{00}^\dagger(\vec{r}) r^2 \Psi_{00}(\vec{r}) d^3r$$

con $d^3r = r^2 dr d\Omega$, y como no tenemos dependencia angular $\int d\Omega = 4\pi$, por lo tanto:

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{\mu\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int r^4 e^{-\frac{\mu\omega}{\hbar} r^2} dr$$

Usando la siguiente fórmula de integración

$$\int_0^\infty \nu^4 e^{-\alpha\nu^2} d\nu = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

Entonces,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\mu\omega}$$

Y como $\mu\omega = \sqrt{\frac{mk}{2}}$ de acuerdo a (2.17), para un sistema con $\hbar = k = m = 1$ se tiene:

$$\langle r_M^2 \rangle = \frac{3}{2\sqrt{2}} \tag{2.36}$$

2.5. Valor promedio del radio al cuadrado para el caso de 3 cuerpos: $\langle r_B^2 \rangle$

Para el caso de tres cuerpos, con base a la definición dada por (2.35), y de acuerdo a las ecuaciones (2.28), (2.29) y (2.30) se tiene que:

$$\vec{r}_1 - \vec{R}_{cm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{R}_{cm} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\rho} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\lambda}$$

$$\vec{r}_3 - \vec{R}_{cm} = -\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{\lambda}$$

Por lo que el promedio del radio al cuadrado para el caso de bariones queda de la siguiente forma:

$$\langle r_B^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle + \langle \lambda^2 \rangle$$

Por un lado:

$$\langle \rho^2 \rangle = \int \Psi_{00}^\dagger(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \rho^2 \Psi_{00}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) d^3\rho d^3\lambda$$

Tomando en cuenta que $d^3\rho = \rho^2 d\rho d\Omega$ y sustituyendo la función de onda en su estado base (2.32), tenemos que:

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{4\pi}{\pi^3} \int \alpha_\lambda^3 e^{-\alpha_\lambda^2 \lambda^2} d^3\lambda \int \alpha_\rho^3 e^{-\alpha_\rho^2 \rho^2} \rho^4 d\rho$$

Como la función de onda está normalizada, la integral en la variable λ , siendo independiente de la variable ρ , debe ser igual a la unidad, esto es $\int \alpha_\lambda^3 e^{-\alpha_\lambda^2 \lambda^2} d^3\lambda = 1$, y entonces, utilizando la siguiente fórmula de integración:

$$\int_0^\infty \nu^4 e^{-\alpha\nu^2} d\nu = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \langle \rho^2 \rangle = \frac{3}{2\alpha_\rho^2}$$

Resolver $\langle \lambda^2 \rangle$ es análogo haciendo los cambios $\alpha_\rho \rightarrow \alpha_\lambda$, $\rho^2 \rightarrow \lambda^2$.

$$\Rightarrow \langle r_B^2 \rangle = 2 \langle \rho^2 \rangle = \frac{3}{\alpha_\rho^2}$$

Entonces, en un sistema donde $\hbar = k = m = 1 \Rightarrow \alpha_\rho^2 = \sqrt{3}$, por lo tanto:

$$\langle r_B^2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{3}} \tag{2.37}$$

Los resultados obtenidos en este capítulo, para los valores de E , λ y $\langle r^2 \rangle$ para dos y tres cuerpos, establecen los valores de las observables de los hadrones aislados correspondientes en los límites de bajas densidades, donde la distancia entre partículas es potencialmente grande. En particular, en este trabajo el valor de las observables para el sistema de dos cuerpos (mesón) debe ser reproducido en el estudio de varios cuerpos cuando se tome dicho límite, pues este sistema será el punto de partida para construir un sistema de 4 quarks ligados (tetraquark). La forma de determinar el parámetro λ en cada caso tendrá su explicación al estudiar la forma de la función de onda variacional para el sistema.

En el siguiente capítulo describiremos el modelo utilizado para realizar la simulación con varios cuerpos (quarks).

Capítulo 3

El modelo String-Flip

Para realizar el estudio de la formación de un estado compuesto de 4 quarks, como función de la densidad de energía, necesitamos un modelo que pueda realizar una descripción de un sistema de partículas basado en propiedades de quarks. El modelo tiene que reproducir que, a bajas densidades, donde la distancia entre quarks es grande, éstos sean confinados en hadrones, formando grupos de 2 o 4 cuerpos (mesones o tetraquarks). Así mismo, a altas densidades, donde la distancia entre quarks es muy corta, los quarks deberán comportarse como partículas fermiónicas libres, y que esta transición, de baja a alta densidad, debe de ser generada dinámicamente. El modelo *String-Flip* cumple con estas características [17, 18, 19].

En este modelo, el confinamiento de quarks en un singlete de color está descrito en términos de un potencial V . En un sistema de muchos quarks, éstos son ligados mediante unas *cuerdas*, que simulan lo que se conoce como *tubos de flujo gluónico*. La configuración óptima del sistema está descrita por aquella con una mínima energía potencial.

En este capítulo se analizarán detalles del modelo, así como la obtención de las observables relacionadas con los sistemas de mesones y tetraquark, los cuales se estudian de manera independiente y mixta.

3.1. Función de onda variacional

La función de onda que se propone es una función de onda variacional de la forma:

$$\Psi_\lambda = e^{-\lambda V} \Phi_{FG} \quad (3.1)$$

donde:

- λ es un parámetro variacional

- V es un potencial de muchos cuerpos
- Φ_{FG} es un producto de determinantes de Slater, uno por cada combinación de color sabor, el cual corresponde a la función de onda de un gas de Fermi. Cada uno de los determinantes de Slater tiene la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} \psi_{n1}(\vec{x}_1) & \cdots & \psi_{n1}(\vec{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{nN}(\vec{x}_1) & \cdots & \psi_{nN}(\vec{x}_N) \end{vmatrix}$$

Este determinante permite que la función de onda que describe al sistema de quarks sea antisimétrica ante el intercambio de quarks idénticos. Cada una de las entradas del determinante es solución al problema de una partícula en una caja, descrita a continuación.

Para una partícula en una dimensión dentro de un potencial cuadrado de ancho L , se tienen las eigen-funciones [5]:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.2)$$

donde n es un entero positivo. Las eigen-energías son:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (3.3)$$

En el caso de 3 dimensiones, si se trata de una partícula encerrada en una caja cuadrada de lado L , la solución para las eigenfunciones es un producto de tres funciones independientes (una por cada dimensión espacial) de la forma (3.2) y las eigen-energías serán tres sumandos similares a (3.3).

$$\psi_n(\vec{r}) = \phi_{n_x}(x) \phi_{n_y}(y) \phi_{n_z}(z) \quad (3.4)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (3.5)$$

siendo $\phi_{n_i} = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \left(\frac{n_i \pi i}{L} \right)$, $i = x, y, z$ y $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$ Por lo que la eigen-función resultante es:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x n_x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi y n_y}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z n_z}{L} \right) \quad (3.6)$$

Podemos definir la densidad de partículas de nuestro sistema como:

$$\rho = \frac{N}{V}; \quad V = L^3 \quad (3.7)$$

donde N es el número de partículas del sistema y V el volumen de la caja donde están contenidas.

Como (3.2) también puede escribirse en términos de la función coseno, la eigenfunción dada por (3.6) puede presentar un total de 8 combinaciones de productos de funciones senos y cosenos:

$$\begin{pmatrix} \text{sen} & \text{sen} & \text{sen} \\ \text{sen} & \text{sen} & \text{cos} \\ \text{sen} & \text{cos} & \text{sen} \\ \text{cos} & \text{sen} & \text{sen} \\ \text{sen} & \text{cos} & \text{cos} \\ \text{cos} & \text{sen} & \text{cos} \\ \text{cos} & \text{cos} & \text{sen} \\ \text{cos} & \text{cos} & \text{cos} \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que cada valor de la energía tiene al menos 8 degeneraciones, lo que crea una estructura de “capas” con cada capa conteniendo, al menos, 8 quarks de una misma combinación color-sabor. Sin embargo, debido al número de partículas que se incluirán en la simulación, como se describirá en la siguiente sección, sólo usaremos la primer capa, donde $n_x = n_y = n_z = 1$.

A continuación analizaremos la forma del potencial para el caso de los mesones y tetraquarks.

3.2. Potencial de muchos cuerpos

El potencial de muchos cuerpos está basado en encontrar las configuraciones de mínima energía potencial cuando hacemos interaccionar sistemas de 2 o 4 quarks que tengan carga de color total neutra, ésto tomando por simplicidad una interacción de tipo armónico

En este trabajo estudiamos la formación del estado tetraquark a partir de dos estados $q\bar{q}$ que son externamente forzados a interactuar entre sí. Entonces tenemos 4 partículas en el sistema: dos quarks y dos antiquarks. Consideramos a todos los quarks de un mismo sabor (y por tanto con masa igual) y mismo número cuántico de color, donde las antipartículas llevan los números cuánticos opuestos correspondientes.

3.2.1. Potencial de mesón

De forma general, si tenemos dos sistemas de dos quarks de colores c y anticolor respectivo \bar{c} , entonces el potencial total del sistema está definido como:

$$V_{c\bar{c}} = \min_{[P]} \sum_{ij} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (3.8)$$

siendo r_i un quark de color c y r_j un antiquark del anticolor correspondiente \bar{c} . $V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \equiv \frac{1}{2}k(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$ potencial de oscilador armónico, y donde $\min_{[P]}$ el mínimo de energía de todas las permutaciones posibles en las que el sistema de quarks con colores c_1 y c_2 tenga carga de color neutra.

Entonces, en general para un sistema de mesones el potencial total toma la siguiente forma:

$$V_m = V_{r\bar{r}} + V_{g\bar{g}} + V_{b\bar{b}} \quad (3.9)$$

Como nuestro sistema sólo contiene dos quarks ($\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{q_2}$) y dos antiquarks ($\vec{r}_{\bar{q}_1}, \vec{r}_{\bar{q}_2}$) con la misma carga de color y anticolor (ver figura 3.1), entonces es posible distinguir dos configuraciones de tipo mesón:

$$V_{m1} = V(\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{\bar{q}_1}) + V(\vec{r}_{q_2}, \vec{r}_{\bar{q}_2}) \quad (3.10)$$

$$V_{m2} = V(\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{\bar{q}_2}) + V(\vec{r}_{q_2}, \vec{r}_{\bar{q}_1}) \quad (3.11)$$

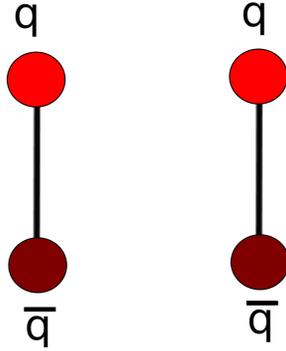


Figura 3.1: Configuraciones de tipo mesón en el sistema.

3.2.2. Potencial Tetraquark

A primera aproximación, tomamos el potencial de tetraquark de la siguiente forma:

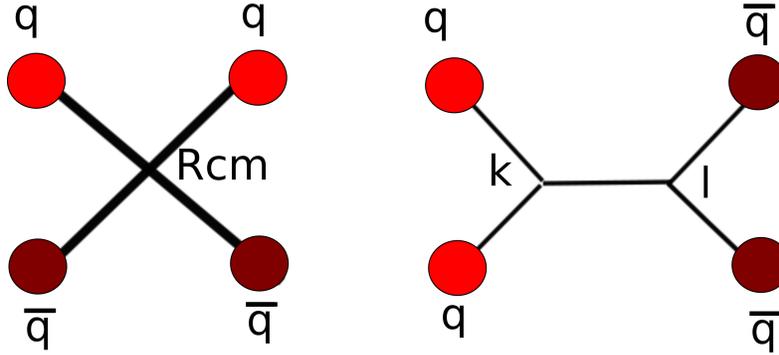


Figura 3.2: Configuraciones de tipo tetraquark del sistema. La figura de la izquierda representa a la configuración $4Q - cm$ y la de la derecha a la configuración $4Q - tree$

$$V_{4Q-cm} = \sum_{i=1}^2 V(\vec{R}_{cm}, \vec{r}_{q_i}) + \sum_{i=1}^2 V(\vec{R}_{cm}, \vec{r}_{\bar{q}_i}) \quad (3.12)$$

donde \vec{R}_{cm} es el centro de masa del sistema de 2 quarks y 2 antiquarks con posiciones \vec{r}_{q_i} y $\vec{r}_{\bar{q}_i}$ respectivamente, donde se cumple que el sistema tiene carga de color total neutra.

