



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL**

**ANÁLISIS DINÁMICO DE  
EXTREMIDAD DE ROBOT  
CAMINANTE**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**INGENIERO MECÁNICO**

PRESENTA:

**JULIO CÉSAR PINEDO CATALÁN**

TUTOR:

**M.I. JOSÉ ANTONIO SILVA RICO**



Ciudad Universitaria, México D.F.

2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **Jurado Asignado:**

Presidente: Dr. Ángel Alfonso Rojas Salgado  
Secretario: Dr. Leopoldo Adrián González González  
Vocal: M.I. José Antonio Silva Rico  
Suplente 1: Mtro. Juan Ocariz Castelazo  
Suplente 2: Dr. Francisco Cuenca Jiménez

Ciudad Universitaria, México D.F.

### **Tutor de Tesis:**

M.I. José Antonio Silva Rico





**A mis Padres**



# Agradecimientos

A mi familia, por todo el amor, cariño, consejos, comprensión y apoyo incondicional que me han dado cada día de mi vida. A mi padre, Julián, por haber despertado en mí la curiosidad de saber como funcionan las cosas. A mi madre, Cenovia, por enseñarme que con esfuerzo y tenacidad se puede cumplir lo que nos proponemos. A mis hermanas, Ada y Diana, por la compañía y alegrías que me han dado.

A mi tía Marfe, por todo su amor, cariño y cuidados a lo largo de mi vida.

A mi tutor, José Antonio Silva, por su guía, apoyo, paciencia y amistad. Por compartir conmigo su conocimiento, por sus palabras de aliento y consejos, los cuales me han hecho crecer tanto personal como profesionalmente. Y por último, por creer en mí y haberme aguantado durante todo este tiempo.

A Gustavo Olivares, por haber creído en mí y haberme dado la oportunidad de conocer el campo de la investigación. Por sus valiosas enseñanzas y consejos, pero sobre todo por su ayuda y apoyo.

A Mundo y Magda, por su apoyo, cariño y atenciones a lo largo de todos estos años.

A mis amigos, Juan Carlos y Mauricio, por su amistad y apoyo, por las innumerables charlas, consejos y buenos momentos que hemos compartido.

A mis amigos de la facultad, por toda su amistad y apoyo durante este tiempo, por tantos momentos en los que disfrutamos y sufrimos juntos, y que hicieron esta etapa de mi vida tan especial.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por abrirme las puertas y darme la oportunidad de superarme como persona.

A mis sinodales, por su gran disposición y consejos que ayudaron a mejorar este trabajo.

A cada persona que ha formado parte de mi vida y me ha apoyado y que por algún descuido no se encuentra en esta lista.



*Der Verstand vermag nichts anzuschauen, und die Sinne nichts zu denken. Nur daraus, daß sie sich vereinigen, kann Erkenntnis entspringen.*

*- Immanuel Kant*

*Wichtig ist, daß man nicht aufhört zu fragen.*

*- Albert Einstein*

*Ni el entendimiento puede intuir nada, ni los sentidos pueden pensar nada. El conocimiento únicamente puede surgir de la unión de ambos.*

*- Immanuel Kant*

*Lo importante es no dejar de hacerse preguntas.*

*- Albert Einstein*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1. Estado del Arte</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación . . . . .	1
1.2. Objetivo . . . . .	2
1.3. Metodología . . . . .	2
1.4. Robots . . . . .	2
1.4.1. Clasificación de Robots . . . . .	3
1.5. Robots Móviles . . . . .	4
1.5.1. Clasificación por Tipo de Contacto con el Suelo . . . . .	5
1.5.2. Locomoción por Medio de Ruedas . . . . .	6
1.5.3. Locomoción por Medio de Banda Oruga . . . . .	7
1.5.4. Locomoción por Medio de Extremidades . . . . .	7
1.5.5. Robots Híbridos . . . . .	8
1.6. Robots con Extremidades . . . . .	9
1.6.1. Configuración y Tipos de Robots con Extremidades . . . . .	10
1.6.2. Aplicaciones de Robots con Extremidades . . . . .	14
1.6.3. Ventajas de los Robots de Movimiento Discreto . . . . .	15
1.6.3.1. Movilidad . . . . .	15
1.6.3.2. Superación de Obstáculos . . . . .	16
1.6.3.3. Suspensión Activa . . . . .	16
1.6.3.4. Eficiencia de Energía . . . . .	17
1.6.3.5. Terreno Natural . . . . .	17
1.6.3.6. Deslizamiento y Atascamiento . . . . .	18
1.6.3.7. Daño Ambiental . . . . .	18
1.6.3.8. Velocidad Constante . . . . .	19
1.6.3.9. Desventajas de los Robots de Movimiento Discreto . . . . .	19
1.7. Selección del Mecanismo . . . . .	19
1.8. Arquitectura de la Extremidad . . . . .	23



<b>2. Análisis Cinemático</b>	<b>25</b>
2.1. Análisis de Posición . . . . .	25
2.1.1. Solución del Ángulo $\theta_3$ . . . . .	36
2.1.2. Solución del Ángulo $\theta_{18}$ . . . . .	39
2.1.3. Solución del Ángulo $\theta_{21}$ . . . . .	41
2.1.4. Solución del Ángulo $\theta_7$ . . . . .	43
2.1.5. Solución del ángulo $\theta_{10}$ . . . . .	46
2.1.6. Solución del ángulo $\theta_{13}$ . . . . .	48
2.2. Análisis de Velocidad . . . . .	50
2.2.1. Velocidad Angular $\dot{\theta}_3$ . . . . .	50
2.2.2. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{18}$ . . . . .	52
2.2.3. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{21}$ . . . . .	53
2.2.4. Velocidad Angular $\dot{\theta}_7$ . . . . .	54
2.2.5. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{10}$ . . . . .	55
2.2.6. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{13}$ . . . . .	56
2.3. Análisis de Aceleración . . . . .	57
2.3.1. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_3$ . . . . .	57
2.3.2. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{18}$ . . . . .	59
2.3.3. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{21}$ . . . . .	60
2.3.4. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_7$ . . . . .	61
2.3.5. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{10}$ . . . . .	62
2.3.6. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{13}$ . . . . .	63
<b>3. Análisis Dinámico</b>	<b>65</b>
3.1. Análisis Dinámico de la Extremidad . . . . .	73
3.1.1. Análisis del Cuerpo 1 . . . . .	74
3.1.1.1. Velocidad y Aceleración Angular . . . . .	76
3.1.1.2. Aceleración del Centro de Gravedad . . . . .	76
3.1.2. Análisis del Cuerpo 2 . . . . .	78
3.1.2.1. Velocidad y Aceleración Angular . . . . .	80
3.1.2.2. Aceleración del Centro de Gravedad . . . . .	82
3.1.3. Análisis del Cuerpo 3 . . . . .	84
3.1.3.1. Velocidad y Aceleración Angular . . . . .	86
3.1.3.2. Aceleración del Centro de Gravedad . . . . .	88
3.1.4. Análisis del Cuerpo 4 . . . . .	90
3.1.4.1. Velocidad y Aceleración Angular . . . . .	92
3.1.4.2. Aceleración del Centro de Gravedad . . . . .	94
3.1.5. Análisis del Cuerpo 5 . . . . .	96
3.1.5.1. Velocidad y Aceleración Angular . . . . .	98
3.1.5.2. Aceleración del Centro de Gravedad . . . . .	100
3.1.6. Análisis del Cuerpo 6 . . . . .	102
3.1.6.1. Velocidad y Aceleración Angular . . . . .	104
3.1.6.2. Aceleración del Centro de Gravedad . . . . .	106

3.2. Solución a la Dinámica . . . . .	108
3.3. Propuesta de Material, Actuadores y Rodamientos . . . . .	120
<b>4. Conclusiones</b>	<b>123</b>
<b>A. Espacio de Trabajo</b>	<b>127</b>
<b>B. Trayectorias y Perfiles de Velocidad</b>	<b>133</b>
<b>C. Solución a la Ecuación Transcendental</b>	<b>143</b>
<b>D. Solución al Sistema Lineal Indeterminado</b>	<b>147</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>151</b>



# Resumen

El objetivo de este trabajo es desarrollar el análisis dinámico de la extremidad de un robot caminante. Esta extremidad consiste en un mecanismo de cadena cerrada de cinco barras, con seis juntas rotacionales y tres grados de libertad.

Para la determinación de la posición, velocidad y aceleración de los eslabones de la extremidad se emplea la cinemática inversa. Para llevar a cabo este análisis se definen los movimientos para la extremidad y el cuerpo, planteando trayectorias de seguimiento que producen que estos sean suaves y continuos.

El movimiento planteado para el robot consta de dos fases:

1. La extremidad se eleva, realiza el paso y se posiciona en el terreno, mientras el cuerpo se desplaza.
2. La extremidad se encuentra posicionada en el terreno y empuja al cuerpo hacia delante.

Para el desarrollo del análisis dinámico se implementa la formulación Newton-Euler, la cual incorpora todas las fuerzas y torques aplicados sobre los eslabones, por lo tanto, las ecuaciones dinámicas resultantes incluyen todas las fuerzas de restricción entre dos eslabones adyacentes. Esto es de gran importancia, ya que la solución de este análisis determinará la selección del material de los cuerpos, la selección de rodamientos que estarán en la juntas no actuadas y la selección de los motores que proporcionarán el movimiento del mecanismo.

Para el análisis dinámico se plantearon dos sistemas lineales, uno para cada una de las fases de movimiento. Para la primera fase se obtuvo un sistema indeterminado conformado de 36 ecuaciones con 33 incógnitas. Para la segunda fase, un sistema determinado de 36 ecuaciones con 36 incógnitas. La solución al sistema indeterminado se realizó por medio de la implementación del método de mínimos cuadrados. Finalmente, con la información obtenida del análisis dinámico, se realiza la propuesta de material, rodamientos y actuadores.



# Abstract

The goal of this project is the development of a dynamic analysis for the leg of a walking robot. This leg consists of a closed loop mechanism formed by five rigid links, with six rotational joints and three degrees of freedom.

Inverse kinematics is used to determine the position, velocity and acceleration of the links of the leg. In order to carry out this analysis, the movements for the leg and body of the robot are defined by raising tracking paths that provide a smooth and continuous motion.

The two motion conditions are:

1. The leg raises, performs the step and touches down the ground while the body of the robot moves forward.
2. The leg is positioned on the ground and pushes forward the body.

For the development of the dynamical analysis, the Newton-Euler formulation is introduced. This method incorporates all the forces and moments acting on the individual robot links. Thus, the dynamic equations obtained include the constraint forces acting between adjacent links. This is of fundamental importance, since the solution of the analysis will determine the selection of material for the bodies, the selection of the bearings that would act as rotational joints and the selection of the motors that power the mechanism.

In the dynamic analysis two linear systems of equations were obtained, one for each motion phase. The first one yields an undetermined system of 36 equations with 33 unknowns. And the second phase, a determined system of 36 equations with 36 unknowns. For the solution to the undetermined system, the method of least squares was implemented. Finally, with the gathered information from the dynamic analysis, the proposal of material, bearings and actuators is made.



# Capítulo 1

## Estado del Arte

### 1.1. Justificación

El uso de extremidades como mecanismo de locomoción ha permitido a los organismos biológicos tener acceso a la mayoría de las estructuras y terrenos existentes en el planeta. A pesar de que el hombre ha creado otros medios de locomoción muy eficientes como lo son las ruedas, su eficiencia depende casi por completo del terreno, ya que necesitan terrenos lisos y bien preparados. No obstante, en la naturaleza se encuentran terrenos generalmente irregulares, en los cuales las ruedas están muy lejos de proporcionar las capacidades y habilidades con las que cuentan los animales con extremidades en este tipo de entornos. Si bien los avances en robótica en los últimos años han sido muy grandes, la investigación sobre robots con extremidades es un campo aún reciente.

Por otra parte, la mayoría de los trabajos que existen hoy en día sobre robots con extremidades están relacionados al control, y es de comprenderse ya que es un problema muy complejo, sin embargo, se ha hecho a un lado la investigación sobre el diseño mecánico de las extremidades, en la que los trabajos al respecto son muy escasos. Por esta razón surge la necesidad de este trabajo por crear un análisis dinámico enfocado al diseño mecánico, utilizando el método de Newton-Euler, que permite encontrar los datos de fuerzas y torques presentes en las juntas, así como para determinar los torques requeridos para los actuadores, que son los motores que proveen de movimiento al mecanismo. Esta es información fundamental para un diseño óptimo de la extremidad y del robot en general.

Al contar con estos datos es posible disminuir la complejidad del control y la programación posterior, ya que se puede optimizar el movimiento de las extremidades y del robot, para que tenga un andar más suave y continuo, resultando en una mayor eficiencia.



## 1.2. Objetivo

Realizar el análisis cinemático y dinámico de la extremidad de un robot, con la finalidad de obtener la información necesaria para realizar la propuesta de material, actuadores y rodamientos para su diseño mecánico posterior.

## 1.3. Metodología

- Análisis Cinemático
  - Análisis de Posición
  - Análisis de Velocidad
  - Análisis de Aceleración
  
- Análisis Dinámico
  - Formulación Newton-Euler
  - Solución Dinámica
  - Propuesta de material, actuadores y rodamientos

## 1.4. Robots

En la actualidad los robots están teniendo un impacto considerable en diversos aspectos de la vida moderna, desde la manufactura, el transporte, sector de salud hasta exploración espacial, terrestre y marítima, sólo por mencionar algunas. En las últimas décadas, la robótica ha experimentado una gran transformación que ha sido posible gracias a los avances en las áreas de investigación en mecánica, eléctrica, electrónica, control, matemáticas y computación [1].

Muchas instituciones e investigadores se han dado a la tarea de crear una definición general de lo que es un robot, sin embargo, las definiciones que existen difieren mucho unas de otras. Esto puede ser atribuido al gran cantidad de desarrollos en el área de la robótica, por lo que es realmente difícil dar una definición adecuada que englobe todo la gama de robots existentes en la actualidad.

### 1.4.1. Clasificación de Robots

Hacer una clasificación de robots es una ardua tarea, en virtud de la intensa actividad desplegada en las áreas de investigación robótica, diseño robótico, innovación y aplicaciones [2]. Debido a esto, no existe una clasificación completamente aceptada, existen clasificaciones por tipo, aplicación, tamaño, función, movilidad y muchas otras más.

Una de las clasificaciones más usadas es de la Sociedad Japonesa de Robótica, sin embargo, a pesar del intento de englobar a la mayoría de robots, aún no es del todo integral. La clasificación es la siguiente [3]:

**Manipulador manual:** Dispositivo de manipulación que no contiene ningún programa, sino que es operado directamente por el usuario.

**Robot de Secuencia Fija:** Dispositivo de manipulación que opera de acuerdo a un patrón de movimiento constante. El cambio del movimiento es relativamente complejo.

**Robot de Secuencia Variable:** Dispositivo de manipulación que realiza lo mencionado para la secuencia fija, pero con la posibilidad de modificar el movimiento de manera rápida y sencilla.

**Robot de reproducción:** El movimiento de este dispositivo es realizado por un operador para después guardar la programación. Con esta información guardada el movimiento puede ser repetido.

**Robot de Control Numérico:** Este dispositivo de manipulación funciona de manera similar a un máquina CNC. El movimiento es introducido por medio de botones, interruptores o por dispositivos de almacenamiento de datos.

**Robot Inteligente:** Es la clase más alta, está pensada para los dispositivos equipados con diversos sensores y por lo tanto, capaces de operar adaptándose automáticamente a los cambios tanto de la pieza de trabajo como a los del entorno.

## 1.5. Robots Móviles

Hoy en día, la mayoría de los robots se encuentran en actividades industriales, especialmente robots manipuladores fijos. La mayoría de estos son robots paralelos o brazos robóticos y pueden encontrarse como simuladores de vuelo (Stewart 1965; Pislá et al. 2009), sistemas quirúrgicos como daVinci System (Intuitive Surgical Inc. 2000), asistencia a discapacitados (McCaffrey 2003), en rehabilitación (Harwin 2003), teleoperados en ambientes biológicos o radioactivos.

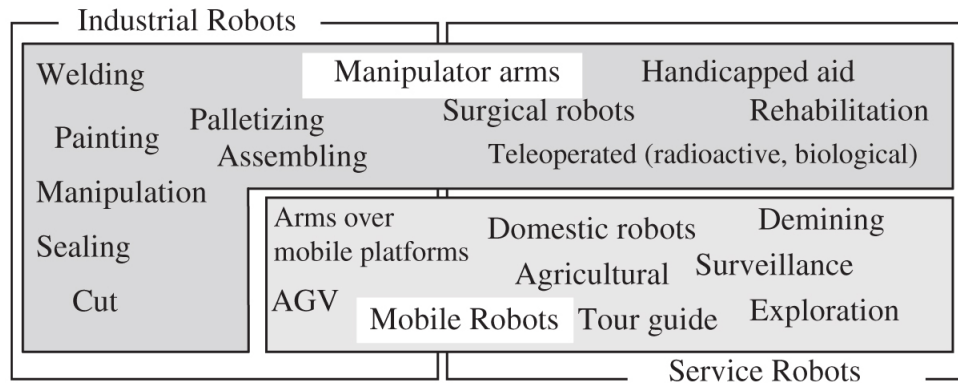
A pesar que la mayoría de los robots manipuladores son fijos, la posibilidad de agregarles movilidad se ha estudiado en los últimos años, los primeros trabajos en esta disciplina se realizaron en la universidad de Stanford y de la misma manera se han desarrollado proyectos en la universidad de Carnegie-Mellon (CMU), la universidad RWTH Aachen y en el centro aeroespacial alemán (DLR) [8]. Sin embargo, estos no han sido del todo introducidos en la industria. Cuando se comenzó a incorporar robots móviles en fábricas, se hicieron vehículos guiados automáticamente (AGV), que son esencialmente plataformas propulsadas por ruedas omnidireccionales, y son empleados para transporte de herramental y materiales a lo largo de trayectorias predefinidas [9].

Es claro que los robots móviles necesitan un mecanismo de locomoción que le permita moverse a través de su entorno. Pero existen diversos tipos de movimiento, por lo que la elección del tipo de locomoción es muy importante en el diseño de un robot móvil. En la actualidad existen estudios sobre robots que pueden caminar, brincar, correr, deslizarse, nadar, volar y rodar. La mayoría de estos sistemas de locomoción han sido inspirados en su equivalente biológico, la excepción es la rueda, ya que es una invención del ser humano.

La Federación Internacional de Robótica define a un robot de servicio como aquellos que no opera en manufactura. Estos usualmente incluyen capacidades de movilidad y por esta razón los robots móviles encuentran su mayor aplicación como robots de servicio [9]. Existen diversas configuraciones para los robots móviles, cada una adaptada para el entorno en el que deben operar.

En general hay robots aéreos (Howard y Kaminer 1995, Braun et al. 2004, Chao et al. 2007), robots acuáticos (Jalbert et al. 1995, Yuh 2000, Terada 2000, Rigaud et al. 2007, Bowen et al. 2004) y robots terrestres, dentro de los cuales existen robots saltadores (Raibert et al. 1984, Zeglin y Brown 1998, Arikawa 2002, Niiyama 2007), trepadores (Nagabuko y Hirose 1994, Cutkosky 2006, Fu et al. 2007), pero principalmente robots con ruedas, con bandas oruga y con extremidades.

La figura 1.1 muestra algunas aplicaciones de robots industriales y de servicio.

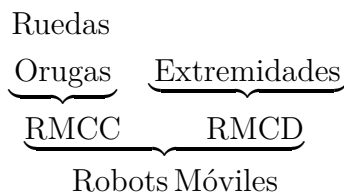


**Figura 1.1:** Distribución de Robots de acuerdo con su aplicación y movilidad [9]

### 1.5.1. Clasificación por Tipo de Contacto con el Suelo

Si se toma la consideración del tipo de contacto con el suelo que tienen los robots móviles, se pueden clasificar en dos categorías: Robots móviles de contacto continuo y Robots móviles de contacto discreto.

Los robots móviles de contacto continuo (RMCC) son aquellos que trazan trayectorias continuas a lo largo del terreno al desplazarse, en esta categoría se encuentran los robots con locomoción por medio de ruedas y bandas oruga. Por otra parte, los robots móviles de contacto discreto (RMCD) utilizan sólo puntos de contacto con el suelo, dentro de esta categoría se encuentran los robots con locomoción por medio de extremidades.



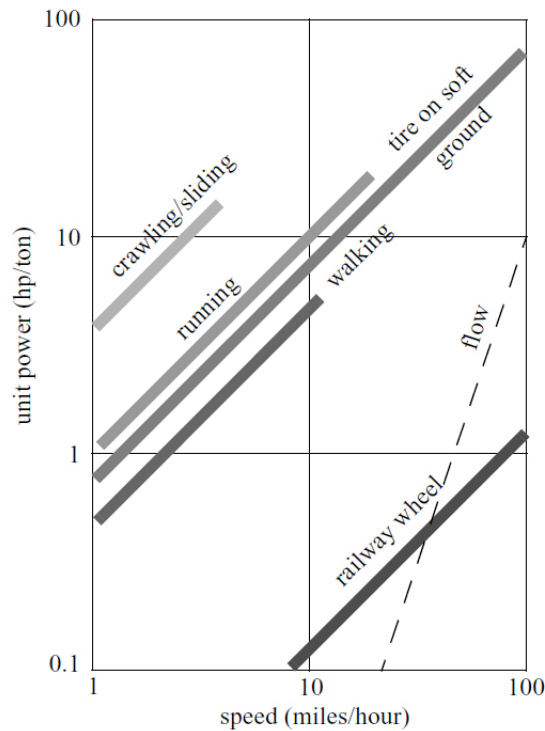
**Figura 1.2:** Clasificación por tipo de contacto con el suelo

### 1.5.2. Locomoción por Medio de Ruedas

La rueda ha sido por mucho el mecanismo de locomoción más popular en los robots móviles y en vehículos en general. Pueden alcanzar eficiencias muy buenas, como se demuestra en la figura 1.3, y lo hacen con una implementación mecánica relativamente simple [25].

Además, el balance no es un problema común en los diseños de robots con ruedas, ya que por lo regular estos son diseñados de tal manera que todas las ruedas tengan contacto con el suelo en todo momento. Por lo que tres ruedas son suficientes para garantizar equilibrio estable, aunque en algunos casos, dos ruedas pueden ser también estables [25]. Cuando se emplean más de tres ruedas, se requiere de un sistema de suspensión que permita a todas las ruedas mantener el contacto con el suelo en los casos que el robot encuentre terreno irregular. En lugar de preocuparse por el equilibrio, la investigación sobre robots con ruedas tiende a enfocarse en los problemas de tracción, estabilidad, maniobrabilidad, y control.

Debido a que la rueda es la locomoción más empleada en robots móviles, existen diversos campos en los que se les emplea, se pueden encontrar en aplicaciones como exploración planetaria, silvicultura, construcción, operación en ambientes peligrosos, minería, transporte, búsqueda y rescate, tareas domésticas, ayuda a personas con discapacidades, entre algunas otras.



**Figura 1.3:** Gráfica de Potencia-Velocidad de varios sistemas de locomoción [25]

### 1.5.3. Locomoción por Medio de Banda Oruga

Las bandas orugas han sido el medio de locomoción todo terreno más conocido, proveen a los robots con la habilidad de superar obstáculos de diversas geometrías y moverse en terrenos difíciles sin incrementar la complejidad en el control [9]. Fueron originalmente concebidos para propulsar tanques durante la primera guerra mundial y después se emplearon en varios campos. Hoy en día se han convertido en piezas esenciales para la mayoría de la maquinaria pesada utilizada en la ingeniería civil. Sus aplicaciones en la robótica son en su mayoría, para uso militar, entornos peligrosos (Trevelyan et al. 2008; Zhao et al. 2008; Welch and Edmonds 1993), exploración en lugares inaccesibles, y sillas/plataformas para discapacitados (Lawn et al. 2001; Hirose et al. 1992).

Los robots con bandas oruga son vehículos que permiten giros con un radio de curvatura pequeño, sin embargo, el deslizamiento sobre el suelo es necesario para girar. Por otra parte, para superar obstáculos, se requieren coeficientes de fricción muy altos entre la banda y el suelo. por lo que las bandas se desgastan rápido y deben ser reemplazadas frecuentemente [30]. Otras desventajas son la baja velocidad en comparación con los vehículos con ruedas y el deterioro de la superficie al moverse en ambientes urbanos y domésticos.

En el caso del transporte de personas, el confort se ve muy reducido debido a la falta de amortiguadores. Adicionalmente, la estabilidad de los robots con bandas de oruga se pierde en ocasiones al superar obstáculos ocasionando fuertes sacudidas.

### 1.5.4. Locomoción por Medio de Extremidades

La locomoción por medio de extremidades tiene ciertas características que no comparte con otros tipos de locomoción. A diferencia de los robots con ruedas, estos deben ser capaces de superar obstáculos y tener un gran desempeño al moverse a través de terrenos suaves y duros. Otras características son las capacidades de moverse en diversas direcciones sin afectar la orientación del cuerpo, y cambiar la orientación de este sin despegar las extremidades del suelo. Si los RMCD pudiesen alcanzar por completo todas estas características, podrían reemplazar humanos en distintos trabajos peligrosos, sin embargo, hoy en día existen pocos robots que sean prácticos para este tipo de trabajos. La razón principal es la complejidad mecánica, especialmente por el bajo desempeño de actuadores, como los motores eléctricos [31].

Para los RMCC, dos actuadores son suficientes, uno para su locomoción y el otro para la dirección. Por otro lado, para los RMCD, regularmente dos o tres actuadores están instalados en una extremidad, no obstante, para realizar el movimiento se necesitan dos o más extremidades, por esto los RMCD tienen más actuadores que los RMCC. Ya que los RMCD cuentan con varios de estos, tienden a no ser prácticos, ya que con dificultad soportan su propio peso mientras que consumen demasiada energía. Por tal razón, el mecanismo de la extremidad es de vital importancia para desarrollar un robot de desplazamiento discreto

lo más práctico posible. Debido a que el presente trabajo está dedicado al análisis de una extremidad, en la sección 1.6 se profundizará en el tema.

### 1.5.5. Robots Híbridos

Los robots híbridos son sistemas que combinan los diversos sistemas de locomoción, con la finalidad de aprovechar las ventajas que cada uno de ellos ofrece. En la tabla 1.1 se presentan algunos de los robots híbridos que se han desarrollado.

Locomoción	Robot	Investigadores	Año	País
Rueda/ Extremidad	RoboTrac	Schweitzer y Werder	1991	Suiza
	Chariot II	Dai et al.	1996	Japón
	Walk'n Roll	Adachi et al.	1999	Japón
	Roller-Walker	Endo y Hirose	2000	Japón
	Shrimp	Estier et al.	2000	Suiza
	Hydrobug	Cubero	2000	Australia
	Wheeleg	Guccione y Muscato	2003	Italia
	ALDURO	Germann et al.	2003	Alemania
	HyLoS-II	Grand et al.	2004	Francia
	Athlete	NASA/JPL	2007	EUA
Rueda/ Banda Oruga	Helios VI	Hirose et al.	2001	Japón
	Elbit VIPeR	GMI	2006	EUA
Extremidad/ Banda Oruga	Helios VII	Guarnieri et al.	2005	Japón
	COMET III	Nonami et al.	2003	Japón
	TITAN X	Hodoshima et al.	2005	Japón

**Tabla 1.1:** Robots Híbridos

## 1.6. Robots con Extremidades

Caminar es una fascinante invención de la naturaleza, es versátil, flexible, perfectamente adaptable al entorno y en sus diversas facetas, permite a sistemas biológicos tener acceso a todas las estructuras naturales del planeta. Es de comprender que por esta razón en la naturaleza se han desarrollado extremidades, debido a que los organismos en la naturaleza deben operar en terrenos irregulares [47].

El caminar ha sido estudiado por ingenieros alrededor de 30 años, aunque antes ya se habían intentado realizar mecanismos con la capacidad de caminar. Actualmente los avances en la computación y en una gran variedad de tecnologías le dan una alta probabilidad de éxito a los RMCD. La mayoría de las RMCD toman como ejemplo algunos sistemas biológicos, con dos, cuatro o seis extremidades. Esto tiene sentido ya que la evolución natural ha creado una gran variedad de soluciones excelentes. También por muchas razones, no tiene sentido copiar sistemas biológicos al detalle, la evolución tuvo que encontrar soluciones dentro del marco de sus posibilidades: sin ruedas, músculos en lugar de motores rotativos, nervios y sinapsis en lugar de cables y sensores [47].

En general, la locomoción por medio de extremidades requiere más grados de libertad, por lo tanto, tiene una mayor complejidad mecánica que la locomoción por ruedas. En la figura 1.3 se muestra como es que las ruedas son de dos a tres veces más eficientes que las extremidades en terreno plano y duro, sin embargo, si la superficie se vuelve suave, las ruedas acumulan ineficiencias debido a la fricción por rodamiento, mientras que las extremidades no sufren de tal problema dado que su movimiento consiste en puntos de contacto en el suelo. Se puede apreciar que la locomoción por medio de ruedas depende en gran parte de las cualidades del terreno, particularmente en la dureza y lo plano del piso, mientras que la eficiencia de las extremidades depende de su masa y la del cuerpo, ya que el robot debe soportarlos durante su movimiento.

Los RMCD están aún lejos de lo que se espera de ellos, esto es particularmente a que el desempeño del robot depende en varios factores, incluyendo el diseño mecánico, el cual algunas veces no puede ser modificado por el diseñador del control [49].

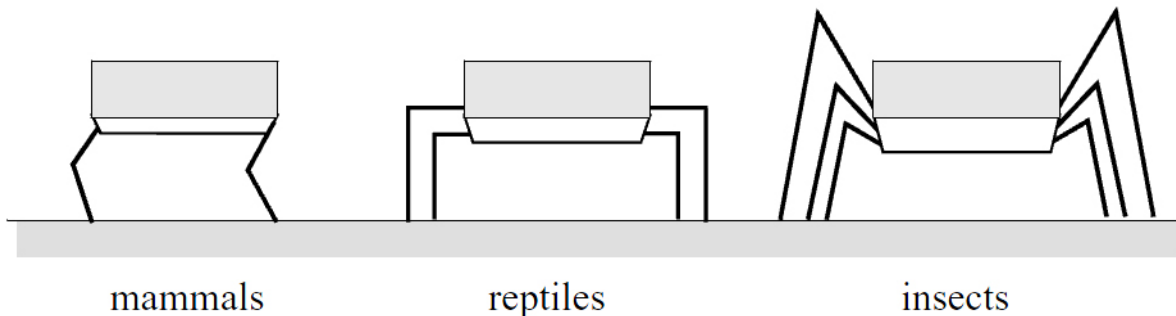
Por lo que se puede ver que es de vital importancia el trabajo en conjunto de especialistas en las distintas ramas que incluye la robótica para poder obtener el diseño más óptimo posible.



### 1.6.1. Configuración y Tipos de Robots con Extremidades

Hasta el momento, la pregunta sobre cuál es el número óptimo de piernas para ciertos tipos de caminar es, incluso para los biólogos, algo incierto [50]. Las diferencias en el número de extremidades depende probablemente en la importancia del tipo de condiciones ambientales, como caminar bajo el agua, correr a gran velocidad, generar gran potencia para excavar en la tierra o mantener una gran estabilidad para escalar. Estudios realizados (Fischer y Witte 2006) muestran como es que las extremidades surgieron en la naturaleza en las fases más recientes de la evolución. Los detalles son aún desconocidos, lo que sí se sabe, es que la evolución ha optimizado de manera excelente estos tipos de resultados biológicos.

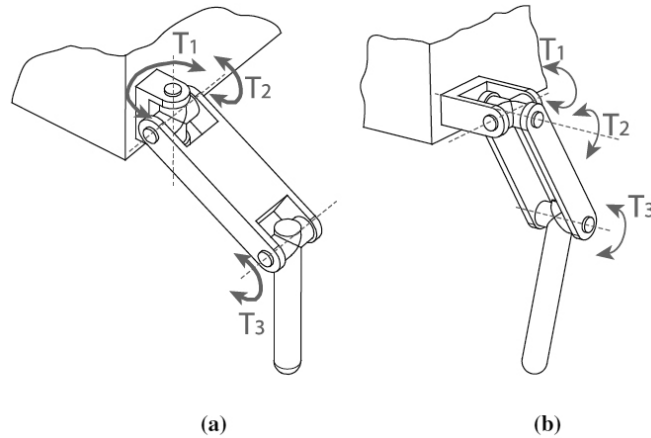
Los robots con extremidades son inspirados en la naturaleza, es útil examinar sistemas biológicos exitosos con este tipo de locomoción. Un número de diferentes configuraciones se presentan en varios organismos (Figura 1.4). Animales grandes, como los mamíferos y reptiles cuentan con cuatro extremidades, mientras que los insectos cuentan con seis o más piernas. En el caso de algunos mamíferos la habilidad de caminar en dos piernas ha sido perfeccionada.



**Figura 1.4:** Arreglos de extremidades en varios animales [25]

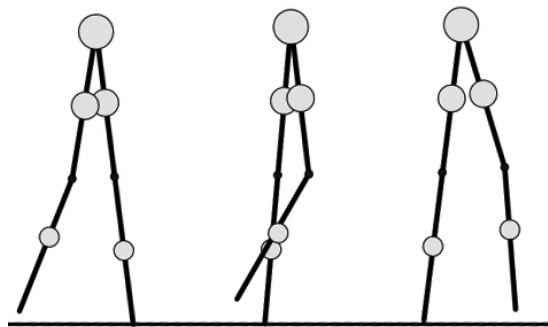
Con respecto a las configuraciones de extremidades en robots, hay principalmente tres tipos de investigación: extremidad articulada, extremidad pasiva-dinámica y extremidad desacoplada [9].

**Extremidad articulada:** La mayoría de las extremidades actuales usan diseños que son hechos de cadena de eslabones de acuerdo con lo mostrado en la figura 1.5. Las extremidades articuladas tienen problemas relacionados con el tamaño de los actuadores. Debido a la estructura acoplada, durante el posicionamiento, traslado, ascenso o descenso de la extremidad, el robot debe accionar todos los actuadores.



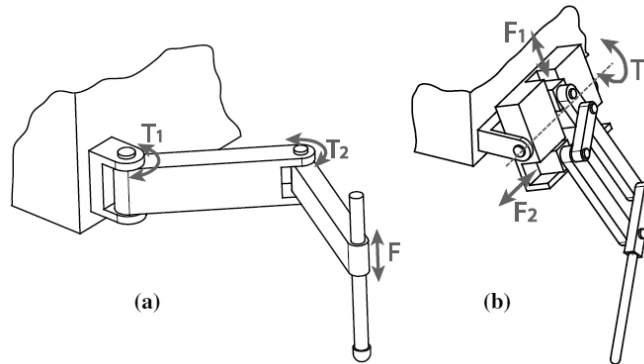
**Figura 1.5:** Extremidades Articuladas: a) Insecto, b) Mamífero [9]

**Extremidad Pasiva-Dinámica:** El caminar es un movimiento repetitivo en el cual cada eslabón de la extremidad acelera, desacelera y se detiene a cada paso, esto puede llevar a pérdidas de energía y a una disminución de la eficiencia. Existen algunos ejemplos de extremidades con una gran eficiencia, la mayoría de ellos están basados en el concepto del caminar pasivo-dinámico, en el cual emplean péndulos invertidos acoplados que se balancean y debido a la inercia son capaces moverse en superficies planas (McGeer 1990).



**Figura 1.6:** Extremidad pasiva-dinámica [53]

**Extremidad Desacoplada:** Dado que los movimientos horizontal y vertical tienen diferentes características en términos de torque y velocidad, para este tipo de extremidad, se desacoplan ambos movimientos y emplean distintos tipos de actuadores para cada uno, lo que en algunos casos lleva a obtener mejores eficiencias.



**Figura 1.7:** Ejemplos de extremidades desacopladas: a) Scara, b) Pantógrafo [9]

En la tabla 1.2 se presentan los robots con extremidades más representativos, así como los proyectos más recientemente desarrollados.

Robot	Nº de Extremidades	Investigador	Año	País
3D Hopper	1	Raibert	1983	EUA
Bow Leg	1	Brown y Zeglin	1998	EUA
Jumping Robot	1	Arikawa y Mita	2002	Japón
Johnnie	2	Pfeiffer et al.	1995	Alemania
ASIMO	2	Honda	2000	Japón
Flamingo	2	Pratt	2003	EUA
WABIAN-2R	2	Takanishi Lab.	2006	Japón
PV-II	4	Hirose y Umetani	1980	Japón
TITAN III - XI	4	Hirose et al.	85-05	Japón

continúa

Robot	N° de Extremidades	Investigador	Año	País
Dante II	4	Bares y Wettergreen	1994	EUA
BISAM	4	Berns et al.	1999	Alemania
SILO4	4	G. de Santos	2003	España
KOLT	4	Nichol et al.	2006	EUA
Kamambaré	4	Bernardi y Da Cruz	2007	Brazil
BigDog	4	Raibert et al.	2008	EUA
Gorilla	4	Sawada et al.	2008	Japón
ASV	6	Waldron	1986	EUA
Max	6	Pfeiffer et al.	1995	Alemania
Harvester	6	Plustech	1997	Finlandia
RHex	6	Altendorfer et al.	2001	EUA
DLR-Crawler	6	Görner et al.	2008	Alemania
Lauron IVc	6	Ziegenmeyer et al.	2009	Alemania
Robug III	8	Luk et al	1996	Inglaterra
Moritz	8	Pfeiffer et al.	1998	Alemania
Scorpion	8	Spenneberg et al.	2002	Alemania
Lobster	8	Ayers et al.	2007	EUA

**Tabla 1.2:** Robots con Extremidades

### 1.6.2. Aplicaciones de Robots con Extremidades

Existen diversas aplicaciones en las que los RMCD pueden ser utilizados, en algunas de estas ya se han implementado, otras son aplicaciones potenciales que se espera que desempeñen en el futuro.

Varios investigadores han detallado las diferentes aplicaciones para los RMCD [61] [75] [76] [77], algunos creen que existen más de lo que otros consideran, pero en general coinciden en varias de ellas, estas aplicaciones podrían resumirse en las siguientes:

- Teleoperación en entornos nocivos
- Exploración terrestre, marina y espacial
- Construcción
- Agricultura y Silvicultura
- Minería
- Rehabilitación, prótesis y usos médicos
- Búsqueda y rescate
- Tareas domésticas
- Transporte
- Apoyo a tecnologías de inteligencia artificial
- Estudio de locomoción y organismos biológicos
- Educación, arte y entretenimiento

### 1.6.3. Ventajas de los Robots de Movimiento Discreto

Dependiendo de la aplicación requerida, cada uno de los sistemas de locomoción ofrecen un desempeño distinto, con la finalidad de identificar estas diferencias, algunos investigadores han previsto las ventajas potenciales de los RMCD sobre los RMCC para sus diversos usos [61]. Esto será discutido a continuación.

#### 1.6.3.1. Movilidad

Los robots de movimiento discreto exhiben una mejor movilidad que los robots de movimiento continuo, debido a que esencialmente son sistemas omnidireccionales. Esto es, porque puede cambiar de dirección independientemente de la orientación del eje del cuerpo principal, simplemente cambiando los puntos de apoyo. Por otro lado, un robot de movimiento continuo tiene que realizar diversas maniobras para cambiar de dirección. Del mismo modo, un RMCD es capaz de mover y orientar su cuerpo mientras mantiene su posición sólo al cambiar la extensión de sus extremidades.

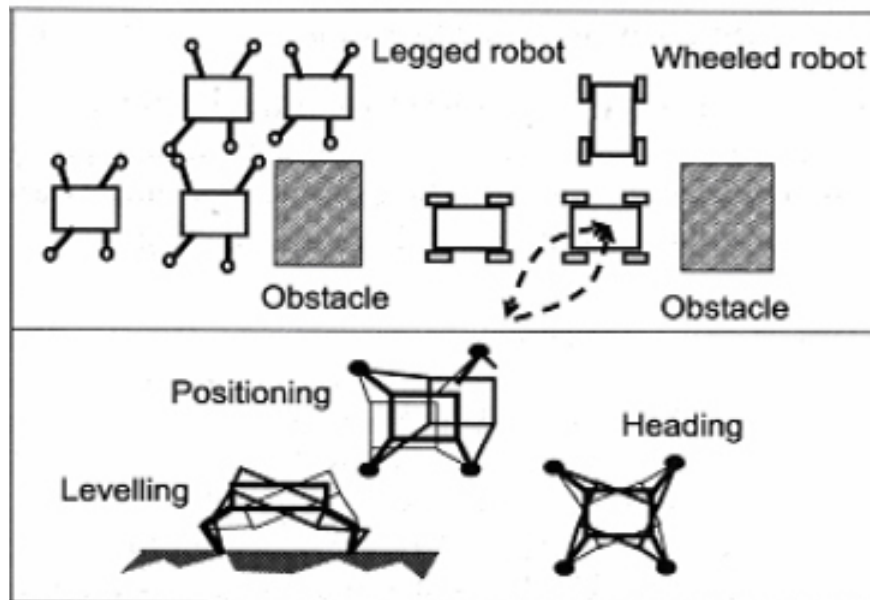
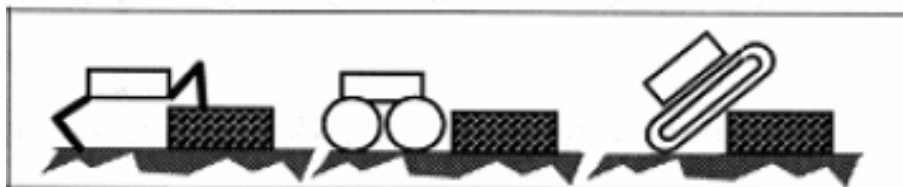


Figura 1.8: Movilidad [61]

### 1.6.3.2. Superación de Obstáculos

Un RMCD puede superar obstáculos que están por encima de su máxima altura, simplemente al posicionar sus extremidades sobre el obstáculo. Por otra parte, un RMCC sólo puede librar obstáculos con alturas menores a la mitad del radio de su rueda (McKerrow, 1991). Las bandas oruga consisten de una rueda virtual de radio de la mitad de la banda, así que este tipo de robots puede superar obstáculos más altos que un robot con ruedas, pero realizando mayores movimientos del cuerpo.



**Figura 1.9:** Superación de obstáculos [61]

### 1.6.3.3. Suspensión Activa

Un RMCD provee una suspensión activa al adaptar la extensión de sus extremidades a las irregularidades del terreno. De esta manera, un RMCD puede recorrer terrenos irregulares manteniendo el cuerpo nivelado y proporcionando un movimiento suave y cómodo. En contraste, el cuerpo de un RMCC se mantiene paralelo al terreno y adopta inclinaciones similares al mismo.



**Figura 1.10:** Suspensión Activa [61]

### 1.6.3.4. Eficiencia de Energía

Hutchinson sugirió en 1940 que la eficiencia de RMCD pesados podría ser mejor que la de RMCC. Posteriormente Bekker probó a través de experimentos que Hutchinson tenía razón. La tabla 1.3 muestra los datos obtenidos por Bekker en el estudio comparativo de vehículos y animales.

	Velocidad promedio en terreno irregular (km/h)	Potencia requerida para moverse sobre una tira plástica de 25 cm de ancho (HP/ton)
Vehículos con bandas oruga	8-16	10
Vehículos con ruedas	5-8	15
Animales	> 50	7

**Tabla 1.3:** Estudio de Bekker sobre vehículos y animales [79]

### 1.6.3.5. Terreno Natural

Los RMCC requieren superficies pavimentadas muy costosas para moverse eficientemente. En principio, los RMCD no requieren de terreno preparado, además pueden moverse en terrenos arenosos, lodosos, duros y suaves con eficiencia similar. Otra ventaja de los RMCD es que no necesitan de terrenos continuos para desplazarse.



**Figura 1.11:** Terreno Natural [61]



### 1.6.3.6. Deslizamiento y Atascamiento

Las ruedas tienden a hundirse en terrenos suaves, lo cual hace difícil su movimiento. Sin embargo, si una extremidad se posiciona verticalmente sobre el suelo, esta lo compacta en la misma dirección. De igual manera, la extremidad se eleva verticalmente sin interferencia del suelo. Cuando el cuerpo es impulsado, las extremidades rotan sobre sus juntas, por lo que, no interactúan con el suelo, lo cual no provoca problemas de atascamiento y tampoco problemas de deslizamiento.



Figura 1.12: Deslizamiento y Atascamiento [61]

### 1.6.3.7. Daño Ambiental

Los RMCD requieren puntos de contacto con el suelo, mientras que los RMCC utilizan un par de trayectorias continuas a lo largo del terreno. Por lo tanto, los RMCD tienen menor contacto con el suelo que los RMCC, por esta razón causan un menor daño al ambiente.



Figura 1.13: Daño Ambiental [61]

### 1.6.3.8. Velocidad Constante

Vehículos tradicionales pueden moverse a altas velocidades en terrenos preparados. Sin embargo, cuando el terreno es irregular, la velocidad de vehículo desciende rápidamente. Los RMCD son capaces de adaptarse muy bien a las irregularidades del suelo, y también son capaces de mantener una velocidad promedio similar en diversos tipos de terreno.

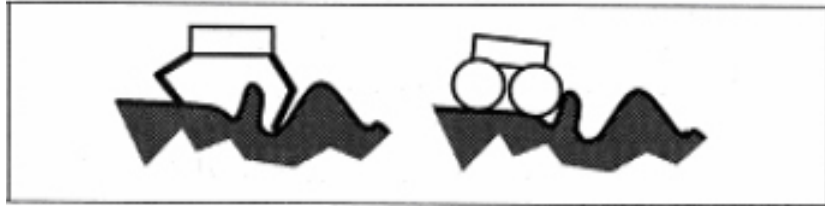


Figura 1.14: Velocidad Constante [61]

### 1.6.3.9. Desventajas de los Robots de Movimiento Discreto

Es claro que los RMCD no son la solución general para locomoción, también tienen problemas y desventajas. El primer problema es su complejidad, no sólo en términos mecánicos, sino también de electrónica y de control. Los RMCD requieren más sistemas electrónicos, dado a que ocupan más sensores. El control también es más complejo, ya que deben de coordinar el movimiento de actuadores, al igual que los sensores para proporcionar un movimiento estable. Otro problema es la velocidad, ya que son más lentos en comparación con los RMCC.

