UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCOMPOSICIÓN DE MÓDULOS CON SUBMÓDULOS TIPO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Javier Daniel Miranda Culin

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES

2012

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Miranda
   Culin
   Javier Daniel
   5534659316
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   408038290

2. Datos del tutor
   Dr
   José
   Ríos
   Montes

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Alejandro
   Alvarado
   García

5. Datos del sinodal 3
   Dra
   Bertha
   María
   Tomé
   Arreola

6. Datos del sinodal 4
   M. en C.
   Luis Ángel
   Zaldívar
   Corichi

7. Datos del trabajo escrito
   Descomposición de módulos con submódulos tipo
   87p
   2012

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis padres Virginia Culin Miranda y Javier Miranda López por el esfuerzo que hacen día a día para sostener a nuestra familia, en especial a mi padre por haber confiado en mi desde que yo era un niño. A mis hermanos Leo, Blanca, Azucena, Mariana, Victoria y Galdino por su alegría y pasión para salir adelante. Estudiar en la UNAM es un gran privilegio, agradezco a los profesores que me formaron como matemático durante la licenciatura, algunos de ellos son Carlos Álvares, Javier Fernández, Fidel Casarrubias, Carlos Prieto, Santiago López de Medrano, Guillermo Grabinsky, Javier Elizondo, Francisco Raggi y José Ríos, fue un placer haber asistido a sus clases. También quiero agradecer a mi asesor Jose Ríos por su paciencia y apoyo en la realización de esta tesis, y por haberme mostrado lo emocionante que es el Álgebra. A compañeros y amigos con los que, escuchando y discutiendo ideas, aprendí más que matemáticas: Alexander, Wilfrido, Jimena, Jacobo y Joyce por el aguante de aquellas tardes de Cálculo, Angel, Andrés, Edmundo y Daniel por compartir el gusto por las matemáticas, Roberto, Javier, Joselo, Ricardo, Val, Lachino, Eder, Carlos, Raul, Marianela, Abi y a toda la banda de los proyectos estudiantiles de la facultad. Agradezco en especial a Aurea Núñez Ramírez, con quien comparto mi alegría y buenos momentos, por su cariño y compañía.

Índice general

Introducción

La estructura de un anillo asociativo con unitario, se entiende como la clase de isomorfismo a la cual pertenece, en la categoría de anillos asociativos con unitario. Determinar la estructura de un anillo nos lleva a resolver uno de los bien conocidos problemas de isomorfismo en matemáticas. En álgebra, dentro del estudio de anillos asociativos con unitario, ha resultado fructífero entender la categoría de módulos asociada al anillo, para determinar la estructura del anillo. Una forma de hacer esto, es considerar objetos de la categoría de modulos (asociada al anillo) que cumplan condiciones particulares que den impulso al desarrollo de la teoría, como por ejemplo módulos finitamente (co)generados, artinianos, neterianos, inyectivos, proyectivos, planos, inescindibles, uniformes, etc., y dependiendo de su abundancia, estructura y de las relaciones entre ellos, podamos determinar la estructura del anillo. Otra manera es considerar clases de módulos de la categoría de módulos (asociada al anillo) que cumplan condiciones de cerradura o clases de módulos que tienen en común ciertas propiedades como por ejemplo clases de pretorsión (hereditarias), torsión (hereditarias), libres de pretorsión, etc., y entender las relaciones entre ellas junto con otros objetos matemáticos asociados a éstas (prerradicales), así como también considerar a clases de clases de módulos y estudiar su estructura (de retícula!) como son *R-her*, *R-quo*, etc., para conocer a la categoría de módulos y la estructura del anillo.

Esta tesis va por ese camino, principalmente está basada en el artículo [5] donde se expone una clase de anillos, los anillos que satisfacen la condición t-CCA (4.12). Un anillo satisface la condición t-CCA si y sólo si en la categoría de módulos asociada, se tiene que cada módulo inyectivo se descompone como suma directa de módulos atómicos (3.6); con esto se generaliza el resultado en [3](25.6). Por otro lado, en [5] se generaliza el concepto de módulo casi-continuo, entrando al juego los TS-módulos y con el Teorema 4.15 se generaliza [7](2.22).

En el capítulo 1, se desarrollan los conceptos básicos que se manejan durante todo el trabajo. Todo puede consultarse, de manera más amplia, en [1],[2],[3] y [4].

Durante el capítulo 2, con todo detalle se muestra como la clase de clases naturales es una retícula booleana.

Luego en el capítulo 3, se introducen los objetos en la categoría de módulos que nos permitirán desarrollar los resultados del capítulo 4, se define la dimensión tipo que es una generalización de la dimensión uniforme, así como módulos atómicos y *TS-módulos*.

Finalmente, en el capítulo 4 se caracteriza a los anillos que satisfacen la condición t-CCA, luego se introducen los anillos que satisfacen la condición t-CCD y en analogía con los anillos de longitud finita (artinianos) se desarrolla una caracterización de anillos que satisfacen ambas condiciones. Por último se da una respuesta parcial a la pregunta ¿todo anillo que satisface la condición t-CCD también satisface la condición t-CCA? que es una versión generalizada del Teorema de Hopkins-Levitzki, que como se sabe cada anillo artiniano izquierdo es neteriano izquierdo.

Capítulo 1

Preliminares

Los anillos considerados en este trabajo son asociativos con unitario. Dado un anillo R, R-**Mod** y **Mod**-R denotarán las categorias de *R-módulos* izquierdos y derechos respectivamente. Todos los módulos son *R-módulos* derechos y si no es el caso para algún módulo, entonces se hará explícito el hecho de que sea *R-módulo* izquierdo. En muchas ocasiones se hablará de módulos sin hacer referencia al anillo del cual ellos son *R-módulos*, si este es el caso, debe de entenderse que se tiene algún anillo fijo el cual los hace *R-módulos*. Con el fin de reducir la notación, dados dos *R-módulos* N y M entenderemos $N \hookrightarrow M$ como "N se sumerge en M", es decir existe un monomorfismo que va de N en M.

1.1. Retículas

Aqui introducimos algo de la terminología básica necesaria que se utilizará.

Definición 1.1 *Sea X un conjunto y $(\leq) \subseteq X \times X$ una relación. Diremos que $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

1) Para toda $a \in X$, $a \leq a$.

2) Si $a, a' \in X$ con $a \leq a'$ y $a' \leq a$, entonces $a = a'$.

3) Si $a, a', a'' \in X$ con $a \leq a'$ y $a' \leq a''$, entonces $a \leq a''$.

Si además

4) Para toda $a, a' \in X$ $a \leq a'$ o $a' \leq a$.

entonces X es totalmente ordenado (o es una cadena).

Definición 1.2 *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces:*

a) un elemento $x \in X$ es un elemento máximo (mínimo) de X si: para toda $y \in X$ tal que $x \leq y$ $(y \leq x)$ se tiene $x = y$.

b) un elemento $x \in X$ es un elemento mayor (menor) de X si: para toda $y \in X$ se tiene que $y \leq x$ $(x \leq y)$.

Notemos que si un conjunto parcialmente ordenado tiene un elemento mayor (menor) este es único. Además un elemento mayor (menor) es un elemento máximo (mínimo).

Definición 1.3 *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\emptyset \neq S \subseteq X$. Entonces:*

a) un elemento $a \in X$ es una cota superior (inferior) para S si: $s \leq a$ $(a \leq s)$ para toda $s \in S$.

b) un elemento $a \in X$ es el supremo (ínfimo) de S si:

i) $s \leq a$ $(a \leq s)$ para toda $s \in S$.

ii) si $s \leq x$ $(x \leq s)$ para toda $s \in S$ entonces $a \leq x$ $(x \leq a)$.

El articulo "*el*" en la Definición 1.3b) hace referencia a la unicidad del supremo e ínfimo en un conjunto parcialmente ordenado. Si cambiaramos este por "*un*" es inmediato de la definición de supremo e ínfimo la unicidad de éstos.

Definición 1.4 *Sea $(\mathcal{L}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $\mathcal{L}$ es una retícula si: para toda $a, b \in \mathcal{L}$ el conjunto $\{a, b\}$ tiene supremo e ínfimo. Se dice que una retícula $\mathcal{L}$ es completa si todo subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{L}$ tiene supremo e ínfimo.*

Notación 1.5 *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, $\emptyset \neq S \subseteq X$ y $a, b \in X$. Si existe el supremo de $\{a, b\}$ es denotado por $a \vee b$, si existe el ínfimo de $\{a, b\}$ es denotado por $a \wedge b$, lo mismo para el supremo e ínfimo de S se denotarán $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ respectivamente. Como ya hemos notado en un conjunto parcialmente ordenado tanto un elemento mayor como un elemento menor son únicos y en vista de ello los denotaremos como $\overline{1}$ y $\underline{0}$ respectivamente.*

Definición 1.6 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula con elemento menor $\underline{0} \in \mathcal{L}$ y elemento mayor $\overline{1} \in \mathcal{L}$. Si $x \in \mathcal{L}$, un complemento para x en $\mathcal{L}$ es un elemento $x^c \in \mathcal{L}$ tal que:*

1) $x \wedge x^c = \underline{0}$

2) $x \vee x^c = \overline{1}$

Diremos que $\mathcal{L}$ es complementada si todo elemento $x \in \mathcal{L}$ tiene un complemento x^c en $\mathcal{L}$.

Definición 1.7 *Una retícula $\mathcal{L}$ se dice que es distributiva si para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{L}$ se tiene que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.*

Proposición 1.8 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula y $a, b, c \in \mathcal{L}$, entonces son equivalentes:*

a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Usando la hipótesis se tiene que $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c)$, ahora notemos que $(a \vee b) \wedge a = a$ y que si nuevamente utilizamos la hipótesis tenemos que $(a \vee b) \wedge c = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ por lo tanto $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))$, bastará probar que $a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = a \vee (b \wedge c)$ pero esto se debe a que los conjuntos $\{a, a \wedge c, b \wedge c\}$ y $\{a, b \wedge c\}$ tienen el mismo supremo.