Consideramos además otro potencial para confinar a las 4 partículas del sistema:

$$V_{4Q-tree} = \sum_{i=1}^2 V(\vec{k}, \vec{r}_{q_i}) + \sum_{i=1}^2 V(\vec{l}, \vec{r}_{\bar{q}_i}) + V(\vec{k}, \vec{l}) \quad (3.13)$$

donde \vec{k} y \vec{l} son dos posiciones que ayudan a minimizar la energía potencial total del sistema [14]. En la figura 3.2 se muestra una representación simple para visualizar los potenciales V_{4Q-cm} y $V_{4Q-tree}$.

Encontrar los vectores óptimos \vec{k} y \vec{l} de la ecuación 3.13, de tal forma que se tenga una energía potencial mínima, es un problema de *Steiner Tree* (de ahí el nombre que asignamos al potencial) [20].

En general, este problema busca encontrar la red de longitud más corta que une un número determinado de puntos. Este problema también introduce puntos auxiliares entre los puntos originales, de tal forma que la nueva red (utilizando los nuevos puntos) sea la más corta de todas las posibilidades.

En el potencial $V_{4Q-tree}$, los vectores \vec{k} y \vec{l} corresponderían a estos puntos adicionales en un problema de *Steiner-tree*. Aún así, los algoritmos utilizados

para resolver estos problemas son generalmente muy complejos y lentos, y no se utilizarán en este trabajo. Entonces, estos vectores son calculados mediante un algoritmo sencillo que hace un muestreo de varias posiciones para \vec{k} y \vec{l} a partir de la posición del centro de masa del sistema, de tal forma que los definimos de la siguiente manera:

$$\vec{k} = \vec{R}_{cm} + \vec{\Delta}; \quad \vec{l} = \vec{R}_{cm} - \vec{\Delta}$$

donde se muestrea el vector $\vec{\Delta}$ en coordenadas esféricas, con un número discreto de valores de la coordenada radial, polar y azimutal. Para cada valor de $\vec{\Delta}$ se calcula la energía potencial del sistema, y sólo el valor que da lugar a una mínima energía potencial es tomado en cuenta, pues es éste el que consideramos el potencial óptimo. Más adelante se mostrará la eficiencia que obtenemos de este algoritmo para realizar nuestros cálculos.

El potencial $V_{4Q-tree}$ pretende mostrar lo que sería un estado ligado de un diquark y un anti-diquark en un singlete de color. Como se había discutido anteriormente en la introducción, la combinación de estos dos estados produce un potencial atractivo, necesario para confinar a las 4 partículas en un cluster (un hadrón).

Los vértices fundamentales de QCD, descritos en la introducción, en teoría nos permiten introducir loops de gluones dentro de las cuerdas de flujo gluónico, sin embargo, el modelo trata de simplificar todos estos procesos en una sola cuerda efectiva.

3.3. Energía variacional

El hamiltoniano de un sistema de N quarks interactuando a través de un potencial V es:

$$H = \sum_i^N \frac{P_i^2}{2m_i} + \sum_{i,j}^N V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (3.14)$$

donde V toma la forma $V = V_{m1}, V_{m2}, V_{4Q-cm}$ o $V_{4Q-tree}$ dependiendo del tipo de hadrón que se forme. Cuando consideramos una función de onda del tipo (3.1) como solución a una ecuación de Schrödinger para un hamiltoniano dado por, entonces del valor esperado de la energía total $\langle H \rangle_\lambda$, es igual a:

$$\langle H \rangle_\lambda = \langle T \rangle_\lambda + \langle V \rangle_\lambda \quad (3.15)$$

La energía cinética $\langle T \rangle$ la podemos reescribir de la siguiente forma (omitiendo un factor de masa m_i en el denominador):

$$\langle T \rangle_\lambda = \frac{1}{Z(\lambda)} \int dx \psi_\lambda(x) \left(\sum_i -\frac{1}{2} \partial_i^2 \right) \psi_\lambda(x) \quad (3.16)$$

donde $Z(\lambda) = \langle \psi_\lambda(x) | \psi_\lambda(x) \rangle$ y $-\frac{1}{2} \partial_i^2$ es el operador de momento \hat{P} para la i -ésima partícula.

Sea $F_\lambda(x) = e^{-\lambda V(x)} \Rightarrow \psi_\lambda(x) = F_\lambda(x) \phi(x)$, entonces,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \Psi_\lambda(x) &= F_\lambda(x) \left(-\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \phi(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i [(\partial_i^2 F_\lambda(x)) \phi(x) + 2(\partial_i F_\lambda(x)) (\partial_i \phi(x))] \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo en $\langle T \rangle_\lambda$,

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda &= \frac{1}{Z(\lambda)} \int dx \Psi_\lambda(x) \left[F_\lambda(x) \left(-\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \phi(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_i ((\partial_i^2 F_\lambda(x)) \phi(x) + 2\partial_i F_\lambda(x) \partial_i \phi(x)) \right] \end{aligned}$$

Aquí podemos observar que el primer término de la integral corresponde a la energía cinética del gas de Fermi (T_{FG}). La energía de Fermi es aquella energía de la última capa llenada por los quarks, que en nuestro caso todas las partículas contribuyen. Entonces podemos reescribir $\langle T \rangle_\lambda$:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle_\lambda &= T_{FG} - \frac{1}{2} \frac{1}{Z(\lambda)} \sum_i \int dx [\phi(x) F_\lambda(x) (\partial_i^2 F_\lambda(x)) \phi(x) \\ &\quad + 2\phi(x) F_\lambda(x) \partial_i F_\lambda(x) \partial_i \phi(x)] \end{aligned}$$

Al desarrollar y simplificar términos podemos llegar a la siguiente expresión:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dx \phi^2(x) [\partial_i F_\lambda(x)]^2$$

Entonces, multiplicando por $\frac{F_\lambda^2(x)}{F_\lambda^2(x)}$, resulta que:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \frac{1}{2Z(\lambda)} \sum_i \int dx \Psi_\lambda^2(x) [\partial_i \log F_\lambda(x)]^2$$

Sea $W = \frac{1}{2} \sum_i [\partial_i \log F_\lambda(x)]^2$, finalmente podemos escribir:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \langle W \rangle_\lambda \quad (3.17)$$

Entonces la energía total se puede escribir como:

$$\langle H \rangle_\lambda = T_{FG} + \langle W \rangle_\lambda + \langle V \rangle \quad (3.18)$$

En el apéndice **A** se realizan los cálculos de $\langle W \rangle_\lambda$ usando los potenciales $V_{m_1,2}, V_{4Q-cm}$ y $V_{4Q-tree}$ de las ecuaciones (3.10-12), respectivamente.

En el extremo de altas densidades, es decir, cuando $\rho \gg 1$, esperamos que los quarks se comporten como un gas de Fermi. Normalmente, para un sistema de varias partículas, la energía por partícula resultaría de la siguiente forma:

$$\frac{E}{N} = mc^2 + \frac{3}{10} \frac{(\hbar k_F)^2}{m} \equiv \frac{T_{FG}}{N} \quad (3.19)$$

siendo N el número de partículas del sistema, y donde se toma que para una partícula de masa m la energía es: $\epsilon_i = mc^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. k_F representa el momento de las partículas hasta la energía de Fermi.

Sin embargo, nosotros tenemos un sistema finito de 4 quarks, por lo que no podemos utilizar esta aproximación. Entonces, para calcular la energía de Fermi correspondiente a cada quark, usamos el valor de las eigenenergías de la ecuación (3.5) asociada a cada quark.

3.4. Cálculo Monte Carlo

Para obtener los valores esperados de V y W necesitamos evaluar una integral de varias dimensiones, y un método Monte Carlo (MC) es eficiente para este propósito [21, 22].

La aplicación de un método MC requiere la generación de variables $\{\vec{x}\}$ estadísticamente independientes distribuidas de acuerdo a una distribución de probabilidad $P(\vec{x})$. Este método es utilizado para mostrar estadísticamente los eventos. Esto requiere generar la distribución de probabilidades deseada de manera directa. Una de las formas de realizarlo es usando una simulación MC de procesos de Markov [23].

Una cadena de variables de Markov $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots\}$ es generada por una regla que especifica la distribución de probabilidad para un elemento $(n+1)$ x^{n+1} usando solamente la información del elemento n x^n . La parte MC arregla los

pesos estadísticos del proceso de Markov, tal que la distribución de probabilidad deseada es aproximada asintóticamente.

Los números aleatorios se generan por medio de un algoritmo diseñado para producir una secuencia de números aparentemente sin correlación, los cuales están uniformemente distribuidos sobre un rango definido. En general, el generador de números aleatorios debe satisfacer los siguientes criterios básicos:

- La distribución de los números tiene que ser uniforme en un rango específico y debe satisfacer pruebas estadísticas de estocasticidad, tales como carencia de predictibilidad y correlación entre números cercanos.
- El cálculo debe producir una gran cantidad de números únicos antes de que se repita el ciclo.
- El cálculo debe ser muy rápido.

Se utilizó el algoritmo de Metrópolis [24] (ver apéndice **B**) para calcular los valores de expectación de W y V . Este algoritmo es muy popular dada su simplicidad computacional.

Para nuestra simulación, utilizamos un sistema de 2 quarks y dos antiquarks confinados en una “caja” cúbica con una longitud de lados L iguales, donde por simplicidad los valores de \hbar , m y k son tomados iguales a 1. En el límite de baja densidad ($\rho \rightarrow 0$), los resultados deberán concordar con los valores calculados teóricamente para el parámetro variacional λ_2 y E_2 , según las ecuaciones (2.20) y (2.21).

A fin de expresar estos valores en unidades de GeV/fm^3 para la densidad de energía ϵ y de fm^2 para el valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle$, realizamos una conversión basada en datos experimentales (ver apéndice **C**).