## 1.7. Selección del Mecanismo

Ya se ha descrito la importancia que tiene la selección del mecanismo de la extremidad en los RMCD, por tal razón para este proceso se tomaron algunas propuestas y posteriormente se realizó un análisis para poder determinar la opción más adecuada según criterios y características deseadas en el mecanismo final. En la figura 1.15 se pueden apreciar los cuatro mecanismos evaluados, los que se denominarán de la siguiente manera:

- a) Mecanismo de cadena abierta
- b) Mecanismo de seis barras
- c) Mecanismo de cinco barras
- d) Mecanismo de brazo de excavadora

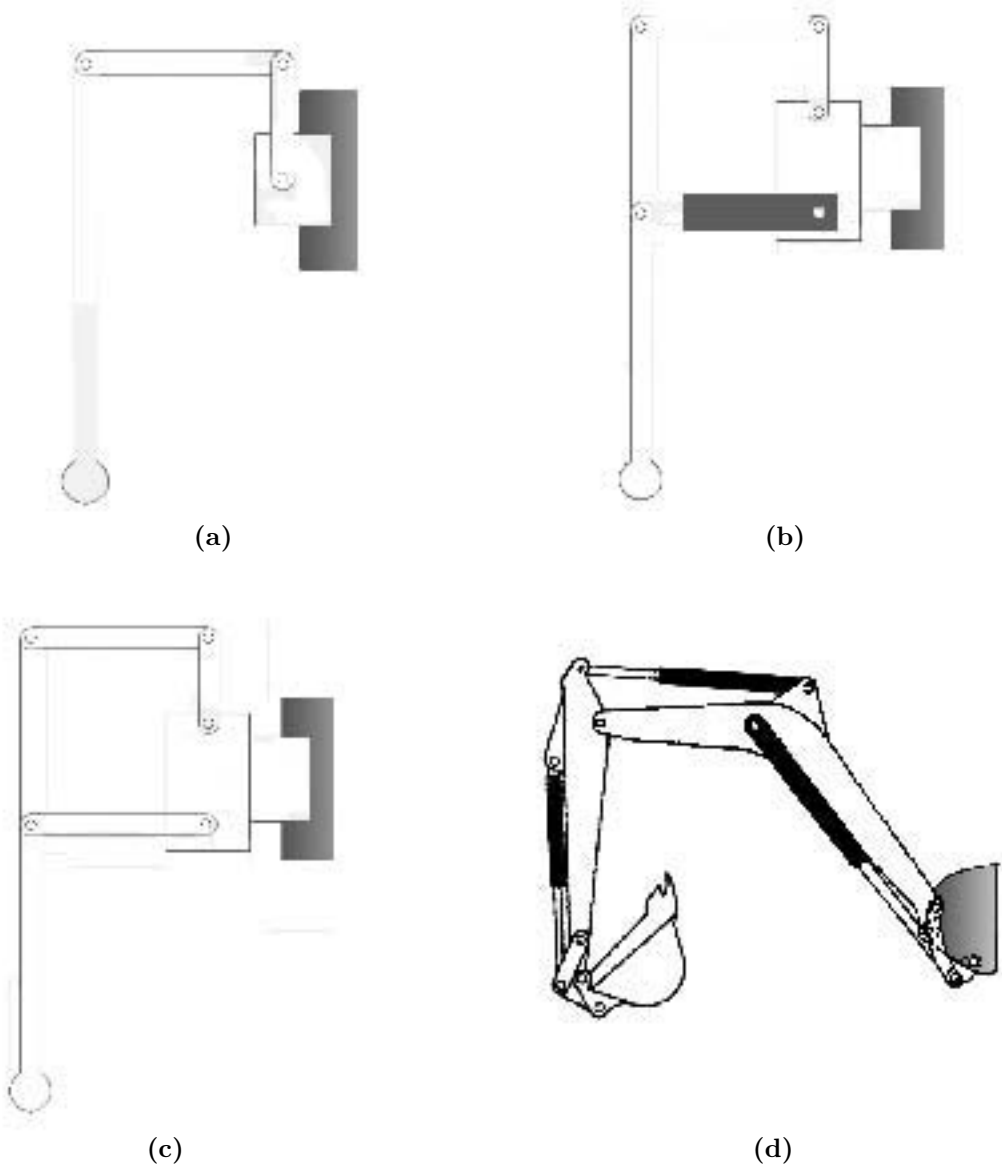


Figura 1.15: Propuestas para la extremidad

En la tabla 1.4 se muestra el número y tipo de juntas, así como el número de grados de libertad (GDL) del mecanismo.

Mecanismo	GDL	Juntas
a	4	4R
b	4	3R,1P
c	3	6R
d	3	14R, 3P

**Tabla 1.4:** Características de los mecanismos propuestos

Para seleccionar el mecanismo de la extremidad, se realizó una matriz de decisión [80] en las que se evaluaron todas las propuestas según los siguientes criterios:

**Peso:** Se toma en cuenta el posible peso de la extremidad, en función del diseño, piezas, actuadores y su posicionamiento.

**Espacio de Trabajo :** Considera el alcance que tiene el mecanismo, entre mayor sea el espacio de trabajo mayores serán las posiciones que podrá adoptar.

**Control:** Se considera los tipos de actuador con el que cuenta el mecanismo, fuente de energía, precisión, la complejidad de implementación y de control.

**Potencia requerida:** Se toman en cuenta la cantidad y tipo de actuadores, el peso y tipo de energía necesaria.

**Capacidad de carga:** Se analiza la carga que puede soportar el mecanismo, tomando a consideración el peso mismo de la extremidad, cantidad y tipo de actuadores y energía empleada.

**Diseño mecánico:** Se examina la complejidad mecánica de la propuesta, como la cantidad y tipo de piezas, ensambles y complejidad de manufactura.

**Costo:** Se determina la viabilidad de la propuesta según su costo estimado, tomando en cuenta posibles materiales, número de piezas, manufactura, actuadores y fuente de energía.

La tabla 1.5 muestra la matriz de decisión en donde las propuestas se calificaron según la escala de puntuación siguiente:

[ \*\*\*\* Muy buena, \*\*\* Buena, \*\* Regular, \* Mala ]

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>
Peso	**	***	****	*
Espacio de trabajo	****	***	***	***
Control	***	**	****	**
Potencia requerida	***	**	****	*
Capacidad de carga	**	***	**	****
Diseño mecánico	****	**	***	**
Costo	**	***	****	*
Total	20	18	24	14

**Tabla 1.5:** Matriz de decisión

Como se puede observar de la tabla 1.5, el puntaje más alto lo obtuvo la propuesta c, el mecanismo de cinco barras; por lo que este es el mecanismo seleccionado para la extremidad del robot. Este mecanismo tiene sólo actuadores rotacionales que cuentan con un buen control y precisión, además de que todos están posicionados en el eslabón que está directamente conectado al cuerpo, por esta razón hace que la extremidad sea más ligera, ya que el peso de los actuadores no está distribuido a lo largo en la extremidad, sino localizado en el cuerpo, reduciendo de esta manera también la potencia necesaria de los propios actuadores y de igual manera su costo.

## 1.8. Arquitectura de la Extremidad

Una vez seleccionado el mecanismo, se realizó un estudio más a fondo sobre el espacio de trabajo con el que esta extremidad cuenta, la finalidad de hacer este análisis fue la de realizar cambios en las longitudes de los diversos eslabones para poder obtener el mayor espacio de trabajo posible en este mecanismo. Este análisis se muestra en el apéndice A.

De este modo, se obtuvo el mecanismo mostrado en la figura 1.16, mecanismo de cinco barras que cuenta con seis juntas rotacionales y una esférica. Las tres juntas actuadas se encuentran en el eslabón 1, el cual va unido al cuerpo del robot. El elemento añadido al final del eslabón 4 es propuesto, ya que esta parte será la que esté en contacto con el suelo y el proveerlo de este elemento con una junta esférica le permite una mayor adaptabilidad y posicionamiento en terrenos irregulares.

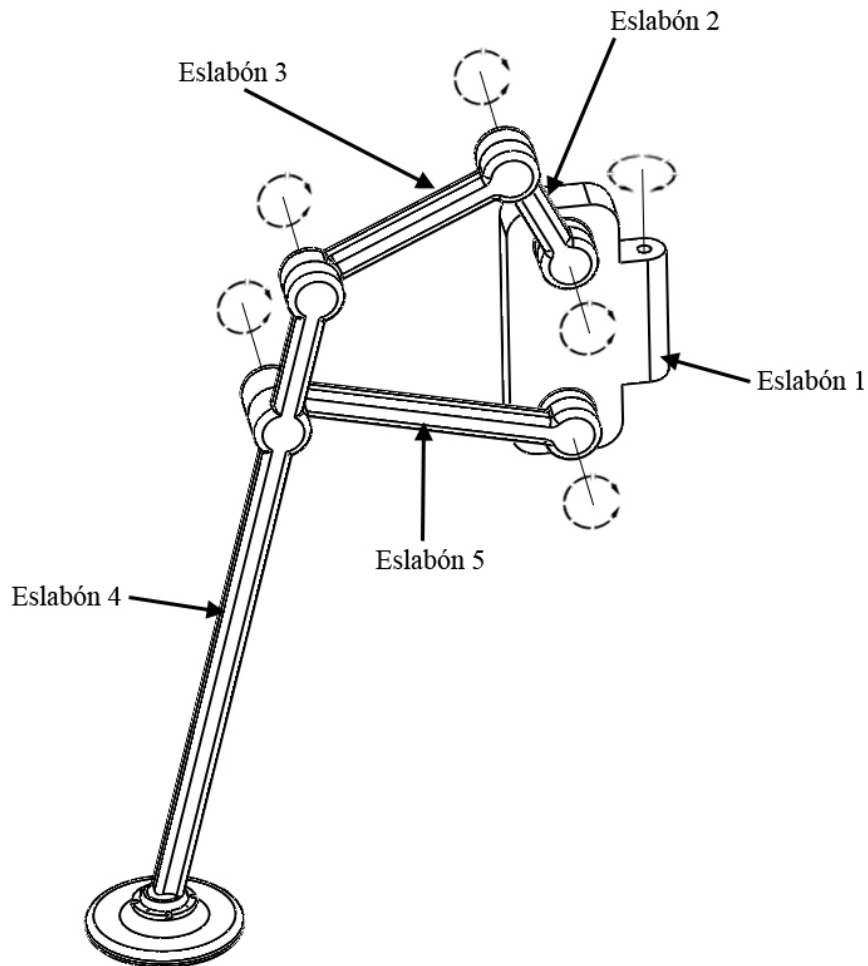


Figura 1.16: Arquitectura de la extremidad



# Capítulo 2

## Análisis Cinemático

La cinemática analiza los aspectos de movimiento sin considerar los efectos externos, fuerzas y/o torques que ocasiona este movimiento. Dentro de este análisis se estudian la posición, la velocidad, la aceleración y todas las demás derivadas de alto orden de las variables de posición [81]. Aplicado a sistemas multicuerpo, la cinemática describe las posiciones lineales y angulares de todos los cuerpos dentro del sistema y provee métodos para calcular sus velocidades y aceleraciones. También toma en cuenta las direcciones del movimiento, ya sea con o sin restricciones, lo cual ocurre cuando los cuerpos están unidos por ciertas juntas [82].

La cinemática de sistemas multicuerpo requiere definiciones precisas y únicas de los sistemas de referencia y de las transformaciones entre ellas [83] [84]. Para esto se emplearán dos tipos de sistemas de referencia cartesianos: sistemas de referencia fijos o marcos inerciales y sistemas de referencia relativos o marcos locales.

### 2.1. Análisis de Posición

Para la determinación de la posición y orientación de los eslabones de la extremidad, se emplea el análisis de la cinemática inversa, en el cual:

Dada la posición del cuerpo  $(X_c, Y_c, Z_c)$  y de la extremidad  $(x_e, y_e, z_e)$ , se determina el valor de los ángulos correspondientes a las articulaciones de cada uno de los eslabones.

Para hacer el análisis de posición de la extremidad se utilizan transformaciones homogéneas, las cuales combinan vectores de posición y matrices de rotación en una notación más compacta.



Las transformaciones homogéneas se definen como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde:

$\mathbf{R}$  =Matriz de rotación

$\mathbf{d}$  =Vector de desplazamiento

Las transformaciones homogéneas para una translación sobre los ejes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  son:

$$\mathbf{T}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{T}_2(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{T}_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2c)$$

Las transformaciones homogéneas para una rotación  $\theta$  sobre los ejes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  son:

$$\mathbf{T}_4(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{T}_5(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{T}_6(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3c)$$

En la figura 2.1 se muestra los sistemas de referencia  $(x_0, y_0, z_0)$  y  $(x_1, y_1, z_1)$ , siendo el primero la base inercial para cada una de las cadenas cinemáticas con las que cuenta el robot, y el segundo, la base local para el cuerpo del robot. Aplicando transformaciones homogéneas se tiene que:

$$\mathbf{T}_{0,1} = \mathbf{T}_1(X_c) \mathbf{T}_2(Y_c) \mathbf{T}_3(Z_c) \quad (2.4)$$

Donde  $\mathbf{T}_{0,1}$  representa la matriz de transformación para desplazarse desde el sistema inercial  $(x_0, y_0, z_0)$  hasta el local  $(x_1, y_1, z_1)$ .

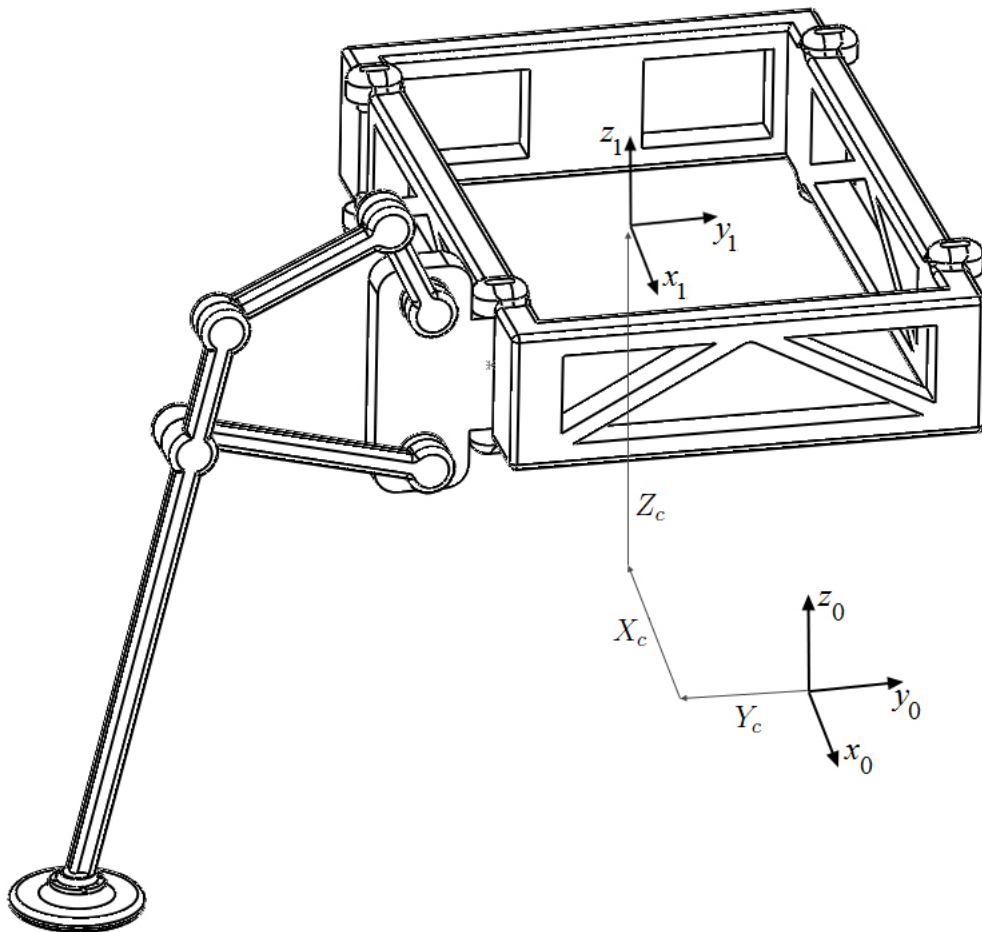
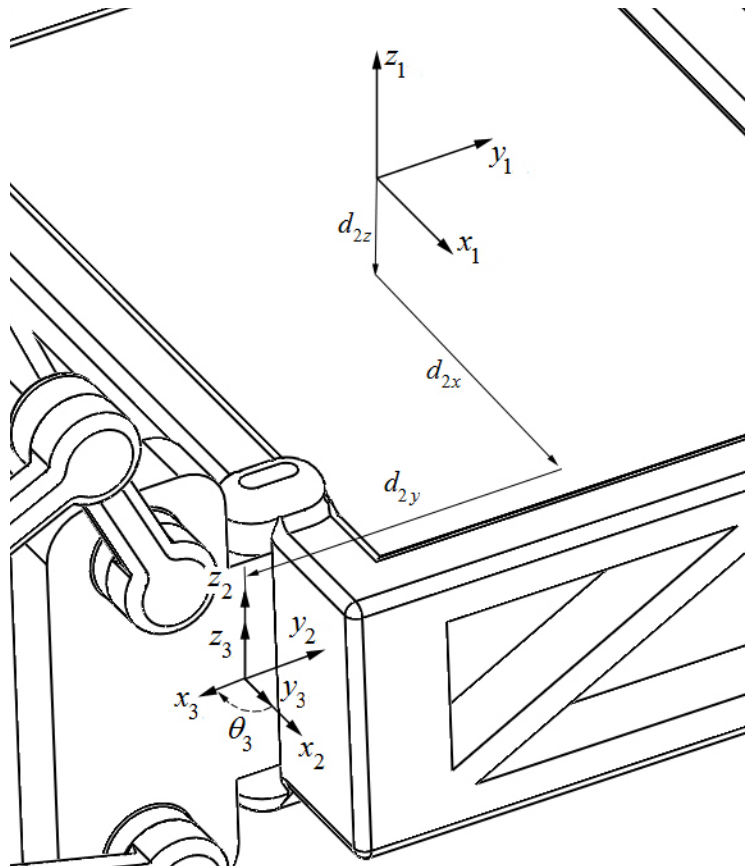


Figura 2.1: Sistema de Referencia Inercial

En la figura 2.2 se observan las transformaciones requeridas para llegar al sistema de referencia  $(x_3, y_3, z_3)$  partiendo desde el sistema  $(x_1, y_1, z_1)$ . Lo cual se expresa:

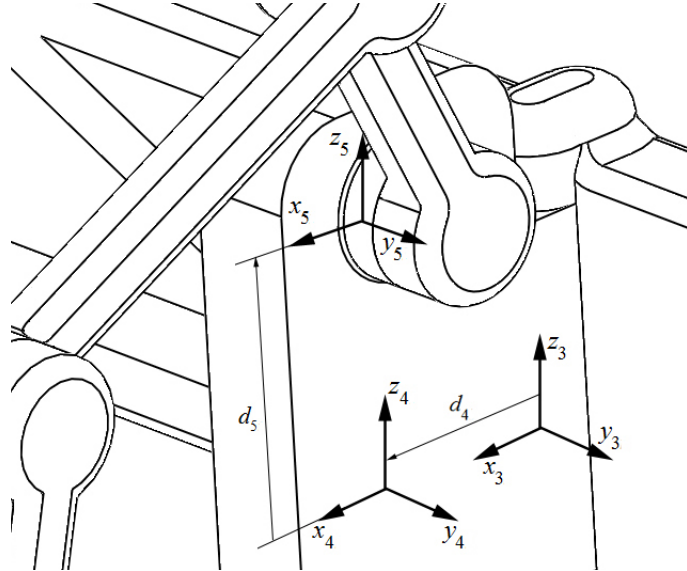
$$\mathbf{T}_{1,3} = \mathbf{T}_1(d_{2x}) \mathbf{T}_2(-d_{2y}) \mathbf{T}_3(-d_{2z}) \mathbf{T}_6(-\theta_3) \quad (2.5)$$



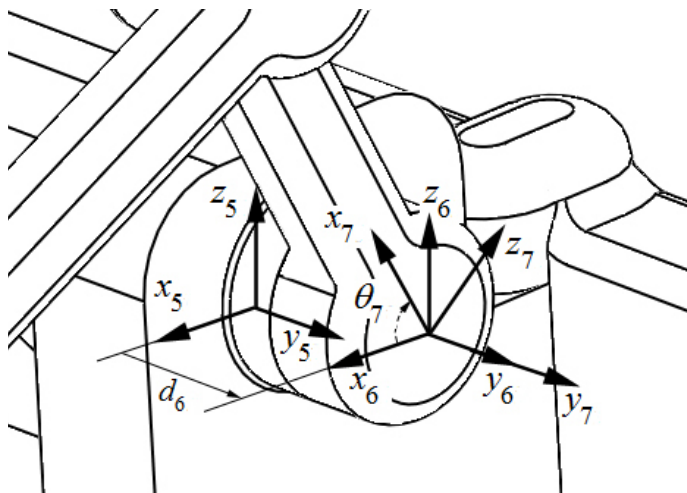
**Figura 2.2:** Sistemas de Referencia Locales 1, 2 y 3

En las figuras 2.3 y 2.4 se pueden observar las transformaciones requeridas para llegar del sistema  $(x_3, y_3, z_3)$  al sistema  $(x_5, y_5, z_5)$ , y del sistema  $(x_5, y_5, z_5)$  al sistema  $(x_7, y_7, z_7)$  respectivamente. La matriz de transformación correspondiente es:

$$\mathbf{T}_{3,7} = \mathbf{T}_1(d_4) \mathbf{T}_3(d_5) \mathbf{T}_2(d_6) \mathbf{T}_5(-\theta_7) \quad (2.6)$$



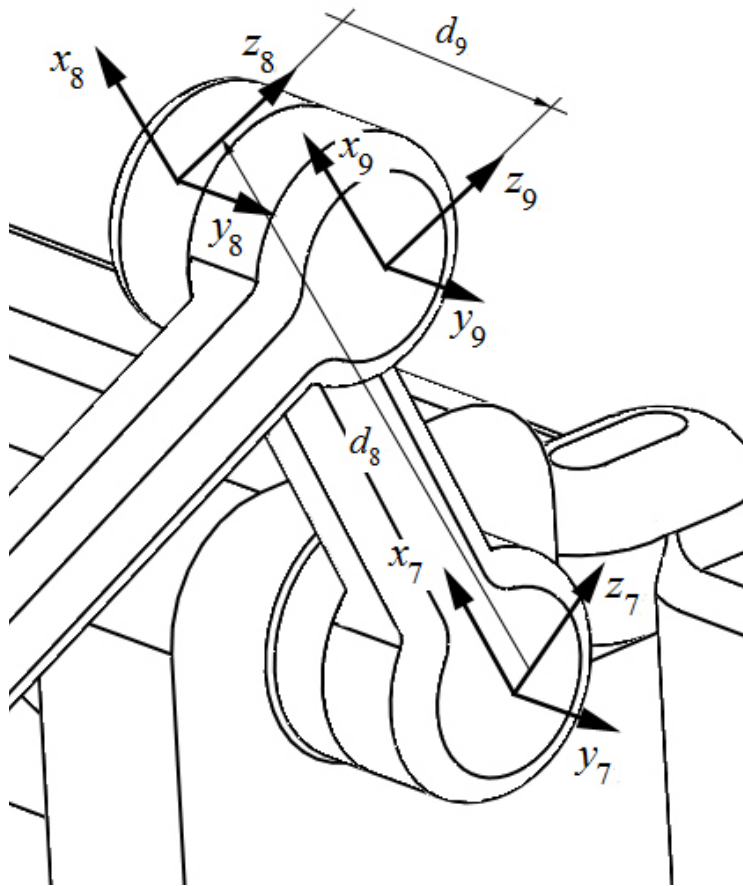
**Figura 2.3:** Sistemas de referencia Locales 3, 4 y 5



**Figura 2.4:** Sistemas de Referencia Locales 5, 6 y 7

Para llegar del sistema local  $(x_9, y_9, z_9)$  partiendo del sistema  $(x_7, y_7, z_7)$  son necesarias las transformaciones representadas por  $\mathbf{T}_{7,9}$ , éstas se pueden apreciar en la figura 2.5.

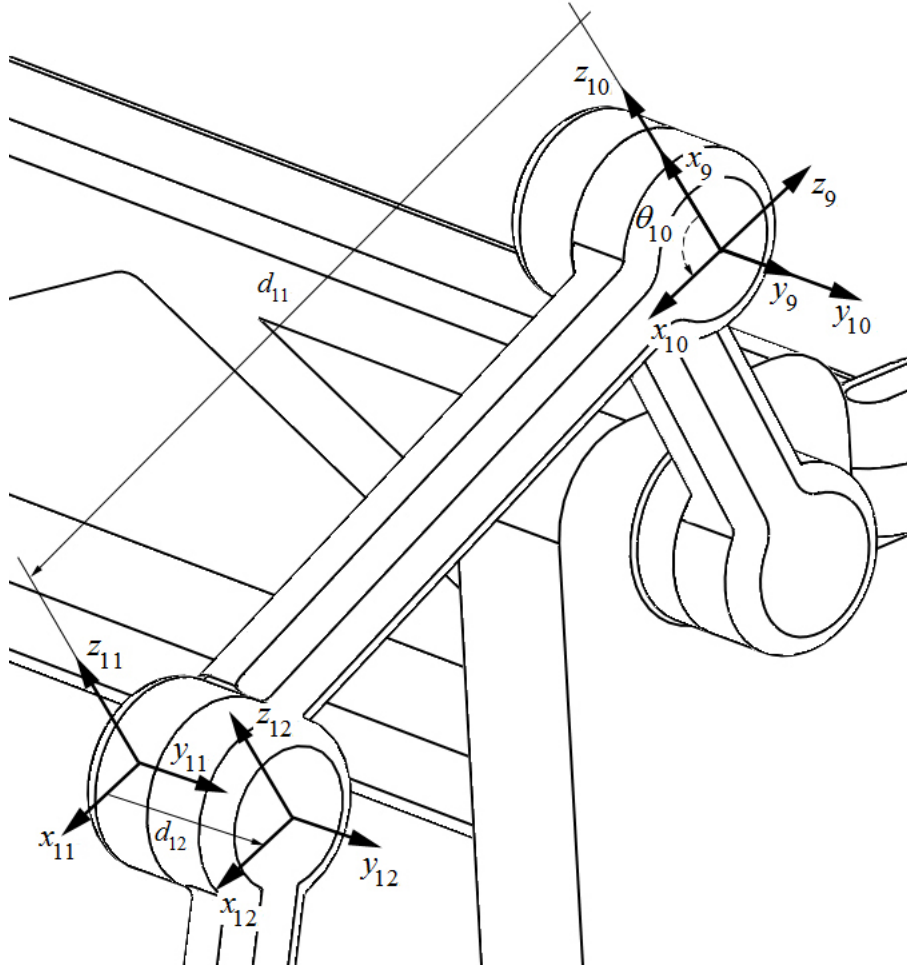
$$\mathbf{T}_{7,9} = \mathbf{T}_1(d_8) \mathbf{T}_2(d_9) \quad (2.7)$$



**Figura 2.5:** Sistema de Referencia Locales 7, 8 y 9

En la figura 2.6 se puede apreciar que las transformaciones necesarias para alcanzar el sistema local  $(x_{12}, y_{12}, z_{12})$  desde el sistema  $(x_9, y_9, z_9)$  son:

$$\mathbf{T}_{9,12} = \mathbf{T}_5(\theta_{10}) \mathbf{T}_1(d_{11}) \mathbf{T}_2(d_{12}) \quad (2.8)$$



**Figura 2.6:** Sistemas de Referencia Locales 9, 10, 11 y 12

Las transformaciones para desplazarse del sistema de referencia local  $(x_{12}, y_{12}, z_{12})$  hasta el sistema  $(x_{15}, y_{15}, z_{15})$  están mostradas en las figuras 2.7a y 2.7b.

$$\mathbf{T}_{12,15} = \mathbf{T}_5(\theta_{13}) \mathbf{T}_1(d_{14}) \mathbf{T}_1(d_{15}) \quad (2.9)$$

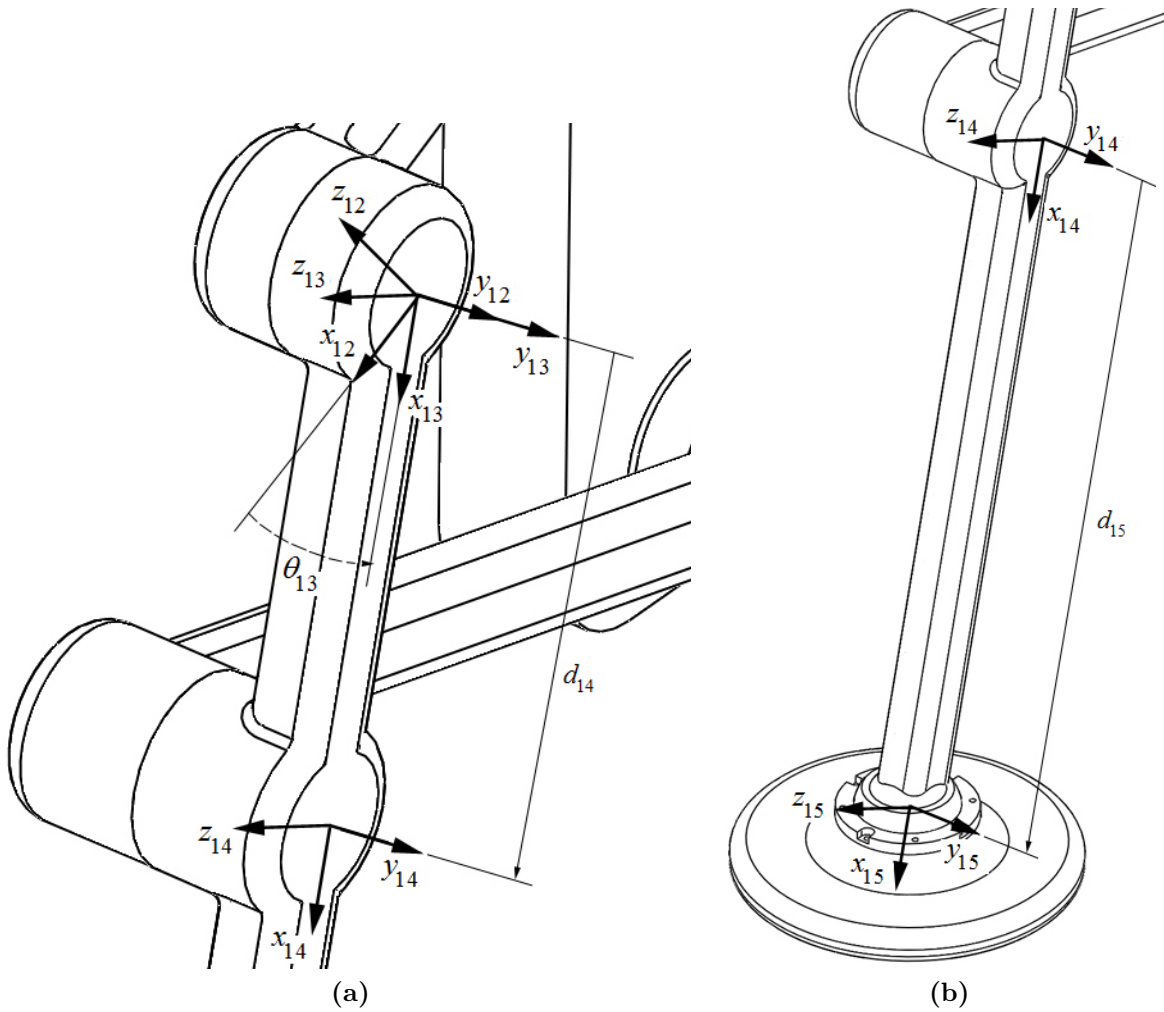
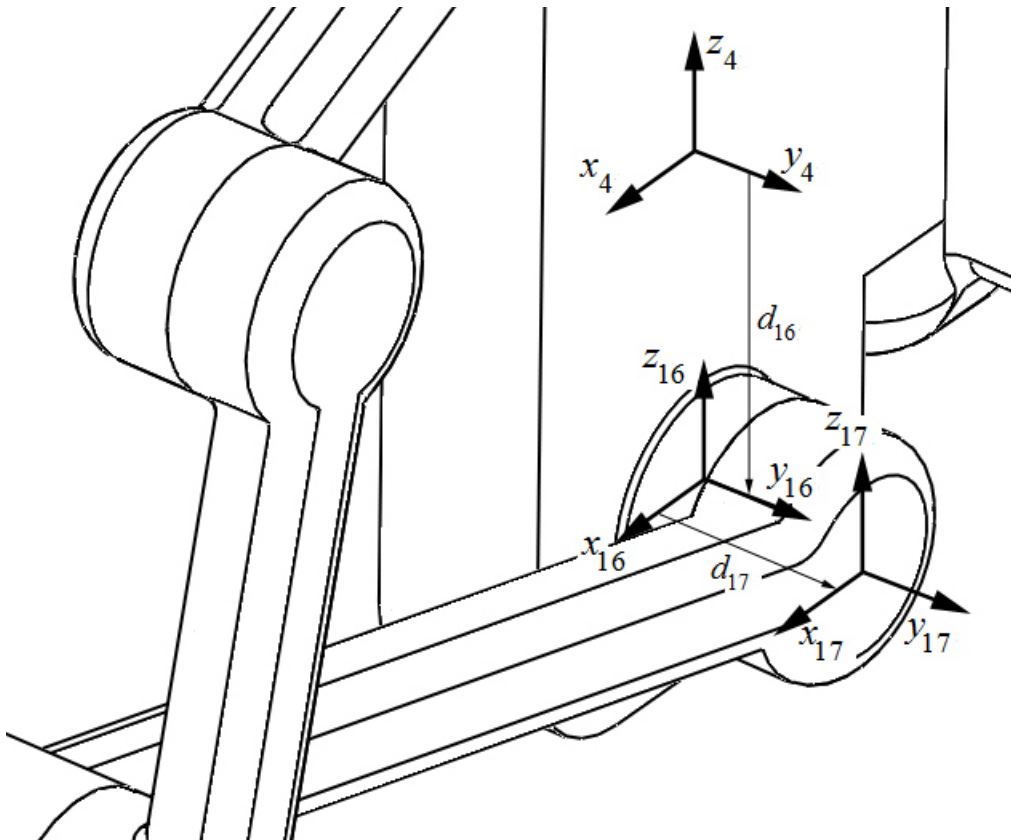


Figura 2.7: Sistemas de Referencia Locales 12, 13, 14 y 16

Al utilizar las transformaciones que se observan en la figura 2.8, se llega al sistema local  $(x_{17}, y_{17}, z_{17})$  desde el sistema  $(x_4, y_4, z_4)$ . Esto es:

$$\mathbf{T}_{4,17} = \mathbf{T}_3(-d_{16}) \mathbf{T}_2(d_{17}) \quad (2.10)$$

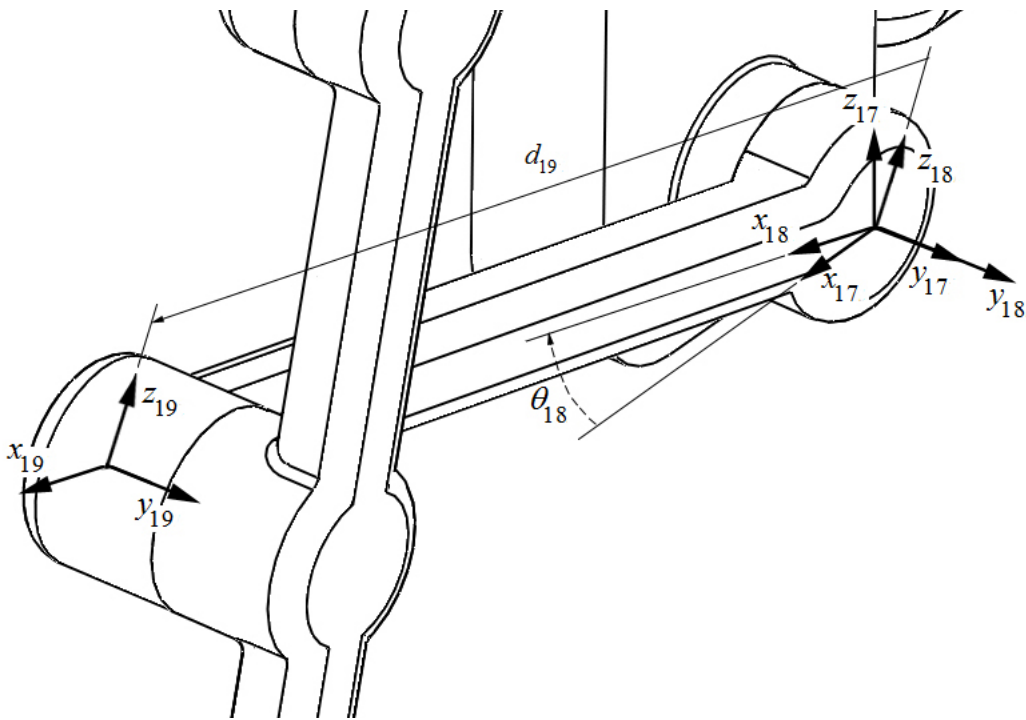


**Figura 2.8:** Sistemas de Referencia Locales 4, 16 y 17

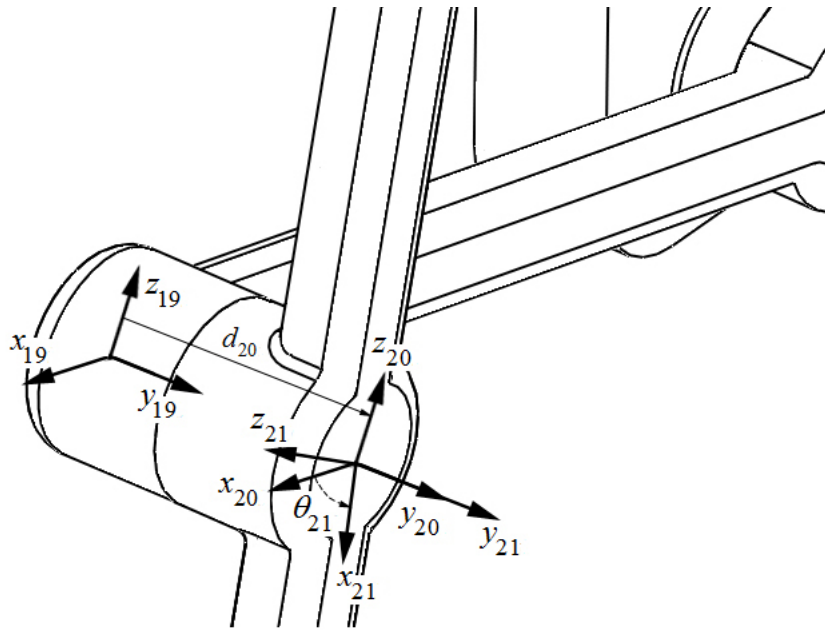


Mostradas en las figuras 2.9 y 2.10 están las transformaciones necesarias para desplazarse del sistema de referencia local  $(x_{17}, y_{17}, z_{17})$  al sistema  $(x_{21}, y_{21}, z_{21})$ , representadas por la siguiente matriz:

$$\mathbf{T}_{17,21} = \mathbf{T}_5(-\theta_{18}) \mathbf{T}_1(d_{19}) \mathbf{T}_2(d_{20}) \mathbf{T}_5(\theta_{21}) \quad (2.11)$$



**Figura 2.9:** Sistemas de Referencia Locales 17, 18 y 19



**Figura 2.10:** Sistemas de Referencia Locales 19, 20 y 21

De lo anterior se puede apreciar que las incógnitas que se deben determinar para el control del movimiento de la extremidad del robot son:

$$\theta_3, \theta_7, \theta_{10}, \theta_{13}, \theta_{18} \text{ y } \theta_{21}$$

En la tabla 2.1 se muestran las características geométricas de la extremidad del robot.

$d_{2x} = 0.228$ [m]	$d_{11} = 0.16$ [m]
$d_{2y} = 0.20$ [m]	$d_{12} = 0.023$ [m]
$d_{2z} = 0$ [m]	$d_{14} = 0.11$ [m]
$d_4 = 0.07$ [m]	$d_{15} = 0.39$ [m]
$d_5 = 0.08$ [m]	$d_{16} = 0.06$ [m]
$d_6 = 0.023$ [m]	$d_{17} = 0.023$ [m]
$d_8 = 0.100499$ [m]	$d_{19} = 0.220227$ [m]
$d_9 = 0.023$ [m]	$d_{20} = 0.046$ [m]

**Tabla 2.1:** Características geométricas

### 2.1.1. Solución del Ángulo $\theta_3$

Una vez que ya se han definido los sistemas de referencia, se continúa con la solución de las incógnitas. Para esto, se define el movimiento de la extremidad y del cuerpo, cada uno sigue una trayectoria propia con un perfil de velocidad definido. Esto es detallado en el apéndice B.

Para poder encontrar este ángulo es necesario crear un lazo vectorial (Fig. 2.11).

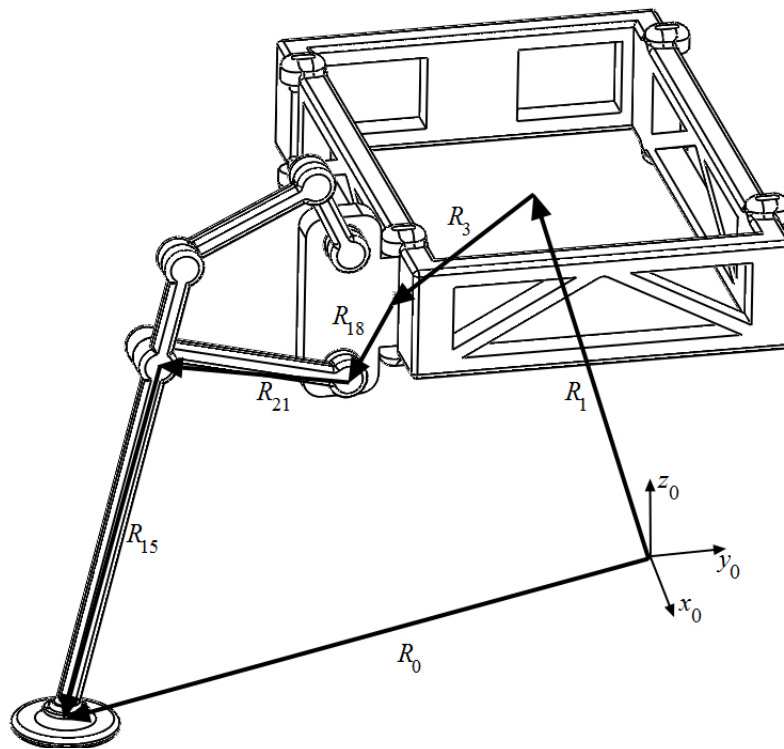


Figura 2.11: Lazo Vectorial

De tal modo que para este lazo vectorial se tienen las transformaciones siguientes:

$$\mathbf{T}_{0,1} \mathbf{T}_{1,3} \mathbf{T}_1(d_4) \mathbf{T}_{4,17} \mathbf{T}_{17,21} \mathbf{T}_1(d_{15}) = \mathbf{T}_{0,15} \quad (2.12)$$

donde:

$$\mathbf{T}_{0,15} = \mathbf{T}_1(x_e) \mathbf{T}_2(y_e) \mathbf{T}_3(z_e)$$

Para poder determinar el ángulo  $\theta_3$  se despejará de tal manera que únicamente este ángulo se encuentre presente en una ecuación.