$b) \Rightarrow a)$ Con la hipótesis se tiene $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = ((a \wedge b) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c)$ pero $(a \wedge b) \vee a = a$ y $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ y por lo tanto $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c))$, ahora bastará probar que $a \wedge ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) = a \wedge (b \vee c)$ pero esto es ciero ya que los conjuntos $\{a, a \vee c, b \vee c\}$ y $\{a, b \vee c\}$ tienen el mismo ínfimo. ■

Proposición 1.9 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula distributiva. Si $a \in \mathcal{L}$ tiene un complemento en $\mathcal{L}$, entonces este es único.*

Demostración: Sean a^c y a' complementos de a en $\mathcal{L}$, entonces $a' = \overline{1} \wedge a' = (a \vee a^c) \wedge a' = (a \wedge a') \vee (a^c \wedge a') = \underline{0} \vee (a^c \wedge a') = (a^c \wedge a') \vee \underline{0} = (a' \wedge a^c) \vee (a \wedge a^c) = (a' \vee a) \wedge a^c = \overline{1} \wedge a^c = a^c$ y por lo tanto $a' = a^c$.
■

Definición 1.10 *Una retícula $\mathcal{L}$ se dice que es modular si para toda $a, b, c \in \mathcal{L}$ con $a \leq b$ se tiene: $a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$.*

Definición 1.11 *Una retícula Booleana es una retícula $\mathcal{L}$ con elemento mayor $\overline{1} \in \mathcal{L}$ y elemento menor $\underline{0} \in \mathcal{L}$ que es distributiva y complementada.*

Definición 1.12 *Sea $\mathcal{L}$ una retícula. Un átomo en $\mathcal{L}$ es un elemento $\underline{0} \neq a \in \mathcal{L}$ tal que si $b \leq a$ con $\underline{0} \neq b \in \mathcal{L}$ entonces $b = a$.*

Ejemplo 1.13 *Ahora tenemos algunos ejemplos de la sección.*

1) *Considerese $\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales, y para cada $n, m \in \mathbb{N}$ definimos $n \leq m$ si $n|m$ (n divide a m). Entonces $\mathbb{N}$ es una retícula, donde $n \vee m = [n : m]$ y $n \wedge m = (n : m)$. Note que $n \in \mathbb{N}$ es un átomo si n es un número primo.*

2) *Sea R un anillo con $M \in$**Mod-**R. Entonces, se tiene que el conjunto $Sub_R(M) = \{N \subseteq M : N \text{ es submódulo de } M\}$ es una retícula donde $N \leq N'$ si $N \subseteq N'$, $N \vee N' = N + N'$ y $N \wedge N' = N \cap N'$ para toda $N, N' \in Sub_R(M)$. Note que $Sub_R(M)$ tiene elemento mayor $\overline{1} = M$ y elemento menor $\underline{0} = 0$ y que además es modular, pero en general no es distributiva ni complementada.*

3) *Se dice que un anillo R es Booleano si $a^2 = a$ para toda $a \in R$. Considerese un anillo Booleano R como un conjunto parcialmente ordenado, con el orden $a \leq b$ si $aR \leq bR$. Entonces R es una retícula Booleana con $a \vee b = a + b - ab$ y $a \wedge b = ab$ para toda $a, b \in R$, con elemento mayor y menor $\overline{1} = 1$ y $\underline{0} = 0$.*

1.2. Submódulos esenciales

Definición 1.14 *Sea R una anillo y $M \in$**Mod-**R. Un submódulo N de M es esencial en M si para todo $0 \neq N' \leq M$ se tiene que $N \cap N' \neq 0$, en tal caso denotamos $N \subseteq_e M$. Un monomorfismo $f : N \hookrightarrow M$ es un monomorfismo esencial si $f(N) \subseteq_e M$.*

Si $f : N \hookrightarrow M$ es un monomorfismo esencial, se dice que M es una extensión esencial de N.

Proposición 1.15 *Sea R un anillo, M un R-módulo con N submódulo de M, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) $N \subseteq_e M$.

2) Si $H \leq M$ *tal que* $H \cap N = 0$*, entonces* $H = 0$.

3) Para toda $0 \neq m \in M$ *existe* $r \in R$ *tal que* $0 \neq mr \in N$.

Demostración: 1) $\Leftrightarrow$ 2) Supongase que $N \subseteq_e M$ y sea $H \leq M$ tal que $H \cap N = 0$. Si $H \neq 0$ entonces $H \cap N \neq 0$ debido a que $N \subseteq_e M$, pero esto contradice que $H \cap N = 0$, por lo tanto $H = 0$. Inversamente, sea $0 \neq H \leq M$ entonces $H \cap N \neq 0$, de lo contrario $H \cap N = 0$ lo cual nos lleva a que $H = 0$ pero esto es una contradiccion.

1) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que $N \subseteq_e M$ y sea $0 \neq m \in M$, entonces $0 \neq mR \leq M$ y por lo tanto $N \cap mR \neq 0$, de esto se sigue que existe $r \in R$ tal que $0 \neq mr \in N$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sea $0 \neq H \leq M$ y $h \in H$ por hipótesis existe $r \in R$ tal que $0 \neq hr \in N$ por lo tanto $0 \neq hr \in N \cap H$. ■

Para demostrar o usar que un submódulo N de un *R-módulo* M es esencial en M, se utilizarán estas equivalencias sin hacer énfasis en su uso. La siguiente proposición nos enuncia algunas propiedades de los submódulos esenciales.

Proposición 1.16 *Sea* $M, M' \in$***Mod-****R. Entonces:*

a) Si H *y* K *son submódulos de* M *tales que* $H \subseteq K$*, entonces* $H \subseteq_e M$ *si y sólo si* $H \subseteq_e K \subseteq_e M$.

b) Si H *y* T *son submódulos de* M *tales que* $H \subseteq_e M$ *y* $T \subseteq_e M$ *entonces* $H \cap T \subseteq_e M$.

c) Si $H \subseteq_e M$ *y* $0 \neq K \leq M$ *entonces* $H \cap K \subseteq_e K$.

d) Si $H \subseteq_e M$ *y* $0 \neq m \in M$ *entonces* $(H : m) = \{r \in R : mr \in H\}$ *es un ideal derecho esencial de* R.

e) Si $f \in Hom_R(M, M')$ *con* $N' \subseteq_e M'$ *entonces* $f^{-1}(N') \subseteq_e M$.

f) Sean $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$ *una familia de R-módulos y para cada* $i = 1, 2, ..., n$ *sean* $N_i \subseteq_e M_i$*, entonces* $\bigoplus_{i=1}^n N_i \subseteq_e \bigoplus_{i=1}^n M_i$.

Demostración: a) Supongase que $H \subseteq_e M$ y sean $0 \neq x \in K$ y $0 \neq y \in M$, entonces existen r_1, $r_2 \in R$ tal que $0 \neq xr_1 \in H$ y $0 \neq yr_2 \in H$, como $H \subseteq K$ entonces $yr_2 \in K$ y de esto se sigue que $H \subseteq_e K$ y $K \subseteq_e M$. Ahora si $H \subseteq_e K \subseteq_e M$, sea $0 \neq m \in M$ entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq mr \in K$ pues $K \subseteq_e M$, luego existe $s \in R$ tal que $0 \neq (mr)s \in H$ ya que $H \subseteq_e K$, con $rs \in R$ tenemos que $0 \neq m(rs) \in H$ y por lo tanto $H \subseteq_e M$.

b) Sean H, T tal que $H \subseteq_e M$ y $T \subseteq_e M$, sea $0 \neq K \leq M$. Como $T \subseteq_e M$ entonces $T \cap K \neq 0$ pero también $H \subseteq_e M$ entonces $0 \neq H \cap (T \cap K) = (H \cap T) \cap K$ y por lo tanto $H \cap T \subseteq_e M$.

c) Sea $H \subseteq_e M$ y $0 \neq K \leq M$ entonces $H \cap K \neq 0$. Sea $0 \neq T \leq K$ entonces $(H \cap K) \cap T = H \cap (K \cap T) = H \cap T \neq 0$ y por lo tanto $H \cap K \subseteq_e K$.

d) Sea $H \subseteq_e M$, $0 \neq m \in M$, $I = (H : m)$ y $J \subseteq R$ ideal derecho de R tal que $J \cap I = 0$, bastará probar que $J = 0$. Consideramos $mJ \leq M$, si $mJ = 0$ entonces $J \subseteq I$ y por lo tanto $0 = J \cap I = J$, si $mJ \neq 0$ entonces $H \cap mJ \neq 0$ y por lo tanto existe $r \in J$ tal que $0 \neq mr \in H$, asi pues $0 \neq r \in J \cap I$ pero esto contradice el hecho de que $J \cap I = 0$, por lo tanto $J = 0$.

e) Sea $f \in Hom(M, M')$ y $N' \subseteq_e M'$, sea $0 \neq m \in M$ y consideramos que $f(m) \in M'$, si $f(m) = 0$ entonces $m \in Nuc(f) \subseteq f^{-1}(N')$ y por lo tanto $1m \in f^{-1}(N')$, si $f(m) \neq 0$ entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq f(m)r \in N'$, como $0 \neq f(m)r = f(mr)$ entonces $mr \neq 0$ y $mr \in f^{-1}(N')$.

f) Por inducción sobre n, si $n = 1$ es claro que *f*) es cierto, entonces supongamos que *f*) es cierto para $n - 1$ y probemos que para n también lo es. Sea $M' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ y $N' = \bigoplus_{i=1}^{n-1} N_i$, entonces por la hipótesis de inducción $N' \subseteq_e M'$ luego se afirma que $N' \oplus N_n \subseteq_e M' \oplus M_n$, sea $0 \neq x' + x_n \in M' \oplus M_n$ y supongamos que $0 \neq x' \in M'$ entonces existe $r' \in R$ tal que $0 \neq x'r' \in N'$, ahora si $x_n r' = 0$ entonces $0 \neq (x' + x_n)r' \in N' \oplus N_n$ lo cual nos lleva a que $N' \oplus N_n \subseteq_e M' \oplus M_n$, pero si $0 \neq x_n r' \in M_n$ entonces podemos encontrar $r_n \in R$ tal que $0 \neq x_n r' r_n \in N_n$ y por lo tanto $0 \neq (x'r'r_n + x_n r' r_n) \in N' \oplus N_n$ y con esto se tiene que $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i = N' \oplus N_n \subseteq_e M' \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. ∎

1.3. Submódulos pseudocomplemento y cerradura esencial

Definición 1.17 *Sea R un anillo, M un R-módulo y N, T submódulos de M. Un pseudocomplemento de N relativo a T en M, es un submódulo $K \leq M$ tal que:*

1) $N \cap K = 0$ y $T \subseteq K$.

2) K es máximo con la propiedad 1), es decir si se tiene $K \subseteq K'$ tal que $N \cap K' = 0$ entonces $K = K'$.

