



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

EFFECTOS DE LAS OSCILACIONES ENTRE NEUTRINOS ACTIVO Y ESTÉRIL EN LA  
NUCLEOSÍNTESIS PRIMORDIAL

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ULISES SOLÍS HERNÁNDEZ

ASESOR: DR. JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MÉXICO D.F. JUNIO, 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

Índice general	I
Introducción	III
<b>1. Nucleosíntesis en el Big Bang</b>	<b>1</b>
1.1. Cosmología Básica . . . . .	1
1.1.1. El Universo Temprano . . . . .	2
1.2. Nucleosíntesis Primordial . . . . .	5
1.2.1. Fracción de $^4\text{He}$ . . . . .	7
1.2.2. Predicciones y observaciones de las abundancias primordiales . . . . .	9
<b>2. Oscilaciones de Neutrinos</b>	<b>11</b>
2.1. Oscilaciones en el Vacío . . . . .	12
2.2. Oscilaciones entre dos Familias . . . . .	14
2.3. Oscilaciones en Materia . . . . .	16
2.4. Adiabaticidad . . . . .	19
2.5. Solución Adiabática . . . . .	21
2.6. Solución no Adiabática . . . . .	23
<b>3. Neutrinos Primordiales</b>	<b>26</b>
3.1. Desacople de los Neutrinos . . . . .	26
3.2. El Corrimiento al rojo de los Neutrinos . . . . .	30
3.3. Potencial efectivo del $\nu_e$ en el UT . . . . .	31
3.3.1. La asimetría leptónica . . . . .	35
3.4. Parámetro de Adiabaticidad . . . . .	36
3.5. Conversión no Resonante . . . . .	39
3.5.1. $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ en el caso no resonante . . . . .	40

3.6. Conversión Resonante . . . . .	44
<b>4. La Abundancia de Neutrones</b>	<b>48</b>
4.1. La Ecuación de evolución de $X_n$ . . . . .	49
4.2. Solución para $X_n$ . . . . .	52
4.3. Las Tasas de las Interacciones . . . . .	53
4.3.1. Expresión Integral de las Tasas . . . . .	53
4.3.2. Factor de Probabilidad en las Tasas . . . . .	56
4.4. Balance Detallado . . . . .	58
4.4.1. Caso en que $P = 1$ . . . . .	59
4.4.2. Caso en que $P < 1$ . . . . .	61
4.5. Expresión simplificada para $X_n^P$ . . . . .	62
<b>5. Cálculos y Resultados</b>	<b>67</b>
5.1. Efectos en las distribuciones de los neutrinos . . . . .	67
5.2. Cálculo de $X_n^P$ . . . . .	75
5.2.1. Dependencia de $X_n^P$ con $\delta m^2$ y $\sin^2 2\theta$ . . . . .	78
5.3. La Fracción de ${}^4\text{He}$ . . . . .	81
5.3.1. El comienzo de la nucleosíntesis . . . . .	81
5.3.2. Efectos de las oscilaciones en el ${}^4\text{He}$ . . . . .	86
5.3.3. Efectos de $\eta$ y $\Delta N_\nu$ en el ${}^4\text{He}$ . . . . .	89
<b>Conclusiones</b>	<b>92</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>96</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>98</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>102</b>

# Introducción

En la última década hemos alcanzado más certeza en cuanto a las propiedades de los neutrinos. Distintos experimentos con neutrinos solares, atmosféricos, de aceleradores y de reactores han confirmado las oscilaciones entre los neutrinos del Modelo Estándar (ME). En este fenómeno, neutrinos de sabores diferentes se transforman entre sí en su trayecto desde el lugar de su producción y el de detección. El mecanismo generalmente aceptado requiere que los neutrinos producidos en los procesos débiles ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) sean mezclas de los neutrinos con masas definidas ( $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ ). El marco teórico elaborado en base a la matriz de mezcla de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) explica los datos obtenidos y confirma que las masas de los neutrinos son no nulas. Los experimentos actuales están abocados a la medición más precisa de los parámetros que gobiernan las oscilaciones (ángulos y diferencias de los cuadrados de las masas), con dos pendientes de suma importancia: la jerarquía de masas de los neutrinos y el valor de la fase de violación de CP en la matriz de PMNS.

Los experimentos Homestake, Kamiokande, SAGE, GALLEX/GNO, SNO, Super-Kamiokande, y BOREXino, han detectado evidencias de las oscilaciones  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu, \nu_\tau$  con neutrinos provenientes del Sol. El experimento KamLAND confirmó estas oscilaciones observando la desaparición de  $\bar{\nu}_e$  de reactores en una distancia de 180 km. El ajuste combinado de los datos de neutrinos solares y KamLAND da como resultados para la diferencia de masas al cuadrado  $\Delta m_{Sol}^2 = (7.6 \pm 0.2) \times 10^{-5} \text{eV}^2$  y ángulo de mezcla  $\tan^2 \theta_{Sol} = 0.44 \pm 0.03$  [1]. Por otro lado, experimentos con neutrinos atmosféricos como Kamiokande, IMB, Super-Kamiokande MACRO, Soudan-2 y MINOS han medido la desaparición de  $\nu_\mu$  y  $\bar{\nu}_\mu$  generados por valores de la diferencia de masas  $\Delta m_{atm}^2 \simeq 2.3 \times 10^{-3} \text{eV}^2$  y ángulo de mezcla  $\sin^2 2\theta_{atm} \simeq 1$  [2]. Los experimentos de larga distancia K2K y MINOS confirmaron estas oscilaciones observando la desaparición de  $\nu_\mu$  a distancias de 250 km y 730 km,

respectivamente. Los datos de MINOS dan  $\Delta m_{atm}^2 = 2.32_{-0.08}^{+0.12} \times 10^{-3} \text{eV}^2$  y  $\sin^2 2\theta_{atm} > 0.90$  con un nivel de confianza (C. L. por sus siglas en inglés) de 90 % [3].

En el esquema usual de mezclas de tres neutrinos activos en el que cada neutrino de sabor  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  es una superposición de tres neutrinos masivos  $\nu_1, \nu_2$  y  $\nu_3$ ; las dos diferencias de masas medidas pueden ser interpretadas como

$$\Delta m_{Sol}^2 = \Delta m_{21}^2, \quad \Delta m_{atm}^2 = |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2|. \quad (1)$$

Con la parametrización estándar de una matriz unitaria de  $3 \times 3$ ,  $\theta_{Sol} \simeq \theta_{12}$ ,  $\theta_{atm} \simeq \theta_{23}$  y  $\sin^2 \theta_{13} < 0.035$  en un C.L. de 90 % [4]. Si tenemos tres autoestados de masa, hay tres tipos de diferencias  $\Delta m_{ij}^2$  que satisfacen

$$\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2 + \Delta m_{13}^2 = 0. \quad (2)$$

Este esquema se ve cuestionado por la reciente observación de una señal de corta distancia  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$  en el experimento MiniBooNE [5], el cual concuerda con una señal similar observada años atrás en el experimento LSND [6]. Estos resultados sugieren la existencia de diferencias de cuadrados de masas con valores mayores que  $\Delta m_{Sol}^2$  y  $\Delta m_{atm}^2$ , del orden de  $0.5 \text{eV}^2$ . Por ende, si todos los cambios de sabor reportados son correctos, entonces la naturaleza debe contener al menos cuatro autoestados de masa de los neutrinos para tener una tercera escala de oscilación y esto sugiere que puede haber más de tres especies de neutrinos. Al tener un número de autoestados de masas superior a tres, una combinación lineal de ellos no tendrá un leptón asociado y, en consecuencia, no se acoplará al bosón W del Modelo Estándar. Dado que el decaimiento del bosón Z limita a tres el número de neutrinos de sabor, entonces este neutrino tampoco se acoplará a la partícula Z. Un neutrino de esta clase que no tiene algún acoplamiento débil es conocido como un neutrino “estéril”  $\nu_s$ .

Los datos de la radiación cósmica de fondo (CMB por sus siglas en inglés) y de cúmulos de galaxias concuerdan con las expectativas del modelo cosmológico estándar de formación de estructuras, basado en una perturbación inicial inflacionaria y una constante cosmológica. Debido a este éxito, es posible usar la cosmología para probar propiedades de partículas como los neutrinos. Por ejemplo, recientes análisis [7] han situado sus masas en  $m_\nu < 0.16 \text{eV}$  en el contexto de tres sabores de neutrinos. La cosmología también permite estudiar restricciones a física nueva más allá del modelo estándar. En particular se puede analizar la existencia de los neutrinos sin

interacciones. En un reciente trabajo [8] se encontró el límite  $m_{\nu_s} < 0.26$  eV para la masa de un neutrino estéril.

También se piensa que los neutrinos estériles podrían contribuir a la formación de estructuras a gran escala, siendo el componente principal de la materia oscura tibia (WDM por sus siglas en inglés). Sin embargo, hay una discrepancia con respecto a las masas de los neutrinos; de LSND se establece que la masa de los neutrinos estériles debe estar en el rango de los eV, pero en WDM la masa de los neutrinos estériles debe ser del orden de keV [9]. Los  $\nu_s$  también estarían presentes en violentas explosiones estelares como las supernovas, la creación de los elementos más pesados depende de la cantidad de neutrones presentes y este número es modificado si existen  $\nu_s$  [10]. En este mismo contexto estelar, una expulsión asimétrica de neutrinos estériles de masa del orden de KeV inducida por oscilaciones dentro de una protoestrella de neutrones en presencia de campos magnéticos intensos, explicaría la observación de las altas velocidades de traslación que se observan en el caso de los pulsares [11].

La producción de  $\nu_s$  es predicha por diferentes teorías: modelos tipo GUT, modelos con dimensiones extra o modelos de materia espejo [12]. También pueden ser producidos por mezclas en un esquema de cuatro o cinco especies de neutrinos. Existen modelos para comprender las masas de los neutrinos estériles tales como el mecanismo de “seesaw” que establece que el  $\nu_s$  debe ser un neutrino derecho ligero y otro modelo espejo donde se introducen tres neutrinos ligeros [12].

Las oscilaciones de neutrinos tuvieron un gran impacto en el Universo Temprano. En particular, la conversión de neutrinos activos a estériles influiría en la nucleosíntesis de los elementos ligeros y esto a la vez permite establecer restricciones a los parámetros de las oscilaciones. La física de los neutrinos en el plasma primordial fue estudiada, primero analíticamente en [13] y numéricamente en [14]. En estos trabajos se consideran dos efectos de las oscilaciones: la disminución en la densidad de los neutrinos y la distorsión del espectro de energía de los neutrinos. Ambos trabajos y uno más reciente [15], descartan las soluciones de ángulo grande para las oscilaciones  $\nu_e \leftrightarrow \nu_s$  en los neutrinos solares y atmosféricos. Los efectos de las oscilaciones sin equilibrio son difíciles de describir analíticamente, Kirilova y Chizhov [16] propusieron abordar el problema usando las ecuaciones cinéticas para la matriz de densidad de los neutrinos y la densidad de número de los neutrones. Cálculos numéricos más completos de la producción de  ${}^4\text{He}$  fueron realizados por los mismos autores en [17, 18, 19] para los casos resonante y no resonante.

Un caso más general que considera que antes de las oscilaciones la población de neutrinos estériles sea diferente de cero es tratado por Kirilova en [20]. Es con estos últimos trabajos con los que comparamos nuestros resultados.

En este trabajo hacemos un estudio semianalítico de los efectos de las oscilaciones  $\nu_e \leftrightarrow \nu_s$  en la nucleosíntesis del Big Bang (BBN por sus siglas en inglés). Para llevar a cabo este objetivo calculamos en la forma más general las probabilidades para los casos resonantes y no resonantes, tomando en cuenta los efectos de materia, a diferencia de otros trabajos donde se considera una propagación en el vacío [21] o donde se hacen hipótesis sobre la densidad inicial de materia [22]. Obtenemos una expresión analítica de estas probabilidades. Probamos también que para el caso en que  $P \neq 1$ , el balance detallado entre las tasas de las interacciones débiles que modifican el número de neutrones no se mantiene si existen las oscilaciones. Sin embargo, mostramos que es posible despreciar un término en estas tasas y, con ello, que se cumple el balance detallado. Así podemos escribir nuestras expresiones para la abundancia de neutrones  $X_n$  de una forma semianalítica. Esta expresión nos permitirá hacer cálculos más sencillos y tiene la ventaja que muestra en forma más clara la participación de todos los parámetros involucrados en la física del problema. Mediante una consideración sobre el grado de incertidumbre en los valores observados del  ${}^4\text{He}$ , obtenemos cotas a los valores de los parámetros de los neutrinos para ambos casos resonante y no resonante.

También analizamos cómo influye explícitamente un número adicional de neutrinos  $\Delta N_\nu \neq 0$  en la fracción de neutrones y por tanto en la cantidad de helio. Aquí mostramos por separado, las influencias de las oscilaciones y del número adicional de especies de neutrinos. Finalmente, analizamos el cambio en la cantidad de  ${}^4\text{He}$  cuando modificamos el otro parámetro fundamental en cosmología, la fracción de número de fotones entre bariones  $\eta$ . Comparamos nuestros resultados con las gráficas que se hacen de las observaciones astronómicas.

La tesis está constituida de seis capítulos: En el primero introducimos los conceptos básicos de cosmología y de la nucleosíntesis en el Universo Temprano (UT). Luego en el segundo reproducimos la teoría de las oscilaciones de neutrinos cuando se propagan en materia. En el tercero trabajamos exclusivamente con los neutrinos creados en el UT y las interacciones que tienen con la materia durante esa época, aquí se muestra el potencial efectivo sobre los neutrinos y cómo se calculan sus probabilidades de supervivencia. En el cuarto capítulo calculamos las tasas de las interacciones débiles que crean y

destruyen a los protones y neutrones y hacemos nuestra aproximación más importante para calcular  $X_n$ . En el quinto mostramos los resultados de los cálculos realizados y la forma en que llegamos a ellos. Finalizamos, en las conclusiones, con un análisis de los productos obtenidos en la tesis.



# Capítulo 1

## Nucleosíntesis en el Big Bang

### 1.1. Cosmología Básica

La época cuando el universo estaba dominado por la radiación se conoce como el Universo Temprano (UT). El modelo estandar del UT está determinado por tres teorías físicas: la expansión del universo es gobernada por la *relatividad general*, las interacciones entre partículas son descritas por el *modelo estándar* y las distribuciones de partículas por la *física estadística*.

Suponiendo al universo homogéneo e isotrópico, su expansión obedece la ecuación de Friedmann

$$H^2(t) = \frac{8\pi G_N}{3}\rho(t) - \frac{k}{R^2(t)}, \quad (1.1)$$

donde  $G_N$  es la constante de Newton,  $\rho(t)$  la densidad de energía del universo y  $H = \dot{R}/R$  el parámetro de expansión. Aquí,  $R(t)$  es el factor de escala cósmico, el cual tiene dimensiones de longitud. La constante  $k$  determina la geometría espacial del universo que es euclideo (plano) para  $k = 0$  y positiva o negativamente curvo para  $k = \pm 1$ , respectivamente. El universo es espacialmente cerrado y re-colapsará en el futuro si  $k = 1$ , mientras que para  $k = 0$  o  $-1$  es abierto y se expande para siempre.

Durante la época que nos interesa, cuando  $T \sim 1 - 100$  MeV, el término de curvatura en la expansión del universo resulta despreciable. Entonces el factor de escala cumple con

$$H^2(t) = \frac{8\pi}{3}G_N\rho(t). \quad (1.2)$$

De la ecuación (1.2) vemos que hay una relación unívoca entre  $\rho$  y  $H$ . La densidad correspondiente al parámetro de Hubble en la actualidad  $H_0$  es llamada la densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N} = h^2 1.88 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}, \quad (1.3)$$

donde

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}. \quad (1.4)$$

La densidad es con frecuencia expresada como una fracción de la densidad crítica a través de  $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ . Un valor de  $\Omega = 1$ , corresponde a un universo plano.

El modelo también tiene como parámetro la razón  $\eta$  del número de bariones  $n_b$  entre el número de fotones:

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma}. \quad (1.5)$$

En particular, las abundancias predichas de los elementos ligeros dependen de  $\eta_{10} = \eta/10^{-10}$ . Como el número de fotones del universo es conocido por la radiación de fondo ( $411 \pm 2$  fotones por  $\text{cm}^3$ ), entonces

$$\Omega_{b,0} h^2 = 3.65 \times 10^{-3} \eta_{10}, \quad (1.6)$$

donde  $\Omega_{b,0}$  es la densidad de bariones al día de hoy.

### 1.1.1. El Universo Temprano

En el presente, la radiación residual del Big Bang consta de partículas relativistas a diferentes temperaturas, 2.75 K para los fotones y 1.96 K para los neutrinos. Pero en el universo temprano [23], fotones, neutrinos y nucleones estaban en una buena aproximación en equilibrio térmico.

La densidad de número  $n$ , la densidad de energía  $\rho$ , y la presión  $p$  de un gas diluido de partículas que interactúan débilmente, con un número  $g$  de grados internos de libertad, están dadas por

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{p}) d^3p, \\ \rho &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3p, \\ p &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E} f(\mathbf{p}) d^3p, \end{aligned} \quad (1.7)$$

con  $E^2 = |\mathbf{p}^2| + m^2$ . Para una especie en equilibrio cinético el espacio fase ocupado  $f$  esta dado por las distribuciones de Fermi-Dirac o Bose-Einstein

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}, \quad (1.8)$$

donde  $\mu$  es el potencial químico de las especies. Si las partículas están en equilibrio químico su potencial químico se relaciona con el de otras especies con las que interactúa. Por ejemplo, si la especie  $i$  reacciona con las especies  $j, k, l$ , a través de  $i + j \leftrightarrow k + l$ , entonces  $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l$ , siempre que el equilibrio químico se mantenga.

En el límite relativista ( $T \gg m$ ), y para  $T \gg \mu$ , resulta

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{cases} (\pi^2/30)gT^4 & \text{Bose} \\ (7/8)(\pi^2/30)gT^4 & \text{Fermi} \end{cases} \\ n &= \begin{cases} (\zeta(3)/\pi^2)gT^3 & \text{Bose} \\ (3/4)(\zeta(3)/\pi^2)gT^3 & \text{Fermi} \end{cases} \\ p &= \rho/3, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde  $\zeta(3) = 1.20206\dots$  es la función zeta de Riemann. Por otra parte, en el límite no relativista, cuando  $m \gg T$ , estas cantidades son las mismas para fermiones y bosones:

$$\begin{aligned} n &= g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp[-(m - \mu)/T], \\ \rho &= \exp(\mu/T)(g/\pi^2)gT^3, \\ p &= nT \ll \rho. \end{aligned} \quad (1.10)$$

La densidad de energía total de las especies en equilibrio puede expresarse en términos de la temperatura  $T$  del fotón

$$\rho_R = T^4 \sum_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \frac{g_i}{2\pi^2} \int_{x_i}^{\infty} \frac{(u^2 - x_i^2)^{1/2} u^2 du}{e^{(u-y_i)} \pm 1} \quad (1.11)$$

donde  $x_i \equiv m_i/T_i$ ,  $y_i \equiv \mu_i/T_i$ ,  $u \equiv E_i/T_i$  y hemos tomado en cuenta la posibilidad de que cada una de las especies  $i$  tenga una distribución térmica en equilibrio pero con una temperatura diferente a la del fotón.

Como la densidad de energía y presión de las especies no relativistas es exponencialmente más pequeña que la de una especie relativista, es una

buena aproximación incluir sólo las partículas relativistas en la suma de la ecuación (1.11). En este caso, la expresión para  $\rho_R$  se reduce a

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (1.12)$$

donde  $g_*$  es el número total de grados de libertad de especies con  $m_i \ll T$ , es decir,

$$g_* = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4. \quad (1.13)$$

Notemos que  $g_*$  es una función de  $T$  puesto que la suma corre sólo sobre aquellas especies con masa  $m_i \ll T$ . Para  $T \geq 300$  GeV, todas las especies en el universo son relativistas: 8 gluones,  $W^\pm$ ,  $Z^0$ , las tres generaciones de quarks y leptones y un doblete de Higgs; a esta temperatura  $g_* = 106.75$ . Cuando  $1 \text{ MeV} \geq T \geq 100 \text{ MeV}$ , las partículas relativistas son los 3 tipos de neutrinos, el fotón, el electrón y el positrón; en este periodo  $T_\nu = T$  y  $g_* = 10.75$ . Para temperaturas del orden de  $T \ll 1 \text{ MeV}$ , las únicas especies relativistas son las tres especies de neutrinos y el fotón, además debido a la aniquilación de pares electrón-positrón  $T_\nu = (4/11)^{1/3} T$  y  $g_* = 3.36$ .

Podemos calcular ahora la relación entre el tiempo y la temperatura en la época de radiación. La densidad de energía cuando dominaban las partículas relativistas va como  $\rho \sim R^{-4}$ , entonces de la ecuación de Friedmann tenemos que  $H^2 \sim R^{-4}$  y por lo tanto que  $\dot{R} \propto 1/R$ . Una vez que integramos tenemos para el factor de escala que  $R \propto t^{1/2}$  y encontramos que para el parámetro de Hubble

$$H = \frac{1}{2} t^{-1}. \quad (1.14)$$

Por otro lado, cuando la densidad de energía total se sustituye en la ecuación de Friedmann y si usamos que  $G_N = m_{pl}^{-2}$ , donde  $m_{pl}$  es la masa de Planck, entonces

$$H^2 = \frac{4\pi^3}{45} m_{pl}^{-2} g_* T^4 \quad (1.15)$$

y de la ecuación (1.14) obtenemos por fin la relación entre temperatura y tiempo

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{90}{8\pi^3} g_*^{-1/2} \frac{m_{pl}}{T^2}} = 0.301 g_*^{-1/2} \frac{m_{pl}}{T^2}. \quad (1.16)$$

Escribimos el valor de  $m_{pl} = 1.22 \times 10^{19} \text{GeV}$ , y multiplicamos por  $\hbar = 6.582 \times 10^{-22} \text{MeVs}$  para tener el tiempo expresado en segundos:

$$t = 2.4156 \frac{g_*^{-1/2}}{T^2} \text{MeV}^2 \text{s}, \quad (1.17)$$

en donde la temperatura  $T$  debe estar en MeV.

El número de especies de neutrinos en el modelo estandar es 3, pero suponiendo que existan más escribimos los grados de libertad en términos de  $\Delta N_\nu \equiv N_\nu - 3$ , siendo  $N_\nu$  el número de tipos de neutrinos; de esta forma, para temperaturas  $100 \text{ MeV} \geq T \geq 1 \text{ MeV}$  los grados de libertad para las especies relativistas son:

$$\begin{aligned} g_{*rad} &= 2_\gamma + \frac{7}{8} [2_e + 2_{e^+} + 2(N_\nu - 3) + 6] = 10.75 + 1.75 \Delta N_\nu \\ &= 10.75 (1 + 0.162791 \Delta N_\nu). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Lo anterior nos da la siguiente relación entre tiempo y temperatura para la época de radiación

$$t = \frac{0.73675}{T^2} (1 + 0.162791 \Delta N_\nu)^{-1/2} \text{MeV}^2 \text{s}, \quad (1.19)$$

expresión que nos será útil en el capítulo 5.

## 1.2. Nucleosíntesis Primordial

La síntesis de los elementos ligeros es la historia de las abundancias de las especies nucleares  $(A, Z)$ , con número de masa  $A$  y número atómico  $Z$ . Si se tiene equilibrio termodinámico las densidades son consecuencia del equilibrio estadístico nuclear (NSE), es decir, cuando evolucionan como

$$n_A = g_A \left( \frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{\mu_A - m_A}{T} \right). \quad (1.20)$$

Si las reacciones nucleares que producen núcleos con  $Z$  protones y  $A - Z$  neutrones ocurren rápidamente, el potencial químico de las especies está relacionado con el de los neutrones y protones por

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n. \quad (1.21)$$

La ecuación (1.20) también se aplica al neutrón y al protón. Usando este hecho podemos expresar  $\exp(\mu_A/T)$  en términos de las densidades de los nucleones (protón y neutrón):

$$\begin{aligned}\exp(\mu_A/T) &= \exp[(Z\mu_p + (A - Z)\mu_n)/T] \\ &= n_p^Z n_n^{A-Z} \left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{3A/2} 2^{-A} \exp[(Zm_p + (A - Z)m_n)/T].\end{aligned}\quad (1.22)$$

En esta ecuación, en el término entre paréntesis, la diferencia entre  $m_p$  y  $m_n$  no es importante y hemos tomado ambos iguales a una masa común, la masa del nucleón  $m_N$ .

Recordando la definición de la energía de ligadura del núcleo ( $A, Z$ )

$$B_A \equiv Zm_p + (A - Z)m_n - m_A, \quad (1.23)$$

y usando  $m_N \approx m_A/A$ , de las ecuaciones (1.20) y (1.22) obtenemos

$$n_A = g_A A^{3/2} 2^{-A} \left(\frac{2\pi}{m_N T}\right)^{3(A-1)/2} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp(B_A/T). \quad (1.24)$$

Como las densidades de número de las partículas disminuyen como  $R^{-3}$ , generalmente se expresan estas abundancias como la fracción de masa contribuida por cada una de las especies

$$\begin{aligned}X_n &\equiv \frac{n_n}{n_N}, \quad X_p \equiv \frac{n_p}{n_N}, \quad X_A \equiv \frac{An_A}{n_N}, \\ \sum X_n + X_p + X_i A_i &= 1,\end{aligned}\quad (1.25)$$

donde  $n_A$  es la densidad de número de la especie nuclear ( $A, Z$ ) y  $n_N$  es la densidad total de los nucleones  $n_N = n_n + n_p + \sum_i A_i n_{A_i}$ . Usando esta definición determinamos la fracción de masas de la especie ( $A, Z$ ) por

$$\begin{aligned}X_A &= g_A [\zeta(3)^{A-1} \pi^{(1-A)/2} 2^{(3A-5)/2}] A^{5/2} (T/m_N)^{3(A-1)/2} \\ &\quad \times \eta^{A-1} X_p^Z X_n^{A-Z} \exp(B_A/T).\end{aligned}\quad (1.26)$$

donde usamos  $n_\gamma = 2\zeta(3)T^3/\pi^2$  y  $\eta$  es la razón de bariones a fotones (1.5), en la que estrictamente  $n_b = n_N$  pues los únicos bariones presentes son los nucleones.

### 1.2.1. Fracción de ${}^4\text{He}$

La cantidad más importante para explicar la abundancia actual de los elementos ligeros es la fracción de masas del  ${}^4\text{He}$ . Como todo el helio presente hasta el día de hoy no pudo ser producido por las estrellas, la mayoría de estos núcleos deben tener su origen en la nucleosíntesis primordial. Cuando la temperatura del universo disminuye, las abundancias de los nucleones aumentan, pero las tasas a las que se producen las reacciones nucleares entre nucleones y leptones disminuyen. Llega un momento en que estas reacciones son incapaces de modificar el número de nucleones y la abundancia de neutrones se congela (Freeze-out).

Además de las trazas de otros núcleos, la nucleosíntesis en el Big Bang (BBN) produce primariamente  ${}^4\text{He}$ . Debido a la enorme energía de ligadura del  ${}^4\text{He}$ , igual a 28.3 MeV, hubo que esperar a que la temperatura del universo disminuyera a temperaturas por abajo del freeze-out  $T_F \approx 0.7$  MeV, para que todos los neutrones presentes fueran capturados en  ${}^4\text{He}$ . Es una buena aproximación suponer esto, y por eso la fracción de masas de helio, que comúnmente se presenta como  $Y_P$ , se puede calcular de la siguiente forma

$$Y_P = \frac{4n_{He}}{n_b} \approx \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2(n_n/n_p)_{BBN}}{1 + (n_n/n_p)_{BBN}}. \quad (1.27)$$

Por lo tanto,  $Y_P$  depende de la razón  $(n_n/n_p)$ . El balance entre neutrones y protones es mantenido por las interacciones débiles

$$\begin{aligned} \nu_e + n &\leftrightarrow p + e, \\ e^+ + n &\leftrightarrow p + \bar{\nu}_e, \\ n &\leftrightarrow p + e + \bar{\nu}_e. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Cuando las tasas para estas interacciones son rápidas comparadas con la razón de expansión del universo, se conserva el equilibrio químico y tenemos

$$\mu_n + \mu_\nu = \mu_p + \mu_e, \quad (1.29)$$

de lo cual se sigue que

$$\frac{n}{p} \equiv \frac{n_n}{n_p} = \frac{X_n}{X_p} = \exp[-Q/T + (\mu_e - \mu_\nu)/T], \quad (1.30)$$

donde  $Q \equiv m_n - m_p = 1.293$  MeV. Si suponemos que  $|\mu_{e,\mu}|/T \ll 1$ , la razón  $n/p$  depende sólo de la temperatura

$$\frac{n}{p} = \exp(-Q/T). \quad (1.31)$$

Los procesos en (1.28) se congelan cuando la rapidez con que ocurren es menor que la razón con la que se expande el universo. Las tasas de estas reacciones tienen la forma  $\Gamma \simeq n_\nu \langle \sigma v \rangle$ , donde  $n_\nu$  es la densidad de neutrinos y  $\langle \sigma v \rangle$  es el promedio de la sección eficaz. Como  $n_\nu \sim T^3$ ,  $\sigma \sim G_F^2 T^2$ , donde  $G_F$  es la constante de Fermi de las interacciones débiles, y  $v \sim 1$  por ser partículas relativistas, se tiene que

$$\Gamma \sim G_F^2 T^5. \quad (1.32)$$

Por otra parte, la razón de expansión del universo definida por el parámetro de Hubble  $H$ , puede expresarse a partir de la ecuación (1.15),

$$H \sim m_{pl}^{-1} g_*^{1/2} T^2. \quad (1.33)$$

Equiparando ambas escalas obtenemos la temperatura del freeze-out  $T_F$ , a partir de la cual comienza el congelamiento de las reacciones que determinan la cantidad de neutrones:

$$T_F \sim \frac{g_*^{1/6}}{(m_{pl} G_F^2)^{1/3}}. \quad (1.34)$$

Así vemos que la temperatura del congelamiento depende del número efectivo de especies relativistas. En particular, el número de especies de neutrinos juega un papel central en la producción de Helio.

En el caso estándar ( $N_\nu = 3$ ),  $T_F \simeq 0.7$  MeV y una vez que la temperatura alcanza este valor la razón  $n/p$  permanece constante,

$$\left(\frac{n}{p}\right)_F \simeq \exp(-Q/T_F) \simeq \frac{1}{6}. \quad (1.35)$$

Para  $T < T_F$  (después de 1 segundo), la razón cambia sólo por el decaimiento libre del neutrón con una vida media de  $\tau_n \simeq 887$  s, este decremento es exponencial de la forma  $\exp(-t/\tau_n)$ . La síntesis del  ${}^4\text{He}$  tiene lugar cuando  $(n/p)_{BBN} \simeq 1/7$ . Insertando este valor en la ecuación (1.27) obtenemos  $Y_P \simeq 0.25$ . Todas las estimaciones dependen de  $T_F$ , un valor más alto de esta temperatura incrementa  $n/p$  y, en consecuencia, también aumenta  $Y_P$ .

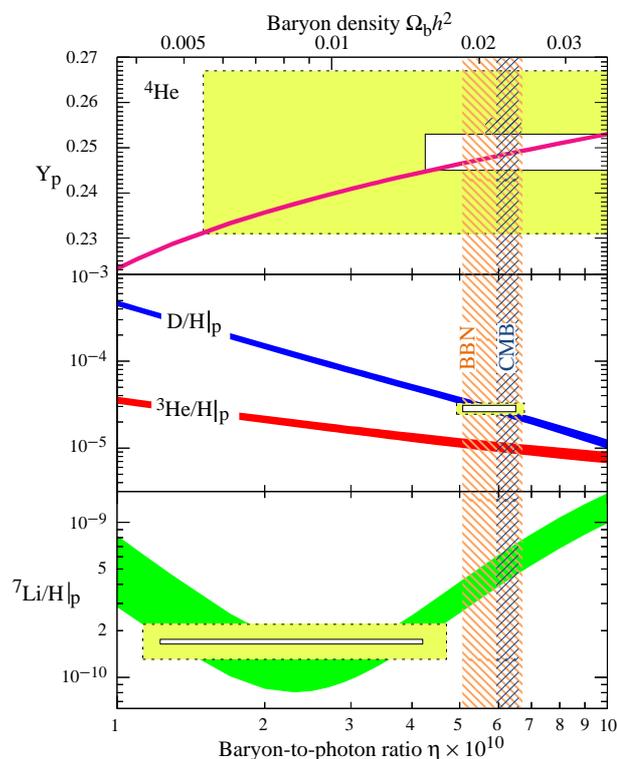


Figura 1.1: Dependencia de las abundancias de los elementos primordiales con  $\eta_{10}$  [24].