Aplicando  $\mathbf{T}_3^{-1}(-d_{16}) \mathbf{T}_1^{-1}(d_4) \mathbf{T}_{1,3}^{-1} \mathbf{T}_{0,1}^{-1}$  en ambos lados de la igualdad de la ecuación 2.27 se tiene que:

$$\mathbf{T}_2(d_{17}) \mathbf{T}_{17,21} \mathbf{T}_1(d_{15}) = \mathbf{T}_3^{-1}(-d_{16}) \mathbf{T}_1^{-1}(d_4) \mathbf{T}_{1,3}^{-1} \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \mathbf{T}_{0,15} \quad (2.13)$$

Cada una de estas matrices homogéneas tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De tal manera que al aplicar las transformaciones de cada uno de los lados de ecuación 2.13 se tiene:

$$\mathbf{T}_2(d_{17}) \mathbf{T}_{17,21} \mathbf{T}_1(d_{15}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^{-1}(-d_{16}) \mathbf{T}_1^{-1}(d_4) \mathbf{T}_{1,3}^{-1} \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \mathbf{T}_{0,15} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $a_{24} = b_{24}$  es:

$$d_6 + d_{20} = (d_{2y} + y_e - Y_c) c\theta_3 + (d_{2x} - x_e + X_c) s\theta_3 \quad (2.14)$$

Se observa que la ecuación 2.14 solamente contiene al ángulo  $\theta_3$ . Reacomodando:

$$-(d_6 + d_{20}) = -(d_{2y} + y_e - Y_c) c\theta_3 - (d_{2x} - x_e + X_c) s\theta_3 \quad (2.15)$$

se obtiene una ecuación de la forma:

$$A_3 c\theta_3 + B_3 s\theta_3 = D_3 \quad (2.16)$$

donde:

$$A_3 = -(d_{2y} + y_e - Y_c)$$

$$B_3 = -(d_{2x} - x_e + X_c)$$

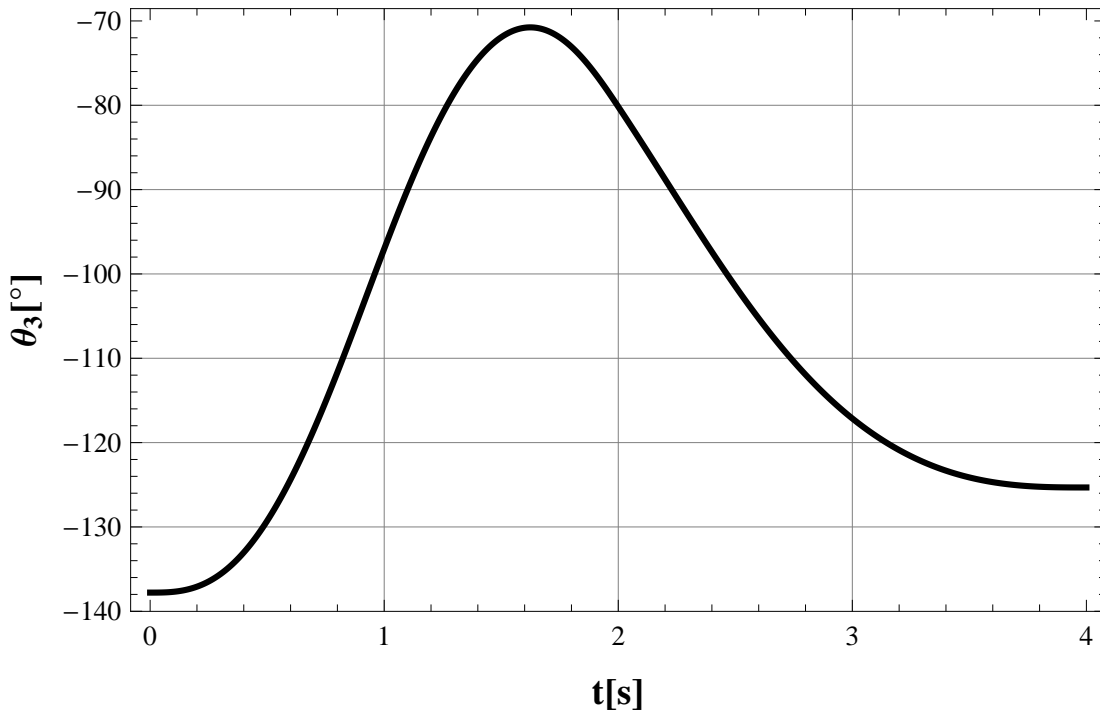
$$D_3 = -(d_6 + d_{20})$$

Resolviendo la ecuación 2.16 se obtiene:

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{B_3}{A_3}\right) - \arccos\left(\frac{D_3}{\sqrt{A_3^2 + B_3^2}}\right) \quad (2.17)$$

El desarrollo de la solución a la ecuación trascendental se encuentra en el apéndice C.

En la figura 2.12 se muestra la gráfica del comportamiento del ángulo  $\theta_3$  según la condición de movimiento y las trayectorias establecidas para el cuerpo y la extremidad del robot.



**Figura 2.12:** Ángulo  $\theta_3$

### 2.1.2. Solución del Ángulo $\theta_{18}$

De la misma forma en que se obtuvo el ángulo  $\theta_3$  y utilizando el mismo lazo vectorial se obtendrá el ángulo  $\theta_{18}$ . Tomando los elementos  $a_{14} = b_{14}$  y  $a_{34} = b_{34}$  de la ecuación 2.13 tenemos respectivamente:

$$d_{19} c\theta_{18} + d_{15} c(\theta_{21} + \theta_{18}) = -d_4 - (d_{2x} - x_e + X_c) c\theta_3 + (d_{2y} + y_e - Y_c) s\theta_3 \quad (2.18)$$

$$-d_{19} s\theta_{18} - d_{15} s(\theta_{21} + \theta_{18}) = d_{16} - d_{2z} + z_e - Z_c \quad (2.19)$$

Como el ángulo  $\theta_3$  ya se obtuvo, el lado derecho de ambas ecuaciones contiene sólo valores conocidos. Renombrando:

$$d_{19} c\theta_{18} + d_{15} c(\theta_{21} + \theta_{18}) = \alpha_{18} \quad (2.20)$$

$$-d_{19} s\theta_{18} - d_{15} s(\theta_{21} + \theta_{18}) = \beta_{18} \quad (2.21)$$

donde:

$$\alpha_{18} = -d_4 - (d_{2x} - x_e + X_c) c\theta_3 + (d_{2y} + y_e - Y_c) s\theta_3$$

$$\beta_{18} = d_{16} - d_{2z} + z_e - Z_c$$

Despejando  $c(\theta_{21} + \theta_{18})$  y  $s(\theta_{21} + \theta_{18})$  de las ecuaciones 2.20 y 2.21 respectivamente y elevando al cuadrado ambas ecuaciones:

$$d_{15}^2 c(\theta_{21} + \theta_{18})^2 = (\alpha_{18} - d_{19} c\theta_{18})^2 \quad (2.22)$$

$$d_{15}^2 s(\theta_{21} + \theta_{18})^2 = (-\beta_{18} - d_{19} s\theta_{18})^2 \quad (2.23)$$

Sumando las ecuaciones 2.22 y 2.23 y empleando la identidad trigonométrica  $s\theta^2 + c\theta^2 = 1$  se obtiene:

$$d_{15}^2 = (\alpha_{18} - d_{19} c\theta_{18})^2 + (-\beta_{18} - d_{19} s\theta_{18})^2 \quad (2.24)$$

Despejando  $c\theta_{18}$  y  $s\theta_{18}$  de la ecuación 2.24 y simplificando:

$$A_{18} c\theta_{18} + B_{18} s\theta_{18} = D_{18} \quad (2.25)$$

donde:

$$A_{18} = -2d_{19} \alpha_{18}$$

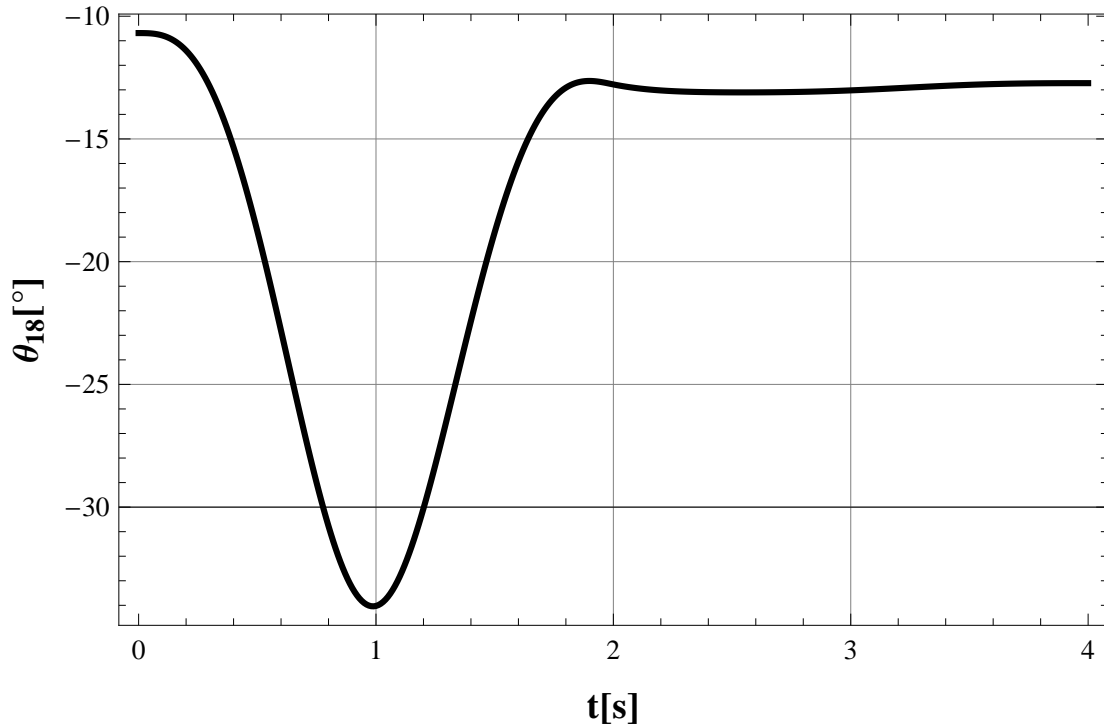
$$B_{18} = 2d_{19} \beta_{18}$$

$$D_{18} = -(-d_{15}^2 + d_{19}^2 + \alpha_{18}^2 + \beta_{18}^2)$$

Resolviendo la ecuación 2.25 para el ángulo  $\theta_{18}$  se tiene:

$$\theta_{18} = \arctan\left(\frac{B_{18}}{A_{18}}\right) + \arccos\left(\frac{D_{18}}{\sqrt{A_{18}^2 + B_{18}^2}}\right) \quad (2.26)$$

En la figura 2.13 se muestra el comportamiento del ángulo  $\theta_{18}$  según la condición de movimiento y las trayectorias establecidas para el cuerpo y la extremidad del robot.



**Figura 2.13:** Ángulo  $\theta_{18}$

### 2.1.3. Solución del Ángulo $\theta_{21}$

Para obtener el ángulo  $\theta_{21}$  se utilizará el mismo lazo vectorial empleado para los ángulos  $\theta_3$  y  $\theta_{18}$ . Aplicando  $\mathbf{T}_1^{-1}(d_{19}) \mathbf{T}_5^{-1}(\theta_{18}) \mathbf{T}_{4,17}^{-1} \mathbf{T}_1^{-1}(d_4) \mathbf{T}_{1,3}^{-1} \mathbf{T}_{0,1}^{-1}$  en ambos lados de la ecuación 2.13 se tiene que:

$$\mathbf{T}_2(d_{20}) \mathbf{T}_5(\theta_{21}) \mathbf{T}_1(d_{15}) = \mathbf{T}_1^{-1}(d_{19}) \mathbf{T}_5^{-1}(\theta_{18}) \mathbf{T}_{4,17}^{-1} \mathbf{T}_1^{-1}(d_4) \mathbf{T}_{1,3}^{-1} \mathbf{T}_{0,1}^{-1} \mathbf{T}_{0,15} \quad (2.27)$$

Si se considera la forma matricial, la ecuación 2.27 se expresa:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se toman los elementos:

$$f_{14} = g_{14} \quad (2.28)$$

$$f_{34} = g_{34} \quad (2.29)$$

donde:

$$f_{14} = d_{15} c\theta_{21}$$

$$g_{14} = -d_{19} - (d_4 + (d_{2x} - x_e + X_c) c\theta_3) c\theta_{18} + (d_{2y} + y_e - Y_c) c\theta_{18} s\theta_3 \\ + (-d_{16} + d_{2z} - z_e + Z_c) s\theta_{18} + (-d_{16} + d_{2z} - z_e + Z_c) s\theta_{18}$$

$$f_{34} = d_{15} s\theta_{21}$$

$$g_{34} = (d_{16} - d_{2z} - z_e + Z_c) c\theta_{18} - (d_4 + (d_{2x} - x_e + X_c) c\theta_3 - (d_{2y} + y_e - Y_c) s\theta_3) s\theta_{18}$$

Renombrando  $g_{14} = \alpha_{21}$  y  $g_{34} = \beta_{21}$ , y sumando las ecuaciones 2.28 y 2.29 resulta:

$$A_{21} c\theta_{21} + B_{21} s\theta_{21} = D_{21} \quad (2.30)$$

donde:

$$A_{21} = d_{15}$$

$$B_{21} = d_{15}$$

$$D_{21} = \alpha_{21} - \beta_{21}$$



La solución a la ecuación 2.30 está dada por:

$$\theta_{21} = \arctan\left(\frac{B_{21}}{A_{21}}\right) + \arccos\left(\frac{D_{21}}{\sqrt{A_{21}^2 + B_{21}^2}}\right) \quad (2.31)$$

En la figura 2.14 se muestra el comportamiento del ángulo  $\theta_{21}$  según la condición de movimiento y las trayectorias establecidas para el cuerpo y la extremidad del robot.

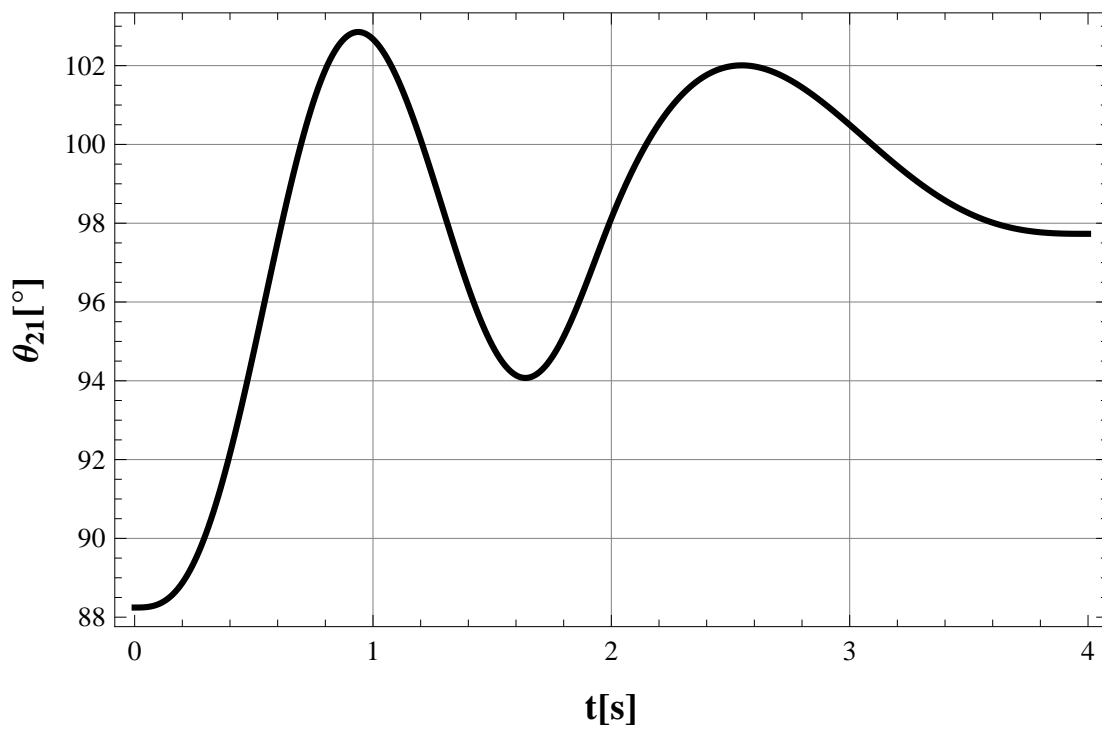


Figura 2.14: Ángulo  $\theta_{21}$

### 2.1.4. Solución del Ángulo $\theta_7$

Par determinar el ángulo  $\theta_7$  se emplearán los lazos vectoriales mostrados en la figura 2.15.

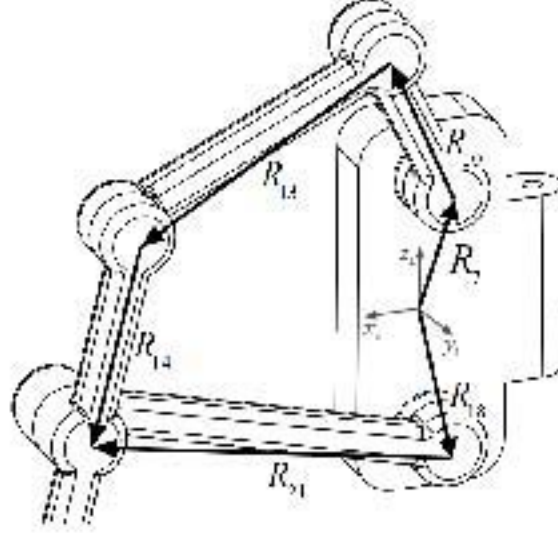


Figura 2.15: Lazos Vectoriales

Las transformaciones correspondientes a estos lazos vectoriales son:

$$\mathbf{T}_3(d_5) \mathbf{T}_2(d_6) \mathbf{T}_5(\theta_7) \mathbf{T}_{7,9} \mathbf{T}_{9,12} \mathbf{T}_{12,15} = \mathbf{T}_{4,17} \mathbf{T}_{17,21} \quad (2.32)$$

Se aplica  $\mathbf{T}_5^{-1}(\theta_7) \mathbf{T}_2^{-1}(d_6) \mathbf{T}_3^{-1}(d_5)$  en ambos lados de la ecuación 2.32, obteniendo:

$$\mathbf{T}_{7,9} \mathbf{T}_{9,12} \mathbf{T}_{12,15} = \mathbf{T}_5^{-1}(\theta_7) \mathbf{T}_2^{-1}(d_6) \mathbf{T}_3^{-1}(d_5) \mathbf{T}_{4,17} \mathbf{T}_{17,21} \quad (2.33)$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se toma  $h_{14} = k_{14}$  y  $h_{34} = k_{34}$ , esto es:

$$d_8 c\theta_7 + d_{11} c(\theta_7 + \theta_{10}) + d_4 c(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{13}) = d_{19} c\theta_{18} \quad (2.34)$$

$$d_8 s\theta_7 + d_{11} s(\theta_7 + \theta_{10}) + d_4 s(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{13}) = -(-d_5 - d_{16} - d_{19} s\theta_{18}) \quad (2.35)$$

Y también  $h_{13} = k_{13}$  y  $h_{33} = k_{33}$ :

$$s(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{13}) = s(\theta_{21} + \theta_{18}) \quad (2.36)$$

$$c(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{13}) = c(\theta_{21} + \theta_{18}) \quad (2.37)$$

Ahora sustituyendo las ecuaciones 2.36 y 2.37 en las ecuaciones 2.34 y 2.35 respectivamente, resulta que:

$$d_8 c\theta_7 + d_{11} c(\theta_7 + \theta_{10}) + d_4 c(\theta_{21} + \theta_{18}) = d_{19} c\theta_{18} \quad (2.38)$$

$$d_8 s\theta_7 + d_{11} s(\theta_7 + \theta_{10}) + d_4 s(\theta_{21} + \theta_{18}) = -(-d_5 - d_{16} - d_{19} s\theta_{18}) \quad (2.39)$$

Despejando  $d_{11} c(\theta_7 + \theta_{10})$  y  $d_{11} s(\theta_7 + \theta_{10})$  de las ecuaciones 2.38 y 2.39, agrupando términos conocidos y renombrando se tiene:

$$d_{11} c(\theta_7 + \theta_{10}) = \alpha_7 - d_8 c\theta_7 \quad (2.40)$$

$$d_{11} s(\theta_7 + \theta_{10}) = \beta_7 - d_8 s\theta_7 \quad (2.41)$$

donde:

$$\alpha_7 = d_{19} c\theta_{18} - d_4 c(\theta_{21} + \theta_{18})$$

$$\beta_7 = -(-d_5 - d_{16} - d_{19} s\theta_{18}) - d_4 s(\theta_{21} + \theta_{18})$$

Al elevar al cuadrado las ecuaciones 2.40 y 2.41, se obtiene:

$$d_{11}^2 c(\theta_7 + \theta_{10})^2 = (\alpha_7 - d_8 c\theta_7)^2 \quad (2.42)$$

$$d_{11}^2 s(\theta_7 + \theta_{10})^2 = (\beta_7 - d_8 s\theta_7)^2 \quad (2.43)$$

Se suman las ecuaciones 2.42 y 2.43, y se simplifican utilizando la identidad trigonométrica  $s\theta^2 + c\theta^2 = 1$ :

$$d_{11}^2 = (\alpha_7 - d_8 c\theta_7)^2 + (\beta_7 - d_8 s\theta_7)^2 \quad (2.44)$$

Desarrollando la ecuación anterior y agrupando términos semejantes que contengan la incógnita  $\theta_7$ :

$$A_7 c\theta_7 + B_7 s\theta_7 = D_7 \quad (2.45)$$

en donde:

$$A_7 = 2d_8 \alpha_7$$

$$B_7 = 2d_8 \beta_7$$

$$D_7 = d_8^2 - d_{11}^2 + \alpha_7^2 + \beta_7^2$$

Por lo tanto:

$$\theta_7 = \arctan\left(\frac{B_7}{A_7}\right) - \arccos\left(\frac{D_7}{\sqrt{A_7^2 + B_7^2}}\right) \quad (2.46)$$

En la figura 2.16 se muestra el comportamiento del ángulo  $\theta_7$  según la condición de movimiento y las trayectorias establecidas para el cuerpo y la extremidad del robot.

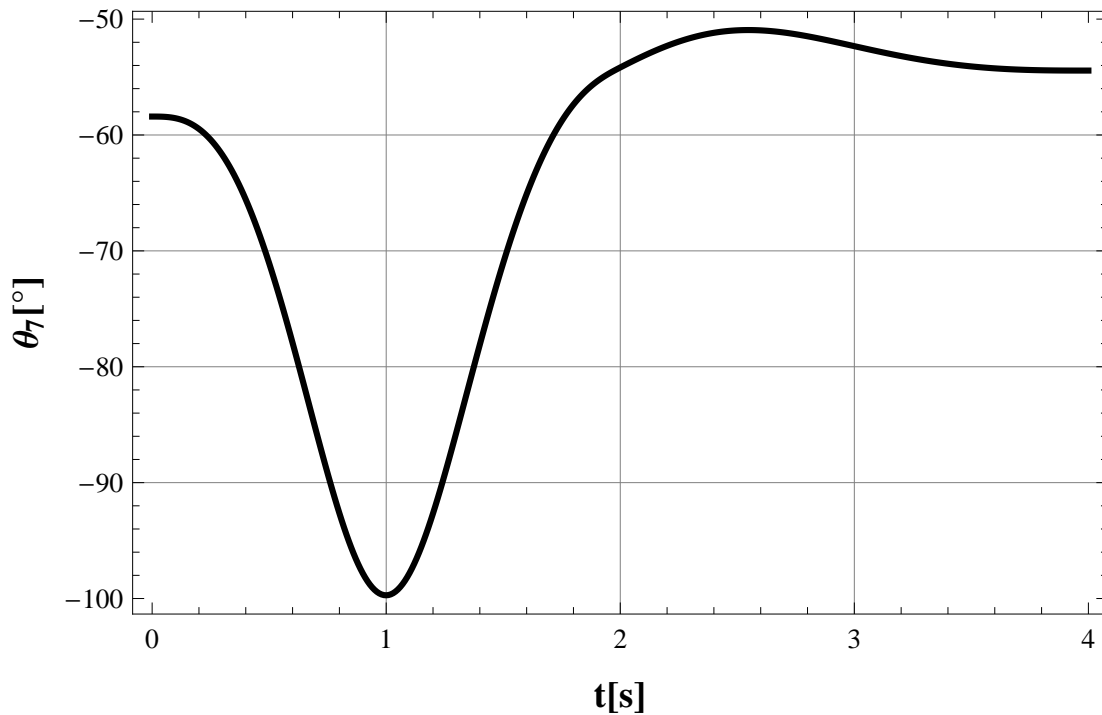


Figura 2.16: Ángulo  $\theta_7$

### 2.1.5. Solución del ángulo $\theta_{10}$

De igual manera que el ángulo  $\theta_7$  y utilizando los mismos lazos vectoriales podemos resolver  $\theta_{10}$ . Para esto se toma la ecuación 2.32 y se aplica  $\mathbf{T}_1^{-1}(d_8) \mathbf{T}_5^{-1}(\theta_7) \mathbf{T}_2^{-1}(d_6) \mathbf{T}_3^{-1}(d_5)$  en ambos lados, lo que da como resultado:

$$\mathbf{T}_2(d_9) \mathbf{T}_{9,12} \mathbf{T}_{12,15} = \mathbf{T}_1^{-1}(d_8) \mathbf{T}_5^{-1}(\theta_7) \mathbf{T}_2^{-1}(d_6) \mathbf{T}_3^{-1}(d_5) \mathbf{T}_{4,17} \mathbf{T}_{17,21} \quad (2.47)$$

De manera matricial:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando los elementos  $p_{14} = q_{14}$  y  $p_{34} = q_{34}$ :

$$d_{11} c\theta_{10} + d_{14} c(\theta_{10} + \theta_{13}) = (d_5 + d_{16}) s\theta_7 + d_{19} c(\theta_7 - \theta_{18}) - d_8 \quad (2.48)$$

$$-d_{11} s\theta_{10} - d_{14} s(\theta_{10} + \theta_{13}) = -(d_5 + d_{16}) c\theta_7 + d_{19} s(\theta_7 - \theta_{18}) \quad (2.49)$$

así como  $p_{13} = q_{13}$  y  $p_{33} = q_{33}$ :

$$s(\theta_{10} + \theta_{13}) = s(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18}) \quad (2.50)$$

$$c(\theta_{10} + \theta_{13}) = c(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18}) \quad (2.51)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.50 y 2.51 en las ecuaciones 2.49 y 2.48 respectivamente:

$$d_{11} c\theta_{10} + d_{14} c(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18}) = (d_5 + d_{16}) s\theta_7 + d_{19} c(\theta_7 - \theta_{18}) - d_8 \quad (2.52)$$

$$-d_{11} s\theta_{10} - d_{14} s(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18}) = -(d_5 + d_{16}) c\theta_7 + d_{19} s(\theta_7 - \theta_{18}) \quad (2.53)$$

Despejando términos que contengan  $\theta_{10}$  de ambas ecuaciones:

$$d_{11} c\theta_{10} = (d_5 + d_{16}) s\theta_7 + d_{19} c(\theta_7 - \theta_{18}) - d_8 - d_{14} c(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18}) \quad (2.54)$$

$$d_{11} s\theta_{10} = (d_5 + d_{16}) c\theta_7 - d_{19} s(\theta_7 - \theta_{18}) - d_{14} s(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18}) \quad (2.55)$$

Dividiendo la ecuación 2.54 entre la 2.55:

$$\frac{c\theta_{10}}{s\theta_{10}} = \frac{A_{10}}{B_{10}} \quad (2.56)$$

donde:

$$A_{10} = (d_5 + d_{16}) s\theta_7 + d_{19} c(\theta_7 - \theta_{18}) - d_8 - d_{14} c(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18})$$

$$B_{10} = (d_5 + d_{16}) c\theta_7 - d_{19} s(\theta_7 - \theta_{18}) - d_{14} s(\theta_7 - \theta_{21} - \theta_{18})$$

Por lo que la solución para el ángulo  $\theta_{10}$  es:

$$\theta_{10} = \arctan\left(\frac{B_{10}}{A_{10}}\right) \quad (2.57)$$

En la figura 2.17 se muestra el comportamiento del ángulo  $\theta_{10}$  según la condición de movimiento y las trayectorias establecidas para el cuerpo y la extremidad del robot.

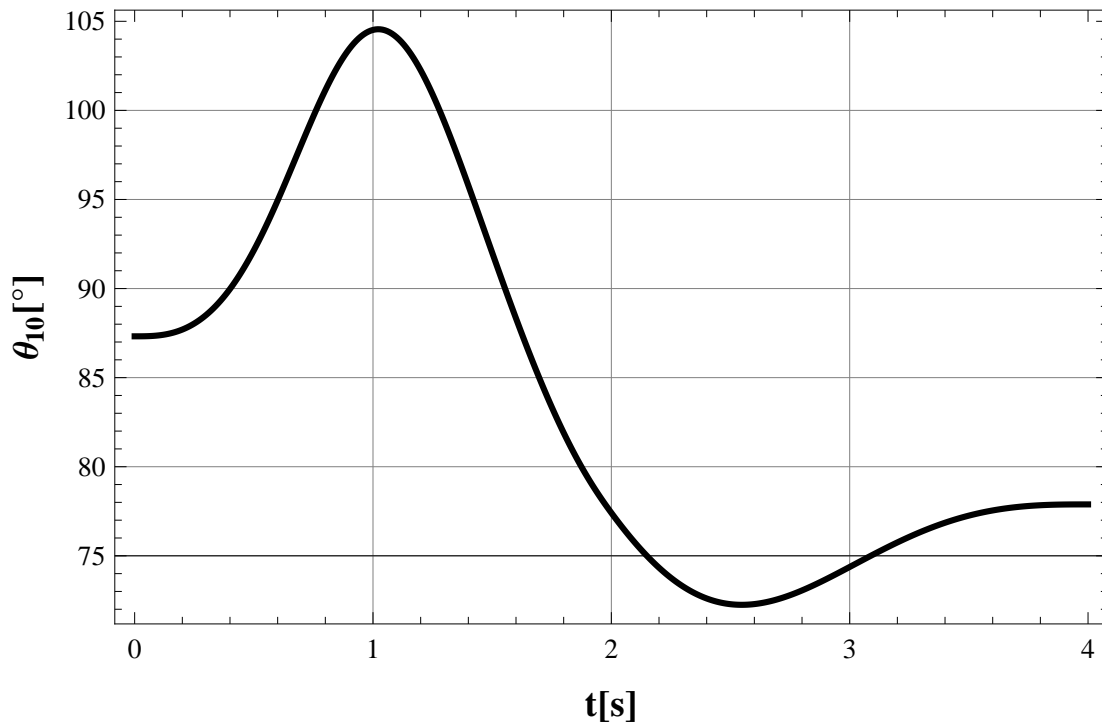


Figura 2.17: Ángulo  $\theta_{10}$

### 2.1.6. Solución del ángulo $\theta_{13}$

Finalmente para obtener el ángulo  $\theta_{13}$  se utilizan los mismos lazos vectoriales de la figura 2.15. Debido a que los ángulos  $\theta_3, \theta_7, \theta_{10}, \theta_{18}$  y  $\theta_{21}$  son ya conocidos, se busca una ecuación en la que la se encuentra incógnita. Para este fin se aplican las transformaciones  $\mathbf{T}_1^{-1}(d_{11}) \mathbf{T}_5^{-1}(\theta_{10}) \mathbf{T}_{7,9}^{-1} \mathbf{T}_5^{-1}(\theta_7) \mathbf{T}_2^{-1}(d_6) \mathbf{T}_3^{-1}(d_5)$  a la ecuación 2.32, esto es:

$$\mathbf{T}_3(d_5) \mathbf{T}_2(d_6) \mathbf{T}_5(\theta_7) \mathbf{T}_{7,9} \mathbf{T}_{9,12} \mathbf{T}_{12,15} = \mathbf{T}_{4,17} \mathbf{T}_{17,21} \quad (2.58)$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando los elementos  $u_{14} = v_{14}$  y  $u_{34} = v_{34}$ :

$$d_{14} c\theta_{13} = -d_{11} - d_8 c\theta_{10} + d_{19} c(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{18}) + (d_5 + d_{16}) s(\theta_7 + \theta_{10}) \quad (2.59)$$

$$-d_{14} s\theta_{13} = -d_8 s\theta_{10} + d_{19} s(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{18}) - (d_5 + d_{16}) c(\theta_7 + \theta_{10}) \quad (2.60)$$

Dado que en el lado derecho de las ecuaciones 2.59 y 2.60 se encuentran sólo valores conocidos, se dividen ambas ecuaciones, de lo cual se obtiene:

$$\frac{c\theta_{13}}{s\theta_{13}} = \frac{A_{13}}{B_{13}} \quad (2.61)$$

donde:

$$A_{13} = -d_{11} - d_8 c\theta_{10} + d_{19} c(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{18}) + (d_5 + d_{16}) s(\theta_7 + \theta_{10})$$

$$B_{13} = d_8 s\theta_{10} - d_{19} s(\theta_7 + \theta_{10} + \theta_{18}) + (d_5 + d_{16}) c(\theta_7 + \theta_{10})$$

De la ecuación 2.61 tenemos que la solución para el ángulo  $\theta_{13}$  es:

$$\theta_{13} = \arctan\left(\frac{B_{13}}{A_{13}}\right) \quad (2.62)$$

En la figura 2.18 se muestra el comportamiento del ángulo  $\theta_{13}$  según la condición de movimiento y las trayectorias establecidas para el cuerpo y la extremidad del robot.

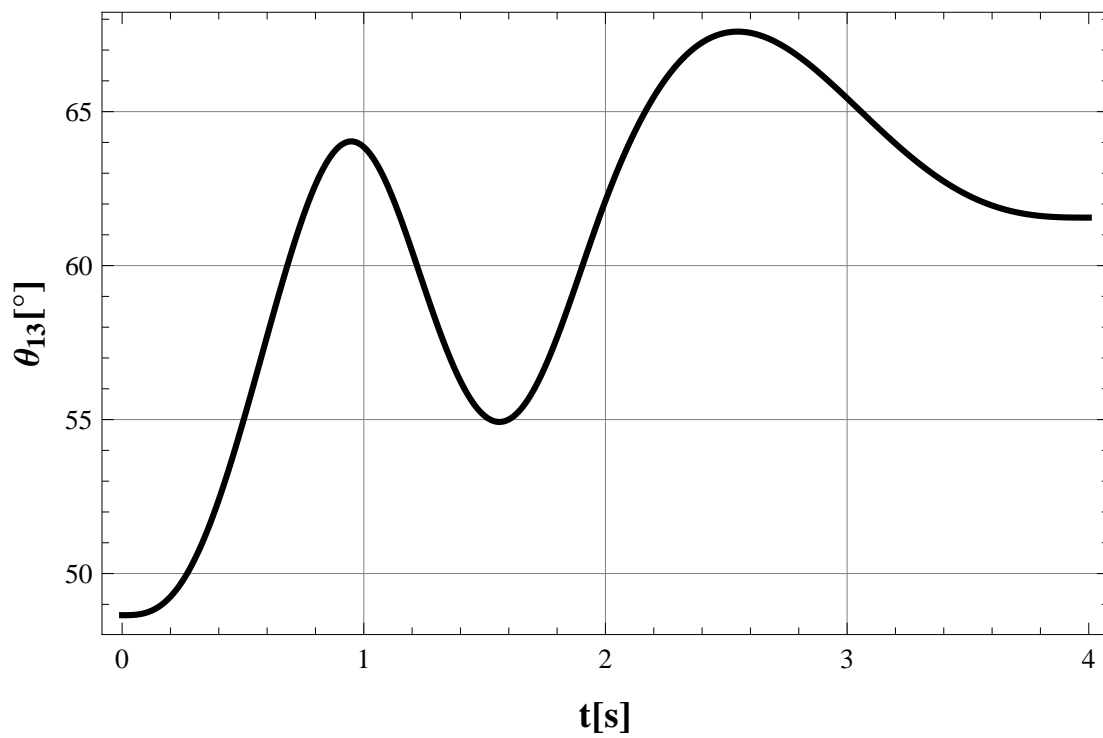


Figura 2.18: Ángulo  $\theta_{13}$



## 2.2. Análisis de Velocidad

El problema cinemático inverso para la velocidad es:

Dada la velocidad del cuerpo  $(\dot{X}_c, \dot{Y}_c, \dot{Z}_c)$  y de la extremidad  $(\dot{x}_e, \dot{y}_e, \dot{z}_e)$ , encontrar  $\dot{\theta}_3, \dot{\theta}_7, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{13}, \dot{\theta}_{18}, \dot{\theta}_{21}$ , los cuales definen la velocidad de las juntas.

En el análisis de velocidad, se asume que la posición y la orientación de los cuerpos son conocidos y que son resultado del análisis de posición. La velocidad de un punto o un cuerpo rígido que experimenta movimiento, puede ser obtenida por la derivada respecto al tiempo de la posición.

### 2.2.1. Velocidad Angular $\dot{\theta}_3$

Para obtener  $\dot{\theta}_3$  se toma la ecuación 2.16 y se deriva con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\dot{\theta}_3 = \dot{x}_e V_1 + \dot{X}_c V_2 + \dot{Y}_c V_3 + \dot{y}_e V_4 \quad (2.63)$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  se obtiene al agrupar todos los términos que contienen a  $\dot{x}_e$  y  $\dot{X}_c$  respectivamente, al derivar  $\theta_3$  con respecto al tiempo. De igual manera  $V_3$  y  $V_4$ , al agrupar términos semejantes de  $\dot{Y}_c$  y  $\dot{y}_e$ .

En la figura 2.19 se muestra la gráfica correspondiente a la velocidad angular  $\dot{\theta}_3$  de la extremidad del robot. Se puede observar el comportamiento de las fases del movimiento, durante los primeros dos segundos comienza el traslado del cuerpo y de la extremidad a lo largo de sus respectivas trayectorias definidas, mientras que después, se posiciona la extremidad en el suelo y se continúa el desplazamiento del cuerpo. Estas velocidades son de esperarse, ya que se trata de la junta entre el cuerpo y el eslabón 1, la cual permite el avance tanto del cuerpo como el de la extremidad.

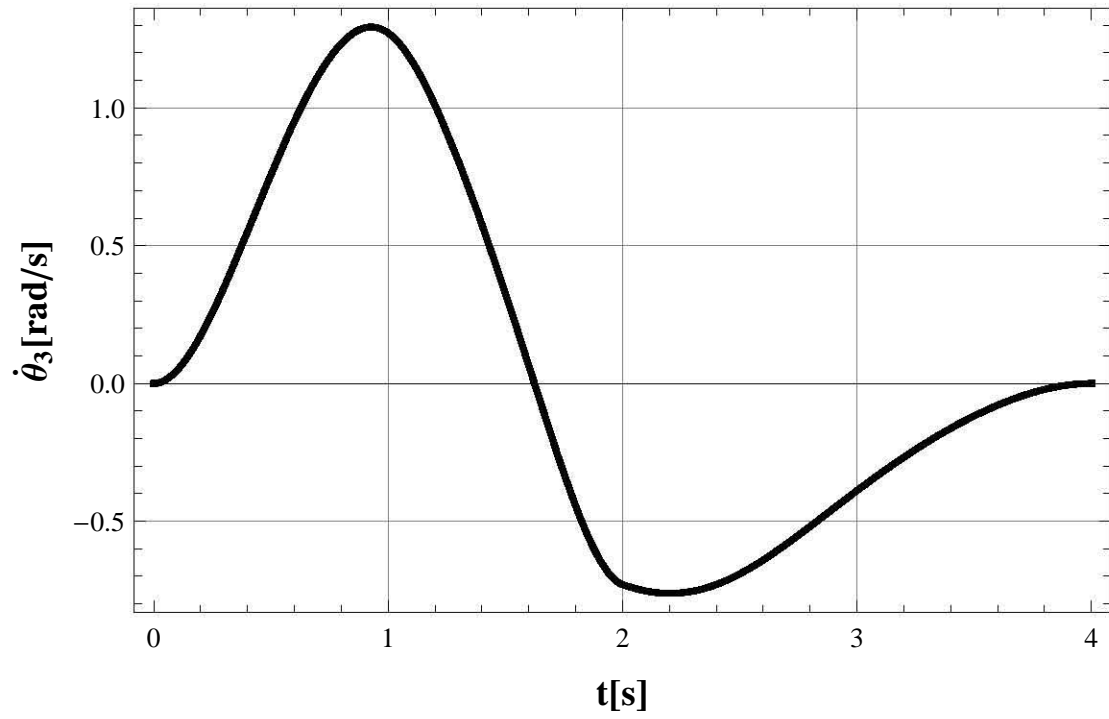


Figura 2.19: Velocidad angular  $\dot{\theta}_3$

### 2.2.2. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{18}$

Obteniendo el ángulo  $\theta_{18}$  al derivar con respecto al tiempo la ecuación 2.25, resulta:

$$\dot{\theta}_{18} = \dot{x}_e V_5 + \dot{y}_e V_6 + \dot{z}_e V_7 + \dot{X}_c V_8 + \dot{Y}_c V_9 + \dot{Z}_c V_{10} + \dot{\theta}_3 V_{11} \quad (2.64)$$

donde  $V_5$ ,  $V_6$  y  $V_7$  se obtienen al agrupar términos que contienen a  $\dot{x}_e$ ,  $\dot{y}_e$  y  $\dot{z}_e$  respectivamente, al derivar  $\theta_{18}$  con respecto al tiempo. Así mismo  $V_8$ ,  $V_9$  y  $V_{10}$  al agrupar términos de  $\dot{X}_c$ ,  $\dot{Y}_c$  y  $\dot{Z}_c$ . Finalmente  $V_{11}$  para términos de  $\dot{\theta}_3$ .

En la figura 2.20 se presenta la gráfica correspondiente a la velocidad angular  $\dot{\theta}_{18}$  de la extremidad del robot. Se puede apreciar claramente el momento en que que la extremidad es posicionada en el suelo, ya que después de que ocurre esto la velocidad de este ángulo se ve reducida en gran medida.

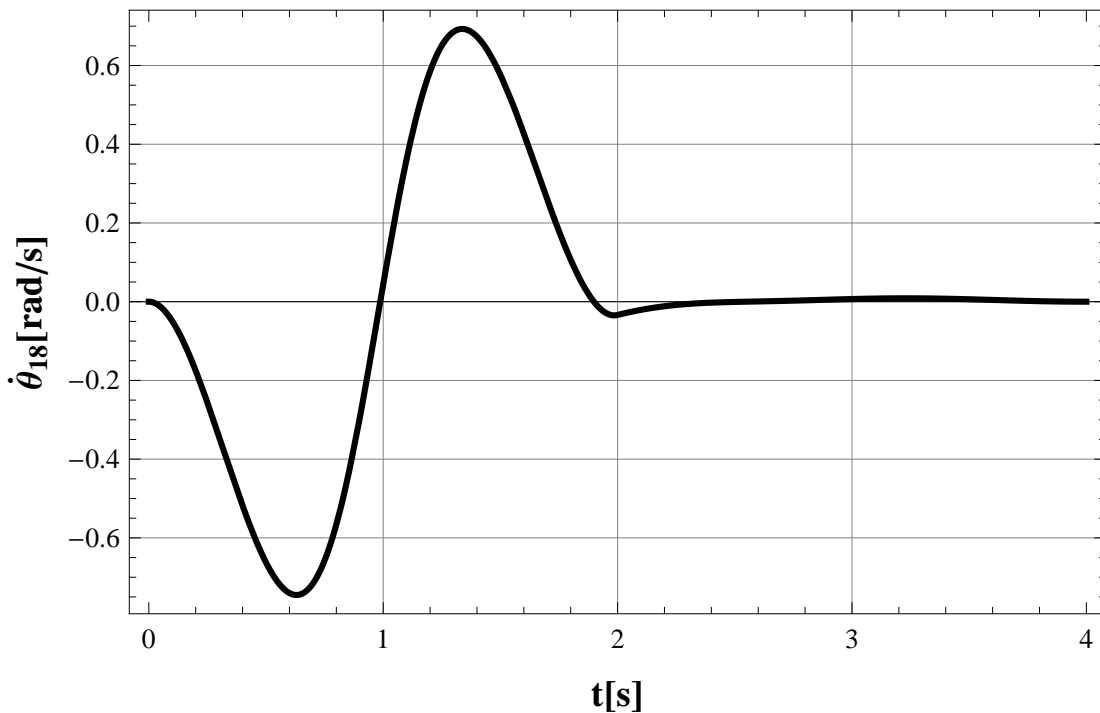


Figura 2.20: Velocidad Angular  $\dot{\theta}_{18}$

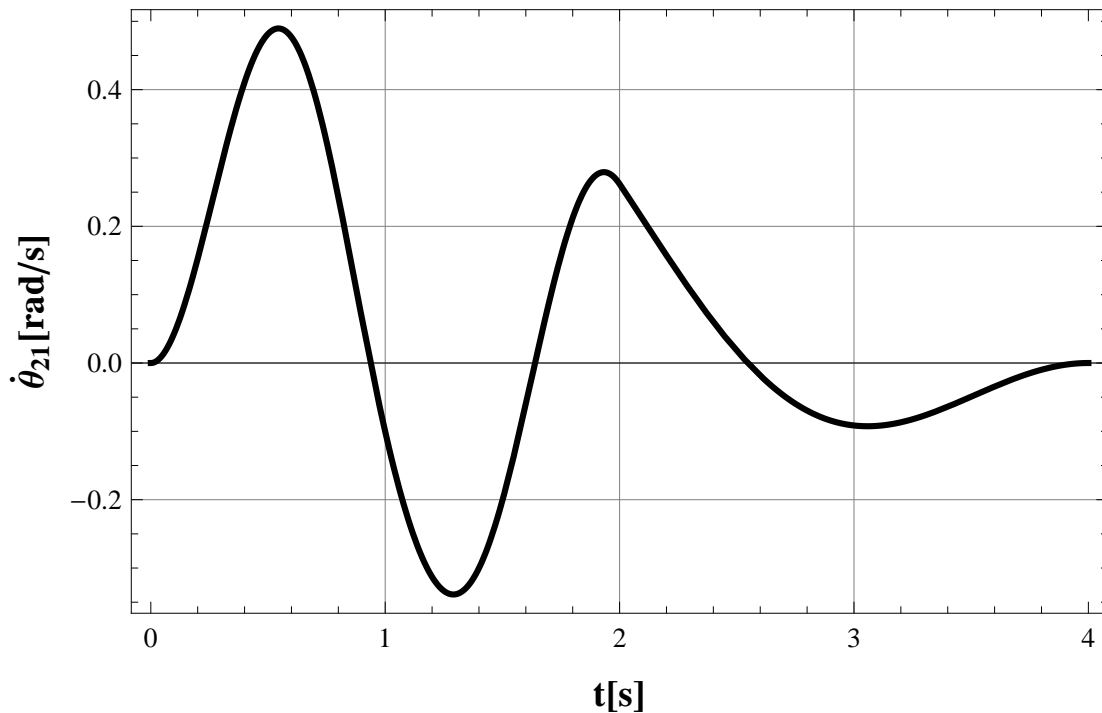
### 2.2.3. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{21}$

Al tomar la ecuación 2.30 y derivarla con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{\theta}_{21} = (\dot{x}_e V_{12} + \dot{y}_e V_{13} + \dot{z}_e V_{14} + \dot{X}_c V_{15} + \dot{Y}_c V_{16} + \dot{Z}_c V_{17} + \dot{\theta}_3 V_{18} + \dot{\theta}_{18} V_{19}) V_{20} \quad (2.65)$$

donde  $V_{12}$ ,  $V_{13}$  y  $V_{14}$  se obtienen al agrupar términos que contienen  $\dot{x}_e$ ,  $\dot{y}_e$  y  $\dot{z}_e$  a respectivamente, al derivar  $\theta_{21}$  con respecto al tiempo. Así mismo  $V_{15}$ ,  $V_{16}$  y  $V_{17}$  al agrupar términos de  $\dot{X}_c$ ,  $\dot{Y}_c$  y  $\dot{Z}_c$ ,  $V_{18}$  y  $V_{19}$  para términos de  $\dot{\theta}_3$  y  $\dot{\theta}_{18}$ .  $V_{20}$  se obtiene al factorizar valores semejantes en todas las variables.