Un pseudocomplemento de N en M es un pseudocomplemento de N relativo a $\{0\}$ en M. Diremos que $H \leq M$ es un submódulo pseudocomplemento de M si existe $N \leq M$ tal que H es un pseudocomplemento de N en M.

La existencia de pseudocomplementos es un punto clave en este trabajo. Y para ello la siguiente proposición nos ayudará. Note que cada pseudocomplemento relativo es un pseudocomplemento.

Proposición 1.18 *Sean M un R-módulo y N, T submódulos de M tales que $N \cap T = 0$, entonces N tiene al menos un pseudocomplemento relativo a T en M.*

Demostración: Sea N un submódulo de M y sea $f = \{H \leq M : N \cap H = 0 \text{ y } T \subseteq H\}$. Consideremos a f como un conjunto parcialmente ordenado con la contención y verifiquemos que cumple las hipótesis del Lema de Zorn. La familia f es no vacía, ya que $T \in f$, ahora sea $H_1 \subseteq H_2 \subseteq ...$ una cadena con $H_i \in f$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Si $x \in N \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}}(N \cap H_i)$ entonces $x \in N \cap H_j = 0$ para alguna $j \in \mathbb{N}$, por lo tanto $x = 0$ y obtenemos que $N \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i) = 0$, además es claro que $T \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$, con esto tenemos que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \in f$ y a la vez es una cota de la cadena $H_1 \subseteq H_2 \subseteq ...$ por lo tanto f satisface las hipótesis del Lema de Zorn. Sea K un máximo en f, luego es inmediato que K es un pseudocomplemento relativo a T de N en M. ■

Ahora un par de propiedades de los submódulos pseudocomplementos.

Proposición 1.19 *Sea M un R-módulo, $N \leq M$ y K un pseudocomplemento de N en M. Entonces:*

1) $N \oplus K \subseteq_e M$.

2) $(N \oplus K)/K \subseteq_e M/K$.

Demostración: 1) Sea $U \leq M$ tal que $(N \oplus K) \cap U = 0$. Bastará probar que $U = 0$, supongamos que $K \subsetneq K + U$, entonces $N \cap (K + U) \neq 0$ debido a que K es un pseudocomplemento, así podemos encontrar $0 \neq x \in N \cap (K + U)$, luego $x = k + u$ con $k \in K$ y $u \in U$, ahora notemos que $x - k = u \in (N + K) \cap U = 0$ y por lo tanto $u = 0$, esto no lleva a que $x = k \in N \cap K = 0$ entonces $x = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $K = K + U$, así $U \subset K$ lo que nos lleva a que $U \subseteq N \oplus K$ pero además $(N \oplus K) \cap U = 0$, entonces $U = 0$.

2) Sea T/K un submódulo de M/K tal que $((N \oplus K)/K) \cap T/K = \overline{0}$, entonces $((N \oplus K)/K) \cap T/K = ((N \oplus K) \cap T)/K = \overline{0}$, por lo tanto $(N \oplus K) \cap T = K$, ahora notemos que $K \subseteq T$ y así podemos aplicar la ley modular $(N \cap T) + K = (N \oplus K) \cap T = K$ entonces $N \cap T \subset K$ por lo tanto $N \cap T \subset N \cap K = 0$. Hemos obtenido que $N \cap T = 0$ con $K \subseteq T$, dado que K es pseudocomplemento entonces $K = T$ y por lo tanto $T/K = \overline{0}$. ■

Definición 1.20 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Un submódulo N de M es esencialmente cerrado en M, si N no tiene extensiones esenciales propias en M, es decir si $N \subseteq K \subseteq M$ con $N \subseteq_e K$ entonces $N = K$.*

Proposición 1.21 *Sea M un R-módulo y N un submódulo de M. Entonces N es un submódulo pseudocomplemento de M si y sólo si N es esencialmente cerrado en M.*

Demostración: Supongamos que N es un submódulo pseudocomplemento de M, entonces podemos encontrar un submódulo K de M tal que N es un pseudocomplemento de K en M, ahora considerese un submódulo N' de M tal que $N \subseteq_e N'$. Si $N \subset N'$ entonces $0 \neq (K \cap N') \leq N'$, luego $0 \neq N \cap (K \cap N') = (N \cap K) \cap N' = 0 \cap N' = 0$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $N = N'$. Inversamente, sea H un pseudocomplemento de N en M, luego consideramos un pseudocomplemento N' de H relativo a N, bastará probar que $N = N'$. Sea $0 \neq G \leq N'$, sabemos que $N \oplus H \subseteq_e M$ por la Proposición 1.19 por lo tanto $0 \neq G \cap (N \oplus H)$, sea $0 \neq g \in G \cap (N \oplus H)$ entonces

$g = n + h$ con $n \in N$ y $h \in H$, luego $h = g - n \in N'$ y por lo tanto $h \in H \cap N' = 0$, asi $0 \neq g = n \in N$ lo cual nos lleva a que $0 \neq N \cap G$ y como N es esencialmente cerrado se sigue que $N = N'$. ■

Proposición 1.22 *Sea $M \in$ **Mod-**R y $P \leq N$ submódulos de M. Si P es esencialmente cerrado en N y N es esencialmente cerrado en M, entonces P es esencialmente cerrado en M.*

Demostración: De la Proposición 1.21 existen $P' \leq N$ y $N' \leq M$ tal que P es un pseudocomplemento de P' en N y N es un pseudocomplemento de N' en M. Luego de la Proposición 1.19(2) se tiene que $(P \oplus P')/P \subseteq_e N/P$ y $(N \oplus N')/N \subseteq_e M/N$. Se afirma que $(P \oplus P' \oplus N')/P \subseteq_e M/P$, para ello consideramos el epimorfismo $f : M/P \to (M/P)/(N/P) \cong M/N$ y como $(N \oplus N')/N \subseteq_e M/N$ se tiene que $[(N \oplus N')/P]/(N/P) \subseteq_e (M/P)/(N/P)$, entonces por Proposición 1.16(e) tenemos que $(N \oplus N')/P = f^{-1}([(N \oplus N')/P]/(N/P)) \subseteq_e M/P$, pero ahora notemos que $(N \oplus N')/P = (N/P) \oplus (P \oplus N')/P \subseteq_e M/P$ y que además $(P \oplus P')/P \subseteq_e N/P$ por lo tanto $(P \oplus P' \oplus N')/P = [(P \oplus P')/P] \oplus (P \oplus N')/P \subseteq_e M/P$ que es lo que se afirmaba. Supongamos que $P \subseteq_e H \leq M$, como $P \cap (P' \oplus N') = 0$ se tiene que $H \cap (P' \oplus N') = 0$, luego por la propiedad modular $H \cap (P \oplus P' \oplus N') = P + (H \cap (P' \oplus N')) = P$ entonces $H/P \cap [(P \oplus P' \oplus N')/P] = 0$ y por lo tanto $H = P$. ■

Proposición 1.23 *Sean $M \in$ **Mod-**R y N un submódulo de M, entonces existe un submódulo esencialmente cerrado $\overline{N}$ de M tal que $N \subseteq_e \overline{N}$.*

Demostración: Sea $f = \{K \leq M : N \subseteq_e K\}$ y consideremos a f como un conjunto parcialmente ordenado con la contención. Afirmamos que la familia f satisface las hipótesis del lema de Zorn. Notemos que $N \subseteq_e N$ y por lo tanto $f \neq \emptyset$, sea $K_1 \subseteq K_2 \subseteq ...$ una cadena ascendente con $K_i \in f$ para toda $i \in \mathbb{N}$, probemos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ es un elemento de la familia f, sea $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_j$ como $N \subseteq_e K_j$ entonces existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N$ y por lo tanto $N \subseteq_e \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ que es lo que se queria probar, y por el lema de Zorn f tiene elementos máximos. Sea $\overline{N}$ un máximo de f entonces $N \subseteq_e \overline{N}$ y más aun $\overline{N}$ es esencialmente cerrado en M, ya que si $\overline{N} \subseteq_e N' \subseteq M$ entonces se tiene que

$N \subseteq_e \overline{N} \subseteq_e N'$ y por la Proposición 1.16a) $N \subseteq_e N'$ es decir $N' \in f$ y como $\overline{N}$ es un máximo en f entonces $N' = \overline{N}$. ■

En vista de la Proposición 1.23, dados N y M R-*módulos* con $N \subseteq M$, una cerradura esencial de N en M es un submódulo $\overline{N}$ de M que es esencialmente cerrado en M y cumple que $N \subseteq_e \overline{N}$.

1.4. Cápsula inyectiva

Definición 1.24 *Sea R un anillo y $M \in$**Mod-**R. Una cápsula inyectiva para M en **Mod-**R es un módulo inyectivo E junto con un monomorfismo esencial $f : M \hookrightarrow E$.*

Proposición 1.25 *Sean N, M, $E \in$**Mod-**R con E inyectivo, $f : N \hookrightarrow M$ un monomorfismo esencial y $g : N \hookrightarrow E$ un monomorfismo entonces existe un monomorfismo $\sigma : M \hookrightarrow E$ tal que $\sigma f = g$.*

Demostración: Como f es monomorfismo y E es inyectivo, existe $\sigma : M \to E$ tal que $\sigma f = g$, así pues bastará probar que σ es monomorfismo. Supongamos que σ no es monomorfismo entonces $0 \neq Nuc(\sigma) \leq M$, por otro lado $f(N) \subseteq_e M$ ya que f es monomorfismo esencial, por lo tanto $Nuc(\sigma) \cap f(N) \neq 0$, entonces podemos encontrar $y \in N$ tal que $0 \neq f(y) \in Nuc(\sigma)$ así obtenemos que $0 = \sigma f(y) = g(y)$ pero g es monomorfismo, por lo tanto $y = 0$ y así $f(y) = 0$ lo cual nos lleva a una contradicción ya que $f(y) \neq 0$. Por lo tanto σ es monomorfismo. ■

Proposición 1.26 *Sea M un R-módulo y $f : M \hookrightarrow E$ una cápsula inyectiva de M. Si E' es un R-módulo inyectivo y $g : M \hookrightarrow E'$ es un monomorfismo entonces E es isomorfo a un sumando directo de E'.*

Demostración: Considerese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & E \\ & E' & \end{tikzcd}$$