### 1.2.2. Predicciones y observaciones de las abundancias primordiales

Los dos principales parámetros cosmológicos de los que dependen las predicciones de  $Y_P$  son: el número de grados de libertad y la razón de bariones a fotones  $\eta_{10}$ . Un incremento de  $g_*$  aumenta  $H(T) \sim g_*^{1/2} T^2$  y hace más alta la temperatura del freeze-out  $T_F \sim g_*^{1/6}$ . La dependencia con  $\eta_{10}$  es más complicada y debe seguirse a través de la integración numérica de complicadas ecuaciones. Kolb y Turner [23] dan la siguiente fórmula ajustada a  $Y_P$

$$Y_P = 0.230 + 0.025 \log(\eta_{10}) + 0.013 \Delta N_\nu. \quad (1.36)$$

En el capítulo 5 obtendremos una expresión similar para  $Y_P$  en términos de  $\eta_{10}$  y  $\Delta N_\nu$ .

Es usual mostrar las predicciones de las abundancias de los elementos ligeros con gráficas en términos de la razón bariónica [24]. La fig 1.1 muestra estos resultados.

La mejor medida de la fracción de  $\text{He}^4$  proviene de la observación de regiones extragalácticas de hidrógeno ionizado. En estos sistemas la abundancia de los elementos más pesados que no fueron creados en el Big Bang es muy baja, así podemos suponer que las abundancias en estas regiones son cercanas a las del universo temprano. Un valor presente estimado [25] es

$$Y_P = 0.248 \pm 0.003. \quad (1.37)$$

La consistencia entre la teoría y las observaciones da una estimación para la razón de bariones a fotones [26]

$$4.9 \times 10^{-10} < \eta < 7.1 \times 10^{-10}, \quad (1.38)$$

en la que se cumple la relación  $\eta_{10} = 10^{10}\eta = 274\Omega_b h^2$  dada en (1.6).

## Capítulo 2

# Oscilaciones de Neutrinos

En junio del 2002 una colaboración internacional de científicos canadienses, estadounidenses y británicos hizo un importante anuncio: habían resuelto junto con KamLAND el enigma de los neutrinos solares. Ellos reportaron un importante resultado de los neutrinos provenientes del Sol obtenidos con el detector de 1000 toneladas de agua pesada localizado en Sudbury Ontario, Canada. SNO (Solar Neutrino Observatory), observó neutrinos del electrón en un número aproximadamente igual a un tercio del total de neutrinos de todos los tipos predicho por el modelo estándar solar. Este faltante es explicado si los neutrinos restantes están presentes pero en un tipo de partícula distinta a los neutrinos electrónicos. Las mediciones de SNO mostraron que la mayoría de los neutrinos producidos en el interior del Sol (todos ellos neutrinos del electrón), cambiaban a neutrinos del muón y del tau en el tiempo en que les tomaba llegar a la Tierra. Este cambio de identidad es un efecto mecánico cuántico llamado oscilaciones de neutrinos.

El modelo estándar de la física de partículas supone que los neutrinos no tienen masa. Sin embargo, en el mecanismo generalmente aceptado, para que las oscilaciones ocurran, los neutrinos deben ser masivos y, por lo tanto, el modelo estándar debe ser revisado. La conversión de neutrinos de sabores es un fenómeno que puede ocurrir cuando los neutrinos se propagan a través del vacío, pero ante la presencia de un medio, es posible que las oscilaciones se vean afectadas de un modo dramático debido a las interacciones de los neutrinos con la materia.

## 2.1. Oscilaciones en el Vacío

De acuerdo con el Modelo Estándar (SM) de las interacciones electrodébiles, los leptones se encuentran agrupados en tres familias o sabores

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

y las correspondientes familias de antileptones. Las oscilaciones están íntimamente relacionadas con la naturaleza cuántica de los neutrinos. La razón básica es que los neutrinos de cada familia, es decir, aquellos que participan en los procesos débiles como, por ejemplo, el decaimiento beta del neutrón o del muón, no tienen una masa determinada, sino que son mezclas de estados con masas bien definidas.

Los llamados estados de sabor o estados débiles  $|\nu_\alpha\rangle$  con  $\alpha = e, \mu, \tau$ , no son autoestados del hamiltoniano libre  $H_0$ , sino superposiciones lineales de los autoestados de masa  $|\nu_i\rangle$  con  $i = 1, 2, 3$ . De ahí que entre ambas representaciones exista una matriz de mezcla no trivial que las relacione.

En el SM todos los neutrinos tienen masa nula en cuyo caso la matriz de mezcla  $U$  no tiene significado físico; por eso, al introducir las oscilaciones estamos suponiendo que al menos uno de los neutrinos es masivo.

La superposición de los autoestados de masa en un estado de sabor está dada por

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad (2.2)$$

donde  $U_{\alpha i}$  son los elementos de la matriz unitaria  $U$  que relaciona ambas bases. Para antineutrinos la matriz de mezcla debe ser reemplazada por  $U^*$ . Al ser autoestados de  $H_0$  la evolución temporal viene dada simplemente por

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle, \quad (2.3)$$

con

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \simeq E + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.4)$$

donde tomamos  $m_i \ll p_i$  y suponemos que los momentos son iguales, es decir,  $p_1 = p_2 = p \simeq E$ . Aquí  $E$  designa la energía media con que son creados los neutrinos:  $E = (E_1 + E_2 + E_3)/3$ .

Un estado de sabor puro  $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle$  al tiempo  $t = 0$ , evolucionará en el futuro al estado

$$\begin{aligned} |\nu(t)\rangle &= \sum_i U_{\alpha i} e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \\ &= \sum_{i\beta} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} |\nu_\beta\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La amplitud de transición para que un neutrino  $|\nu_\alpha\rangle$  después de un tiempo  $t$  sea encontrado como un neutrino de sabor  $|\nu_\beta\rangle$  está dada por

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t}. \quad (2.6)$$

La correspondiente probabilidad de transición es

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= |A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)|^2 = \left| \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 \\ &= \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}^*|^2 + 2\mathcal{R}e \sum_{i \neq j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-i(E_i - E_j)t}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De lo anterior es claro que

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha; t), \quad (2.8)$$

puesto que el reemplazo  $U_{\alpha i} \rightarrow U_{\alpha i}^*$  y  $U_{\beta i}^* \rightarrow U_{\beta i}$  deja invariante la ecuación (2.7). Esto es debido a la invariancia bajo  $CPT$ , pero si sólo  $CP$  o  $T$  se conservan, entonces la matriz  $U$  es real y tenemos

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) = P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; t). \quad (2.9)$$

Además, vemos que no es posible distinguir entre neutrinos de Dirac y de Majorana. El caso Majorana tiene fases  $CP$  que están ausentes en el caso de Dirac, sin embargo, estas fases producen una fase total irrelevante en la probabilidad de los neutrinos.

El primer término de la ecuación (2.7) es la probabilidad de transición promedio o clásica, promediada sobre el tiempo (distancia) o energía:

$$\langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \rangle = \sum_i |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}^*|^2. \quad (2.10)$$

Midiendo las probabilidades promedio obtenemos únicamente información sobre los parámetros de la matriz de mezcla, pero no sobre las diferencias de masas al cuadrado. El segundo término de (2.7) tiene un comportamiento periódico como función del tiempo, razón por la cual se usa el término oscilación para designar este proceso.

## 2.2. Oscilaciones entre dos Familias

A partir de ahora y con el fin de explicar con mayor claridad las ideas teóricas de la conversión entre neutrinos nos restringiremos al caso de dos generaciones.

En el caso de dos generaciones hay un ángulo de mezcla  $\theta$ , y, si suponemos que se conserva CP, tenemos como matriz de mezcla unitaria

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

la cual relaciona las bases en la forma mostrada en (2.2).

Dada la evolución temporal de los autoestados de masa como en la ecuación (2.3), podemos escribir un autoestado de sabor en cualquier momento como superposición de autoestados  $\nu_{1,2}$ . Es decir, si tenemos en el tiempo  $t = 0$  un  $\nu_e$ , para un tiempo  $t$  posterior lo podemos escribir usando la ecuación (2.5) como

$$|\nu(t)\rangle = \nu_e(t)|\nu_e\rangle + \nu_x(t)|\nu_x\rangle, \quad (2.12)$$

con

$$\begin{aligned} \nu_e(t) &= \cos^2\theta e^{-iE_1 t} + \text{sen}^2\theta e^{-iE_2 t}, \\ \nu_x(t) &= \cos\theta \text{sen}\theta (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así podemos calcular la probabilidad de que un neutrino  $\nu_e$  se mantenga como tal a un tiempo  $t$ ,

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) = |\nu_e(t)|^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\text{sen}^2 2\theta\right) + \frac{1}{2}\text{sen}^2 2\theta \cos\left(\frac{\delta m^2 L}{2E}\right), \quad (2.14)$$

y también la probabilidad de conversión

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_x; t) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) = \frac{1}{2}\text{sen}^2 2\theta \cos\left(\frac{\delta m^2 L}{2E}\right), \quad (2.15)$$

donde hemos tomado a los neutrinos como relativistas,  $L \approx t$  ( $c = 1$ ), y usamos la ecuación (2.4) para obtener  $E_2 - E_1 = \delta m^2 / 2E$ , con  $\delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ .

El primer término en el lado derecho de la ecuación (2.14) es la probabilidad promedio de supervivencia. La segunda parte es el término oscilante y depende de la longitud  $L$  viajada por los neutrinos. La distancia a la cual el argumento de  $\cos(\delta m^2 L / 2E)$  llega a ser  $2\pi$  se define como la longitud de oscilación

$$L_0^{osc} \equiv \frac{4\pi E}{\delta m^2}. \quad (2.16)$$

Entonces, cuando la relación  $L/L_0^{osc}$  es mucho más grande que la unidad, el término  $\cos(2\pi L/L_0^{osc})$  es promediado a cero en las ecuaciones (2.14) y (2.15). En este caso el comportamiento oscilatorio desaparece dejando las probabilidades de transición clásicas.

Las oscilaciones de neutrinos también pueden ser comprendidas examinando la ecuación de movimiento para los autoestados débiles. Escribimos la ecuación de evolución en la base de los estados físicos como

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} = H_o \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

donde  $H_o$  es el hamiltoniano del sistema, el cual es diagonal en esta base:

$$H_o = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Reescribimos entonces el hamiltoniano de la siguiente manera

$$H_o = \left( E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) \mathbf{I} - \frac{\delta m^2}{4E} \sigma_3, \quad (2.19)$$

en donde  $\sigma_3$  es la matriz de Pauli diagonal,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

En la base de sabor, el hamiltoniano está dado por la transformación

$$\tilde{H}_o = U H_o U^\dagger = \left( E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) \mathbf{I} + \frac{\delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \text{sen} 2\theta \\ \text{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

el primer término es proporcional a la unidad y da una fase global adicional que no afecta la probabilidad, por eso es irrelevante para nosotros y podemos descartarlo. Nos queda entonces,

$$\tilde{H}_o = \frac{\delta m^2}{4E}(\sigma_1 \sin 2\theta - \sigma_3 \cos 2\theta). \quad (2.22)$$

### 2.3. Oscilaciones en Materia

Las oscilaciones en el Sol, en el Universo Temprano o en cualquier medio pueden ser muy diferente a las oscilaciones en el vacío. La razón básica es que las interacciones en un medio material modifican la relación de dispersión de las partículas que se propagan a través de él. Las relaciones de dispersión esencialmente dan la energía de una partícula en función de su momento. Así, una diferente relación de dispersión significa un diferente hamiltoniano del sistema.

La propagación de neutrinos a través de materia fue primero estudiada por Wolfenstein [27], quien determinó el índice de refracción de los neutrinos del electrón en materia fría ordinaria considerando la dispersión elástica de neutrinos con electrones. También, Mikheyev y Smirnov [28], realizaron los primeros estudios sobre conversión de neutrinos en un medio con densidad variable. En síntesis, los efectos de la materia en la propagación de los neutrinos estarán determinados por distintas causas: (i) Las propiedades del medio como densidad, composición química o polarización. (ii) El perfil de densidad efectiva a lo largo del camino de los neutrinos. (iii) El esquema de masas y mezclas de los neutrinos.

Los neutrinos que pasan a través de un medio interactúan con las partículas del medio y sienten un potencial efectivo. Cuando los neutrinos se propagan,  $\nu_e$  y  $\nu_\mu(\nu_\tau)$  experimentan diferentes potenciales. Esto es por que los  $\nu_e$  interactúan con la materia ordinaria ( $p$ ,  $n$ ,  $e$ ) vía interacciones de corrientes cargada y neutra, mientras que los  $\nu_\mu(\nu_\tau)$  lo hacen únicamente vía las corrientes neutras. En nuestro trabajo analizamos la conversión a neutrinos estériles (que no sienten ningún tipo de interacción), de ahora en adelante consideraremos que el potencial efectivo  $V_e$  afecta sólo a los  $\nu_e$ .

El Hamiltoniano en la base de sabor contiene la parte de vacío que ya calculamos anteriormente y una parte debido al potencial efectivo

$$\tilde{H} = \tilde{H}_o + V_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Escrito de forma explícita

$$\tilde{H} = \left( E + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) \mathbf{I} + \frac{1}{2E} \tilde{M}^2, \quad (2.24)$$

donde

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\delta m^2 \cos 2\theta + 2A & \delta m^2 \sin 2\theta \\ \delta m^2 \sin 2\theta & \delta m^2 \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

y hemos definido  $A \equiv 2EV_e$ .

Para encontrar los autovalores del Hamiltoniano  $\tilde{H}$  basta con encontrar los valores propios de la parte no diagonal, lo que obtenemos es

$$E_{1,2} = E + \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) + \frac{\mu_{1,2}^2}{2E}, \quad (2.26)$$

donde

$$\mu_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ A \mp \sqrt{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\delta m^2 \sin 2\theta)^2} \right], \quad (2.27)$$

y el término en la parte derecha de esta ecuación corresponde a los autovalores de la matriz  $\tilde{M}^2$ .

Debido al término modificado por el potencial los autovectores no serán los mismos que en el vacío. El hamiltoniano en materia tiene nuevos autoestados  $\nu_1^M$  y  $\nu_2^M$ , que están relacionados con los estados de sabor a través de la matriz de mezcla  $U_M$ , la cual difiere de  $U$ ;

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = U_M \begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

donde  $\theta_m$  es el ángulo de mezcla pero en materia.

Cuando diagonalizamos la matriz  $\tilde{M}^2$  obtenemos la matriz diagonal  $\tilde{m}_D$  con los autovalores  $\mu_{1,2}^2$  como componentes

$$U_M^\dagger \tilde{M}^2 U_M = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix} = \tilde{m}_D. \quad (2.29)$$

Si igualamos término a término los elementos de ambas matrices en (2.29) obtenemos la siguiente relación entre los ángulos de mezcla en materia y en vacío,

$$\tan 2\theta_m = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\Delta_0 \cos 2\theta - A}, \quad (2.30)$$

o en la forma más tradicional

$$\text{sen}2\theta_m = \frac{\Delta_0 \text{sen}2\theta}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - A)^2 + \Delta_0^2 \text{sen}^2 2\theta}}, \quad (2.31)$$

donde definimos  $\Delta_0 \equiv \delta m^2$ .

Para pequeños ángulos de mezcla en vacío, el comportamiento de  $\theta_m$  es como el de una función escalón, se puede ver que  $\text{sen}^2 2\theta_m$  es función de  $A$  y que tiene una resonancia cuando

$$A = \Delta_0 \cos 2\theta \equiv A_R. \quad (2.32)$$

En este valor, la ecuación (2.31) muestra que el máximo ángulo de mezcla es  $\theta_m = \frac{\pi}{4}$  ( $\text{sen}2\theta_m = 1$ ), lo cual nos dice que cuando los neutrinos atraviesan la región donde  $A$  toma el valor de resonancia, los estados  $\nu_e$  y  $\nu_x$  están mezclados de forma máxima. Debe enfatizarse que el signo de  $A$  es crucial, pues si es negativo, el comportamiento resonante está ausente.

De la misma forma que para el caso en el vacío, definimos una longitud de oscilación en materia

$$L^{osc} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta} = \frac{L_0^{osc}}{\sqrt{\cos^2 2\theta (1 - A/A_R)^2 + \text{sen}^2 2\theta}}. \quad (2.33)$$

con  $\Delta \equiv \mu_2^2 - \mu_1^2$ . Esta longitud también exhibe una resonancia para  $A > 0$ . En este punto

$$L_R^{osc} = \frac{L_0^{osc}}{\text{sen}2\theta}. \quad (2.34)$$

Si definimos un ancho de resonancia

$$\delta A_R \equiv 2\Delta_0 \text{sen}2\theta, \quad (2.35)$$

podemos convertirlo a una distancia real usando que

$$\delta A = \left| \frac{dA}{dr} \right| dr, \quad (2.36)$$

y entonces obtenemos

$$\delta r_R = \frac{\delta A_R}{\left| \frac{dA}{dr} \right|_R} = \frac{2 \tan 2\theta}{\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dr} \right|_R}. \quad (2.37)$$

## 2.4. Adiabaticidad

Hasta ahora hemos supuesto que el medio tiene una densidad constante. Para estudiar que pasa cuando el medio tiene una densidad no uniforme comenzamos con la ecuación de evolución para los estados de sabor

$$i \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\tilde{M}^2}{2E} \Psi, \quad (2.38)$$

donde  $\Psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix}$ . Hemos descartado el término proporcional a la unidad en (2.24) que da una fase global irrelevante.

Usamos la transformación dada en la ecuación (2.28) y obtenemos

$$i \left[ U_M \frac{d\Psi^M}{dt} + \frac{dU_M}{dt} \Psi^M \right] = \frac{\tilde{M}^2}{2E} U_M \Psi^M, \quad (2.39)$$

con  $\Psi^M = \begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix}$ .

Si multiplicamos  $U^\dagger$  por la derecha y mantenemos a la izquierda de la igualdad la derivada temporal de lo estados físicos, resulta que

$$i \frac{d\Psi^M}{dt} = \left[ \frac{U^\dagger \tilde{M}^2 U}{2E} - i U^\dagger \frac{dU}{dt} \right] \Psi^M, \quad (2.40)$$

la cual es la ecuación de evolución para los autoestados de masa en un medio no uniforme.

El primer término dentro de los corchetes nos da  $U^\dagger \tilde{M}^2 U = m_D$ ; del segundo obtenemos

$$U^\dagger \frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta}_m \\ -\dot{\theta}_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Con esto reescribimos la ecuación (2.40) como

$$i \frac{d\Psi^M}{dt} = \begin{pmatrix} \mu_1^2/2E & -i\dot{\theta}_m \\ i\dot{\theta}_m & \mu_2^2/2E \end{pmatrix} \Psi^M. \quad (2.42)$$

Sustraemos  $(\mu_2^2 + \mu_1^2)/4E$  de la matriz en la ecuación (2.42), que otra vez nos da una parte proporcional a la matriz identidad que podemos ignorar. Lo que nos queda entonces es

$$i \frac{d\Psi^M}{dt} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta & -4i\dot{\theta}_m E \\ 4i\dot{\theta}_m E & \Delta \end{pmatrix} \Psi^M. \quad (2.43)$$

Notemos que si  $\dot{\theta}_m = 0$ , entonces  $\nu_1^M$  y  $\nu_2^M$  son estados propios, es decir, tenemos el resultado para un medio con densidad uniforme. También cuando

$$|\Delta| \gg 4E|\dot{\theta}_m|, \quad (2.44)$$

$\nu_1^M$  y  $\nu_2^M$  se comportan aproximadamente como autoestados del hamiltoniano y ellos no se mezclan aun en la región de resonancia. En este caso, los neutrinos físicos que se propaguen a través de regiones que varían de alta a baja densidad permanecerán como autoestados hasta su salida en el vacío.

El significado físico de esta condición se observa mejor si usamos la ecuación (2.31) para calcular

$$\dot{\theta}_m = \frac{1}{2} \frac{\Delta_0 \text{sen} 2\theta}{(\Delta_0 \cos 2\theta - A)^2 + \Delta_0^2 \text{sen}^2 2\theta} \frac{dA}{dt} = \frac{\Delta_0 \text{sen} 2\theta}{2\Delta^2} \dot{A}, \quad (2.45)$$

y reescribimos la ecuación (2.44) como

$$|\Delta| \gg \frac{2E\Delta_0 \text{sen} 2\theta}{\Delta^2} |\dot{A}|. \quad (2.46)$$

Ahora definimos el *parámetro adiabático* como

$$\kappa \equiv \frac{\Delta^3}{2E\Delta_0 \text{sen} 2\theta |\dot{A}|} = \left( \frac{\Delta_0}{2E} \right)^2 \frac{\text{sen}^2 2\theta}{\text{sen}^3 2\theta_m |\dot{V}_e|}, \quad (2.47)$$

así, los neutrinos físicos se propagarán adiabáticamente si  $\kappa \gg 1$ . El parámetro adiabático depende de la posición vía  $\theta_m$  y  $|\dot{A}|$ , si la densidad es muy alta  $\theta_m \rightarrow \pi/2$ , y entonces  $\kappa$  se vuelve muy grande. Asimismo, si la densidad de materia se anula,  $\theta_m \rightarrow \theta$  y entonces  $\kappa$  también crecerá mucho a menos que  $\theta$  adquiera valores cercanos a  $\pi/4$ .

La condición adiabática es más difícil de satisfacer en la región de resonancia, donde  $\text{sen} 2\theta_m$  es máximo. El valor del parámetro evaluado en la resonancia lo llamaremos  $\kappa_R$ , el cual puede obtenerse de la ecuación (2.47) poniendo  $\text{sen} 2\theta_m = 1$ , si además usamos que  $A_R = \Delta_0 \cos 2\theta$  obtenemos

$$\kappa_R \equiv \frac{\Delta_0 \text{sen}^2 2\theta}{2E \cos 2\theta \left| \frac{\dot{A}}{A} \right|_{t=t_R}}. \quad (2.48)$$

En términos de la longitud de oscilación y del ancho de resonancia definidos en las ecuaciones (2.34) y (2.37), el parámetro adiabático en la resonancia se convierte en

$$\kappa_R \equiv \frac{\pi \delta r_R}{L_R^{osc}}, \quad (2.49)$$

la cual nos indica que cuanto más corta sea la longitud de oscilación comparada con el ancho de la región de resonancia tanto más adiabática será la evolución de los neutrinos.

El proceso adiabático ( $\kappa \gg 1$ ) corresponde entonces al caso donde muchas oscilaciones toman lugar en la región de resonancia, mientras que ( $\kappa \lesssim 1$ ) corresponde a la situación donde prácticamente no hay oscilaciones en la región de resonancia.

## 2.5. Solución Adiabática

Estudiemos el caso cuando los neutrinos atraviesan un medio adiabáticamente. Si la densidad del medio varía lentamente (condición de adiabaticidad) las transiciones  $\nu_1^M \leftrightarrow \nu_2^M$  son despreciadas, es decir, los estados propios se propagan independientemente como en el vacío o como en un medio con densidad constante.

Supongamos que un neutrino es producido originalmente como un neutrino del electrón. Cuando un  $\nu_e$  es producido en una región donde  $A \gg A_R$ , encontramos de la ecuación (2.27) que la masa del  $\nu_2^M$  es mucho más grande que su masa  $m_2$  en el vacío. De igual forma se concluye que la masa del neutrino  $\nu_1^M$  es aproximadamente igual a  $m_2$  (suponemos  $m_2 > m_1$ ). A esta densidad tan alta el ángulo de mezcla  $\theta_m$  es muy cercano a los  $90^\circ$ , lo que significa que cuando un  $\nu_e$  es producido en esta región es prácticamente un estado puro  $\nu_2^M$ .

Dado que la longitud de oscilación es corta (ver ecuación 2.33), casi no hay oscilaciones hasta que los neutrinos alcanzan la región de resonancia. Una vez que  $A \simeq A_R$  las oscilaciones se disparan por que  $\theta_m \simeq \pi/4$  y los neutrinos son parte  $\nu_e$  y parte  $\nu_x$ . Este mecanismo resonante de las oscilaciones es conocido como el efecto MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein). Tal efecto de máxima conversión entre  $\nu_e$  y  $\nu_x$  ocurre aún para pequeños ángulos de mezcla en el vacío. Lo anterior es correcto cuando muchas oscilaciones toman lugar en la región de resonancia, esto es, cuando el proceso es adiabático.

Si consideramos al neutrino del electrón producido originalmente, entonces podemos escribir el vector,

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

donde el subíndice indica un tiempo  $t = 0$ . Pero en la base de los estados propios tendremos

$$\Psi_0^M = \begin{pmatrix} \cos\theta_m^0 & -\text{sen}\theta_m^0 \\ \text{sen}\theta_m^0 & \cos\theta_m^0 \end{pmatrix} \Psi_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_m^0 \\ \text{sen}\theta_m^0 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Si la condición de adiabaticidad es satisfecha a lo largo de toda la evolución de los neutrinos, las transiciones entre estados de masa se pueden ignorar, entonces el hamiltoniano es diagonal y podemos obtener la evolución de los estados físicos a un tiempo  $t$  a través de,

$$\Psi^M = \begin{pmatrix} e^{-i\int_0^t E_1 dt'} & 0 \\ 0 & e^{-i\int_0^t E_2 dt'} \end{pmatrix} \Psi_0^M. \quad (2.52)$$

Pero los neutrinos que se detectan son los de sabor, entonces los encontramos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \cos\theta_m & \text{sen}\theta_m \\ -\text{sen}\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix} \Psi^M \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_m \cos\theta_{m0} e^{-i\int_0^t E_1 dt'} + \text{sen}\theta_m \text{sen}\theta_{m0} e^{-i\int_0^t E_2 dt'} \\ -\text{sen}\theta_m \text{sen}\theta_{m0} e^{-i\int_0^t E_1 dt'} + \cos\theta_m \cos\theta_{m0} e^{-i\int_0^t E_2 dt'} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar un neutrino del electrón a un tiempo  $t$  del punto de producción, es

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= |\nu_e(t)|^2 \\ &= \bar{P} + \frac{1}{2} [\text{sen}2\theta_m \text{sen}2\theta_m^0 \cos\delta(t)]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

El segundo término es la parte oscilante, donde definimos

$$\delta(t) = \int_0^t (E_2 - E_1) dt', \quad (2.55)$$

y en el primer término

$$\bar{P} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_m \cos 2\theta_m^0 \quad (2.56)$$

es la probabilidad promedio, resultante de cuando uno promedia a cero el término oscilante  $\cos \delta(t)$ .

Un caso especial es cuando los neutrinos son detectados en el vacío, ahí  $\theta_m = \theta$ . Entonces, promediando la parte oscilante y pensando que los neutrinos son producidos en una región donde  $A \gg A_R$  ( $\theta_m^0 \approx 90^\circ$ ), la probabilidad se reduce a

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \sin^2\theta. \quad (2.57)$$

De modo que dependiendo del valor del ángulo de mezcla en el vacío, obtenemos una fuerte supresión en los neutrinos del electrón. Esto en contraste con las oscilaciones en el vacío, para las cuales la probabilidad siempre es mayor o igual que 1/2 sin importar el valor de  $\theta$ .

## 2.6. Solución no Adiabática

Cuando la longitud de oscilación en la región de resonancia es igual o más grande que el tamaño de la región de resonancia, esto es  $\kappa \lesssim 1$ , el proceso es no adiabático. Los efectos no adiabáticos inducen entonces transiciones entre los estados  $\nu_1^M$  y  $\nu_2^M$  con una probabilidad de cruce  $P_c$ . Un proceso adiabático implica  $P_c = 0$ , y el caso  $P_c = 1$  es llamado un proceso extremadamente no adiabático. Esta transición es causada por elementos fuera de la diagonal en la matriz de la ecuación (2.42). Tales efectos son importantes solo en la región de resonancia, para otras regiones la aproximación adiabática es una buena aproximación y puede ser usada sin problemas.

Formalmente si tenemos un  $\nu_e$  producido en un tiempo  $t = 0$  y lo expresamos en la base de los estados de masa, obtenemos  $\Psi_0^M$  igual que en la ecuación (2.51). Hasta un tiempo  $t_R - \delta$  antes de entrar a la región de resonancia, la evolución es esencialmente adiabática, por lo que el estado adquiere una fase

$$\Psi^M(t_R - \delta) = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_2} \end{pmatrix} \Psi_0^M, \quad (2.58)$$

donde

$$\gamma_{1,2} = \int_{t_0}^{t_R - \delta} E_{1,2} dt. \quad (2.59)$$

Una vez dentro de la región de resonancia existe la posibilidad de un cruzamiento entre los estados propios del hamiltoniano

$$\Psi^M(t_R + \delta) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_c} e^{-i\alpha} & \sqrt{P_c} e^{-i\beta} \\ -\sqrt{P_c} e^{i\beta} & \sqrt{1 - P_c} e^{i\alpha} \end{pmatrix} \Psi^M(t_R - \delta), \quad (2.60)$$

donde hemos elegido una parametrización general para el operador de evolución en términos de  $P_c$  y de dos fases genéricas  $\alpha$  y  $\beta$ .

La evolución luego que el neutrino abandona la región de resonancia de nuevo es adiabática, por lo que el neutrino al tiempo  $t$ , adquiere otra fase

$$\Psi^M(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma'_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma'_2} \end{pmatrix} \Psi^M(t_R + \delta), \quad (2.61)$$

y de la misma forma  $\gamma'_{1,2} = \int_{t_R+\delta}^t E_{1,2} dt$ .

Sin embargo, los neutrinos que interactúan con el medio son los de sabor, pasándonos a la base de sabor de la misma forma que en (2.53), ahora nos queda

$$\Psi = \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_c}(\cos\theta_m \cos\theta_m^0 e^{-i\epsilon_{11}} + \text{sen}\theta_m \text{sen}\theta_m^0 e^{i\epsilon_{22}}) + \sqrt{P_c}(\cos\theta_m \text{sen}\theta_m^0 e^{-i\epsilon_{21}} - \text{sen}\theta_m \cos\theta_m^0 e^{i\epsilon_{12}}) \\ \sqrt{1-P_c}(-\text{sen}\theta_m \cos\theta_m^0 e^{-i\epsilon_{11}} + \cos\theta_m \cos\theta_m^0 e^{-i\epsilon_{22}}) + \sqrt{P_c}(-\text{sen}\theta_m \text{sen}\theta_m^0 e^{i\epsilon_{21}} + \cos\theta_m \text{sen}\theta_m^0 e^{i\epsilon_{12}}) \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

en la cual hemos hecho las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \alpha + \gamma_1 + \gamma'_1, \\ \epsilon_{22} &= \alpha - \gamma_2 - \gamma'_2, \\ \epsilon_{21} &= \beta + \gamma_2 + \gamma'_1, \\ \epsilon_{12} &= \beta - \gamma_1 - \gamma'_2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Después de cierta álgebra, la probabilidad de encontrar un neutrino del electrón al tiempo  $t$  resulta

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= |\nu_e(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_c\right) \cos 2\theta_m \cos 2\theta_m^0 \\ &\quad + \frac{1}{2} [\text{sen} 2\theta_m \text{sen} 2\theta_m^0 \cos(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})] \\ &\quad - \frac{P_c}{2} \text{sen} 2\theta_m \text{sen} 2\theta_m^0 [\cos(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \cos(\epsilon_{21} + \epsilon_{12})] \\ &\quad + \sqrt{P_c(1-P_c)} \text{sen} 2\theta_m^0 [\cos^2 \theta_m \cos(\epsilon_{11} - \epsilon_{21}) - \text{sen}^2 \theta_m \cos(\epsilon_{22} - \epsilon_{12})] \\ &\quad - \sqrt{P_c(1-P_c)} \text{sen} 2\theta_m [\cos^2 \theta_m^0 \cos(\epsilon_{11} + \epsilon_{12}) - \text{sen}^2 \theta_m^0 \cos(\epsilon_{21} + \epsilon_{22})]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

El primer término es la probabilidad promedio  $\bar{P}$  adiabática modificada por la presencia de  $P_C$  y los últimos cuatro por lo general se desprecian cuando se promedian los cosenos. Es lo que haremos nosotros en el caso resonante.

# Capítulo 3

## Neutrinos Primordiales

Cuando la temperatura del Universo descendió de 1GeV a 1MeV, las partículas dominantes eran los leptones además de fotones, protones y neutrones. Aun ahora, los neutrinos y antineutrinos de aquellos tiempos están con nosotros llenando todo el espacio como un gas con una densidad de  $112 \text{ cm}^{-3}$  (por cada sabor) y una temperatura de alrededor del 71 % de la que tiene la radiación de fondo cósmico. Puesto que sus interacciones son muy débiles, la detección del fondo de neutrinos cósmicos es un problema formidable desde el punto de vista experimental.