La gráfica de la velocidad angular  $\dot{\theta}_{21}$  de la extremidad es presentada en la figura 2.21.



**Figura 2.21:** Velocidad Angular  $\dot{\theta}_{21}$

### 2.2.4. Velocidad Angular $\dot{\theta}_7$

Tomando la ecuación 2.45 y derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\theta}_7 = \dot{\theta}_{18}V_{21} + \dot{\theta}_{21}V_{22} \quad (2.66)$$

donde  $V_{21}$  y  $V_{22}$  se obtienen al agrupar términos que contienen a  $\dot{\theta}_{18}$  y  $\dot{\theta}_{21}$  respectivamente, al derivar  $\theta_7$  con respecto al tiempo.

Se puede observar el comportamiento de la velocidad angular  $\dot{\theta}_7$  de la extremidad en la figura 2.22.

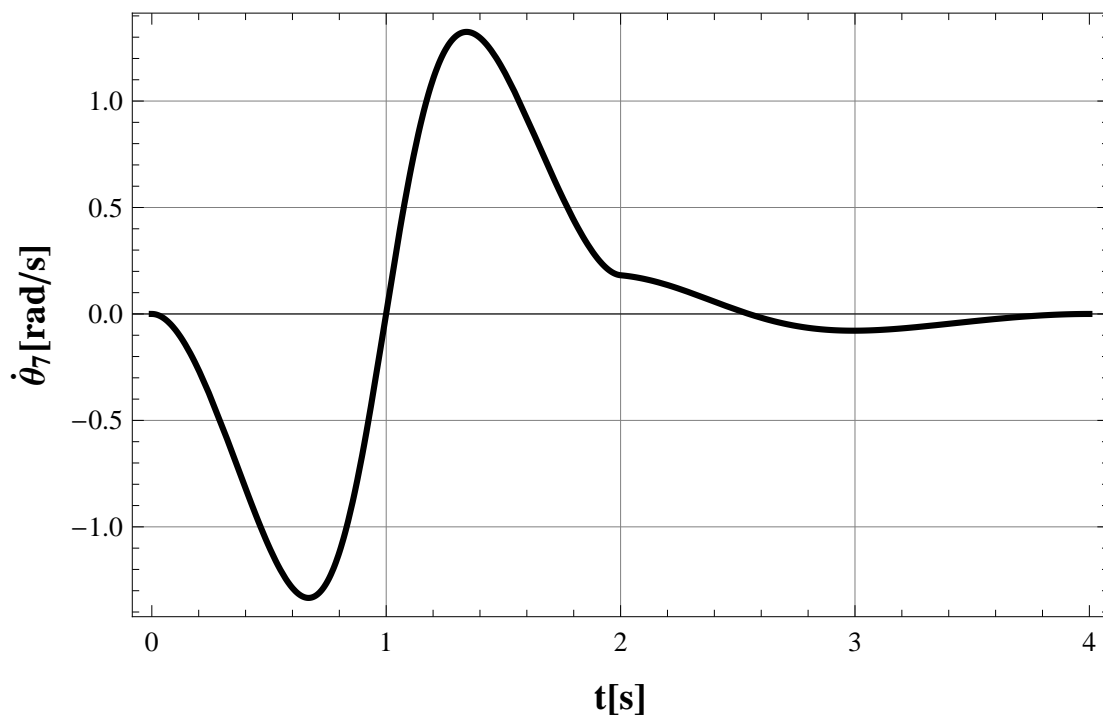


Figura 2.22: Velocidad Angular  $\dot{\theta}_7$

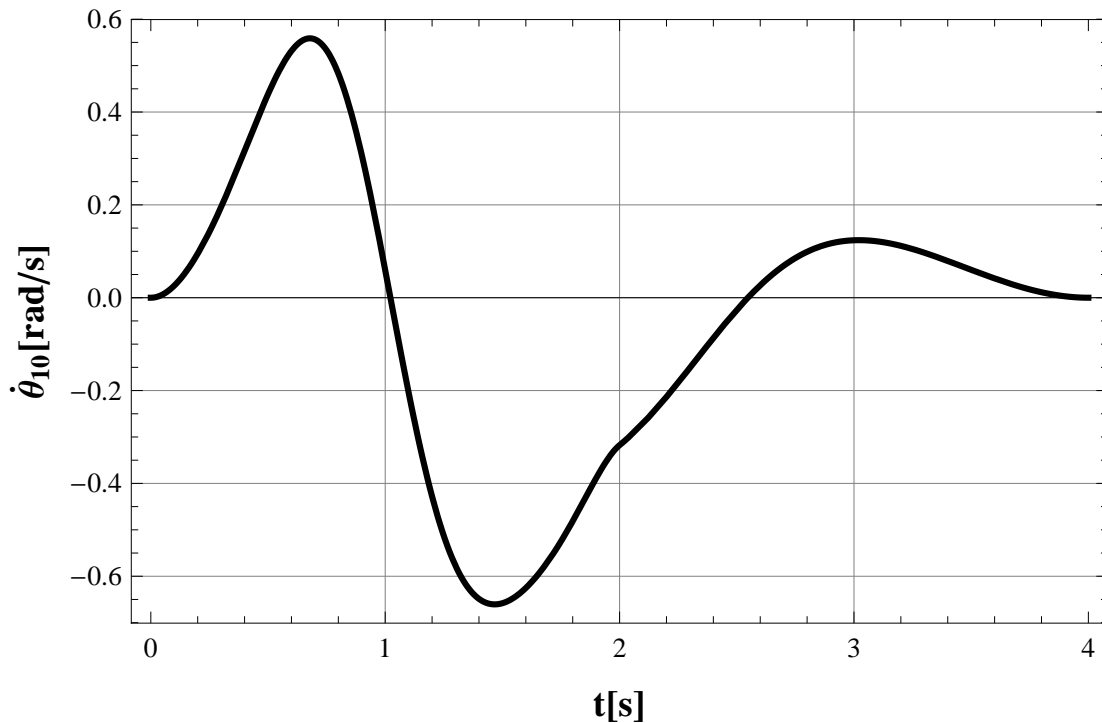
### 2.2.5. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{10}$

Tomando la ecuación 2.56 y derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\theta}_{10} = (\dot{\theta}_{18}V_{23} + \dot{\theta}_{21}V_{24} + \dot{\theta}_7V_{25}) V_{26} \quad (2.67)$$

donde  $V_{23}$ ,  $V_{24}$  y  $V_{25}$  se obtienen al agrupar términos que contienen a  $\dot{\theta}_{18}$ ,  $\dot{\theta}_{21}$  y  $\dot{\theta}_7$  respectivamente, al derivar  $\theta_{10}$  con respecto al tiempo. Para obtener  $V_{26}$  se factorizan los valores semejantes en todas las variables.

En la figura 2.23 se aprecia la gráfica de la velocidad angular  $\dot{\theta}_{10}$  de la extremidad.



**Figura 2.23:** Velocidad Angular  $\dot{\theta}_{10}$

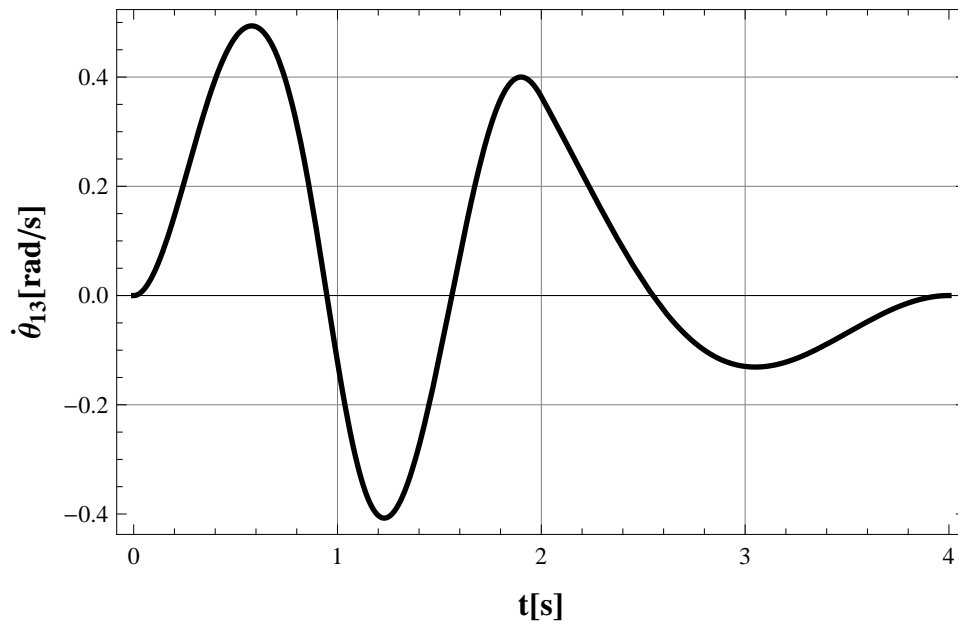
### 2.2.6. Velocidad Angular $\dot{\theta}_{13}$

Tomando la ecuación 2.61 y derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\theta}_{13} = (\dot{\theta}_{18}V_{27} + \dot{\theta}_{10}V_{28} + \dot{\theta}_7V_{29}) V_{30} \quad (2.68)$$

donde  $V_{27}$ ,  $V_{28}$  y  $V_{29}$  se obtienen al agrupar términos que contienen a  $\dot{\theta}_{18}$ ,  $\dot{\theta}_{10}$  y  $\dot{\theta}_7$  respectivamente, al derivar  $\theta_{13}$  con respecto al tiempo. Al factorizar los términos semejantes en todas las variables se obtiene  $V_{30}$ .

En la figura 2.24 se muestra la gráfica correspondiente a la velocidad angular  $\dot{\theta}_{13}$  de la extremidad.



**Figura 2.24:** Velocidad Angular  $\dot{\theta}_{13}$

## 2.3. Análisis de Aceleración

El problema cinemático inverso para la aceleración es:

Dada la aceleración del cuerpo  $(\ddot{X}_c, \ddot{Y}_c, \ddot{Z}_c)$  y de la extremidad  $(\ddot{x}_e, \ddot{y}_e, \ddot{z}_e)$ , encontrar  $\ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_7, \ddot{\theta}_{10}, \ddot{\theta}_{13}, \ddot{\theta}_{18}$  y  $\ddot{\theta}_{21}$ , los cuales definen la aceleración de las juntas.

En el análisis de aceleración, se asume que la posición, orientación, y velocidad de los cuerpos son conocidos y que son resultado del análisis de posición y de velocidad. La aceleración de un punto o un cuerpo rígido que experimenta movimiento, puede ser obtenida por la derivada respecto al tiempo de la velocidad.

### 2.3.1. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_3$

Tomando la ecuación 2.63 y derivando respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta}_3 = \ddot{x}_e V_1 + \ddot{X}_c V_2 + \ddot{Y}_c V_3 + \ddot{y}_e V_4 + K_1 \quad (2.69)$$

donde:

$$K_1 = \dot{x}_e \dot{V}_1 + \dot{X}_c \dot{V}_2 + \dot{Y}_c \dot{V}_3 + \dot{y}_e \dot{V}_4$$

La gráfica correspondiente a la aceleración angular  $\ddot{\theta}_3$  de la extremidad del robot se presenta en la figura 2.25. En esta se observa el cambio del comportamiento, correspondiente al traslado y al posicionamiento de la extremidad, y al movimiento del cuerpo.



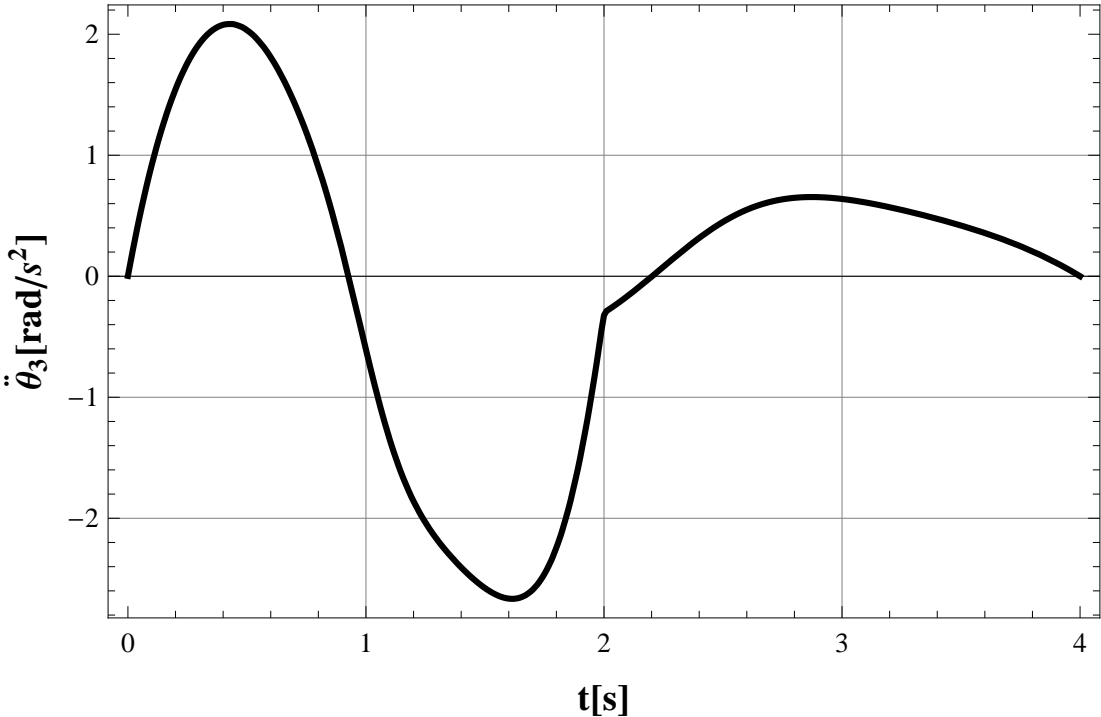


Figura 2.25: Aceleración Angular  $\ddot{\theta}_3$

### 2.3.2. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{18}$

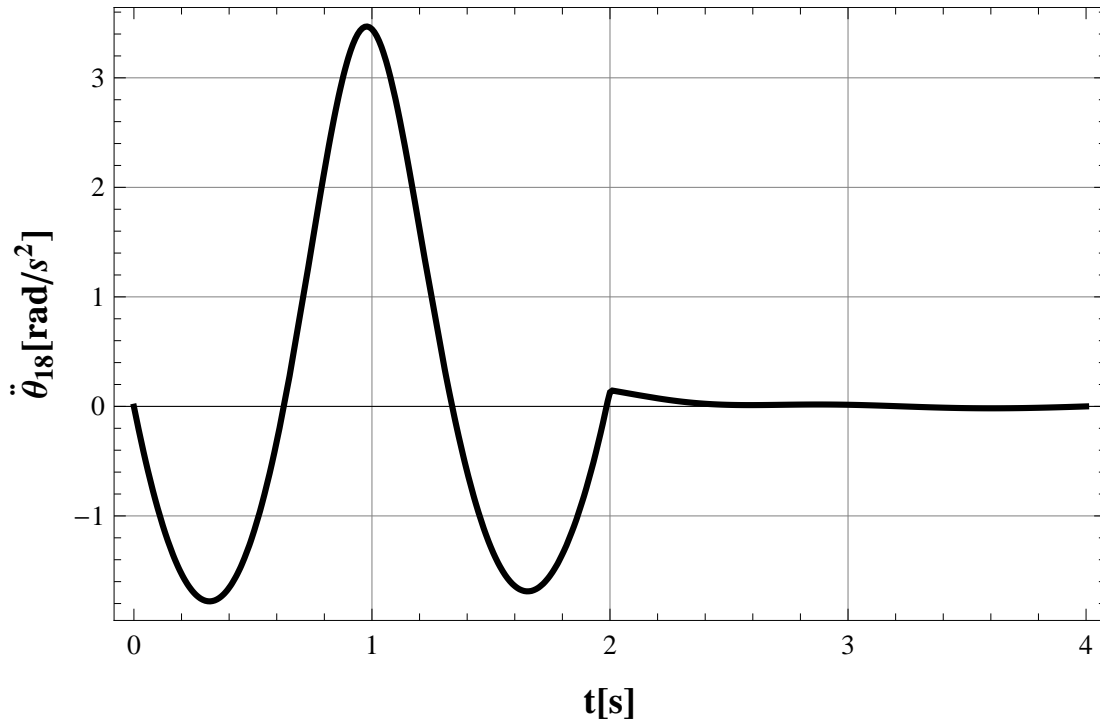
Tomando la ecuación 2.64 y derivando respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta}_{18} = \ddot{x}_e V_5 + \ddot{y}_e V_6 + \ddot{z}_e V_7 + \ddot{X}_c V_8 + \ddot{Y}_c V_9 + \ddot{Z}_c V_{10} + \ddot{\theta}_3 V_{11} + K_2 \quad (2.70)$$

donde:

$$K_2 = \dot{x}_e \dot{V}_5 + \dot{y}_e \dot{V}_6 + \dot{z}_e \dot{V}_7 + \dot{X}_c \dot{V}_8 + \dot{Y}_c \dot{V}_9 + \dot{Z}_c \dot{V}_{10} + \dot{\theta}_3 \dot{V}_{11}$$

En la figura 2.26 está mostrada la gráfica de la aceleración angular  $\ddot{\theta}_{18}$  de la extremidad del robot. De igual manera se aprecia un cambio considerable en la aceleración, correspondiente a los movimientos de la extremidad.



**Figura 2.26:** Aceleración Angular  $\ddot{\theta}_{18}$

### 2.3.3. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{21}$

Tomando la ecuación 2.65 y derivando respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta}_{21} = \left( \ddot{x}_e V_{12} + \ddot{y}_e V_{13} + \ddot{z}_e V_{14} + \ddot{X}_c V_{15} + \ddot{Y}_c V_{16} + \ddot{Z}_c V_{17} + \ddot{\theta}_3 V_{18} + \ddot{\theta}_{18} V_{19} \right) V_{20} + K_3 \quad (2.71)$$

donde:

$$K_3 = \left( \dot{x}_e \dot{V}_{12} + \dot{y}_e \dot{V}_{13} + \dot{z}_e \dot{V}_{14} + \dot{X}_c \dot{V}_{15} + \dot{Y}_c \dot{V}_{16} + \dot{Z}_c \dot{V}_{17} + \dot{\theta}_3 \dot{V}_{18} + \dot{\theta}_{18} \dot{V}_{19} \right) V_{20} \\ + \left( \dot{x}_e V_{12} + \dot{y}_e V_{13} + \dot{z}_e V_{14} + \dot{X}_c V_{15} + \dot{Y}_c V_{16} + \dot{Z}_c V_{17} + \dot{\theta}_3 V_{18} + \dot{\theta}_{18} V_{19} \right) \dot{V}_{20}$$

La aceleración angular  $\ddot{\theta}_{21}$  de la extremidad del robot es mostrada en la figura 2.27.

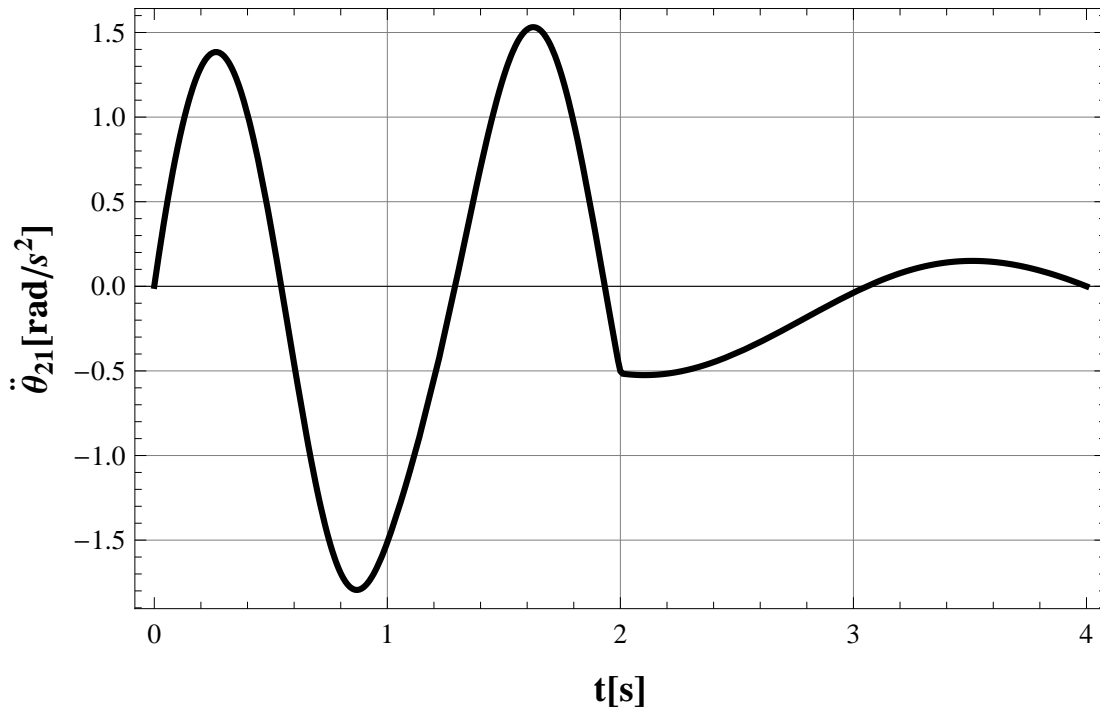


Figura 2.27: Aceleración Angular  $\ddot{\theta}_{21}$

### 2.3.4. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_7$

Tomando la ecuación 2.66 y derivando respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta}_7 = \ddot{\theta}_{18}V_{21} + \ddot{\theta}_{21}V_{22} + K_4 \quad (2.72)$$

donde:

$$K_4 = \dot{\theta}_{18}\dot{V}_{21} + \dot{\theta}_{21}\dot{V}_{22}$$

La figura 2.28 muestra la gráfica de la aceleración angular  $\ddot{\theta}_7$  de la extremidad del robot.

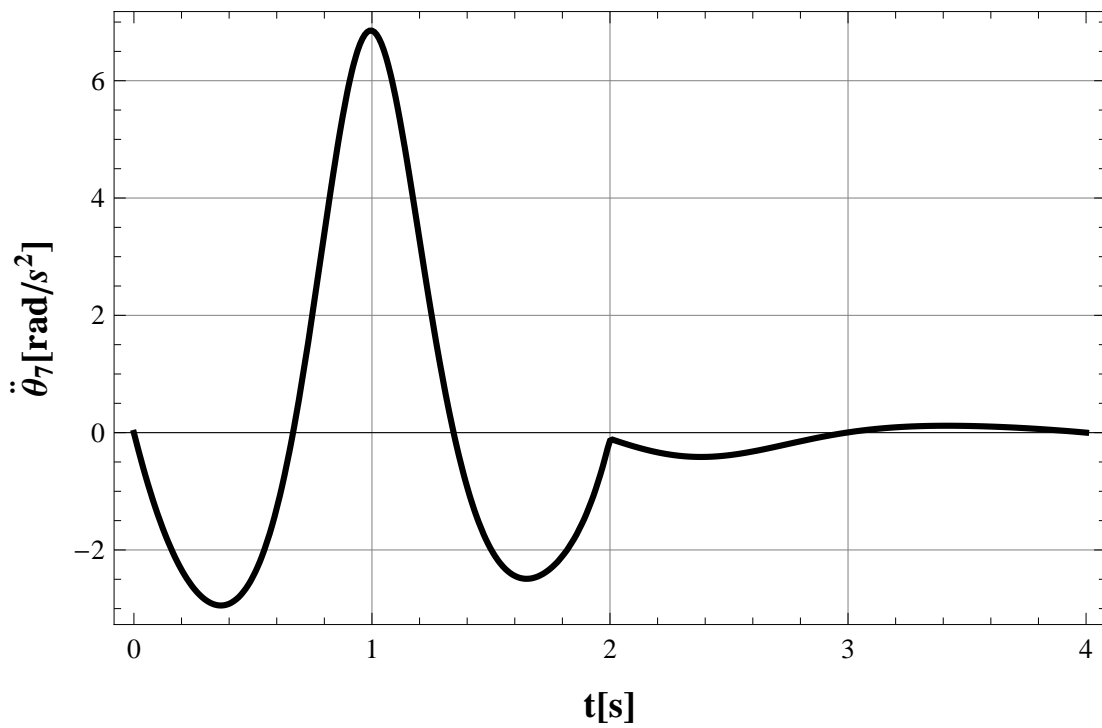


Figura 2.28: Aceleración Angular  $\ddot{\theta}_7$

### 2.3.5. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{10}$

Tomando la ecuación 2.67 y derivando respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta}_{10} = (\ddot{\theta}_{18}V_{23} + \ddot{\theta}_{21}V_{24} + \ddot{\theta}_7V_{25})V_{26} + K_5 \quad (2.73)$$

donde:

$$K_5 = (\dot{\theta}_{18}\dot{V}_{23} + \dot{\theta}_{21}\dot{V}_{24} + \dot{\theta}_7\dot{V}_{25})V_{26} + (\dot{\theta}_{18}V_{23} + \dot{\theta}_{21}V_{24} + \dot{\theta}_7V_{25})\dot{V}_{26}$$

La gráfica de la aceleración angular  $\ddot{\theta}_{10}$  de la extremidad del robot se presenta en la figura 2.29.

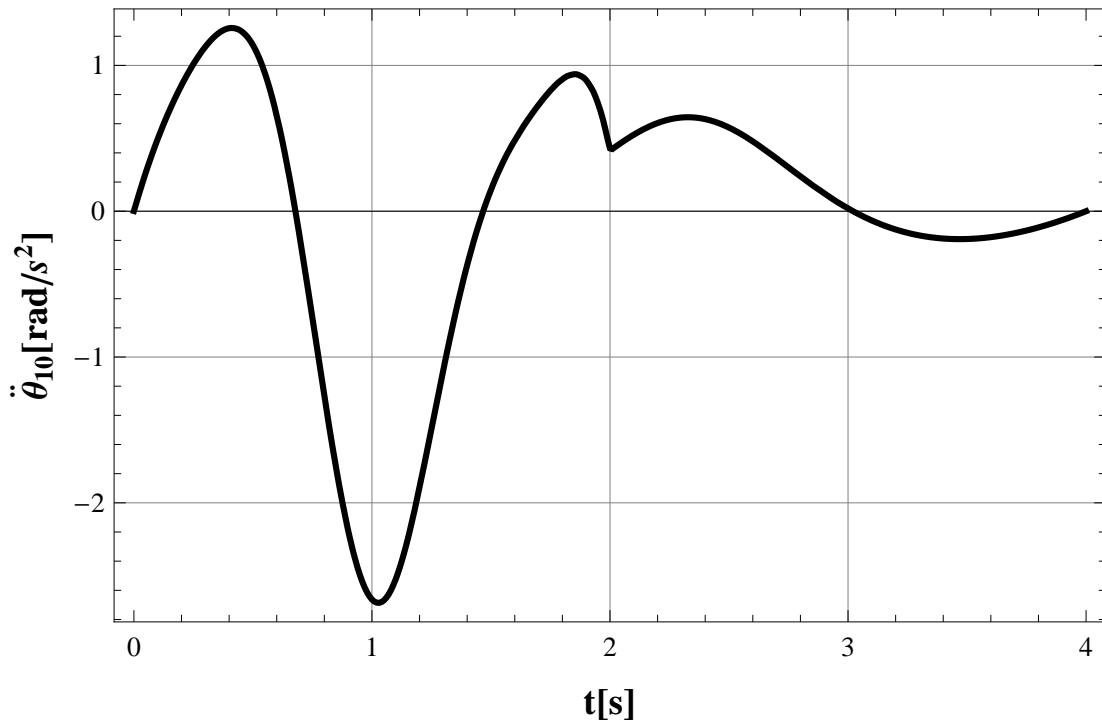


Figura 2.29: Aceleración Angular  $\ddot{\theta}_{10}$

### 2.3.6. Aceleración Angular $\ddot{\theta}_{13}$

Tomando la ecuación 2.68 y derivando respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta}_{13} = (\ddot{\theta}_{18}V_{27} + \ddot{\theta}_{10}V_{28} + \ddot{\theta}_7V_{29})V_{30} + K_6 \quad (2.74)$$

donde:

$$K_6 = (\dot{\theta}_{18}\dot{V}_{27} + \dot{\theta}_{10}\dot{V}_{28} + \dot{\theta}_7\dot{V}_{29})V_{30} + (\dot{\theta}_{18}V_{27} + \dot{\theta}_{10}V_{28} + \dot{\theta}_7V_{29})\dot{V}_{30}$$

En la figura 2.30 se aprecia la gráfica correspondiente a la aceleración angular  $\ddot{\theta}_{13}$  de la extremidad del robot.

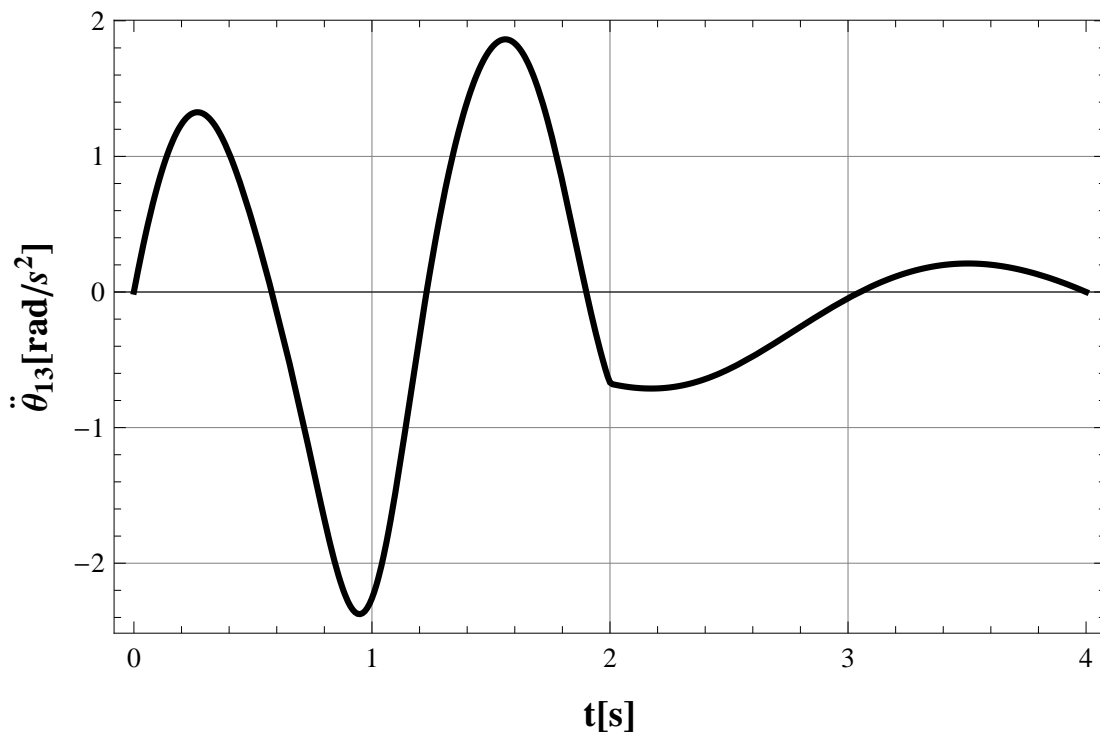


Figura 2.30: Aceleración Angular  $\ddot{\theta}_{13}$



# Capítulo 3

## Análisis Dinámico

En este capítulo se presenta la formulación Newton-Euler para el análisis dinámico de la extremidad de un RMCD. La formulación de Newton-Euler incorpora todas las fuerzas aplicadas sobre los eslabones, por lo tanto, las ecuaciones dinámicas resultantes incluyen todas las fuerzas de restricción entre dos eslabones adyacentes. Estas fuerzas de restricción son útiles para el diseño de los eslabones y rodamientos.

El método consiste en el cálculo adelantado de las velocidades y aceleraciones de cada eslabón, seguido por el cálculo reiterativo de las fuerzas y momentos de cada junta. Para el desarrollo de este análisis se emplean matrices de rotación básicas que nos permiten representar la rotación de un cuerpo en el espacio. Ya que la rotación es un giro en el espacio de tres grados de libertad, un conjunto de tres parámetros independientes son suficientes para describir la orientación de un cuerpo en el espacio [86].

Las siguientes matrices representan la rotación alrededor de los ejes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  respectivamente:

$$\mathbf{R}_4(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{R}_5(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

$$\mathbf{R}_6(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1c)$$



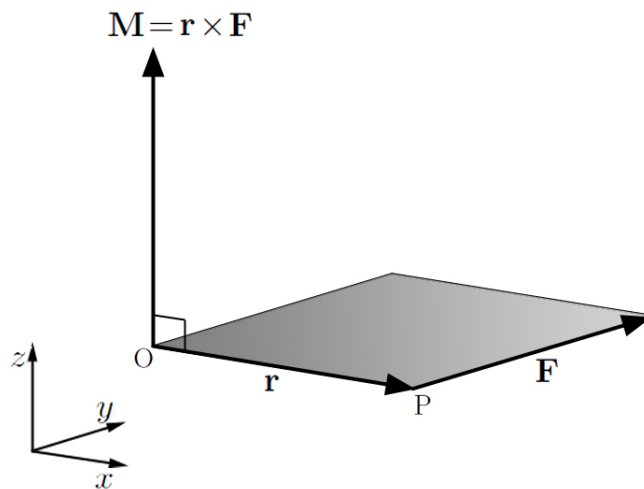
De igual manera se definen las matrices antisimétricas que representan las traslaciones para los ejes  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ :

$$\mathbf{S}_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{S}_2(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{S}_3(z) = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2c)$$

El problema general en el análisis dinámico, es la determinación de los efectos de las fuerzas externas que aseguran el movimiento requerido para ciertos cuerpos, la determinación del movimiento de los cuerpos restantes y finalmente el cálculo de las reacciones en todos los pares cinemáticos.

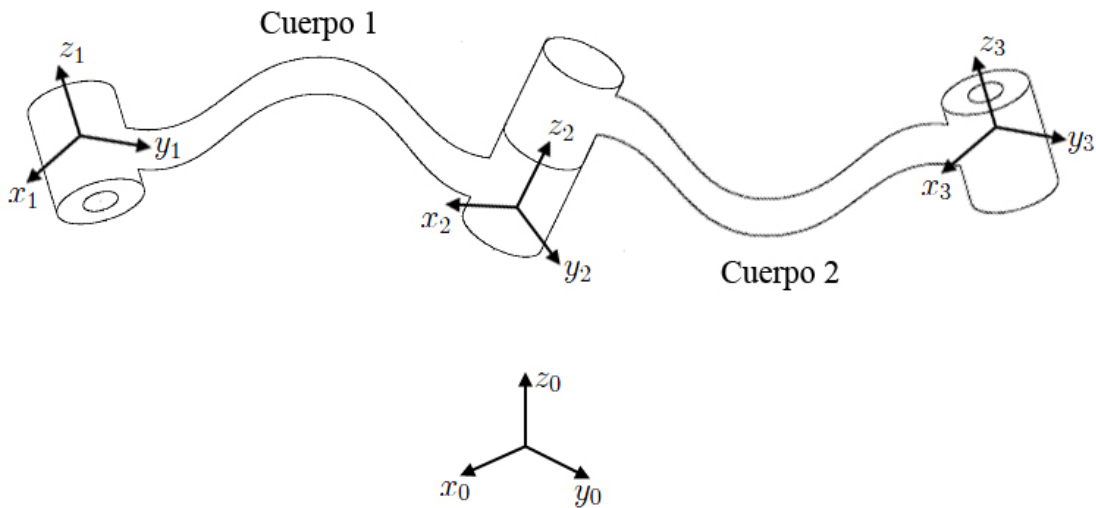


**Figura 3.1:** Momento de una fuerza

Una fuerza actuando sobre un cuerpo rígido tiene la misma característica que un vector sujeto a una línea. Este es un vector de línea cuyos efectos pueden ser expresados en cualquier punto, sustituyéndolo por un vector fuerza  $\mathbf{F}$ , y un vector acoplado  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector radio y determina la posición del punto actual P de la fuerza sobre la línea de acción con respecto al punto escogido O (Fig. 3.1). Se expresarán los efectos de esta sustitución de acuerdo a la siguiente definición [87]:

$$\mathbf{F}_0 = \left[ \mathbf{F}, \mathbf{M} \right] = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z] \quad (3.3)$$

Para ensamblar las ecuaciones básicas se utilizan diagramas de cuerpo libre. Existen fuerzas de tres tipos actuando sobre un cuerpo libre  $j$ : fuerzas activas o aplicadas, fuerzas de reacción y fuerzas de inercia. Se denotarán estas fuerzas con el símbolo  $\mathbf{F}$  con los superíndices A, R e I respectivamente. Los efectos de todas estas fuerzas deben estar en balance, de acuerdo al principio de d'Alembert. Para poder comparar estas fuerzas, estas deben estar expresadas en el mismo sistemas de referencia de coordenadas. Esto puede ser en un marco de referencia fijo. Sin embargo las ecuaciones también pueden ser definidas en un sistema de referencia local. Se toma el sistema de cuerpos en la figura 3.2 para ejemplificar estas definiciones.



**Figura 3.2:** Sistema de dos cuerpos

Es posible separar los cuerpos y hacer diagramas de cuerpo libre, montando sistemas de referencia en los ejes de revolución como se muestra en la figura 3.3.

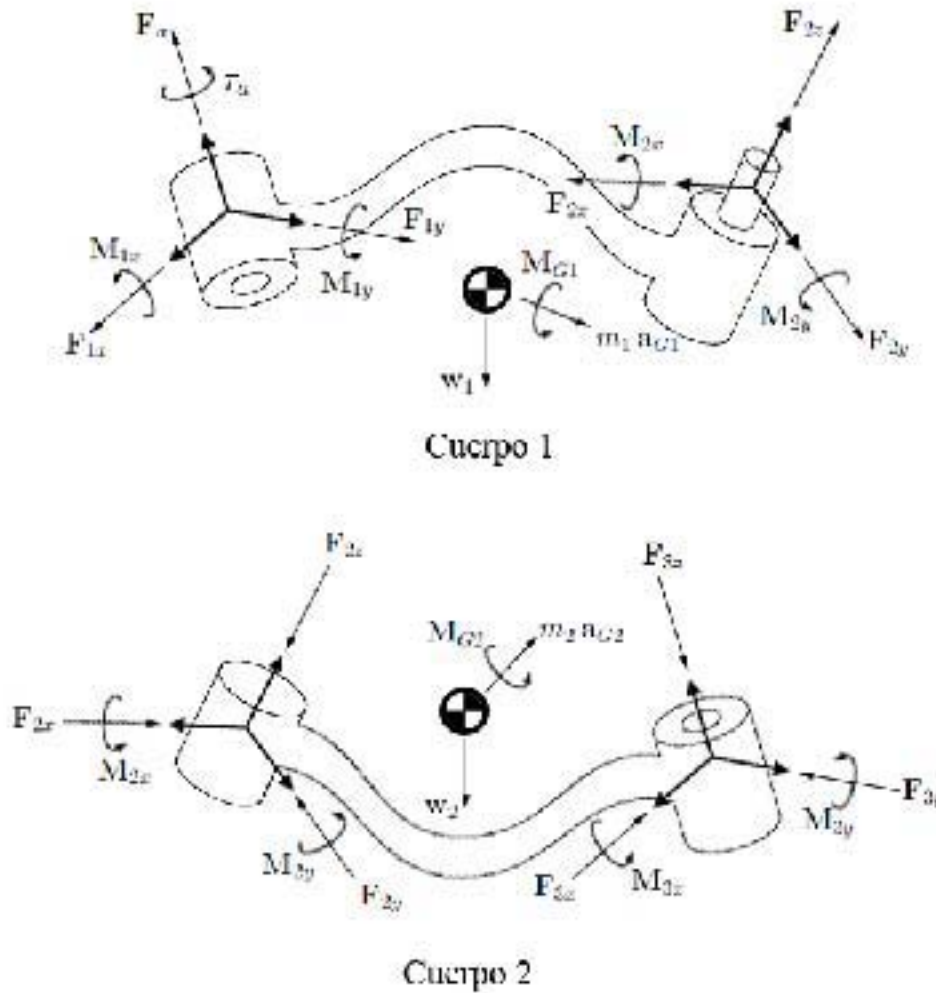


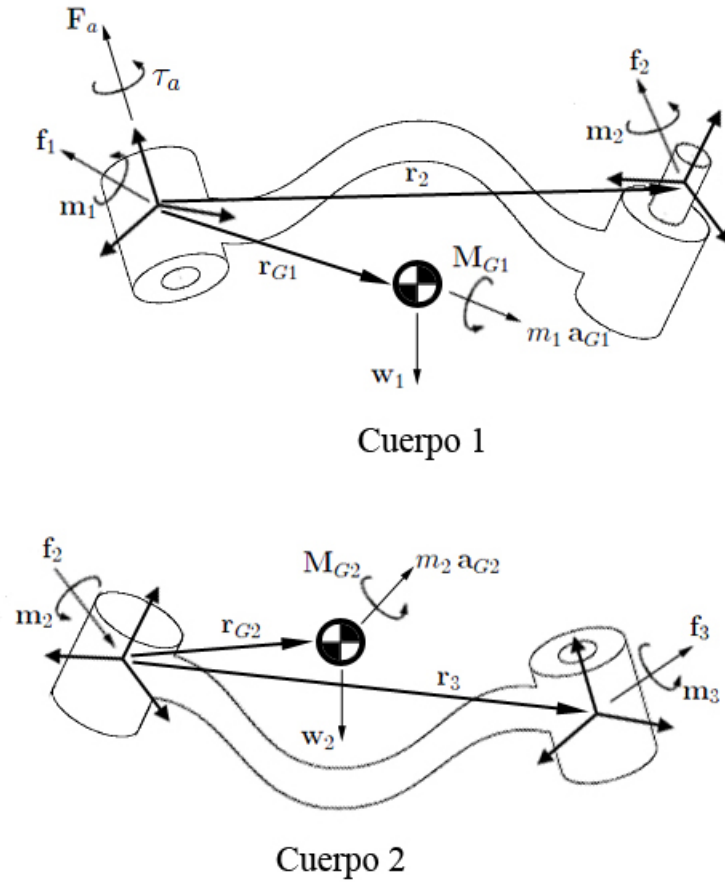
Figura 3.3: Fuerzas y momentos ejercidos en los eslabones

Las ecuaciones de equilibrio dinámico se definen como:

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}_G \quad (3.4a)$$

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{r} \times m \mathbf{a}_G \quad (3.4b)$$

donde  $m \mathbf{a}_G$  y  $\mathbf{M}_g$  son las fuerzas y momentos inerciales respectivamente definidos en la base inercial  $(x_0, y_0, z_0)$ .



**Figura 3.4:** Fuerzas y momentos definidos en la base  $(x_1, y_1, z_1)$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio dinámico al cuerpo 1 y definiéndolas en la base local  $(x_1, y_1, z_1)$  (Fig. 3.4), se tiene:

$$\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{w}_1 = \mathbf{R}_{1,0}(m \mathbf{a}_{G1}) \quad (3.5a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{w}_1 = \\ \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{M}_{G1} + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{R}_{1,0}(m \mathbf{a}_{G1}) \end{aligned} \quad (3.5b)$$

donde:

$$\mathbf{f}_a = [0, 0, f_a]^T$$

$$\mathbf{f}_1 = [f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}]^T$$

$$\mathbf{f}_2 = [f_{2x}, f_{2y}, f_{2z}]^T$$

$$\mathbf{w}_1 = [0, 0, m_1 g]^T$$

$$\mathbf{a}_{G1} = [a_{G1x}, a_{G1y}, a_{G1z}]^T$$

$$\boldsymbol{\tau}_a = [0, 0, \tau_a]^T$$

$$\mathbf{m}_1 = [M_{1x}, M_{1y}, 0]^T$$

$$\mathbf{m}_2 = [M_{1x}, M_{1y}, 0]^T$$

$$\mathbf{M}_{G1} = [M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T$$

Los vectores  $\mathbf{f}_a$ ,  $\mathbf{f}_1$ ,  $\boldsymbol{\tau}_a$  y  $\mathbf{m}_1$  están definidos en la base  $(x_1, y_1, z_1)$ . Los vectores  $\mathbf{f}_2$  y  $\mathbf{m}_2$  están definidos en la base  $(x_2, y_2, z_2)$ . Los vectores  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{a}_{G1}$  y  $\mathbf{M}_{G1}$  están definidos en la base  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Por otro lado, se tiene que  $\mathbf{R}_{1,0}$  y  $\mathbf{R}_{1,2}$  son matrices de transformación, para desplazarse de la base  $(x_0, y_0, z_0)$  a la base  $(x_1, y_1, z_1)$  y de la base  $(x_2, y_2, z_2)$  a la base  $(x_1, y_1, z_1)$  respectivamente. Los vectores que no son transformados, ya están definidos en la base  $(x_1, y_1, z_1)$ . Se emplean matrices antisimétricas para definir el producto cruz, esto es  $\mathbf{S} = \mathbf{r} \times$ , por lo tanto las ecuaciones 3.5a y 3.5b se reescriben como:

$$\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 = \mathbf{R}_{1,0}(m\mathbf{a}_{G1}) \quad (3.6a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{S}_2\mathbf{R}_{1,2}(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0}\mathbf{w}_1 = \mathbf{R}_{1,0}\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{R}_{1,0}(m\mathbf{a}_{G1}) \quad (3.6b)$$

Ahora se agrupan las ecuaciones en un arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \boldsymbol{\tau}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{a}_{G1} \\ \mathbf{M}_{G1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Renombrando:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_{1,2} \mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{F}_{G1} \quad (3.8)$$

donde:

$$\mathbf{F}_a = [\mathbf{f}_a, \boldsymbol{\tau}_a]^T = [0, 0, F_a, 0, 0, \tau_a]^T$$

$$\mathbf{F}_1 = [\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1]^T = [F_{1x}, F_{1y}, 0, M_{1x}, M_{1y}, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_2 = [\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2]^T = [F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, M_{1x}, M_{1y}, 0]^T$$

$$\mathbf{W}_1 = [\mathbf{w}_1, \mathbf{0}]^T = [0, 0, -m_{G1} g, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_{G1} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1]^T = [a_{G1x}, a_{G1y}, a_{G1z}, M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T$$

$$\mathbf{Q}_{1,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{1,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,2} \end{bmatrix}$$

Agrupando en fuerzas aplicadas, restrictivas e inerciales se tiene:

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R + \mathbf{F}^I = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

donde:

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}_a + \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{W}_1$$

$$\mathbf{F}^R = \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_{1,2} \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{F}_{G1}$$

Estas ecuaciones se definen como:

$\mathbf{F}^A$ : Torsor de fuerzas y momentos aplicados al cuerpo.