Como E' es inyectivo, existe $\overline{g} : E \to E'$ tal que $\overline{g} f = g$. Además tenemos que f es monomorfismo esencial y de la Proposición 1.25

se sigue que $\overline{g}$ es monomorfismo, por lo tanto $E \cong \overline{g}(E)$. Como E es inyectivo, entonces $\overline{g}(E)$ es inyectivo y por lo tanto existe $K \leq E'$ tal que $E' = \overline{g}(E) \oplus K$. ■

Proposición 1.27 *Sea M un R-módulo, si M tiene una cápsula inyectiva en **Mod-**R entonces esta es única salvo isomorfismo.*

Demostración: Sean $f : M \hookrightarrow E$ y $g : M \hookrightarrow E'$ cápsulas inyectivas para M en **Mod-**R. Entonces se tiene que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & E \\ & E' & \end{tikzcd}$$

existe $\overline{g} : E \to E'$ tal que $\overline{g}f = g$, como f es un monomorfismo esencial de la Proposición 1.25 se tiene que $\overline{g}$ es monomorfismo. Notemos que $g(M) \subseteq \overline{g}(E)$ y de la Proposición 1.26 $E' = \overline{g}(E) \oplus K$ con $K \leq E'$, además $g(M) \subseteq_e E'$ ya que g es monomorfismo esencial y por la Proposición 1.16a) $\overline{g}(E) \subseteq_e E'$ luego $K = 0$ y por lo tanto $E' = \overline{g}(E)$, es decir $\overline{g}$ es isomorfismo. ■

Observación 1.28 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Entonces*

*(1) Si $N \subseteq_e M$ y E es una cápsula inyectiva para M en **Mod-**R, entonces E es una cápsula inyectiva para N en **Mod-**R.*

*(2) Si $N \leq M$ con Q y E cápsulas inyectivas de N y M en **Mod-**R respectivamente, entonces existe un monomorfimo $\sigma : Q \hookrightarrow E$.*

Proposición 1.29 *Sea E un R-módulo inyectivo y $N \leq E$. Si N es esencialmente cerrado en E, entonces N no tiene extensiones esenciales en ningun lado, es decir, si $f : N \hookrightarrow X$ es monomorfismo esencial entonces f es isomorfismo.*

Demostración: Sea $f : N \hookrightarrow X$ un monomorfismo esencial y considerese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ & E & \end{tikzcd}$$

Por la Proposición 1.25 existe $\overline{f} : X \hookrightarrow E$ monomorfismo tal que $\overline{f}f = i$, notemos que $N \subseteq \overline{f}(X)$ y que además $\overline{f}f : N \hookrightarrow \overline{f}(X)$ es monomorfismo esencial ya que $X \cong \overline{f}(X)$. Así obtenemos que $N \subseteq_e \overline{f}(X) \subseteq E$ y como N es esencialmente cerrado en E, $N = \overline{f}(X)$, por lo tanto $\overline{f}f = id_N$ luego $\overline{f}^{-1} = f$, entonces f es isomorfismo. ∎

Proposición 1.30 *Sea R un anillo, E un R-módulo inyectivo y N submódulo esencialmente cerrado en E, entonces N es inyectivo.*

Demostración: Sea E inyectivo y $N \leq E$ esencialmente cerrado. Sea K un pseudocomplemento para N en E y $\eta : E \to E/K$ la proyección, entonces $N \cong \eta(N) = (N \oplus K)/K \subseteq_e E/K$ por la Proposición 1.192). Por otro lado, con la Proposición 1.29, N no tiene extensiones esenciales en ningún lado y como $N \cong (N \oplus K)/K$ entonces $(N \oplus K)/K = E/K$, luego $N \oplus K = E$ y por lo tanto N es inyectivo. ∎

Corolario 1.31 *Sea M un R-módulo y E un inyectivo, entonces M tiene una cápsula inyectiva dentro de E.*

Demostración: Considerese $\overline{M}$ una cerradura esencial de M en E, entonces por la proposición anterior $\overline{M}$ es inyectivo y $M \subseteq_e \overline{M}$. ∎

Con lo que se ha desarrollado hasta ahora, concluimos que si un módulo se sumerge en un módulo inyectivo, entonces podemos encontrar al menos una cápsula inyectiva contenida en tal inyectivo. Para demostrar la existencia de cápsulas inyectivas en **Mod-**R bastará probar que cada *R-módulo* se puede sumergir en un *R-módulo* inyectivo. Y lo que sigue es probar ese hecho.

Proposición 1.32 *Todo grupo abeliano se puede sumergir en un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.*

Demostración: Sea G un grupo abeliano entonces existe una sucesión exacta:

$$0 \to K \to \mathbb{Z}^{(X)} \to G \to 0$$

Luego $G \cong \mathbb{Z}^{(X)}/K \subseteq \mathbb{Q}^{(X)}/K$. ∎

Corolario 1.33 *Todo grupo abeliano G tiene cápsula inyectiva en **Mod-**$\mathbb{Z}$.*

Proposición 1.34 *Sea R un anillo y G un grupo abeliano, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(R,G)$ tiene estructura de R-módulo derecho.*

Demostración: Como $Hom_{\mathbb{Z}}(R,G)$ es un grupo abeliano, bastará definir un producto por elementos del anillo. Dado $r \in R$ y $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,G)$ definimos $(fr) : R \to G$ dado por $(fr)(a) = f(ra)$, veamos que $(fr) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,G)$, sean $a,b \in R$ entonces $(fr)(a+b) = f(r(a+b)) = f(ra+rb) = f(ra)+f(rb) = (fr)(a)+(fr)(b)$. Finalmente verifiquemos que esta operación cumple los axiomas de un *R-módulo*, (1) sean $r \in R$ y $f,g \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,G)$ con $a \in R$ entonces $((f+g)r)(a) = (f+g)(ra) = f(ra)+g(ra) = (fr)(a)+(gr)(a)$ por lo tanto $(f+g)r = (fr)+(gr)$, (2) sean $r_1, r_2 \in R$ y $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,G)$ con $a \in R$ entonces $(f(r_1+r_2))(a) = f((r_1+r_2)a) = f(r_1a + r_2a) = f(r_1a)+f(r_2a) = (fr_1)(a)+(fr_2)(a)$ por lo tanto $(f(r_1+r_2)) = (fr_1)+(fr_2)$ y (3) $(f(r_1r_2))(a) = f((r_1r_2)a) = f(r_1(r_2a)) = (fr_1)(r_2a) = ((fr_1)r_2)(a)$ por lo tanto $(f(r_1r_2)) = ((fr_1)r_2)$, por último (4) sea $1 \in R$ el unitario de R y $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,G)$ con $a \in R$ entonces $(f1)(a) = f(1a) = f(a)$ por lo tanto $(f1) = f$. ■

Para la demostración del siguiente teorema se usará el criterio de Baer, que permite determinar cuando un *R-módulo* es inyectivo. Recordamos al lector que en la categoría de $\mathbb{Z}$-*módulos* los inyectivos son exactamente todos los grupos abelianos divisibles.

Teorema 1.35 *Si D es un grupo abeliano divisible, entonces el R-módulo derecho $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ es inyectivo en **Mod**-R.*

Demostración:

Sea I un ideal derecho de R, y $f : I \to Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ un morfismo de *R-módulos* derechos. Consideremos $g : I \to D$ definida por $g(a) = f(a)(1)$, notemos que g es un morfismo de grupos abelianos, para ello sean $a, a' \in I$ entonces $g(a+a') = f(a+a')(1) = f(a)(1)+f(a')(1) = g(a)+g(a')$. Ahora considere el siguiente diagrama en **Mod**-$\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & R \\ & D & \end{tikzcd}$$

Por hipótesis D es grupo abeliano divisible, por lo tanto existe $\overline{g} : R \to D$ morfismo de grupos abelianos tal que $\overline{g}i = g$. Luego se tiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \\ & Hom_{\mathbb{Z}}(R,D) & \end{tikzcd}$$

Sea $\overline{f} : R \to Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ definida por $\overline{f}(a)(r) = \overline{g}(ar)$, así las cosas resta verificar (i) $\overline{f}(a) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$, (ii) $\overline{f}$ es R-$morfismo$ y (iii) $\overline{f}$ extiende a f. Sean $a, a', r, r' \in R$ entonces: (i) $\overline{f}(a)(r+r') = \overline{g}(a(r+r')) = \overline{g}(ar+ar') = \overline{g}(ar)+\overline{g}(ar') = \overline{f}(a)(r)+\overline{f}(a)(r')$, (ii) $\overline{f}(a+a')(r) = \overline{g}((a+a')r) = \overline{g}(ar+a'r) = \overline{g}(ar)+\overline{g}(a'r) = \overline{f}(a)(r)+\overline{f}(a')(r)$ y $\overline{f}(ar)(a') = \overline{g}((ar)a') = \overline{g}(a(ra')) = \overline{f}(a)(ra') = (\overline{f}(a)r)(a')$ por lo tanto $\overline{f}$ es morfismo de R-$módulos$, (iii) sea $b \in I$ entonces $\overline{f}(b)(r) = \overline{g}(br) = g(br) = f(br)(1) = (f(b)r)(1) = f(b)(r)$ por lo tanto $\overline{f}$ extiende a f y $Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ es un R-$módulo$ derecho inyectivo. ■

Corolario 1.36 *Todo R-módulo M se puede sumergir en un R-módulo inyectivo.*

Demostración: Sea M un R-$módulo$, entonces por la Proposición 1.32 podemos encontrar un grupo divisible D tal que M se sumerge en D, es decir existe $\sigma : M \hookrightarrow D$ monomorfismo de grupos abelianos, este nos induce un monomorfismo de $\mathbb{Z}$-$módulos$ $\overline{\sigma} : Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$ debido a que $Hom_{\mathbb{Z}}(R,-)$ es exacto izquierdo en **Mod-$\mathbb{Z}$**. Afirmamos que $\overline{\sigma}$ es monomorfismo de R-$módulos$, sean $r \in R$, $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ y $x \in R$ entonces $\overline{\sigma}(fr)(x) = \sigma(fr)(x) = (\sigma f)(rx) = (\overline{\sigma}(f))(rx) = (\overline{\sigma}(f)r)(x)$ por lo tanto $\overline{\sigma}(fr) = \overline{\sigma}(f)r$. Entonces en **Mod-$R$** se tiene que $M \cong Hom_R(R,M) \subseteq Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R,D)$. ■

Corolario 1.37 *Todo R-módulo M tiene cápsula inyectiva en* ***Mod-R****.*

Notación 1.38 *Debido a que cada módulo M ∈* ***Mod-****R tiene cápsula inyectiva y esta es única salvo isomorfismo, denotaremos $E(M)$ la cápsula inyectiva de M.*

Proposición 1.39 *Sea M un R-módulo, entonces:*

a) Si $N \leq M$, entonces $E(N) \subseteq E(M)$.

b) $N \subseteq_e M$ si y sólo si $E(N) = E(M)$.

c) Sean $M_1, M_2, ..., M_n$ R-módulos, entonces
$E(\bigoplus_{i=1}^n M_i) = \bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$.