Si existe un fondo de neutrinos es porque a fines de la época de radiación del Universo, los neutrinos se desacoplaron del resto de la materia manteniendo su distribución en equilibrio. Luego de esto, su contribución a la nucleosíntesis primordial se limitó a las interacciones débiles con leptones y nucleones que modifican el número de neutrones disponibles para formar núcleos de helio. Pero si ocurren las oscilaciones entre neutrinos entonces hay una influencia de este fenómeno en la síntesis de los elementos, por eso las interacciones de los neutrinos con el medio deben ser tomadas en cuenta. En este capítulo abordaremos los temas anteriores.

### 3.1. Desacople de los Neutrinos

En el Universo Temprano los neutrinos se encuentran en equilibrio térmico con el resto de las partículas de la sopa primordial y además contribuyen a la densidad del Universo con un número de grados de libertad  $g_\nu$ . Justo antes de

que se desacoplen del resto de la materia los neutrinos mantienen el equilibrio térmico con el plasma de electrones y positrones a través de los siguientes procesos débiles

$$\begin{aligned}
\nu_e + e^\pm &\leftrightarrow \nu_e + e^\pm, \\
\bar{\nu}_e + e^\pm &\leftrightarrow \bar{\nu}_e + e^\pm, \\
\nu_e + \bar{\nu}_e &\leftrightarrow \nu_l + \bar{\nu}_l, \\
e^+ + e^- &\leftrightarrow \nu_l + \bar{\nu}_l, \quad (l = e, \mu, \tau).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Las interacciones con protones y neutrones pueden ser ignoradas dada su baja densidad en la época de radiación (aunque sean las responsables de mantener el equilibrio entre leptones y nucleones hasta que la razón  $n_n/n_p$  se congela).

El equilibrio se mantiene siempre que las tasas con que ocurren los procesos anteriores  $\Gamma(T)$ , sean más grandes que la tasa de expansión del Universo  $H(T)$ . La forma de calcular las tasas de las reacciones es

$$\Gamma(T) = \langle \sigma(T) \rangle n(T) v, \tag{3.2}$$

donde  $\langle \sigma(T) \rangle$  es el promedio de las secciones eficaces de las interacciones (3.1) a temperatura  $T$ ,  $n(T)$  es la densidad de número de las partículas con cuales interactúan los neutrinos, y  $v = 1$  es la velocidad de los neutrinos suponiendo que son relativistas.

La sección eficaz de las reacciones (3.1) es del orden de

$$\langle \sigma(T) \rangle \simeq \frac{1}{\pi} G_F^2 T^2, \tag{3.3}$$

y la densidad, en unidades de la constante de Boltzmann  $k = 1$ , está dada por

$$\begin{aligned}
n(T) &= n_\gamma + n_{e^+} + n_{e^-} + 2n_{\nu_e} + 2n_{\nu_\mu} + 2n_{\nu_\tau}, \\
&= \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left[ g_\gamma + \frac{3}{4}(g_{e^\pm} + g_\nu) \right] T^3, \\
&= \frac{19}{2} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde usamos que los grados de libertad para electrones y positrones son  $g_{e^\pm} = 2 \times 2$  y además contamos un sólo grado de libertad para cada neutrino

y antineutrino,  $g_\nu = 3 \times 2$ .

Esto nos da

$$\Gamma(T) = \frac{19}{2} \frac{\zeta(3)}{\pi^3} G_F^2 T^5. \quad (3.5)$$

Por otro lado, como la densidad se obtiene de

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (3.6)$$

con  $g_* = g_\gamma + \frac{7}{8}(g_{e^\pm} + g_\nu) = 2 + \frac{7}{8}(4 + 6) = \frac{43}{4}$ , podemos calcular  $H(T)$  de la ecuación (1.2), es decir,

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G_N \rho(T)}{3}} = \sqrt{\frac{4\pi^3 G_N}{45} g_*^{1/2} T^2}. \quad (3.7)$$

Cuando la expansión del universo ocurre con una rapidez mayor que las interacciones que mantienen en equilibrio a los neutrinos, estos se desacoplan. La temperatura a partir de la cual los neutrinos salen del equilibrio, conocida como temperatura de desacople  $T_D$ , se obtiene a partir de

$$\Gamma(T = T_D) = H(T = T_D). \quad (3.8)$$

De aquí, igualando los resultados de las ecuaciones (3.5) y (3.7), resulta

$$T_D^3 = 4.50763 \frac{1}{G_F^2 m_{Pl}} g_*^{1/2}, \quad (3.9)$$

donde usamos la relación  $m_{Pl} = G_N^{-1/2}$  para la masa de Planck. Luego de sustituir las constantes  $G_F = 1.16639 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$  y  $m_{Pl} = 1.221 \times 10^{19} \text{GeV}$ , encontramos que

$$T_D = 1.3948 g_*^{1/6} \text{ MeV} = 2.072 \text{ MeV}. \quad (3.10)$$

Esta temperatura será la que emplearemos en los cálculos que siguen a continuación.

Para tiempos posteriores al desacople la temperatura de los neutrinos difiere de la del resto de las partículas. Además, poco tiempo después los electrones y los positrones se aniquilan incrementando la temperatura de los fotones en comparación con la de los neutrinos. Se pueden relacionar las temperaturas del fondo cósmico de fotones con el de neutrinos para tiempos

futuros de la siguiente manera:

Primero consideremos el plasma de partículas en el universo cuando  $T \gg m_e$  y por supuesto  $T > T_D$ . En esta época  $T_\nu(t) = T_e(t) = T_\gamma(t) \equiv T(t)$ , la cual es la misma para todos porque todavía el plasma se mantiene en equilibrio térmico. Las rápidas dispersiones Compton de los fotones sobre los electrones junto con las aniquilaciones electrón-positrón mantienen al sistema  $e-\gamma$  en equilibrio, por lo tanto la entropía por volumen comóvil se conserva y se vuelve una cantidad muy útil para estudiar la evolución del plasma.

La densidad de entropía por volumen comóvil se define como

$$s(T) \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} = \frac{4}{3} \frac{\rho}{T}, \quad (3.11)$$

donde  $\rho(T)$  es la densidad de energía y usamos que en el límite relativista la presión  $p = \rho/3$  por los resultados en la ecuación (1.9). Podemos entonces calcular la entropía a este tiempo  $t_1$  obteniendo

$$s(t_1) = \frac{4\pi^2}{90} g_1 T_\nu^3(t_1), \quad (3.12)$$

donde  $g_1 = 2 + \frac{7}{8}(2 + 2 + 3 + 3) = \frac{43}{4}$  e intercambiamos  $T(t)$  por  $T_\nu(t)$ .

Por otra parte, cuando la temperatura es menor que la masa del electrón, todos los electrones y positrones se aniquilan quedando solo los fotones. Los neutrinos para entonces ya están desacoplados con una temperatura distinta. Por lo tanto en este tiempo  $t_2$

$$s(t_2) = \frac{4\pi^2}{90} \left[ 2T_\gamma^3(t_2) + \frac{7}{8}(3 + 3)T_\nu^3(t_2) \right]. \quad (3.13)$$

Como la entropía se conserva  $s(t)R^3(t) = \text{cte}$ , y así podemos escribir

$$s(t_1)R^3(t_1) = s(t_2)R^3(t_2) \quad (3.14)$$

Pero recordemos que para  $T < m_e$  los neutrinos ya están desacoplados y fuera del equilibrio térmico con el resto de la materia. La densidad de los neutrinos es proporcional a  $T_\nu^3(t)$  y como no pueden ser creados o destruidos su número en un volumen comóvil  $R^3(t)$  permanece fijo en el universo en expansión. Esto implica que

$$R(t_1)T_\nu(t_1) = R(t_2)T_\nu(t_2). \quad (3.15)$$

Usando esta relación y la ecuación (3.13) llegamos al resultado bastante conocido

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma. \quad (3.16)$$

La radiación de fondo presente nos dice que  $T_\gamma = 2.375$  K, con este valor la temperatura del fondo de neutrinos al día de hoy es igual a  $T_\nu = 1.95$  K. Esta relación resulta bastante útil para calcular la densidad de energía y la densidad de entropía presentes en nuestros días.

## 3.2. El Corrimiento al rojo de los Neutrinos

Una vez que los neutrinos se desacoplan del resto de la materia, ellos se comportan como partícula libre con una temperatura distinta a la del resto del universo. A partir de este punto, la distribución de los neutrinos evoluciona independientemente de las distribuciones de las demás partículas que todavía permanecen en equilibrio térmico.

Para cualquier partícula que se mueve libremente en un universo en expansión, el momento disminuye en proporción inversa al factor de escala del universo. Si el momento inicialmente es  $p(t')$  y el universo se expande de  $R(t')$  a  $R(t)$ , entonces el momento disminuye a un nuevo valor  $p(t)$

$$p(t) = \frac{R(t')}{R(t)} p(t'). \quad (3.17)$$

Este cambio en el momento puede entenderse si imaginamos al neutrino como una onda estacionaria en un recipiente cuyo tamaño se va expandiendo. Si el universo se expande por un factor  $R(t)/R(t')$ , la longitud de onda se expande por el mismo factor y el momento  $p = h/\lambda$  se reduce por el factor inverso.

Luego del desacople los neutrinos experimentan un corrimiento al rojo (“redshift”) y no es claro que su distribución sea la del equilibrio, esto pasa por que las aniquilaciones electrón-positrón mantienen el equilibrio con los fotones pero no con los neutrinos. La distribución inicial de los neutrinos en el desacople está dada por una distribución de Fermi-Dirac,

$$f(p_D) = \frac{1}{e^{(E_D - \mu_D)/T_D} + 1}, \quad (3.18)$$

donde  $E_D = \sqrt{p_D^2 + m_\nu^2}$ .

El número de neutrinos en un volumen  $d^3x d^3p$  del espacio fase permanece

constante después del desacople ya que  $f(p, T)d^3x d^3p = f(p_D, T_D)d^3x_D d^3p_D = f(p_D, T_D)d^3x d^3p$ , y por eso  $f(p, T) = f(p_D, T_D)$ . Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
 f(p) &= f\left(\frac{R}{R_D}p, T_D\right) \\
 &= \frac{1}{\exp\left[\left(\sqrt{\left(\frac{R}{R_D}p\right)^2 + m_\nu^2} - \mu_D\right)/T_D\right] + 1} \\
 &= \frac{1}{\exp\left[\left(\sqrt{p^2 + \left(\frac{R_D}{R}m_\nu\right)^2} - \frac{R_D}{R}\mu_D\right)/\frac{R_D T_D}{R}\right] + 1}. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Como  $R(t)T_\nu(t) = \text{cte}$ , entonces  $T = (R_D T_D)/R$  y los neutrinos ya desacoplados mantienen la forma de su distribución en equilibrio pero caracterizada por una masa y un potencial químico efectivos.

Notemos que si  $m_\nu \ll T_D$  los neutrinos se mantienen relativistas cuando disminuye la temperatura del universo pues la masa efectiva  $m_\nu(T/T_D) \ll T$ . Lo que nos queda es simplemente la distribución de Fermi para los neutrinos con un potencial reducido  $\mu = (R_D/R)\mu_D$

$$f(p) = \frac{1}{e^{(p-\mu)/T} + 1}. \quad (3.20)$$

En nuestro tratamiento emplearemos esta distribución térmica y, en todo lo que sigue, cuando hablemos del momento del neutrino  $p$  estaremos pensando en el momento redshift.

### 3.3. Potencial efectivo del $\nu_e$ en el UT

Los efectos de materia pueden ser importantes para las oscilaciones entre neutrinos activos y estériles. Justo antes de la nucleosíntesis, los neutrinos se propagan en un plasma formado de neutrinos estándar, fotones, electrones, positrones y nucleones. Este fondo térmico genera un potencial efectivo para los neutrinos el cual depende de las distintas interacciones de corriente neutra y cargada que los tres tipos de neutrinos tienen con las partículas del plasma.

En el baño térmico durante el Universo Temprano, los neutrinos y antineutrinos del electrón reciben contribuciones de interacciones de corriente

cargada y neutra con el fondo de materia; en comparación con los neutrinos del muón y del tau que interactúan sólo a través de interacciones de corriente neutra por la ausencia de muones y taus en el medio. Los neutrinos inertes  $\nu_s$  o estériles no experimentan estos efectos por que se desacoplarían del equilibrio térmico muy temprano y su densidad también sería despreciable.

Macroscópicamente, la materia modifica la relación de dispersión de los neutrinos en el vacío, estas correcciones pueden describirse en términos de un potencial efectivo o un índice de refracción. El potencial efectivo de la propagación de los neutrinos en un medio se calcula usando el formalismo de la teoría térmica de campos (TTC) a temperatura finita. En este cálculo, el potencial se extrae de las correcciones a la autoenergía del neutrino que provienen de los propagadores de los bosones W y Z en los diagramas de auto-energía:  $G_F \rightarrow G_F(1 + q_W^2/m_W^2)$ , donde  $q_W^2$  es el cuadrimomento del bosón intermediario. En consecuencia,

$$V \rightarrow V_0(1 + q_W^2/m_W^2). \quad (3.21)$$

Pero  $q_W^2 \sim T^2$ , y uno obtiene una corrección térmica

$$V_T \sim \sqrt{2}G_F n_e A \frac{T^2}{m_W^2}, \quad (3.22)$$

donde  $A$  es una constante que depende de la composición del plasma. La principal característica es que  $V_T$  tiene el mismo signo para neutrinos y para antineutrinos.

La corrección a la relación de dispersión de los neutrinos en el vacío también es proporcional a la asimetría partícula-antipartícula en el fondo de materia. Si la asimetría es pequeña o cero, las correcciones térmicas son importantes e incluso dominantes, como es el caso del Universo Temprano, donde dicha asimetría puede ser una cantidad muy pequeña. El potencial efectivo para los neutrinos incluye entonces dos ingredientes: la existencia del baño térmico, y la asimetría fermión-antifermión. En un plasma térmico con carga fermiónica distinta de cero (como el UT) el potencial puede ser escrito como

$$V \simeq \sqrt{2}G_F n_\gamma \left( \Delta L + A \frac{T^2}{m_W^2} \right), \quad (3.23)$$

donde  $n_\gamma$  es la densidad de fotones,  $\Delta L = (n_L - n_{\bar{L}})/n_\gamma$  es la asimetría leptónica y  $n_L, n_{\bar{L}}$  son las concentraciones de leptones y antileptones.

El primer término, proporcional a la asimetría fermiónica, toma en cuenta las interacciones de corriente neutra y cargada de  $\nu_e$  con protones, neutrones, electrones, positrones, neutrinos y antineutrinos de todos los sabores. El segundo término “no local” es el que proviene como ya mencionamos, de un cambio en el momento de los propagadores. En un medio simétrico bajo CP,  $n_L = n_{\bar{L}}$  y sólo las correcciones térmicas sobreviven, entonces  $V_T \simeq V_0 AT^2/m_W^2$ .

Estos cálculos de las correcciones de la auto-energía del neutrino en un fondo de leptones cargados, nucleones y neutrinos, fueron calculadas por Notzold & Raffelt [29] y posteriormente por D’Olivo et al [30]. Este último trabajo se llevó a cabo en una norma arbitraria  $\xi$  y en él se demuestra explícitamente la independencia de la relación de dispersión del parámetro de norma. El potencial efectivo para un neutrino del electrón es el siguiente:

$$\begin{aligned}
V_e = & \pm\sqrt{2}G_F \left[ \eta_e + 2\eta_{\nu_e} + \left( 2\text{sen}^2\theta_W - \frac{1}{2} \right) \eta_e - \frac{1}{2}\eta_n + \left( \frac{1}{2} - 2\text{sen}^2\theta_W \right) \eta_p \right. \\
& \left. + \eta_{\nu_\mu} + \eta_{\nu_\tau} \right] + \frac{2\sqrt{2}G_F p_\nu m_e^2}{3m_W^2} \left[ n_e \left\langle \frac{1}{E_e} \right\rangle + n_{\bar{e}} \left\langle \frac{1}{E_{\bar{e}}} \right\rangle \right] \\
& - \frac{8\sqrt{2}G_F p_\nu}{3m_W^2} [n_e \langle E_e \rangle + n_{\bar{e}} \langle E_{\bar{e}} \rangle] - \frac{8\sqrt{2}G_F p_\nu}{3m_Z^2} [n_{\nu_e} \langle E_{\nu_e} \rangle + n_{\bar{\nu}_e} \langle E_{\bar{\nu}_e} \rangle],
\end{aligned} \tag{3.24}$$

donde los términos de asimetría  $\eta_X \equiv n_X - n_{\bar{X}}$  son las diferencias entre las densidades de partículas y antipartículas,  $p_\nu$  es el momento de los neutrinos,  $T$  es la temperatura del plasma, y los signos “ $\pm$ ” se aplican a neutrinos y antineutrinos respectivamente.

Los términos de orden  $1/m_W^2$  en el potencial se pueden simplificar si usamos que  $n_e \approx n_{\bar{e}}$ ,  $\langle E_e \rangle \approx \langle E_{\bar{e}} \rangle$  y que  $\langle 1/E_e \rangle \approx 1/\langle E_e \rangle$ . Las mismas simplificaciones se pueden hacer para los neutrinos y antineutrinos consiguiendo que el potencial nos quede así,

$$\begin{aligned}
V_e = & \pm\sqrt{2}G_F \left[ \eta_e + 2\eta_{\nu_e} + \left( 2\text{sen}^2\theta_W - \frac{1}{2} \right) \eta_e - \frac{1}{2}\eta_n + \left( \frac{1}{2} - 2\text{sen}^2\theta_W \right) \eta_p \right. \\
& \left. + \eta_{\nu_\mu} + \eta_{\nu_\tau} \right] + \frac{2\sqrt{2}G_F p_\nu n_e \langle E_e \rangle}{3m_W^2} \left[ \frac{2m_e^2}{\langle E_e \rangle^2} - 8 \right] - \frac{16\sqrt{2}G_F p_\nu n_{\nu_e} \langle E_{\nu_e} \rangle}{3m_Z^2}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Los promedios de las energías  $\langle E \rangle = \langle p \rangle$  de los electrones y neutrinos relativistas se obtienen calculando  $\langle p \rangle = \rho(p)/n(p) = (1/T^3 F_2) \int p^2 f(p) d^3p =$

$7\zeta(4)T/2\zeta(3) = 3.1514T$ , donde  $F_2$  es la integral de Fermi de segundo orden y hemos tomado el potencial químico igual a cero.

En el término proporcional a  $1/m_W^2$ , la parte que contiene  $m_e^2/\langle E_e \rangle^2 = 0.0263(\text{MeV}/T)^2$  se puede despreciar porque  $T \gtrsim 0.7\text{MeV}$ , siendo este límite inferior la temperatura de nucleosíntesis, es decir, la temperatura a la que se congelan las reacciones que modifican la abundancia de neutrones en el universo. Suprimiendo este término y usando las relaciones  $n_e = 3\zeta(3)T^3/2\pi^2$ ,  $1/m_W^2 = \sqrt{2}G_F \text{sen}^2\theta_W/\pi\alpha$ , y  $\zeta(4) = \pi^4/90$ , el segundo término a la derecha en la ecuación (3.25) se escribe como

$$-\frac{28\pi}{45} \frac{\text{sen}^2\theta_W G_F^2}{\alpha} p_\nu T^4. \quad (3.26)$$

De la misma forma simplificamos la parte debida al fondo de neutrinos empleando ahora las relaciones  $1/m_Z^2 = \sqrt{2}G_F \text{sen}^2\theta_W \text{cos}^2\theta_W/\pi\alpha$  y  $n_{\nu_e} = n_{\bar{\nu}_e} = 3\zeta(3)T^3/4\pi^2$ . Con lo cual nos queda el término de orden  $1/m_Z^2$  en el potencial igual a

$$-\frac{14\pi}{45} \frac{G_F^2}{\alpha} \text{sen}^2\theta_W \text{cos}^2\theta_W p_\nu T^4. \quad (3.27)$$

Sumando los resultados en las ecuaciones (3.26) y (3.27) obtenemos

$$-C_1 \frac{G_F^2}{\alpha} p_\nu T^4 \quad (3.28)$$

donde usamos  $\text{sen}^2\theta_W = 0.23113$  y definimos  $C_1 \equiv 0.625996$ .

El término que tiene que ver con la asimetría materia-antimateria también puede simplificarse si tomamos en cuenta que el universo es neutro en esa época, con lo cual  $\eta_e = \eta_p$ . Luego de hacer esto escribimos esa parte como

$$\pm\sqrt{2}G_F\eta n_\gamma = \pm C_2 G_F \eta T^3, \quad (3.29)$$

donde  $\eta = (2\eta_{\nu_e} + \eta_{\nu_\mu} + \eta_{\nu_\tau} - \eta_n/2 + \eta_e)/n_\gamma$  y  $C_2 = 0.34448$ .

Al final, lo que nos queda como potencial efectivo es lo siguiente

$$V_e = \pm C_2 G_F \eta T^3 - C_1 \frac{G_F^2}{\alpha} p_\nu T^4, \quad (3.30)$$

o, de forma explícita,

$$\begin{aligned} V_e = & \pm 4.01804 \times 10^{-22} \frac{\eta}{10^{-10}} \left( \frac{T}{\text{MeV}} \right)^3 \text{ MeV} \\ & - 1.16582 \times 10^{-20} \frac{p_\nu}{\text{MeV}} \left( \frac{T}{\text{MeV}} \right)^4 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.3.1. La asimetría leptónica

El coeficiente  $\eta$  en el potencial (3.31) que contiene las asimetrías de los neutrinos, electrones y neutrones ha sido extensamente estudiado por sus efectos en cosmología. De todas las componentes de  $\eta$  las más importantes son las que forman la llamada asimetría leptónica. La asimetría leptónica se define como  $\eta = (n_l - n_{\bar{l}})/n_\gamma$  donde  $n_l$  es la densidad de número de los leptones. Las anisotropías del fondo cósmico de microondas establecen que la razón de bariones a fotones es del orden de  $10^{-10}$  y tradicionalmente se toma a  $\eta \sim \eta_B$ . Sin embargo, se ha encontrado que la asimetría puede ser grande para el sector de los neutrinos [31, 32] y más grande que  $\eta_B$ . Por eso la asimetría leptónica  $\eta$  es principalmente definida como la suma de las asimetrías en los diferentes sectores de los neutrinos  $\eta \sim \sum \eta_{\nu_i}$ .

No se tienen mediciones directas de la magnitud y signo de la asimetría leptónica, sólo tenemos restricciones o indicaciones indirectas de su influencia en el ámbito cosmológico. En particular, en la producción de los elementos ligeros en el universo temprano (nucleosíntesis primordial) y en la radiación cósmica de fondo (CMB). Los efectos de la asimetría leptónica sobre la BBN pueden ser de dos tipos:

En equilibrio,  $\eta$  se expresa a través del parámetro de degeneración  $\xi = \mu/T$  en la fórmula  $\eta = 1/12\zeta(3) \sum T_{\nu_i}^3/T_\gamma^3(\xi_{\nu_i}^3 + \pi^2\xi_{\nu_i})$ . Este potencial químico que determina la asimetría leptónica a su vez modifica el número efectivo de grados de libertad de las partículas relativistas en el universo temprano en la forma  $\Delta N_\nu = 15/7[(\xi/\pi)^4 + 2(\xi/\pi)^2]$ . De esta manera  $\eta$  puede incrementar la densidad de energía de radiación  $\rho$  en el universo temprano la cual es expresada en términos de  $\Delta N_\nu$  (ec. 1.18). El incremento de la densidad de radiación debido a  $\eta$  incrementa la tasa de expansión del universo  $H$  (ec. 1.15), esto adelanta el momento en que se congelan las reacciones que gobiernan la razón de neutrones a protones (ec. 1.28) y, en consecuencia, se produce más deuterio y helio primordial.

Por otro lado, la asimetría leptónica influye en la BBN a través de las oscilaciones de neutrinos. La producción de los neutrinos estériles por oscilaciones con neutrinos activos modifica los grados de libertad efectivos cambiando a su vez la densidad de radiación del universo, lo que afecta la producción de los núcleos ligeros. Tales estudios requieren calcular numéricamente las soluciones a las ecuaciones cinéticas para la matriz de densidad de los neutrinos, lo que hace a estos cálculos muy complicados.

Los efectos mutuos de la asimetría leptónica y de las oscilaciones de neutri-

nos han sido ampliamente estudiados en diversas circunstancias [33], aunque las conclusiones no están exentas de debate. No está claro cuál es el mecanismo por el que se produjo  $\eta$ , si existió una asimetría inicial o si las oscilaciones la generaron. En los casos en los que se ha estudiado la conversión entre  $\nu_e$  y  $\nu_s$  [31, 32, 34, 33] el potencial efectivo para los neutrinos es como el que se muestra en nuestra ecuación (3.29), pero los autores desprecian o toman inicialmente muy pequeños los términos de la asimetría  $\eta_e$  y  $\eta_n$  para poder estudiar sólo los efectos de la asimetría leptónica.

El resultado de las oscilaciones de neutrinos en el universo temprano, especialmente entre neutrinos y estériles varía mucho dependiendo de si ocurre una resonancia MSW en el plasma primordial. En el caso de una resonancia ( $\delta m^2 < 0$ ), las oscilaciones son más eficientes, el espectro de los neutrinos puede ser distorsionado y la asimetría leptónica en el sector de los neutrinos puede incrementarse en varios órdenes de magnitud. En el caso no resonante, la asimetría leptónica en el plasma siempre permanece pequeña y puede ser despreciada [35].

Hay autores que también han estudiado la influencia de las oscilaciones  $\nu_e \leftrightarrow \nu_s$  sobre la BBN despreciando la asimetría leptónica [14, 15, 36]. En este trabajo nosotros haremos la misma hipótesis, lo cual evita que los cálculos se vuelvan muy elaborados, y a la vez nos permite examinar de manera más transparente el efecto de la conversión entre neutrinos sobre la BBN. Por esta razón despreciamos el término proporcional a  $\eta$  en el potencial, de esta manera, de ahora en adelante usaremos la siguiente expresión para el potencial efectivo

$$\begin{aligned} V_e &= -C_1 \frac{G_F^2}{\alpha} p_\nu T^4 \\ &= -1.16582 \times 10^{-20} \frac{p_\nu}{\text{MeV}} \left( \frac{T}{\text{MeV}} \right)^4 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.4. Parámetro de Adiabaticidad

Para nuestros propósitos es conveniente expresar la distribución de los neutrinos en términos de la temperatura del universo. Como veremos más adelante, esto nos permitirá introducir una variable adimensional en términos de la cual se dará la evolución de todas las cantidades y parámetros importantes en este trabajo.

Empezamos reescribiendo la ecuación en el tiempo para los estados de

neutrinos de sabor

$$i\frac{d\Psi}{dt} = \tilde{H}\Psi, \quad (3.33)$$

en una dependiente de la temperatura. Empleamos para esto la relación  $t = 0.367 \times 10^{22} g_*^{-1/2} \text{MeV}/T^2$  derivada de la ecuación (1.16), con  $g_*$  definida en (1.18). El resultado que nos queda es

$$i\frac{d\Psi}{dT} = -\frac{\tilde{H}}{\sigma T^3}\Psi, \quad (3.34)$$

donde  $\sigma = \frac{g_*^{1/2}}{0.734} \text{MeV}^{-1}$ .

Sequimos ahora el mismo procedimiento de las ecuaciones (2.38-2.42) y obtenemos que los estados de masa que viajan en el universo dominado por la radiación

$$\Psi^M \equiv \begin{pmatrix} \nu_1^M \\ \nu_2^M \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

cumplen la ecuación

$$i\frac{d\Psi^M}{dT} = \begin{pmatrix} \frac{E_2 - E_1}{2\sigma T^3} & -i\frac{d\theta_m}{dT} \\ i\frac{d\theta_m}{dT} & -\frac{E_2 - E_1}{2\sigma T^3} \end{pmatrix} \Psi^M, \quad (3.36)$$

donde  $E_1, E_2$  son los autovalores de los estados  $\nu^M$ ,  $\theta_m$  es el ángulo de mezcla en materia, y además en el hamiltoniano no tomamos en cuenta los términos proporcionales a la matriz identidad.

Vimos anteriormente que para que los autoestados  $\nu^M$  evolucionen siempre como  $\nu^M$  durante su paso a través de un medio sin que ocurran transiciones entre ellos, se debe cumplir que los términos no diagonales en el hamiltoniano sean muy pequeños, es decir

$$\left| \frac{d\theta_m}{dT} \right| \ll \frac{|E_2 - E_1|}{2\sigma T^3}. \quad (3.37)$$

Esto nos permite definir el parámetro adiabático para la evolución de los neutrinos en el Universo Temprano como

$$\kappa = \frac{|E_2 - E_1|}{2\sigma T^3 \left| \frac{d\theta_m}{dT} \right|}, \quad (3.38)$$

con lo cual, si la condición  $\kappa \gg 1$  se cumple, entonces los neutrinos se propagan por un medio adiabáticamente, en particular en el baño térmico del

fondo de materia primordial.

Usando los resultados para los autovalores dados en (2.26) y (2.27), obtenemos

$$E_2 - E_1 = \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{2p_\nu} = \frac{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - A)^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}{2p_\nu}, \quad (3.39)$$

donde  $A = 2p_\nu V_e$  y, como ya habíamos indicado,  $p_\nu$  es el momento redshift del neutrino del electrón.

El cálculo de  $d\theta_m/dT$  lo hacemos a partir del resultado dado en (2.30) y nos da

$$\frac{d\theta_m}{dT} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{(\Delta_0 \cos 2\theta - A)^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta} \frac{dA}{dT}, \quad (3.40)$$

en donde vemos que para poder derivar  $A$  es necesario expresar el momento del neutrino en función de la temperatura.

Sabemos de la ecuación (3.18) que podemos relacionar el momento  $p_\nu(T)$  del neutrino para un tiempo  $t$  o una cierta temperatura  $T$ , con el del momento en un tiempo diferente. Nosotros escogemos este instante como el correspondiente a la temperatura  $T_D$  cuando los neutrinos se desacoplan. Así podemos escribir

$$p_\nu = \frac{R(T_D)}{R(T)} p_\nu^D, \quad (3.41)$$

donde  $p_\nu^D \equiv p_\nu(T_D)$ . Pero en el UT el factor de escala va como  $R(T) \sim 1/T$ , entonces podemos escribir el momento del neutrino como proporcional a su temperatura  $T$ , es decir,

$$p_\nu = \frac{p_\nu^D}{T_D} T. \quad (3.42)$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dT} &= \frac{2p_\nu^D}{T_D} \frac{dT V_e}{dT}, \\ &= \frac{12p_\nu^D V_e}{T_D}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde hemos usado el potencial dado en la fórmula (3.29).

Sustituyendo los resultados anteriores en (3.36) lo que nos queda es

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{[(\Delta_0 \cos 2\theta - A)^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta]^{3/2}}{2\sigma \Delta_0 \sin 2\theta p_\nu T^3 |dA/dT|} \\ &= \frac{\Delta_0^2 \left[ \left( \cos 2\theta - \frac{2TV_e p_\nu^D}{\Delta_0 T_D} \right)^2 + \sin^2 2\theta \right]^{3/2}}{24\sigma \sin 2\theta T^4 |V_e| \left( \frac{p_\nu^D}{T_D} \right)^2}.\end{aligned}\quad (3.44)$$

Como vemos,  $\kappa$  tiene una complicada dependencia en distintas cantidades: el momento de los neutrinos, la temperatura del universo y los parámetros de las oscilaciones entre neutrinos  $\delta m^2$ ,  $\sin 2\theta$ .

### 3.5. Conversión no Resonante

No hemos mencionada nada acerca de  $\delta m^2$ , el cual para una jerarquía donde  $m_2 > m_1$  toma valores siempre positivos. Para este caso, vemos que la condición de resonancia

$$2p_\nu V_e = \delta m^2 \cos 2\theta \quad (3.45)$$

nunca se cumple, puesto que el potencial  $V_e$  es negativo y nos restringimos a valores menores o iguales a  $\pi/4$  para el ángulo de mezcla en el vacío. Esto corresponde a una transición no resonante de los neutrinos y lo mismo sucede con los antineutrinos, ya que en este caso el signo del potencial es el mismo que para los neutrinos.

Ahora analizamos la magnitud del parámetro adiabático para discutir la adiabaticidad de la evolución de los neutrinos. Sustituimos en  $\kappa$  el potencial (3.32) y reescribimos todo de forma adimensional,

$$\kappa = \frac{a \left( \frac{\delta m^2}{eV^2} \right)^2 \left[ \left( \cos 2\theta + b \frac{p_\nu^2}{MeV^2} \frac{T^4}{MeV^4} \frac{eV^2}{\delta m^2} \right)^2 + \sin^2 2\theta \right]^{3/2}}{g_*^{1/2} \sin 2\theta \frac{p_\nu^3}{MeV^3} \frac{T^6}{MeV^6}}.\quad (3.46)$$

Donde  $a = 2.62333 \times 10^{16}$  y  $b = 2.33164 \times 10^{-8}$  no tienen unidades.