$\mathbf{F}^R$ : Torsor de fuerzas y momentos de reacción del cuerpo.

$\mathbf{F}^I$ : Torsor de fuerzas y momentos inerciales.

$\mathbf{Q}_{i,j}$ : Matriz de transformación de torsesores de la base  $i$  a la base  $j$ .

Para un análisis estático se tiene que:

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{0}$$

La ecuación 3.9 representa las ecuaciones de equilibrio dinámico mediante el uso de torsesores de fuerzas. Un torsor de fuerza es un vector de 6 componentes, los primeros tres componentes son fuerzas asociadas a la traslación del cuerpo y los segundos tres componentes son torques o momentos asociados al giro del cuerpo. Una expresión similar puede ser obtenida para el cuerpo 2.

### 3.1. Análisis Dinámico de la Extremidad

Para poder realizar el análisis dinámico de la extremidad se definen los cuerpos mostrados en la figura 3.5.

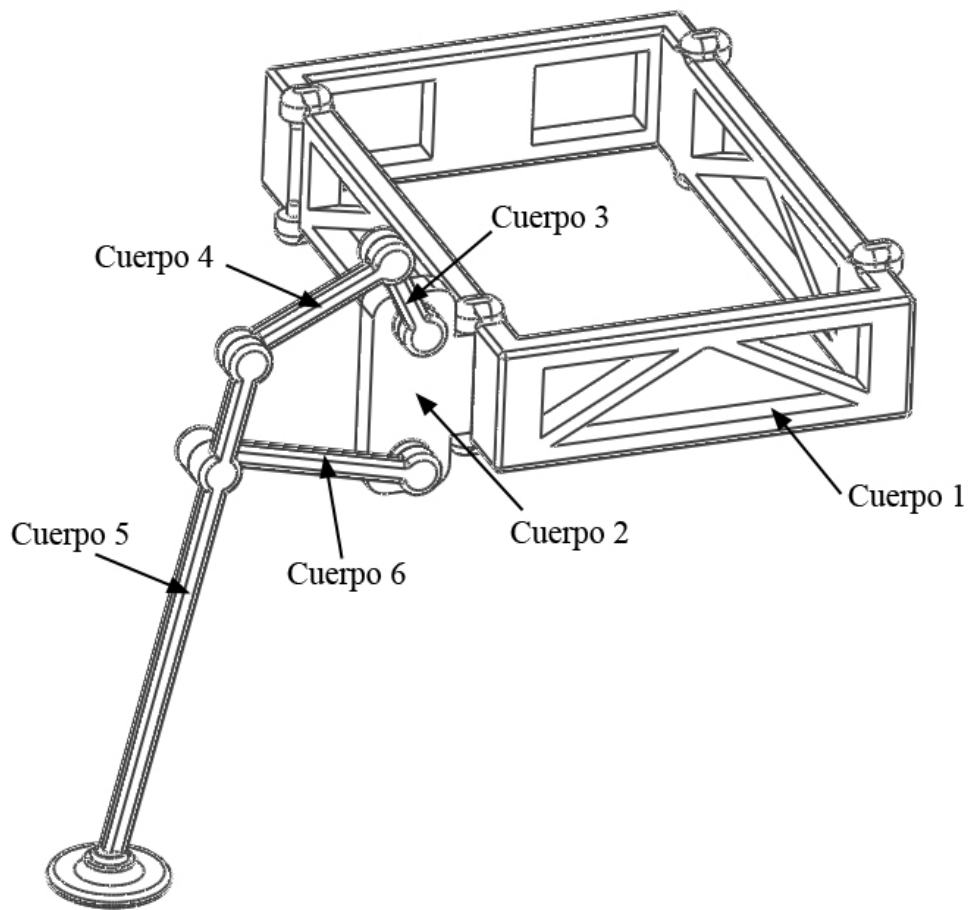
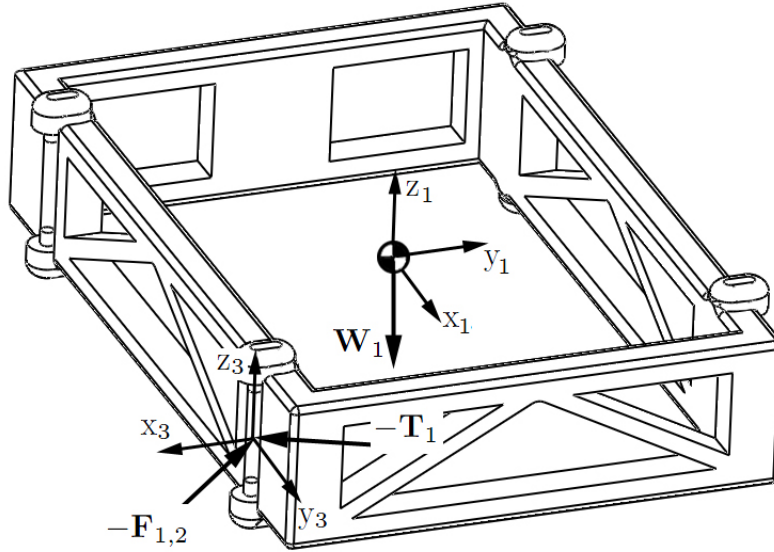


Figura 3.5: Cuerpos que integran la extremidad



### 3.1.1. Análisis del Cuerpo 1

En la figura 3.6 se muestra el diagrama de cuerpo libre (DCL) para el cuerpo 1.



**Figura 3.6:** DCL para el cuerpo 1

Tomando la suma de las fuerzas que actúan en el cuerpo 1 ( $c1$ ) respecto al sistema de referencia  $(x_1, y_1, z_1)$ , se deduce:

$$\mathbf{F}_{c1}^A + \mathbf{F}_{c1}^R + \mathbf{F}_{c1}^I = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{c1}^A = \mathbf{Q}_{1,0} \mathbf{W}_1 - \mathbf{Q}_{1,3} \mathbf{T}_1$$

$$\mathbf{F}_{c1}^R = -\mathbf{Q}_{1,3} \mathbf{F}_{1,2}$$

$$\mathbf{F}_{c1}^I = [\mathbf{F}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}]^2$$

Se define:

$$\mathbf{F}_{G1} = -m_1 \mathbf{a}_{G1}$$

$$\mathbf{M}_{G1} = -(\mathbf{I}_{G1} \mathbf{A}_{1,0} + \boldsymbol{\Omega}_{1,0} \times (\mathbf{I}_{G1} \boldsymbol{\Omega}_{1,0}))$$

$\mathbf{I}_{G1}$  es la matriz de inercias medidas en el centro de gravedad del cuerpo 1 y está definida como:

$$\mathbf{I}_{G1} = \begin{bmatrix} I_{1xx} & I_{1xy} & I_{1xz} \\ I_{1yx} & I_{1yy} & I_{1yz} \\ I_{1zx} & I_{1zy} & I_{1zz} \end{bmatrix}$$

También se tiene:

$$\mathbf{T}_1 = [0, 0, 0, 0, 0, \tau_1]^T$$

$$\mathbf{F}_{1,2} = [F_{1,2x}, F_{1,2y}, F_{1,2z}, M_{1,2x}, M_{1,2y}, 0]^T$$

$$\mathbf{W}_1 = [0, 0, -m_{G1}g, 0, 0, 0]^T$$

Definiendo nuevamente:

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i,j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{i,j}\mathbf{R}_{i,j} & \mathbf{R}_{i,j} \end{bmatrix}$$

donde  $i$  es la base local en la que se está midiendo y  $j$  la base donde están aplicados los torsos.

Entonces:

$$\mathbf{Q}_{1,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{1,0}\mathbf{R}_{1,0} & \mathbf{R}_{1,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{1,3} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{1,3}\mathbf{R}_{1,3} & \mathbf{R}_{1,3} \end{bmatrix}$$

Tomando las matrices antisimétricas y de rotación antes definidas se tiene que:

$$\mathbf{R}_{1,0} = \mathbf{R}_6(0)$$

$$\mathbf{R}_{1,3} = \mathbf{R}_6(\theta_3)$$

$$\mathbf{S}_{1,0} = \mathbf{S}_1(0) + \mathbf{S}_2(0) + \mathbf{S}_3(0)$$

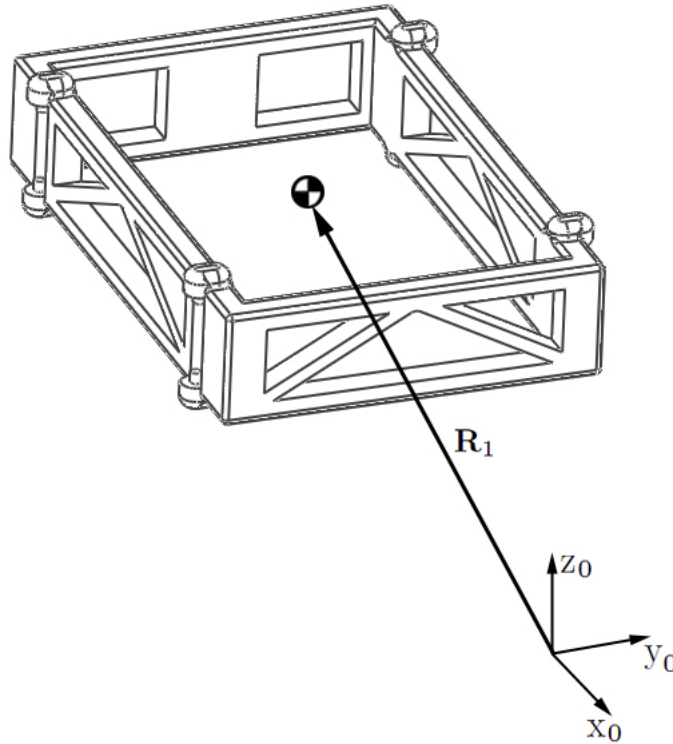
$$\mathbf{S}_{1,3} = \mathbf{S}_1(d_{2x}) + \mathbf{S}_2(d_{2y}) + \mathbf{S}_3(d_{2z})$$

### 3.1.1.1. Velocidad y Aceleración Angular

Debido a la trayectoria que se ha definido (Apéndice B), el cuerpo 1 describe una línea recta y no realiza cambios en su orientación a lo largo del movimiento, por lo tanto se tiene que:

$$\boldsymbol{\Omega}_{1,0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{A}_{1,0} = \mathbf{0}$$

### 3.1.1.2. Aceleración del Centro de Gravedad



**Figura 3.7:** Centro de gravedad del cuerpo 1

Definiendo el vector  $\mathbf{R}_{G1}$  de manera inercial, esto es, medido desde el sistema de referencia  $(x_0, y_0, z_0)$ . De la figura 3.7 se tiene que:

$$\mathbf{R}_{G1} = \mathbf{R}_1 \tag{3.11}$$

donde:  $\mathbf{R}_1 = [X_c, Y_c, Z_c]^T$

Derivando respecto al tiempo  $\mathbf{R}_{G1}$ , se obtiene la velocidad del centro de gravedad:

$$\mathbf{V}_{G1} = \mathbf{V}_1 \quad (3.12)$$

$$\mathbf{V}_1 = [\dot{X}_c, \dot{Y}_c, \dot{Z}_c]^T$$

Ahora para encontrar la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 1, se deriva respecto al tiempo la ecuación 3.12.

$$\mathbf{A}_{G1} = \mathbf{A}_1 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{A}_1 = [\ddot{X}_c, \ddot{Y}_c, \ddot{Z}_c]^T$$

$\mathbf{A}_{G1}$  se encuentra definido en la base local  $(x_0, y_0, z_0)$ , sin embargo, las ecuaciones para el cuerpo 1 han sido definidas en la base  $(x_1, y_1, z_1)$ , pero debido a que no existen rotaciones entre estas dos bases, resulta que:

$$\mathbf{a}_{G1} = \mathbf{A}_{G1}$$

Siendo  $\mathbf{a}_{G1}$  la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 1 definido en la base  $(x_1, y_1, z_1)$ . El comportamiento de  $\mathbf{a}_{G1}$  se observa en la figura 3.8.

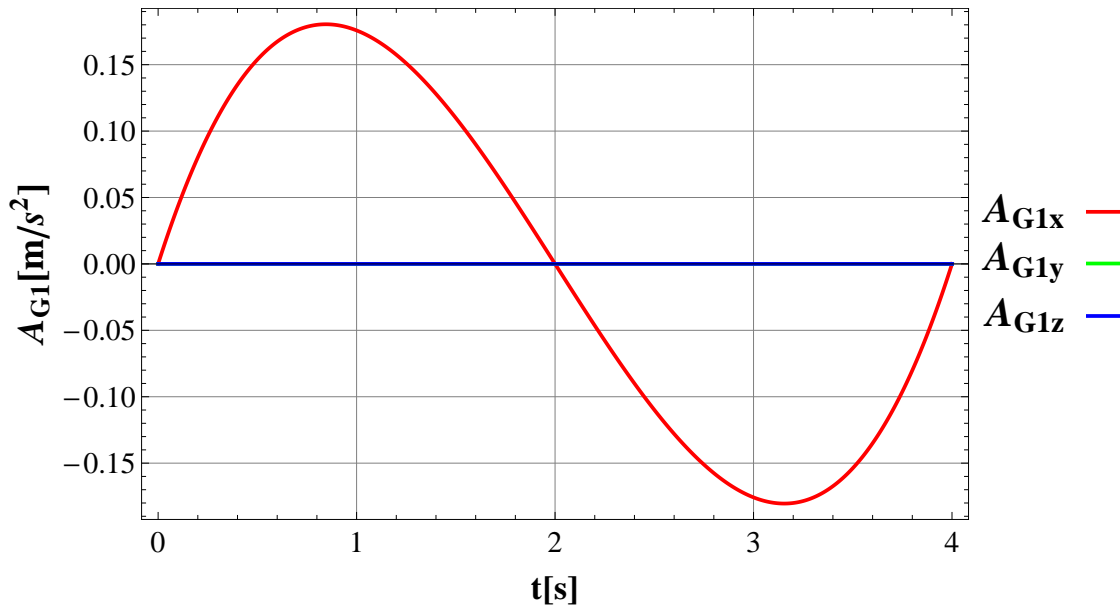


Figura 3.8: Aceleración  $\mathbf{a}_{G1}$

## 3.1.2. Análisis del Cuerpo 2

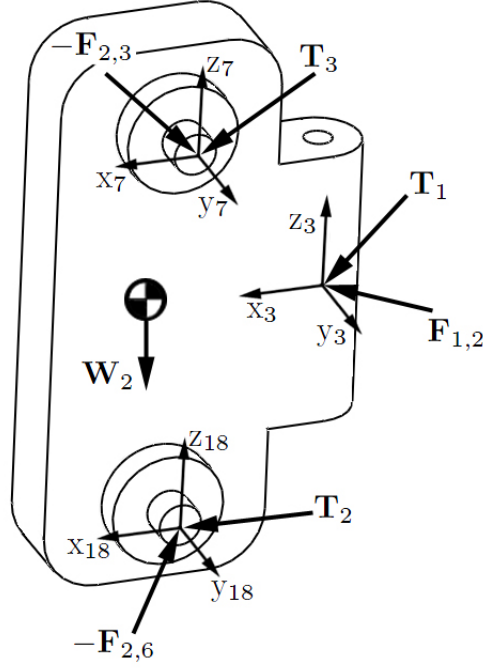


Figura 3.9: DCL para el cuerpo 2

Realizando la suma de las fuerzas en el cuerpo 2 respecto al sistema de referencia  $(x_3, y_3, z_3)$ , se tiene:

$$\mathbf{F}_{c2}^A + \mathbf{F}_{c2}^R + \mathbf{F}_{c2}^I = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{c2}^A = \mathbf{T}_1 + \mathbf{Q}_{3,7} \mathbf{T}_2 + \mathbf{Q}_{3,18} \mathbf{T}_3 + \mathbf{Q}_{3,0} \mathbf{W}_2$$

$$\mathbf{F}_{c2}^R = \mathbf{F}_{1,2} - \mathbf{Q}_{3,7} \mathbf{F}_{2,3} - \mathbf{Q}_{3,18} \mathbf{F}_{2,6}$$

$$\mathbf{F}_{c2}^I = [\mathbf{F}_{G2}, \mathbf{M}_{G2}]^T$$

Definiendo:

$$\mathbf{F}_{G2} = -m_2 \mathbf{a}_{G2}$$

$$\mathbf{M}_{G2} = -(\mathbf{I}_{G2} \mathbf{A}_{3,0} + \mathbf{\Omega}_{3,0} \times (\mathbf{I}_{G2} \mathbf{\Omega}_{3,0}) + \mathbf{S}_{G2} (m_2 \mathbf{a}_{G2}))$$

Medida desde el centro de gravedad del cuerpo 2,  $I_{G2}$  es la matriz de inercias y se define:

$$\mathbf{I}_{G2} = \begin{bmatrix} I_{2xx} & I_{2xy} & I_{2xz} \\ I_{2yx} & I_{2yy} & I_{2yz} \\ I_{2zx} & I_{2zy} & I_{2zz} \end{bmatrix}$$

El vector que representa el brazo de palanca medido desde el sistema local  $(x_3, y_3, z_3)$  al centro de gravedad del cuerpo 2. Es expresado en términos de la matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G2}$ , cuyos términos son el vector del centro de gravedad  $\mathbf{r}_{G2} = (x_{G2}, y_{G2}, z_{G2})$ .

$$\mathbf{S}_{G2} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2} & y_{G2} \\ z_{G2} & 0 & -x_{G2} \\ -y_{G2} & x_{G2} & 0 \end{bmatrix}$$

También se tiene:

$$\mathbf{T}_2 = [0, 0, 0, 0, 0, \tau_2]^T$$

$$\mathbf{T}_3 = [0, 0, 0, 0, 0, \tau_3]^T$$

$$\mathbf{F}_{2,3} = [F_{2,3x}, F_{2,3y}, F_{2,3z}, M_{2,3x}, 0, M_{2,3z}]^T$$

$$\mathbf{F}_{2,6} = [F_{2,6x}, F_{2,6y}, F_{2,6z}, M_{2,6x}, 0, M_{2,6z}]^T$$

$$\mathbf{W}_2 = [0, 0, -m_{G2}g, 0, 0, 0]^T$$

De igual manera se tiene que:

$$\mathbf{Q}_{3,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{3,0}\mathbf{R}_{3,0} & \mathbf{R}_{3,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{3,7} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3,7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{3,7}\mathbf{R}_{3,7} & \mathbf{R}_{3,7} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{3,18} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3,18} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{3,18}\mathbf{R}_{3,18} & \mathbf{R}_{3,18} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathbf{R}_{3,0} = \mathbf{R}_6(-\theta_3)$$

$$\mathbf{R}_{3,7} = \mathbf{R}_5(\theta_7)$$

$$\mathbf{R}_{3,18} = \mathbf{R}_5(\theta_{18})$$

$$\mathbf{S}_{3,0} = \mathbf{S}_{G2}$$

$$\mathbf{S}_{3,7} = \mathbf{S}_1(d_4) + \mathbf{S}_2(d_6) + \mathbf{S}_3(d_5)$$

$$\mathbf{S}_{3,18} = \mathbf{S}_1(d_4) + \mathbf{S}_2(d_{17}) + \mathbf{S}_3(-d_{16})$$

### 3.1.2.1. Velocidad y Aceleración Angular

La velocidad angular asociada al cuerpo 2 medida desde el marco de referencia inercial es:

$$\boldsymbol{\Omega}_{0,3} = \boldsymbol{\omega}_3 \quad (3.15)$$

donde:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = [0, 0, \dot{\theta}_3]^T$$

Se necesita la ecuación 3.15 medida desde la base  $(x_3, y_3, z_3)$ , pero debido a que no existen rotaciones entre las bases, resulta que:

$$\boldsymbol{\Omega}_{3,0} = \boldsymbol{\Omega}_{0,3} \quad (3.16)$$

Ahora para obtener la aceleración angular, se toma la ecuación 3.15 y se deriva con respecto al tiempo, quedando:

$$\mathbf{A}_{0,3} = \boldsymbol{\alpha}_3 \quad (3.17)$$

donde:

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = [0, 0, \ddot{\theta}_3]^T$$

### 3.1. ANÁLISIS DINÁMICO DE LA EXTREMIDAD

De la misma forma que para la velocidad, se lleva al sistema de referencia  $(x_3, y_3, z_3)$ , obteniendo:

$$\mathbf{A}_{3,0} = \mathbf{A}_{0,3} \quad (3.18)$$

Las gráficas de  $\Omega_{3,0}$  y  $\mathbf{A}_{3,0}$  se muestran en las figuras 3.10 y 3.11.

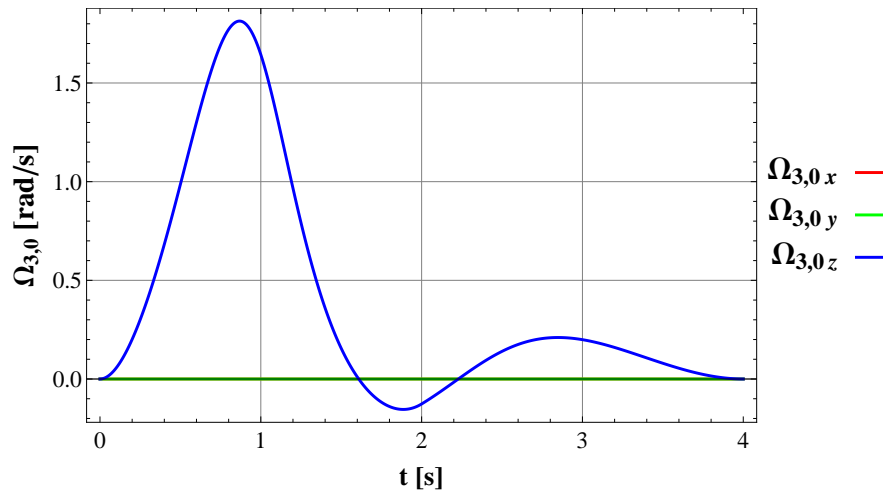


Figura 3.10: Velocidad  $\Omega_{3,0}$

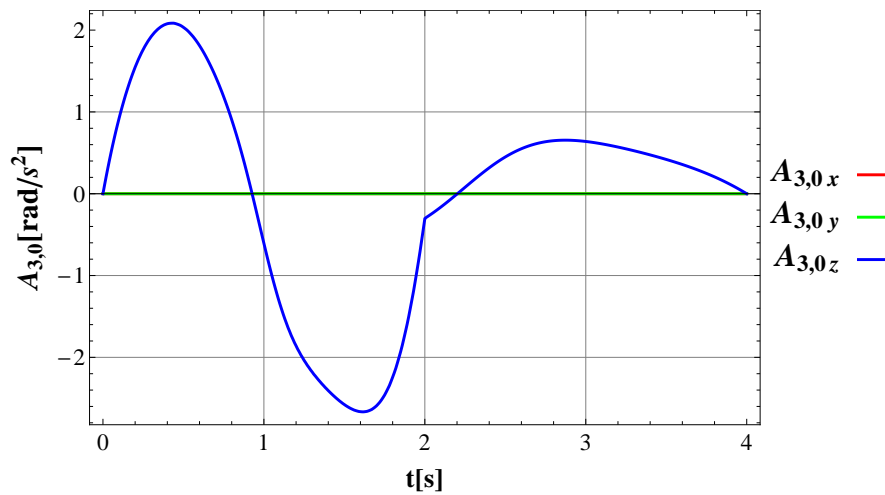


Figura 3.11: Aceleración  $\mathbf{A}_{3,0}$



3.1.2.2. Aceleración del Centro de Gravedad

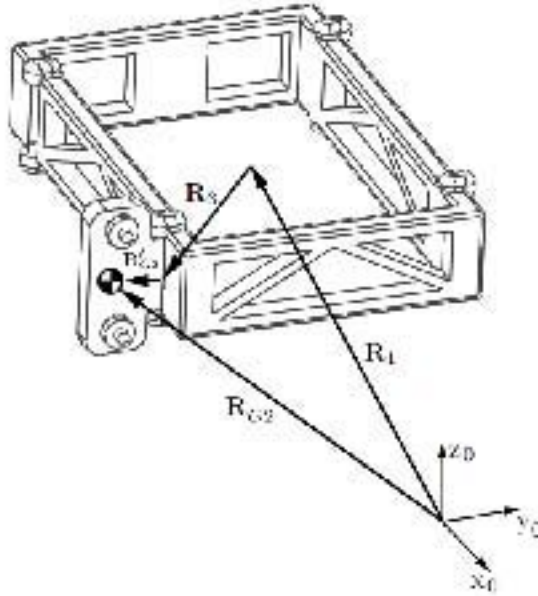


Figura 3.12: Centro de gravedad del cuerpo 2

Definiendo inercialmente el vector  $\mathbf{R}_{G2}$ , como se muestra en la figura 3.12, se aprecia que:

$$\mathbf{R}_{G2} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}'_{G2} \quad (3.19)$$

donde:

$$\mathbf{R}_3 = [d_{2x}, d_{2y}, d_{2z}]^T$$

$$\mathbf{R}'_{G2} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{r}'_{G2}, \quad \text{con: } \mathbf{r}'_{G2} = [x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}]^T$$

Para obtener la velocidad del centro de gravedad se deriva con respecto al tiempo la ecuación 3.19, esto es:

$$\mathbf{V}_{G2} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}'_{G2} \quad (3.20)$$

donde:

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{V}'_{G2} = \boldsymbol{\Omega}_{0,3} \times \mathbf{R}'_{G2}$$

Y finalmente para obtener la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 2, se deriva la ecuación 3.20:

$$\mathbf{A}_{G2} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}'_{G2} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_{0,3} \times \mathbf{R}'_{G2} + \boldsymbol{\Omega}_{0,3} \times \mathbf{V}'_{G2} \quad (3.21)$$

$\mathbf{A}_{G2}$  se encuentra definido en la base local  $(x_0, y_0, z_0)$ , sin embargo, las ecuaciones para el cuerpo 2 han sido definidas en la base  $(x_3, y_3, z_3)$ , por lo que la aceleración debe ser transformada a esta base, lo que resulta:

$$\mathbf{a}_{G2} = \mathbf{R}_{3,0} \mathbf{A}_{G2}$$

El comportamiento de  $\mathbf{a}_{G2}$  se observa en la figura 3.13.

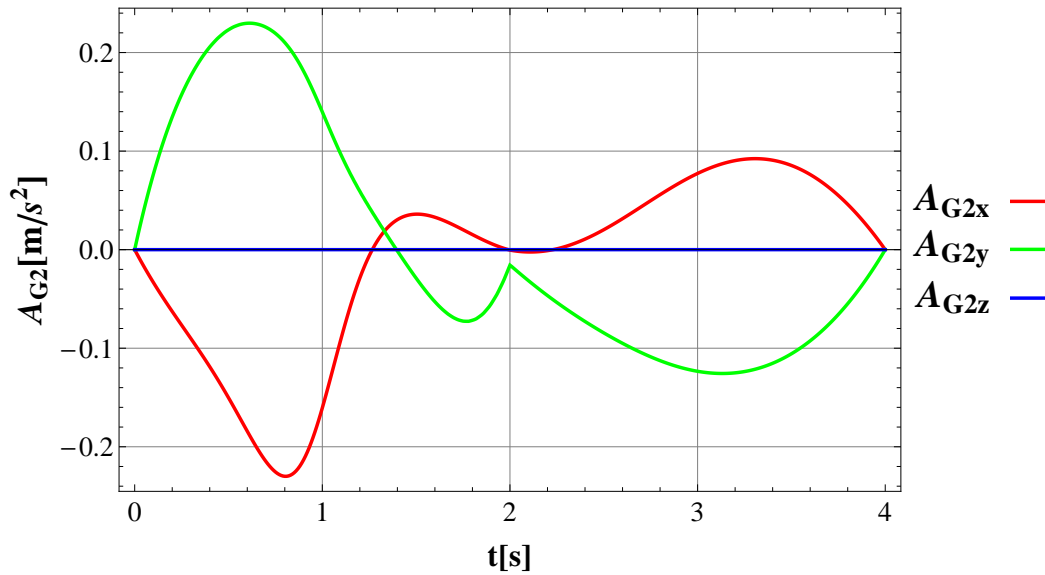


Figura 3.13: Aceleración  $\mathbf{a}_{G2}$

## 3.1.3. Análisis del Cuerpo 3

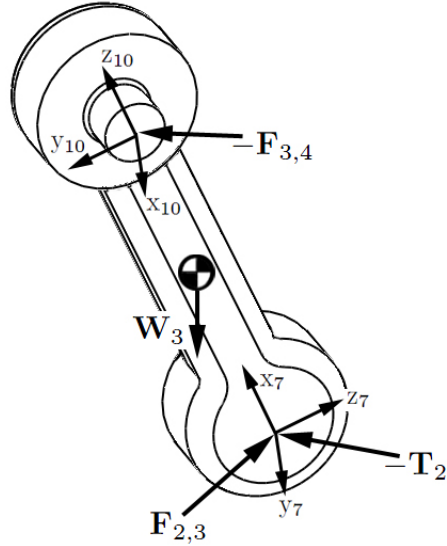


Figura 3.14: DCL para el cuerpo 3

Para el cuerpo 3 se realiza también suma de fuerzas respecto al sistema de referencia  $(x_7, y_7, z_7)$ , esto es:

$$\mathbf{F}_{c3}^A + \mathbf{F}_{c3}^R + \mathbf{F}_{c3}^I = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{c3}^A = -\mathbf{T}_2 + \mathbf{Q}_{7,0} \mathbf{W}_3$$

$$\mathbf{F}_{c3}^R = \mathbf{F}_{2,3} - \mathbf{Q}_{7,10} \mathbf{F}_{3,4}$$

$$\mathbf{F}_{c3}^I = [\mathbf{F}_{G3}, \mathbf{M}_{G3}]^T$$

Se define:

$$\mathbf{F}_{G3} = -m_3 \mathbf{a}_{G3}$$

$$\mathbf{M}_{G3} = -(\mathbf{I}_{G3} \mathbf{A}_{7,0} + \boldsymbol{\Omega}_{7,0} \times (\mathbf{I}_{G3} \boldsymbol{\Omega}_{7,0}) + \mathbf{S}_{G3} (m_3 \mathbf{a}_{G3}))$$

La matriz de inercias medida desde el centro de gravedad del cuerpo 3 se define como:

$$\mathbf{I}_{G3} = \begin{bmatrix} I_{3xx} & I_{3xy} & I_{3xz} \\ I_{3yx} & I_{3yy} & I_{3yz} \\ I_{3zx} & I_{3zy} & I_{3zz} \end{bmatrix}$$

La matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G3}$  representa el brazo de palanca medido desde el sistema local  $(x_7, y_7, z_7)$  al centro de gravedad del cuerpo 3 en términos del vector  $\mathbf{r}_{G3} = (x_{G3}, y_{G3}, z_{G3})$ .

$$\mathbf{S}_{G3} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3} & y_{G3} \\ z_{G3} & 0 & -x_{G3} \\ -y_{G3} & x_{G3} & 0 \end{bmatrix}$$

También se tiene:

$$\mathbf{F}_{3,4} = [F_{3,4x}, F_{3,4y}, F_{3,4z}, M_{3,4x}, 0, M_{3,4z}]^T$$

$$\mathbf{W}_3 = [0, 0, -m_{G3}g, 0, 0, 0]^T$$

Las matrices homogéneas utilizadas para trasladar  $\mathbf{W}_3$  y  $\mathbf{F}_{3,4}$  al sistema de referencia en el cual se han planteado las ecuaciones del cuerpo 3, son respectivamente:

$$\mathbf{Q}_{7,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{7,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{7,0}\mathbf{R}_{7,0} & \mathbf{R}_{7,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{7,10} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{7,10} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{7,10}\mathbf{R}_{7,10} & \mathbf{R}_{7,10} \end{bmatrix}$$

donde las matrices de rotación son:

$$\mathbf{R}_{7,0} = \mathbf{R}_5(-\theta_7) \mathbf{R}_6(-\theta_3)$$

$$\mathbf{R}_{7,10} = \mathbf{R}_5(\theta_{10})$$

y las matrices antisimétricas:

$$\mathbf{S}_{7,0} = \mathbf{S}_{G3}$$

$$\mathbf{S}_{7,10} = \mathbf{S}_1(d_8) + \mathbf{S}_2(d_9)$$

### 3.1.3.1. Velocidad y Aceleración Angular

La velocidad angular asociada al cuerpo 3 medida desde el marco de referencia inercial es:

$$\boldsymbol{\Omega}_{0,7} = \boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{0,7} \quad (3.23)$$

donde:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,7} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \boldsymbol{\omega}_7, \quad \boldsymbol{\omega}_7 = [0, 0, \dot{\theta}_7]^T$$

Ahora definiendo la ecuación 3.23 en la base  $(x_7, y_7, z_7)$ :

$$\boldsymbol{\Omega}_{7,0} = \mathbf{R}_{7,0} \boldsymbol{\Omega}_{0,7} \quad (3.24)$$

Para obtener la aceleración angular del cuerpo 3 se toma la ecuación 3.23 y se deriva con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\mathbf{A}_{0,7} = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_{0,7} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{0,7} \quad (3.25)$$

donde:

$$\boldsymbol{\alpha}_{0,7} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \boldsymbol{\alpha}_7, \quad \boldsymbol{\alpha}_7 = [0, 0, \ddot{\theta}_7]^T$$

De la misma forma que para la velocidad, se lleva al sistema de referencia  $(x_7, y_7, z_7)$ , obteniendo:

$$\mathbf{A}_{7,0} = \mathbf{R}_{7,0} \mathbf{A}_{0,7} \quad (3.26)$$

### 3.1. ANÁLISIS DINÁMICO DE LA EXTREMIDAD

Las gráficas de  $\Omega_{7,0}$  y  $A_{7,0}$  se muestran en las figuras 3.15 y 3.16.

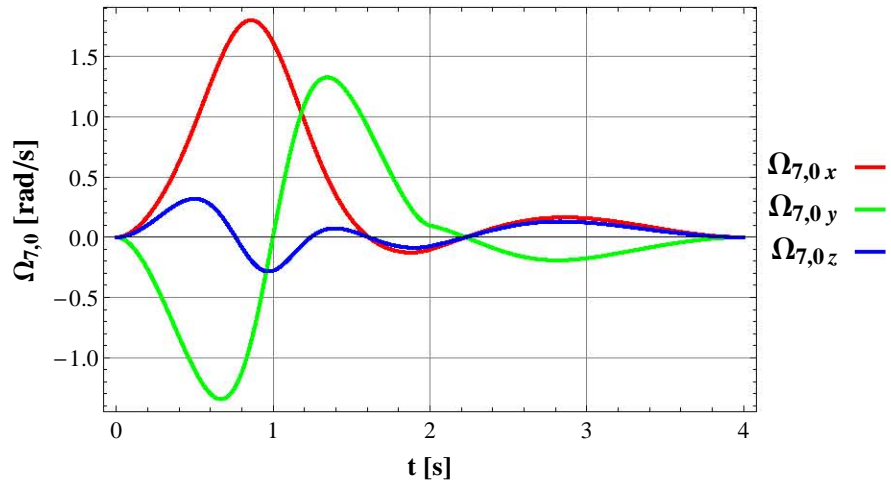


Figura 3.15: Velocidad  $\Omega_{7,0}$

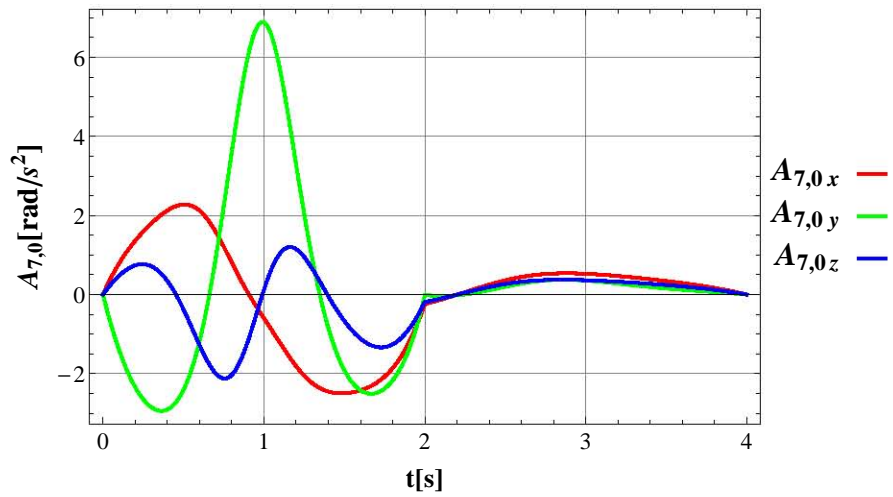
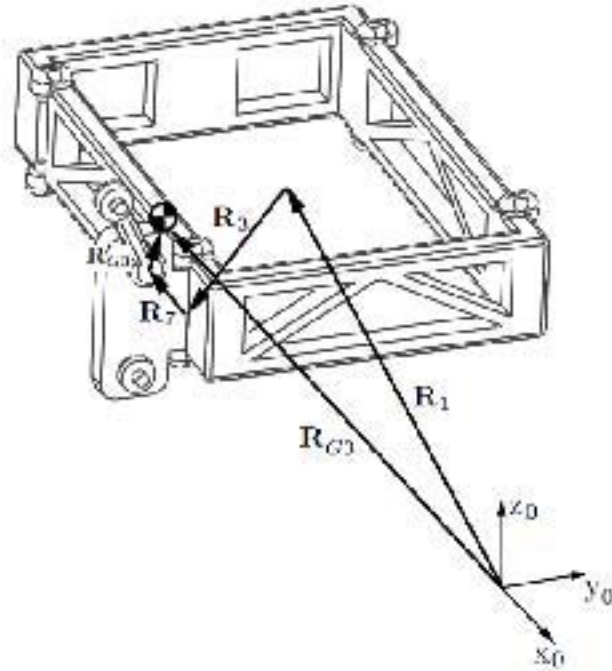


Figura 3.16: Aceleración  $A_{7,0}$

3.1.3.2. Aceleración del Centro de Gravedad



**Figura 3.17:** Centro de gravedad del cuerpo 3 (El CG fue desplazado para una mejor visualización)

En la figura 3.17 se muestra el vector  $\mathbf{R}_{G3}$ , el cual se define desde el sistema de referencia  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\mathbf{R}_{G3} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_7 + \mathbf{R}'_{G3} \quad (3.27)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_7 &= \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{r}_7, & \text{con: } \mathbf{r}_7 &= [d_4, d_6, d_5]^T \\ \mathbf{R}'_{G3} &= \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \mathbf{r}'_{G3}, & \text{con: } \mathbf{r}'_{G3} &= [x_{G3}, y_{G3}, z_{G3}]^T \end{aligned}$$

Para obtener la velocidad del centro de gravedad se deriva con respecto al tiempo la ecuación 3.27:

$$\mathbf{V}_{G3} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_7 + \mathbf{V}'_{G3} \quad (3.28)$$

donde:

$$\mathbf{V}_7 = \boldsymbol{\Omega}_{0,3} \times \mathbf{R}_7 \quad , \quad \mathbf{V}'_{G3} = \boldsymbol{\Omega}_{0,7} \times \mathbf{R}'_{G3}$$

Se obtiene la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 3, derivando la ecuación 3.28:

$$\mathbf{A}_{G3} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_7 + \mathbf{A}'_{G3} \quad (3.29)$$

donde:

$$\mathbf{A}_7 = \mathbf{A}_{0,3} \times \mathbf{R}_7 + \boldsymbol{\Omega}_{0,3} \times \mathbf{V}_7$$

$$\mathbf{A}'_{G3} = \mathbf{A}_{0,7} \times \mathbf{R}'_{G3} + \boldsymbol{\Omega}_{0,7} \times \mathbf{V}'_{G3}$$

$\mathbf{A}_{G3}$  se encuentra definido en la base local  $(x_0, y_0, z_0)$ , sin embargo, las ecuaciones para el cuerpo 3 han sido definidas en la base  $(x_7, y_7, z_7)$ , por lo que la aceleración debe ser transformada a esta base, lo que resulta:

$$\mathbf{a}_{G3} = \mathbf{R}_{7,0} \mathbf{A}_{G3}$$

El comportamiento de  $\mathbf{a}_{G3}$  se observa en la figura 3.18.

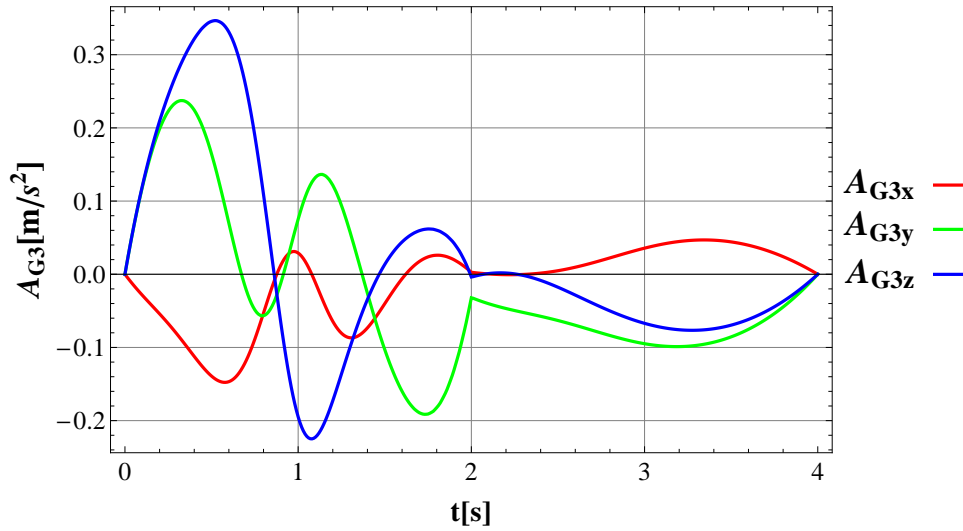


Figura 3.18: Aceleración  $\mathbf{a}_{G3}$



## 3.1.4. Análisis del Cuerpo 4

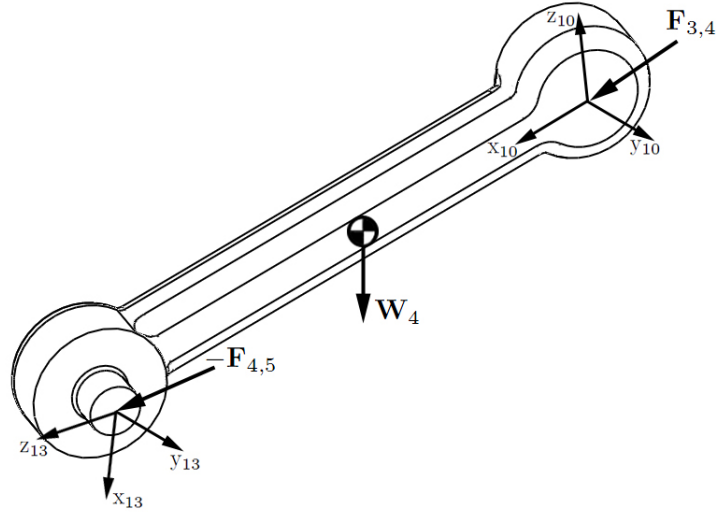


Figura 3.19: DCL para el cuerpo 4

Para el cuerpo 4 se realiza también suma de fuerzas respecto al sistema de referencia  $(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ , esto es:

$$\mathbf{F}_{c4}^A + \mathbf{F}_{c4}^R + \mathbf{F}_{c4}^I = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{c4}^A = \mathbf{Q}_{10,0} \mathbf{W}_4$$

$$\mathbf{F}_{c4}^R = \mathbf{F}_{3,4} - \mathbf{Q}_{10,13} \mathbf{F}_{4,5}$$

$$\mathbf{F}_{c4}^I = [\mathbf{F}_{G4}, \mathbf{M}_{G4}]^T$$

Se define:

$$\mathbf{F}_{G4} = -m_4 \mathbf{a}_{G4}$$

$$\mathbf{M}_{G4} = -(\mathbf{I}_{G4} \mathbf{A}_{10,0} + \boldsymbol{\Omega}_{10,0} \times (\mathbf{I}_{G4} \boldsymbol{\Omega}_{10,0}) + \mathbf{S}_{G4} (m_4 \mathbf{a}_{G4}))$$

La matriz de inercias medida desde el centro de gravedad del cuerpo 4 es:

$$\mathbf{I}_{G4} = \begin{bmatrix} I_{4xx} & I_{4xy} & I_{4xz} \\ I_{4yx} & I_{4yy} & I_{4yz} \\ I_{4zx} & I_{4zy} & I_{4zz} \end{bmatrix}$$

La matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G4}$  medida desde el sistema local  $(x_{10}, y_{10}, z_{10})$  representa el brazo de palanca al centro de gravedad del cuerpo 4 en términos del vector  $\mathbf{r}_{G4} = (x_{G4}, y_{G4}, z_{G4})$ .

$$\mathbf{S}_{G4} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G4} & y_{G4} \\ z_{G4} & 0 & -x_{G4} \\ -y_{G4} & x_{G4} & 0 \end{bmatrix}$$

También se tiene:

$$\mathbf{F}_{4,5} = [F_{4,5x}, F_{4,5y}, F_{4,5z}, M_{4,5x}, 0, M_{4,5z}]^T$$

$$\mathbf{W}_4 = [0, 0, -m_{G4}g, 0, 0, 0]^T$$

Las matrices homogéneas utilizadas para trasladar  $\mathbf{W}_4$  y  $\mathbf{F}_{4,5}$  al sistema de referencia en el cual se han planteado las ecuaciones del cuerpo 4, son respectivamente:

$$\mathbf{Q}_{10,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{10,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{10,0}\mathbf{R}_{10,0} & \mathbf{R}_{10,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{10,13} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{10,13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{10,13}\mathbf{R}_{10,13} & \mathbf{R}_{10,13} \end{bmatrix}$$

donde las matrices de rotación son:

$$\mathbf{R}_{10,0} = \mathbf{R}_5(-\theta_{10}) \mathbf{R}_5(-\theta_7) \mathbf{R}_6(-\theta_3)$$

$$\mathbf{R}_{10,13} = \mathbf{R}_5(\theta_{13})$$

y las matrices antisimétricas:

$$\mathbf{S}_{10,0} = \mathbf{S}_{G4}$$

$$\mathbf{S}_{10,13} = \mathbf{S}_1(d_{11}) + \mathbf{S}_2(d_{12})$$

### 3.1.4.1. Velocidad y Aceleración Angular

La velocidad angular asociada al cuerpo 4 medida desde el marco de referencia inercial es:

$$\boldsymbol{\Omega}_{0,10} = \boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{0,7} + \boldsymbol{\omega}_{0,10} \quad (3.31)$$

donde:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,10} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \boldsymbol{\omega}_{10}, \quad \boldsymbol{\omega}_{10} = [0, 0, \dot{\theta}_{10'}]^T$$

Ahora definiendo la ecuación 3.31 en la base  $(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ :

$$\boldsymbol{\Omega}_{10,0} = \mathbf{R}_{10,0} \boldsymbol{\Omega}_{0,10} \quad (3.32)$$

Para obtener la aceleración angular del cuerpo 4 se toma la ecuación 3.31 y se deriva con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\mathbf{A}_{0,10} = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_{0,7} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{0,7} + \boldsymbol{\alpha}_{0,10} + (\boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{0,7}) \times \boldsymbol{\omega}_{0,10} \quad (3.33)$$

donde:

$$\boldsymbol{\alpha}_{0,10} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \boldsymbol{\alpha}_{10}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{10} = [0, 0, \ddot{\theta}_{10}]^T$$

De la misma forma que para la velocidad, se lleva al sistema de referencia  $(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ , obteniendo:

$$\mathbf{A}_{10,0} = \mathbf{R}_{10,0} \mathbf{A}_{0,10} \quad (3.34)$$

Las gráficas de  $\Omega_{10,0}$  y  $A_{10,0}$  se muestran en las figuras 3.20 y 3.21.