El procedimiento fue el siguiente:

- Se realizaron simulaciones para 5 sistemas distintos:
 - *Mesón independiente*. En el modelo sólo se incluyen los potenciales de tipo mesónico V_{m1} y V_{m2}
 - *Tetraquark cm independiente*. El modelo sólo incluye el potencial V_{4Q-cm}
 - *Tetraquark tree independiente*. El modelo sólo incluye el potencial $V_{4Q-tree}$
 - *Mezcla 1*. El modelo incluye los potenciales de tipo mesónico V_{m1} y V_{m2} y el potencial de tipo tetraquark V_{4Q-cm}
 - *Mezcla 2*. El modelo incluye los potenciales de tipo mesónico V_{m1} y V_{m2} y los dos potenciales de tipo tetraquark V_{4Q-cm} y $V_{4Q-tree}$

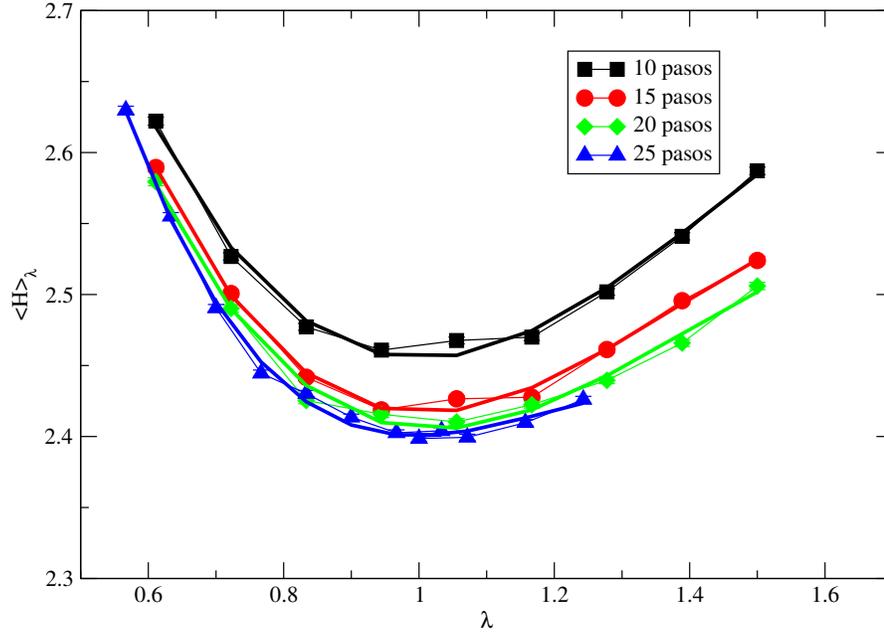


Figura 3.3: Evolución de la energía total por partícula $\langle H \rangle_\lambda$ (en unidades $\hbar = m = k = 1$) con respecto al parámetro variacional λ , para un valor fijo de $\rho = 0.001$. Sistema independiente Tetraquark tree

- Con base en la ecuación (3.7) fuimos variando el valor de ρ desde 0.001 hasta 1.5 para todos los casos. Como tenemos un número fijo de partículas, esto equivale a cambiar el valor L de la longitud de los lados de la caja donde están contenidos los quarks.
- Para cada valor de ρ , se realizó el cálculo de la energía de acuerdo a la configuración que tomaban los quarks. A cada valor de E le correspondió un valor de λ . Las series de puntos obtenidos fueron ajustados por medio de una curva cúbica; para obtener el valor óptimo de λ calculamos el mínimo de la curva y registramos los valores E y λ .
- Posteriormente, con el valor de λ óptimo para cada valor de ρ , calculamos las frecuencias de distribución radial así como las funciones de correlación entre los quarks.

A manera de ejemplo, en la figura 3.3 se muestran varias curvas de la evolución del valor esperado de la energía total con respecto al parámetro variacional λ . Todas las curvas corresponden a un valor de $\rho = 0.001$ y corresponden a un sistema donde sólo puede formarse un estado de tetraquark tree. El parámetro variacional

óptimo se encuentra calculando el mínimo de la curva usando un ajuste con un polinomio de orden 3.

La diferencia en la energía total entre las curvas se relaciona con el número de valores discretos que se utilizaron para muestrear las coordenadas del vector $\vec{\Delta}$, para calcular posiciones óptimas de \vec{k} y \vec{l} del potencial $V_{4Q-tree}$ (el muestreo está restringido a la caja donde están contenidas las partículas). Para efectos prácticos, en el trabajo utilizamos **20 pasos** en el algoritmo, pues mostró un buen balance entre la minimización de energía y tiempo de cálculo computacional.

En el siguiente capítulo se muestran los resultados obtenidos de estas simulaciones.

Capítulo 4

Resultados

Realizando los cálculos mediante el procedimiento descrito en el capítulo anterior, se realizó el estudio de los estados de tipo mesónico y de tetraquark (4Q-cm y 4Q-tree), así como la mezcla entre ambos sistemas. El sistema formado por quarks, los cuales forman mesones aislados en un régimen de baja densidad, es estudiado a distintas distancias entre dichos sistemas (descritos por el parámetro ρ descrito en el capítulo anterior). Para esto, utilizaremos de manera libre el parámetro de densidad de energía del sistema ϵ .

4.1. Parámetro variacional óptimo

Para checar si la aproximación variacional describe los resultados esperados en los límites de baja y alta densidad, en la figura 4.1 se muestra el comportamiento de parámetro variacional óptimo λ en función de la densidad de energía ϵ para el caso mesónico y de tetraquark, utilizando los potenciales de tipo mesón y de tetraquark descritos en el capítulo 3. Para ambos casos, λ se normalizó con respecto al valor teórico obtenido λ_2 en el capítulo 2.

Observamos que el comportamiento del parámetro variacional es el esperado a bajas densidades de energía, puesto que λ/λ_2 tiende a 1 para el caso mesónico; el parámetro variacional óptimo del sistema tetraquark es pesado también con este valor, que tiende a un valor $\lambda/\lambda_2 = 1,4$, más alto usando el potencial 4Q-tree. Para altas densidades, λ se acerca a 0 asintóticamente, como se esperaba, para ambos sistemas, comportándose entonces como un gas de partículas fermiónicas libres. Es importante notar que para todos los casos, el valor de λ no se anula completamente, lo que da muestra de una interacción remanente.

Para todos los casos, el valor λ disminuye de manera suave en todo el rango de densidades. Observamos que el valor de λ comienza alrededor de 0.4 veces más alto en el caso de tetraquark, y que éste desciende más rápido para este sistema, logrando interceptar al sistema mesónico en un valor $\epsilon = 0,1\text{GeV}/\text{fm}^3$.

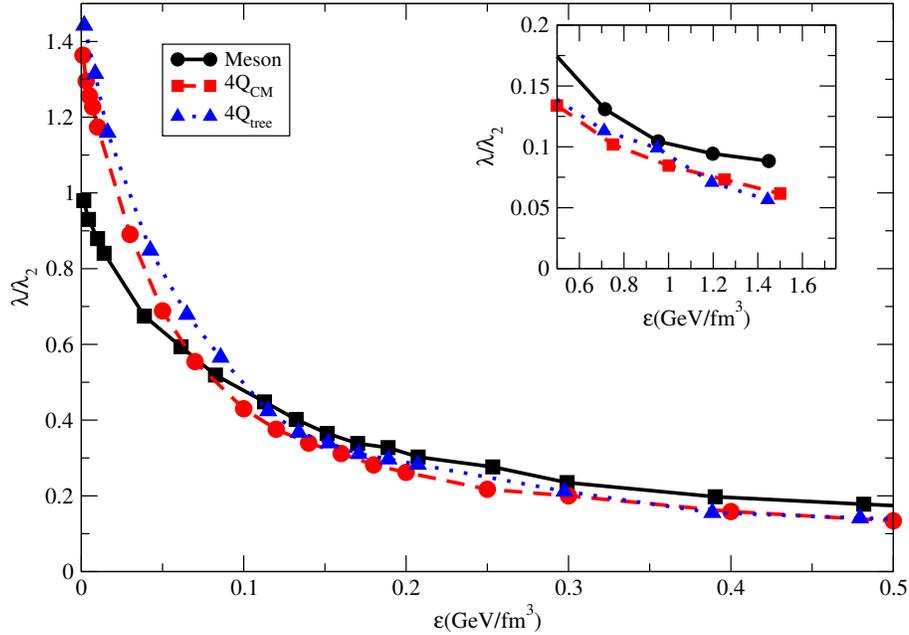


Figura 4.1: Evolución del parámetro variacional óptimo con respecto a la densidad de energía del sistema ϵ : casos independientes

En las figuras 4.2 y 4.3 se muestra el comportamiento del parámetro variacional, pero esta vez usando la mezcla de los sistemas de mesón y tetraquark, una figura por cada potencial de tetraquark usado (V_{4Q-cm} y $V_{4Q-tree}$). También se incluyen los resultados para los sistemas independientes para hacer una comparación. Es importante mencionar que, aunque en la mezcla 2 se realiza una combinación de estados usando todos los potenciales descritos en el capítulo 3, el potencial V_{4Q-cm} es rara vez escogido por el algoritmo para tener una configuración de tetraquark, lo que nos dice que la configuración 4Q-tree del tetraquark favorece la minimización de la energía potencial para prácticamente todos los casos en que el sistema se encuentra en una configuración de un estado ligado de 4 partículas.

La información que contiene el parámetro variacional nos da una idea aproximada de la distancia promedio entre partícula a una densidad dada, que no es necesariamente la misma para quarks en un sólo cluster. En la mezcla de los sistemas de mesón y de tetraquark, a bajas densidades se tiene el mismo comportamiento que aquél en el que sólo se tiene el sistema mesónico, pues ésta configuración es la que más le favorece al sistema para minimizar su energía potencial, como es de esperarse. Pero al aumentar ϵ , ocurren eventos en la simulación en la que el

potencial del sistema tetraquark favorece más al sistema, por lo que la información de su tamaño también está contenida en el valor de λ . Esto se traduce en una disminución del parámetro λ con respecto al sistema de mesón independiente.

En la mezcla 1, donde se tiene el sistema mesónico y tetraquark $4Q$ -cm, se observa que el valor de λ para el sistema reside entre los valores de aquellos usando los dos sistemas independientes. En la mezcla 2 el valor de λ para el sistema combinado es menor que aquél usando los sistemas independientes.

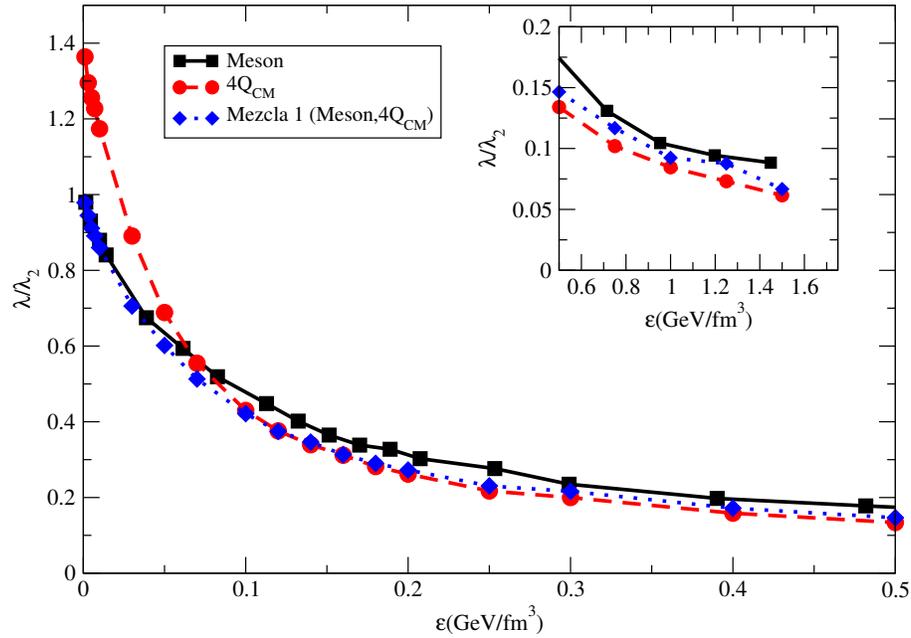


Figura 4.2: Evolución del parámetro variacional óptimo con respecto a la densidad de energía del sistema ϵ : mezcla 1

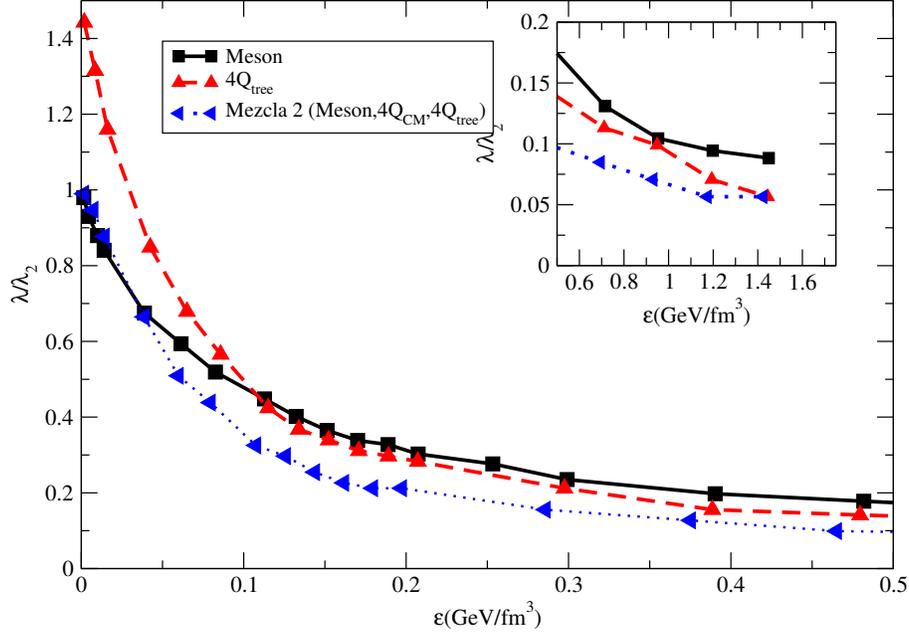


Figura 4.3: Evolución del parámetro variacional óptimo con respecto a la densidad de energía del sistema ϵ : mezcla 2

4.2. Evolución de la energía

En la figura 4.4 se muestran las gráficas correspondientes de los valores de la energía por partícula ($(E/N) + m$) en función de la densidad de energía ϵ , para los mesones y tetraquarks, haciendo una normalización de la energía con respecto al valor de E_2 de la ecuación (2.21).