Es difícil ver el comportamiento de  $\kappa$  dada la dependencia que tiene con cuatro variables. Sin embargo nosotros trabajaremos en un corto rango de

temperaturas limitado por  $T_D = 2$  MeV y la temperatura de nucleosíntesis  $T_N = 0.7$  MeV, estos valores no modifican gran cosa al parámetro adiabático y por eso nos enfocamos en estudiar como se comporta en función del momento.

En la ecuación (3.46) se puede ver que si el momento del neutrino es muy grande, o sea cuando  $p_\nu \rightarrow \infty$ , entonces  $\kappa \sim p_\nu^3$ , adquiriendo también un valor enorme. De la misma forma cuando  $p \rightarrow 0$ ,  $\kappa \sim 1/p_\nu^3$ , y nuevamente el parámetro de adiabaticidad se vuelve un número muy grande. Esto nos lleva a preguntarnos por el valor mínimo que puede alcanzar  $\kappa$  en función del momento, con  $\delta m^2$ ,  $\text{sen}2\theta$  y  $T$  fijos.

Encontramos que cuando el momento del neutrino vale

$$p_{\nu_{min}} = \left( \frac{bT^4/MeV^4}{\delta m^2/eV^2} \right)^{-1/2}, \quad (3.47)$$

el parámetro  $\kappa$  toma un valor mínimo que no depende de la temperatura, esto es

$$\begin{aligned} \kappa_{min} &= a(2b)^{3/2} \frac{(\cos 2\theta + 1)^{3/2}}{g_*^{1/2}} \left( \frac{\delta m^2/eV^2}{\text{sen}^2 2\theta} \right)^{1/2}, \\ &= 2.64174 \times 10^5 \frac{(\cos 2\theta + 1)^{3/2}}{g_*^{1/2}} \left( \frac{\delta m^2/eV^2}{\text{sen}^2 2\theta} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

¿En qué caso se cumple la condición de adiabaticidad ( $\kappa \gg 1$ )? De (3.48) observamos que se necesita que  $\delta m^2 \gtrsim 10^{-10} \text{sen}^2 2\theta$  para que  $\kappa \gtrsim 1$ . Sustituyendo el ángulo de mezcla máximo y si tomamos el número estándar  $g^* = 10.75$  encontramos que  $\kappa_{min} \approx 8 \times 10^4 (\delta m^2/eV^2)^{1/2}$ .

Si nos restringimos al rango de valores para  $\delta m^2 > 10^{-8} eV^2$  es una buena aproximación suponer que el caso no resonante de las oscilaciones de neutrinos en el UT corresponde a un proceso adiabático. Lo anterior es cierto independientemente de los valores que tomemos para  $\text{sen}^2 2\theta$ , el momento de los neutrinos y la temperatura.

### 3.5.1. $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ en el caso no resonante

Hemos mostrado que, cuando no se cumple la condición de resonancia, podemos considerar que la evolución de las amplitudes de los neutrinos en el medio se da de forma adiabática. De este modo, empleamos la solución

adiabática calculada en la sección 2.4.1 para escribir la probabilidad de supervivencia como

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_m \cos 2\theta_m^0 + \frac{1}{2} [\sin 2\theta_m \sin 2\theta_m^0 \cos \delta(t)]. \quad (3.49)$$

Con el material visto en este capítulo ya podemos calcular  $\delta(t)$  definida en la ecuación (2.55). D'Olivo, Nuñez y Torres [21] lo calcularon para el caso en que los efectos de materia son despreciables para un cierto rango de los parámetros de los neutrinos. Nosotros lo derivaremos en el caso más general usando nuestro potencial efectivo  $V_e$ . De la ecuación (3.39) escribimos

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \int_{t_0}^t (E_2 - E_1) dt', \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{(\delta m^2 \cos 2\theta - A)^2 + (\delta m^2 \sin 2\theta)^2}}{2p_\nu} dt', \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde  $t_0$  es el tiempo cuando los neutrinos se desacoplan.

Es conveniente escribir el tiempo en términos de la temperatura y para esto usamos que

$$dt = \frac{dt}{dT} dT = -7.340 \times 10^{21} g_*^{-1/2} \frac{\text{MeV}}{T^3} dT, \quad (3.51)$$

con lo cual la integral nos queda en la siguiente forma

$$\delta(T) = \frac{u \delta m^2}{p_\nu^D} \int_{T_D}^T \frac{\sqrt{(\cos 2\theta - \frac{v(p_\nu^D)^2 T'^6}{\delta m^2})^2 + \sin^2 2\theta}}{T'^4} dT'. \quad (3.52)$$

$u = -7.340 \times 10^9 g_*^{-1/2} \text{MeV}^4 / \text{eV}^2$  y  $v = 5.8291 \times 10^{-9} \text{eV}^2 / \text{MeV}^8$ . Notemos que  $p_\nu$  también depende de la temperatura, y que para realizar el cálculo tomamos en cuenta la expresión dada en (3.41).

Aunque  $T$  y  $\delta m^2$  están en unidades de MeV y  $\text{eV}^2$  respectivamente,  $\delta(T)$  es una cantidad adimensional. Hacemos el cambio de variable  $x' = T'/T_D$  para que todo dentro de la integral resulte sin unidades

$$\delta(x) = uv p_\nu^D T_D^3 \int_1^x \frac{\sqrt{(\mathbb{A} + x'^6)^2 + \mathbb{B}^2}}{x'^4} dx' \quad (3.53)$$

donde  $\mathbb{A} = \alpha \cos 2\theta$ ,  $\mathbb{B} = \alpha \sin 2\theta$  y  $\alpha = \delta m^2 / (v(p_\nu^D)^2 T_D^6)$ . Podemos disminuir el exponente en la variable dentro de la integral mediante la sustitución  $s' = x'^6$ , lo que nos da

$$\delta(s) = \frac{u v p_\nu^D T_D^3}{6} \int_1^s \frac{\sqrt{(s' + \mathbb{A})^2 + \mathbb{B}^2}}{s'^{3/2}} ds', \quad (3.54)$$

con  $s = x^6$ .

Esta integral no se puede resolver de manera exacta y, por lo tanto, lo que hacemos es aproximar su solución. Con algo de álgebra encontramos que

$$I(s) \equiv \int_1^s \frac{\sqrt{(s' + \mathbb{A})^2 + \mathbb{B}^2}}{s'^{3/2}} ds' = \int_1^s ds' \frac{s' + \mathbb{A}}{s'^{3/2}} + \mathbb{B}^2 \int_1^s \frac{ds'}{s'^{3/2}} f(s') \quad (3.55)$$

donde

$$f(s') = \frac{1}{\sqrt{(s' + \mathbb{A})^2 + \mathbb{B}^2} + s' + \mathbb{A}}.$$

Trataremos ahora de aproximar esta función por una que sea más fácil de integrar. La raíz dentro de  $f(s')$  indica que si queremos aproximarla hay que hacerlo estudiando como se comporta comparando  $s'$  con  $\alpha$ , pues  $\alpha^2 = \mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2$ .

En el caso en que  $s' \gg \alpha$ ,

$$f(s') \simeq \frac{1}{2(s' + \mathbb{A})} = \frac{1}{2(s' + \alpha \cos 2\theta)} \simeq \frac{1}{2s'}.$$

Si en cambio  $s' \ll \alpha$ , entonces aproximamos  $\sqrt{(s' + \mathbb{A})^2 + \mathbb{B}^2} + s' + \mathbb{A} = \sqrt{2s'\mathbb{A} + \alpha^2} + s' + \mathbb{A} \simeq \alpha + \mathbb{A}s'/\alpha + s' + \mathbb{A} = (\alpha + \mathbb{A})(s' + \alpha)/\alpha$ . Por eso, para valores pequeños de  $s'$  podemos poner

$$f(s) \simeq \frac{\alpha}{\alpha + \mathbb{A}} \frac{1}{(s' + \alpha)} = \frac{1}{2\cos^2\theta} \frac{1}{s' + \alpha}.$$

Dado que el ángulo  $\theta$  esta restringido a valores entre cero y  $\pi/4$ , entonces proponemos entonces el siguiente fit para cualquier valor de  $s'$

$$f(s') = \frac{1}{2\cos^2\theta} \frac{1}{s' + \alpha}. \quad (3.56)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.55) se llega a que

$$\begin{aligned}
I(s) &= \int_1^s ds' \frac{s' + \mathbb{A}}{s'^{3/2}} + \mathbb{B}^2 \int_1^s \frac{ds'}{s'^{3/2}} \frac{1}{2\cos^2\theta} \frac{1}{s' + \alpha}, \\
&= 2(s^{1/2} - 1) - 2\mathbb{A} \left( \frac{1}{s^{1/2}} - 1 \right) \\
&\quad - \frac{\mathbb{B}^2}{\cos^2\theta} \left[ \frac{1}{\alpha s^{1/2}} + \frac{\arctan \sqrt{\frac{s}{\alpha}}}{\alpha^{3/2}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{\arctan \sqrt{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{3/2}} \right]. \quad (3.57)
\end{aligned}$$

En la figura 3.1 comparamos la integral  $-I(s)$  calculada numéricamente como en la ecuación (3.55) con el cálculo de la misma integral usando la aproximación (3.56). Los puntos en la gráfica representan la expresión aproximada y encontramos que hay una buena coincidencia con el valor exacto. Las curvas están hechas para diferentes valores de  $p_\nu^D$ , valores grandes del momento corresponden a las curvas que están más abajo en la figura.

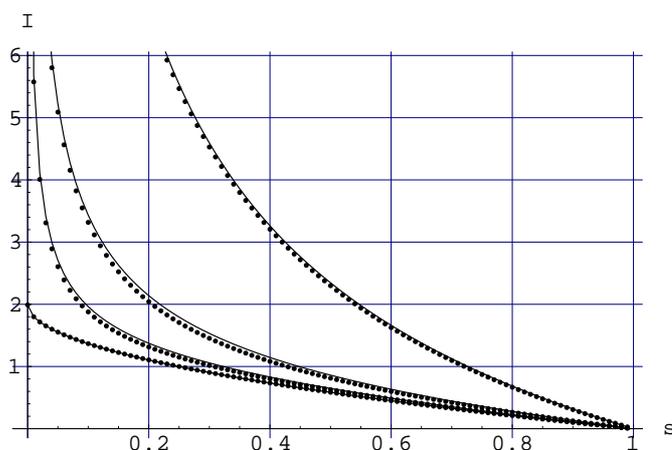


Figura 3.1: Cálculo de  $-I(s)$  evaluada numéricamente (línea continua) con la calculada (puntos) usando el ajuste (3.56) para  $\delta m^2 = 10^{-7}$ ,  $\sin^2 2\theta = 1$  y  $p_\nu^D = 10^6, 1, 10^{-1/2}, 10^{-1/5}$ .

Para  $p_\nu^D > 1$  prácticamente no hay diferencia entre las curvas con distintos valores del momento del neutrino, esto tiene sentido pues para momentos muy grandes  $\alpha$  es bastante pequeño y una muy buena aproximación de la función  $f(s')$  es  $1/2s'$  la cual no tiene dependencia en  $p_\nu^D$ . Las gráficas mostradas

fueron hechas para  $\delta m^2 = 10^{-7}$  y  $\sin^2 2\theta = 1$  pero si variamos cada parámetro el ajuste sigue siendo válido.

Encontramos entonces que podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta(T) = & \frac{uvp_\nu^D T_D^3}{3} \left[ -\alpha T_D^3 \left( \frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_D^3} \right) + T^3 \left( \frac{1}{T_D^3} - \frac{1}{T^3} \right) \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\alpha} \sin^2 \theta \left( \arctan \frac{T^3}{\sqrt{\alpha} T_D^3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde  $\alpha$ , ya definida anteriormente, ahora la escribimos ya no en términos del momento en el desacople de los neutrinos sino en función del momento  $p_\nu$  para cualquier temperatura

$$\alpha = \frac{\delta m^2 T^2}{vp_\nu^2 T_D^8}. \quad (3.59)$$

El término dentro de los paréntesis en la ec. (3.58) que es proporcional a  $\alpha$  es el que se obtiene de considerar que los neutrinos se propagan en el vacío, este corresponde al cálculo hecho por D'Olivo et al [21]. El resto es la corrección debida a la introducción de los efectos producidos por el potencial  $V_e$ .

La probabilidad de supervivencia de los neutrinos del electrón es como en (3.49) con  $\delta(t)$  igual a (3.58) y hay que hacer notar que sirve tanto para los neutrinos como para los antineutrinos. Esta es la fórmula que emplearemos en nuestros cálculos para oscilaciones no resonantes.

### 3.6. Conversión Resonante

Que los neutrinos atraviesen la región de resonancia significa que en algún momento se cumple la condición (3.45). Para que esto pase necesariamente  $\delta m^2 < 0$ , pues el potencial es siempre negativo para neutrinos y antineutrinos lo que implica que la probabilidad de supervivencia será la misma para ambos tipos de partículas. En adelante tendremos en mente el valor negativo de  $\delta m^2$ .

Cuando los neutrinos pasan por la resonancia existe la posibilidad de que haya una transición entre los estados  $\nu_1^M$  y  $\nu_2^M$ . Si esto ocurre estamos en una conversión donde los autoestados físicos no pasan por el medio adiabáticamente. Para este caso se aplica entonces la solución no adiabática descrita

en la sección 2.5 donde se calcula la probabilidad  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$  de los neutrinos.

En la eq. (2.64) hay términos que dependen de las fases adquiridas por el operador de evolución de los neutrinos cuando se propagan en el medio. Para propósitos prácticos usualmente los términos oscilantes pueden ser ignorados pues si promediamos los cosenos que tienen las fases como argumento estos desaparecen. La probabilidad resultante es

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - P_C \right) \cos 2\theta_m \cos 2\theta_m^0, \quad (3.60)$$

donde  $P_C$  es la probabilidad de cruce entre dos estados adiabáticos. Una buena aproximación está dada por la fórmula de Landau-Zener

$$P_C = e^{-\frac{\pi}{2}\kappa_R}, \quad (3.61)$$

donde  $\kappa_R$  es el parámetro adiabático calculado en la región de resonancia usando la ecuación (2.48). Escrito en términos del momento del neutrino tiene la forma

$$\kappa_R = \frac{|\delta m^2| \sin^2 2\theta}{2p_\nu \cos 2\theta \left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right|_{t_R}}. \quad (3.62)$$

Usando la relación (3.51) es posible reescribir la derivada temporal de  $A$  como una derivada en la temperatura. De esta forma

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right|_{t_R} &= \left| \frac{1}{p_\nu V_e} \frac{dT}{dt} \frac{dp_\nu V_e}{dT} \right|_{T_R} = \left| \frac{-T^3}{2wV_e} \frac{dV_e}{dT} \right|_{T_R}, \\ &= \left| \frac{2T^2}{w} \right|_{T_R}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

con el valor  $w = 0.36722 \times 10^{22} g_*^{-1/2} \text{MeV}$ .

Para calcular explícitamente  $\kappa_R$  necesitamos antes saber cual es la temperatura del universo  $T_R$  a la cual se cumple la condición de resonancia. Puesto que  $\delta m^2 < 0$  es útil reescribir la condición de resonancia como

$$2p_\nu V_e = -|\delta m^2| \cos 2\theta. \quad (3.64)$$

Sustituyendo el potencial  $V_e$ , llegamos a

$$2cp_\nu^2 T_R^4 = |\delta m^2| \cos 2\theta, \quad (3.65)$$

donde  $c = 1.16582 \times 10^{-20} \text{MeV}^{-4}$ .

Si despejamos  $T_R$ , lo sustituimos en (3.63) y  $\kappa_R$  nos resulta en

$$\kappa_R = 1.40183 \times 10^5 g_*^{-1/2} \frac{\left| \frac{\delta m^2}{\text{eV}^2} \right|^{1/2} \text{sen}^2 2\theta}{(\cos 2\theta)^{3/2}}. \quad (3.66)$$

Vemos con este resultado que  $P_C$  no depende de la energía de los neutrinos y tampoco de la temperatura del universo, es función sólo de los parámetros de las oscilaciones de los neutrinos y del número de especies.

Los efectos no adiabáticos son importantes cuando el parámetro adiabático es del orden de la unidad y los neutrinos cumplen la condición de resonancia. Pero puede ocurrir que  $V(t_R) > V(t_0)$ , o sea, que antes del momento de producción de los neutrinos se cumpla la condición de resonancia, en este caso pedimos que  $P_C = 0$  aun para  $\kappa < 1$ . La probabilidad de cruzamiento entonces debe modificarse para incluir esta situación; una efectiva forma de hacerlo es multiplicar  $P_C$  por una función escalón con variable adimensional  $\Theta(1 - V(t_R)/V(t_0))$ , de tal manera que la probabilidad de transición se anula cuando la condición de resonancia se cumple antes del momento de producción de los neutrinos. Con el mismo argumento, si la resonancia ocurre después de que la abundancia de neutrones se ha estabilizado a una temperatura  $T$  de interés, entonces las oscilaciones ya no tienen ningún efecto y la probabilidad de crossing debe anularse. Esta condición implica que  $V(T_R) < V(T)$  y la incluimos también con una función escalón.

El punto de producción lo consideramos como la temperatura a la cual los neutrinos se desacoplan, tenemos entonces la siguiente expresión para la probabilidad de crossing en términos de la temperatura

$$P_C = \Theta \left( 1 - \frac{V(T_R)}{V(T_D)} \right) \Theta \left( 1 - \frac{V(T)}{V(T_R)} \right) e^{-\frac{\pi}{2} \kappa_R}, \quad (3.67)$$

donde

$$\kappa_R = 1.40183 \times 10^5 g_*^{-1/2} \left| \frac{\delta m^2}{\text{eV}^2} \right|^{1/2} \frac{\text{sen}^2 2\theta}{(\cos 2\theta)^{3/2}}. \quad (3.68)$$

Esta modificación garantiza el correcto comportamiento de la probabilidad de supervivencia de los neutrinos y debe tomarse en cuenta si la empleamos para realizar nuestros cálculos.

Otra expresión para la probabilidad de crossing se obtiene a partir de la aproximación de Magnus para transiciones no adiabáticas. Esta probabilidad

de transición entre dos niveles para oscilaciones de neutrinos en materia ha sido calculada en [37]. La fórmula que obtienen los autores es

$$P_C = \text{sen}^2[(\theta_m^0 - \theta_m)e^{-\kappa R}]. \quad (3.69)$$

Veremos en este trabajo que la probabilidad de supervivencia de los neutrinos funciona mejor cuando usamos la  $P_C$  según esta ecuación.

# Capítulo 4

## La Abundancia de Neutrones

Casi todo el helio existente en el universo se formó unos minutos después del big bang. Su abundancia representa aproximadamente la cuarta parte de la masa bariónica del universo, compuesta principalmente de hidrógeno. En este capítulo obtendremos una expresión semianalítica que nos permitirá calcular con una buena aproximación la fracción del  ${}^4\text{He}$  y, a la vez, poner en evidencia los procesos físicos y variables que la determinan.

La cantidad total de helio esta dada por  $m_{\text{He}} = 2N_n m_N$ , donde  $N_n$  es el número de neutrones y  $m_N$  es la masa del nucleón, ya sea protón o neutrón. De la misma forma, la masa del hidrógeno que se creó en el universo temprano es igual a los protones que quedaron para formar este elemento, o sea  $m_H = (N_p - N_n)m_N$ .

La fracción de masa del  ${}^4\text{He}$  existente se puede expresar en términos de estas cantidades,

$$Y_P = \frac{M_{\text{He}}}{M_H + M_{\text{He}}} = \frac{2N_n}{N_p + N_n} = \frac{2n_n}{n_p + n_n}, \quad (4.1)$$

y, si definimos la abundancia de neutrones como

$$X_n \equiv \frac{n_n}{n_n + n_p} = \frac{1}{1 + n_p/n_n}, \quad (4.2)$$

entonces  $Y_P = 2X_n$ , que es la forma usual como se determina la fracción de  ${}^4\text{He}$ .

La relación  $n_n/n_p$  se mantiene en equilibrio por las interacciones débiles entre leptones y nucleones dadas en la ecuación (1.28) y evoluciona según la ec. (1.31), determinando así cómo cambia  $X_n$  con la temperatura. Después

que los neutrones se desacoplan de los neutrinos, las reacciones débiles dejan de ser efectivas para sostener este equilibrio y  $X_n$  es casi constante, “freeze-out”. A partir de esta temperatura  $n_n$  sólo se ve modificada por el decaimiento beta de los mismos neutrones, por lo que  $Y_p = 2 e^{-t/\tau_n} X_n$ , donde  $\tau_n$  es la vida media del neutrón. Sin embargo,  $Y_p$  no toma un valor asintóticamente cero. A medida que la temperatura desciende más, comienzan a producirse reacciones nucleares que atrapan a todos los neutrones en  ${}^4\text{He}$  y en otros núcleos livianos. Esto ocurre a temperaturas del orden de 0.1 MeV y desde entonces  $Y_p$  alcanza un valor fijo.

A *grosso modo*, el valor para el cual  $X_n$  se congela puede estimarse sustituyendo la temperatura a la cual ocurre el freeze-out ( $T_F$ ) en la ecuación (4.1). Una forma más precisa de calcular la abundancia primordial de neutrones es estudiando la evolución de  $X_n$  con una ecuación que la describa como función de la temperatura y que también tome en cuenta las tasas de producción y destrucción de los neutrones y su tendencia a disminuir cuando el universo se va enfriando. Esto nos da el valor exacto al cual tiende  $X_n$  cuando la expansión del universo es tan rápida que las interacciones en la ec. (1.28) ya no son capaces de afectar su valor.

## 4.1. La Ecuación de evolución de $X_n$

La abundancia de una especie de partículas en el UT es un análisis complicado ya que se trata de un sistema en el que las especies interactúan entre si y en el que no se encuentran necesariamente en equilibrio termodinámico. La manera apropiada de estudiar cómo una especie evoluciona con el tiempo en un universo en expansión es con la ecuación de Boltzmann. Esta ecuación describe cómo los procesos entre distintas especies de partículas determinan el número de una de ellas. La razón de cambio de una especie depende de la diferencia entre las tasas de producción y eliminación de las especies con las que interactúa.

Supongamos que estamos interesados en la densidad de número  $n_1$  de la especie 1, y que el único proceso que afecta su abundancia es la aniquilación con la especie 2 para producir dos partículas que llamamos 3 y 4, es decir,  $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ . Si  $\mathcal{M}$  es la amplitud para este proceso entonces la ecuación

de Boltzmann para este sistema es

$$R^{-3} \frac{d(n_1 R^3)}{dt} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\ \times (2\pi)^4 \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \\ \times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)] \quad (4.3)$$

En el lado izquierdo de la ecuación (4.3), el producto  $n_1 R^3$  es el número de partículas por covolumen y se conserva en ausencia de interacciones. De hecho, si no hay interacciones esta relación se reduce a la segunda ecuación de Friedmann para un universo plano dominado por la radiación,

$$\dot{n} + 3Hn = 0. \quad (4.4)$$

Las interacciones están incluidas en el lado derecho de la ecuación de Boltzmann. En la última línea vemos que la tasa de producción de la especie 1 es proporcional al número de ocupación de las especies  $f_3$  y  $f_4$ . De la misma forma, la tasa de aniquilación es proporcional a  $f_1 f_2$ . Los factores  $1 \pm f$ , con signo más para los bosones y menos para los fermiones, representan el fenómeno de incremento de Bose y bloqueo de Pauli. Si la partícula 1 ya existe, entonces una reacción que produce tales partículas es más factible de ocurrir si es un bosón y menos si es un fermión.

La ecuación (4.3) es una ecuación integrodiferencial para las distribuciones en el espacio fase entre especies que pueden no estar en equilibrio termodinámico. No obstante, para las interacciones que nos ocupan, podemos usar varias simplificaciones. Los procesos de dispersión ocurren tan rápido que refuerzan el equilibrio cinético, esto es, las distribuciones de las especies toman la forma Bose-Einstein o Fermi-Dirac como en la ec. (1.8). De esta manera, el único parámetro desconocido en las distribuciones es  $\mu$  y, en principio, también deberíamos resolver una ecuación diferencial para esta variable. Pero si las aniquilaciones ocurren en equilibrio químico,  $\mu$  sería el potencial químico y la suma de los potenciales en cualquier reacción tiende a balancearse. Con estas hipótesis de equilibrio cinético y químico la ecuación de Boltzmann se simplifica a una ecuación diferencial ordinaria.

Se define la sección eficaz promedio de la reacción  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  como

$$\langle \sigma v \rangle_{12} \equiv \frac{(2\pi)^4}{n_1 n_2} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \quad (4.5) \\ \times f_1 f_2 [1 \pm f_3][1 \pm f_4] \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta^3(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2,$$

donde  $\sigma$  es la sección eficaz de la interacción y  $v$  es la velocidad relativa entre las partículas 1 y 2. Una definición similar se da para  $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$ . Con esto, la ecuación de Boltzmann se puede escribir de la siguiente manera:

$$R^{-3} \frac{d(n_1 R^3)}{dt} = n_3 n_4 \langle \sigma v \rangle_{34} - n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle_{12}. \quad (4.6)$$

Nosotros estamos interesados en la densidad de neutrones, así que debemos tomar en cuenta todas las reacciones que determinen esta cantidad. Ellas son las interacciones en la ecuación (1.28) y a cada una le corresponde una sección eficaz, pero podemos escribir  $\langle \sigma v \rangle_{np}$  para la sección eficaz total de todas las reacciones que desaparecen neutrones y que crean protones. De la misma manera,  $\langle \sigma v \rangle_{pn}$  es la sección eficaz de las reacciones inversas que destruyen protones y producen neutrones. Con esto nos queda la ecuación

$$R^{-3} \frac{d(n_n R^3)}{dt} = n_e n_p \langle \sigma v \rangle_{pn} - n_\nu n_n \langle \sigma v \rangle_{np}, \quad (4.7)$$

en la cual, debido a la larga vida media del neutrón hemos despreciado la contribución al número de protones debida al decaimiento beta del neutrón.

Ahora bien,  $n_\nu \langle \sigma v \rangle_{np} = \lambda_{np}$  es el número total de reacciones por neutrón por segundo de las reacciones que transforman neutrones en protones; es decir, la tasa de las reacciones hacia adelante en (1.28). De igual manera para los procesos inversos  $n_e \langle \sigma v \rangle_{pn} = \lambda_{pn}$ , con lo cual escribimos

$$R^{-3} \frac{d(n_n R^3)}{dt} = n_p \lambda_{pn} - n_n \lambda_{np}. \quad (4.8)$$

Si desarrollamos la derivada en el lado izquierdo de la ecuación anterior obtenemos dos partes

$$R^{-3} \frac{d(n_n R^3)}{dt} = \dot{n}_n + 3H n_n \quad (4.9)$$

donde  $H = \dot{R}/R$ . El término  $3H n_n$  toma en cuenta la dilución de la densidad de neutrones debido al efecto de la expansión del universo.

Para evitar incluir el factor de escala, conviene reescribir nuestra ecuación en términos de la razón entre  $n_n$  y  $n_n + n_p$ , es decir, de nuestra conocida  $X_n$ . Entonces  $n_n = X_n(n_n + n_p)$  y  $n_p = (1 - X_n)(n_n + n_p)$ , que al sustituirse en (4.9) y si recordamos que el número total de nucleones  $(n_n + n_p)R^3$  se conserva, nos da la ecuación de la evolución de  $X_n$ :

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{pn}(1 - X_n) - \lambda_{np}X_n. \quad (4.10)$$

## 4.2. Solución para $X_n$

Las tasas de las interacciones  $\lambda_{pn}$  y  $\lambda_{np}$ , se ven afectadas por las oscilaciones entre distintos sabores de neutrinos, lo cual a su vez modifica el valor de  $X_n$  y a la ecuación (4.10). Este efecto lo representemos desde ahora con un superíndice  $P$  que representa la probabilidad de supervivencia de neutrinos o antineutrinos. Con esto en mente, partimos de que la ecuación final más general que describe la fracción de neutrones a nucleones es entonces

$$\frac{dX_n^P}{dt} = \lambda_{pn}^P(1 - X_n^P) - \lambda_{np}^P X_n^P. \quad (4.11)$$

Si nombramos  $\Lambda^P \equiv \lambda_{np}^P + \lambda_{pn}^P$ , entonces reescribimos la ecuación diferencial de la siguiente manera

$$\frac{dX_n^P}{dt} + \Lambda^P X_n^P = \lambda_{pn}^P. \quad (4.12)$$

La cual la resolvemos multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor de integración

$$I(t, t') = \exp \left[ - \int_{t'}^t dt'' \Lambda^P(t'') \right]. \quad (4.13)$$

Así, la ecuación (4.12) toma la forma más simple

$$\frac{d [X_n^P(t') I(t, t')]}{dt'} = \lambda_{pn}^P(t') I(t, t'). \quad (4.14)$$

Integrando a partir de un tiempo inicial  $t_o$  a un tiempo  $t$ , obtenemos

$$X_n^P(t) = X_n^P(t_o) I(t, t_o) + \int_{t_o}^t dt' \lambda_{pn}^P(t') I(t, t'). \quad (4.15)$$

Ahora establecemos la condición inicial para  $X_n^P$ . En nuestro caso, el tiempo inicial  $t_o$  será aquel en que las oscilaciones de neutrinos comiencen a ser importantes. Esto ocurre cuando los neutrinos del electrón se desacoplan de las interacciones débiles que lo mantienen en equilibrio, es decir, cuando la tasa de las interacciones débiles del neutrino  $\Gamma_w \sim E^2 n_\nu(E)$  sea menor que la tasa de expansión del universo  $H \sim \sqrt{g} T^2$ . Para neutrinos del electrón, esto pasa cuando  $T \sim 2$  MeV.

Definimos  $X_{eq} \equiv \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_{np} + \lambda_{pn}}$  como el valor de la abundancia de neutrones

en equilibrio cuando las oscilaciones de neutrinos no tienen ningún efecto y cuando las interacciones débiles ocurren lo suficientemente rápido como para mantener el equilibrio térmico entre nucleones y leptones. La condición inicial para  $X_n^P(t)$  la tomamos como

$$X_n^P(t_0) \equiv \frac{\lambda_{pn}(t_0)}{\Lambda(t_0)} = X_{eq}(t_0), \quad (4.16)$$

donde  $\Lambda \equiv \lambda_{np} + \lambda_{pn}$ . Esta condición refleja el hecho de que inicialmente la abundancia de neutrones se encuentra en equilibrio.

Usamos la siguiente expresión con  $X_{eq}$  y la integramos por partes

$$\int_{t_0}^t dt' \dot{X}_e I(t, t') = X_{eq}(t) - X_{eq}(t_0)I(t, t_0) - \int_{t_0}^t dt' X_{eq}(t') \Lambda^P(t') I(t, t'). \quad (4.17)$$

La cual nos sirve para despejar  $X_{eq}(t_0)I(t, t_0)$  y sustituirla en (4.15) tomando en cuenta la condición (4.16). El resultado es

$$X_n^P(t) = X_{eq}(t) - \int_{t_0}^t dt' \dot{X}_{eq} I(t, t') - \int_{t_0}^t dt' X_{eq}(t') \Lambda^P(t') I(t, t') + \int_{t_0}^t dt' \lambda_{pn}^P(t') I(t, t'). \quad (4.18)$$

Veremos más adelante que los dos últimos términos en esta ecuación se pueden despreciar para obtener una solución más simple para  $X_n^P$ ; lo que nos permitirá hacer los cálculos más sencillos.

A continuación, debemos obtener las expresiones para las tasas con que ocurren las interacciones débiles entre los neutrinos y los nucleones. Tales tasas dependen de la temperatura y también deberán ser reescritas en términos de la nueva variable.

## 4.3. Las Tasas de las Interacciones

### 4.3.1. Expresión Integral de las Tasas

Los procesos que determinan la concentración de neutrones en el UT son las reacciones de interacción débil dadas en la ecuación (1.28). El punto de partida para obtener la forma explícita de las tasas con que ocurren estos

procesos es el número de reacciones por segundo por partícula blanco en una reacción del tipo  $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ , el cual está dado por

$$\lambda = \langle \sigma v \rangle n_1, \quad (4.19)$$

donde  $\sigma$  es la sección eficaz de la interacción,  $v$  es la velocidad relativa entre la partícula proyectil 1 y la partícula blanco 2, además  $n_1$  es la densidad de partículas 1.

Con esta fórmula calcularemos todas las tasas involucradas en los procesos de interacciones débiles que definen la abundancia de neutrones. Veremos que si se hacen algunas aproximaciones, el cálculo resulta sencillo y obtendremos expresiones con una dependencia explícita de los parámetros de interés en cosmología.