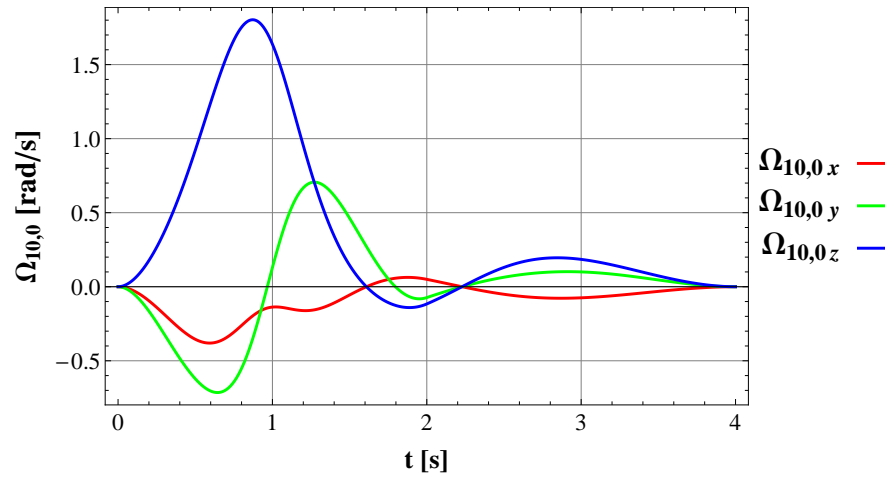


Figura 3.20: Velocidad  $\Omega_{10,0}$

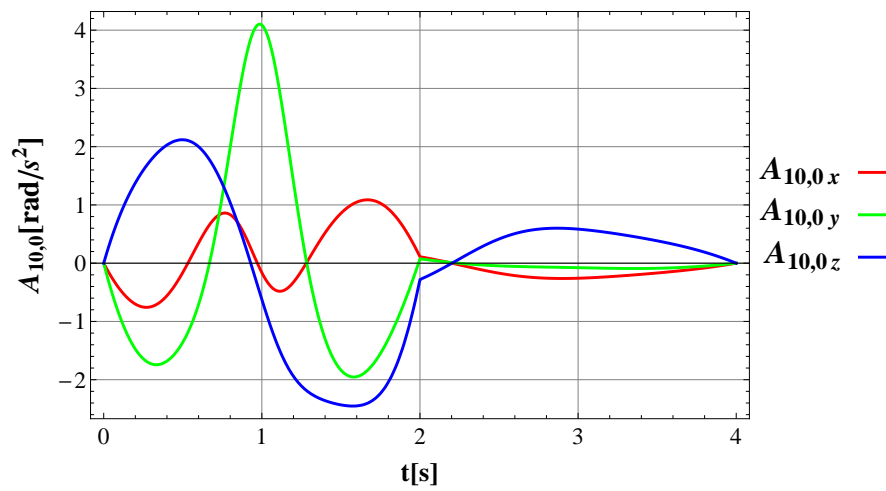
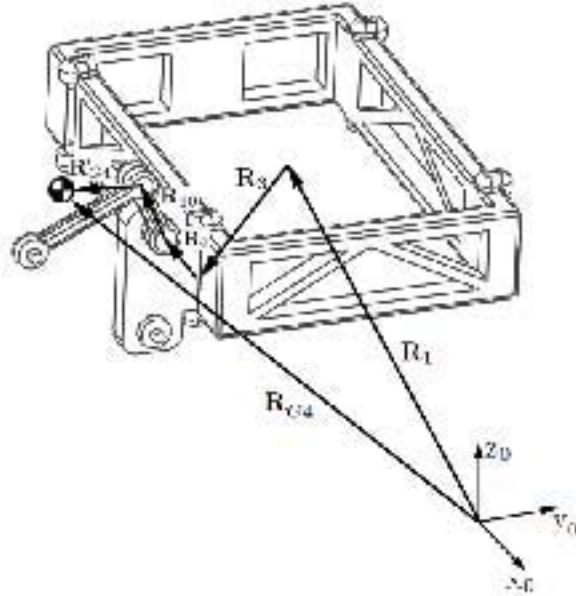


Figura 3.21: Aceleración  $A_{10,0}$

3.1.4.2. Aceleración del Centro de Gravedad



**Figura 3.22:** Centro de gravedad del cuerpo 4 (El CG fue desplazado para una mejor visualización)

En la figura 3.22 se muestra el vector  $\mathbf{R}_{G4}$ , el cual se define desde el sistema de referencia  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\mathbf{R}_{G4} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_7 + \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}'_{G4} \quad (3.35)$$

donde:

$$\mathbf{R}_{10} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_6(\theta_7) \mathbf{r}_{10}, \quad \text{con: } \mathbf{r}_{10} = [d_8, d_9, 0]^T$$

$$\mathbf{R}'_{G4} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \mathbf{R}_5(\theta_{10}) \mathbf{r}'_{G4}, \quad \text{con: } \mathbf{r}'_{G4} = [x_{G4}, y_{G4}, z_{G4}]^T$$

Para obtener la velocidad del centro de gravedad se deriva con respecto al tiempo la ecuación 3.35:

$$\mathbf{V}_{G4} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_7 + \mathbf{V}_{10} + \mathbf{V}'_{G4} \quad (3.36)$$

donde:

$$\mathbf{V}_{10} = \boldsymbol{\Omega}_{0,7} \times \mathbf{R}_{10}$$

$$\mathbf{V}'_{G4} = \boldsymbol{\Omega}_{0,10} \times \mathbf{R}'_{G4}$$

Se obtiene la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 4, derivando la ecuación 3.36:

$$\mathbf{A}_{G4} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_7 + \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}'_{G4} \quad (3.37)$$

donde:

$$\mathbf{A}_{10} = \mathbf{A}_{0,7} \times \mathbf{R}_{10} + \boldsymbol{\Omega}_{0,7} \times \mathbf{V}_{10}$$

$$\mathbf{A}'_{G4} = \mathbf{A}_{0,10} \times \mathbf{R}'_{G4} + \boldsymbol{\Omega}_{0,10} \times \mathbf{V}'_{G4}$$

$\mathbf{A}_{G4}$  se encuentra definido en la base local  $(x_0, y_0, z_0)$ , sin embargo, las ecuaciones para el cuerpo 4 han sido definidas en la base  $(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ , por lo que la aceleración debe ser transformada a esta base, lo que resulta:

$$\mathbf{a}_{G4} = \mathbf{R}_{10,0} \mathbf{A}_{G4}$$

El comportamiento de  $\mathbf{a}_{G4}$  se observa en la figura 3.23.

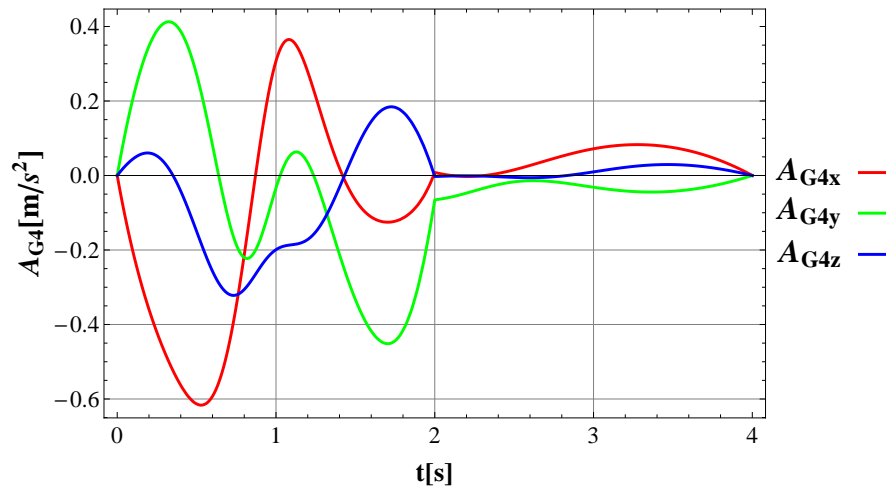


Figura 3.23: Aceleración  $\mathbf{a}_{G4}$

3.1.5. Análisis del Cuerpo 5

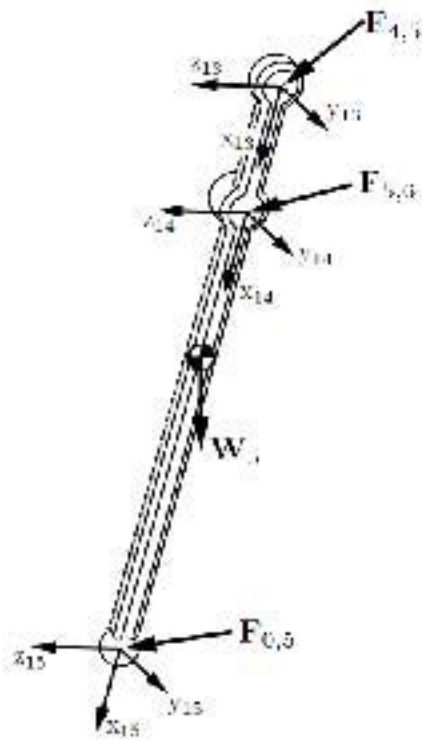


Figura 3.24: DCL para el cuerpo 5

De la figura 3.24 se tiene que la suma de fuerzas respecto al sistema de referencia  $(x_{13}, y_{13}, z_{13})$  para el cuerpo 5 es:

$$\mathbf{F}_{c5}^A + \mathbf{F}_{c5}^R + \mathbf{F}_{c5}^I = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{c5}^A = \mathbf{Q}_{13,0} \mathbf{W}_5$$

$$\mathbf{F}_{c5}^R = \mathbf{F}_{4,5} + \mathbf{Q}_{13,14} \mathbf{F}_{5,6} + \mathbf{Q}_{13,15} \mathbf{F}_{0,5}$$

$$\mathbf{F}_{c5}^I = [\mathbf{F}_{G5}, \mathbf{M}_{G5}]^T$$

Se define:

$$\mathbf{F}_{G5} = -m_5 \mathbf{a}_{G5}$$

$$\mathbf{M}_{G5} = -(\mathbf{I}_{G5} \mathbf{A}_{13,0} + \mathbf{\Omega}_{13,0} \times (\mathbf{I}_{G5} \mathbf{\Omega}_{13,0}) + \mathbf{S}_{G5} (m_5 \mathbf{a}_{G5}))$$

La matriz de inercias medida desde el centro de gravedad del cuerpo 5 es:

$$\mathbf{I}_{G5} = \begin{bmatrix} I_{5xx} & I_{5xy} & I_{5xz} \\ I_{5yx} & I_{5yy} & I_{5yz} \\ I_{5zx} & I_{5zy} & I_{5zz} \end{bmatrix}$$

La matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G5}$  medida desde el sistema local  $(x_{13}, y_{13}, z_{13})$  representa el brazo de palanca al centro de gravedad del cuerpo 5 en términos del vector  $\mathbf{r}_{G5} = (x_{G5}, y_{G5}, z_{G5})$ .

$$\mathbf{S}_{G5} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G5} & y_{G5} \\ z_{G5} & 0 & -x_{G5} \\ -y_{G5} & x_{G5} & 0 \end{bmatrix}$$

También se tiene:

$$\mathbf{F}_{5,6} = [F_{5,6x}, F_{5,6y}, F_{5,6z}, M_{5,6x}, 0, M_{5,6z}]^T$$

$$\mathbf{F}_{0,5} = [F_{0,5x}, F_{0,5y}, F_{0,5z}, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{W}_5 = [0, 0, -m_{G5}g, 0, 0, 0]^T$$

Las matrices homogéneas utilizadas para trasladar  $\mathbf{W}_5$ ,  $\mathbf{F}_{5,6}$  y  $\mathbf{F}_{0,5}$  al sistema de referencia en el que se definieron las ecuaciones para el cuerpo 5, son respectivamente:

$$\mathbf{Q}_{13,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{13,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{13,0}\mathbf{R}_{13,0} & \mathbf{R}_{13,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{13,14} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{13,14} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{13,15} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{13,15} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

donde las matrices antisimétricas son:

$$\mathbf{S}_{13,0} = \mathbf{S}_{G5}$$

$$\mathbf{S}_{10,14} = \mathbf{S}_1(d_{14})$$

$$\mathbf{S}_{10,15} = \mathbf{S}_1(d_{15})$$



y la matriz de rotación contenida en  $\mathbf{Q}_{13,0}$  es:

$$\mathbf{R}_{13,0} = \mathbf{R}_5(-\theta_{13}) \mathbf{R}_5(-\theta_{10}) \mathbf{R}_5(-\theta_7) \mathbf{R}_6(-\theta_3)$$

### 3.1.5.1. Velocidad y Aceleración Angular

La velocidad angular asociada al cuerpo 5 medida desde el marco de referencia inercial es:

$$\boldsymbol{\Omega}_{0,13} = \boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{0,7} + \boldsymbol{\omega}_{0,10} + \boldsymbol{\omega}_{0,13} \quad (3.39)$$

donde:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,13} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \mathbf{R}_5(\theta_{10}) \boldsymbol{\omega}_{13}, \quad \boldsymbol{\omega}_{13} = [0, 0, \dot{\theta}_{13}]^T$$

Ahora definiendo la ecuación 3.39 en la base  $(x_{13}, y_{13}, z_{13})$ :

$$\boldsymbol{\Omega}_{13,0} = \mathbf{R}_{13,0} \boldsymbol{\Omega}_{0,13} \quad (3.40)$$

Para obtener la aceleración angular del cuerpo 5 se toma la ecuación 3.39 y se deriva con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,13} = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_{0,7} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{0,7} + \boldsymbol{\alpha}_{0,10} + (\boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{0,7}) \times \boldsymbol{\omega}_{0,10} \\ + \boldsymbol{\alpha}_{0,13} + (\boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{0,7} + \boldsymbol{\omega}_{0,10}) \times \boldsymbol{\omega}_{0,13} \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde:

$$\boldsymbol{\alpha}_{0,13} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \mathbf{R}_5(\theta_{10}) \boldsymbol{\alpha}_{13}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{13} = [0, 0, \ddot{\theta}_{13}]^T$$

De la misma forma que para la velocidad, se lleva al sistema de referencia  $(x_{13}, y_{13}, z_{13})$ , obteniendo:

$$\mathbf{A}_{13,0} = \mathbf{R}_{13,0} \mathbf{A}_{0,13} \quad (3.42)$$

Las gráficas de  $\Omega_{13,0}$  y  $A_{13,0}$  se muestran en las figuras 3.25 y 3.26.

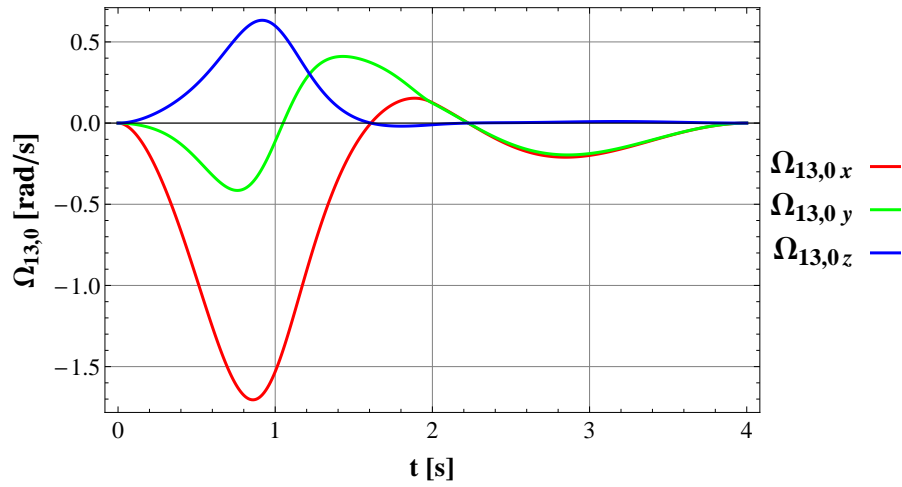


Figura 3.25: Velocidad  $\Omega_{13,0}$

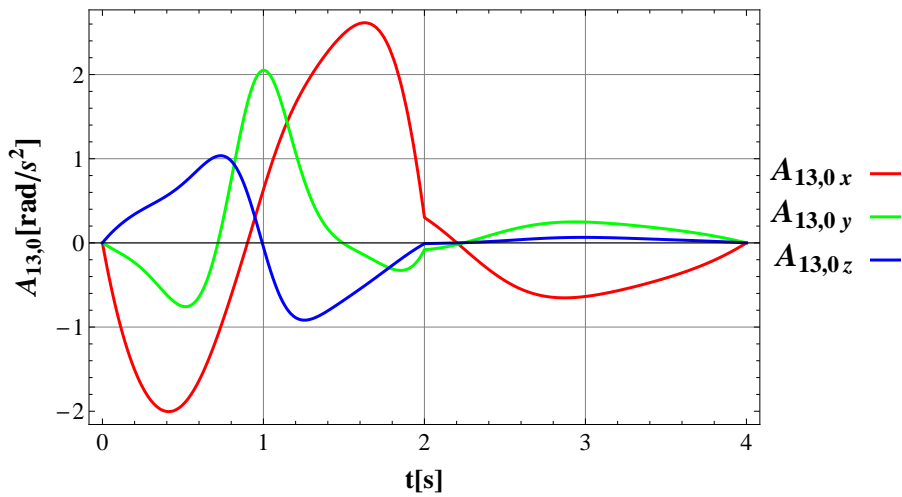
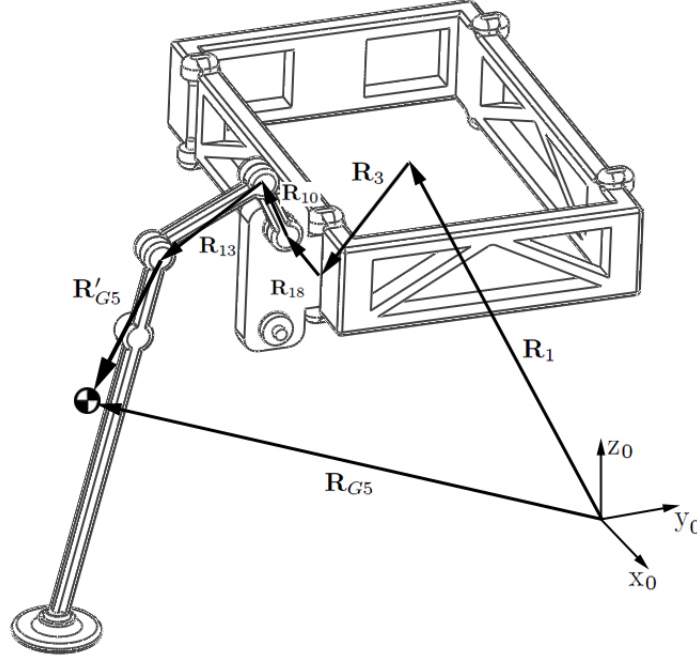


Figura 3.26: Aceleración  $A_{13,0}$

## 3.1.5.2. Aceleración del Centro de Gravedad



**Figura 3.27:** Centro de gravedad del cuerpo 5 (El CG fue desplazado para una mejor visualización)

Se define el vector  $\mathbf{R}_{G5}$  desde el sistema de referencia  $(x_0, y_0, z_0)$  (Figura 3.27):

$$\mathbf{R}_{G5} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_7 + \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}_{13} + \mathbf{R}'_{G5} \quad (3.43)$$

donde:

$$\mathbf{R}_{13} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \mathbf{R}_5(\theta_{10}) \mathbf{r}_{13}, \quad \text{con: } \mathbf{r}_{13} = [d_{11}, d_{12}, 0]^T$$

$$\mathbf{R}'_{G5} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_7) \mathbf{R}_5(\theta_{10}) \mathbf{R}_5(\theta_{13}) \mathbf{r}'_{G5}, \quad \text{con: } \mathbf{r}'_{G5} = [x_{G5}, y_{G5}, z_{G5}]^T$$

Para obtener la velocidad del centro de gravedad se deriva con respecto al tiempo la ecuación 3.43:

$$\mathbf{V}_{G5} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_7 + \mathbf{V}_{10} + \mathbf{V}_{13} + \mathbf{V}'_{G5} \quad (3.44)$$

donde:

$$\mathbf{V}_{13} = \boldsymbol{\Omega}_{0,10} \times \mathbf{R}_{13}$$

$$\mathbf{V}'_{G5} = \boldsymbol{\Omega}_{0,13} \times \mathbf{R}'_{G5}$$

Se obtiene la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 5, derivando la ecuación 3.44:

$$\mathbf{A}_{G5} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_7 + \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}'_{G5} \quad (3.45)$$

donde:

$$\mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{0,10} \times \mathbf{R}_{13} + \boldsymbol{\Omega}_{0,10} \times \mathbf{V}_{13}$$

$$\mathbf{A}'_{G5} = \mathbf{A}_{0,13} \times \mathbf{R}'_{G5} + \boldsymbol{\Omega}_{0,13} \times \mathbf{V}'_{G5}$$

$\mathbf{A}_{G5}$  se encuentra definido en la base local  $(x_0, y_0, z_0)$ , sin embargo, las ecuaciones para el cuerpo 4 han sido definidas en la base  $(x_{13}, y_{13}, z_{13})$ , por lo que la aceleración debe ser transformada a esta base, lo que resulta:

$$\mathbf{a}_{G5} = \mathbf{R}_{13,0} \mathbf{A}_{G5}$$

El comportamiento de  $\mathbf{a}_{G5}$  se observa en la figura 3.28.

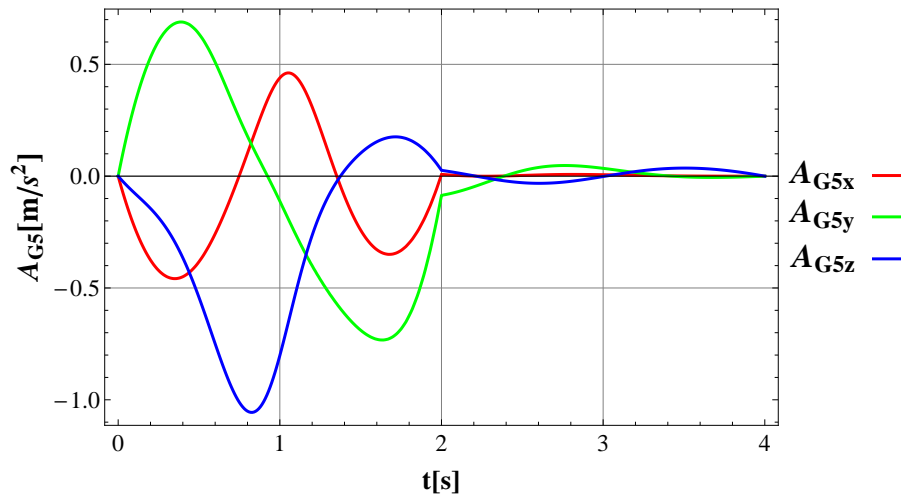


Figura 3.28: Aceleración  $\mathbf{a}_{G5}$

## 3.1.6. Análisis del Cuerpo 6

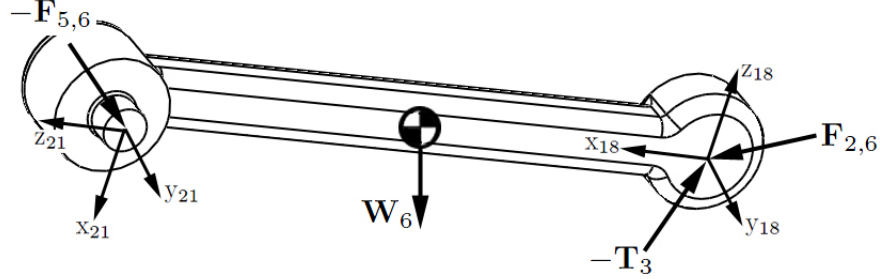


Figura 3.29: DCL para el cuerpo 6

La suma de fuerzas respecto al sistema de referencia  $(x_{18}, y_{18}, z_{18})$  para el cuerpo 6 según se muestra en la figura 3.29:

$$\mathbf{F}_{c6}^A + \mathbf{F}_{c6}^R + \mathbf{F}_{c6}^I = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{c6}^A = \mathbf{T}_3 + \mathbf{Q}_{18,0} \mathbf{W}_6$$

$$\mathbf{F}_{c6}^R = \mathbf{F}_{2,6} - \mathbf{Q}_{18,21} \mathbf{F}_{5,6}$$

$$\mathbf{F}_{c6}^I = [\mathbf{F}_{G6}, \mathbf{M}_{G6}]^T$$

Se define:

$$\mathbf{F}_{G6} = -m_6 \mathbf{a}_{G6}$$

$$\mathbf{M}_{G6} = -(\mathbf{I}_{G6} \mathbf{A}_{18,0} + \mathbf{\Omega}_{18,0} \times (\mathbf{I}_{G6} \mathbf{\Omega}_{18,0}) + \mathbf{S}_{G6} (m_6 \mathbf{a}_{G6}))$$

La matriz de inercias del cuerpo 6 medida desde el centro de gravedad es:

$$\mathbf{I}_{G6} = \begin{bmatrix} I_{6xx} & I_{6xy} & I_{6xz} \\ I_{6yx} & I_{6yy} & I_{6yz} \\ I_{6zx} & I_{6zy} & I_{6zz} \end{bmatrix}$$

El brazo de palanca al centro de gravedad del cuerpo 6 en términos del vector  $\mathbf{r}_{G6} = (x_{G6}, y_{G6}, z_{G6})$  se representa en la matriz antisimétrica  $\mathbf{S}_{G6}$ :

$$\mathbf{S}_{G6} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G6} & y_{G6} \\ z_{G6} & 0 & -x_{G6} \\ -y_{G6} & x_{G6} & 0 \end{bmatrix}$$

También se tiene:

$$\mathbf{W}_6 = [0, 0, -m_{G6}g, 0, 0, 0]^T$$

Las matrices homogéneas utilizadas para trasladar  $\mathbf{W}_6$  y  $\mathbf{F}_{5,6}$  al sistema de referencia en el que están definidas las ecuaciones para el cuerpo 6, son respectivamente:

$$\mathbf{Q}_{18,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{18,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{18,0}\mathbf{R}_{18,0} & \mathbf{R}_{18,0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{18,21} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{18,21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{18,21}\mathbf{R}_{18,21} & \mathbf{R}_{18,21} \end{bmatrix}$$

donde las matrices de rotación son:

$$\mathbf{R}_{18,0} = \mathbf{R}_5(-\theta_{18})\mathbf{R}_6(-\theta_3)$$

$$\mathbf{R}_{18,21} = \mathbf{R}_5(\theta_{21})$$

y las matrices antisimétricas son:

$$\mathbf{S}_{18,0} = \mathbf{S}_{G6}$$

$$\mathbf{S}_{18,21} = \mathbf{S}_1(d_{19}) + \mathbf{S}_2(d_{20})$$

### 3.1.6.1. Velocidad y Aceleración Angular

La velocidad angular asociada al cuerpo 6 medida desde el marco de referencia inercial es:

$$\boldsymbol{\Omega}_{0,18} = \boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_{0,18} \quad (3.47)$$

donde:

$$\boldsymbol{\omega}_{0,18} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \boldsymbol{\omega}_{18}, \quad \boldsymbol{\omega}_{18} = [0, 0, \dot{\theta}_{18}]^T$$

Ahora definiendo la ecuación 3.47 en la base  $(x_{18}, y_{18}, z_{18})$ :

$$\boldsymbol{\Omega}_{18,0} = \mathbf{R}_{18,0} \boldsymbol{\Omega}_{0,18} \quad (3.48)$$

Obteniendo ahora la aceleración angular del cuerpo 6 se toma la ecuación 3.47 y se deriva con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\mathbf{A}_{0,18} = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_{0,18} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{0,18} \quad (3.49)$$

donde:

$$\boldsymbol{\alpha}_{0,18} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \boldsymbol{\alpha}_{18}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{18} = [0, 0, \ddot{\theta}_{18}]^T$$

De la misma forma que para la velocidad, se lleva al sistema de referencia  $(x_{18}, y_{18}, z_{18})$ , obteniendo:

$$\mathbf{A}_{18,0} = \mathbf{R}_{18,0} \mathbf{A}_{0,18} \quad (3.50)$$

Las gráficas de  $\Omega_{18,0}$  y  $A_{18,0}$  se muestran en las figuras 3.30 y 3.31.

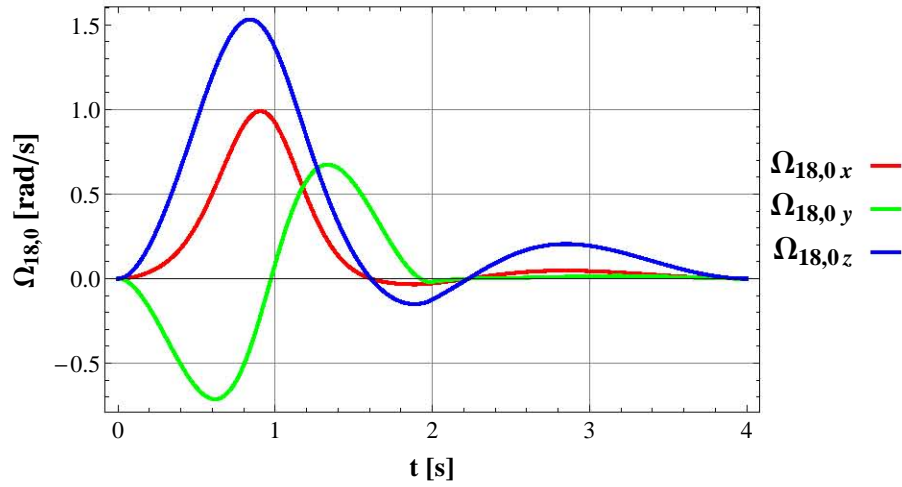


Figura 3.30: Velocidad  $\Omega_{18,0}$

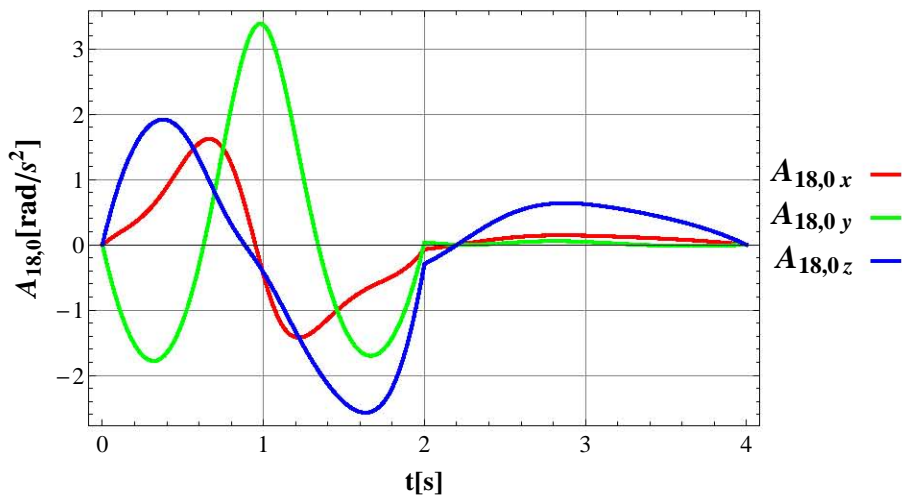
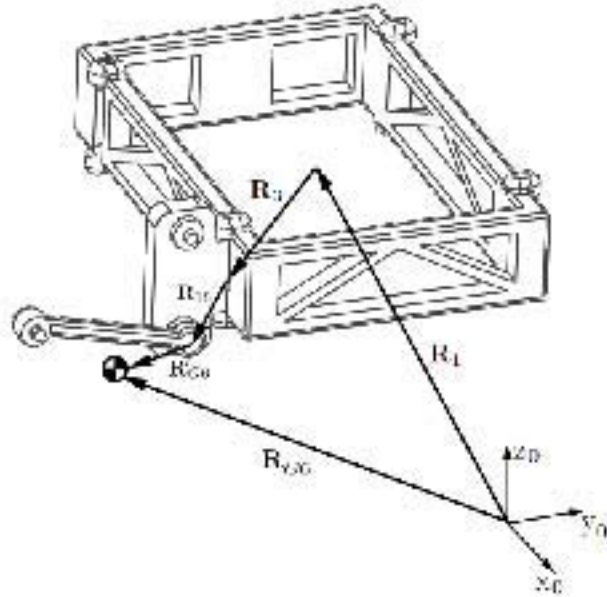


Figura 3.31: Aceleración  $A_{18,0}$



3.1.6.2. Aceleración del Centro de Gravedad



**Figura 3.32:** Centro de gravedad del cuerpo 6 (El CG fue desplazado para una mejor visualización)

De la figura 3.32 se define el vector  $\mathbf{R}_{G6}$  inercialmente:

$$\mathbf{R}_{G6} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{18} + \mathbf{R}'_{G6} \quad (3.51)$$

donde:

$$\mathbf{R}_{18} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{r}_{18}, \quad \text{con: } \mathbf{r}_{18} = [d_4, d_{17}, -d_{16}]^T$$

$$\mathbf{R}'_{G6} = \mathbf{R}_6(\theta_3) \mathbf{R}_5(\theta_{18}) \mathbf{r}'_{G6}, \quad \text{con: } \mathbf{r}'_{G6} = [x_{G6}, y_{G6}, z_{G6}]^T$$

Obteniendo la velocidad del centro de gravedad derivando con respecto al tiempo la ecuación 3.51:

$$\mathbf{V}_{G6} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_{18} + \mathbf{V}'_{G6} \quad (3.52)$$

donde:

$$\mathbf{V}_{18} = \boldsymbol{\Omega}_{0,3} \times \mathbf{R}_{18}$$

$$\mathbf{V}'_{G6} = \boldsymbol{\Omega}_{0,18} \times \mathbf{R}'_{G6}$$

### 3.1. ANÁLISIS DINÁMICO DE LA EXTREMIDAD

Para la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 6, se deriva la ecuación 3.52:

$$\mathbf{A}_{G6} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_{18} + \mathbf{A}'_{G6} \quad (3.53)$$

donde:

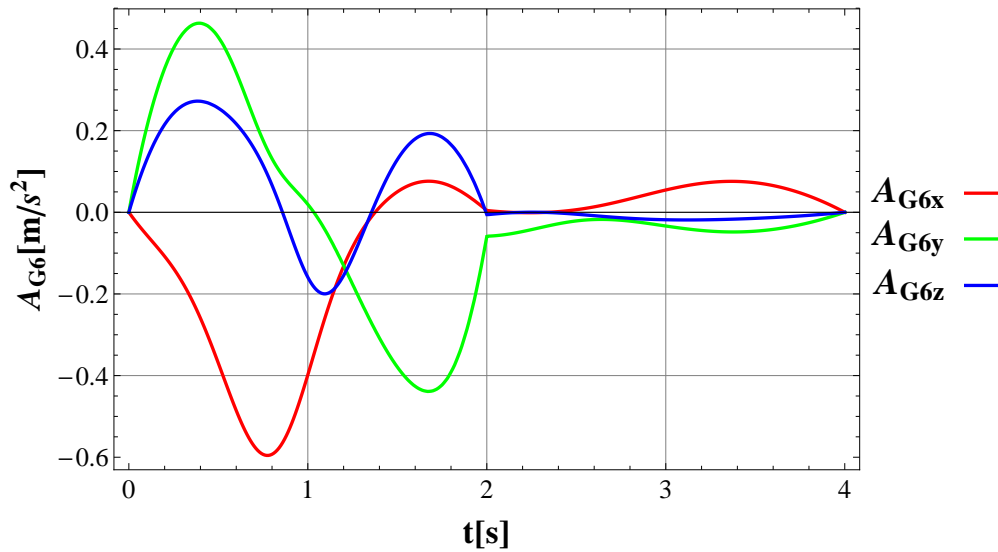
$$\mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{0,3} \times \mathbf{R}_{18} + \boldsymbol{\Omega}_{0,3} \times \mathbf{V}_{18}$$

$$\mathbf{A}'_{G5} = \mathbf{A}_{0,18} \times \mathbf{R}'_{G6} + \boldsymbol{\Omega}_{0,18} \times \mathbf{V}'_{G6}$$

$\mathbf{A}_{G6}$  se encuentra definido en la base local  $(x_0, y_0, z_0)$ , sin embargo, las ecuaciones para el cuerpo 4 han sido definidas en la base  $(x_{18}, y_{18}, z_{18})$ , por lo que la aceleración debe ser transformada a esta base, lo que resulta:

$$\mathbf{a}_{G6} = \mathbf{R}_{18,0} \mathbf{A}_{G6}$$

El comportamiento de  $\mathbf{a}_{G6}$  se observa en la figura 3.33.



**Figura 3.33:** Aceleración  $\mathbf{a}_{G6}$

### 3.2. Solución a la Dinámica

Como se puede apreciar de la figura 3.5, la cadena cinemática para la extremidad consta de 6 cuerpos. Para cada uno de los cuerpos se pueden escribir 6 ecuaciones dinámicas, es decir:

- 3 ecuaciones de la suma de fuerzas
- 3 ecuaciones de la suma de momentos

Por lo que, para la cadena cinemática se tienen 36 ecuaciones dinámicas.

El número de incógnitas en el sistema está asociado a las juntas cinemáticas con las que cuenta la extremidad, se tienen 6 juntas rotacionales. Para cada una de estas juntas se cuentan con 5 incógnitas de reacción y para la junta esférica del cuerpo 4 se consideran las fuerzas de reacción presentes cuando la extremidad tiene contacto con el terreno.

Por otra parte, tomando en cuenta los grados de libertad que tiene la extremidad, se observa que son necesarios 3 torques externos para realizar el movimiento de la extremidad.

Entonces para la fase del movimiento en la que la extremidad es desplazada, esto es para  $0 \leq t \leq 2$  [s], se tiene:

$$\begin{array}{rcl}
 6 \text{ Juntas Rotacionales} & \rightarrow & 30 \\
 3 \text{ Torques externos} & \rightarrow & 3 \\
 \text{Total} & \rightarrow & 33 \text{ Incógnitas}
 \end{array}$$

Por lo que se tienen 36 ecuaciones y 33 incógnitas, siendo un sistema indeterminado. La solución para el sistema indeterminado empleada se muestra en el apéndice D.

Y para la fase del movimiento en la que la extremidad está posicionada en el terreno y el cuerpo se desplaza ( $2 \leq t \leq 4$  [s]), se tiene:

$$\begin{array}{rcl}
 6 \text{ Juntas Rotacionales} & \rightarrow & 30 \\
 1 \text{ Junta Esférica} & \rightarrow & 3 \\
 3 \text{ Torques externos} & \rightarrow & 3 \\
 \text{Total} & \rightarrow & 36 \text{ Incógnitas}
 \end{array}$$

Por lo que para esta fase se tiene un sistema determinado de 36 ecuaciones con 36 incógnitas.

El material propuesto para la extremidad es aluminio, debido a su densidad, resistencia y facilidad de manufactura, en la sección 3.3 se detallan las propiedades de la aleación escogida. Con base en el material propuesto, las propiedades físicas de los cuerpos empleados en el análisis dinámico son:

Cuerpo 1:

$$m_1 = 11.4146 \text{ [kg]}$$

$$\mathbf{I}_{G1} = \begin{bmatrix} 0.3194 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6231 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9040 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]}$$

Cuerpo 2:

$$m_2 = 1.59357 \text{ [kg]}$$

$$\mathbf{r}_{G2} = [ 0.05174, 0.00124, 0.00004 ] \text{ [m]}$$

$$\mathbf{I}_{G2} = \begin{bmatrix} 0.00487 & 0.00012 & 0 \\ -0.00012 & 0.01028 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00574 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]}$$

Cuerpo 3:

$$m_3 = 0.18603 \text{ [kg]}$$

$$\mathbf{r}_{G3} = [ 0.05296, 0.00068, 0 ] \text{ [m]}$$

$$\mathbf{I}_{G3} = \begin{bmatrix} 0.00002 & -0.00002 & 0 \\ -0.00002 & 0.0009 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00089 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]}$$

Cuerpo 4:

$$m_4 = 0.23763 \text{ [kg]}$$

$$\mathbf{r}_{G4} = [ 0.08370, 0.00053, 0 ] \text{ [m]}$$

$$\mathbf{I}_{G4} = \begin{bmatrix} 0.00002 & -0.00003 & 0 \\ -0.00003 & 0.00267 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00266 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]}$$

Cuerpo 5:

$$m_5 = 0.56362 \text{ [kg]}$$

$$\mathbf{r}_{G5} = [ 0.22662, -0.00131, 0 ] \text{ [m]}$$

$$\mathbf{I}_{G5} = \begin{bmatrix} 0.00005 & -0.00007 & 0 \\ -0.00007 & 0.04343 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04343 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]}$$

Cuerpo 6:

$$m_6 = 0.32845 \text{ [kg]}$$

$$\mathbf{r}_{G6} = [ 0.12688, 0.00263, 0 ] \text{ [m]}$$

$$\mathbf{I}_{G6} = \begin{bmatrix} 0.00005 & -0.00021 & 0 \\ -0.00021 & 0.00775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00775 \end{bmatrix} \text{ [kg m}^2\text{]}$$

De la figura 3.34 a la 3.40 se muestran las gráficas pertenecientes a las fuerzas de reacción obtenidas en las juntas de la extremidad, así como las fuerzas de reacción debidas al contacto con el terreno.