A bajas densidades, la energía por partícula en el caso mesónico, converge a los valores esperados, puesto que E/E_2 converge a 1.

Dado que el valor de $\langle W \rangle$ es proporcional a λ^2 (ver apéndice A), a densidades bajas donde el valor de λ es grande (ver figura 4.4), la contribución de $\langle W \rangle$ es también alta. Por el contrario, cuando la densidad se vuelve alta, el valor de λ se vuelve muy pequeño por lo que la contribución de $\langle W \rangle$ es muy pequeña también, y lo mismo sucede para la contribución de $\langle V \rangle$. En cambio, la contribución debido a la energía cinética de un gas de Fermi, siempre va en aumento, de tal forma que para altas densidades, la energía total del sistema es mayoritariamente ésta.

Se observa que para la configuración tetraquark 4Q-cm la energía por partícula del sistema nunca logra estar por debajo de aquella del sistema independiente de mesón, mientras que usando la configuración tetraquark 4Q-tree ésta es alcanzada a un valor de densidad de energía $\epsilon = 0.16 \text{ GeV/fm}^3$. Esto muestra la eficiencia

de esta configuración de tetraquark para minimizar la energía del sistema.

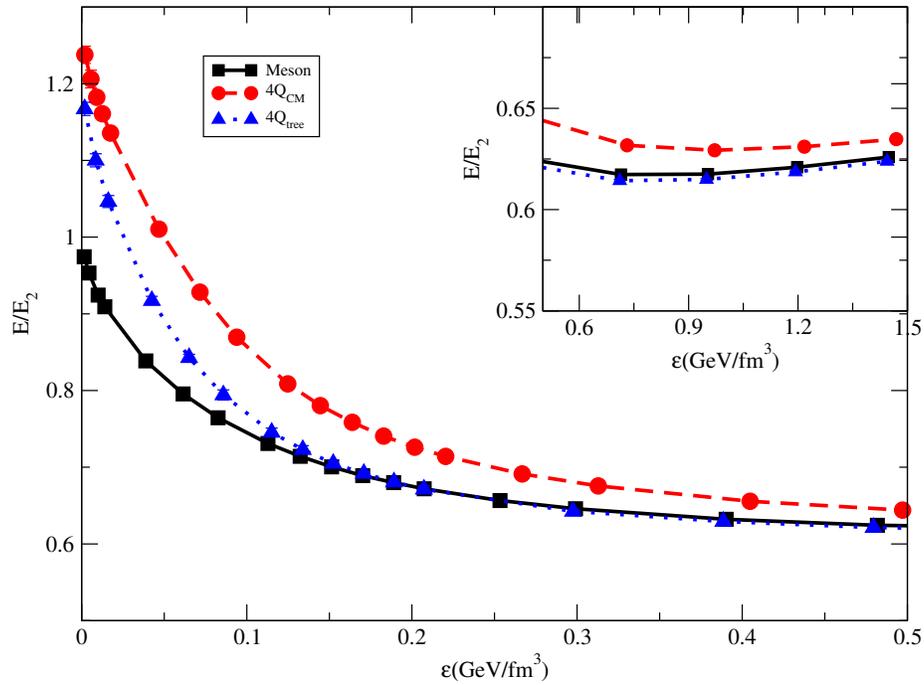


Figura 4.4: Evolución de la energía con respecto a la densidad de la energía del sistema. casos independientes de los sistemas

En la figura 4.5 se muestran las contribuciones de los términos cinético y potencial para el sistema tetraquark $4Q_{tree}$ independiente. A densidades altas, la energía total del sistema es en su mayoría energía cinética de un gas de Fermi.

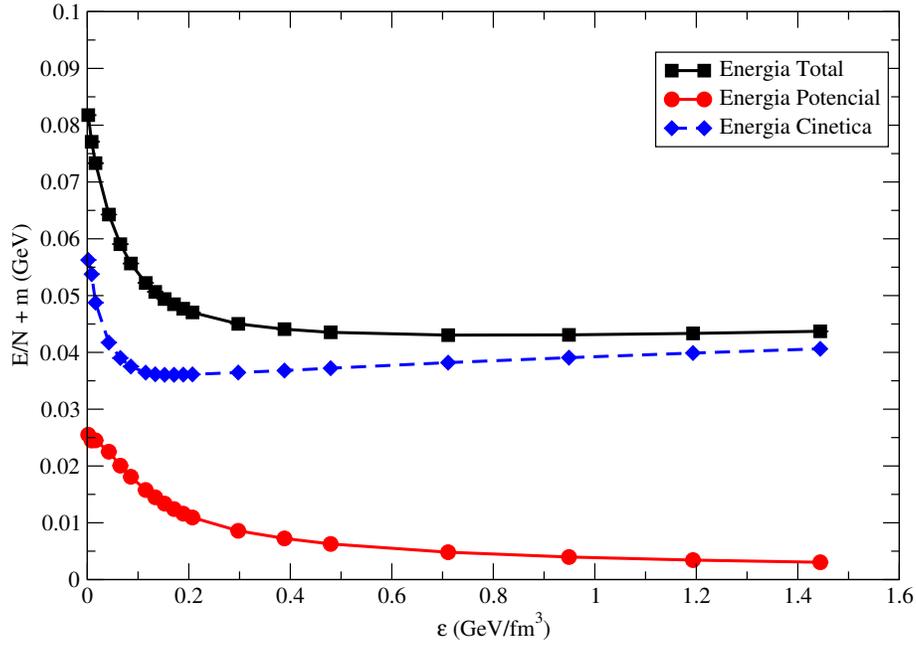


Figura 4.5: Energía por partícula incluyendo la masa vs densidad de energía para el sistema independiente tetraquark 4Q-tree. También se muestran las contribuciones cinética y potencial

En las figuras 4.6 y 4.7 se muestra el comportamiento de la energía por partícula, pero esta vez usando la mezcla 1 y 2 de los sistemas de mesón y tetraquark. También se incluyen los resultados para los sistemas independientes para la comparación.

En los sistemas mezclados, se tiene una disminución de la energía por partícula con respecto al sistema independiente del mesón, siendo más notoria aquella inducida al introducir la configuración tetraquark 4Q-tree.

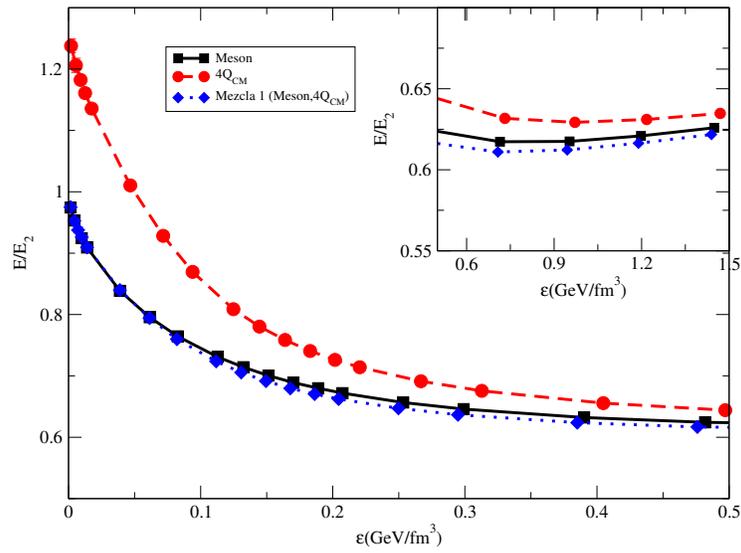


Figura 4.6: Evolución de la energía con respecto a la densidad de energía del sistema. Comparación de mezcla 1 con sus independientes

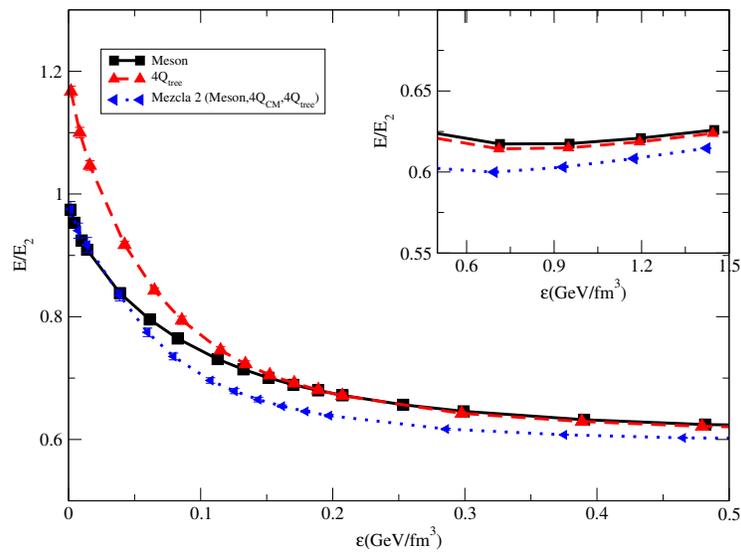


Figura 4.7: Evolución de la energía con respecto a la densidad de energía del sistema. Comparación de mezcla 2 con sus sistemas independientes

4.3. Distribución radial

Para obtener una información más precisa sobre el tamaño de los clusters, observamos cómo es la distribución de partículas dentro de uno, caracterizado por un valor promedio del radio al cuadrado.

Se obtuvieron los valores esperados del radio al cuadrado para todos los casos independientes y mixtos, así como las frecuencias de distribución de éstos con respecto a la raíz del valor promedio al cuadrado $D_r(\epsilon)$. Éstos fueron calculados usando la definición dada por la ecuación (2.35), usada en el problema de 2 y 3 cuerpos del capítulo 2, empleando la información de la configuración óptima del sistema.

Las curvas de distribución se normalizaron de tal forma que el área bajo la curva es igual a uno. Las unidades de distancia para $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ se muestran en unidades de fm , cuya escala es tomada de datos experimentales para el caso mesónico (ver apéndice C); la misma escala se usa para todos los sistemas, incluidos los de tetraquark.

En las figuras 4.8 y 4.9 se muestran las curvas de distribución de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ para los sistemas independientes de mesón y tetraquark 4Q-tree, respectivamente, para algunas densidades de energía.

En general, para ambos casos, la curva de distribución se desplaza hacia la izquierda al aumentar la densidad de energía.