Como el valor de la vida media del neutrón  $\tau_n$  es muy grande, la influencia del decaimiento del neutrón en  $X_n$  es marginal. Por eso la evolución de  $X_n$  depende esencialmente de las tasas de transición de los procesos (1.28). Para realizar este cálculo necesitamos la sección eficaz diferencial de una reacción del tipo  $1+2 \leftrightarrow 3+4$ . Esta sección eficaz la calculamos a partir de la siguiente fórmula [38]

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \delta^4(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4}. \quad (4.20)$$

Consideremos la interacción  $n + \nu_e \rightarrow p + e$  en la que el neutrón es la partícula blanco. Si hacemos la hipótesis de colocarnos en un sistema en donde observamos en reposo al neutrón y despreciamos la masa del neutrino, la raíz cuadrada en la ecuación (4.20) se vuelve

$$\sqrt{(P_\nu \cdot P_n)^2 - m_\nu^2 m_n^2} = E_\nu m_n. \quad (4.21)$$

Con esta expresión y usando la ecuación (4.19) obtenemos para la tasa de la interacción

$$\begin{aligned} \lambda_{n\nu_e \rightarrow pe^-} &= \langle \sigma v \rangle_{n\nu} n_\nu = \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3 2E_p} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4E_\nu m_n} \\ &\quad \times f_\nu(E_\nu) [1 - f_p(E_p)] [1 - f_e(E_e)] \delta^4(P_\nu + P_n - P_p - P_e). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Donde hemos considerado a la velocidad del neutrino relativista  $v \approx c = 1$ .

Las funciones de distribución que aparecen en la ecuación (4.22) son todas

de Fermi-Dirac. Originalmente para el protón su distribución es

$$f(E_p) = \frac{1}{e^{\frac{E_p - \mu_p}{T}} + 1}. \quad (4.23)$$

Pero como estamos interesados en el régimen  $T \leq 2\text{MeV}$  y además la masa del protón es enorme comparada con estas temperaturas, se tiene que  $E_p - \mu_p \gg T$ . Entonces  $e^{(E_p - \mu_p)/T} \gg 1$  y por eso  $f(E_p) \simeq e^{-\frac{(E_p - \mu_p)}{T}}$ . Podemos aproximar  $[1 - f(E_p)] \simeq 1$  en la ecuación (4.22) y la reescribimos como

$$\begin{aligned} \lambda_{n\nu_e \rightarrow pe^-} &= \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3 2E_p} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4E_\nu m_n} \\ &\quad \times f_\nu(E_\nu) [1 - f_e(E_e)] \delta^4(P_\nu + P_n - P_p - P_e). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ahora sustituimos el valor de la amplitud al cuadrado  $|\mathcal{M}|^2$ . En teoría de Fermi la amplitud para este proceso es igual a la amplitud para el decaimiento beta. La razón es que Fermi conectó en un mismo punto las corrientes débiles suponiendo que la interacción es de muy corto alcance, de hecho, ocurre lo mismo para todos los procesos en (1.26). A partir de la fórmula (5) del Apéndice tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 16(1 + 3g_A^2)G_F^2(P_n \cdot P_\nu)(P_p \cdot P_e) \\ &\approx 16(1 + 3g_A^2)G_F^2 m_n m_p E_\nu E_e, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$  es la constante de Fermi y  $g_A = 1.26$  es el acoplamiento vector-axial de los nucleones cuyo valor se calcula con el tiempo de vida media del neutrón.

Ahora bien, de la conservación de la energía ( $E_e = E_\nu + Q$ ) se tiene que  $p_e = \sqrt{E_e^2 - m_e^2} = \sqrt{(p_\nu + Q)^2 - m_e^2}$ , donde usamos que  $E_\nu = p_\nu$  y definimos  $Q \equiv m_n - m_p = 1.297 \text{MeV}$ . Puesto que  $Q > m_e$ , el momento del electrón no puede ser cero, sino que satisface la condición  $p_e \geq \sqrt{Q^2 - m_e^2}$ .

Integrando sobre el momento del protón y haciendo las anteriores sustituciones, la tasa de transición toma la forma

$$\begin{aligned} \lambda_{n\nu_e \rightarrow pe^-} &= \frac{(1 + 3g_A^2)G_F^2}{2\pi^3} \int_0^\infty dp_\nu \int_{\sqrt{Q^2 - m_e^2}}^\infty dp_e p_e^2 p_\nu^2 \\ &\quad \times f_\nu(E_\nu) [1 - f_e(E_e)] \delta(E_\nu + Q - E_e) \\ &= \frac{(1 + 3g_A^2)G_F^2}{2\pi^3} \int_0^\infty dp_\nu \int_Q^\infty dE_e p_e E_e p_\nu^2 \\ &\quad \times f_\nu(E_\nu) [1 - f_e(E_e)] \delta(E_\nu + Q - E_e). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Donde en la última integral usamos que  $E_e dE_e = p_e dp_e$ .

Se puede relacionar esta tasa en términos de constantes conocidas. Al calcular la vida media del neutrón (ver apéndice) uno encuentra que

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{(1 + 3g_A^2)G_F^2 m_e^5 \lambda_0}{2\pi^3}. \quad (4.27)$$

Con este resultado y al integrar sobre la energía del electrón la eq. (4.26) puede ser reexpresada de la siguiente manera

$$\lambda_{n\nu_e \rightarrow pe^-} = A \int_0^\infty dp_\nu E_e p_e p_\nu^2 f_\nu(E_\nu) [1 - f_e(E_e)], \quad (4.28)$$

donde hemos definido  $A \equiv (\tau_n m_e^5 \lambda_0)^{-1} = 0.0197868 \text{ MeV}^{-5} \text{ s}^{-1}$  y sustituimos  $\tau_n$  dado en la ecuación anterior.

Las tasas para el resto de los procesos de neutrinos y antineutrinos con nucleones se calculan de la misma manera. De este modo obtenemos

$$\lambda_{pe^- \rightarrow n\nu_e} = A \int_{\sqrt{Q^2 - m_e^2}}^\infty dp_e E_\nu^2 p_e^2 f_e(E_e) [1 - f_\nu(E_\nu)], \quad (4.29)$$

$$\lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+} = A \int_{Q+m_e}^\infty dp_{\bar{\nu}} E_{e^+} p_{e^+} p_{\bar{\nu}}^2 f_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}) [1 - f_{e^+}(E_{e^+})], \quad (4.30)$$

$$\lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e} = A \int_0^\infty dp_{e^+} E_{\bar{\nu}}^2 p_{e^+}^2 f_{e^+}(E_{e^+}) [1 - f_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}})]. \quad (4.31)$$

En nuestro caso, vale la pena observar que para cada partícula  $i$ , su función de distribución  $f_i(E_i) = \frac{1}{1 + e^{E_i/T_i}}$  tiene su correspondiente temperatura  $T_i$  y que además tomaremos el potencial químico  $\mu_i = 0$ .

### 4.3.2. Factor de Probabilidad en las Tasas

En el capítulo tres mostramos que las funciones de distribución de los neutrinos y antineutrinos mantienen la forma Fermi-Dirac aun después de su desacople del resto del plasma, aproximadamente cuando la temperatura es de 2 MeV. Sin embargo, con las oscilaciones entre neutrinos lo anterior no necesariamente se cumple. El equilibrio cinético entre las especies de neutrinos se pierde cuando hay transiciones entre ellos, esto modifica las distribuciones, su densidad y su parámetro de degeneración.

La distorsión del espectro de los neutrinos sólo puede darse si ocurre una

oscilación antes de que los neutrinos tengan una interacción, es decir, se necesita que su camino libre medio sea mayor a su longitud de oscilación. Esto significa que el periodo de oscilación debe ser menor al tiempo promedio entre dos interacciones de los neutrinos; o que se cumpla  $\Gamma_w < \Gamma_{osc}$ , la tasa con la que ocurren las oscilaciones  $\Gamma_{osc}$  debe ser mayor a la tasa con la que ocurren las interacciones débiles  $\Gamma_w$  en la eq.(3.1).

Tenemos dos momentos en los cuales considerar las oscilaciones de neutrinos. El primero es antes de que se desacoplen del resto del plasma. Durante este tiempo la tasa de las interacciones débiles es mucho mayor que la tasa de expansión del universo,  $H(T) \ll \Gamma_w$ , esto ocurre a muy altas temperatura por lo que  $\Gamma_w > \Gamma_{osc}$ ; no hay oscilaciones y los neutrinos se encuentran termalizados.

Después del desacople, la temperatura ha bajado y casi no hay interacciones débiles, por lo que  $\Gamma_w < \Gamma_{osc}$ . Nosotros estudiamos la evolución de  $X_n$  a partir del desacople de los neutrinos y hasta la era de la nucleosíntesis, por lo que formalmente en los cálculos se deben incluir los efectos de las oscilaciones en las distribuciones de Fermi-Dirac. Un análisis más completo que incluya la evolución de los neutrinos con oscilaciones debe hacerse resolviendo las ecuaciones cinéticas para su matriz de densidad.

En este trabajo incluiremos los efectos de las oscilaciones de la siguiente manera. La cantidad de neutrinos presentes varía si existen conversiones del neutrino del electrón a neutrinos de otro sabor. Este cambio está determinado por un factor  $P < 1$  el cual limitará cuántos neutrinos tenemos, donde  $P$  es la probabilidad de supervivencia de los  $\nu_e$ . Suponemos que este cambio se modela con la distribución original de la partícula multiplicada por  $P$ ; es decir, en cada distribución  $f_{\nu, \bar{\nu}}$  debemos escribir  $Pf_\nu$  y  $\tilde{P}f_{\bar{\nu}}$  para neutrinos y antineutrinos respectivamente.

Siguiendo lo anterior, nuestras tasas para cada una de las interacciones tienen la siguiente forma:

$$\lambda_{n\nu_e \rightarrow pe^-}^P = A \int_0^\infty dp_\nu E_e p_e p_\nu^2 [1 - f_e(E_e)] P f_\nu(E_\nu), \quad (4.32)$$

$$\lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e}^P = A \int_0^\infty dp_{e^+} E_{\bar{\nu}}^2 p_{e^+}^2 [1 - \tilde{P}f_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}})] f_{e^+}(E_{e^+}), \quad (4.33)$$

$$\lambda_{pe^- \rightarrow n\nu_e}^P = A \int_{p_0}^\infty dp_e E_\nu^2 p_e^2 [1 - P f_\nu(E_\nu)] f_e(E_e), \quad (4.34)$$

$$\lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+}^P = A \int_{\bar{p}_0}^\infty dp_{\bar{\nu}} E_{e^+} p_{e^+} p_{\bar{\nu}}^2 [1 - f_{e^+}(E_{e^+})] \tilde{P}f_{\bar{\nu}}(E_{\bar{\nu}}). \quad (4.35)$$

Donde  $p_0 = \sqrt{Q^2 - m_e^2}$ ,  $\bar{p}_0 = Q + m_e$ ,  $P \equiv P(p_\nu)$  y  $\tilde{P} \equiv P(p_{\bar{\nu}}) = P(Q + E_{e^+})$ .

En este trabajo estamos interesados en la conversión entre neutrinos activos y neutrinos estériles  $\nu_e \leftrightarrow \nu_s$ , y en la conversión entre los neutrinos respectivos. En principio,  $P$  y  $\tilde{P}$  son diferentes pues dependen del potencial efectivo de los neutrinos. Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior, bajo la hipótesis de que la asimetría leptónica es despreciable en el UT, el potencial efectivo es el mismo para neutrinos y antineutrinos. Con esto  $P$  y  $\tilde{P}$  pueden aproximarse con la misma expresión.

En las ecuaciones (4.32-4.35), si uno supone que el potencial químico de los leptones es cero, su distribución es de la forma  $f_i(E) = [1 + \exp(E/T_i)]^{-1}$  con cada partícula  $i$  a una temperatura  $T_i$ . En la época de la nucleosíntesis las reacciones de dispersión  $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$  y aniquilación  $e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$ , ocurren rápidamente en comparación con la tasa de expansión del universo, por lo que los electrones mantienen el equilibrio térmico con los fotones pero no con los neutrinos que ya se encuentran desacoplados. La relación  $T_\gamma(t) = (\frac{11}{4})^{1/3} T_\nu(t)$ , sólo se establece hasta que la temperatura del universo cae por debajo del valor de la masa del electrón  $m_e$  y que los electrones y positrones se aniquilan calentando a los fotones. Por eso, para el periodo que nos interesa podemos igualar todas las temperaturas,  $T_\nu = T_e = T_\gamma = T$ . Esta simplificación facilita el obtener expresiones analíticas y nos permite usar las distribuciones Fermi-Dirac de los leptones sin tener que aproximarlas a la forma Maxwell-Boltzmann como se hace en [39].

## 4.4. Balance Detallado

El principio del balance detallado es muy importante para estudiar sistemas en equilibrio, por ejemplo, las reacciones nucleares en un plasma como el del UT. El balance detallado implica que, en equilibrio térmico, cada proceso elemental está balanceado con su proceso inverso. La densidad de una partícula  $A$  y la tasa con la que ocurren los procesos que la transforman en una partícula  $B$ , se relacionan con el proceso inverso como  $n_A \lambda_{A \rightarrow B} = n_B \lambda_{B \rightarrow A}$ ; es decir, debemos tener equilibrio no sólo a nivel macroscópico sino también en las reacciones microscópicas.

A partir de este principio es posible calcular la distribución de las partículas de un sistema en equilibrio con sus correspondientes temperaturas y potenciales químicos. A la inversa, también se pueden determinar algunas propiedades de las reacciones y de las partículas usando el balance entre

sus distribuciones de densidad. Conviene saber entonces, en qué casos se cumple el balance detallado. A continuación examinaremos su validez para las reacciones consideradas en el apartado anterior tanto para el caso con y sin oscilaciones

#### 4.4.1. Caso en que $P = 1$

Cuando no existen oscilaciones  $P = 1$ , y en consecuencia las tasas se reducen a las siguientes formas simples:

$$\lambda_{n\nu_e \rightarrow pe} = A \int_0^\infty dp_{\nu_e} E_e p_e p_{\nu_e}^2 (1 - f_e) f_{\nu_e}, \quad (4.36)$$

$$\lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e} = A \int_{Q+m_e}^\infty dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 E_{e^+} p_{e^+} (1 - f_{\bar{\nu}_e}) f_{e^+}, \quad (4.37)$$

$$\lambda_{pe \rightarrow n\nu_e} = A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_{\nu_e}^2 E_e p_e (1 - f_{\nu_e}) f_e, \quad (4.38)$$

$$\lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+} = A \int_{Q+m_e}^\infty dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 E_{e^+} p_{e^+} (1 - f_{e^+}) f_{\bar{\nu}_e}. \quad (4.39)$$

En donde cambiamos las integrales en términos de los momentos de los neutrinos y antineutrinos usando  $E_\nu \simeq p_\nu$  y las conservaciones de la energía  $Q + E_{e^+} = p_{\bar{\nu}_e}$ ,  $E_e = Q + p_{\nu_e}$ .

Dado que las funciones de distribución son Fermi-Dirac

$$f(p) = \frac{1}{e^{p/T} + 1}, \quad (4.40)$$

es fácil ver que se cumplen la relación,

$$1 - f(p) = f(-p). \quad (4.41)$$

lo que nos permite escribir la ecuación (4.36) como

$$\lambda_{n\nu_e \rightarrow pe} = A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_{\nu_e}^2 E_e p_e f(-E_e) f(p_{\nu_e}). \quad (4.42)$$

Por otro lado, la ecuación (4.38) se convierte en

$$\lambda_{pe \rightarrow n\nu_e} = A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_{\nu_e}^2 E_e p_e f(-p_{\nu_e}) f(E_e). \quad (4.43)$$

Teniendo en cuenta la relación

$$f(-E_e)f(p_{\nu_e}) = e^{(Q+p_{\nu_e})/T} f(E_e)f(p_{\nu_e}) = e^{Q/T} f(E_e)f(-p_{\nu_e}), \quad (4.44)$$

inmediatamente vemos que se cumple

$$\lambda_{pe \rightarrow n\nu_e} = e^{-Q/T} \lambda_{n\nu_e \rightarrow pe}, \quad (4.45)$$

lo cual es justamente el balance detallado entre la reacción  $n + \nu_e \rightarrow p + e$  y su inversa.

De manera similar, las ecuaciones (4.37) y (4.39) pueden reescribirse como

$$\lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e} = A \int_{Q+m_e}^{\infty} dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 E_{e^+} f(-p_{\bar{\nu}_e}) f(E_{e^+}) \quad (4.46)$$

$$\lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+} = A \int_{Q+m_e}^{\infty} dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 E_{e^+} f(-E_{e^+}) f(p_{\bar{\nu}_e}) \quad (4.47)$$

De aquí, y notando otra vez que

$$\begin{aligned} f(-p_{\bar{\nu}_e})f(E_{e^+}) &= e^{-p_{\bar{\nu}_e}/T} f(p_{\bar{\nu}_e})f(E_{e^+}) = f(p_{\bar{\nu}_e})e^{Q/T} e^{(p_{\bar{\nu}_e}-Q)/T} f(E_{e^+}) \\ &= e^{Q/T} f(p_{\bar{\nu}_e})f(-E_{e^+}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

vemos que también se verifica el balance detallado para  $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e$  y la reacción inversa, es decir,

$$\lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+} = e^{-Q/T} \lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e}. \quad (4.49)$$

De (4.45) y (4.49) obtenemos

$$\lambda_{pn} = e^{-Q/T} \lambda_{np}, \quad (4.50)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{np} &= \lambda_{n\nu_e \rightarrow pe} + \lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e}, \\ \lambda_{pn} &= \lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+} + \lambda_{pe \rightarrow n\nu_e}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

De esta forma, hemos demostrado que el balance detallado entre las reacciones que crean neutrones y sus inversas que los destruyen, se cumple estrictamente cuando no hay oscilaciones.

En un cálculo analítico de la nucleosíntesis en ausencia de oscilaciones de neutrinos (*i.e.* cuando  $P = \tilde{P} = 1$ ) presentado en [39], los autores prueban la validez del balance detallado bajo la aproximación de despreciar la masa del electrón y de usar distribuciones de Maxwell-Boltzmann en lugar de distribuciones Fermi-Dirac. Sin embargo, como hemos demostrado, en ausencia de oscilaciones el balance detallado se cumple sin necesidad de tales aproximaciones.

### 4.4.2. Caso en que $P < 1$

Nos preguntamos qué ocurre cuando hay conversión entre distintos tipos de neutrinos. La probabilidad de supervivencia depende, entre otras cosas, del momento del neutrino y debemos mantenerla dentro de las integrales en las expresiones de las tasas.

Para realizar este análisis escribimos las ecuaciones (4.32)-(4.35) en términos de los momentos de los neutrinos y antineutrinos:

$$\lambda_{n\nu_e \rightarrow pe}^P = A \int_0^\infty dp_{\nu_e} E_e p_e p_{\nu_e}^2 [1 - f(E_e)] P(p_{\nu_e}) f(p_{\nu_e}), \quad (4.52)$$

$$\lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e}^P = A \int_{Q+m_e}^\infty dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 p_{e^+} E_{e^+} [1 - \tilde{P}(p_{\bar{\nu}_e}) f(p_{\bar{\nu}_e})] f(E_{e^+}), \quad (4.53)$$

$$\lambda_{pe \rightarrow n\nu_e}^P = A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_e E_e p_{\nu_e}^2 [1 - P(p_{\nu_e}) f(p_{\nu_e})] f(E_e), \quad (4.54)$$

$$\lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+}^P = A \int_{Q+m_e}^\infty dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 p_{e^+} E_{e^+} [1 - f(E_{e^+})] \tilde{P}(p_{\bar{\nu}_e}) f(p_{\bar{\nu}_e}). \quad (4.55)$$

Donde se cumplen la conservación de la energía  $p_{\nu_e} + Q = E_e$  y  $p_{\bar{\nu}_e} - Q = E_{e^+}$ . Como vimos en el capítulo anterior, el potencial efectivo para neutrinos y antineutrinos es el mismo, por lo que en adelante  $P(p_{\nu_e}) = \tilde{P}(p_{\bar{\nu}_e})$ .

Separamos la reacción (4.54) en dos partes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lambda_{pe \rightarrow n\nu_e}^P &= A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_e E_e p_{\nu_e}^2 [1 - P(p_{\nu_e}) f(p_{\nu_e}) + P(p_{\nu_e}) - P(p_{\nu_e})] f(E_e) \\ &= A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_e E_e p_{\nu_e}^2 [1 - f(p_{\nu_e})] P(p_{\nu_e}) f(E_e) \\ &\quad + A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_e E_e p_{\nu_e}^2 [1 - P(p_{\nu_e})] f(E_e). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Y si empleamos otra vez la relación (4.44) obtenemos

$$\lambda_{pe \rightarrow n\nu_e}^P = e^{-Q/T} \lambda_{n\nu_e \rightarrow pe}^P + A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_e E_e p_{\nu_e}^2 [1 - P(p_{\nu_e})] f(E_e). \quad (4.57)$$

De manera similar conseguimos escribir la tasa (4.55) como

$$\lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+}^P = e^{-Q/T} \left\{ \lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e}^P - A \int_{Q+m_e}^\infty dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 p_{e^+} E_{e^+} [1 - P(p_{\bar{\nu}_e})] f(E_{e^+}) \right\} \quad (4.58)$$

Y si sumamos los dos resultados tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda_{pn}^P &= \lambda_{pe \rightarrow n\nu_e}^P + \lambda_{p\bar{\nu}_e \rightarrow ne^+}^P + \Delta\lambda^P \\
&= e^{-Q/T}(\lambda_{n\nu_e \rightarrow pe}^P + \lambda_{ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}_e}^P) + \Delta\lambda^P \\
&= e^{-Q/T}\lambda_{np}^P + \Delta\lambda^P.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda^P &= A \int_0^\infty dp_{\nu_e} p_e E_e p_{\nu_e}^2 [1 - P(p_{\nu_e})] f(E_e) \\
&\quad - A e^{-Q/T} \int_{Q+m_e}^\infty dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e}^2 p_{e^+} E_{e^+} [1 - P(p_{\bar{\nu}_e})] f(E_{e^+}).
\end{aligned} \tag{4.60}$$

La expresión (4.59) muestra que las oscilaciones entre neutrinos impiden que se cumpla el balance detallado. En ausencia de oscilaciones  $P = \tilde{P} = 1$  y  $\Delta\lambda^P = 0$ . Entonces (4.59) cumple lo mismo que la ecuación (4.50) y recuperamos el balance detallado.

Existe un caso especial en que dicho balance se satisface aun con oscilaciones. Si tomamos la masa del electrón igual a cero ( $m_e = 0$ ) y aproximamos las distribuciones de los leptones a la estadística de Maxwell-Boltzmann,  $f(E_e) \simeq e^{-\frac{p\nu_e+Q}{T}}$ ,  $f(E_{e^+}) \simeq e^{-\frac{p\bar{\nu}_e-Q}{T}}$ ; podemos escribir la ecuación (4.60) como

$$\Delta\lambda^P \simeq A e^{-Q/T} \int_0^\infty dp p^2 (p+Q)^2 e^{-p/T} [P(p+Q) - P(p)]. \tag{4.61}$$

En donde usamos la variable muda  $p = p_\nu = p_{\bar{\nu}}$ . Es para este caso, en el que sólo si las probabilidades de supervivencia no dependen de la energía de los neutrinos y antineutrinos, que podemos extraerlas de la integral en (4.61) y entonces  $\Delta\lambda^P = 0$ .

## 4.5. Expresión simplificada para $X_n^P$

Dado que las tasas  $\lambda_{np}^p$  y  $\lambda_{pn}^p$  se expresan generalmente en función de la temperatura es conveniente reescribir la solución para  $X_n(t)$  en términos de una variable adimensional  $y \equiv Q/T$ , la cual nos evita trabajar con las dependencias temporal y de la temperatura.

Para cambiar de variable en el factor de integración debemos calcular  $\frac{dt}{dy}$ ,

por lo que usamos la dependencia del tiempo con la temperatura en la época de radiación. De la ecuación (1.19) resulta

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dy} &= \frac{dt}{dT} \frac{dT}{dy} = -\frac{Q}{y^2} \frac{1}{\dot{T}} = \frac{Q}{y^2} \frac{1.4735(1 + 0.162791\Delta N_\nu)^{-1/2}}{T^3} \text{MeV}^2\text{s} \\ &= 0.88136(1 + 0.162791\Delta N_\nu)^{-1/2} y \text{ s},\end{aligned}\quad (4.62)$$

con  $\Delta N_\nu \equiv N_\nu - 3$ , donde  $N_\nu$  es el número de especies de neutrinos.

La fracción de neutrones en términos de la nueva variable se escribe como

$$\begin{aligned}X_n^P(y) &= X_{eq}(y) - \int_{y_0}^y dy' \frac{dX_{eq}}{dy'} I(y, y') - \beta \int_{y_0}^y dy' y' X_{eq}(y') \Lambda^P(y') I(y, y') \\ &\quad + \beta \int_{y_0}^y dy' y' \lambda_{pn}^P(y') I(y, y').\end{aligned}\quad (4.63)$$

Donde  $y_0 \equiv Q/T_D$  y  $\beta \equiv 0.8813(1 + 0.162791\Delta N_\nu)^{-1/2}$ s. La abundancia en equilibrio queda como

$$X_{eq}(y) = \frac{1}{1 + e^y},\quad (4.64)$$

y el factor de integración es

$$I(y, y') = \exp \left\{ -\beta \int_{y'}^y dy'' y'' \Lambda^P(y'') \right\}.\quad (4.65)$$

Escribimos  $X_n(t)$  en la forma

$$\begin{aligned}X_n^P(y) &= X_{eq}(y) - \int_{y_0}^y dy' \left\{ \frac{dX_{eq}(y')}{dy'} + \beta y' [X_{eq}(y') \Lambda^P(y') - \lambda_{pn}^P(y')] \right\} \\ &\quad \times I(y, y').\end{aligned}\quad (4.66)$$

El factor de integración y los términos entre corchetes son los que tienen una dependencia con la probabilidad y con el número de especies de neutrinos en la solución de  $X_n^P(y, \Delta N_\nu, P)$ . Nos damos cuenta que si logramos despreciar estos dos términos comparados con  $dX_{eq}(y')/dy'$  entonces podremos simplificar  $X_n(y)$  despreciando las dos últimas integrales en (4.63).

Para verificar esto primero simplificamos

$$\begin{aligned}X_{eq}\Lambda^P - \lambda_{pn}^P &= \frac{1}{\Lambda}(\lambda_{pn}\Lambda^P - \lambda_{pn}^P\Lambda) = \frac{1}{\Lambda}(\lambda_{pn}\lambda_{np}^P - \lambda_{pn}^P\lambda_{np}) \\ &= -X_{eq}e^y \Delta\lambda^P.\end{aligned}\quad (4.67)$$

En donde usamos el balance detallado (4.50) y la relación (4.59). Teniendo en cuenta que  $dX_{eq}(y)/dy = -e^y X_{eq}^2(y)$  tenemos

$$\frac{\beta y [X_{eq}(y)\Lambda^P(y) - \lambda_{pn}^P(y)]}{dX_{eq}(y)/dy} = \frac{\beta y \Delta\lambda^P}{X_{eq}}. \quad (4.68)$$

Si esta cantidad es pequeña frente a la unidad para valores grande de  $y$  entonces en el integrando de la ecuación (4.66) podemos despreciar el segundo término del factor entre llaves y quedarnos sólo con  $dX_{eq}(y')/dy'$ , que no depende de la probabilidad. Una manera de comprobarlo es establecer una cota superior para  $\Delta\lambda^P$ . Para este efecto suponemos  $m_e \simeq 0$  y que la estadística se aproxima a Maxwell-Boltzmann y además, usamos el hecho de que las probabilidades de los neutrinos y antineutrinos no son mayores a uno. Nos queda luego de introducir la variable  $x = p_\nu/Q$ , que

$$\Delta\lambda^P \leq AQ^5 e^{-y} \int_0^\infty dx x^2 (1+x)^2 e^{-xy} = \frac{AQ^5 e^{-y}}{y^5} (24 + 12y + 2y^2). \quad (4.69)$$

Para realizar la anterior integral usamos  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$  y la relación  $\Gamma(n) = (n-1)!$

Tenemos así que

$$\frac{\beta y \Delta\lambda^P}{X_{eq}} \leq \frac{\beta AQ^5 e^{-y}}{y^4 X_{eq}} (24 + 12y + 2y^2) \leq \frac{2\beta AQ^5}{y^4} (24 + 12y + 2y^2). \quad (4.70)$$

Con esto en mente, es más claro ver que  $\frac{\beta y \Delta\lambda^P}{X_{eq}} \rightarrow 0$  cuando  $y$  crece. Entonces podemos suponer que en la ecuación (4.68)

$$\frac{dX_{eq}(y)}{dy} + \beta y [X_{eq}(y)\Lambda^P(y) - \lambda_{pn}^P(y)] \simeq -e^y X_{eq}^2. \quad (4.71)$$

Encontramos que es posible escribir una solución más simple para  $X_n^P$ . La ecuación (4.63) se simplifica a

$$\begin{aligned} X_n^P(y) &\simeq X_{eq}(y) - \int_{y_0}^y dy' \frac{dX_{eq}^P(y')}{dy'} I(y, y') \\ &\simeq \frac{1}{1+e^y} + \int_{y_0}^y dy' \frac{e^{y'}}{(1+e^y)^2} I(y, y'). \end{aligned} \quad (4.72)$$

El primer término de la solución es  $X_{eq}$ , la abundancia en equilibrio termodinámico que se tiene si consideramos que la razón entre las concentraciones de neutrones sobre protones cambia como  $e^{-Q/T}$ , es decir, pensando en que son nucleones no relativistas con una distribución de Maxwell-Boltzmann. Esto indica que hay un término en la abundancia de neutrones  $X_n^P$  que mantiene su forma igual a la condición inicial  $X_n^P(t_0) = X_{eq} = (1 + e^y)^{-1}$  que usamos en (4.16). Esto tiene sentido ya que antes del momento en que se cumpla nuestra condición inicial, las interacciones débiles entre leptones y nucleones con neutrinos y antineutrinos mantienen el equilibrio térmico, por lo que  $n_n/n_p = e^y$ , como se muestra en la ecuación (1.31). En esta época,  $\Gamma_w < \Gamma_{osc}$  y las oscilaciones no tienen ningún efecto en  $X_n = X_{eq}$ . Después del momento del desacople de los neutrinos  $X_n$  comienza a diferir de  $X_{eq}$ .

El segundo término en la expresión (4.72) es la corrección que proviene de considerar que las interacciones débiles entre leptones y nucleones ocurren cada vez menos conforme la temperatura desciende. Si además tomamos en cuenta los efectos de las oscilaciones, estos efectos se incluyen en esta integral. Como  $X_{eq} = (1 + e^y)^{-1}$  tiende a cero cuando la temperatura disminuye, la integral es el valor al cual tiende  $X_n$  cuando el universo se expande tan rápido que las reacciones débiles ya no son capaces de hacer que los neutrones desaparezcan.

La integral en la ecuación (4.72) es un término que todavía podemos simplificar. En la ecuación (4.65) vemos que el factor de integración  $I(y, y')$  incluye  $\Lambda^P = \lambda_{np}^P + \lambda_{pn}^P$ , por lo que al escribir

$$\begin{aligned} \Lambda^P &= \lambda_{np}^P + \lambda_{pn}^P = \lambda_{np}^P(1 + e^{-y}) + \Delta\lambda^P \\ &= \lambda_{np}^P(1 + e^{-y}) \left[ 1 + \frac{\Delta\lambda^P}{\lambda_{np}^P(1 + e^{-y})} \right]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Notamos que si el cociente dentro de los corchetes es mucho menor a la unidad podremos simplificar  $\Lambda^P$  y por lo tanto al factor de integración.

Con las ecuaciones (4.52) y (4.53) calculamos también una cota superior para  $\lambda_{np}^P = \lambda_{\nu_e \rightarrow pe}^P + \lambda_{\bar{\nu}_e \rightarrow p\bar{\nu}_e}^P$ . Usamos otra vez las simplificaciones anteriores para  $m_e$ , para las estadísticas de los leptones y como  $P \leq 1$  obtenemos

$$\lambda_{np}^P \leq \frac{2AQ^5}{y^5}(24 + 12y + 2y^2). \quad (4.74)$$

Con esto nos queda la cota

$$\frac{\Delta\lambda^P}{\lambda_{np}^P(1+e^{-y})} \leq \frac{e^{-y}}{2(1+e^{-y})} \leq \frac{1}{4}. \quad (4.75)$$

Este cociente disminuye rápidamente conforme  $y$  se hace grande. Así podemos escribir

$$\Lambda^P \simeq \lambda_{np}^P(1+e^{-y}). \quad (4.76)$$

Lo cual simplifica al factor de integración como

$$I(y, y') \approx \exp \left[ -\beta \int_{y'}^y dy'' y'' \lambda_{np}^P (1 + e^{-y''}) \right]. \quad (4.77)$$

De esta manera toda la dependencia en la probabilidad, en el cálculo de  $X_n^P$ , se encuentra en  $I(y, y')$ , a través de  $\lambda_{np}^P$ .