Demostración: a) Sea $\overline{\sigma} : M \hookrightarrow E(M)$ monomorfismo esencial entonces $\sigma = \overline{\sigma}|_N : N \hookrightarrow E(M)$ es un monomorfismo, por otro lado se tiene $\tau : N \hookrightarrow E(N)$ monomorfismo esencial y por la Proposición 1.25 existe un monomorfismo $\overline{\tau} : E(N) \hookrightarrow E(M)$.

b) Como en a) $\sigma = \overline{\sigma}|_N : N \hookrightarrow E(M)$ es un monomorfismo esencial y por lo tanto $E(M)$ es una cápsula inyectiva para N.

c) Se tiene que $M_i \subseteq_e E(M_i)$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Entonces por la Proposición 1.16(f) $\bigoplus_{i=1}^n M_i \subseteq_e \bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$, pero además $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$ es un *R-módulo* inyectivo, por lo tanto $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$ es una cápsula inyectiva para $\bigoplus_{i=1}^n M_i$. ■

La siguiente Proposición es conocida como el argumento proyección.

Proposición 1.40 *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de R-módulos y consideremos $0 \neq x \in E(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha)$. Entonces existe $\beta \in I$, $0 \neq r \in R$ y $0 \neq w \in M_\beta$ tal que $0 \neq xrR \cong wR \leq M_\beta$ con $ann(xr) = ann(w)$. O equivalentemente, cada submódulo distinto de cero de $E(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha)$ contiene un submódulo no cero isomorfo a un submódulo de M_β.*

Demostración: Sea $0 \neq x \in E(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha)$ y $S = \{m \in \mathbb{N} :$ *existe* $0 \neq r \in R$ *tal que* $xr = x_1 + x_2 + ... + x_m$, *con* $0 \neq x_k \in M_{\alpha(k)}$ *y* $\alpha(i) \neq \alpha(j)$ *si* $i \neq j\}$. Notemos que $S \neq \emptyset$ pues $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \subseteq_e E(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha)$ y por lo tanto por el principio del buen orden en los números naturales, podemos encontrar $n \in S$ un elemento menor. Sea $0 \neq r_0 \in R$ tal que $0 \neq xr_0 = x_1 + x_2 + ... + x_n$ con $0 \neq x_k \in M_{\alpha(k)}$ y $\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(n)$ distintos. Notemos también que $ann(xr_0) = \bigcap_{i=1}^n ann(x_i) \neq R$, si $n = 1$ con $w = x_1$ hemos terminado, supongamos que $n \geq 2$ y sean $i \neq j \leq n$ entonces $ann(x_i) = ann(x_j)$ de lo contrario podríamos encontrar $b \in ann(x_i) \backslash ann(x_j)$ lo cual nos llevaría a que $0 \neq xr_0b$ cuya longitud es $k \leq n - 1$ y por lo tanto $k \in S$, contradiciendo el hecho de que n es mínimo en S. Por lo tanto $ann(x_i) = ann(xr_0)$ para toda $i = 1, 2, ..., n$. Nuevamente con $w = x_1$ hemos terminado. ■

1.5. Bimódulos balanceados fielmente

Sea N un *R-módulo* izquierdo, notemos que el grupo abeliano $End_R({}_RN)$ tiene dos posibles estructuras de anillo (que nos interesan y que son opuestas), una con multiplicación $(fg)(n) = f(g(n))$ denotada por $End^l_R({}_RN)$ y la otra con multiplicación $(fg)(n) = g(f(n))$ denotada por $End^r_R({}_RN)$. Lo mismo se tiene para N' un *R-módulo* derecho, es decir, el grupo abeliano $End_R(N'_R)$ tiene dos posibles estructuras de anillo, una con multiplicación $(fg)(n) = f(g(n))$ denotada por $End^l_R(N'_R)$ y la otra con multiplicación $(fg)(n) = g(f(n))$ denotada por $End^r_R(N'_R)$. De lo anterior, para N un *R-módulo* izquierdo y N' un *R-módulo* derecho, vamos a denotar:

$$End^r_R({}_RN) = End_R({}_RN)$$

y

$$End^l_R(N'_R) = End_R(N'_R)$$

Luego dado un anillo R y un grupo abeliano M, se tiene que M es un *R-módulo* izquierdo si y sólo si existe un morfismo de anillos $\lambda : R \to End^l_{\mathbb{Z}}(M)$. Por otro lado, M es un *R-módulo* derecho si y sólo si existe un morfismo de anillos $\rho : R \to End^r_{\mathbb{Z}}(M)$. Note que los anillos $End^l_{\mathbb{Z}}(M)$ y $End^r_{\mathbb{Z}}(M)$, en general no son el mismo, pues en el primero se define el producto como $(fg)(m) = f(g(m))$ y en el segundo $(fg)(m) = g(f(m))$. Sea $r \in R$ y $m \in M$, la multiplicación por escalares en M, esta dada por $rm = \lambda(r)(m)$ y $mr = \rho(r)(m)$ según sea el caso. Un grupo abeliano M es un *R-S-bimódulo* $({}_RM_S)$ si M es un *R-módulo* izquierdo y *S-módulo* derecho, pero además debe cumplir que $r(ms) = (rm)s$ para toda $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$.

Proposición 1.41 *Sea R y S anillos y M un grupo abeliano. Si M es un R-módulo izquierdo con $\lambda : R \to End^l_{\mathbb{Z}}(M)$ y es un S-módulo derecho con $\rho : S \to End^r_{\mathbb{Z}}(M)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) ${}_RM_S$.

b) $\lambda : R \to End_S(M_S)$ *es un morfismo de anillos.*

c) $\rho : S \to End_R({}_RM)$ *es un morfismo de anillos.*

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Bastará probar que la imagen del morfismo $\lambda : R \to End^l_{\mathbb{Z}}(M)$ esta contenida en $End_S(M_S)$ que es un subanillo de $End^l_{\mathbb{Z}}(M)$. Para esto sean $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$, entonces $[\lambda(r)(m)]s = (rm)s$ pero por hipótesis lo anterior es igual a $r(ms) = \lambda(r)(ms)$ y por lo tanto $\lambda(r) \in End_S(M_S)$.

$b) \Rightarrow a)$ Sean $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$ entonces $(rm)s = [\lambda(r)(m)]s$ pero por $b)$ se tiene que $\lambda(r) \in End_S(M_S)$ entonces lo anterior es igual a $\lambda(r)(ms) = r(ms)$. Por lo tanto M es un *R-S-bimódulo*.

$a) \Leftrightarrow c)$ es similar a lo anterior. ■

De la Proposición anterior podemos concluir que dado ${}_RM_S$ un bimódulo, se tienen morfismos de anillos (multiplicación por la izquierda y derecha) $\lambda : R \to End_S(M_S)$ dada por $\lambda(r)(m) = rm$ y $\rho : S \to End_R({}_RM)$ dado por $\rho(s)(m) = ms$.
Algunos ejemplos interesantes de bimódulos se presentan cuando se considera al grupo (abeliano) de morfismos entre módulos. Supongamos que M y N son grupos abelianos y que se tienen R, S y T anillos. Vamos a considerar a $Hom_R(M, N)$ y para ello necesitamos que M y N sean *R-módulos* izquierdos o derechos. Si M_R y N_R son *R-módulos* derechos, entonces pueden pasar dos casos:

(1) ${}_SM_R$ es un bimódulo, entonces al $Hom_R({}_SM_R, N_R)$ le podemos dar estructura de *S-módulo* derecho, mediante la multiplicación por escalares $(fs)(m) = f(sm)$.

(2) ${}_TN_R$ es un bimódulo, entonces al $Hom_R(M_R, {}_TN_R)$ le podemos dar estructura de *T-módulo* izquierdo, mediante la multiplicación por escalares $(tf)(m) = t(f(m))$.

Por otro lado, si ${}_RM$ y ${}_RN$ son *R-módulos* izquierdos, entonces pueden pasar dos casos:

(3) ${}_RM_S$ es un bimódulo, entonces al $Hom_R({}_RM_S, {}_RN)$ le podemos dar estructura de *S-módulo* izquierdo, mediante la multiplicación por escalares $(sf)(m) = f(ms)$.

(4) ${}_RN_T$ es un bimódulo, entonces al $Hom_R({}_RM, {}_RN_T)$ le podemos dar estructura de *T-módulo* derecho, mediante la multiplicación por escalares $(ft)(m) = f(m)t$.

Es importante mencionar que, si N y M son solamente *R-módulos* izquierdos (derechos), entonces no hay una manera fácil (al menos así lo creo) de darle estructura de *R-módulo* al $Hom_R(M, N)$. La siguiente observación nos da más información acerca de $(1), (2), (3)$ y (4).

Observación 1.42 *Sean R, S y T anillos con M y N grupos abelianos. Entonces:*

1) Si ${}_SM_R$ y ${}_TN_R$ son bimódulos entonces $Hom_R({}_SM_R, {}_TN_R)$ es un T-S-bimódulo con multiplicación por escalares:

$$(fs)(m) = f(sm) \quad y \quad (tf)(m) = t(f(m))$$

2) Si ${}_RM_S$ y ${}_RN_T$ son bimódulos entonces $Hom_R({}_RM_S, {}_RN_T)$ es un S-T-bimódulo con multiplicación por escalares:

$$(sf)(m) = f(ms) \quad y \quad (ft)(m) = f(m)t$$

Vamos a entender como un morfismo de *R-S-bimódulos* a un morfismo de *R-módulos* izquierdos y *S-módulos* derechos.

Definición 1.43 *Sean R, S anillos con ${}_RN$ módulo mediante $\lambda : R \to End^l_{\mathbb{Z}}(N)$ y N'_S módulo mediante $\rho : S \to End^r_{\mathbb{Z}}(N')$. Se dice que ${}_RN$ (N'_S) es fiel si λ (ρ) es un monomorfismo.*
Un R-S-bimódulo ${}_RM_S$ es balanceado si sus morfismos multiplicación por la izquierda (λ) y derecha (ρ) de la Proposición 1.41 son epimorfismos. Diremos que ${}_RM_S$ es balanceado fielmente si sus morfismos multiplicación por la izquierda (λ) y derecha (ρ) son isomorfismos.