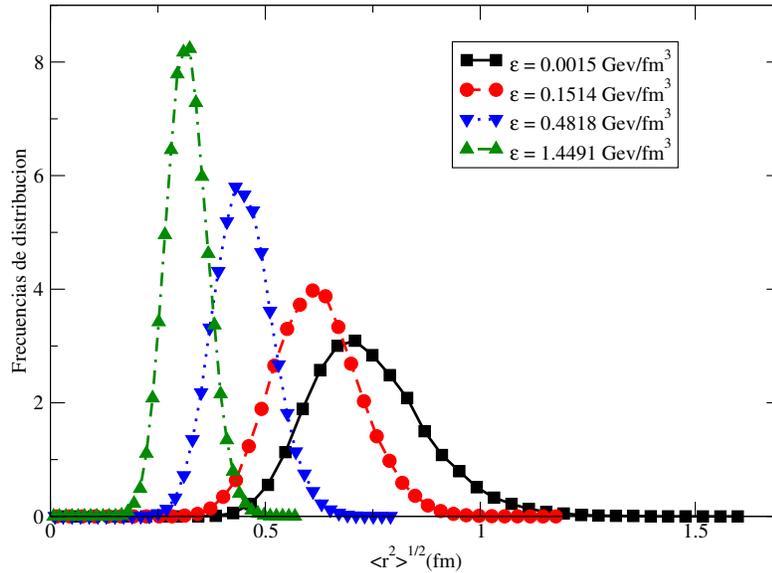


Figura 4.8: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : mesones

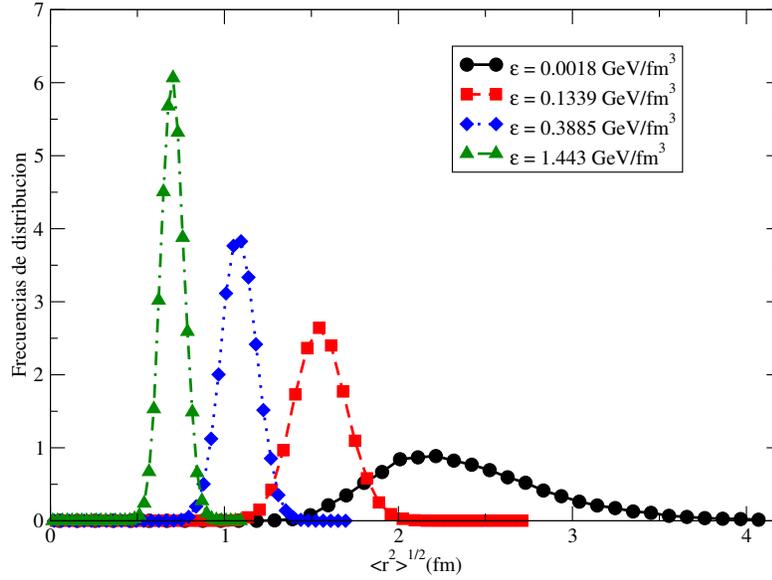


Figura 4.9: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : tetraquark 4Q-tree

En las figuras 4.10 y 4.11 se muestran las curvas de distribución de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ para el sistema mezclado (mezcla 2), usando la configuración 4Q-tree del tetraquark. Como el área bajo la curva se encuentra normalizada a 1 para las distribuciones de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$, al tener éste un valor promedio menor, el máximo valor de la frecuencia de distribución es cada vez más alto. Podemos observar que el valor máximo de la frecuencia de distribución para el sistema independiente del mesón en la figura 4.8 es alrededor de 8 en la densidad más alta, diferente al valor máximo en la figura 4.10 cuyo valor máximo es alrededor de 9.75. Esto nos dice que el radio del cluster para el sistema mesónico desciende cuando se tiene una mezcla con el sistema tetraquark, al aumentar la densidad.

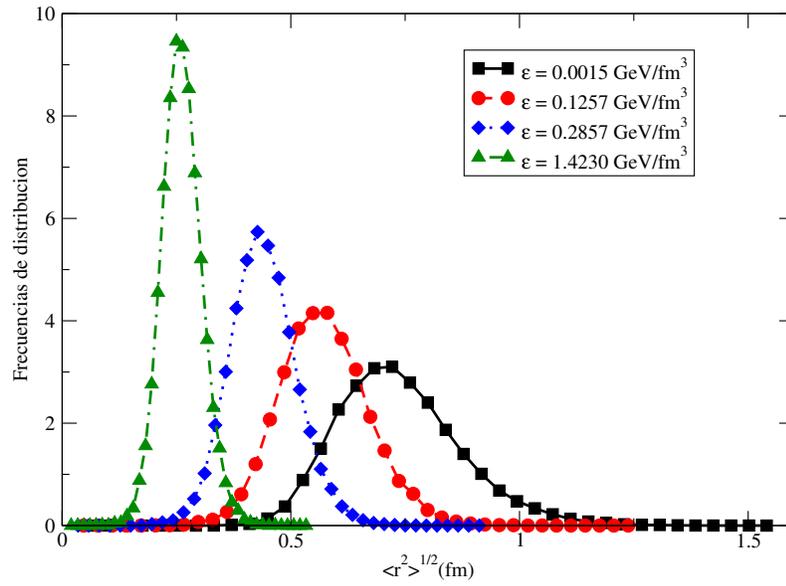


Figura 4.10: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : mesón en la mezcla 2

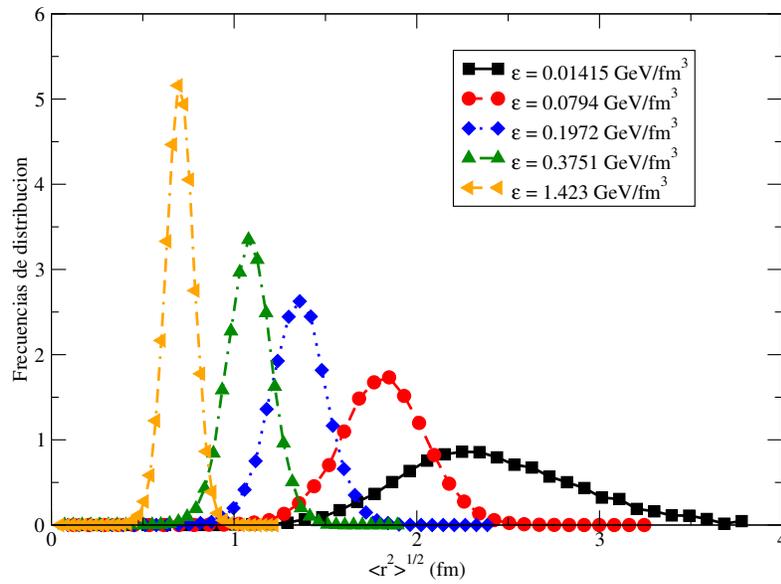


Figura 4.11: Frecuencias de distribución $D_r(\epsilon)$ para distintos valores de ϵ : tetraquark tree en la mezcla 2

En la figura 4.12 se muestra el comportamiento del valor $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ con respecto

a la densidad de energía. Para todos los sistemas se observa un pequeño aumento en el valor de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ a muy bajas densidades, cercanas a cero.

En el sistema de tetraquark, para sus dos configuraciones, el valor de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ es prácticamente el mismo, incluso si se tiene una mezcla con el sistema mesónico. El caso es diferente para el sistema mesónico, pues al estar mezclado con el sistema tetraquark, el valor de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ disminuye un poco, como se había mencionado antes; el descenso es más notorio usando la configuración tetraquark $4Q_{\text{tree}}$ en la mezcla. El tamaño $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ de un tetraquark, en un sistema independiente (sólo cm o sólo tree), es alrededor de 3 veces la de un mesón aislado, mientras que a altos valores de la densidad de energía esta relación se hace más corta, pues tiende a ser sólo 2 veces más grande.

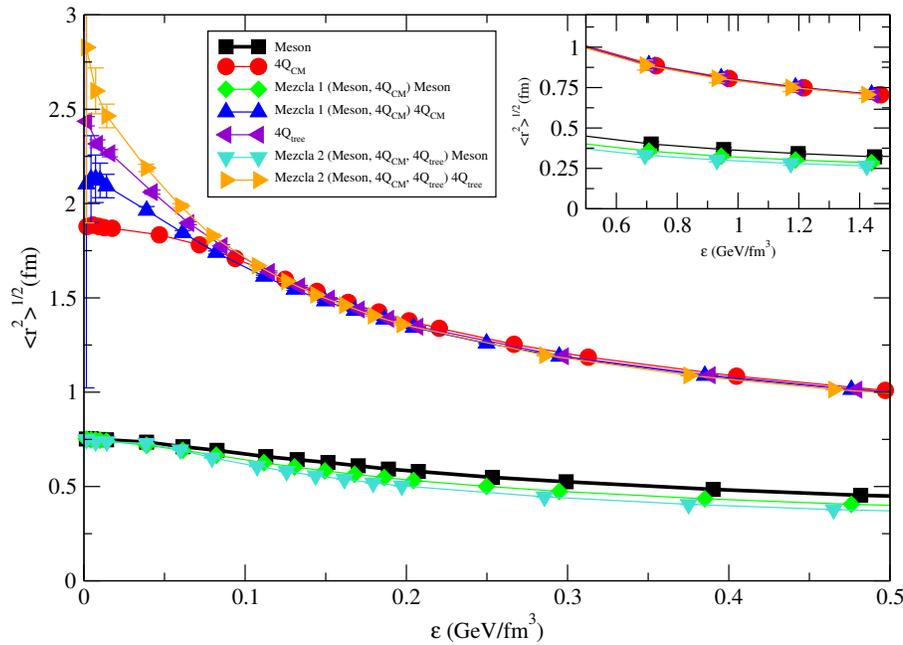


Figura 4.12: Evolución de la raíz del valor promedio del radio al cuadrado $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ con respecto a la densidad de energía ϵ para todos los sistemas independientes y mezclados

4.4. Funciones de correlación

Tenemos que la función de correlación de dos cuerpos está dada por [25]:

$$\rho_2(r) = \sum_{\alpha\beta} \left\langle \Psi_0 | \hat{\Psi}_\alpha^\dagger(r) \hat{\Psi}_\beta^\dagger(0) \hat{\Psi}_\beta(0) \hat{\Psi}_\alpha(r) | \Psi_0 \right\rangle \quad (4.1)$$

siendo α y β el conjunto de todos los números cuánticos internos, tales como el sabor y el color. La función de correlación mide la probabilidad de encontrar dos partículas, con números cuánticos dados, a una distancia relativa r .

Debido a que tenemos un sistema finito de 4 partículas, las correlaciones que se calcularon entre los quarks del sistema, convergen a cero para distancias largas. En nuestro caso definimos que:

$$g(r) \equiv \frac{\rho_2(r)}{\rho^2} \quad (4.2)$$

Entonces, la magnitud relativa refleja la probabilidad de que una partícula esté correlacionada con otra aunque su valor individual no es explícitamente indicativo.

En las figuras 4.13 y 4.14 se muestra la función de correlación $g(r)$ entre quarks y antiquarks, para el sistema independiente de mesón y tetraquark 4Q-tree, respectivamente.