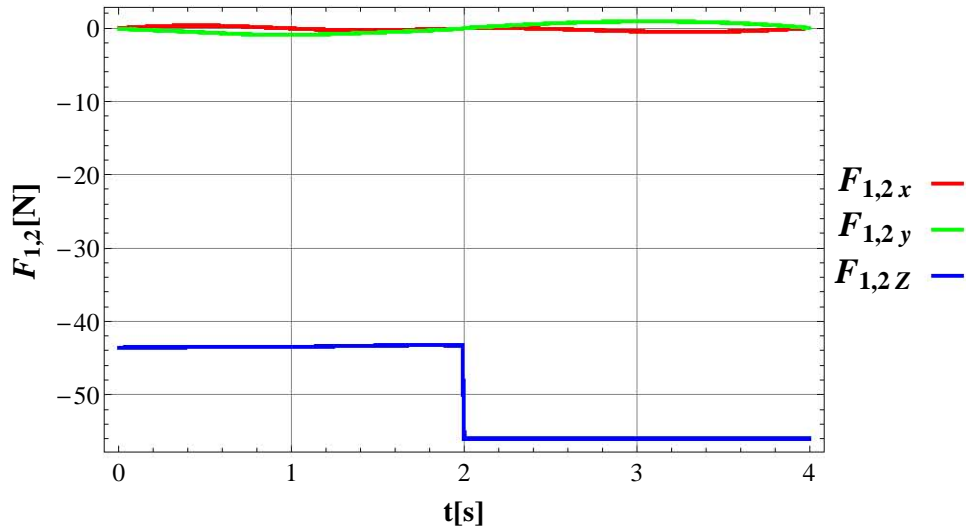


Figura 3.34: Fuerza  $F_{1,2}$

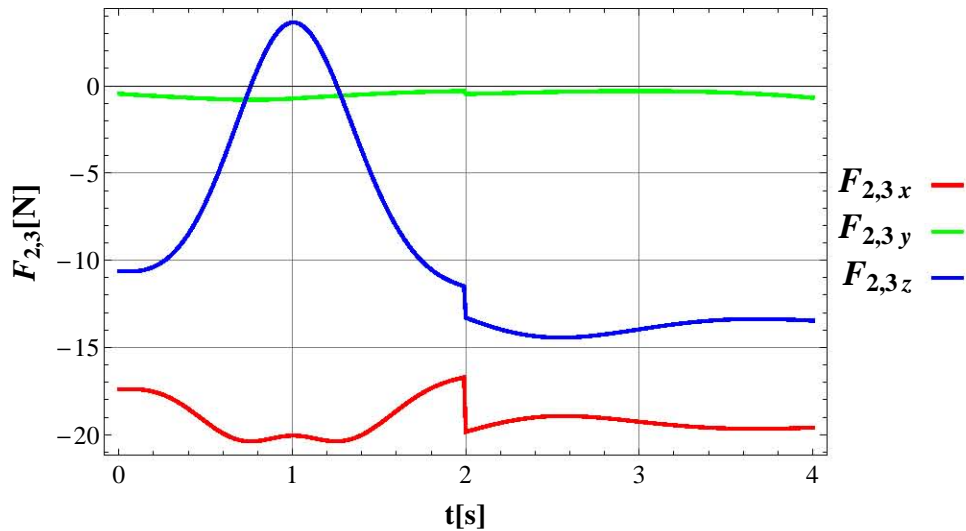


Figura 3.35: Fuerza  $F_{2,3}$

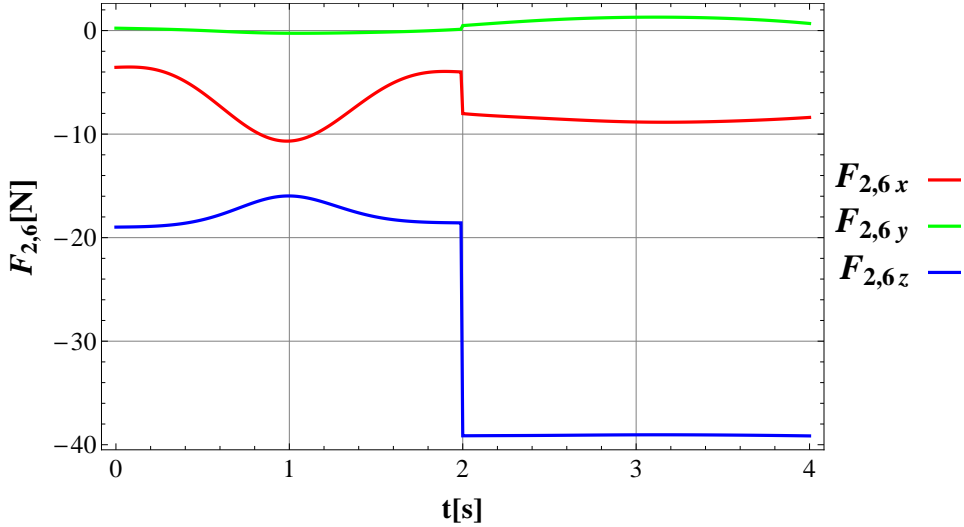


Figura 3.36: Fuerza  $F_{2,6}$

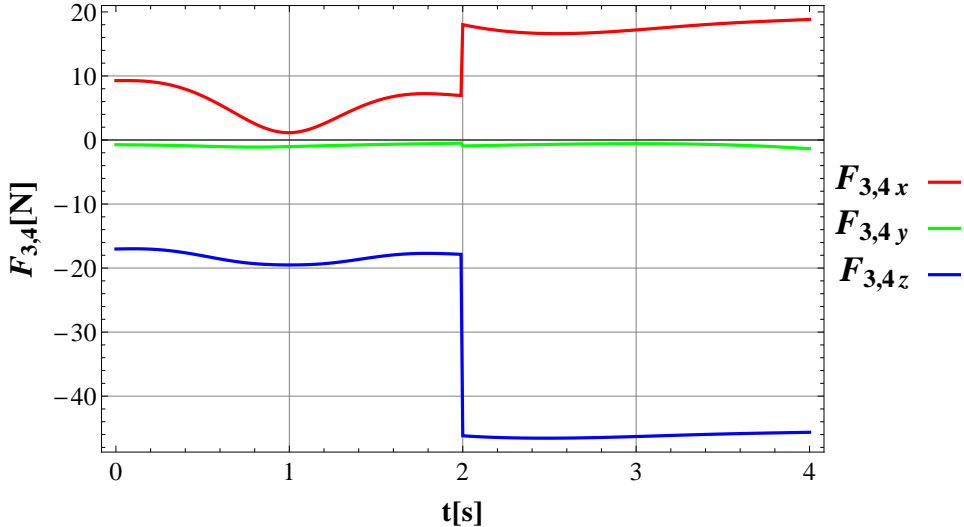
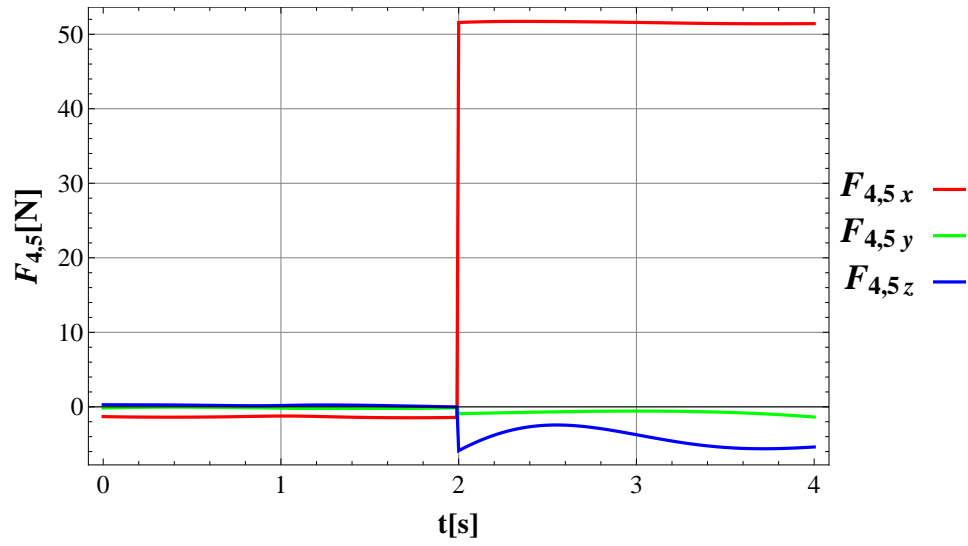
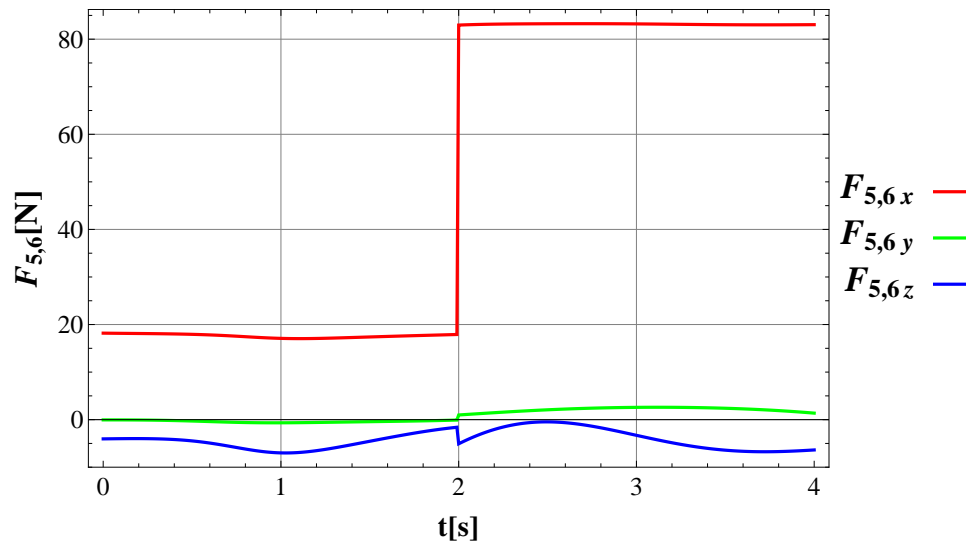


Figura 3.37: Fuerza  $F_{3,4}$

Figura 3.38: Fuerza  $F_{4,5}$ Figura 3.39: Fuerza  $F_{5,6}$



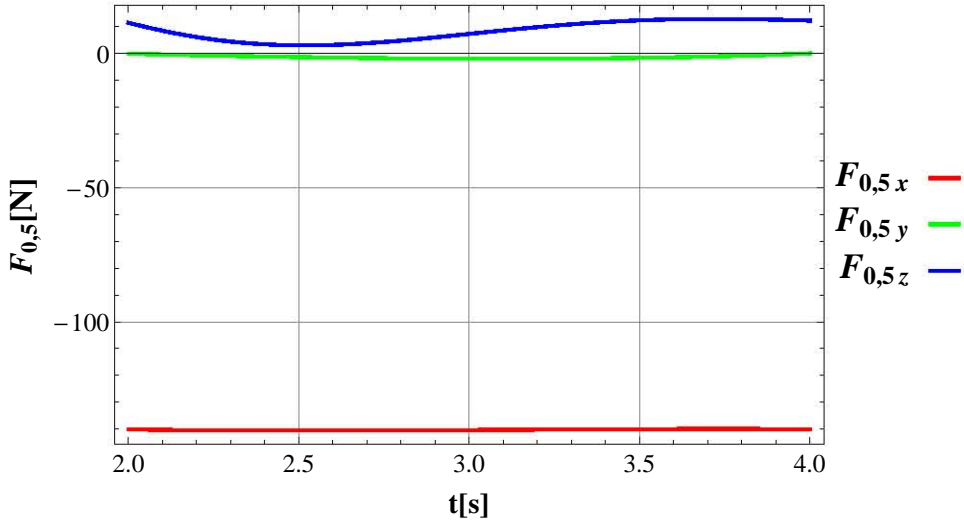


Figura 3.40: Fuerza  $F_{0,5}$

Ahora de la figura 3.41 a la 3.46 se muestran las gráficas de los torques obtenidos en las juntas de la extremidad.

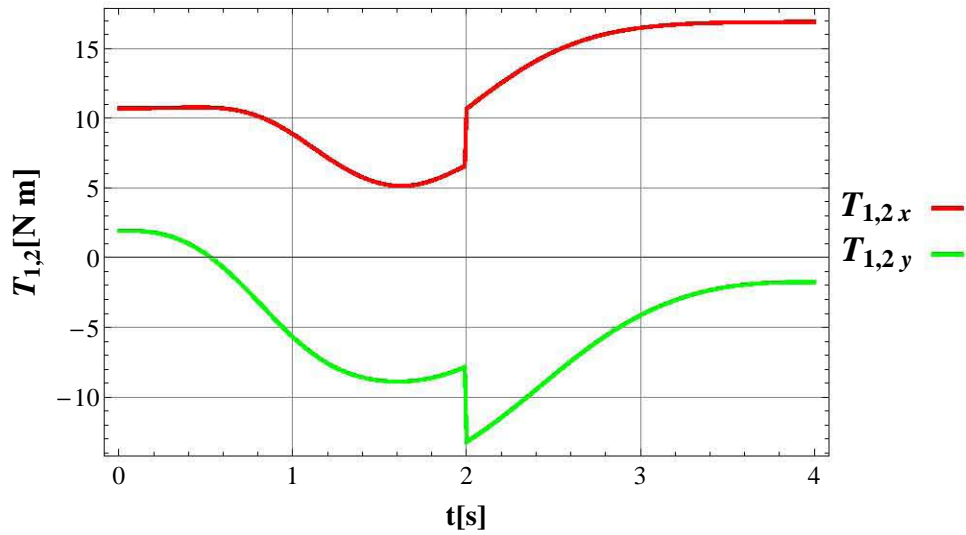


Figura 3.41: Torque  $T_{1,2}$

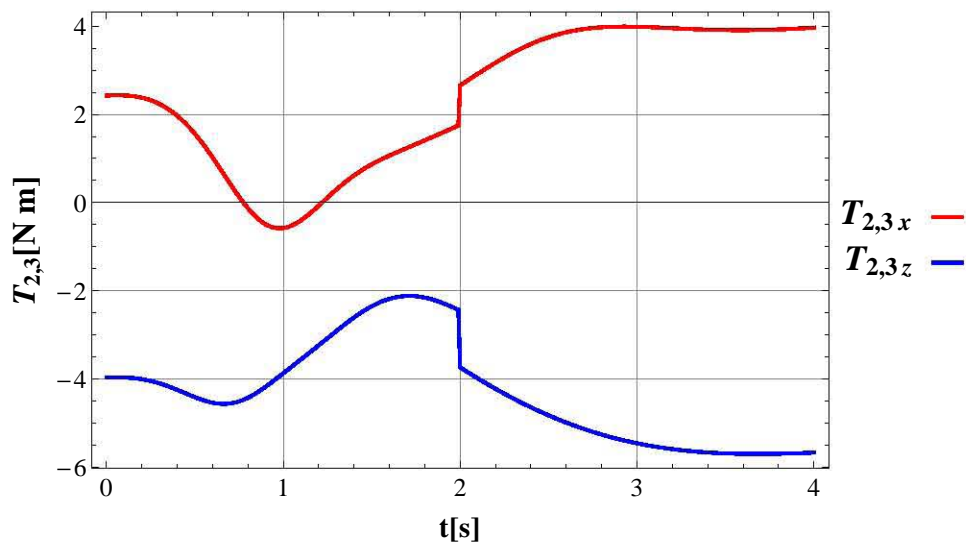


Figura 3.42: Torque  $T_{2,3}$

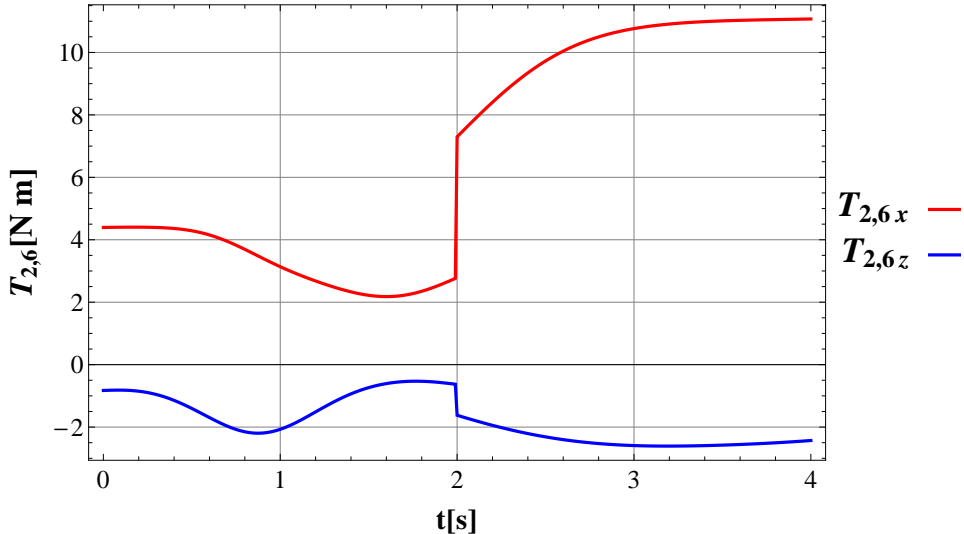


Figura 3.43: Torque  $T_{2,6}$

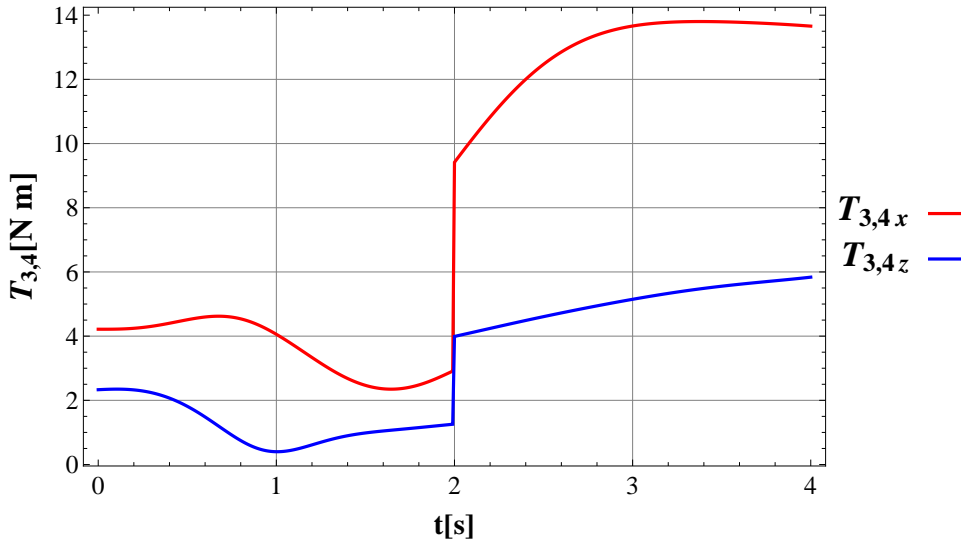


Figura 3.44: Torque  $T_{3,4}$

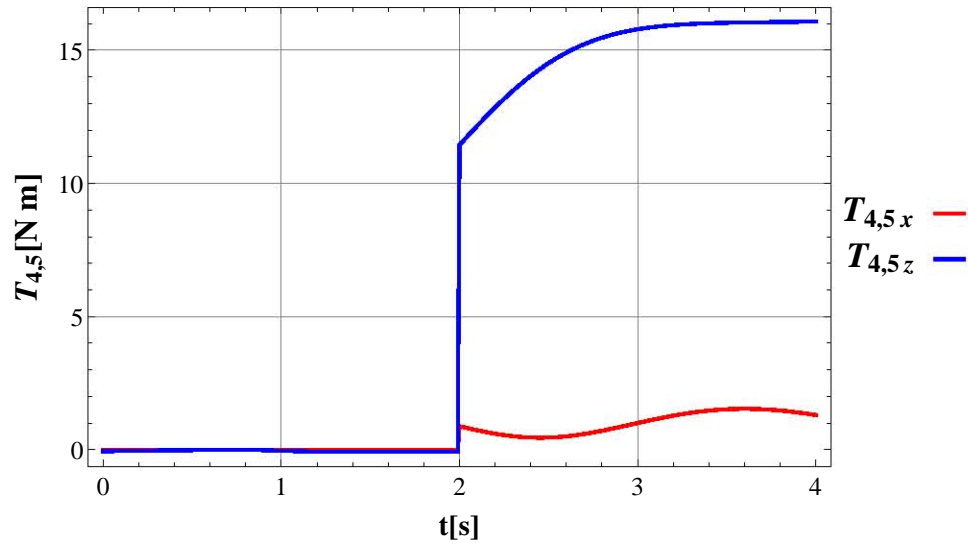


Figura 3.45: Torque  $T_{4,5}$

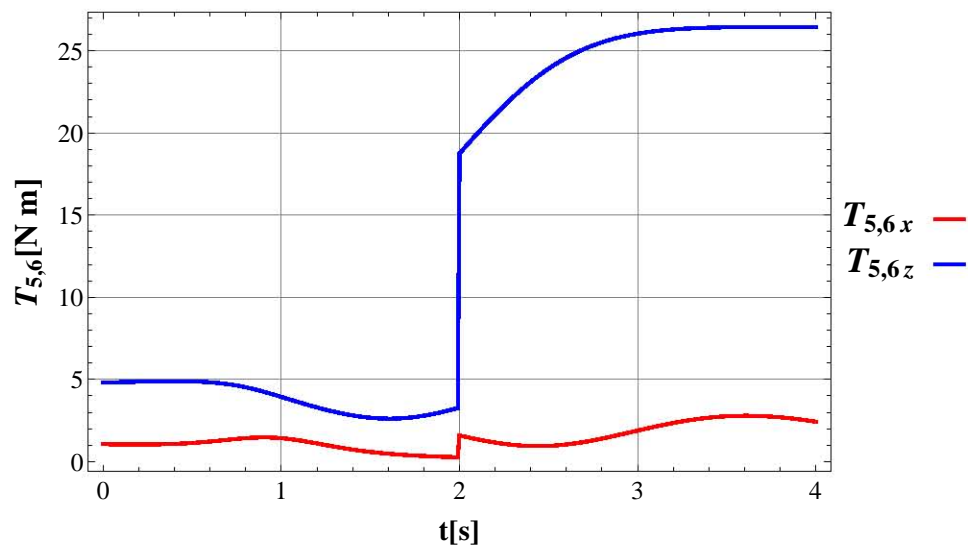


Figura 3.46: Torque  $T_{5,6}$

Para los torques externos, es decir, los que deberán proporcionar los actuadores, se realizan dos análisis, uno estático y otro dinámico. El análisis estático tiene la finalidad de conocer los torques necesarios para lograr que la extremidad mantenga una cierta posición sin efectuar movimiento alguno ( $\mathbf{F}^I = \mathbf{0}$ ), mientras que en el dinámico se toma en cuenta el movimiento.

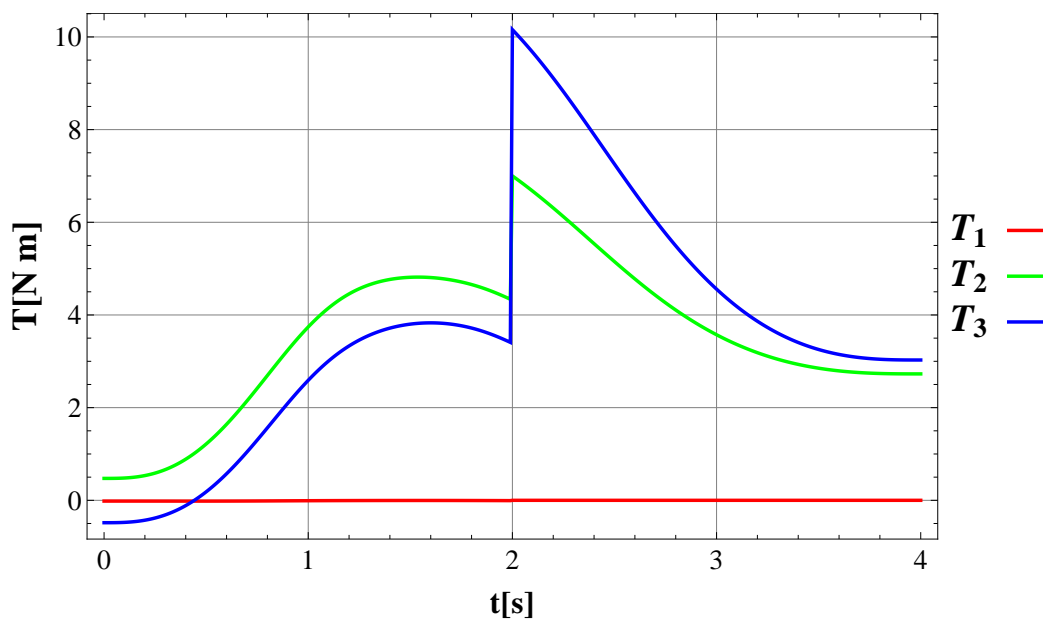


Figura 3.47: Torques  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  Estáticos

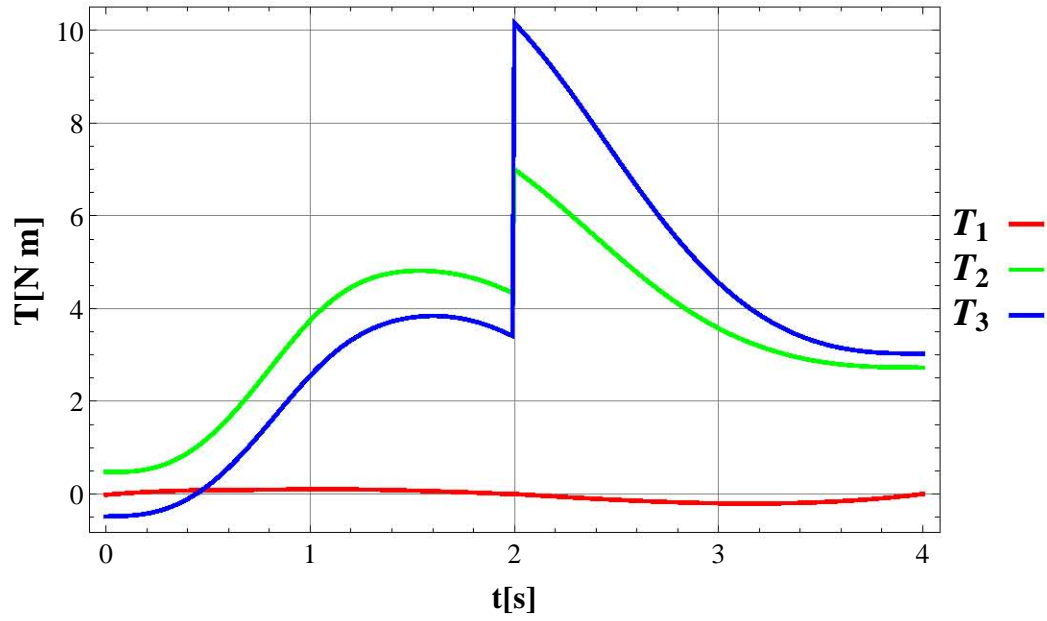


Figura 3.48: Torques  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  Dinámicos

### 3.3. Propuesta de Material, Actuadores y Rodamientos

Como se había ya propuesto en la solución al análisis dinámico, el material seleccionado para la extremidad es el aluminio debido a sus principales ventajas, como lo son su baja densidad, buena relación resistencia a peso, excelente maquinabilidad, resistencia a la corrosión y un costo razonable. La aleación de aluminio escogida fue la 6061-T6, algunas de sus características se muestran en las tablas 3.1a, 3.1b y 3.1c.

<b>Composición de la Aleación</b>	
<b>Elemento</b>	<b>%</b>
Aluminio	95.9 - 98.6
Silicio	0.4 - 0.8
Cobre	0.15 - 0.4
Manganeso	0.8 - 1.2
Cromo	0.04 - 0.35

(a)

<b>Propiedades Físicas</b>	
Densidad	2780 [kg/cm <sup>3</sup> ]

(b)

<b>Propiedades Mecánicas</b>	
Módulo de Elasticidad	68.9 [GPa]
Coefficiente de Poisson	0.33
Esfuerzo Máximo de tracción	310 [MPa]
Esfuerzo de Fluencia	276 [MPa]

(c)

**Tabla 3.1:** Características de la aleación de aluminio 6061-T6

### 3.3. PROPUESTA DE MATERIAL, ACTUADORES Y RODAMIENTOS

Para la propuesta de los actuadores de la extremidad se toman en cuenta los torques dinámicos máximos (Fig. 3.48), las fuerzas de reacción, así como las velocidades angulares presentes en las juntas actuadas, correspondientes a los ángulos  $\theta_3$ ,  $\theta_7$  y  $\theta_{18}$ . La tabla 3.2 muestra algunas de las características de los actuadores propuestos para suministrar los torques  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  y  $\mathbf{T}_3$  de la extremidad.

	$\mathbf{T}_1$	$\mathbf{T}_2$	$\mathbf{T}_3$
<b>Actuador</b>	EtaCrown 52.2 BCI4240 60,0:1	Compactline 91.3 BCI6325 67,3:1	Compactline 92.3 BCI6325 142,0:1
<b>Proveedor</b>	Zeitlauf	Zeitlauf	Zeitlauf
<b>Potencia [W]</b>	15	25	34
<b>Torque de Salida [N m]</b>	2.7	9	14
<b>Velocidad de Salida [RPM]</b>	51.7	26.9	22.2
<b>Máxima Carga Radial [N]</b>	720	150	150
<b>Máxima Carga Axial [N]</b>	150	50	50
<b>Peso [kg]</b>	1.15	1.6	1.7

**Tabla 3.2:** Actuadores Seleccionados



De igual forma, tomando en cuenta las fuerzas de reacción y las velocidades angulares, se realiza una propuesta de rodamientos para las juntas no actuadas, correspondientes a los ángulos  $\theta_{10}$ ,  $\theta_{13}$  y  $\theta_{21}$  de la extremidad. El rodamiento propuesto es adecuado para las tres juntas, las características de este se muestran en la tabla 3.3. También se propone la junta esférica para el elemento final de la extremidad (Tabla 3.4).

Rodamiento	<b>SKF 61900-2Z</b>
Carga Dinámica [N]	2080
Carga Estática [N]	850
Velocidad Límite [RPM]	3600
Peso [kg]	0.010

**Tabla 3.3:** Rodamiento propuesto

Junta	<b>Hephaist SRJ012C</b>
Carga Dinámica [N]	720
Carga Estática [N]	770
Ángulo Permisible [°]	$\pm 30$
Peso [kg]	0.18

**Tabla 3.4:** Junta esférica propuesta

# Capítulo 4

## Conclusiones

La selección de la extremidad resultó en un mecanismo de cadena cerrada de cinco barras. Este mecanismo permite agrupar todas las juntas actuadas en el eslabón que está conectado directamente al cuerpo, por lo que, el peso los actuadores estará concentrado en el cuerpo, permitiendo de esta manera reducir el peso en la extremidad.

Por otra parte, el estudio del espacio de trabajo para este mecanismo muestra que la extremidad cuenta con un buen rango útil de alcance, teniendo una buena apertura, así como un cierre que permite posicionar el elemento final por debajo del cuerpo del robot, e incluso la extremidad es capaz de posicionarse por encima de la altura del eslabón que está conectado al cuerpo. Por lo tanto, espacio de trabajo proporciona una buena adaptabilidad a diversos entornos así como capacidad de superar distintos obstáculos.

En el análisis cinemático realizado, el movimiento para la extremidad se tiene en función de pocos parámetros, como lo son el tiempo en que se desea que se realice el movimiento, la altura y longitud del paso. Proporcionando esta información se define por completo los movimientos de la extremidad. Incluso podrían definirse nuevas trayectorias para la extremidad y/o el cuerpo, sin que esto se vea reflejado en una mayor complejidad del cálculo.

Con respecto a las trayectorias definidas, en el caso de la extremidad, se planteó una curva que permitía una clara reducción en las aceleraciones angulares, lo cual da la posibilidad de reducir la exigencia a los actuadores, resultando en un movimiento con una mayor eficiencia para el andar del robot. Esto también puede proporcionar algunos indicios de por qué diversos organismos biológicos al andar, tienden a emplear trayectorias similares a la planteada.

Por otro lado, el hacer uso del polinomio de quinto grado para los perfiles de velocidad de la extremidad y el cuerpo, proporcionó el comportamiento esperado, es decir, movimientos suaves y continuos. Esto permite a la extremidad ascender, aumentando su velocidad gradualmente hasta un máximo y reduciéndola después al descender, hasta posicionarse sobre el suelo con suavidad. El contar con este tipo de movimientos permite también reducir la exigencia a los actuadores, ya que la actuación de estos no se proporciona de manera instantánea.

Además, al contar con un movimiento suave, se reducen las sacudidas, vibraciones, colisiones y posibles daños. Por lo que, de igual forma, el tener este tipo de movimiento ayuda a que la extremidad tenga una mejor eficiencia. Finalmente para la cinemática descrita, resultó un conjunto de seis incógnitas a resolver. Para las trayectorias de seguimiento definidas, como se explicó anteriormente, se obtuvieron valores y comportamientos esperados.

Para el análisis dinámico de la extremidad fue empleada la formulación Newton-Euler, la cual toma en cuenta las fuerzas de restricción existentes en las juntas que unen los eslabones. El uso de este método fue de gran utilidad ya que el objetivo del análisis de la extremidad esta enfocado a la selección de rodamientos y actuadores, así como para un diseño mecánico posterior.

Al implementar la formulación Newton-Euler a la extremidad, se obtuvieron dos sistemas lineales, el primero conformado de 36 ecuaciones con 33 incógnitas, siendo un sistema indeterminado, mientras que el segundo está conformado de 36 ecuaciones con 36 incógnitas, siendo un sistema determinado. La solución al sistema indeterminado se realizó por medio de la implementación del método de mínimos cuadrados.

Los comportamientos obtenidos en este análisis fueron los esperados, en ellos se pueden apreciar las fases del movimiento que se plantearon para la extremidad. En la primera fase del movimiento, la extremidad se translada a lo largo de la trayectoria propuesta para el paso, mientras que el cuerpo se mueve de igual manera a lo largo de su trayectoria. Esto es debido a que se planteó un movimiento enfocado a lo que se presentará al implementar otras extremidades, en que estas últimas, apoyadas en el terreno, estarán desplazando al cuerpo mientras que la extremidad da el paso. En la segunda fase de movimiento, la extremidad que daba el paso en la primera fase está posicionada en el terreno y ahora empuja al cuerpo, mientras otra extremidad da el paso.

Con el análisis dinámico descrito se realizó la propuesta de actuadores y rodamientos, sin embargo, la propuesta realizada no es definitiva, estos pueden variar dependiendo de varios aspectos. Por un lado, al haberse realizado únicamente el análisis de una extremidad, esta estaría soportando el peso del cuerpo. Sin embargo, el robot no contará solamente con una extremidad, ya que para el caminar se requieren como mínimo, dos extremidades. Por lo que, los torques obtenidos en el análisis serían mayores a los que se presentarían en

---

configuraciones de dos o más extremidades. Esto resulta en una selección de actuadores de mayor capacidad. Por lo tanto, esto deberá ser tomado en cuenta dependiendo de la configuración de extremidades que sea seleccionada para el robot.

Por otro lado, en el diseño mecánico posterior, muy probablemente las características físicas del cuerpo y la extremidad cambiarán, la forma de estos deberá ser adaptada para contener los actuadores y rodamientos. Esto lleva a un posible cambio en los pesos y centros de gravedad, dando como resultado un análisis dinámico inadecuado para estos nuevos cuerpos. Aquí es donde se entra al proceso iterativo propio del diseño, sin embargo, el análisis dinámico para la extremidad ya ha sido planteado, por lo que, sólo es necesario proporcionar las nuevas características de los cuerpos para obtener los valores buscados de la nueva configuración de la extremidad. Esto simplifica de gran manera el proceso de diseño y permite de esta manera contar con un diseño mecánico, rodamientos y actuadores óptimos para las características de la extremidad.



# Apéndice A

## Espacio de Trabajo

El espacio de trabajo de un robot manipulador es el volumen total barrido por el efector final al ejecutar todo tipo de movimientos. El espacio de trabajo está determinado por la geometría del manipulador y los límites de los movimientos de las juntas que contiene. Es más específico definir el espacio de trabajo que se puede alcanzar, como el total de puntos en los cuales el efector final puede posicionarse [75].

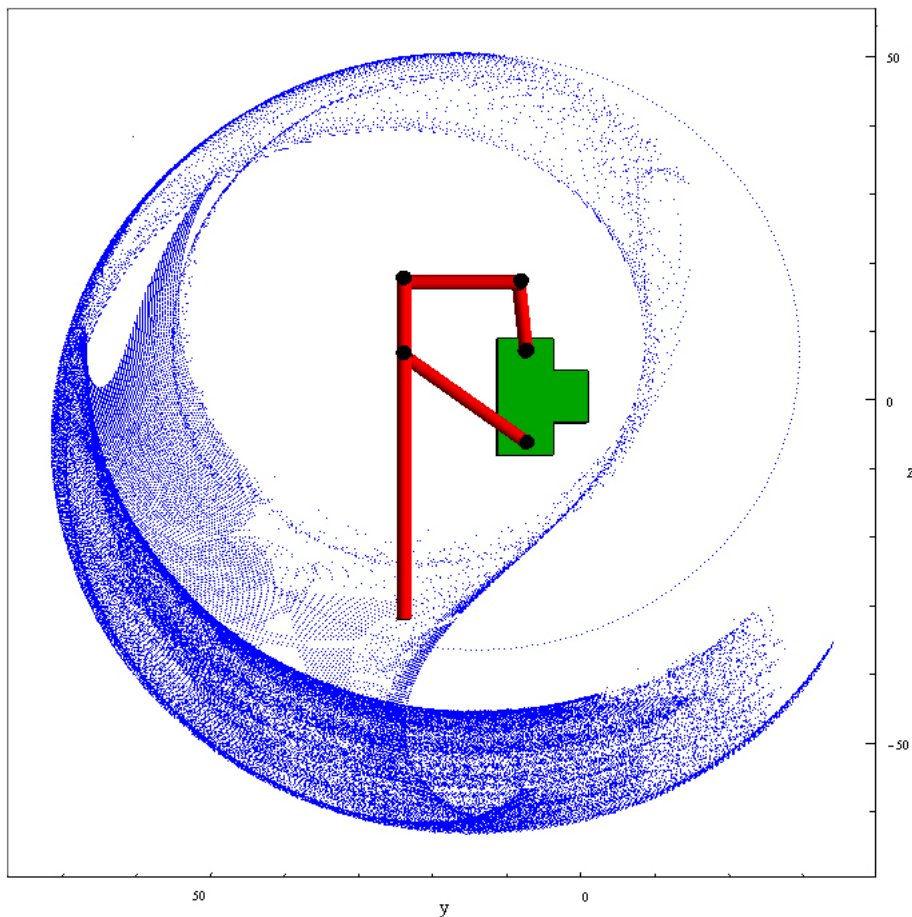
La generación del espacio de trabajo de un robot es un problema complejo, se requieren de algoritmos y una gran cantidad de cálculos. Actualmente existen muchos trabajos realizados específicamente para generación de métodos que logren obtener los espacios de trabajo de robots de una manera más rápida y sencilla (Merlet 1995, Gosselin y Jean 1996, Gallant y Boudreau 2002, Goyal y Sethi 2010, Arrouk y Bouzgarrou 2010). Sin embargo, la mayoría de los trabajos desarrollados al respecto están enfocados a robots manipuladores, los cuales por lo regular, cuentan con un mecanismo de cadena abierta.

Aplicado al mecanismo de la extremidad del robot, el espacio de trabajo es el rango útil de trabajo, es decir, todos los puntos que puede alcanzar el extremo del eslabón 4 (el que hace contacto con el suelo) en las diversas configuraciones de movimiento del mecanismo.

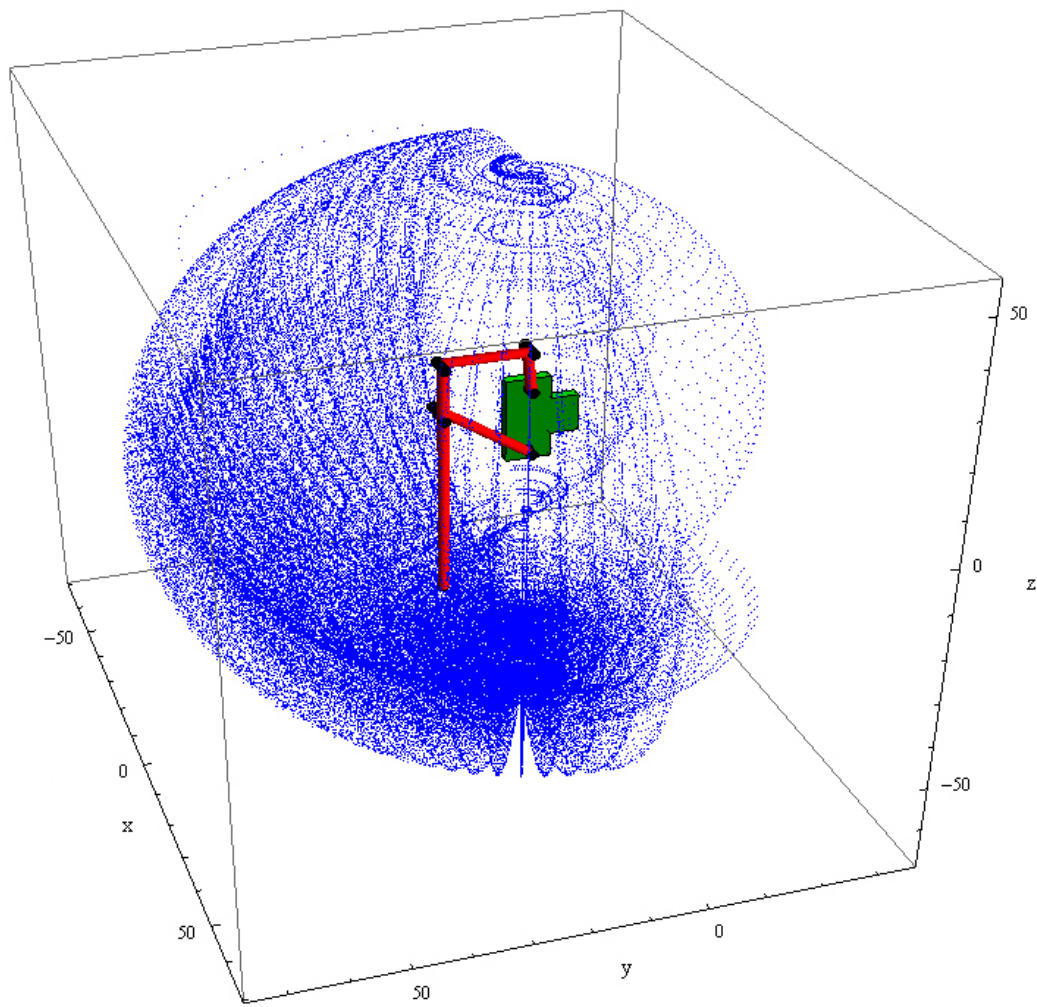
Realizando este tipo de análisis se pueden conocer los alcances de la extremidad y poder optimizar el mecanismo dependiendo de los requerimientos, además de que proporciona información útil para definir las trayectorias y el andar del robot.

La determinación del espacio de trabajo de la extremidad se complica debido a que se trata de un mecanismo de cadena cerrada, en el cual se pueden llegar a presentar puntos de singularidad (desensambles e inversiones).

En las figuras A.1, A.2, A.3 y A.4 se aprecian diferentes vistas del espacio de trabajo de la extremidad, donde los puntos que alcanza la extremidad se representan en color azul.

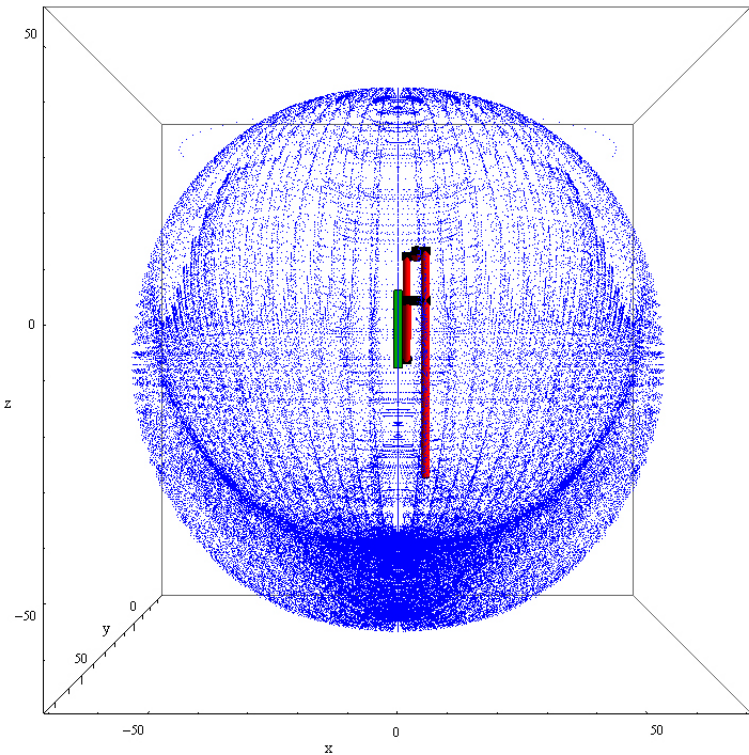


**Figura A.1:** Área de trabajo en el plano YZ

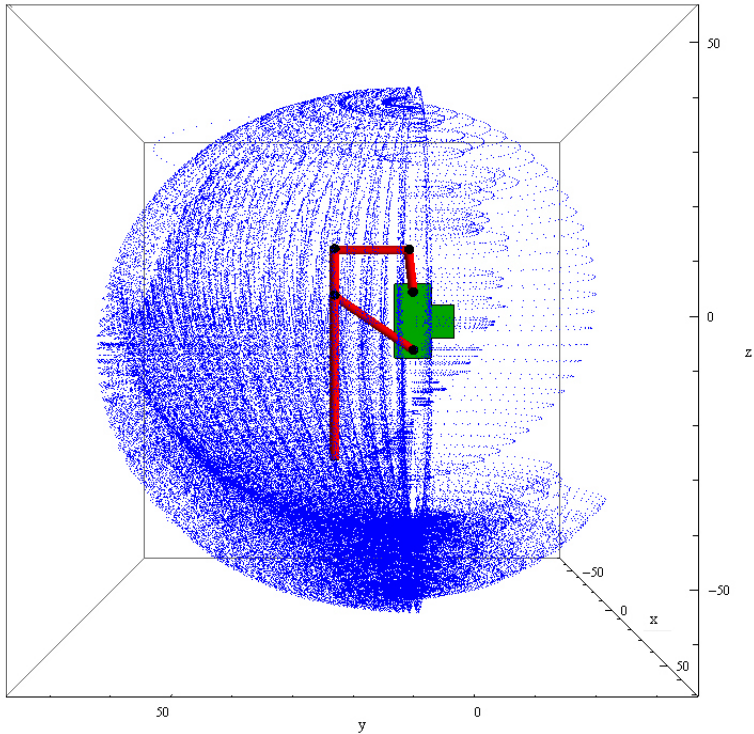


**Figura A.2:** Espacio de trabajo



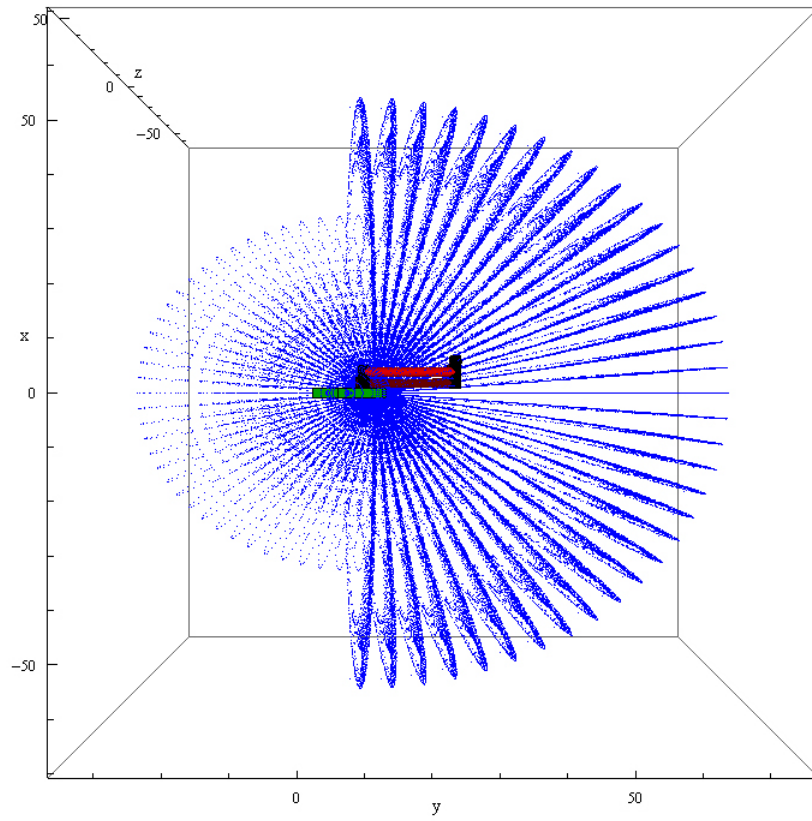


(a) Vista Frontal



(b) Vista Lateral

Figura A.3: Espacio de Trabajo



**Figura A.4:** Espacio de Trabajo (Vista Superior)



# Apéndice B

## Trayectorias y Perfiles de Velocidad

Los movimientos realizados por los sistemas robóticos deben ser, como regla, lo más suaves posibles, los cambios abruptos de posición, velocidad y aceleración deben ser evitados. Los movimientos bruscos requieren cantidades muy grandes de energía, la cual los motores no pueden proporcionar, debido a sus limitaciones físicas. Por otro lado, los movimientos abruptos se presentan cuando el robot colisiona con un objeto, una situación que naturalmente debe ser evitada.