Un ejemplo de un bimódulo balanceado fielmente lo tenemos en la siguiente observación. Note que dado un anillo R, entonces R es un *R-R-bimódulo*.

Observación 1.44 *Si R es un anillo con λ y ρ sus morfismos multiplicación por la izquierda y derecha. Entonces:*

$$\lambda : R \to End_R(R_R) \quad y \quad \rho : R \to End_R({}_RR)$$

son isomorfismos: es decir, ${}_RR_R$ es un bimódulo balanceado fielmente.

Proposición 1.45 *Sea P un R-módulo izquierdo (derecho). Entonces P es proyectivo y finitamente generado si y sólo si $P \oplus P' \cong R^{(n)}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y algún R-módulo izquierdo (derecho) R'.*

Definición 1.46 *Sea R un anillo. Un módulo izquierdo (derecho) P es un generador si para todo M módulo izquierdo (derecho) existe un epimorfismo $\pi : P^{(X)} \to M$ para algún X conjunto. Diremos que un generador P es progenerador si P es proyectivo y finitamente generado.*

Observación 1.47 *Un R-módulo izquierdo (derecho) P es generador si y sólo si existe R' un R-módulo izquierdo (derecho) y $n \in \mathbb{N}$ tal que $P^{(n)} \cong R \oplus R'$.*
Un R-módulo izquierdo (derecho) P es progenerador si y sólo si existen $m, n \in \mathbb{N}$ y P', R' módulos izquierdos (derechos) tal que $R^{(m)} \cong P \oplus P'$ y $P^{(n)} \cong R \oplus R'$.

Lema 1.48 *Sea $_RQ_S$ un bimódulo balanceado fielmente. Entonces $_RQ$ es generador si y sólo si Q_S es proyectivo y finitamente generado.*

Demostración: $\Rightarrow$) De la hipótesis tenemos que $\rho : S \to End_R(_RQ)$ es un isomorfismo, y de esto obtenemos que como *S-módulos* $S_S \cong Hom_R(_RQ,_RQ_S)$ mediante ρ. Luego por hipótesis $_RQ$ es generador, y de la Observación 1.47, se sigue que $_RQ^{(n)} \cong_R R \oplus_R R'$. Entonces:

$$S_S^{(n)} \cong Hom_R(_RQ,_RQ_S)^{(n)} \cong Hom_R(_RQ^{(n)},_RQ_S)$$

$$\cong Hom_R(R \oplus R',_RQ_S) \cong Hom_R(R,_RQ_S) \oplus Hom_R(R',_RQ_S) \cong Q \oplus Q'$$

y por la Proposición 1.45 se tiene que Q_S es proyectivo y finitamente generado.

$\Leftarrow$) Utilizando la Observación 1.47 y la Proposición 1.45 de manera similar a lo anterior se tiene que:

$$_RQ^{(n)} \cong Hom_S(S,_RQ_S)^{(n)} \cong Hom_S(S^{(n)},_RQ_S)$$

$$\cong Hom_S(Q \oplus Q',_RQ_S) \cong Hom_S(Q,_RQ_S) \oplus Hom_S(Q',_RQ_S) \cong R \oplus R'.$$

■

Note que el Lema 1.48 tiene otra versión, solamente cambiando en su enunciado $_RQ$ por Q_S y viceversa.

Un ejemplo de bimódulo importante es el siguiente. Sea $0 \neq N$ un *R-módulo* izquierdo, entonces a N se le puede dar estructura de $End_R({}_RN)$-*módulo* derecho mediante el morfimo multiplicación por la derecha $i : End_R({}_RN) \to End^r_{\mathbb{Z}}(N)$ la inclusión, de manera explícita, la multiplicación por escalares es $nf = i(f)(n) = f(n)$ para doda $f \in End_R({}_RN)$ y $n \in N$. Pero además, se tiene también que $(rn)f = i(f)(rn) = r[i(f)(n)] = r(nf)$ para toda $r \in R$, $f \in End_R({}_RN)$ y $n \in N$. Por lo tanto N es R-$End_R({}_RN)$-*bimódulo*. Lo mismo podemos hacer cuando se tiene $0 \neq N'$ un *R-módulo* derecho, y resulta que N' es un $End_R(N'_R)$-*R-bimódulo* con multiplicación por la izquierda $fn = f(n)$. En resumen podemos escribir en general que:

$$_RN_{End_R(_RN)} \quad \text{y} \quad _{End_R(N'_R)}N'_R$$

En vista de lo anterior se tiene la siguiente notación y definición.

Notación 1.49 *Dado ${}_RM$ un R-módulo izquierdo y el anillo $T = End_R({}_RM)$. Entonces denotamos $BiEnd_R({}_RM) = End_T(M_T)$ cuyos elementos los llamaremos biendomorfismos de ${}_RM$.*
Lo analogo para M' un R-módulo derecho, denotamos $BiEnd_R(M'_R) = End_{T'}({}_{T'}M')$ donde $T' = End_R(M_R)$.

Definición 1.50 *Sea R un anillo y M un R-módulo izquierdo (derecho). Entonces diremos que ${}_RM(M_R)$ es balanceado (fielmente) si ${}_RM_{End_R(_RM)}({}_{End_R(M_R)}M_R)$ es balanceado (fielmente) como bimódulo.*

Ahora supongamos que N es un *R-módulo* izquierdo, entonces ${}_RN_T$ es un bimódulo con $T = End_R({}_RN)$ y de la Proposición 1.41 se sigue que la multiplicación por la izquierda de ${}_RN_T$ $\lambda : R \to BiEnd({}_RN)$ es un morfismo de anillos, y se le conoce como el morfismo natural de R al anillo de biendomorfismos de ${}_RN$. Nuevamente de la Proposición 1.41 podemos a M darle la estructura de ${}_BM_T$ bimódulo donde $B = BiEnd({}_RN)$.

Observación 1.51 *Sea R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Entonces ${}_RM$ es balanceado (y fiel) si y sólo si el morfismo natural $\lambda : R \to BiEnd_R({}_RM)$ es epimorfismo (isomorfismo). Note que esto tiene su versión derecha.*

Demostración: $\Rightarrow$) Sea $T = End_R({}_RM)$, luego por hipótesis ${}_RM_T$ es balanceado (fielmente) y por lo tanto el morfismo $\lambda : R \to End_T(M_T)$ es un epimorfismo (isomorfismo), pero por definición se tiene que $End_T(M_T) = BiEnd_R({}_RM)$ entonces λ es el morfismo natural que resulta ser un epimorfismo (isomorfismo).

$\Leftarrow$) Bastará probar que los morfismos multiplicación por la izquierda $\lambda : R \to End_T(M_T)$ y multiplicación por la derecha $\rho : T \to End_R({}_RM)$ son epimorfismos (isomorfismos). Recordemos que ρ, en este caso, es la inclusión y como $T = End_R({}_RM)$, entonces ρ es la identidad, y la hipótesis nos dice que precisiamente $\lambda : R \to End_T(M_T) = BiEnd_R({}_RM)$ es un epimorfismo (isomorfismo). $\blacksquare$

Proposición 1.52 *Sea M un R-módulo izquierdo. Entonces*

$${}_{BiEnd_R({}_RM)}M_{End_R({}_RM)}$$

es un bimódulo balanceado fielmente.

Demostración: Sea $T = End_R({}_RM)$ y $B = BiEnd_R({}_RM)$. Entonces ${}_BM$ y M_T son fieles, pues los morfismos multiplicación por la izquierda $\lambda : B \to End_T(M_T)$ y multiplicación por la derecha $\rho : T \to End_B({}_BM)$ son la inclusiones. Note que $B = End_T(M_T)$ por definición y por lo tanto λ es la identidad, luego tenemos el morfismo natural $\lambda' : R \to B$, lo cual implica que $End_B({}_BM) \subseteq End_R({}_RM) = T$ y por lo tanto ρ es la identidad. $\blacksquare$

Proposición 1.53 *Si ${}_RM_S$ es un bimódulo balanceado (fielmente) entonces ${}_RM$ y M_S son balanceados (y fieles).*

Demostración: Supongamos que ${}_RM_S$ es balanceado, entonces los morfismos multiplicación por la izquierda $\lambda : R \to End_S(M_S)$ y multiplicación por la derecha $\rho : S \to End_R({}_RM)$ son epimorfismos. Primero verifiquemos que ${}_RM$ es balanceado (y fiel), entonces por la Observación 1.51 basta probar que el morfismo natural $q : R \to BiEnd_R({}_RM)$ es un epimorfismo (isomorfismo). Sea $T = End_R({}_RM)$, entonces tenemos que $q : R \to End_T(M_T)$, por otro lado tenemos un epimorfimo de anillos $\rho : S \to T$ y de este hecho se sigue que $End_T(M_T) = End_S(M_S)$, asi pues λ y q tienen el mismo dominio y contradominio, pero más aún ambas estan definidas de la misma manera, es decir con la hipótesis podemos concluir que $\lambda = q$ y por lo tanto q es un epimorfismo (isomorfismo). Para verificar que M_S es balanceado (y fiel) es similar a lo anterior, utilizando la versión derecha de la Observación 1.51. ■

1.6. Equivalencia Morita

En la última sección de este trabajo se necesitará conocer la caracterización de equivalencia Morita. Para más detalle puede consultarse [3]. Se supondrá que el lector esta familiarizado con los conceptos de categoría, funtor, transformación natural y par de funtores adjuntos, así como también las relaciones que tienen los bifuntores $Hom(\_,\_)$ y $(\_ \otimes \_)$.

Definición 1.54 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si existe un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $GF \cong Id_{\mathcal{C}}$ y $FG \cong Id_{\mathcal{D}}$ son isomorfismos naturales. En tal caso diremos que G es una equivalencia inversa de F.*

Diremos que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes si existe una equivalencia entre ellas y lo denotamos por $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$. Esta relación es una relación de equivalencia en la clase de todas las categorías. Como estaremos trabajando con categorías de *R-módulos*, donde $Hom(M,N)$ tiene estructura de grupo abeliano para cualesquiera dos módulos M y N en la categoría, vamos a asumir que las equivalencias son funtores aditivos (es decir nos respetan esta estructura de grupo).