# Capítulo 5

## Cálculos y Resultados

En el capítulo anterior hicimos algunas simplificaciones para las tasas de las interacciones que nos facilitarán el cálculo de la abundancia de neutrones. Si queremos hacer un estudio de la abundancia primordial  $Y_P$  debemos calcular la evolución de  $X_n$  a medida que el universo se enfría y el valor asintótico que toma. Esta cantidad nos servirá para restringir los valores de los parámetros de las oscilaciones de los neutrinos a partir de la fracción de  ${}^4\text{He}$  observada actualmente.

En la primera parte de este capítulo incluimos los efectos de las oscilaciones en las distribuciones de los neutrinos. En la siguiente sección calculamos las regiones permitidas para los parámetros  $\delta m^2$  y  $\sin^2 2\theta$  por las observaciones astronómicas de la abundancia de helio. Al final, determinamos de forma analítica la dependencia de la fracción de helio con la razón de bariones a fotones y con un número adicional de especies de neutrinos.

### 5.1. Efectos en las distribuciones de los neutrinos

La conversión de neutrinos y antineutrinos del electrón a neutrinos estériles puede tener consecuencias en la síntesis de los elementos más ligeros. Los efectos inmediatos en la población de estos leptones son de tres tipos, cada una de los cuales influye, a su vez, en la abundancia de neutrones y por lo tanto en la fracción de helio primordial: *i*) generación de la asimetría entre neutrinos y antineutrinos del electrón, *ii*) reducción de la población de los mismos y, *iii*) distorsión de sus espectros de energías. A continuación examinamos cada

uno de estos puntos por separado.

*i)* Si los neutrinos estériles existen, las oscilaciones activo-estéril pueden generar una asimetría mayor entre neutrinos y antineutrinos. La magnitud de esta asimetría no se conoce con exactitud pero de ser grande, podría tener un apreciable impacto en la fracción de  ${}^4\text{He}$  [32].

Para un ensemble de neutrinos y antineutrinos de sabor  $\alpha$  en equilibrio térmico y químico, la asimetría leptónica puede ser expresada en términos del potencial químico sin dimensiones de cada especie  $\xi_{\nu_\alpha} = \mu_{\nu_\alpha}/T$ . Hasta ahora no hay observaciones directas del fondo de neutrinos y por eso la existencia o medida del potencial químico sólo puede establecerse indirectamente a partir de la BBN y del espectro de la radiación cósmica de fondo (CMBR). Un análisis combinado de BBN y CMBR [40] ha establecido las cotas  $-0.01 < \xi_{\nu_e} < 0.22$ , y  $|\xi_{\nu_{\mu,\tau}}| < 2.6$  para los potenciales químicos suponiendo que no ocurren oscilaciones de neutrinos. Un estudio que incluya los efectos de las oscilaciones en la asimetría leptónica está fuera del alcance de este trabajo y, como se comentó en el capítulo 3, despreciaremos esta asimetría en el potencial efectivo para neutrinos y antineutrinos.

*ii)* Partimos de que inicialmente no existen neutrinos estériles, en este caso  $\Delta N_\nu = 0$ . Si una fracción de los neutrinos del electrón se convierten en  $\nu_s$ , entonces habrá una disminución en la densidad de neutrinos  $n_{\nu_e}$ , la cual alcanzará un valor menor al que tiene en equilibrio estadístico (sin oscilaciones). Al haber menos  $\nu_e$  ocurren menos interacciones débiles que cambian neutrones a protones y la abundancia de ellos aumenta generando una sobreproducción de  ${}^4\text{He}$ . Esto habremos de comprobarlo en nuestros siguientes estudios.

*iii)* Se presenta una distorsión en la función de distribución de los neutrinos cuando ocurren las oscilaciones; tales cambios pueden ser considerables y deben ser tomados en cuenta en los cálculos que se hagan de  $X_n$ . En [16] se discuten estos efectos calculando de forma numérica la evolución de la distorsión de las distribuciones usando ecuaciones cinéticas para la matriz de densidad de los neutrinos. Nosotros obtenemos en esencia, los mismos resultados considerando las probabilidades de supervivencia de los neutrinos multiplicadas por la función de distribución  $x^2 P(x) f(x)$ , con  $x = p_{\nu_e}/T$ .

Dado que el potencial efectivo para los neutrinos es negativo y no sabemos si  $\delta m^2$  es positivo o negativo tenemos dos procesos de conversión que analizar. Si  $\delta m^2 > 0$  no se puede cumplir la condición de resonancia, en este caso no resonante la solución para la probabilidad es la puramente adiabática. Para  $\delta m^2 < 0$  se puede cumplir la condición de resonancia y entonces debemos

incluir  $P_C$  en la expresión para la probabilidad de supervivencia.

Para el caso no resonante usamos usamos la expresión (3.49) para la probabilidad

$$P = \bar{P} + P_{osc}, \quad (5.1)$$

donde la primera parte  $\bar{P} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta_m \cos 2\theta_m^0$  es la probabilidad promedio y el segundo término es  $P_{osc} = \frac{1}{2} [\sin 2\theta_m \sin 2\theta_m^0 \cos \delta(t)]$  con  $\delta(t)$  el factor oscilante dado por la fórmula (3.58). Cuando sustituimos el potencial efectivo para los neutrinos obtenemos para los ángulos de mezcla en materia

$$\cos 2\theta_m = \frac{\cos 2\theta + 2mp_{\nu_e}^2 T^4 / (\delta m^2 / \text{eV}^2)}{\sqrt{(\cos 2\theta + 2mp_{\nu_e}^2 T^4 / (\delta m^2 / \text{eV}^2))^2 + \sin^2 2\theta}}, \quad (5.2)$$

donde  $m = 1.16582 \times 10^{-8} \text{MeV}^{-6}$  con  $p_{\nu_e}$  y  $T$  en MeV.

El ángulo de mezcla en materia  $\theta_m^0$  está evaluado en el momento de producción de los neutrinos, en nuestro análisis tomamos este tiempo como el instante en que los neutrinos se desacoplan. El ángulo  $\theta_m$  se evalúa en un instante posterior en el cual los neutrinos todavía se encuentran en el mismo medio pero más frío. Esto corresponde a la temperatura  $T$  a la cual  $X_n$  evoluciona con el universo y que extenderemos hasta que el  ${}^4\text{He}$  se haya estabilizado.

Sobre la función de distribución de los neutrinos, se superponen los efectos de  $\bar{P}$  y  $P_{osc}$  al mismo tiempo. Nosotros estudiamos estos efectos juntos y por separado para analizar cómo deforman cada uno la distribución Fermi-Dirac. En la figura 5.1 mostramos el espectro de los neutrinos sin oscilaciones (curva en guiones); lo comparamos con el espectro deformado por la probabilidad total (curvas continuas en colores) para algunos valores de  $\delta m^2$ ,  $\sin^2 2\theta$  y  $T$ . Hemos superpuesto también sólo los efectos de la probabilidad promedio  $\bar{P}$  en las curvas continuas negras. Encontramos que los efectos de la probabilidad son importantes cuando  $0.1 \leq \sin^2 2\theta \leq 1$  y  $\delta m^2 \geq 10^{-8}$ . Notamos también que para ángulos de mezcla  $\sin^2 2\theta \simeq 1$  y  $10^{-8} \leq \delta m^2 \leq 10^{-5}$  el cambio de temperatura del universo influye más en las distribuciones. La gráfica de la esquina superior izquierda muestra lo anterior.

Ocurren dos cambios en las curvas de distribución producidos: por un lado las sinuosidades que aparecen en las curvas y que se deben al término oscilante en la expresión para  $P(x)$  dada en la ecuación (3.47), el otro es una disminución en la altura de la curva ocasionado por la probabilidad promedio. En las graficas superiores se muestra cómo los efectos oscilantes

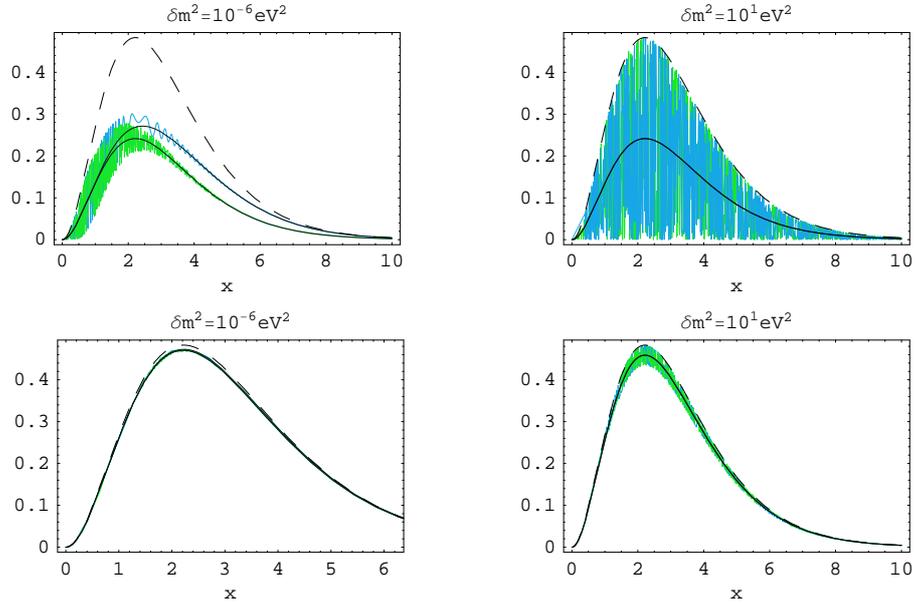


Figura 5.1: Espectro de los neutrinos como función de  $x = p_\nu/T$  para el caso de una evolución no resonante,  $\delta m^2 > 0$ . En las gráficas de arriba  $\sin^2 2\theta = 1$  y en las de abajo  $\sin^2 2\theta = 0.1$ . Las curvas continuas de colores son con  $P$  total y las negras con  $\bar{P}$ . En las graficas la curva azul es para  $T = 1$  MeV y la verde es para  $T = 0.1$  MeV. Para las otras, el efecto de T no es apreciable

se cancelan quedando sólo los de la parte promedio.

Lo anterior nos permite suponer que es posible eliminar la parte oscilante en la probabilidad y trabajar sólo con la probabilidad promedio. A continuación, mostramos que los efectos de la parte oscilante pueden ser despreciados cuando calculamos  $\lambda_{np}^P$  o  $X_n$  y entonces es la parte promedio en la probabilidad la única responsable de modificar apreciablemente la abundancia de neutrones. Hacemos este análisis estudiando los efectos de  $P_{osc}$  y  $\bar{P}$  por separado en  $\lambda_{np}^P$ .

Graficamos la evolución de  $\lambda_{np}^P$  con la probabilidad total y la comparamos con la evolución usando únicamente la probabilidad promedio. A la izquierda en la fig. 5.2 se muestran las curvas correspondientes a  $\lambda_{np}^P$  con  $P$  y  $\bar{P}$  (curva verde) para un ejemplo con  $\delta m^2 = 10^1$  y  $\sin^2 2\theta = 1, 0.1$ . Las curvas y se superponen casi idénticamente y evolucionan igual independientemente de que probabilidad hayamos usado. Es decir, tenemos el mismo resultado

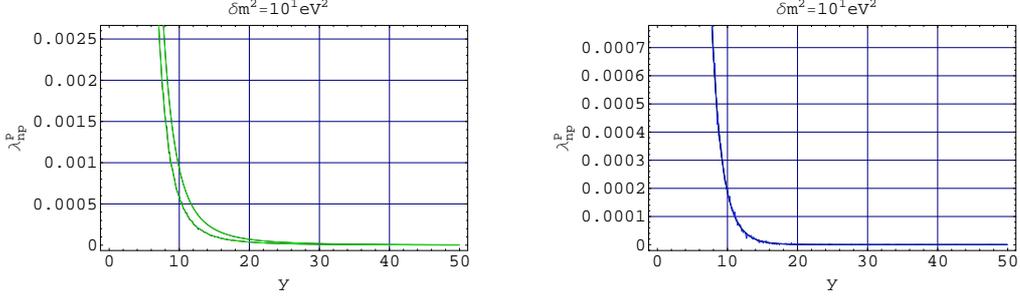


Figura 5.2: Efectos de  $P(x)$  no resonante en  $\lambda_{np}^P$ . Izquierda:  $\lambda_{np}^P$  (puntos) vs  $\lambda_{np}^P$  (verde),  $\delta m^2 = 10^1 \text{ eV}^2$ ; curva superior  $\sin^2 2\theta = 0.1$ , curva inferior  $\sin^2 2\theta = 1$ . Derecha:  $\lambda_{np}(P = 0)$  vs  $\lambda_{np}^{P_{osc}}$  (azul) para los mismos valores de  $\sin^2 2\theta$  y  $\delta m^2$ .

si no incluimos  $P_{osc}$ , lo que indica que las contribuciones correspondientes a la parte oscilante, se están cancelando en  $\lambda_{np}^P$ . Para confirmar lo anterior comparamos a la derecha en la figura 5.2  $\lambda_{np}^P(P = 0)$  vs  $\lambda_{np}^P(P_{osc})$  (curva azul) con los mismos valores de los parámetros. Notamos que al calcular sólo con  $P_{osc}$  la magnitud de  $\lambda_{np}^P$  cambia igual que poner  $P = 0$ .

Esto es similar a lo que pasa con los neutrinos solares, la contribución debida al término oscilante en la probabilidad se cancela al sumar las contribuciones de neutrinos con distintas energías. Con esto podemos quedarnos con la probabilidad promedio y trabajar en adelante sólo con ella. Lo mismo ocurre cuando la evolución de los neutrinos es resonante, podemos ignorar la parte oscilante de la probabilidad total, la parte que nos queda es la probabilidad promedio pero modificada por la presencia de la probabilidad de crossing entre autoestados

$$P = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - P_C \right) \cos 2\theta_m \cos 2\theta_m^0. \quad (5.3)$$

En donde como  $\delta m^2 < 0$ , debe cumplirse la condición de resonancia y ahora se tiene

$$\cos 2\theta_m = \frac{\cos 2\theta - 2mp_{\nu_e}^2 T^4 / (|\delta m^2| / \text{eV}^2)}{\sqrt{(\cos 2\theta - 2mp_{\nu_e}^2 T^4 / (|\delta m^2| / \text{eV}^2))^2 + \sin^2 2\theta}}, \quad (5.4)$$

distinto al caso no resonante sólo por un signo pero que hace una importante diferencia al permitir que al cumplir la condición de resonancia se tenga una probabilidad grande, incluso para cuando el ángulo de mezcla en el vacío es pequeño.

En la ecuación (5.3) cuando  $P_C = 0$  tenemos la probabilidad para una evolución de los neutrinos exclusivamente adiabática con posibilidad de resonancia. Si  $P_C \neq 0$ , tenemos dos opciones para la probabilidad de crossing. Una esta dada por la fórmula de Landau-Zener <sup>1</sup> la cual de la ecuación (3.67) queda así

$$P_C = \Theta \left( 1 - \frac{T_R^4}{T_D^4} \right) \Theta \left( 1 - \frac{T^4}{T_R^4} \right) e^{-\frac{\pi}{2} \kappa_R}. \quad (5.5)$$

La otra no necesita una función escalón, se obtiene a partir de la aproximación de Magnus; por lo que de la ecuación (3.68) tenemos

$$P_C = \text{sen}^2[(\theta_m^0 - \theta_m)e^{-\kappa_R}]. \quad (5.6)$$

Con el parámetro adiabático en la resonancia dado por

$$\kappa_R = 1.40183 \times 10^5 g_*^{-1/2} \left| \frac{\delta m^2}{\text{eV}^2} \right|^{1/2} \frac{\text{sen}^2 2\theta}{(\cos 2\theta)^{3/2}} \quad (5.7)$$

y  $g_*$  definida en la ecuación (1.18).

De las dos  $P_C$  anteriores nos preguntamos cuál usar en nuestros cálculos. Para resolver esto revisamos cómo actúan cada una en la ecuación (5.3), por lo que observamos cómo se comporta  $P$  para distintos valores de  $\text{sen}^2 2\theta$  y de  $\delta m^2$  con las dos  $P_C$ . En el límite extremo no adiabático cuando  $\delta m^2 \rightarrow 0$ ,  $\cos 2\theta_m = \cos 2\theta_m^0 = -1$  y por tanto  $P = 1$ . También para cuando  $\delta m^2$  es grande y  $\kappa_R \gg 1$ , debemos recuperar el caso adiabático en el que  $P_C = 0$ .

En las gráficas de la Figura 5.3 graficamos  $P$  vs  $\delta m^2$  usando las dos probabilidades de crossing y distintos ángulos de mezcla fijos. La curva continua de color verde corresponde a la probabilidad total con  $P_C$  según la fórmula de Magnus, la curva continua de color azul corresponde a la probabilidad con

<sup>1</sup>La probabilidad de crossing de Landau-Zener no se comporta adecuadamente en el extremo no adiabático al sustituirla en  $P$ . Para corregir esto se ha propuesto [41] usar  $P_C = (e^{-\frac{\pi}{2} \kappa_R F} - e^{-\frac{\pi}{2} \kappa_R F \text{sen}^{-2} 2\theta}) / (1 - e^{-\frac{\pi}{2} \kappa_R F \text{sen}^{-2} 2\theta})$ , donde  $F = \cos 2\theta (1 - \tan^2 \theta)$ . Pero esta fórmula tampoco recupera el límite extremo no adiabático. La razón es que estas modificaciones por lo general se hacen pensando que los neutrinos se detectan en el vacío, a diferencia de este trabajo en el que los neutrinos siempre están en un medio que también evoluciona.

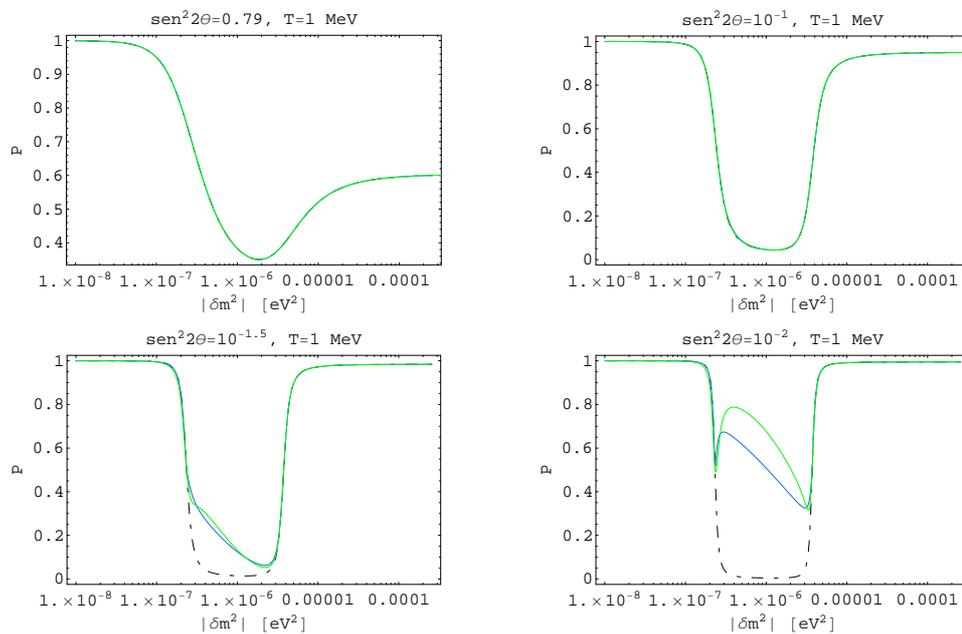


Figura 5.3: Probabilidad en el caso resonante en función de  $\delta m^2$ . Con  $P_C = 0$  (curva en guiones), con  $P_C$  como Landau-Zener (curva azul) y con  $P_C$  como Magnus (curva verde).

$P_C$  como Landau-Zener (LZ). También se muestra con una curva en guiones la probabilidad cuando  $P_C = 0$ . Observamos que ambas aproximaciones para  $P_C$  reproducen bien el caso adiabático (extremo derecho) y el límite extremo noadiabático ( $\delta m^2 \ll 1 \text{ eV}^2$ ).

Es importante aclarar que nosotros encontramos que la probabilidad LZ por sí misma no mantiene el comportamiento de  $P$  en el extremo no adiabático. Como ya se comentó, esto se corrige a mano con las funciones escalón de la ecuación (5.5). Una observación similar se encontró para el caso de los neutrinos solares para un distinto perfil de densidad en [37]; se compararon los efectos de la aproximación LZ contra la de Magnus y se observó que la segunda trabaja mejor para el extremo no adiabático. Por lo anterior decidimos usar en este trabajo la fórmula de Magnus para  $P_C$ , esto además nos permite analizar con más claridad la evolución de  $P$ .

En la Figura 5.4 mostramos cómo cambia la forma de la probabilidad en función de  $\delta m^2$  para diferentes ángulos de mezcla y temperaturas. Las distintas curvas en colores muestran como se modifica  $P$  cuando el universo

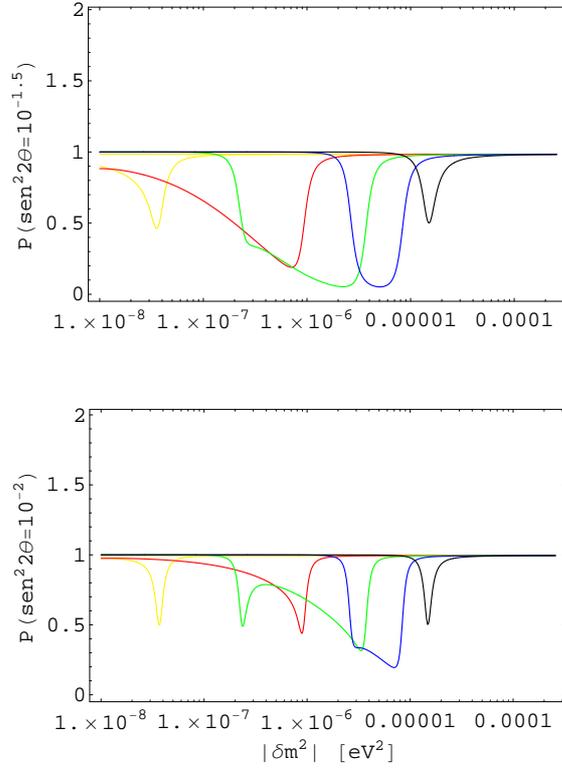


Figura 5.4: Probabilidad resonante para ángulos de mezcla fijos y distintas temperaturas: negro ( $T=2$  MeV), azul ( $T=1.5$  MeV), verde ( $T=1$  MeV), rojo ( $T=0.5$  MeV), amarillo ( $T=0.1$  MeV).

se enfría. En negro  $T = 2$  MeV, azul  $T = 1.5$  MeV, verde  $T = 1$  MeV, rojo  $T = 0.5$  MeV, amarillo  $T = 0.1$  MeV. Lo que notamos es que cuando la temperatura disminuye el efecto resonante se muestra cada vez a menores valores de  $\delta m^2$ . Además, cuando  $\sin^2 2\theta \leq 10^{-1.5}$  el efecto de la  $P_C$  se nota más en las curvas especialmente para  $0.5 \text{ MeV} \leq T \leq 1.5 \text{ MeV}$  y  $\delta m^2 \simeq 10^{-6} \text{ eV}^2$ . También encontramos que entre más grande es el ángulo de mezcla el efecto de  $P_C$  en la probabilidad desaparece.

## 5.2. Cálculo de $X_n^P$

Buscamos una expresión analítica para  $X_n^P$  que nos permita analizar la dependencia de la fracción de  ${}^4\text{He}$  con los parámetros de las oscilaciones. El primer paso es simplificar las tasas  $\lambda_{np}^P$  de los procesos débiles que determinan el número de neutrones. Sumando las ecuaciones (4.52) y (4.53) el resultado en términos del momento del neutrino  $p_\nu = p$  es

$$\begin{aligned} \lambda_{np}^P &= \lambda_{n\nu_e}^P + \lambda_{ne^+}^P \\ &= A \left\{ \int_0^\infty dp p^2 (p+Q) [(p+Q)^2 - m_e^2]^{1/2} \left[ 1 - f(p+Q) \right] P(p, T) f(p) \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q+m_e}^\infty dp p^2 (p-Q) [(p-Q)^2 - m_e^2]^{1/2} \left[ 1 - P(p, T) f(p) \right] f(p-Q) \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Sumamos y restamos la unidad a la probabilidad para separar  $\lambda_{np}^P$  en dos partes: una es  $\lambda_{np}$ , o la tasa cuando no hay oscilaciones; y la otra es una función que contiene toda la dependencia en la probabilidad.

$$\begin{aligned} \lambda_{np}^P &= \lambda_{np} + A \left\{ - \int_0^\infty dp p^2 (p+Q) [(p+Q)^2 - m_e^2]^{1/2} f(p) \left[ 1 - P(p, T) \right] \right. \\ &\quad + \int_0^\infty dp p^2 (p+Q) [(p+Q)^2 - m_e^2]^{1/2} f(p) f(p+Q) \left[ 1 - P(p, T) \right] \\ &\quad \left. + \int_{Q+m_e}^\infty dp p^2 (p-Q) [(p-Q)^2 - m_e^2]^{1/2} f(p) f(p-Q) \left[ 1 - P(p, T) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

En esta ecuación, las dos últimas integrales son mucho más pequeñas comparadas con la primera debido al producto de las funciones de distribución  $f(p)f(p \pm Q)$ . Entonces podemos despreciarlas y utilizar como una buena aproximación que

$$\lambda_{np}^P \simeq \lambda_{np} - A \int_0^\infty dp p^2 (p+Q) [(p+Q)^2 - m_e^2]^{1/2} f(p) \left[ 1 - P(p, T) \right]. \quad (5.10)$$

Dado que la probabilidad es función de la energía de los neutrones y de la temperatura, no es posible calcular esta integral analíticamente. Pero

podemos evaluar  $P$  en el promedio de los neutrinos  $\langle p \rangle = 3.15T$  y sacar el término  $[1 - P(T)]$  de la integral. Esto nos permite tener

$$\lambda_{np}^P \simeq \lambda_{np} - A[1 - P(T)] \int_0^\infty dp p^2 (p + Q) [(p + Q)^2 - m_e^2]^{1/2} f(p). \quad (5.11)$$

Ahora introducimos nuevamente la variable  $y = Q/T$  y escribimos  $X_n(y)$  como en la ecuación (4.72)

$$X_n^P(y) = X_{eq}(y) + \int_{y_0}^y dy' \frac{e^{y'}}{(1 + e^{y'})^2} e^{-\beta \int_{y'}^y dy'' y'' \lambda_{np}^P (1 + e^{-y''})}. \quad (5.12)$$

Donde  $X_{eq}(y) = [1 + e^y]^{-1}$  y  $\beta = 0.8813(1 + 0.162791\Delta N_\nu)^{-1/2}$  s. Al sustituir  $\lambda_{np}^P$  obtenemos

$$X_n^P(y) = X_{eq}(y) + \int_{y_0}^y dy' \frac{e^{y'} I(y, y')}{(1 + e^{y'})^2} e^{\beta \int_{y'}^y dy'' y'' (1 + e^{-y''}) [1 - P(y'')] F(y'')}. \quad (5.13)$$

Donde

$$I(y, y') = e^{-\beta \int_{y'}^y dy'' y'' \lambda_{np} (1 + e^{-y''})} \quad (5.14)$$

y

$$F(y) = \frac{AQ^5}{y^5} \int_0^\infty dx \frac{x^2 (x + y) \sqrt{(x + y)^2 - m^2 y^2}}{1 + e^x}, \quad (5.15)$$

con  $x = p/T$ ,  $m = m_e/Q$ ,  $m_y \equiv m_e/T = 0.395205y$  y  $AQ^5 = 7.15 \times 10^{-2} \text{s}^{-1}$ .

En la Figura 5.5 mostramos la evolución de  $X_n^P(y)$  dada por la ecuación (5.13) con los efectos de las oscilaciones de neutrinos. Introducimos la probabilidad de supervivencia para los dos casos, resonante (R) y no resonante (NR). Observamos que para distintos valores de los parámetros ( $\delta m^2$ ,  $\text{sen}^2 2\theta$ ) la abundancia de neutrones siempre alcanza un valor asintótico.

Para ambos sistemas R y NR, hay una sobreproducción de Helio. Esto se debe a que las oscilaciones disminuyen el número de neutrinos activos y baja la frecuencia en que ocurren los procesos débiles encargados de desaparecer neutrones ( $\lambda_{np}^P$ ), conduciendo a una mayor población de ellos. Observamos que existe una diferencia importante entre los dos tipos de oscilación; en el caso no resonante  $X_n$  es mayor si  $\delta m^2$  es cada vez más grande, en el caso resonante el valor asintótico de  $X_n$  es máximo para un valor intermedio de  $\delta m^2$ .

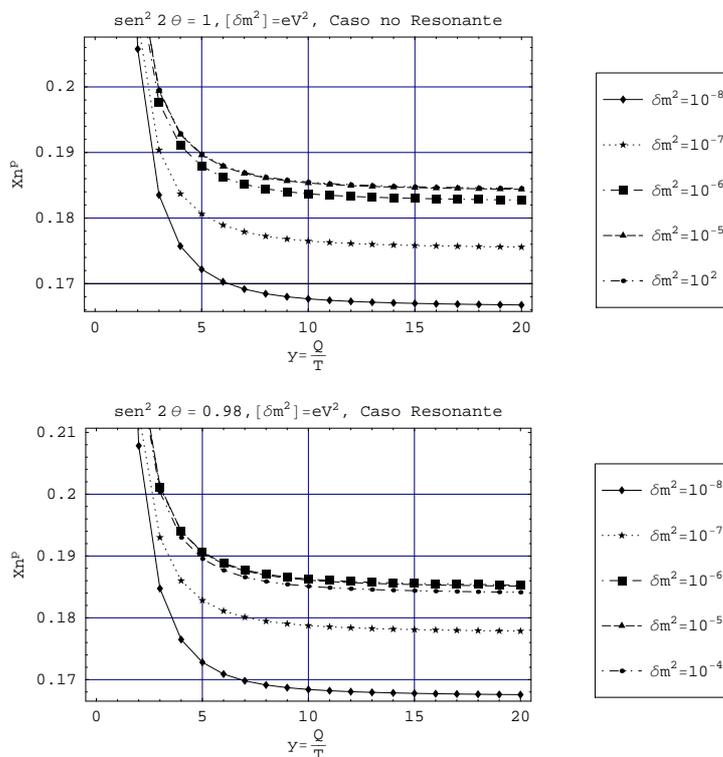


Figura 5.5: Evolución de  $X_N^P(y)$ , para distintos valores de  $\delta m^2$ .  $\text{sen}^2 2\theta = 1$  en el caso NR y  $\text{sen}^2 2\theta = 0.98$  para el caso R .

Es interesante que en la ecuación (5.13) sólo aparece explícitamente la probabilidad que depende del momento de los neutrinos  $P(x = p_\nu/T)$  y no la de los antineutrinos. Términos con esta probabilidad fueron despreciados en (5.12) pero físicamente lo que pasa es que los efectos de la  $P$  para antineutrinos prácticamente no tienen consecuencias en  $X_n$ . La razón es que en la reacción  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ , hay un umbral para las energías de los antineutrinos:  $E_{\bar{\nu}_e} = Q + m_e \approx 1.8\text{MeV}$ , por abajo de esta energía esta reacción no ocurre y no afecta  $X_n$ . Pero como podemos ver en la Figura 5.1, esto también hace que las oscilaciones tengan un efecto reducido en esta reacción pues a bajas energías es cuando se presentan primero las distorsiones en el espectro de los neutrinos, [17].

### 5.2.1. Dependencia de $X_n^P$ con $\delta m^2$ y $\sin^2 2\theta$

Ahora simplificamos la ecuación (5.13) usando el segundo teorema del valor medio en la integral en  $y'$ . Evaluamos el límite inferior de la integral que contiene  $1 - P(y'')$  en un punto  $\xi$  para poder sacar la exponencial de la integral, dejando adentro un integrando que no depende de los parámetros de las oscilaciones. Luego de hacer esto nos queda lo siguiente

$$X_n^P(y) \simeq \frac{1}{1 + e^y} + e^{\left[\beta \int_{\xi}^y dy'' y'' (1 + e^{-y''}) [1 - P(y'')] F(y'')\right]} \int_{y_0}^y dy' \frac{e^{y'} I(y, y')}{(1 + e^{y'})^2}. \quad (5.16)$$

$X_n$  es ahora la suma de  $X_{eq}$  más una corrección dividida en dos partes, una de ellas que incluye toda la dependencia en la probabilidad. De esta forma es más fácil estudiar los efectos de las oscilaciones de los neutrinos y el de posibles familias adicionales de neutrinos en las abundancias de  ${}^4\text{He}$ .