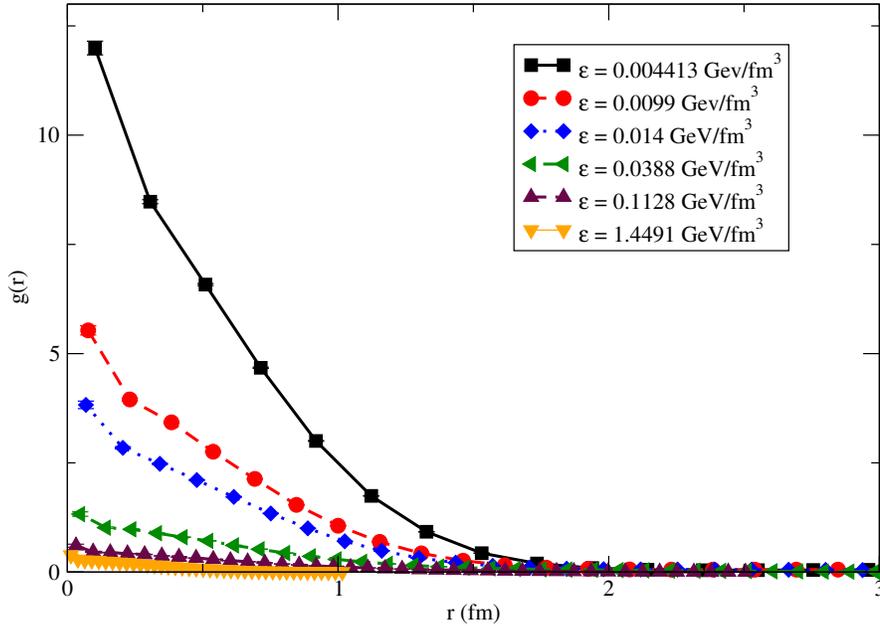


Figura 4.13: Función de correlación $g(r)$ entre quarks de tipo distinto para distintos valores de ϵ : mesones

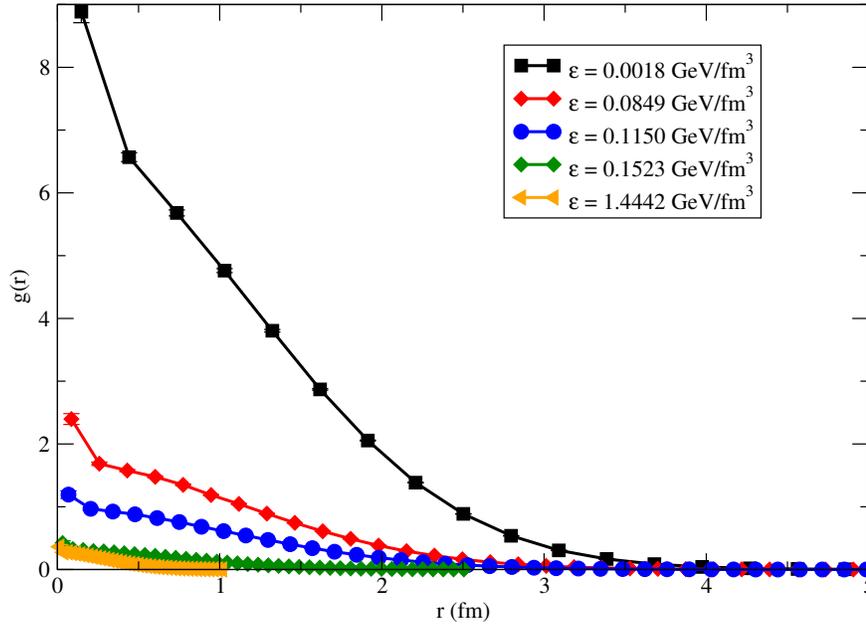


Figura 4.14: Función de correlación $g(r)$ entre quarks de tipo distinto para distintos valores de ϵ : tetraquark $4Q$ -tree

La función de correlación $q\bar{q}$ tiene un máximo en $r = 0$, que va de acuerdo a tener un hadrón aislado. Es difícil tener una buena estadística cerca de $r = 0$ debido a que el elemento de volumen es muy pequeño.

En la figura 4.15 se muestra la función de correlación $g(r)$ $q-q$, $q-\bar{q}$, $q-(q, \bar{q})$ en la mezcla 2 de mesones y tetraquarks para un valor alto de ϵ . Podemos observar que la correlación $q-q$ es significativamente más repulsiva que aquella en la correlación $q-\bar{q}$. Esto se debe al hecho de que mayormente se forman cluster de quark-antiquark, lo que hace muy difícil que un quark se encuentre muy cerca de otro quark. Además de esto, se tiene el principio de exclusión de Pauli (incorporada al modelo mediante un determinante de Slater), por lo que no es muy probable tener dos quarks a distancias cortas. En general, la magnitud de probabilidad en la correlación $q-\bar{q}$ es mucho más grande que aquella en $q-q$; sólo a densidades altas son comparables. Esto nos dice la diferencia de magnitudes entre el principio de exclusión de Pauli y el confinamiento de los quarks en un hadrón, siendo este último mucho más grande. La correlación $q-(q, \bar{q})$ es simplemente la suma entre las correlaciones $q-q$ y $q-\bar{q}$.

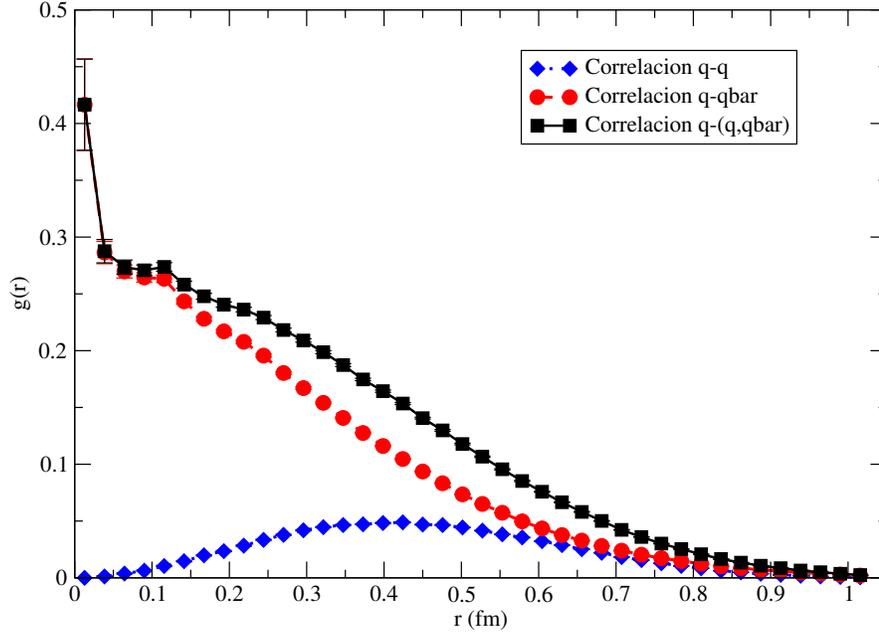


Figura 4.15: Función de correlación $g(r)$ quark-quark, quark-antiquark, quark-(quark,antiquark), para diferentes valores de ϵ : Mezcla 2

En la figura 4.16, se muestra la correlación $q - q$ y mesón-mesón (si es que se encuentra en esta configuración), en un sistema mezclado (Mezcla 2), para una densidad de energía baja, intermedia, y alta, respectivamente. Para obtener la correlación mesón-mesón observamos la distancia entre los centros de masa de ambos mesones. Para la densidad más baja, la curva $g(r)$ es prácticamente la misma para ambas correlaciones, como es de esperarse, pues los quarks del mismo tipo se encuentran en mesones diferentes. La diferencia está en distancias cortas pues los quarks pueden reordenarse dentro de un hadrón sin tener mayor cambio en el centro de masa. Además, los quarks, por ser partículas fermiónicas, obedecen el principio de exclusión de Pauli, que se manifiesta con mayor intensidad a cortas distancias, como se mencionó anteriormente.

Al tener un valor de ϵ más alto, existe una diferencia entre las dos curvas, pues la distancia entre mesones se vuelve más parecida a aquella entre quarks. Además, se tiene una disminución en la magnitud de $g(r)$ en la correlación mesón-mesón con respecto a aquella $q - q$, debido a que se tiene menos estadística pues los eventos donde se tienen configuraciones mesónicas quedan inhibidas por aquellas con estructura de 4 partículas, por lo que el valor de $g(r)$ es significativamente más bajo.

Si comparamos la correlación mesón-mesón en un sistema independiente de mesón (figura 4.17) con respecto a aquel en la mezcla 2 (figura 4.16), para una densidad alta vemos una diferencia entre los valores máximo de $g(r)$. En el sistema mesónico el máximos valor de $g(r)$ es de alrededor de 0.08 mientras que en el sistema mezclado sólo alcanza un valor de 0.03. Además, existe una diferencia de 0.077 fm en r , entre los máximos del valor $g(r)$, debido a la mezcla de los sistemas.

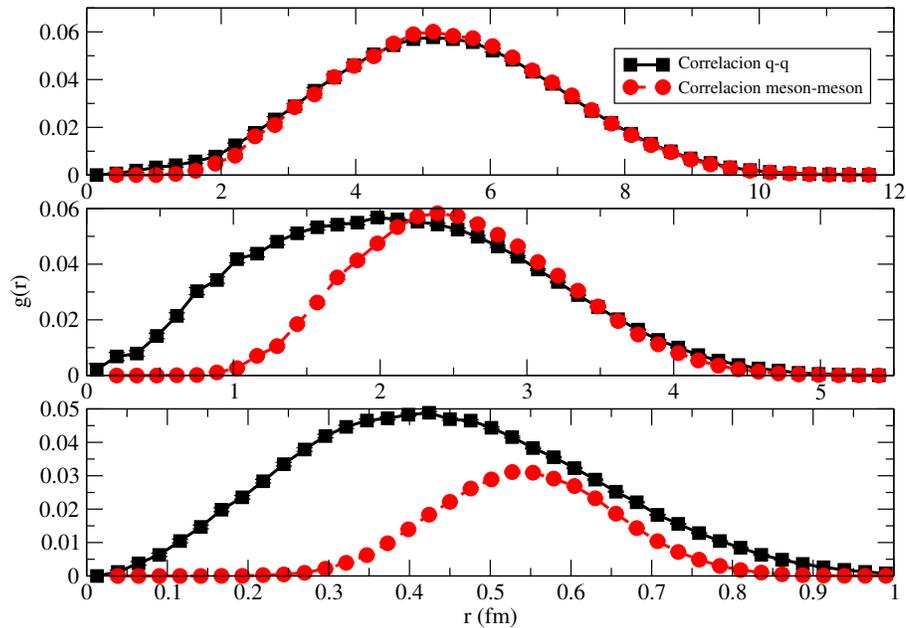


Figura 4.16: Función de correlación $g(r)$ entre quarks del mismo tipo $q-q$ y mesones para una densidad de energía baja, intermedia y alta. La gráfica superior muestra las correlaciones con una densidad de energía $\epsilon = 0.0015 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. La gráfica intermedia con $\epsilon = 0.0142 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. La gráfica inferior con $\epsilon = 1.4491 \text{ GeV}/\text{fm}^3$: Mezcla 2

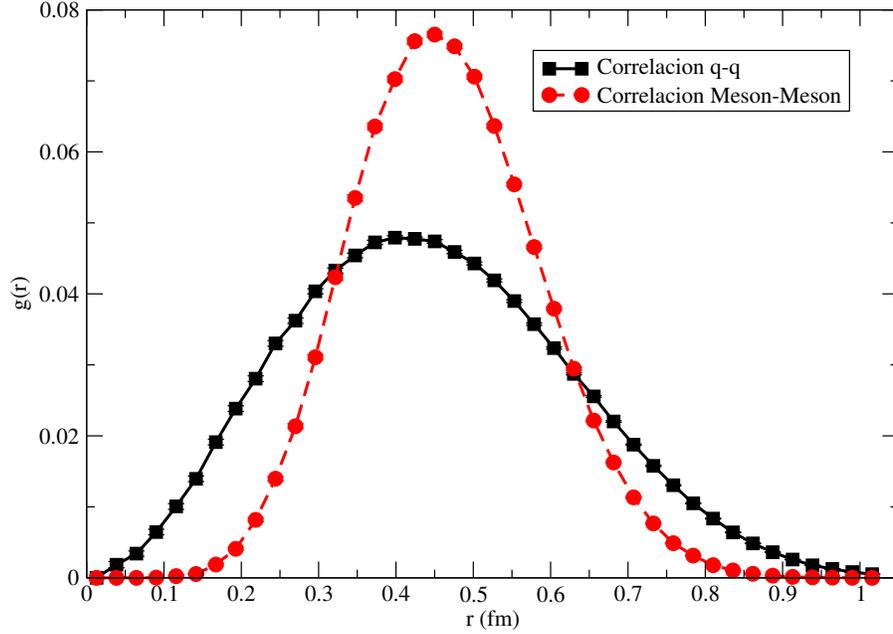


Figura 4.17: Función de correlación $g(r)$ entre quarks y mesones para una densidad $\epsilon = 1.4491 \text{MeV}/\text{fm}^3$: Sistema mesónico independiente

4.5. Identificación de la formación hadrónica

En la figura 4.18 se muestra la probabilidad de tener un sistema mesónico o de tetraquarks para los sistemas mezclados 1 y 2. Se observa que el número de eventos de un estado de 4 quarks en la simulación crece al aumentar la densidad de energía ϵ , para ambos sistemas mezclados, alcanzando una probabilidad constante después de $\epsilon = 0.3 \text{ GeV}/\text{fm}^3$. La probabilidad de encontrar un número de eventos de un estado tetraquark aumenta más rápidamente si se usa el potencial $V_{4Q-tree}$ en la simulación.