Definición 1.55 *Sean R y S anillos. Diremos que R es equivalente Morita a S si **Mod-**$R \approx$**Mod-**S.*

Notación 1.56 *Sean R y S anillos equivalentes Morita, entonces tenemos equivalencias F :**Mod-**$R \to$**Mod-**S y G :**Mod-**$S \to$**Mod-**R con isomorfismos naturales $\eta : GF \to Id_{\textbf{Mod-}R}$ y $\zeta : FG \to Id_{\textbf{Mod-}S}$. Con la transformación natural η, para cada $M \in$**Mod-**R y $N \in$**Mod-**S existen morfismos de grupos abelianos*

$$\phi = \phi_{MN} : Hom_S(N, F(M)) \to Hom_R(G(N), M)$$

$$\theta = \theta_{MN} : Hom_S(F(M), N) \to Hom_R(M, G(N))$$

dados por

$$\phi_{MN}(\gamma) = \eta_M G(\gamma)$$

$$\theta_{MN}(\delta) = G(\delta)\eta_M^{-1}$$

.

*Lo mismo para tranformación natural ζ, podemos encontrar morfismos analogos a ϕ y θ. Esta será la notación que se estará utilizando cada vez que se tenga una equivalencia F entre **Mod-**R y **Mod-**S con inversa G.*

Proposición 1.57 *Sea F :**Mod-**$R \to$**Mod-**S una equivalencia de categorías. Entonces para cada M y M' en **Mod-**R, la restricción de F a $Hom_R(M, M')$ es un isomorfismo de grupos abelianos:*

$$F : Hom_R(M, M') \to Hom_S(F(M), F(M'))$$

*tal que $F(f)$ es epimorfismo (monomorfismo) en **Mod-**S si y sólo si f es epimorfismo (monomorfismo) en **Mod-**R. Más aún, si $M \neq 0$ entonces:*

$$F : End_R(M) \to End_S(F(M))$$

es un isomorfismo de anillos.

Demostración: Debido a que F es aditivo, es fácil verificar que restringido a $Hom_R(M, M')$ es un morfismo de grupos abelianos y que restringido a $End_R(M)$ es un morfismo de anillos. Definimos un morfismo de grupos abelianos $H_{MM'} : Hom_S(F(M), F(M')) \to Hom_R(M, M')$ dada por $H_{MM'}(g) = \eta_M G(g)\eta_M^{-1}$, luego se tiene que $H_{MM'}$ es la inversa de F retringido a $Hom_R(M, M')$, lo mismo cuando $M = M'$. Notemos que un morfismo f en **Mod-**R es monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si $GF(f)$ es monomorfismo (epimorfismo) en **Mod-**R, esto se debe a que F es equivalencia con inversa G. Ahora supongamos que f es un monomorfismo y que para alguna h en **Mod-**S se tiene que $F(f)h = 0$. Entonces $GF(f)G(h) = G(0) = 0$, pero $GF(f)$ es monomorfimo, por lo tanto $G(h) = 0$. Entonces $FG(h) = 0$ y con la hipótesis de que $FG \cong Id_{\textbf{Mod-}S}$ es isomorfismo natural, se sigue que $h = 0$, y por lo tanto $F(f)$ es monomorfismo. Las condiciones que faltan se prueban de manera similar a lo anterior. ∎

Lema 1.58 *Sean R y S anillos equivalentes Morita. Utilizando la Notación 1.56, los morfismos:*

$$\phi = \phi_{MN} : Hom_S(N, F(M)) \to Hom_R(G(N), M)$$

$$\theta = \theta_{MN} : Hom_S(F(M), N) \to Hom_R(M, G(N))$$

Son isomorfismos naturales en cada variable. En particular, para cada

$$\gamma \in Hom_S(N_1, F(M_1)), \delta \in Hom_S(F(M_2), N_2)$$

$$\overline{\gamma} \in Hom_R(G(N_1), M_1), \overline{\delta} \in Hom_R(M_2, G(N_2))$$

y

$$h : M_1 \to M_2, k : N_2 \to N_1$$

se tiene que:

1) $\phi(F(h)\gamma k) = h\phi(\gamma)G(k)$.
2) $\theta(k\delta F(h)) = G(k)\theta(\delta)h$.
3) $\phi^{-1}(h\overline{\gamma}G(k)) = F(h)\phi^{-1}(\overline{\gamma})k$.
4) $\theta^{-1}(G(k)\overline{\delta}h) = k\theta^{-1}(\overline{\delta})F(h)$.

Por último, $\phi(\gamma)$ es un monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si γ es un monomorfismo (epimorfismo), y $\theta(\delta)$ es un monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si δ es un monomorfismo (epimorfismo).

Demostración: Notemos que al morfismo de grupos abelianos $\phi = \phi_{MN} : Hom_S(N, F(M)) \to Hom_R(G(N), M)$ lo podemos ver como la composición de $G : Hom_S(N, F(M)) \to Hom_R(G(N), GF(M))$, que es isomorfismo por la Proposición 1.57, compuesto con el morfismo $\eta_* : Hom_R(G(N), GF(M)) \to Hom_R(G(N), M)$ dada por $\eta_*(f) = \eta_M f$, luego tenemos que η_M es un isomorfismo y por lo tanto η_* también lo es. Así pues, ϕ_{MN} es un isomorfismo. Ahora verifiquemos que los funtores $Hom_S(N, F(\_))$, $Hom_R(G(N), \_)$:**Mod-**R→**Mod-**S son isomorfos naturalmente. Sea $h : M_1 \to M_2$ un morfismo en **Mod-**R, bastará ver que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom_S(N, F(M_1)) \arrow[r, "\phi_{M_1N}"] \arrow[d, "F(h)_*"] & Hom_R(G(N), M_1) \arrow[d, "h_*"] \\ Hom_S(N, F(M_2)) \arrow[r, "\phi_{M_2N}"] & Hom_R(G(N), M_2) \end{tikzcd}$$

donde $F(h)_*$ y h_* estan dadas por $F(h)_*(\sigma) = F(h)\sigma$ y $h_*(\tau) = h\tau$. Sea $\sigma \in Hom_S(N, F(M_1))$, entonces $h_*(\phi(\sigma)) = h_*(\eta_{M_1}G(\sigma)) = h(\eta_{M_1}G(\sigma)) = (h\eta_{M_1})G(\sigma)$ pero como $GF \cong_\eta Id_{\mathbf{Mod}\text{-}R}$ se tiene que $h\eta_{M_1} = \eta_{M_2}GF(h)$ y por lo tanto $(h\eta_{M_1})G(\sigma) = (\eta_{M_2}GF(h))G(\sigma) = \eta_{M_2}G(F(h)\sigma) = \phi_{M_2N}(F(h)\sigma) = \phi_{M_2N}F(h)_*(\sigma)$ y con esto queda demostrada la naturalidad. Para probar 1), tenemos que $\phi(F(h)\gamma k) = \eta_{M_2}G(F(h))G(\gamma)G(k) = (\eta_{M_2}G(F(h)))\eta_{M_1}^{-1}\eta_{M_1}G(\gamma)G(k)$ pero con la naturalidad de η lo anterior es igual a $(h\eta_{M_1})\eta_{M_1}^{-1}\eta_{M_1}G(\gamma)G(k) = h\eta_{M_1}G(\gamma)G(k) = h\phi(\gamma)G(k)$. Para demostrar 2),3),4) y la naturalidad de los isomorfimos ϕ y θ en la variables restantes, se prueba de manera similar a lo anterior. Para la última parte del lema, sea $\gamma \in Hom_S(N, F(M))$ entonces $\phi(\gamma) = \eta_M G(\gamma)$. Como η_M es isomorfismo, tenemos que $\phi(\gamma)$ es monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si $G(\gamma)$ es monomorfismo (epimorfismo), pero ya sabiamos que $G(\gamma)$ es monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si γ es monomorfismo (epimorfismo). ∎

Ahora algunas propiedades que se tienen bajo equivalencia Morita.

Proposición 1.59 *Sea F :**Mod-**$R \to$**Mod-**S una equivalencia de categorías. Entonces una sucesión de la forma:*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

*es exacta (y se escinde) en **Mod-**R si y sólo si la sucesión:*

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$$

*es exacta (y se escinde) en **Mod-**S.*

Demostración: Aqui usamos la Notación 1.56. Afirmamos que F preserva sucesiones exactas cortas (y por lo tanto G también). Para eso supongamos que se tiene una sucesión exacta corta en **Mod-**R :

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

Luego si aplicamos el funtor F, se tiene la sucesión:

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$$

donde $F(f)$ es monomorfismo y $F(g)$ es epimorfismo por la Proposición 1.57, así que resta verificar que $Nuc(F(g)) \subseteq Im(F(f))$. Sea $K = Nuc(F(g))$ y $i : N \hookrightarrow F(M)$ la inclusión. Entonces consideramos el morfismo $\phi(i_k) : G(K) \to M$ que por el Lema 1.58(1) se tiene que $g\phi(i) = \phi(F(g)i) = \phi(0) = 0$. Por lo tanto $Im(\phi(i)) \subseteq Nuc(g) = Im(f)$. Luego como f es monomorfismo, podemos encontrar $\overline{\gamma} \in Hom_R(G(K), M')$ tal que $f\overline{\gamma} = \phi(i)$, y por el Lema 1.58(3) se tiene que:

$$i = \phi^{-1}(f\overline{\gamma}) = F(f)\phi^{-1}(\overline{\gamma})$$

Luego $Nuc(F(g)) = Im(i)$ por como definimos a i. De lo anterior se tiene que $Im(i) \subseteq Im(F(f))$ y por lo tanto $Nuc(F(g)) \subseteq Im(F(f))$. Con esto se tiene la afirmación y la ida de la proposición. Para el regreso, supongamos que la sucesión:

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$$

es exacta. Luego por lo anterior, tenemos que si aplicamos el funtor G, la sucesión:

$$0 \longrightarrow GF(M') \xrightarrow{GF(f)} GF(M) \xrightarrow{GF(g)} GF(M'') \longrightarrow 0$$

es exacta. Ahora consideramos a η un isomorfismo natural que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_{M'}"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_M"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & GF(M') \arrow[r, "GF(f)"] & GF(M) \arrow[r, "GF(g)"] & GF(M'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y como el diagrama conmuta se sigue que la sucesión:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

es exacta.