Dado que  $Y_p \sim 2X_n(T = 0)$ , estamos interesados en encontrar el valor de  $X_n$  asintótico cuando  $y \rightarrow \infty$ . Este valor  $X_n^P(\infty)$  depende de la probabilidad y cambiara según los valores de los parámetros de las oscilaciones que usemos. El límite al que tiende  $X_n^P$  esta dado por

$$X_n^P(\infty) = X(\Delta N_{\nu}, \infty) e^{\left[\beta \int_{\xi}^{\infty} dy'' y'' (1 + e^{-y''}) [1 - P(y'')] F(y'')\right]}. \quad (5.17)$$

Donde

$$X(\Delta N_{\nu}, \infty) \equiv \int_{y_0}^{\infty} dy' \frac{e^{y'} I(y, y')}{(1 + e^{y'})^2}, \quad (5.18)$$

el cual calcularemos numéricamente para distintos  $\Delta N_{\nu}$  sin oscilaciones. El resultado que obtenemos para este valor asintótico es  $X_n(\infty) = 0.161968$ , con  $\Delta N_{\nu} = 0$ . Este valor de  $X_n$  asintótico, con tres generaciones de neutrinos y sin oscilaciones se ha calculado en distintos trabajos. El número que nosotros obtenemos es más grande en comparación al que se consigue en [39]. Esto se debe a que en el cálculo de  $\lambda_{np}$  los autores aproximan las distribuciones de Fermi-Dirac a distribuciones de Maxwell-Boltzmann, lo cual hace que sus cálculos den valores de  $X_n$  menores. También es mayor al presentado en [17], donde el cálculo de  $X_n$  se hace resolviendo numéricamente las ecuaciones cinéticas para las densidades de número de los nucleones y para la matriz de densidad para los neutrinos. Sin embargo, nuestro número se acerca más a los datos que se obtienen en trabajos numéricos como [42] y [43].

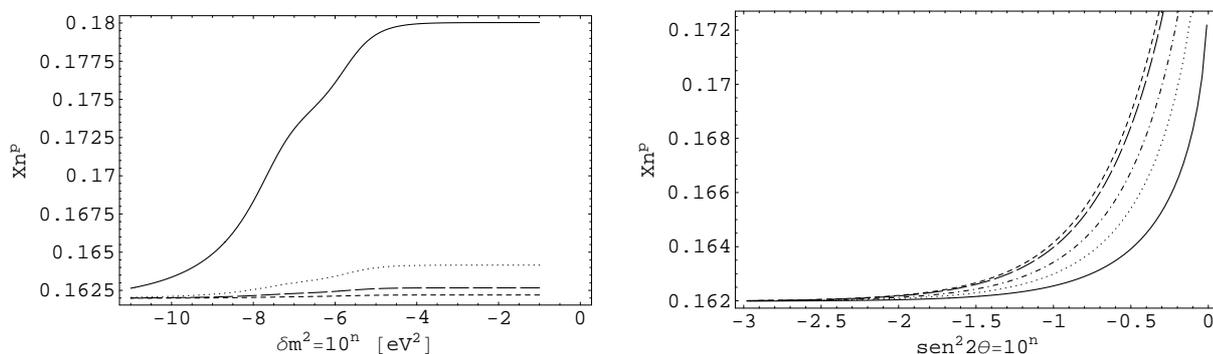


Figura 5.6: Caso NR. Izquierda:  $X_n^P(\infty)$  vs  $\delta m^2$ . Desde la curva superior se tienen  $\text{sen}^2 2\theta = 10^{-0.1}, 10^{-1}, 10^{-1.5}, 10^{-2}$ . Derecha:  $X_n^P(\infty)$  vs  $\text{sen}^2 2\theta$ . La curva continua corresponde a  $|\delta m^2| = 10^{-8}$  eV<sup>2</sup>, con puntos a  $10^{-7}$  eV<sup>2</sup>, con punto y gui3n a  $10^{-6}$  eV<sup>2</sup>, con guiones largos a  $10^{-5}$  eV<sup>2</sup> y guiones cortos a  $10^{-2}$  eV<sup>2</sup>.

Para verificar que (5.17) es una buena aproximaci3n encontramos un punto  $\xi$  que proporcione c3lculos de  $X_n(\infty)$  que se ajusten a la ecuaci3n (5.13) para distintos valores de los par3metros de los neutrinos. En principio debemos tener diferentes  $\xi$  para distintos valores de  $\delta m^2$ ,  $\text{sen}^2 2\theta$  y  $\Delta N_\nu$ , pero para simplificar los c3lculos escogemos usar s3lo un valor de  $\xi$  para todos los casos. Encontramos que un valor de  $\xi = 1.95$  proporciona valores asint3ticos de  $X_n(\infty)$  con un error entre 2% y 4%.

Si queremos obtener cotas para los valores de los par3metros de los neutrinos a trav3s de los datos observacionales de  ${}^4\text{He}$ , debemos estudiar c3mo cambia el valor al que se congela  $X_n^P$  cuando cambiamos  $\delta m^2$  y  $\text{sen}^2 2\theta$ . En la figura 5.6 mostramos primero los c3lculos hechos para el caso no resonante. Graficamos  $X_n^P(\infty)$  vs  $\delta m^2$ , con  $\text{sen}^2 2\theta = 10^{-0.1}, 10^{-1}, 10^{-1.5}, 10^{-2}$  y  $\Delta N_\nu = 0$ .

Se observa que los efectos de las oscilaciones son m3ximos cuando el 3ngulo de mezcla alcanza el valor m3s grande. Aparece tambi3n que s3lo en las curvas con valores grandes de  $\delta m^2$  los efectos de las oscilaciones llegan a ser importantes. Para cualquier valor del 3ngulo, el l3mite inferior de  $X_n^P$  es el mismo cuando  $\delta m^2$  es mucho menor a uno. Esto corresponde a que  $\cos 2\theta_m = \cos 2\hat{\theta}_0 = 1$  y la probabilidad  $P = 1$ . A medida que los par3metros se acercan a cero pr3cticamente estamos en el caso en que no hay oscilaciones, es decir, el caso est3ndar cuando todos los  $\nu_e$  sobreviven.

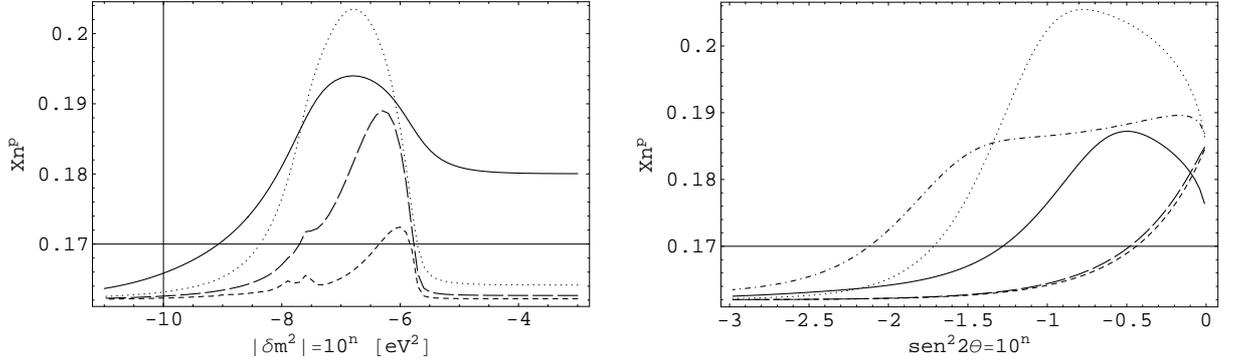


Figura 5.7: Caso R. Izquierda:  $X_n^P(\infty)$  vs  $\delta m^2$ . Desde la curva superior se tienen  $\text{sen}^2 2\theta = 10^{-1}, 10^{-0.1}, 10^{-1.5}, 10^{-2}$ . Derecha:  $X_n^P(\infty)$  vs  $\text{sen}^2 2\theta$ . La curva continua corresponde a  $|\delta m^2| = 10^{-8}$  eV<sup>2</sup>, con puntos a  $10^{-7}$  eV<sup>2</sup>, con punto y guión a  $10^{-6}$  eV<sup>2</sup>, con guiones largos a  $10^{-5}$  eV<sup>2</sup> y guiones cortos a  $10^{-2}$  eV<sup>2</sup>.

En la misma figura se muestra la gráfica  $X_n^P(\infty)$  contra  $\text{sen}^2 2\theta$  para  $\delta m^2 = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$  eV<sup>2</sup>. Se nota que para ángulos cercanos a la unidad es cuando los efectos de las oscilaciones comienzan a ser apreciables. Si  $\delta m^2 \leq 10^{-8}$  eV<sup>2</sup>, la diferencia con el caso estándar es muy pequeña, a partir de este valor  $P \simeq 1$  y no hay efectos de las oscilaciones. Estas curvas están de acuerdo con la referencia [17] donde hace el análisis para el caso no resonante. Comparando nuestras gráficas con las obtenidas en dicho trabajo vemos que tenemos resultados similares,  $X_n$  se comporta como una función creciente de los parámetros de las oscilaciones, algo que veremos no pasa en el caso resonante.

Hicimos las mismas gráficas para el caso resonante que presentamos en la figura 5.7. En la gráfica superior se ve que ninguna curva es estrictamente creciente en función de  $\delta m^2$ ,  $X_n^P$  alcanza un máximo y luego descende, todas las curvas tienden a el caso  $X_n(P = 1)$  cuando  $\delta m^2 \ll 1$ . Comportamiento similar es mostrado en la referencia [16]. Presentamos las curvas  $X_n^P(\infty)$  vs  $\text{sen}^2 2\theta$  para  $\delta m^2 = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$  y  $10^{-8}$  eV<sup>2</sup>. Observamos que si  $\text{sen}^2 2\theta \ll 1$ , todas las curvas tienden asintóticamente al valor estándar ( $P = 1$ ).

La principal diferencia entre los dos modos R y NR de las oscilaciones es que si los neutrinos pasan por una resonancia el valor de  $X_n(\infty)$  puede ser superior a la situación cuando no hay resonancia. Esto es cierto sólo para algunos valores de los parámetros, en otras regiones los límites obtenidos de

$X_n$  son muy parecidos en ambos casos. Cabe comentar que cuando  $P_R = 0$ , el límite que encontramos es  $X_n(\infty) = 0.193796$ , valor muy alto que supondría que todos los neutrinos del electrón se convirtieron a neutrinos estériles y con ello que ningún neutrón desapareció por las interacciones débiles con los leptones.

## 5.3. La Fracción de ${}^4\text{He}$

En este capítulo contrastamos nuestros cálculos de  ${}^4\text{He}$  con los datos observacionales. Si ocurren las oscilaciones de neutrinos del electrón a neutrinos estériles, sus efectos en la nucleosíntesis primordial nos permiten establecer constricciones a los valores de los parámetros de los cuales depende  $Y_P$ . Incluimos ahora una expresión analítica que es función de la razón de bariones a fotones  $\eta$ , el parámetro cosmológico más importante en el modelo estándar del Big Bang.

### 5.3.1. El comienzo de la nucleosíntesis

Habíamos dicho que en esencia  $Y_P = 2X_n(\infty)$ , pero debido al decaimiento del neutrón el número de neutrones va disminuyendo en el tiempo por un factor exponencial dado por  $e^{-t/\tau}$ , donde  $\tau_n$  es la vida media del neutrón. Si incluimos este efecto la fracción de helio cambia entonces como

$$Y_P = 2X_n^P(\infty)e^{-t/\tau_n}. \quad (5.19)$$

A un tiempo  $t^i$ , cuando la temperatura del universo está por abajo de la energía de ligadura del deuterón  $\varepsilon_D$ , la mayoría de los neutrones son capturados en deuterones y enseguida estos colisionan para colocar todos los neutrones presentes en  ${}^4\text{He}$ . Sustituyendo este tiempo de captura en la ecuación (5.19) y usando el valor asintótico de  $X_n$  obtenemos la cantidad de helio que se formó en el Universo Temprano. Un cálculo aproximado de este tiempo de captura es el que mostramos a continuación siguiendo el trabajo de Mukhanov [44].

Los núcleos atómicos formados en el Universo Temprano son el resultado de las interacciones nucleares entre bariones. Por ejemplo, el  ${}^4\text{He}$  puede en principio ser directamente formado por la colisión:  $2p + 2n \rightarrow {}^4\text{He}$ . Sin embargo, las densidades de protones y neutrones cuando estas reacciones toman lugar, son demasiado bajas y ocurren en un número despreciable. Por lo tanto

los núcleos más complejos sólo pueden producirse en secuencias de reacciones de dos cuerpos.

El primer paso para este fin es la producción del deuterón a través de la reacción



Esta reacción es la que mantiene el equilibrio químico y térmico entre el deuterón con los nucleones gracias al intercambio de neutrones y protones. La abundancia de deuterones está definida por  $X_D \equiv 2n_D/n_B$ , donde  $n_B$  es el número de bariones (nucleones), y mientras se mantenga este estado de equilibrio la relación entre  $X_D$  y las abundancias de los neutrones y protones libres esta dada por la fórmula de Saha,

$$X_D = 5.67 \times 10^{-14} \eta_{10} (T/\text{MeV})^{3/2} e^{(B_D/T)} X_p X_n. \quad (5.21)$$

Donde  $B_D \equiv m_p + m_n - m_D = 2.23\text{MeV}$ , es la energía de ligadura del deuterón, y hemos introducido la razón de bariones a fotones  $\eta$ , normalizada como  $\eta_{10} \equiv \eta/10^{-10}$ .

La abundancia del deuterón es muy pequeña a temperaturas alrededor de su energía de ligadura, por ejemplo para  $T \sim 0.5 \text{ MeV}$ , obtenemos  $X_D \sim 2 \times 10^{-13}$ . La razón es que los fotones muy energéticos con  $\varepsilon > B_D$  destruyen al deuterón. Aún a temperaturas  $T < B_D$  la cantidad de deuterones puede ser baja, esto retrasa la formación de los núcleos más pesados como por ejemplo el  ${}^4\text{He}$ .

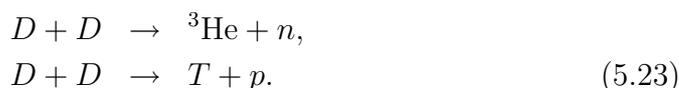
La energía de ligadura del helio es  $28.3\text{MeV}$ , mucho más alta que la energía de ligadura del deuterón, por lo tanto un esperaría que casi todos los neutrones libres fueran capturados a la temperatura del freeze-out. Sin embargo, la abundancia de helio todavía es despreciable a esta temperatura, esto es porque las tasas de las reacciones que convierten deuterón en elementos más pesados son muy bajas debido a que  $X_D$  es pequeño. También elementos más pesados se encuentran en cantidades completamente despreciables a pesar de sus altas energías de ligadura, esto se conoce como el “embotellamiento del deuterio”.

Cuando  $T \sim .1\text{MeV}$  la fracción de deuterones es menor que  $10^{-4}$  y  $X_n \sim 1/7$ , en ese periodo la temperatura del deuterón en términos de  $X_D$  se puede obtener de la ecuación (5.21)

$$T(X_D) = \frac{0.06185\text{MeV}}{1 + 2.7735 \times 10^{-2} \ln(X_D/\eta_{10})}. \quad (5.22)$$

Esta relación es válida sólo cuando el deuterio está en equilibrio químico con los neutrones y protones.

Según la fórmula anterior, cuando la temperatura cambia de 0.09 MeV a 0.06 MeV,  $X_D$  cambia de  $10^{-5}$  a 1, es decir, la abundancia de deuterones se incrementa abruptamente en este tiempo y es de esperarse que a partir de aquí las reacciones nucleares sean capaces de formar elementos más pesados. Los principales procesos encargados de fabricar otros núcleos antes del helio a partir de deuterio son los siguientes



Las secciones eficaces de estas reacciones se conocen de experimentos y los resultados se presentan en términos de la temperatura. Para el rango de 0.06-0.09 MeV tenemos los siguientes datos [45]

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle_{DD1} &= (1.3 - 2.2) \times 10^{-17} \text{cm}^3/\text{s}, \\ \langle \sigma v \rangle_{DD2} &= (1.0 - 2.0) \times 10^{-17} \text{cm}^3/\text{s}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Si consideramos que  $N_D$  núcleos de deuterio están contenidos en un volúmen, el cambio en la cantidad de deuterio debido a las anteriores reacciones en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es igual a

$$\Delta N_D = -n_D \langle \sigma v \rangle_{DD} N_D \Delta t. \quad (5.25)$$

Usando que  $X_D = 2n_D/n_B$ , resulta

$$\Delta X_D = -\frac{1}{2} \lambda_{DD} X_D^2 \Delta t, \quad (5.26)$$

donde  $\lambda_{DD} = (\langle \sigma v \rangle_{DD1} + \langle \sigma v \rangle_{DD2})n_B$ . Calculamos  $\lambda_{DD}$  sustituyendo la densidad bariónica  $n_B = \eta_{10}10^{-10}n_\gamma$ , la densidad de fotones  $n_\gamma = 2\zeta(3)T^3/\pi^2$  y que  $1\text{cm} = 5 \times 10^{10}\text{MeV}^{-1}$ . De esta forma obtenemos

$$\lambda_{DD} = 1.3 \times 10^5 K(T) \eta_{10} \left( \frac{T}{\text{MeV}} \right)^3 \text{s}^{-1}, \quad (5.27)$$

donde  $K(T)$  es un número que cambia de 1 a 0.6 cuando  $T$  cae de 0.09 MeV a 0.06 MeV.

Cuando la cantidad de deuterio que se convierte a núcleos más pesados

es del mismo orden que el deuterio existente podemos decir que muchos de estos núcleos se ocupan para la nucleosíntesis y que el embotellamiento del deuterio ha quedado completamente abierto. En otras palabras, un número importante de deuterio se está convirtiendo en  $^3\text{He}$  y Tritio sólo cuando

$$\Delta X_D \simeq X_D, \quad (5.28)$$

que junto con (5.26) nos da

$$X_D \simeq \frac{2}{\lambda_{DD} t}. \quad (5.29)$$

Pero, como  $t = 2.4156 g_*^{-1/2} / T^2 \text{MeV}^2 \text{s}$  y, en la época cuando  $T \ll 1 \text{MeV}$   $g_* = 3.36$ , entonces la abundancia  $X_D^i$  cuando esto ocurre es

$$X_D^i \simeq \frac{1.14 \times 10^{-5}}{\eta_{10} (T(X_D) / \text{MeV})}. \quad (5.30)$$

$X_D^i$  depende de  $T(X_D)$  que a su vez está relacionada con  $X_D$  por la ecuación (5.22), sustituyendo la temperatura llegamos a

$$X_D^i = 1.84 \times 10^{-4} \eta_{10}^{-1} [1 + 2.7 \times 10^{-2} \ln(X_D^i / \eta_{10})]. \quad (5.31)$$

Resolvemos recursivamente la ecuación anterior, tomando como primera solución  $X_D^1 = \eta_{10}$  y lo que obtenemos es

$$X_D^i \simeq 1.4 \times 10^{-4} \eta_{10}^{-1} (1 - 7 \times 10^{-2} \eta_{10}). \quad (5.32)$$

Luego que la abundancia de deuterio alcanza este valor todo ocurre muy rápido. El deuterio es continuamente producido pero a su vez es convertido rápidamente en núcleos más pesados, impidiendo que alcance valores más grandes que  $10^{-2}$ . Un cálculo de la cantidad de deuterio se puede ver en la figura 1.1, ahí se muestra su dependencia con la razón de bariones a fotones  $\eta$  y se ve como el valor máximo que puede alcanzar es el que ya mencionamos.

La temperatura a la cual comienza la formación de núcleos como el helio se puede obtener sustituyendo (5.32) en la ecuación (5.22), lo que nos da

$$T^i \simeq 0.082 (1 + 7.08 \times 10^{-2} \ln \eta_{10}) \text{MeV}. \quad (5.33)$$

Para calcular el tiempo al que corresponde notamos que en ese periodo la temperatura del universo está por abajo de la masa del electrón  $m_e$ . En

este punto los electrones y positrones ya han sido aniquilados en fotones, calentando el gas de fotones pero sin alterar la distribución de neutrones. Por eso la temperatura  $T_\gamma$  es diferente a la temperatura  $T_\nu$  y también  $g_*$  está dado únicamente por los neutrinos y los fotones. Si incluimos las posibles familias de neutrinos adicionales con  $\Delta N_\nu \equiv N_\nu - 3$ , entonces

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} (2\Delta N_\nu + 6), \quad (5.34)$$

según vimos en el capítulo primero.

Usando la relación (1.17) entre  $t$  y  $T$  encontramos

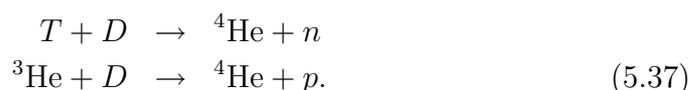
$$t^i \simeq 196(1 + 0.1351\Delta N_\nu)^{-1/2}(1 + 0.146 \ln \eta_{10})\text{s}. \quad (5.35)$$

Este tiempo  $t^i$  es el que sustituimos en la relación (5.19) para hacer los cálculos de la fracción de masas del  ${}^4\text{He}$ . Pero la nucleosíntesis no ocurre instantáneamente, pues antes de que la concentración de deuterio alcance su máximo la producción de deuterio domina sobre su destrucción. En (5.32) vemos que si hacemos  $\eta_{10} = 1$ ,  $X_D$  es de apenas  $10^{-4}$ . La ecuación (5.22) nos indica que cuando  $X_D \simeq 10^{-2}$  la temperatura bajó de  $T = 0.08\text{MeV}$  a  $T = 0.07\text{MeV}$ , de modo que el intervalo que pasa entre estas dos temperaturas es

$$\Delta t \simeq 2t^i \frac{\Delta T}{T^i} \simeq 48\text{s}, \quad (5.36)$$

el cual es un tiempo en que se retrasa la nucleosíntesis.

Una vez que se han formado deuterio y luego a  ${}^3\text{He}$  y Tritio, el Helio es producido, principalmente, a través de las reacciones



Durante este periodo la mayoría de los neutrones tienen como destino final el  ${}^4\text{He}$  y, por lo tanto,  $Y_P$  está determinada cuando las reacciones  $D + D \rightarrow {}^3\text{He} + n$  y  $D + D \rightarrow T + p$  son eficientes.

Tenemos así

$$\begin{aligned} Y_P &= 2X_n^P(\infty)e^{-t^i/\tau_n} \\ &= 2X_n^P(\infty)\exp\left[-\frac{196}{\tau_n} \frac{1 - 0.146\ln\eta_{10}}{(1 + 0.1351\Delta N_\nu)^{1/2}}\right] \exp\left[-\frac{48}{\tau_n}\right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Expresión que muestra la dependencia de  $Y_P^P$  con todos los parámetros involucrados. Estos son: la probabilidad de supervivencia de los neutrinos  $P$ , el número de especies de neutrinos  $\Delta N_\nu$ , y la razón de bariones a fotones  $\eta_{10}$ .

En el caso particular en que no hay oscilaciones ( $P = 1$ ), no existe un tipo extra de neutrino ( $\Delta N_\nu = 0$ ) y  $\eta_{10} = 1$ : lo que se obtiene para la fracción de masas del  ${}^4\text{He}$  en el Universo Temprano es

$$Y_P^1 \equiv 0.24593. \quad (5.39)$$

El cuál llamamos nuestro número estándar. Número que está próximo a los últimos valores para el helio primordial  $Y_P = 0.249 \pm 0.009$  [46],  $Y_P = 0.247 \pm 0.001$  [47] y  $Y_P = 0.248 \pm 0.003$  [25]. Datos obtenidos a partir de las observaciones de  ${}^4\text{He}$  en nubes de hidrógeno ionizado, la contribución en estas regiones a la cantidad de helio está relacionada con su metalicidad, extrapolando la metalicidad a cero se obtienen estos valores de  $Y_P$ .

### 5.3.2. Efectos de las oscilaciones en el ${}^4\text{He}$

Es de esperarse que si ocurren las oscilaciones  $\nu_e \leftrightarrow \nu_s$ , el valor de  $Y_P^1$  obtenido anteriormente en el caso sin conversión de neutrinos se vea modificado a un valor  $Y_P^P$ . Esto nos permite establecer restricciones a los parámetros de las oscilaciones y delimitar regiones dentro de las cuales los valores del ángulo de mezcla y la diferencia de masas deben encontrarse.

La dependencia de  $Y_P$  con la probabilidad de supervivencia de los neutrinos está contenida únicamente en  $X_n^P(\infty) \equiv X_n(\infty, \Delta N_\nu, P)$  a través de la ecuación (5.17). Escribimos entonces

$$Y_P^P = 2X_n(\infty, \Delta N_\nu, P)e^{-t_i/\tau_n}, \quad (5.40)$$

y

$$Y_P^1 = 2X_n(\infty, 0, 1)e^{-244/\tau_n} = 0.24593. \quad (5.41)$$

De haber oscilaciones,  $Y_P^1$  es modificado al valor  $Y_P^P$ , encontramos que este sesgo se puede expresar en términos de  $X_n$ ,

$$\frac{\Delta Y_P}{Y_P^1} = \frac{X_n(\infty, \Delta N_\nu, P)e^{-t_i/\tau_n}}{X_n(\infty, 0, 1)e^{-244/\tau_n}} - 1. \quad (5.42)$$

Esta es la condición que deben cumplir los parámetros en  $P$  y se aplica a los dos casos, resonante y no resonante. En esta ecuación todavía existe una

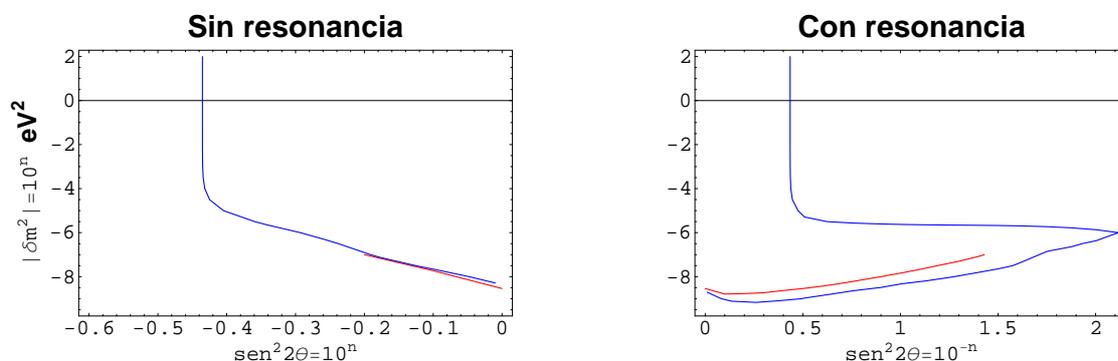


Figura 5.8: Contornos para los valores de los parámetros de los neutrinos. En azul: restringidos por la restricción (5.43). En rojo, los obtenidos en [19]. Sin resonancia, la región debajo de las curvas es la región permitida. Con resonancia, la región permitida es la que está a la derecha de las curvas.

dependencia de  $\Delta N_\nu$  y  $\eta_{10}$  que también debemos tener en cuenta.

Obtenemos ahora el límite del espacio de parámetros de las oscilaciones de neutrinos ( $\delta m^2$ ,  $\text{sen}^2 2\theta$ ), para el cual tomamos la condición inicial de que no hay neutrinos estériles  $\Delta N_\nu = 0$  y además  $\eta_{10} = 1$ . Con las oscilaciones,  $\Delta Y_P$  es menor o igual a los errores reportados por los cálculos realizados a partir de observaciones astronómicas, nos valemos (5.17) para escribir esta restricción como

$$\frac{\Delta Y_P}{Y_P^1} + 1 \geq \exp \left[ -\frac{t^i - 244}{\tau_n} \right] \exp \left[ \beta \int_\xi^\infty dy'' (1 + e^{-y''}) [1 - P(\tilde{x}, y'')] F(y'') \right]. \quad (5.43)$$

La condición anterior nos permite obtener límites a los parámetros de las oscilaciones. Para estar seguros que nuestra metodología funciona correctamente, comparamos nuestros resultados con el de otro trabajo en el que los cálculos se realizaron completamente numéricos [19]. Al igual que este trabajo, usamos una desviación relativa a  $Y_P^1$  por las oscilaciones del 5% y obtuvimos gráficas de contornos que muestren los límites para  $\delta m^2$  y  $\text{sen}^2 2\theta$ . En las gráficas de la figura 5.8 mostramos en rojo los contornos obtenidos en la referencia [19] y en azul los obtenidos con la ecuación (5.43). Los autores de dicho artículo sólo realizaron cálculos para  $\delta m^2 \leq 10^{-7} \text{ eV}^2$ , es importante notar que sus curvas coinciden con las nuestras para los mismos valores.

Ahora realizamos nuestros propios contornos. Al utilizar al mismo tiempo

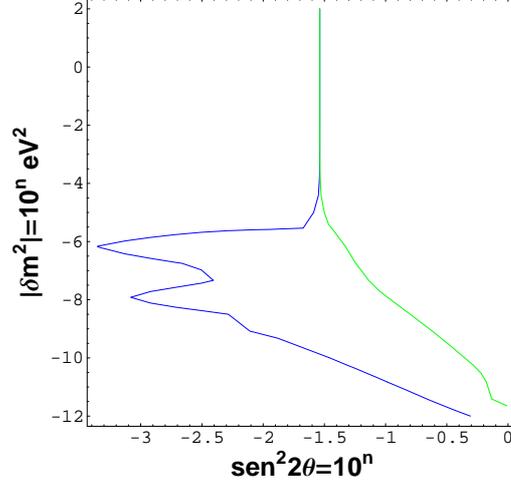


Figura 5.9: Valores de los parámetros de los neutrinos restringidos por la constricción (5.43). Sin resonancia, verde. Con resonancia, azul. La región permitida es la que está a la izquierda de las curvas.

los tres datos citados anteriormente debemos considerar que los tres resultados tienen errores distintos. Por lo tanto debemos usar un promedio pesado:

$$\widehat{Y}_P = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^N w_i Y_{Pi} \quad (5.44)$$

donde  $w_i = 1/\sigma_i^2$ ,  $w = \sum_i w_i$  y la desviación para el promedio pesado es  $1/\sqrt{w}$  [48]. Obtenemos finalmente  $\widehat{Y}_P = 0.246$  y  $\Delta Y_P^P = 0.0012$ .

Los cálculos realizados con la ecuación (5.43) y el sesgo 0.0012, arrojan las regiones mostradas en la figura 5.9. Mostramos en azul el contorno para el caso resonante y en verde para el caso no resonante. Los valores permitidos son los que se encuentran a la izquierda de ambas líneas. Quedan suprimidos los valores para el ángulo de mezcla muy cercanos a la unidad y  $\delta m^2 \geq 10^{-10}$  eV<sup>2</sup>. Lo anterior descarta la evolución adiabática ( $\delta m^2 > 10^{-6}$  eV<sup>2</sup>) de los neutrinos para ángulos grandes.

Valores de  $\delta m^2$  son posibles pero sólo para ángulos de mezcla pequeños. También notamos que toda la región para el caso extremo no adiabático ( $\delta m^2 \ll 10^{-8}$  eV<sup>2</sup>) es permitida por las constricciones. Las gráficas también muestran que en la región de ángulo máximo ( $\text{sen}^2 2\theta \simeq 1$ ) y  $\delta m^2$  grande, las probabilidades en el caso R y nR coinciden.

### 5.3.3. Efectos de $\eta$ y $\Delta N_\nu$ en el ${}^4\text{He}$

Ahora estudiamos el comportamiento de  $Y_P$  cuando cambia la razón de bariones a fotones  $\eta_{10} = \eta/10^{-10}$  y existen grados adicionales de libertad para los neutrinos  $\Delta N_\nu$ , con o sin oscilaciones.

Si inicialmente hay más especies de neutrinos entonces  $\Delta N_\nu \neq 0$ , lo cual tiene consecuencias en la abundancia de neutrones y por lo tanto en la producción del helio primordial. Tenemos dos efectos importantes en  $Y_p$  para el caso en que crezca el número de especies de neutrinos:

- i) Aumenta la densidad de energía del Universo dada por  $\rho = \pi^2 g_* T^4/30$ , lo que modifica la tasa de expansión del Universo. Esto incrementa la temperatura  $T_F$  a la que se congelan la mayoría de los neutrones; en consecuencia hay más de ellos y  $Y_p$  es más grande.
- ii) Con oscilaciones la población de los neutrinos activos disminuye, lo que conduce a una sobreproducción de neutrones y de  $Y_P$ . Pero si  $\Delta N_\nu \neq 0$  disminuye la distorsión del espectro de los  $\nu_e$ . Su distribución se acerca más a la del equilibrio y esto conduce a que haya más neutrinos, se produzcan menos neutrones y a que se suprima la sobreproducción de  ${}^4\text{He}$  causada por las oscilaciones. Este efecto no lo analizaremos pues queda fuera del alcance de este trabajo al considerar que la población inicial de neutrinos estériles es cero.