Nuevamente se observa la eficacia del potencial $V_{4Q-tree}$, que minimiza la energía potencial del sistema en un 50% de los casos, con respecto al potencial mesónico, a diferencia del potencial V_{4Q-cm} que sólo la minimiza en un 30% de los casos.

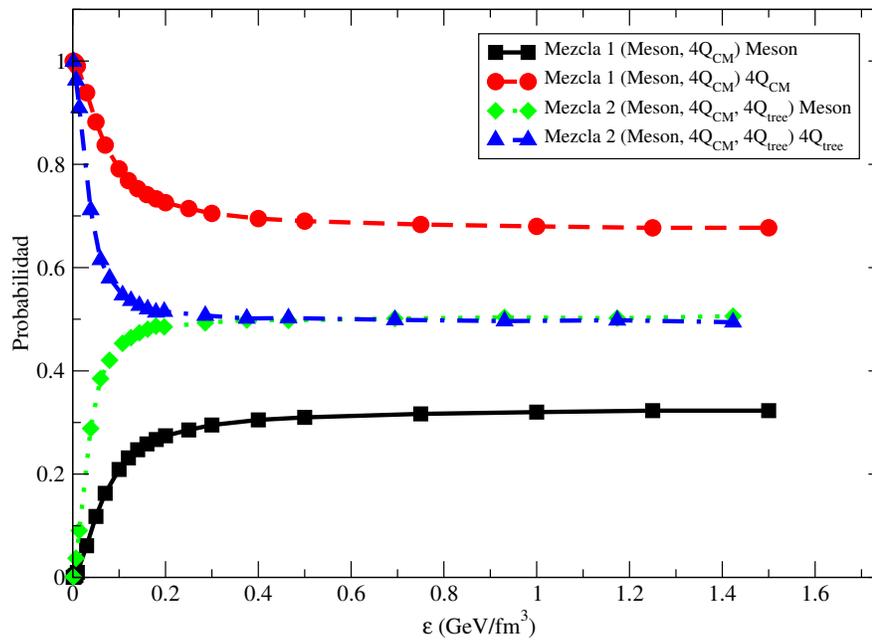


Figura 4.18: Probabilidad de tener un estado mesónico o tetraquark en la simulación

Capítulo 5

Conclusiones

Hemos utilizado el modelo String-Flip, el cual incorpora propiedades de QCD, con el cual hemos hecho un estudio de la formación de un estado compuesto por cuatro quarks ($q - \bar{q} - q - \bar{q}$) a partir de la presencia de dos estados de dos quarks ($q - \bar{q}$), o sea, dos mesones. Para poder hacer posible la formación de este estado en el modelo, implementamos potenciales de 4 cuerpos, los cuales denominamos Centro de masa (cm) y Steiner-tree (tree). Éste último requiere la implementación de un algoritmo para buscar dos vectores que minimicen la energía potencial.

El sistema formado por quarks es simulado dentro de una caja. Éstos forman mesones aislados cuando el volumen de ésta es muy grande. Así, podemos identificar un parámetro de distancia entre mesones, la cual puede ser variada cambiando el tamaño de la caja; sin embargo, consideramos de manera equivalente el parámetro de densidad de energía ϵ .

Encontramos que en el caso de la evolución de la energía por partícula con respecto a ϵ , aquella donde se incluye únicamente la posibilidad de formar mesones, disminuye cuando se incluye la posibilidad de la formación de un sistema ligado de 4 quarks (Centro de masa y Steiner-tree). El efecto es más notorio cuando se incluye la posibilidad de formar un tetraquark (tree), que cuando se incluye sólo la posibilidad de formación de un tetraquark (cm). A partir de una densidad de energía $\epsilon = 0.05 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ es posible distinguir esta disminución.

De la misma forma, el parámetro variacional óptimo λ disminuye más rápidamente al incluir al estado tetraquark tree, lo que indica que éste favorece una disipación en la interacción fuerte. Es importante mencionar que en ninguno de los casos estudiados el parámetro λ se anula completamente, lo que indica que existe una interacción remanente a valores altos de ϵ .

La distribución radial de los mesones también es sensible a la presencia de estados de tetraquark. Encontramos que los estados de 4 quarks permiten que a distancias cortas entre los mesones, éstos presenten un valor de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ más pequeño que aquel donde no lo permitimos. Por otra parte, el tamaño $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ de

un tetraquark, en un sistema independiente (sólo *cm* o sólo *tree*), es alrededor de 3 veces la de un mesón aislado, mientras que a altos valores de la densidad de energía esta relación se hace más corta, pues tiende a ser sólo 2 veces más grande.

Hemos observado las correlaciones cuánticas entre quarks del mismo tipo (correlación $q-q$) y entre mesones (correlación $M-M$). A pesar de que la correlación entre quarks es de naturaleza fermiónica y la de mesones de naturaleza bosónica, cuando los mesones están a una distancia grande entre sí ambas presentan el mismo comportamiento, debido a que cada quark en la correlación $q-q$ se encuentra en un mesón distinto. A cortas distancias es donde se puede apreciar mejor la diferencia entre ambas correlaciones. En el sistema mezclado de mesones con tetraquarks, la identificación de los mesones queda inhibida por la presencia de estos últimos, y por lo tanto la correlación relativa con respecto a aquella de un sistema de meson independiente es menor. Considerando que la correlación mesón-mesón es “fácil” de medir experimentalmente, ésta podría ofrecer una observable que de manera indirecta muestre la presencia de un estado de 4 quarks.

De los resultados, podemos concluir que no encontramos estados ligados de 4 quarks estables, puesto que la energía que presenta este estado rebasa el umbral de energía de dos mesones aislados.

Este trabajo es nuestra primera aproximación a una descripción de un sistema de 4 quarks. Inicialmente, introdujimos un potencial de tipo mesónico en el modelo String-Flip (V_{m1}, V_{m2}) y observamos que los resultados de la simulación concordaban con los valores teóricos descritos en el capítulo 3, para mesones aislados. Más adelante, a primera aproximación usamos el potencial V_{4Q-cm} para unir a 4 quarks a su centro de masa. Para mejorar este tipo de potencial, introdujimos el potencial $V_{4Q-tree}$, para el cual era necesario realizar un algoritmo para calcular los vectores \vec{k} y \vec{l} para minimizar la energía potencial de éste.

El potencial cuadrático que utilizamos para describir a las cuerdas de flujo gluónico tiene ventajas para trabajar con él. Sin embargo, pensamos que en el futuro habría que utilizarse un potencial lineal para describirlos, puesto que es el más utilizado y el más adecuado para modelar estas cuerdas de flujo gluónico. Puesto que en este trabajo sólo consideramos el mismo sabor entre los quarks (y por tanto masas iguales), una extensión del trabajo podría hacerse utilizando mesones compuestos de quarks de sabores distintos, en particular estados ligados de quarks pesados con ligeros. Por último, este modelo no considera interacción de espín entre las partículas, excepto aquella debida a su naturaleza fermiónica.

Evidencia experimental reciente [27] muestra la posible existencia de tetraquarks en sistemas compuestos de quarks bottom y antiquarks bottom, y dos quarks ligeros. Esto muestra la importancia y necesidad de tener una descripción sólida acerca de estos estados.

Apéndice A

Término Cinético $\langle W \rangle_\lambda$

La ecuación 3.17 nos dice que el término cinético del sistema de partículas está dado por:

$$\langle T \rangle_\lambda = T_{FG} + \langle W \rangle_\lambda$$

donde $\langle W \rangle_\lambda = \sum_i \frac{1}{2m_i} [\partial_i \ln F_\lambda(x)]^2$, donde $F_\lambda = e^{-\lambda V(x)}$, siendo $V(x)$ el potencial de muchos cuerpos (mesones y tetraquarks) mencionados en el capítulo 3, y ∂_i la derivada con respecto a la posición de la i -ésima partícula. Si hacemos el desarrollo para $\langle W \rangle_\lambda$ podemos ver que

$$\partial_i \ln F_\lambda(x) = \lambda \partial_i V(x)$$

y por lo tanto, el término $\langle W \rangle_\lambda$ está dado por:

$$\langle W \rangle_\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} [\partial_i V(x)]^2 \quad (\text{A.1})$$

Para realizar la simulación es necesario calcular el valor de $\langle W \rangle_\lambda$ para cada uno de los potenciales utilizados $V_{m1}, V_{m2}, V_{4Q-cm}, V_{4Q-tree}$, es decir, para cada una de las configuraciones del sistema.

El sistema que utilizamos sólo contiene dos quarks y dos antiquarks, con carga de color y anticolor correspondiente. Para el cálculo usaremos la notación siguiente para las posiciones de los quarks: $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 serán las posiciones de los quarks, \vec{r}_3 y \vec{r}_4 las posiciones de los antiquarks. $\vec{R}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$ es la posición del centro de masa del sistema, que es utilizado en los potenciales de tetraquark.

Comenzando con los potenciales de tipo mesón, podemos distinguir dos configuraciones del sistema, con los siguientes dos potenciales:

$$V_{m1} = \frac{1}{2} k [(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_4)^2] \quad (\text{A.2})$$

$$V_{m2} = \frac{1}{2}k [(\vec{r}_1 - \vec{r}_4)^2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2] \quad (\text{A.3})$$

Si tomamos una aproximación donde la masa de todos los quarks es la misma (m), sustituyendo los potenciales V_{m1} y V_{m2} en la ecuación A.1 tenemos que la expresión para el término cinético $\langle W \rangle_\lambda$ resulta de la siguiente forma:

$$\langle W \rangle_\lambda = \frac{2k}{m} \lambda^2 V_{m1(m2)} \quad (\text{A.4})$$

donde se introduce el potencial V_{m1} o V_{m2} dependiendo de la configuración del sistema.

Si consideramos masas distintas entre las partículas donde $m_i; i = 1, 2, 3, 4$ es la masa para cada partícula \vec{r}_i , podemos considerar las siguientes variables:

$$w_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2; \quad s_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_4)^2$$

$$w_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_4)^2; \quad s_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2$$

$$w_3 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2; \quad s_3 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2$$

$$w_4 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_4)^2; \quad s_4 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_4)^2$$

de tal forma que el término $\langle W \rangle_\lambda$ queda de la siguiente forma para cada configuración del sistema:

$$\langle W \rangle_\lambda = \frac{\lambda^2 k^2}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} w_i \text{ para el potencial } V_{m1} \quad (\text{A.5})$$

$$\langle W \rangle_\lambda = \frac{\lambda^2 k^2}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} s_i \text{ para el potencial } V_{m2} \quad (\text{A.6})$$

Continuamos ahora con el cálculo utilizando el potencial $V_{4Q_{cm}}$ para un estado ligado de 4 quarks. Este potencial está dado por:

$$V_{4Q_{cm}} = \frac{1}{2}k [(\vec{r}_1 - \vec{R}_{cm})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{R}_{cm})^2 + (\vec{r}_3 - \vec{R}_{cm})^2 + (\vec{r}_4 - \vec{R}_{cm})^2] \quad (\text{A.7})$$

donde $\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$; $M = \sum_i m_i$. Si comenzamos el cálculo usando sólo la derivada con respecto a la coordenada x de la primera partícula, tenemos que:

$$\partial_{1x} V_{4Q_{cm}} = k \left[\left(1 - \frac{m_1}{M}\right) (x_1 - x_{cm}) + \frac{m_1}{m} (x_2 - x_{cm}) + \frac{m_1}{m} (x_3 - x_{cm}) + \frac{m_1}{m} (x_4 - x_{cm}) \right]$$

$$= k \left[(x_{cm} - x_1) + \frac{m_1}{M} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_{cm}) \right]$$

Este resultado es análogo usando la derivada con respecto a las demás coordenadas (sustituyendo $x \rightarrow y, z$) y con respecto a la posición de las demás partículas 2, 3 y 4 (sustituyendo $1 \rightarrow 2, 3, 4$).