Aún cuando los movimientos suaves pueden ser planeados con técnicas simples, no hay garantía alguna de que no se presentarán movimientos bruscos. Si bien la mayoría de los sistemas robóticos tienen su mayor aplicación en ambientes bien estructurados, como en la manufactura, también son utilizados en terrenos naturales e irregulares. La planeación de los movimientos de un robot son más desafiantes en el segundo caso que en el primero [2].

El caso de la planeación de trayectorias en los RMCD, como se ha visto, tiene mucha importancia, ya que las extremidades deben acelerar al elevarse y desacelerar al aproximarse al suelo, de lo contrario podrían presentarse colisiones, sacudidas, vibraciones, movimientos bruscos y muy probablemente daños. Por esta razón, se definen trayectorias de seguimiento, tanto para la extremidad como para el cuerpo, de igual manera se proponen perfiles de velocidad para ambos, estos perfiles permiten que se tengan movimientos suaves a lo largo de las trayectorias.

En primer lugar, se definen las trayectorias que seguirán la extremidad y por el cuerpo. La trayectoria escogida para el movimiento de la extremidad es una parábola, esta curva tiene características adecuadas para ser utilizada como trayectoria al dar un paso.

La ecuación paramétrica de la parábola elegida es:

$$x_{e^*}(\phi) = \phi$$

$$y_{e^*}(\phi) = 0$$

$$z_{e^*}(\phi) = \frac{4 \frac{H}{\cos(\gamma)} (d_e - \phi) \phi}{d_e^2}$$

Donde:

$\phi$  : Parámetro para la extremidad

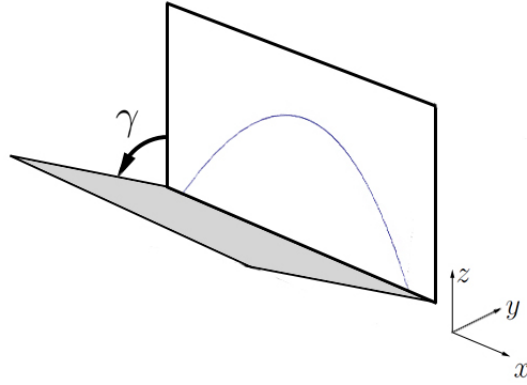
$H$ : Altura del paso

$d_e$ : Longitud del paso

$\gamma$  : Ángulo de inclinación de la parábola

Se puede observar que la parábola está definida en términos de  $\gamma$ ,  $H$ , y  $d_e$ . Esto permite generar parábolas específicas según las necesidades, de una manera más fácil, en función de datos de interés, como lo son la altura y longitud del paso a realizar. El parámetro  $\phi$  representa la distancia en  $x$  que tiene que recorrer la extremidad, este parámetro puede tener otro significado físico dependiendo de la aplicación.

En algunos animales, las trayectorias que realizan las extremidades al andar, tienden a seguir curvas con ciertas inclinaciones respecto al suelo [51]. Con ayuda de simulaciones del movimiento de la extremidad, se propusieron diversos grados de inclinación para la parábola y se observó que para ciertos valores del ángulo, las aceleraciones en las juntas de la extremidad tendían a los valores mínimos registrados. Por lo tanto, el grado de inclinación  $\gamma$  elegido para la curva es igual a  $\frac{\pi}{4}$ .



**Figura B.1:** Ángulo  $\gamma$

Haciendo uso de transformaciones homogéneas, se realiza la rotación de la parábola  $\mathbf{R}_{curva}$ :

$$\mathbf{T}_4(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma & 0 \\ 0 & s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T(\mathbf{r}_{e^*}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{e^*} \\ 0 & 1 & 0 & y_{e^*} \\ 0 & 0 & 1 & z_{e^*} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{curva} = \mathbf{T}_4(\gamma) \mathbf{T}(\mathbf{r}_e)$$

Por lo que la ecuación paramétrica final de la parábola es :

$$x_e(\phi) = \mathbf{R}_{curva14} + x_{e\text{inicial}} \quad (\text{B.1a})$$

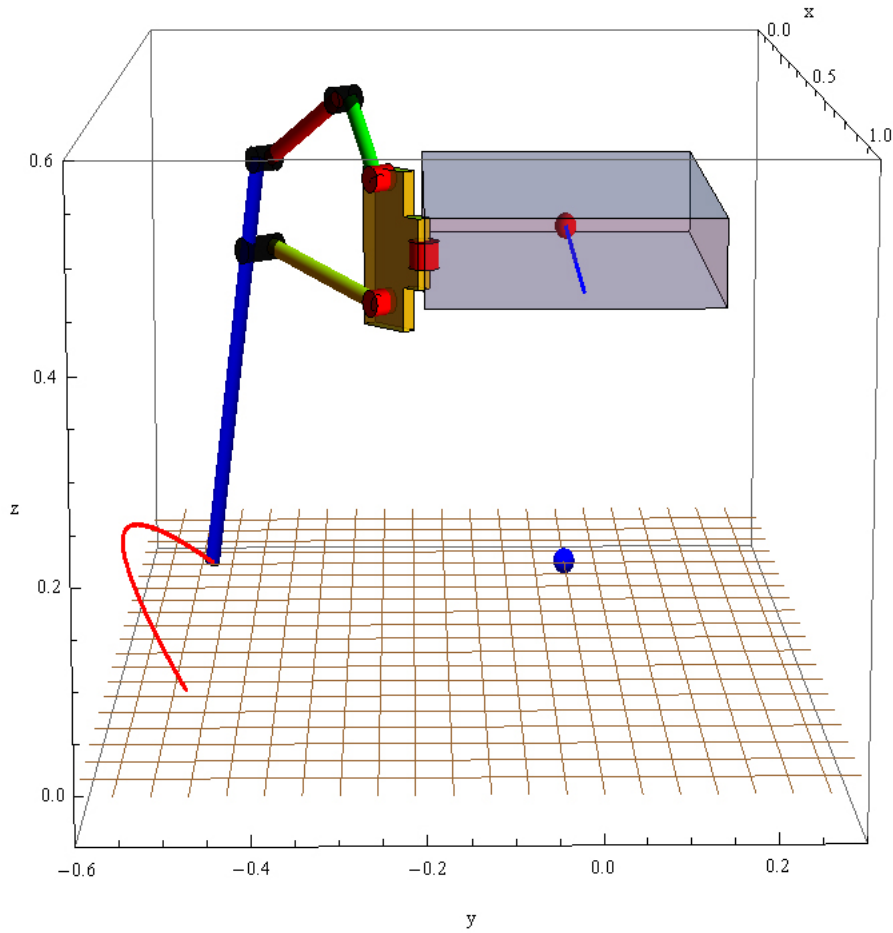
$$y_e(\phi) = \mathbf{R}_{curva24} + y_{e\text{inicial}} \quad (\text{B.1b})$$

$$z_e(\phi) = \mathbf{R}_{curva34} + z_{e\text{inicial}} \quad (\text{B.1c})$$

con :

$$x_{e\text{Inicial}} = 0, \quad y_{e\text{Inicial}} = -0.50, \quad z_{e\text{Inicial}} = 0$$

En la figura B.2 se puede apreciar en color rojo la trayectoria que sigue la extremidad.



**Figura B.2:** Trayectorias definidas

Una vez definida la curva, se genera un perfil que permita que la extremidad tenga un movimiento suave a lo largo de la trayectoria, para esto se emplea el polinomio de quinto grado, también llamado polinomio 3-4-5 [2]:

$$p(\tau) = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3 \quad (\text{B.2a})$$

$$p'(\tau) = 30\tau^4 + 60\tau^3 + 30\tau^2 \quad (\text{B.2b})$$

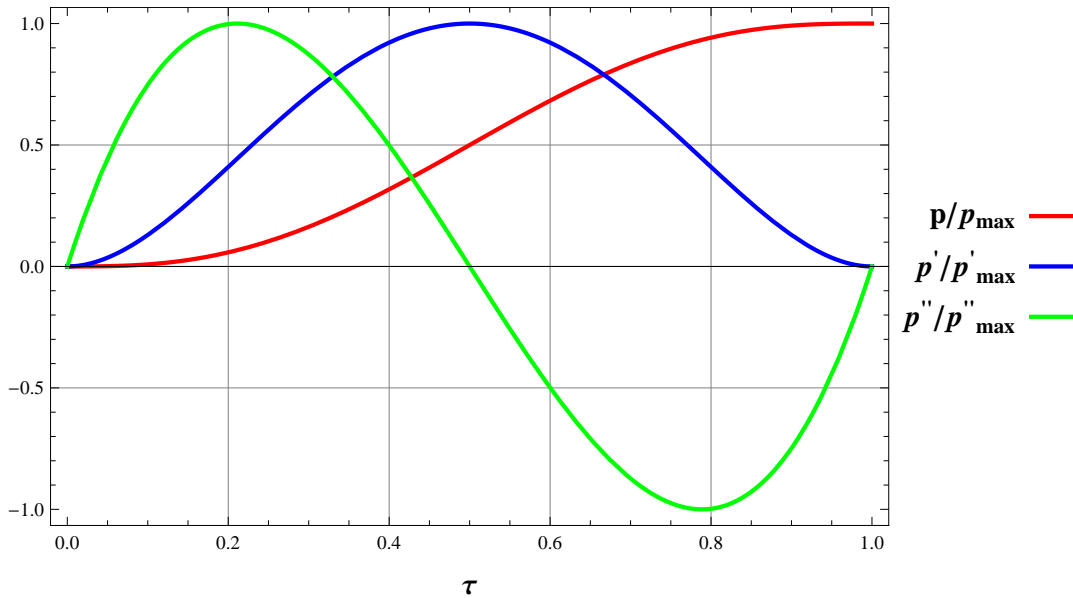
$$p''(\tau) = 120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau \quad (\text{B.2c})$$

para  $0 < \tau < 1$ , donde:

$$\tau = \frac{t}{T}$$

Donde  $T$  es el tiempo total requerido para realizar el movimiento.

El polinomio 3-4-5 y sus primeras dos derivadas (ecs. B.2b y B.2c), normalizado dentro del rango  $(-1, 1)$ , son mostradas en la figura B.3. Se puede apreciar que para la velocidad, este polinomio nos proporciona el comportamiento buscado, un aumento de la velocidad hasta llegar a un máximo para después disminuir gradualmente. Es decir, la extremidad se elevará desde el suelo aumentando su velocidad progresivamente hasta alcanzar una máxima velocidad para después comenzar a disminuirla para posicionarse sobre el suelo con suavidad.



**Figure B.3:** Polinomio 3-4-5 y sus derivadas

Como la ecuación de la parábola está en función del parámetro  $\phi$ , es necesario definirlo. Para hacer esto, se toma en cuenta que:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{B.3})$$

despejando para  $\phi$ , se obtiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{d\phi}} \quad (\text{B.4})$$



Para determinar  $\frac{ds}{d\phi}$ , se emplea la definición de longitud de arco:

$$s = \int \|\dot{\mathbf{r}}\| d\phi = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2} d\phi$$

se deduce que:

$$\frac{ds}{d\phi} = \|\dot{\mathbf{r}}\| \quad (\text{B.5})$$

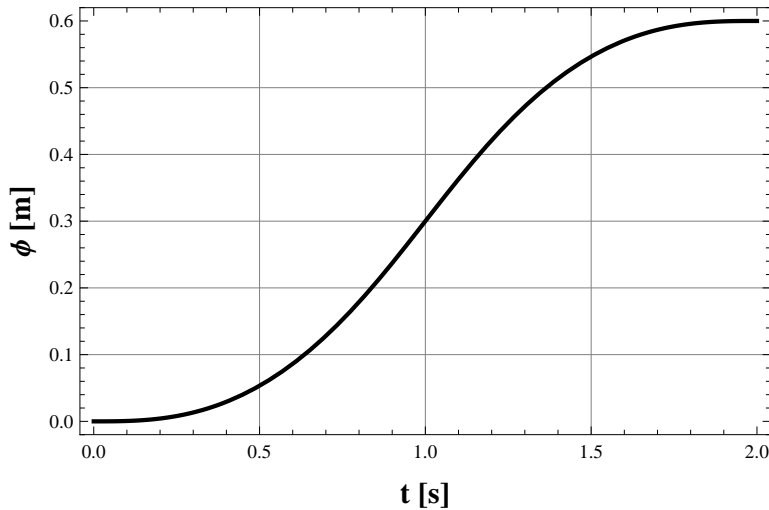
Ahora para  $\frac{ds}{dt}$ , que es el perfil de velocidad para la curva, se emplea la ecuación B.2b, y definiendo para la curva resulta que:

$$\frac{ds}{dt} = p'(\tau) \int_0^{d_e} \|\dot{\mathbf{r}}\| d\phi \quad (\text{B.6})$$

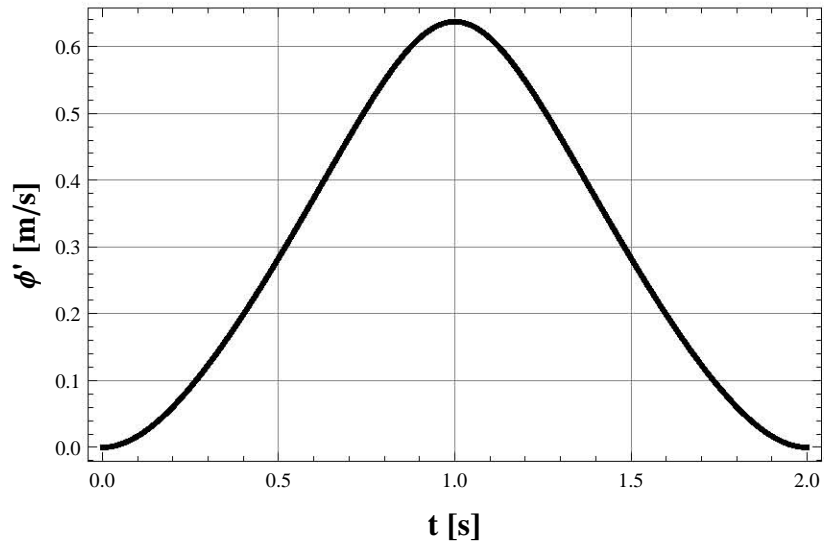
Una vez definidas las ecuaciones B.5 y B.6, se sustituyen en la ecuación diferencial B.4 y se resuelve para:

$$\begin{aligned} 0 < t_e < 2 \\ H: 0.10 [m] \\ d_e: 0.60 [m] \end{aligned}$$

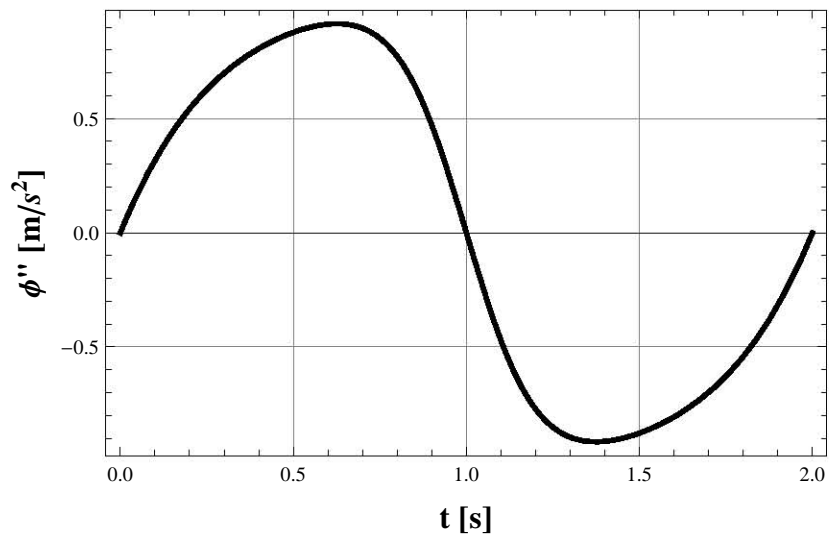
Para estas condiciones, el parámetro  $\phi$  y sus primeras dos derivadas, se aprecian en las figuras B.4, B.5 y B.6, respectivamente.



**Figura B.4:** Parámetro  $\phi$



**Figura B.5:** Primera derivada del parámetro  $\phi$



**Figura B.6:** Segunda derivada del parámetro  $\phi$

De una forma similar que para la extremidad, se resuelve para el cuerpo. Como se puede observar en la figura B.2 en color azul, se elige la siguiente línea recta como trayectoria:

$$X_c = \delta + X_{cInicial}$$

$$Y_c = Y_{cInicial}$$

$$Z_c = Z_{cInicial}$$

donde:

$\delta$  : Parámetro para el cuerpo representando la distancia recorrida en  $x$   
 $X_{cInicial}$ ,  $Y_{cInicial}$ ,  $Z_{cInicial}$  : Posiciones iniciales del cuerpo

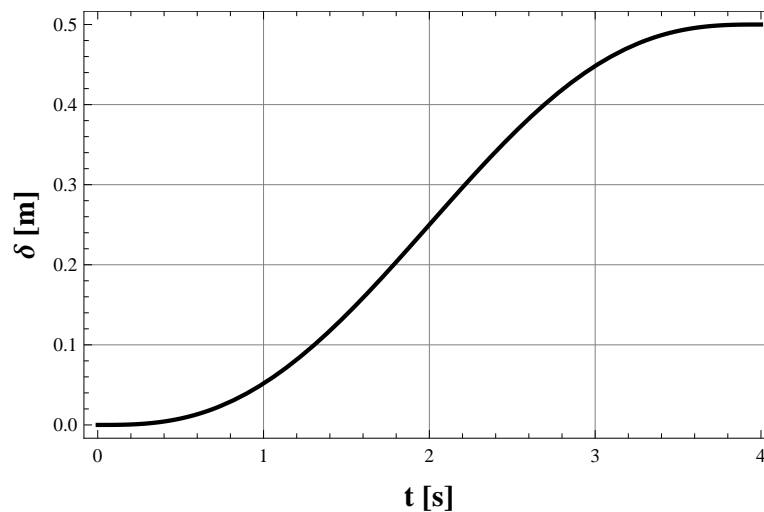
con:

$$X_{cInicial} = 0, Y_{cInicial} = 0, Z_{cInicial} = 0.40$$

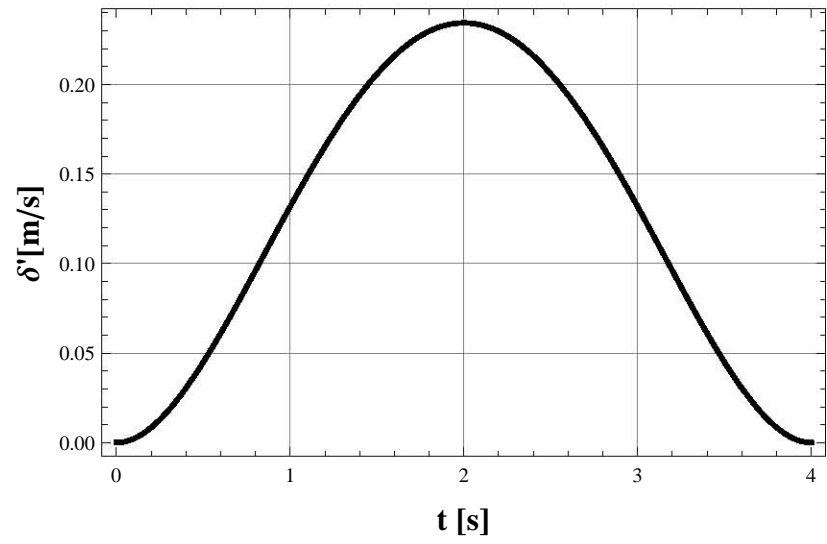
Y ahora para  $0 < t_c < 4$  , se resuelve la ecuación:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{ds}{d\delta}} \quad (\text{B.8})$$

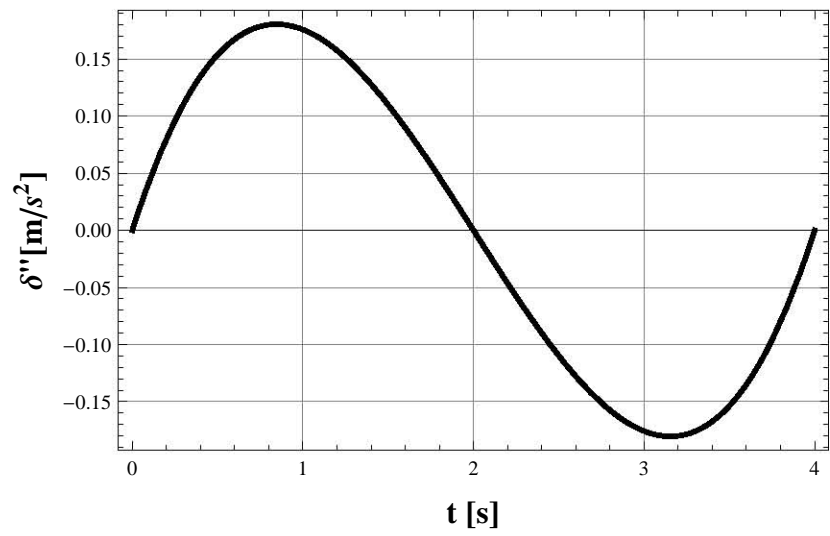
De igual manera, conociendo  $\delta$  es posible determinar  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $Z_c$  y sus derivadas. En las figuras B.7, B.8 y B.9 se muestra los resultados para el parámetro  $\delta$  y sus primeras dos derivadas.



**Figura B.7:** Parámetro  $\delta$



**Figura B.8:** Primera derivada del parámetro  $\delta$



**Figura B.9:** Segunda derivada del parámetro  $\delta$



# Apéndice C

## Solución a la Ecuación Transcendental

Para resolver la ecuación 2.16 se procede a realizar lo siguiente [93]:

$$A c\theta + B s\theta = D \quad (\text{C.1})$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación C.1 entre  $\sqrt{A^2 + B^2}$ :

$$\frac{A c\theta}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B s\theta}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{C.2})$$

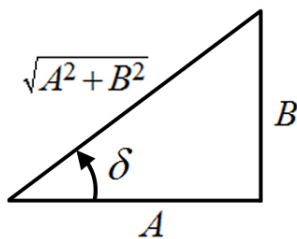


Figura C.1

Tomando en cuenta la figura C.1 se define:

$$c\delta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{C.3a})$$

$$s\delta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{C.3b})$$

$$c\varphi = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{C.3c})$$

Sustituyendo las ecuaciones C.3a, C.3b y C.3c en la ecuación C.2:

$$c\delta c\theta + s\delta s\theta = c\varphi \quad (\text{C.4})$$

Notando que  $c\delta c\theta + s\delta s\theta = c(\theta - \delta)$ , la ecuación C.4 toma la forma:

$$c(\theta - \delta) = c(\varphi) \quad (\text{C.5})$$

Debido a que  $c\varphi$  y  $c(-\varphi)$  son iguales, se puede escribir:

$$c(\theta - \delta) = c(\pm\varphi) \quad (\text{C.6})$$

Obteniendo  $\theta$  al despejarla de la ecuación C.6:

$$\theta = \delta \pm \varphi \quad (\text{C.7})$$

Ahora dividiendo las ecuaciones C.3a y C.3b:

$$\frac{s\delta}{c\delta} = \frac{\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}}{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

$$t\delta = \frac{A}{B}$$

---

Por lo tanto:

$$\delta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \quad (\text{C.8})$$

Tomando la ecuación C.3c y despejando  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \arccos(c\varphi) &= \arccos\left(\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Sustituyendo las ecuaciones C.9 y C.10 en C.7 resulta que:

$$\theta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \pm \arccos\left(\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \quad (\text{C.10})$$

siendo la ecuación C.10 la solución a la ecuación transcendental C.1.





# Apéndice D

## Solución al Sistema Lineal Indeterminado

Supóngase el siguiente sistema de ecuaciones lineales indeterminado con  $m < n$  [2]:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{D.1})$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $m \times n$ , mientras que  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores de dimensiones  $n$  y  $m$  respectivamente.

Este caso no admite una solución, a menos que el vector  $\mathbf{b}$  se encuentre dentro del rango de  $\mathbf{A}$ . Este es un caso específico, por lo que se debe de reformular el problema y más que intentar resolver la ecuación D.1, se busca una aproximación al sistema de ecuaciones.

Se tiene que el error  $\mathbf{e}$  en la aproximación de la ecuación D.1 está definido como:

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \quad (\text{D.2})$$

Una manera obvia de imponer una condición de optimización sobre la solución  $\mathbf{x}$ , es especificando que esta solución es la mínima norma de  $\mathbf{e}$ .

Toda norma de  $\mathbf{e}$  pueden ser expresadas como:

$$\|\mathbf{e}\|_p \equiv \left( \frac{1}{m} \sum_1^m e_k^p \right)^{1/p} \quad (\text{D.3})$$

siendo  $e_k$  el  $k$ -ésimo componente del vector  $\mathbf{e}$  de dimensión  $m$ . Cuando  $p = 2$ , la norma anterior es conocida como la norma euclidiana. Cuando  $p \rightarrow \infty$ , se obtiene la norma infinita, también conocida como la norma de Chebyshev.

Resulta que al buscar el valor de  $\mathbf{x}$  que minimiza a la norma  $\mathbf{e}$ , lo más sencillo es la norma euclidiana, donde la minimización de su cuadrado lleva a un sistema de ecuaciones lineales cuya solución puede obtenerse directamente. Por lo que, planteando el problema de minimización:

$$z(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} \|\mathbf{e}\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{x}} \quad (\text{D.4})$$

La condición de normalidad del problema de minimización descrito se deriva al plantear el gradiente de  $z$  con respecto a  $\mathbf{x}$  igualado a cero, esto es:

$$\frac{dz}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (\text{D.5})$$

Ahora, por la regla de la cadena y por la matriz antisimétrica que define el producto cruz, podemos escribir:

$$\frac{dz}{d\mathbf{x}} \equiv \left( \frac{d\mathbf{e}}{d\mathbf{x}} \right)^T \frac{dz}{d\mathbf{e}} \equiv -\mathbf{A}^T \mathbf{e} \quad (\text{D.6})$$

y por lo tanto, tenemos el primer resultado:

El error en la aproximación de la ecuación D.1, para la matriz  $\mathbf{A}$  de rango  $m \times n$ , con  $m > n$ , es la mínima norma euclidiana si se encuentra dentro del espacio vacío de  $\mathbf{A}^T$ .

Además, si la ecuación D.2 se sustituye en la ecuación D.6, y a la vez, el resultado es después sustituido en la condición de normalidad, se obtiene:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{D.7})$$

a lo cual se le conoce como la ecuación normal del problema de minimización del problema descrito. En virtud de la suposición sobre el rango de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  es positiva y por lo tanto, tiene inversa. Como consecuencia, el valor  $\mathbf{x}_0$  de  $\mathbf{x}$  que minimiza la norma euclidiana del error de aproximación del sistema dado es:

$$\mathbf{x}_0 = \left( \mathbf{A} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (\text{D.8})$$

donde la matriz coeficiente de  $\mathbf{b}$  se conoce como la inversa generalizada de  $\mathbf{A}$ . El error obtenido con este valor es conocido como el error de mínimos cuadrados de la aproximación, esto es:

$$\mathbf{e}_0 \equiv \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_0 \quad (\text{D.9})$$





# Bibliografía

- [1] R. Jazar, *Theory of applied robotics: kinematics, dynamics, and control*. Springer Verlag, 2010.
- [2] J. Angeles, *Fundamentals of robotic mechanical systems: Theory, methods, and algorithms*, 3ra edición. Springer Verlag, 2007.
- [3] The Robotics Society of Japan. <http://www.rsj.or.jp/>.
- [4] D. Stewart, “A platform with six degrees of freedom.” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 180, no. 1, pp. 371–386, 1965.
- [5] D. Pisla, T. Itul, A. Pisla, y B. Gherman, “Dynamics of a parallel platform for helicopter flight simulation considering friction.” en *Proceedings of the 10th IFToMM International Symposium on Science of Mechanisms and Machines*. Springer, Octubre 2009, pp. 365–378.
- [6] E. J. McCaffrey, “Kinematic analysis and evaluation of wheelchair mounted robotic arms.” Tesis de Maestría, University of South Florida, 2003.
- [7] W. Harwin, “Gentle/s: Robotic assistance in neuro and motor rehabilitation.” <http://www.gentle.reading.ac.uk/>, Tech. Rep., 2003.
- [8] G. Bekey, *Robotics: State of the art and future challenges*. Imperial College Press, 2008.
- [9] N. E. Nava, Ed., *Advanced Mechanics in Robotic Systems*. Springer Verlag, 2011.
- [10] R. Howard y I. Kaminer, “Survey of unmanned air vehicles.” en *Proceedings of the American Control Conference*, Vol. 5. IEEE, 1995, pp. 2950–2953.
- [11] R. Braun, H. Wright, M. Croom, J. Levine, y D. Spencer, “The mars airplane: A credible science platform.” en *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference*. IEEE, 2004.
- [12] H. Chao, Y. Cao, y Y. Chen, “Autopilots for small fixed-wing unmanned air vehicles: A survey.” en *Proceedings of the International Conference on Mechatronics and Automation*. IEEE, 2007, pp. 3144–3149.

- [13] J. Jalbert, S. Kashin, y J. Ayers, “A biologically-based undulatory lamprey-like auv.” en *Proc. of the Autonomous Vehicles in Mine Countermeasures Symposium*, 1995, pp. 39–52.
- [14] J. Yuh, “Design and control of autonomous underwater robots: A survey.” *Autonomous Robots*, Vol. 8, no. 1, pp. 7–24, 2000.
- [15] Y. Terada y I. Yamamoto, “An animatronic system including lifelike robotic fish.” *Proceedings of the IEEE*, Vol. 92, no. 11, pp. 1814–1820, 2004.
- [16] V. Rigaud, “Innovation and operation with robotized underwater systems.” *Journal of Field robotics*, Vol. 24, no. 6, pp. 449–459, 2007.
- [17] A. Bowen, D. Yoerger, C. Taylor, R. McCabe, J. Howland, D. Gomez-Ibanez, J. Kinsey, M. Heintz, G. McDonald, y D. Peters, *The Nereus hybrid underwater robotic vehicle for global ocean science operations to 11,000 m depth*. IEEE, 2008.
- [18] M. Raibert, H. Brown Jr, y M. Chepponis, “Experiments in balance with a 3d one-legged hopping machine.” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 3, no. 2, pp. 75–92, 1984.
- [19] B. Brown y G. Zeglin, “The bow leg hopping robot.” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 1998, pp. 781–786.
- [20] K. Arikawa y T. Mita, “Design of multi-dof jumping robot.” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 4. IEEE, 2002, pp. 3992–3997.
- [21] R. Niiyama, A. Nagakubo, y Y. Kuniyoshi, “Mowgli: A bipedal jumping and landing robot with an artificial musculoskeletal system.” en *Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2007, pp. 2546–2551.
- [22] A. Nagakubo y S. Hirose, “Walking and running of the quadruped wall-climbing robot.” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 1994, pp. 1005–1012.
- [23] M. Cutkosky y S. Kim, “Climbing with dry adhesives.” US Patent US7 762 362B2, Jul. 27, 2010.
- [24] Y. Fu, Z. Li, H. Yang, y S. Wang, “Development of a wall climbing robot with wheel-leg hybrid locomotion mechanism.” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. IEEE, 2007, pp. 1876–1881.
- [25] R. Siegwart y I. Nourbakhsh, *Introduction to autonomous mobile robots*. The MIT Press, 2004.

- 
- [26] J. Zhao, G. Liu, Y. Liu, y Y. Zhu, “Research on the application of a marsupial robot for coal mine rescue.” *Intelligent Robotics and Applications*, Vol. 5315, pp. 1127–1136, 2008.
- [27] R. Welch y G. Edmonds, “Applying robotics to hazmat.” en *Proceedings of the 4th National Technology Transfer Conference and Exposition-In NASA Technology*, 2003, pp. 279–287.
- [28] M. Lawn y T. Ishimatsu, “Modeling of a stair-climbing wheelchair mechanism with high single-step capability.” *Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, Vol. 11, no. 3, pp. 323–332, 2003.
- [29] S. Hirose y T. Sensu, “The taqt carrier: A practical terrain adaptive quadru-track carrier robot.” en *Proceedings of the 1992 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 3, 1992, pp. 2068 – 2073.
- [30] G. Bekey, *Autonomous robots: from biological inspiration to implementation and control*. The MIT Press, 2005.
- [31] K. Arikawa y S. Hirose, “Mechanical design of walking machines.” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 365, no. 1850, p. 171, 2007.
- [32] G. Schweitzer y M. Werder, “Robotrac: A mobile manipulator platform for rough terrain.” en *Proceedings of the International Symposium on Advanced Robot Technology*, 1991.
- [33] Y. Dai, E. Nakano, T. Takahashi, y H. Ookubo, “Motion control of leg-wheel robot for an unexplored outdoor environment.” en *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.*, Vol. 2. IEEE, 1996, pp. 402–409.
- [34] H. Adachi, N. Koyachi, T. Arai, A. Shimiza, y Y. Nogami, “Mechanism and control of a leg-wheel hybrid mobile robot.” en *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 3. IEEE, 1999, pp. 1792–1797.
- [35] G. Endo y S. Hirose, “Study on roller-walker (multi-mode steering control and self-contained locomotion).” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 3. IEEE, 2000, pp. 2808–2814.
- [36] T. Estier, Y. Crausaz, B. Merminod, M. Lauria, R. Piguet, y R. Siegwart, “An innovative space rover with extended climbing abilities.” *Proceedings of Space and Robotics*, pp. 333–339, 2000.
- [37] S. Cubero, “A 6-legged hybrid walking and wheeled vehicle.” en *Proceedings of the 7th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice*, 2001, pp. 294–302.



- [38] S. Guccione y G. Muscato, “The wheeleg robot.” *Robotics & Automation Magazine*, Vol. 10, no. 4, pp. 33–43, 2003.
- [39] D. Germann y O. Lenord, “Modular architecture of a motion controller for quadrupeds applied to the walking robots alduro and bisam.” en *Proceedings of the Sixth International Conference on Climbing and Walking Robots: and their supporting technologies*. Wiley, 2003, p. 425.
- [40] C. Grand, F. BenAmar, F. Plumet, y P. Bidaud, “Decoupled control of posture and trajectory of the hybrid wheel-legged robot hylos.” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 5. IEEE, 2004, pp. 5111–5116.
- [41] B. Wilcox, T. Litwin, J. Biesiadecki, J. Matthews, M. Heverly, J. Morrison, J. Townsend, N. Ahmad, A. Sirota, y B. Cooper, “Athlete: A cargo handling and manipulation robot for the moon.” *Journal of Field Robotics*, Vol. 24, no. 5, pp. 421–434, 2007.
- [42] S. Hirose, E. Fukushima, R. Damoto, y H. Nakamoto, “Design of terrain adaptive versatile crawler vehicle helios-vi.” en *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 3. IEEE, 2001, pp. 1540–1545.
- [43] Y. Kim, J. Kwak, J. Kim, J. An, y K. Lee, “Adaptive driving mode control of mobile platform with wheel-track hybrid type for rough terrain in the civil environment.” en *Proceedings of the International Conference on Control Automation and Systems*. IEEE, 2010, pp. 86–90.
- [44] M. Guarnieri, P. Debenest, T. Inoh, E. Fukushima, y S. Hirose, “Helios vii: a new vehicle for disaster response-mechanical design and basic experiments.” *Advanced Robotics*, Vol. 19, no. 8, pp. 901–927, 2005.
- [45] K. Nonami, Q. Huang, D. Komizo, Y. Fukao, Y. Asai, Y. Shiraishi, M. Fujimoto, y Y. Ikedo, “Development and control of mine detection robot comet-ii and comet-iii.” *JSME International Journal Series C*, Vol. 46, no. 3, pp. 881–890, 2003.
- [46] R. Hodoshima, Y. Fukumura, H. Amano, y S. Hirose, “Development of track-changeable quadruped walking robot titan x-design of leg driving mechanism and basic experiment.” en *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2010, pp. 3340–3345.
- [47] F. Pfeiffer y H. Inoue, “Walking: technology and biology.” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 365, no. 1850, pp. 3–9, 2007.
- [48] A. S. Potts y J. da Cruz, “A kinematical and dynamical analysis of a quadruped robot.” en *Mobile Robots Current Trends*, Z. Gacovski, Ed. InTech, 2011, pp. 238–262.

- 
- [49] J. Estremera y K. Waldron, “Thrust control, stabilization and energetics of a quadruped running robot.” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 27, no. 10, pp. 1135–1151, 2008.
- [50] F. Pfeiffer y H. Cruse, *Autonomes laufen*. Springer Verlag, 2005.
- [51] M. Fischer y H. Witte, “Legs evolved only at the end!” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 365, no. 1850, pp. 185–198, 2007.
- [52] T. McGeer, “Passive dynamic walking.” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 9, no. 2, pp. 62–82, 1990.
- [53] V. Chen, “Passive dynamic walking with knees: A point foot model.” Tesis de Maestría, Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [54] F. Pfeiffer, H. Weidemann, y J. Eltze, “The tum walking machine.” *Intelligent Automation and Soft Computing. Trends in Research, Development and Applications*, Vol. 2, pp. 167–174, 1995.
- [55] R. Hirose y T. Takenaka, “Development of the humanoid robot asimo.” *Honda R&D Technical Review*, Vol. 13, no. 1, pp. 1–6, 2001.
- [56] Y. Ogura, H. Aikawa, K. Shimomura, A. Morishima, H. Lim, y A. Takanishi, “Development of a new humanoid robot wabian-2.” en *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE, 2006, pp. 76–81.
- [57] S. Hirose y Y. Umetani, “The basic motion regulation system for a quadruped walking vehicle.” en *American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Technical Conference*, 1980.
- [58] S. Hirose, Y. Fukuda, K. Yoneda, A. Nagakubo, H. Tsukagoshi, K. Arikawa, G. Endo, y R. Hodoshima, “Quadruped walking robots at tokyo institute of technology.” *Robotics & Automation Magazine*, Vol. 16, no. 2, pp. 104–114, 2009.
- [59] J. Bares y D. Wettergreen, “Dante ii: Technical description, results, and lessons learned.” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, no. 7, p. 621, 1999.
- [60] K. Berns, W. Ilg, M. Deck, J. Albiez, y R. Dillmann, “Mechanical construction and computer architecture of the four-legged walking machine bisam.” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 4, no. 1, pp. 32–38, 1999.
- [61] P. González de Santos, E. Garcia, y J. Estremera, *Quadrupedal locomotion: An introduction to the control of four-legged robots*. Springer, 2006.
- [62] J. Nichol, S. Singh, K. Waldron, L. Palmer Iii, y D. Orin, “System design of a quadrupedal galloping machine.” *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 23, no. 10-11, pp. 1013–1027, 2004.

- [63] R. Bernardi y J. Da Cruz, “Kamanbaré: A tree-climbing biomimetic robotic platform for environmental research.” en *International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*, 2007.
- [64] M. Raibert, K. Blankespoor, G. Nelson, y R. Playter, “Bigdog, the rough-terrain quadruped robot.” en *Proceedings of the 17th World Congress*, 2008, pp. 10 823–10 825.
- [65] H. Sawada, K. Sekiyama, M. Kojo, T. Aoyama, Y. Hasegawa, y T. Fukuda, “Locomotion stabilization with transition between biped and quadruped walk based on recognition of slope.” en *Proceedings of the International Symposium on Micro-NanoMechatronics and Human Science*. IEEE, 2008, pp. 424–429.
- [66] K. Waldron y R. McGhee, “The adaptive suspension vehicle.” *Control Systems Magazine*, Vol. 6, no. 6, pp. 7–12, 1986.
- [67] F. Pfeiffer, J. Eltze, y H. Weidemann, “Six-legged technical walking considering biological principles.” *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 14, no. 2-3, pp. 223–232, 1995.
- [68] R. Altendorfer, N. Moore, H. Komsuoglu, M. Buehler, H. Brown, D. McMordie, U. Saranli, R. Full, y D. Koditschek, “Rhex: A biologically inspired hexapod runner.” *Autonomous Robots*, Vol. 11, no. 3, pp. 207–213, 2001.
- [69] M. Görner, T. Wimbock, A. Baumann, M. Fuchs, T. Bahls, M. Grebenstein, C. Borst, J. Butterfass, y G. Hirzinger, “The dlr-crawler: A testbed for actively compliant hexapod walking based on the fingers of dlr-hand ii.” en *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2008, pp. 1525–1531.
- [70] M. Ziegenmeyer, A. Rönnau, T. Kerscher, J. Zöllner, y R. Dillmann, “Die sechsbeinige laufmaschine lauron ivc.” *Autonome Mobile Systeme 2009*, Vol. 21, pp. 225–232, 2009.
- [71] B. Luk, A. Collie, V. Piefort, y G. Virk, “Robug iii: a tele-operated climbing and walking robot.” en *UKACC International Conference on Control*, Vol. 1. IET, 1996, pp. 347–352.
- [72] T. Rossmann y F. Pfeiffer, “Control of an eight legged pipe crawling robot.” *Experimental Robotics V*, Vol. 232, pp. 335–346, 1998.
- [73] D. Spenneberg y F. Kirchner, “Scorpion: A biomimetic walking robot.” *VDI BERICHTE*, Vol. 1679, pp. 677–682, 2002.
- [74] J. Ayers y J. Witting, “Biomimetic approaches to the control of underwater walking machines.” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 365, no. 1850, pp. 273–295, 2007.

- 
- [75] B. Siciliano y O. Khatib, *Springer Handbook of Robotics*. Springer-Verlag New York Inc, 2008.
- [76] D. J. Todd, *Walking Machines: An introduction to legged robots*. Kogan Page Ltd., 1985.
- [77] M. Silva y J. Machado, “A historical perspective of legged robots.” *Journal of Vibration and Control*, Vol. 13, no. 9-10, pp. 1447–1486, 2007.
- [78] P. Mckerrow, *Introduction to robotics*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., 1991.
- [79] M. Bekker, *Off-the-road locomotion: research and development in terramechanics*. University of Michigan Press, 1960.
- [80] R. L. Norton, *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. McGraw-Hill, 1999.
- [81] J. J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control*, 3ra edición. Prentice Hall, 2004.
- [82] F. Pfeiffer y C. Glocker, *Multibody dynamics with unilateral contacts*. Wiley Online Library, 1996.
- [83] H. Bremer, *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Teubner Stuttgart, 1988.
- [84] F. Pfeiffer, *Einführung in die Dynamik*. Teubner, 1989.
- [85] S. Mendoza, “Análisis cinemático y dinámico de un robot delta de 3 grados de libertad.” Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.
- [86] L. Tsai, *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. Wiley-Interscience, 1999.
- [87] V. Stejskal y M. Valásek, *Kinematics and dynamics of machinery*. M. Dekker, 1996.
- [88] J. Merlet, “Determination of the orientation workspace of parallel manipulators.” *Journal of Intelligent Robotic Systems*, Vol. 13, no. 2, pp. 143–160, 1995.
- [89] C. Gosselin y M. Jean, “Determination of the workspace of planar parallel manipulators with joint limits.” *Robotics and autonomous systems*, Vol. 17, no. 3, pp. 129–138, 1996.
- [90] M. Gallant y R. Boudreau, “The synthesis of planar parallel manipulators with prismatic joints for an optimal, singularity-free workspace.” *Journal of Robotic Systems*, Vol. 19, no. 1, pp. 13–24, 2002.
- [91] K. Goyal y D. Sethi, “An analytical method to find workspace of a robotic manipulator.” *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 41, no. 1, pp. 25–30, 2010.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [92] K. Arrouk, B. Bouzgarrou, y G. Gogu, “Workspace determination and representation of planar parallel manipulators in a cad environment.” en *New Trends in Mechanism Science: Analysis and Design*, D. Pisla, Ed., 2010.
- [93] J. M. McCarthy y G. S. Soh, *Geometric design of linkages*. Springer Verlag, 2010, Vol. 11.