Sin embargo, podemos estudiar por separado el peso que tienen en  $Y_P$  cada uno de los siguientes fenómenos: oscilaciones de neutrinos ( $P \neq 1$ ) y una abundancia inicial de neutrinos estériles ( $\Delta N_\nu \neq 0$ ). Primero calculamos  $Y_P$  suponiendo que ocurren oscilaciones empleando la fórmula (5.38) con  $\Delta N_\nu = 0$ . Presentamos los resultados en la figura 5.9 e incluimos la dependencia de  $Y_P$  con la razón de bariones a fotones  $\eta_{10}$ . Se muestran las curvas para valores típicos de  $\delta m^2 = 10^{-8}, 10^{-6}, 10^{-2} \text{eV}^2$  y de  $\sin^2 2\theta = 10^{-2}$ . En la gráfica también se muestra con una línea continua la variación de  $Y_P$  sin oscilaciones ( $P = 1$ ). Es en estas gráficas donde se puede comparar el incremento de  $Y_P$  cuando hay oscilaciones en comparación a cuando no las hay. Además, también mostramos la diferencia entre los casos resonante y no resonante, en el primer caso el efecto puede ser apreciablemente más grande que cuando no hay resonancia donde el efecto de las oscilaciones es pequeño.

El comportamiento observado es el que se obtiene en los trabajos mencionado en el primer capítulo, hay un aumento en el número de núcleos de

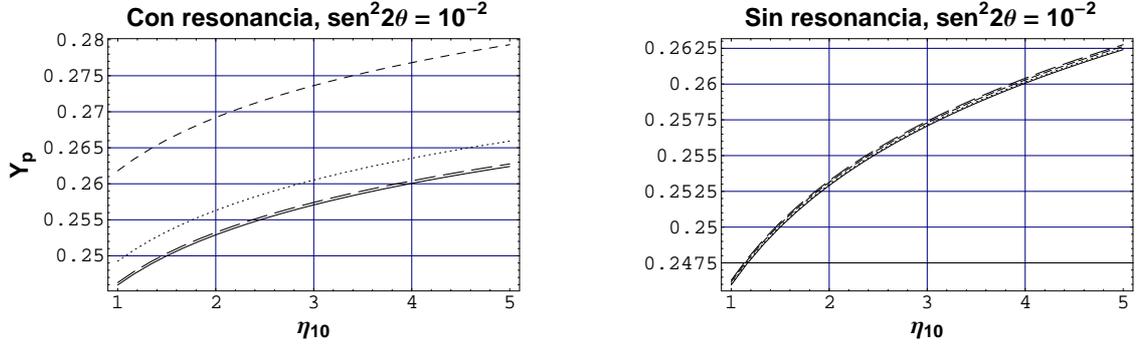


Figura 5.10:  $Y_p$  vs  $\eta_{10}$  con  $\Delta N_\nu = 0$  y  $\text{sen}^2 2\theta = 10^{-2}$ . Línea continua  $P = 1$ , línea con guión largo  $\delta m^2 = 10^{-2}$  eV<sup>2</sup>, con guión corto  $\delta m^2 = 10^{-6}$  eV<sup>2</sup> y punteada  $\delta m^2 = 10^{-8}$  eV<sup>2</sup>.

helio si la cantidad de bariones existentes en el universo aumenta, de aquí que una observación de  $Y_p$  también puede proporcionarnos una estimación de la densidad bariónica. Estimaciones para  $\eta_{10}$  presentadas en [24] dan un valor entre 5 y 7. Sin embargo, sólo cuando  $\eta_{10}$  está entre uno y dos es que obtenemos números menores a 0.25 para el  $^4\text{He}$ . Tal diferencia se debe a que la expresión (5.32) es sólo una somera aproximación del tiempo en la que la producción de los núcleos ligeros se vuelve importante.

Ahora usamos nuestra aproximación para analizar el cambio de  $X_n(\infty)$  cuando  $\Delta N_\nu$  aumenta pero sólo en el caso en que no hay oscilaciones. Simplemente hacemos  $P = 1$  en (5.17) y calculamos  $Y_p$  con la ecuación (5.38). Así, cuando variamos  $\Delta N_\nu$  y fijamos  $\eta_{10}$  obtenemos también una sobreproducción de  $Y_p$ , en la figura 5.10 mostramos estos resultados. Si el número de especies de neutrinos  $N_\nu \leq 3.3$ , entonces podemos obtener números de  $Y_p$  en concordancia con los ya mencionados anteriormente. Si bien no hay un consenso en el número sabores de los neutrinos, en el review [49], se presenta el rango  $1.4 \leq N_\nu \leq 4.9$ . Nuestros resultados son consistentes con estos números únicamente si  $\eta_{10} = 1$  y la razón es la misma que en la gráfica anterior, o sea, una gruesa estimación del tiempo en que la cantidad de helio se hace importante.

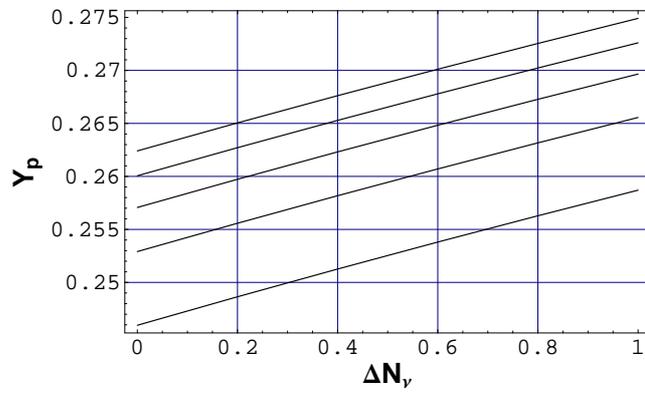


Figura 5.11:  $Y_p$  vs  $\Delta N_\nu$  con  $P=1$ . De la línea continua hacia arriba  $\eta_{10} = 1, 3, 5, 7$ .

# Conclusiones

En este trabajo fuimos capaces de expresar la fracción de neutrones creados en la época de la nucleosíntesis por medio una función semianalítica (Eq. 5.16), la cual reproduce bastante bien el cálculo completamente numérico y, a la vez complicado, presentado en otros trabajos. De esta manera, se puede comprender la física de la BBN sin que esté oscurecida por complicadas ecuaciones integro-diferenciales y extensos cálculos numéricos. En síntesis, mostramos explícitamente cómo las tasas de las interacciones débiles que crean o destruyen neutrones modifican la abundancia de neutrones  $X_n$  y calculamos su evolución en función de la temperatura del universo. Así obtuvimos el valor asintótico de  $X_n$  y, dado que las tasas de las reacciones débiles dependen de la cantidad de neutrinos activos, incluimos de forma clara el efecto de las oscilaciones de neutrinos activo-estéril en el cálculo de la fracción final de  ${}^4\text{He}$ .

Además de calcular las cantidades físicas relevantes en la nucleosíntesis del  ${}^4\text{He}$ , el estudio analítico también nos permitió hacer algunas observaciones teóricas. Los resultados se describen a continuación:

- Mostramos que el balance detallado entre las tasas de las reacciones débiles,  $\lambda_{np}$  y  $\lambda_{pn}$  en general no se mantiene si ocurren las oscilaciones entre neutrinos, es decir, cuando  $P \neq 1$  para la probabilidad de supervivencia de neutrinos y antineutrinos. Pero si aproximamos la estadística Fermi-Dirac de los neutrinos a una de Maxwell-Boltzmann, encontramos que cuando  $P$  es constante, las reacciones débiles permanecen en equilibrio estadístico entre sí y se cumple el balance detallado.
- No obstante lo anterior, encontramos que aun si no se cumple el balance detallado, sus efectos no son importantes en la evolución de  $X_n$ . Lo que nos permitió conservar la distribución F-D de los neutrinos en el cálculo de  $X_n$  en presencia de oscilaciones. De esta manera, nuestro

procedimiento da una mejor aproximación que otros estudios previos analíticos en los que se usó una estadística de M-B para los fermiones. Al comparar nuestros resultados con uno de estos trabajos [22] encontramos en él algunos errores básicos al incorporar las oscilaciones de neutrinos en el cálculo analítico de  ${}^4\text{He}$ , mismos que comentamos en una revisión de su metodología incluida en el apéndice B de esta tesis.

- Calculamos las probabilidades de supervivencia de los neutrinos y antineutrinos y mostramos que nuestras fórmulas dan una descripción apropiada de las probabilidades de transformación en todos los rangos de los parámetros de las oscilaciones. Encontramos que el requisito de que  $P$  se comporte bien en el caso extremo de una evolución no adiabática impone incluir una adecuada probabilidad de cruzamiento  $P_C$  que tome en cuenta el hecho de que estas partículas siempre se encuentran en materia, desde el momento de su producción hasta el de su detección. Esto marca una diferencia esencial de la evolución de los neutrinos en el UT con respecto a otros casos de evolución de los neutrinos en materia en los que su detección de ellos ocurre una vez que abandonan el medio, como en el caso de los neutrinos solares o atmosféricos.
- Al estudiar cómo cambia el espectro de los neutrinos o antineutrinos con su probabilidad de supervivencia, mostramos que las oscilaciones modifican más su distribución a bajas energías. Dado que existe un umbral de energía para los antineutrinos por la reacción  $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$ ,  $E_{\bar{\nu}_e} = Q + m_e \simeq 1.8 \text{ MeV}$ , esto conduce a que la probabilidad de los antineutrinos tenga un efecto menor en la tasa de esta interacción débil y por lo tanto en  $X_n$ .
- El valor determinado para la abundancia de helio primordial  $Y_P$  es uno de los más precisos en cosmología. A partir del intervalo de valores observados y con la metodología usada en este trabajo, encontramos rangos para los valores de los parámetros de las oscilaciones de neutrinos activo-estéril sin necesidad de recurrir a complicados cálculos numéricos. Verificamos que si ocurren, las oscilaciones activo-estéril afectan la producción de helio incrementando el valor de  $Y_P$ . Esto nos permite establecer restricciones para  $\delta m^2$  y  $\sin^2 2\theta$  con o sin transición resonante de los neutrinos. Encontramos que en ambos casos, los ángulos de mezcla grandes están excluidos cuando al mismo tiempo  $\delta m^2$  es grande.

Es posible que  $\sin^2 2\theta \simeq 1$ , pero sólo si  $\delta m^2 \leq 10^{-10} \text{ eV}^2$ . También en los dos casos resonante y no resonante, la transición no adiabática ( $\delta m^2 < 10^{-9} \text{ eV}^2$ ) se encuentra favorecida para cualquier valor del ángulo de mezcla.

- Mostramos que en el caso en que los neutrinos y antineutrinos evolucionen sin resonancia, la abundancia de neutrones es creciente en función de los parámetros de las oscilaciones. En general, el efecto de las transiciones no resonantes en  $X_n$  es menor al de las resonantes. Pero en el caso de que se cumpla la condición de resonancia MSW existen valores específicos para los cuales  $X_n$  alcanza un máximo; esto pasará ya sea que  $10^{-8} \text{ eV}^2 \leq |\delta m^2| \leq 10^{-6} \text{ eV}^2$  o que  $10^{-1.5} \leq \sin^2 2\theta \leq 10^{-0.5}$ . Cabe señalar que nuestros resultados coinciden tanto cuantitativa y cualitativamente con los de otro trabajo [19] en donde se emplean extensos métodos numéricos en el que los autores obtienen constricciones para los valores de los parámetros de los neutrinos, pero sólo para el rango de  $\delta m^2 \leq 10^{-7} \text{ eV}^2$ . Como una manera de checar nuestro procedimiento de cálculo comparamos con esos resultados para un sesgo relativo similar del 5%. Satisfactoriamente, los valores obtenidos con nuestro procedimiento son similares pero además, como mostramos en las gráficas de la figura 5.8, extendemos el cálculo a otros valores de  $\delta m^2$ , lo que nos permite observar los efectos de las oscilaciones en  $X_n$  para todos los valores de los parámetros.
- Nuestra metodología también permite incluir los efectos de la conversión entre neutrinos con otras variables cosmológicas como la razón de bariones a fotones  $\eta_{10}$ . Sin embargo, no pudimos estimar con la suficiente precisión este parámetro, los estudios de nucleosíntesis la colocan en el rango  $5 \leq \eta_{10} \leq 7$  [24] o  $\eta_{10} \leq 4.3$  [50], en comparación con nuestra estimación  $1 \leq \eta_{10} \leq 2$  para el cual ajusta bien el valor de  $Y_P$  que calculamos. Esta diferencia proviene de que se hicieron gruesas estimaciones para el tiempo en que son importantes las abundancias de los núcleos ligeros, más no de la aproximación semi-analítica que obtuvimos para el calcular  $X_n$ .
- Una limitación de nuestro trabajo es que suponemos que inicialmente el número de especies de neutrinos no es mayor a tres. No obstante eso, para el caso en que no hay transiciones entre neutrinos ( $P = 1$ ) pudimos analizar cómo una  $\Delta N_\nu \neq 0$  modifica la densidad de energía

del universo y sus consecuencias en la cantidad de neutrones en el UT. Verificamos que entre más grande sea el número de especies extra de neutrinos, el freeze-out ocurre a temperaturas más altas y es mayor la cantidad de neutrones lo que produce un incremento de  ${}^4\text{He}$ . Encontramos que  $3 \leq N_\nu \leq 3.3$  es el intervalo que mejor ajusta con los cálculos reportados de  $Y_{\mathcal{P}}$  en [24], este rango está limitado por las aproximaciones que hicimos al determinar el tiempo en el que las cantidades de deuterio y litio-3 son importantes. Cálculos más completos fueron hechos en [26] a partir de las abundancias de  ${}^4\text{He}$  y D donde se reporta que  $1.8 \leq N_\nu \leq 4.5$  y también otro trabajo [50] donde se emplean las abundancias de  ${}^4\text{He}$  y  ${}^7\text{Li}$  para encontrar que  $1.4 \leq N_\nu \leq 4.9$ .

# Apéndice A

Es conveniente calcular primero la tasa de decaimiento del neutrón para después poner las otras tasas de las interacciones débiles en términos de ella. Si una partícula de masa  $M$  decae en  $n$  partículas, en su sistema en reposo se tiene que la tasa de decaimiento [38] es

$$d\lambda = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(P - P_1 - P_2 - P_3) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (1)$$

donde  $P_i$  es el cuadrimomento de la partícula  $i$ .

Tenemos entonces que para el decaimiento del neutrón

$$\begin{aligned} \lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} &= \frac{(2\pi)^4}{2m_n} \int \frac{d^3 p_p}{(2\pi)^3 2E_p} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \int \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \\ &\times \delta^3(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(E_n - E_p - E_e - E_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Como la masa del protón es casi igual a la del neutrón consideramos que su energía  $E_p \approx m_p$ . Con esto reescribimos la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} &= \frac{2\pi}{2m_n 2m_p} \int \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3 2E_e} \int \frac{d^3 p_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \\ &\times \delta(E_n - E_p - E_e - E_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2, \end{aligned} \quad (3)$$

donde efectuamos la integral en el momento del protón por medio de la delta de Dirac en tres dimensiones. Simplificamos las integrales en la ecuación (4.28) suponiendo isotropía y obtenemos

$$\lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} = \frac{(4\pi)^2 2\pi}{(2\pi)^6 2m_n 2m_p} \int \frac{dp_e}{2E_e} \int \frac{dp_{\bar{\nu}_e}}{2E_{\bar{\nu}_e}} p_e^2 p_{\bar{\nu}_e}^2 \delta(Q - E_e - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2. \quad (4)$$

Ahora sustituimos el valor de la amplitud al cuadrado  $|\mathcal{M}|^2$ . De la teoría de Fermi se encuentra que

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 16(1 + 3g_A^2)G_F^2(P_n \cdot P_{\bar{\nu}_e})(P_p \cdot P_e) \\ &\approx 16(1 + 3g_A^2)G_F^2 m_n m_p E_{\bar{\nu}_e} E_e, \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $g_A = 1.26$  es el acoplamiento vector-axial de los nucleones y su valor se calcula precisamente a partir del tiempo de vida del neutrón. La constante de Fermi vale  $G_F = 1.17 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ .

Por conservación de la energía  $E_n = E_p + E_e + E_{\bar{\nu}}$ , definimos  $Q \equiv m_n - m_p = E_e + E_{\bar{\nu}}$ . Después de integrar sobre  $p_{\bar{\nu}_e}$ , nos queda la tasa de decaimiento

$$\lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} = \frac{2^2(1 + 3g_A^2)G_F^2}{(2\pi)^3} \int dp_e p_e^2 (Q - E_e)^2. \quad (6)$$

Los momentos del electrón y del antineutrino están relacionados a través de  $Q = \sqrt{p_e^2 + m_e^2} + p_{\bar{\nu}}$ , si consideramos que la masa de los neutrinos es muy pequeña. De esta relación se sigue que el momento del antineutrino toma su valor máximo  $p_{\bar{\nu}_e} = Q - m_e$ , cuando  $p_e = 0$ ; y de la misma forma, el momento del electrón es máximo en  $p_e = \sqrt{Q^2 - m_e^2}$  cuando  $p_{\bar{\nu}} = 0$ .

Sustituyendo en la ecuación (4.31) obtenemos

$$\lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} = \frac{(1 + 3g_A^2)G_F^2}{2\pi^3} \int_0^{\sqrt{Q^2 - m_e^2}} dp_e p_e^2 (Q - E_e)^2. \quad (7)$$

En términos de la energía y usando el hecho de que  $E_e dE_e = p_e dp_e$

$$\lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} = \frac{(1 + 3g_A^2)G_F^2}{2\pi^3} \int_{m_e}^Q dE_e E_e p_e (Q - E_e)^2. \quad (8)$$

Luego, con un cambio de variable  $\varepsilon = E_e/m_e$  y  $z = Q/m_e = 2.53093$ ,

$$\lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} = \frac{(1 + 3g_A^2)G_F^2 m_e^5}{2\pi^3} \int_1^z d\varepsilon \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon - z)^2.$$

Finalmente escribimos

$$\lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e} = \frac{(1 + 3g_A^2)G_F^2 m_e^5 \lambda_o}{2\pi^3} = \frac{1}{\tau_n}, \quad (9)$$

siendo  $\tau_n$  el tiempo de vida media del neutrón y  $\lambda_o = 1.63585$ . Con esto, la tasa de decaimiento  $\lambda_{n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e}$  queda en términos de constantes conocidas. Para tener las unidades correctas dividimos por  $\hbar = 6.582 \times 10^{-22} \text{MeV s}$ . Como el valor de  $\tau_n$  es muy grande, la influencia del decaimiento del neutrón en  $X_n$  es marginal.

# Apéndice B

## Comentarios a “Resonant neutrino transitions and nucleosynthesis” [22]

Uno de los primeros trabajos en que se calculó los efectos de las oscilaciones de neutrinos en la síntesis del helio en el UT es el de Enqvist *et al* [22]. Con base en la cantidad de Helio primordial ( $Y_P$ ) observada astronómicamente, se obtienen regiones de valores permitidos para los parámetros de los neutrinos en el caso de una transición activo-estéril. En este apéndice resumimos este trabajo y luego le hacemos algunos comentarios.

Los autores calculan analíticamente la abundancia de neutrones  $X_n$  y analizan cómo este valor se modifica con la presencia de las oscilaciones. Dado que se puede aproximar  $Y_P \simeq 2X_n(t = \infty)$ , primero se obtiene la solución de  $X_n(t)$  a partir de la ecuación

$$\frac{dX_n(t)}{dt} = \lambda_{pn}[1 - X_n(t)] - \lambda_{np}X_n(t). \quad (1)$$

Donde  $\lambda_{pn}(\lambda_{np})$  son las tasas de las interacciones débiles que convierten protones a neutrones (neutrones a protones). Si se desprecia la masa del electrón y se utiliza la aproximación de Maxwell-Boltzmann para la estadística de los neutrinos  $f = [1 + e^{E/T}]^{-1} \simeq e^{-E/T}$  como en [39], las tasas se calculan con las fórmulas

$$\begin{aligned} \lambda(ne^+ \rightarrow p\bar{\nu}) &\simeq A \int_0^\infty p_\nu E_\nu p_e^2 dp_e f_e, \\ \lambda(n\nu_e \rightarrow pe^-) &\simeq A \int_0^\infty p_e E_e p_\nu^2 dp_\nu P f_\nu. \end{aligned} \quad (2)$$

Donde  $A = 0.02\text{MeV}^{-5}\text{s}^{-1}$ . Aquí se observa que el efecto de las oscilaciones se introduce como un factor  $P$  que modifica la distribución de los neutrinos.

Este factor es la probabilidad de supervivencia de los neutrinos áctivos en caso de que exista una transición resonante.

Con estas aproximaciones la solución a la ecuación (1) es

$$X_n(y) = \frac{\lambda_{pn}(y)}{\Lambda(y)} + \int_0^\infty dy' e^{y'} \left( \frac{\lambda_{pn}(y)}{\Lambda(y)} \right)^2 e^{-\beta \int_{y'}^y dy'' y'' \Lambda(y'')} \quad (3)$$

donde se emplea la variable adimensional  $y = Q/T$ ,  $\Lambda = \lambda_{pn} + \lambda_{np}$  y  $\beta = 0.8813(1 + 0.162791\Delta N_\nu)^{-1/2}$  s. Considerando las abundancias de  $Y_P$  obtenidas de observaciones astronómicas, se justifica que la variación de la fracción de  ${}^4\text{He}$  debida a las oscilaciones es de 0.01 comparada con el caso sin oscilaciones. Así, los autores encuentran la constricción para la probabilidad de supervivencia

$$P \geq 0.84. \quad (4)$$

Misma que sirve para encontrar cotas a los parámetros de las oscilaciones  $\text{sen}^2 2\theta$  y  $\delta m^2$  resumidas en una gráfica de contornos.

Hacemos ahora las siguientes observaciones a este trabajo:

- Se acepta la solución (3) a la ecuación (1) tal y como se presenta en [39] sin considerar que cuando se incluye la probabilidad en las tasas de las interacciones  $\lambda_{pn}$  y  $\lambda_{np}$ , la ecuación para  $X_n$  debe resolverse teniendo en cuenta que las condiciones iniciales y las integrales que resultan se ven modificadas. Mostramos en las expresiones (4.11)-(4.18) que no es correcto hacer sólo la sustitución  $\lambda_{pn} \rightarrow \lambda_{pn}^P$  en (3).
- La expresión para la probabilidad  $P = \text{sen}^2 \theta + P_{LZ} \cos 2\theta$  que se presenta es incorrecta. La fórmula se deriva de la ecuación (5.3), suponiendo que en el punto de producción de los neutrinos la densidad del medio es muy grande. Con esto,  $\cos 2\theta_m \simeq \cos 2\theta$  y la probabilidad debe quedar como

$$P = \text{sen}^2 \theta + P_C \cos 2\theta. \quad (5)$$

Con  $P_C = P_{LZ} = e^{-\frac{\pi}{2}\kappa_R}$ , la probabilidad de Landau-Zener de que ocurran transiciones entre los autoestados de los neutrinos, y  $\kappa_R$  el parámetro adiabático calculado en el punto de resonancia. Pero incluir de esta manera la probabilidad de crossing no toma en cuenta que antes del momento de producción de los neutrinos no podemos tener transiciones entre sus autoestados, por lo que si la resonancia ocurre cuando  $V(t_R) > V(T_0)$ , entonces la  $P_C = 0$  aun si el

parámetro adiabático  $\kappa_R > 1$ . No todas las soluciones para la probabilidad de crossing toman en cuenta esto y la fórmula de Landau-Zener es una de ellas. Además, encontramos que la  $P_C$  debe hacer que  $P$  se comporte adecuadamente en el límite no adiabático. Para cumplir con lo anterior se deben incorporar dos funciones escalón en la que  $P_C = \Theta\left(1 - \frac{V(T_R)}{V(T_0)}\right) \Theta\left(1 - \frac{V(T_0)}{V(T_N)}\right) P_{LZ}$ . En nuestro trabajo nosotros usamos la fórmula de Magnus (5.6) la cual ya toma en cuenta los dos aspectos anteriores sin necesidad de las funciones escalón.

- El cálculo de  $\kappa_R$  tiene un error que proviene de determinar incorrectamente la temperatura de resonancia

$$T_{res} = 12.9[|\delta m^2|/\text{eV}^2 \cos 2\theta]^{1/6}. \quad (6)$$

La cual, como mostramos en (3.65) si depende de la energía de los neutrinos. Si bien se encuentra correctamente que  $\kappa_R$  y  $P_{LZ}$  no dependen de  $E_\nu$ , se puede llegar a la misma conclusión sin usar el cambio  $\langle E_\nu \rangle = 3.15T$ , como se hizo en este artículo.

- Para realizar la gráfica que se incorpora en el artículo los autores incluyen la restricción,

$$T_{res} \leq T_N = 0.7 \text{ MeV}. \quad (7)$$

Esta condición significa que si los neutrinos experimentan la resonancia luego de que la temperatura del universo es menor a la temperatura de la nucleosíntesis  $T_N$ , entonces no hay consecuencias de las oscilaciones en  $Y_P$ . Esto se interpreta así y se considera que los valores de  $\sin 2\theta$  y  $\delta m^2$  que cumplen esta condición no están constreñidos. Sin embargo, los contornos obtenidos son incorrectos por las razones expuestas en los puntos anteriores. En la Figura 11 usamos las dos condiciones para graficar los contornos permitidos en el espacio  $(\sin 2\theta, \delta m^2)$ . En verde lo hicimos igual que en [22] y en azul usando la probabilidad correcta. Las regiones permitidas por la condición (4) son las que se encuentran a la izquierda de la diagonal verde y la curva azul. La condición (7), descarta las regiones debajo de las líneas horizontales. Para las curvas en azul usamos las expresiones

$$P = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_C\right) \cos 2\theta_m, \cos 2\theta_m^0. \quad (8)$$

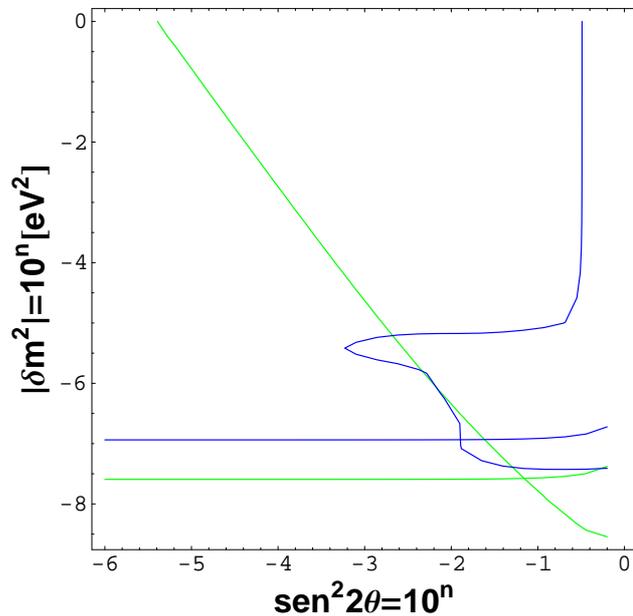


Figura 12: Cotas de la nucleosíntesis a los parámetros de mezcla de los neutrinos. En verde, Enqvist *et al.* En azul, con  $P$  completa y  $P_C$  Magnus.

$$P_C = \text{sen}^2[(\theta_m^0 - \theta_m)e^{-\kappa_R}], \quad (9)$$

$$\kappa_R = 1.40183 \times 10^5 g_*^{-1/2} \left| \frac{\delta m^2}{\text{eV}^2} \right|^{1/2} \frac{\text{sen}^2 2\theta}{(\cos 2\theta)^{3/2}}. \quad (10)$$

donde  $g_* = 10.75(1+0.162791\Delta N_\nu)$ . Las gráficas se hicieron con  $T_D = 2$  MeV,  $T_N = 0.7$  MeV,  $\langle p_\nu \rangle = 3.15T$  y sustituimos  $T = 1$  MeV.

# Bibliografía

- [1] K. Abe et al. *Phys. Rev. D*, 83(052010), 2011.
- [2] Y. shie et al. *Phys. Rev. D*, 71(112005), 2005.
- [3] P. Adamson et al. *Phys. Rev. Lett.*, 106(181801), 2011.
- [4] M. Tortola T. Schwetz and J.W.F. Valle. *New J. Phys.*, 10(113011), 2008.
- [5] A. A. Aguilar-Arevalo et al. *Phys. Rev. Lett.*, 105(181801), 2010.
- [6] A. A. Aguilar-Arevalo et al. *Phys. Rev. D*, 64(112007), 2001.
- [7] U. Seljak, A. Makarov, P. McDonald, S. F. Anderson, S. Dodelson, H. Sandvik, X. Wang, D. H. Weinberg, I. Zeavi, N. A. Bahcall, and et al. *Phys. Rev. D*, 71(103515), 2005.
- [8] S. Dodelson, A. Melchiorri, and A. Slozar. *Phys. Rev. Lett.*, 97(041301), 2006.
- [9] A. Kusenko. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 221(149-154), 2011.
- [10] D. O. Caldwell, G. M. Fuller, and Y. Qian. *Phys. Rev. D*, 61(123005), 2000.
- [11] A. Kusenko. *Int. J. Mod. Phys. D*, 13(2065), 2004.
- [12] R. N. Mohapatra. *SNAC*, 2006.
- [13] R. Barbieri and A. Dolgov. *Phys. Lett. B*, 237(440), 1990.
- [14] K. Enqvist, K. Kainulainen, and M. Thomson. *Nucl. Phys. B*, 373(498), 1992.

- [15] A. D. Dolgov and F. Villante. *Nucl. Phys. B*, 679(261), 2004.
- [16] D. P. Kirilova and M. V. Chizhov. *Physics Letters B*, 393(375-378), 1997.
- [17] D. P. Kirilova and M. V. Chizhov. *Physical Review D*, 58(073004), 1998.
- [18] D. P. Kirilova and M. V. Chizhov. *Nucl. Phys. B*, 591(457), 2000.
- [19] D. P. Kirilova. *Astropart. Phys.*, 19(409), 2003.
- [20] D. P. Kirilova. *International Journal of Modern Physics D*, 13(5), 2004.
- [21] J. C. D'Olivo, D. Núñez, and M. Torres. *International Journal of Modern Physics. D*, 1(1), 1992.
- [22] K. Enqvist, K. Kainulainen, and J. Maalampi. *Physics Letters B*, 3,4(249), 1990.
- [23] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Co., 1990.
- [24] R. H. Cyburt et al. *JCAP*, 0811(012), 2008.
- [25] M. Peimbert et al. *Astrophys. J.*, 667(636), 2007.
- [26] R. H. Cyburt et al. *Astropart. Phys.*, 23(313), 2005.
- [27] L. Wolfenstein. *Phys. Rev. D*, 17(2369), 1978.
- [28] S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 42(913), 1985.
- [29] D. Notzold and G. Raffelt. *Nucl. Phys. B*, 307(924), 1988.
- [30] J. C. D'Olivo, J. F. Nieves, and M. Torres. *Phys. Rev. D*, 46(3), 1992.
- [31] Xiangdong Shi, George M. Fuller, and Kevork Abazajian. *Phys. Rev. D*, 60(063002), 1999.
- [32] Kevork Abazajian, Nicole F. Bell, George M. Fuller, and Yvonne Y. Y. Wong. *Phys. Rev. D*, 72(063004), 2005.
- [33] D. Kirilova. *JCAP*, 1206(007), 2012.

- [34] R. Buras and D. V. Semikoz. *Astropart. Phys.*, 17(245-261), 2002.
- [35] A. D. Dolgov. *Physics Letters B*, 506(7-12), 2001.
- [36] M. Cirelli et al. *Nucl. Phys. B*, 708(215-267), 2005.
- [37] J. C. D'Olivo. *Physical Review D*, 45(3), 1992.
- [38] K. Nakamura et al. *JPG*, 37(075021), 2010.
- [39] J. Bernstein, L. S. Brown, and G. Feinberg. *Review of Modern Physics*, 61(1), 1989.
- [40] S.H. Hansen, G. Mangano, A. Melchiorri, G. Miele, and O. Pisanti. *Phys. Rev. D*, 65(023511), 2002.
- [41] T. K. Kuo and J. Pantaleone. *Physical Review D*, 39(7), 1989.
- [42] P. J. E. Peebles. *Astrophys. J.*, 146(542), 1966.
- [43] S. Dodelson and M. S. Turner. *Physical Review D*, 46(3372), 1992.
- [44] V. Mukhanov. *International Journal of Theoretical Physics*, 43(3), 2004.
- [45] R. Esmailzadeh, G. D. Starkman, and S. Dimopoulos. *The Astrophysical Journal*, 378(504), 1991.
- [46] K. A. Olive and E. Skillman. *Astrophys. J.*, 617(29), 2004.
- [47] Y. I. Izotov et al. *Astrophys. J.*, 662(15), 2007.
- [48] J. Beringer et al (Particle Data Group). *Phys. Rev. D*, 86(010001), 2012.
- [49] B. D. Fields and S. Sarkar. *J. Phys. G*, 33(1), 2006.
- [50] K. A. Olive and D. Thomas. *Astropart. Phys.*, 11(403), 1999.