Observando que el término de la forma $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_{cm})$ se repite para todos los casos podemos utilizar un vector $\alpha = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 - 4\vec{R}_{cm}$ de tal forma que podemos definir las siguientes variables:

$$c_1 = \vec{R}_{cm} - \vec{r}_1 + \alpha \frac{m_1}{M}$$

$$c_2 = \vec{R}_{cm} - \vec{r}_2 + \alpha \frac{m_2}{M}$$

$$c_3 = \vec{R}_{cm} - \vec{r}_3 + \alpha \frac{m_3}{M}$$

$$c_4 = \vec{R}_{cm} - \vec{r}_4 + \alpha \frac{m_4}{M}$$

Entonces, el término $\langle W \rangle_\lambda$ utilizando el potencial V_{4Q-cm} queda de la siguiente forma:

$$\langle W \rangle_\lambda = \frac{\lambda^2 k^2}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} c_i \quad (\text{A.8})$$

Para realizar el cálculo usando el potencial de tipo tetraquark $V_{4Q-tree}$ tenemos que tomar en cuenta ciertas cosas. Este potencial está dado por:

$$V_{4Qtree} = \frac{1}{2} k \left[(\vec{r}_1 - \vec{k})^2 + (\vec{r}_2 - \vec{k})^2 + (\vec{k} - \vec{l})^2 + (\vec{r}_3 - \vec{l})^2 + (\vec{r}_4 - \vec{l})^2 \right] \quad (\text{A.9})$$

donde los vectores \vec{k} y \vec{l} ayudan a minimizar el potencial entre 4 cuerpos, como se mencionó el en capítulo 3. Como no se tiene una expresión exacta para calcular estos vectores, en este trabajo recurrimos a un algoritmo que realiza un sondeo de varias posiciones para estos vectores, simétricamente a partir de las coordenadas del centro de masa del sistema. Es decir, en el algoritmo los vectores \vec{k} y \vec{l} están dados por las siguientes expresiones:

$$\vec{k} = \vec{R}_{cm} + \vec{\Delta}; \quad \vec{l} = \vec{R}_{cm} - \vec{\Delta}$$

donde en el sondeo se va cambiando el valor del vector $\vec{\Delta}$ en coordenadas esféricas para valores discretos de la coordenada radial, polar y azimutal. Para cada valor

de $\vec{\Delta}$ se calcula la energía potencial del sistema, y sólo el valor que da lugar a una mínima energía potencial es tomado en cuenta, pues es éste el estado óptimo. Debido a este tipo de aproximación, desconocemos la dependencia real de \vec{k} y \vec{l} con respecto a las posiciones de las partículas. Entonces, por simplicidad, consideramos sólo la dependencia con respecto al centro de masa \vec{R}_{cm} y el vector $\vec{\Delta}$ es considerado sin dependencia con respecto a las posiciones de las partículas. Esta consideración simplifica el cálculo del término $\langle W \rangle_\lambda$ de tal forma que se vuelve muy parecido al realizado con el potencial V_{4Q-cm} , pues sólo hay que cambiar el valor de α por un valor $\beta = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 - 2\vec{k} - 2\vec{l}$. Evidentemente, si $\vec{\Delta} = (0, 0, 0)$ el potencial $V_{4Q-tree}$ se reduce al potencial V_{4Q-cm} .

Apéndice B

Algoritmo de Metrópolis

Los valores esperados de W y V se calcularon por medio de una simulación Monte Carlo en la cual se utilizó el *algoritmo de Metrópolis* [24]. A continuación describimos en qué consiste dicho algoritmo.

El método de Metrópolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller y Teller (1953), aplica para una distribución de probabilidad arbitraria [23]. Dado \vec{x} , un valor tentativo \vec{x}^T es generado por alguna distribución de probabilidad simétrica $F(\vec{x} \rightarrow \vec{x}^T) = F(\vec{x}^T \rightarrow \vec{x})$. Este valor tentativo es aceptado con probabilidad $\min\left(1, \frac{F(\vec{x}^T)}{F(\vec{x})}\right)$, de lo contrario, es rechazado.

Una fácil implementación de esta regla es rechazar el paso \vec{x}^T si $\frac{F(\vec{x}^T)}{F(\vec{x})} < \xi$ para un cierto valor ξ uniformemente distribuido en $(0, 1)$. La implementación más común es actualizando las variables $\{x_i\}$ secuencialmente definiendo $x_i^T = x_i + \xi \Delta x$ donde el valor de ξ está uniformemente distribuido en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Dada una configuración k en el sistema, en algoritmo de Metrópolis se propone una nueva configuración l aleatoria a partir de la configuración inicial

$$f(l, k) \text{ con normalización } \sum_l f(l, k) = 1$$

Esta nueva configuración l tiene un probabilidad de ser aceptada o rechazada, dada por:

$$P^{(l)(k)} = \min\left[1, \frac{P_B^k}{P_B^l}\right]$$

Si la configuración nueva es rechazada, la configuración original se mantiene y el algoritmo busca otra configuración nueva.

Podemos describir los pasos del algoritmo de la siguiente manera:

- Sea \vec{x}_0 un valor inicial y $\omega(\vec{x})$ la función de distribución que se desea generar.

- Sea \vec{x}_t un paso aleatorio en la vecindad de \vec{x}_0
- Evaluar la razón $r = \frac{\omega(\vec{x}_t)}{\omega(\vec{x}_0)}$
- Si $r > 1$ Tome el número como un valor permitido del paso
- Si $r < 1$ Genere un valor r_2 (aleatorio) tal que $0 < r_2 < 1$
- Si $r > r_2$ Tome un valor permitido del paso. Si esto no se cumple, quédese en la posición anterior

Apéndice C

Conversión de unidades

En el capítulo 2 se determinaron los valores del parámetro variacional λ_i y la energía por partícula E_i , así como el valor promedio del radio al cuadrado $\langle r_i^2 \rangle$, con $i = 2, 3$ para el problema de 2 y 3 cuerpos. Al calcular estos valores se consideraron tanto unidades naturales $\hbar = c = 1$ como $m = k = 1$ a fin de simplificar los cálculos, por lo que los valores resultantes son adimensionales. Para expresar las unidades de distancia en fm y las de energía en GeV hacemos las siguientes identificaciones con datos experimentales.

Para el caso de mesones, utilizamos los valores experimentales relacionados con el pión (π) para fijar las unidades.

Para fijar la unidad de distancia, utilizamos el valor del promedio del radio al cuadrado:

$$\langle r_2^2 \rangle = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1.0607 \quad (\text{C.1})$$

El valor experimental del promedio del radio al cuadrado para el caso del pión es:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = 0.5837 \text{ fm}^2 \quad (\text{C.2})$$

Por lo tanto, el factor de conversión para las distancias es R

$$R = \sqrt{\frac{\langle r_\pi^2 \rangle}{\langle r_2^2 \rangle}} = 0.7418 \text{ fm} \quad (\text{C.3})$$

Para fijar la unidad de energía, tomamos en cuenta la relación entre distancia y energía $\hbar c = 197.32 \text{ MeV fm}$. Sin embargo, para nuestro modelo, este procedimiento predice un valor de la masa del pión más pequeña de la observada. Para dar cuenta de este problema necesitamos realizar un reescalamiento de la energía,

o lo que es equivalente, fijar la unidad de energía a partir de la masa medida del pión, como se describe a continuación:

Tenemos que la energía total por partícula, incluyendo la masa, con $m = 1$, es:

$$E_{T2} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 2.0607 \quad (\text{C.4})$$

Esta cantidad tiene que estar en correspondencia con la masa del experimental del pión, $m_\pi \approx 0.140\text{GeV}$, dividida entre dos. Por lo que si nuestro factor de conversión lo denotamos como \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \frac{m_\pi/2}{E_{T2}} = 0.0340 \text{ GeV} \quad (\text{C.5})$$

Así como se utilizamos el valor experimental de la masa del pión para fijar la unidad de energía, de la misma forma podemos fijar esta unidad utilizando el valor experimental de la masa de la partícula $J/\Psi \approx 3,096 \text{ GeV}$, compuesta por un quark charm y un antiquark charm, para realizar un estudio de un tetraquarks formado por dos mesones J/Ψ . Con este valor experimental, el factor de conversión para la energía sería:

$$\mathbf{K}_2 = \frac{m_{J/\Psi}/2}{E_{T2}} = 0.7512 \text{ GeV} \quad (\text{C.6})$$

Bibliografía

- [1] *Particle Physics* B. R. Martin, G. Shaw, Wiley 1992.
- [2] *Introduction to Elementary Particles* David Griffiths, John Wiley and Sons. 1987.
- [3] *The Physics of the Standard Model and Beyond* T. Morii, C. S. Lim, World Scientific, 2004.
- [4] *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* F. Halzen, A. D. Martin, John Wiley and Sons. 1984.
- [5] *Introducción a la Mecánica Cuántica* de la Peña, Luis. Fondo de Cultura Económica. 2006.
- [6] R. L. Jaffe, Multi-Quark Hadrons. 1. The Phenomenology of (2 Quark 2 anti-Quark) Mesons, *Phys. Rev.*, D 15, (1977).
- [7] Pedro Bicudo, Nuno Cardoso, Marco Cardoso. *Color flux-tubes in static Tetraquark and Pentaquark systems*. arXiv:1111.0334v1 [hep-lat] (2011)
- [8] Eberhard Klempt, Alexander Zaitsev. *Glueballs, Hybrids, Multiquarks: Experimental facts versus QCD inspired concepts*. arXiv:0708.4016v1 [hep-ph] (2007) (y sus referencias)
- [9] Francesco Renga. *Signatures of Exotic Hadrons*. arXiv:1110.4151v2 [hep-ph] (2011)
- [10] J. Vijande, A. Valcarce, J. M. Richard, *Phys. Rev. D* 76, 114013 (2007)
- [11] F. Buccella, H. Hogaasen, J. M. Richard, *Eur. Phys. J. C* 49, 743754 (2007)
- [12] Wang, Stephen R. Cotanch, Ignacio J. General. *Eur. Phys. J. C* 55, 409415 (2008)
- [13] Fumiko Okiharu, Hideo Suganuma, Toru T. Takahashi, *Physical Review D* 72, 014505 (2005) (y sus referencias)

-
- [14] Okiharu, F ; Doi, T ; Ichie, H ; Iida, H ; Ishii, N ; Oka, M ; Suganuma, H *Tetraquark and pentaquarks systems in lattice QCD*. arXiv:hep-ph/0507187 (2005)
- [15] P. Bicudo, M. Cardoso. Phys. Rev. D 83, 094010 (2011)
- [16] Chenrong Deng, Jialun Ping, Fan Wang, T. Goldman. Phys. Rev. D 82, 074001 (2010)
- [17] G. Toledo Sánchez and J. Piekarewicz Phys. Rev. C 65, 045208 (2001)
- [18] G. Toledo Sánchez and J. Piekarewicz Phys. Rev. C 70, 035206 (2004)
- [19] A. Ayala, M. Martínez, G. Paić, G. Toledo, Phys. Rev. C 77, 044901 (2008)
- [20] *The Steiner Tree Problem* F. K. Hwang, D. S. Richards, P. Winter. 1992.
- [21] *Computational Physics* Steven E. Koonin (Benjamin Cummings, Menlo Park, 1986)
- [22] *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* Philip R. Bevington, D. Keith Robinson, McGraw Hill, 2003.
- [23] *Quantum Many Particle Systems*. John W. Negele, Henri Orland, Westview, 1998.
- [24] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller, J. Chem. Phys. 21, 1087 (1953)
- [25] A. L. Fetter, J. D. Walecka *Quantum Theory of Many Particle Systems* (McGraw Hill, New York, 1971)
- [26] Tesis de Licenciatura, Daniel Hernández Ramos. *Simulación de la formación de hadrones en condiciones extremas*. FC-UNAM, 2008.
- [27] <http://www.kek.jp/intra-e/press/2012/011014/>. *Belle discovers new heavy exotic hadrons*