La escisión a la que hace referencia la proposición se debe a que las equivalencias son aditivas. ■

Así cada vez que se tenga $N \hookrightarrow M$ en **Mod-**R y F :**Mod-**R$\to$**Mod-**S una equivalencia, tendremos que $F(M/N) \cong F(M)/F(N)$.

Proposición 1.60 *Sea F :**Mod-**R→**Mod-**S una equivalencia de categorías. Entonces:*

1) *Un par $(M, \{\pi_j\}_{j\in J})$ es un producto de la familia $\{M_j\}_{j\in J}$ de R-módulos si y sólo si $(F(M), \{F(\pi_j)\}_{j\in J})$ es un producto de la familia $\{F(M_j)\}_{j\in J}$ de S-módulos.*

2) *Un par $(M, \{u_i\}_{i\in I})$ es una suma directa de la familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos si y sólo si $(F(M), \{F(u_i)\}_{i\in I})$ es una suma directa de la familia $\{F(M_i)\}_{i\in I}$ de S-módulos.*

Demostración: 1) Supongamos que $(M, \{\pi_j\}_{j\in J})$ es un producto de la familia $\{M_j\}_{j\in J}$ de *R-módulos*. Sea N ∈**Mod-**S con $g_j : N \to F(M_j)$ morfismo en **Mod-**S para toda $j \in J$, entonces en **Mod-**R se tiene $\phi(g_j) : G(N) \to M_j$ para toda $j \in J$, entonces por hipótesis existe un único morfismo $f : G(N) \to M$ tal que $\phi(g_j) = \pi_j f$ para toda $j \in J$. Luego con el Lema 1.58(3), se sigue que $\phi^{-1}(f)$ es única con la propiedad de que $g_j = \phi^{-1}(\pi_j f) = F(\pi_j)\phi^{-1}(f)$ para toda $j \in J$. Por lo tanto $(F(M), \{F(\pi_j)\}_{j\in J})$ es un producto de la familia $\{F(M_j)\}_{j\in J}$.

Ahora supongamos que $(F(M), \{F(\pi_j)\}_{j\in J})$ es un producto de la familia $\{F(M_j)\}_{j\in J}$. Sea K ∈**Mod-**R con $h_j : K \to M_j$ morfismo para toda $j \in J$. Luego aplicando el funtor F, se tiene $F(h_j) : F(K) \to F(M_j)$ morfismo para toda $j \in J$, y por lo tanto existe existe un único morfismo $h : F(K) \to F(M)$ tal que $F(h_j) = F(\pi_j)g$ para toda $j \in J$. Con $g' \in Hom_R(K, M)$ único tal que $F(g') = g$, se tiene que g' es único tal que $h_j = \pi_j g'$ para toda $j \in J$.

2) es dual a 1). ■

Proposición 1.61 *Sean R y S anillos equivalentes Morita con equivalencia F :**Mod-**R→**Mod-**S. Sean M, M' y U R-módulos. Entonces:*

1) *U es M-proyectivo (M-inyectivo) si y sólo si $F(U)$ es $F(M)$-proyectivo ($F(M)$-inyectivo).*

2) *U es proyectivo (inyectivo) si y sólo si $F(U)$ es proyectivo (inyectivo).*

3) *Un monomorfismo $f : M \to M'$ es esencial si y sólo si $F(f) : F(M) \to F(M')$ es un monomorfismo esencial.*

4) $f : M \to M'$ es una cápsula inyectiva si y sólo si $F(f) : F(M) \to F(M')$ es una cápsula inyectiva.

Demostración: Vamos a utilizar la Notación 1.56. 1) Supongamos que U es M-proyectivo y que se tiene la siguiente situación en **Mod-**S:

$$\begin{tikzcd} & F(U) \arrow[d, "g"] & \\ F(M) \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde f es un epimorfismo, entonces $\theta(f)$ es un epimorfismo por el Lema 1.58. Luego aplicamos θ a los morfismos f y g para obtener el siguiente diagrama en **Mod-**R:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\theta(g)"] & \\ M \arrow[r, "\theta(f)"'] & G(N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

como U es M-proyectivo existe $h : U \to M$ tal que $\theta(g) = \theta(f)h$. Del Lema 1.58(4) se tiene que $g = \theta^{-1}\theta(g) = \theta^{-1}((\theta)(f)h) = fF(h)$. Por lo tanto $F(U)$ es $F(M)$-proyectivo. Lo que resta es similar a lo anterior.

2) Note que un módulo M es proyectivo (inyectivo) en **Mod-**R si y sólo si M es N-proyectivo (N-inyectivo) para todo $N \in$**Mod-**R. Por lo tanto, 2) se sigue de 1).

3) Es consecuencia de la Proposición 1.59 y la Proposición 1.60.

4) Es inmediato de 2) y 3). ■

Proposición 1.62 *Sean R y S anillos equivalentes Morita con equivalencia F :**Mod-**R→**Mod-**S. Dado $M \in$**Mod-**R, se tiene que la función definida por:*

$$\Lambda_M : Sub_R(M) \to Sub_S(F(M)); K \mapsto Im(F(i_K))$$

donde $i_k : K \hookrightarrow M$ es la inclusión, es un isomorfismo de retículas.

Demostración: Como F es un funtor, es claro que Λ_M respeta el orden. Por otro lado, utilizando la Notación 1.56, definimos la función

$\Gamma_M : Sub_S(F(M)) \to Sub_R(M)$ dada por $\Gamma_M(N) = Im(\phi(j_N))$ con $j_N : N \hookrightarrow F(M)$ es la inclusión. Luego del Lema 1.58(1) podemos concluir que Γ_M preserva el orden, para esto sean $N' \subseteq N \subseteq F(M)$ entonces $\phi(j_{N'}) = \phi(j_N k) = \phi(j_N)G(k)$ donde $k : N' \hookrightarrow N$ es la inclusión, por lo tanto $\Gamma_M(N') = Im(\phi(j_{N'})) \subseteq Im(\phi(j_N)) = \Gamma_M(N)$. Por último, se afirma que Γ_M es la inversa de Λ_M. Sea $K \leq M$ y $N = \Lambda_M(K)$, entonces como $F(i_K)$ es un monomorfismo podemos encontrar $h : F(K) \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "j_N"] & F(M) \\ F(K) \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "F(i_K)"'] & \end{tikzcd}$$

Luego por el Lema 1.58(1) aplicado dos veces se tiene que $\phi(j_N)G(h) = \phi(j_N h) = \phi(F(i_K)) = i_K \phi(Id_{F(K)})$, además $G(h)$ es isomorfismo pues h es isomorfismo y también $\phi(Id_{F(K)})$ es isomorfismo por el Lema 1.58. Por lo tanto $\Gamma_M \Lambda_M(K) = Im(\phi(j_N)) = Im(i_K) = K$.

Ahora sea $N \leq F(M)$ y $K = \Gamma_M(N)$, luego $\phi(j_N)$ es un monomorfismo y como i_K es monomorfismo, entonces existe $\gamma : G(N) \to K$ un isomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G(N) \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\phi(j_N)"] & \\ K \arrow[r, "i_K"'] & M \end{tikzcd}$$

Aplicando ϕ^{-1} al diagrama y utilizando el Lema 1.58(3), se tiene que $j_N = \phi^{-1}(i_K \gamma) = F(i_K)\phi^{-1}(\gamma)$ y como $\phi^{-1}(\gamma)$ es un isomorfismo, obtenemos $\Lambda_M \Gamma_M(N) = Im(F(i_K)) = Im(j_N) = N$. Por lo tanto Λ_M es isomorfismo de retículas. ■

Corolario 1.63 *Sean R y S anillos equivalentes Morita con equivalencia F :**Mod-**$R \to$**Mod-**S. Si $M \in$**Mod-**R entonces:*

a) M es simple (semisimple) si y sólo si $F(M)$ es simple (semisimple).

b) M es finitamente generado (cogenerado) si y sólo si $F(M)$ es finitamente generado (cogenerado).

c) *M es artiniano (neteriano) si y sólo si $F(M)$ es artiniano (neteriano).*

d) *M es de longitud finita si y sólo si $F(M)$ es de longitud finita.*

e) *M es inescindible si y sólo si $F(M)$ es inescindible.*

Demostración: Cada condición es equivalente a una condición sobre las retícula $Sub_R(M)$ y $Sub_S(F(M))$ que son isomorfas. ■

Teorema 1.64 *Sean R y S anillos equivalentes Morita con equivalencias invesas F :**Mod-**$R \to$**Mod-**S y G :**Mod-**$S \to$**Mod-**R. Considerese $P = F(R) \in$**Mod-**S y $Q = G(S) \in$**Mod-**R. Entonces P y Q tienen estructura de ${}_RP_S$ y ${}_SQ_R$ bimódulos tal que:*

1) *${}_RP_S$ y ${}_SQ_R$ son balanceados.*

2) *$P_S, {}_RP$, ${}_SQ$ y Q_R son progeneradores.*

3) *${}_RP_S \cong Hom_S(Q, S) \cong Hom_R(Q, R)$ y ${}_SQ_R \cong Hom_R(P, R) \cong Hom_S(P, S)$.*

4) *$F \cong Hom_R(Q, \_)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$.*

5) *$F \cong (\_ \otimes_R P)$ y $G \cong (\_ \otimes_S Q)$.*

Demostración: Aqui se usa la Notación 1.56. Por la Proposición 1.41, para que P_S sea un ${}_RP_S$ bimódulo, necesitamos un morfismo multiplicación por la izquierda $\lambda : R \to End_S(P_S)$, para ello notamos que R tiene estructura de ${}_RR_R$ bimódulo y por lo tanto R tiene una multiplicación por la izquierda $q : R \to End_R(R_R)$ según la Proposición 1.41, note que q es un isomorfismo, por otro lado sabemos que $F| : End_R(R_R) \to End_S(P_S)$ es un isomorfismo de anillos (pues F es una equivalencia), entonces definimos $\lambda = F|q$ isomorfismo de anillos. Para Q_R, hacemos lo mismo, aprovechando que S tiene estructura de ${}_SS_S$ bimódulo podemos considerar su multiplicación por la izquierda $q' : S \to End_S(S_S)$ que es un isomorfismo, y luego a $G| : End_S(S_S) \to End_R(Q_R)$ isomorfimo, entonces definimos para Q_S una multiplicación por la izquierda como $\lambda' = G|q'$ isomorfismo de anillos. Con lo anterior, tenemos que ${}_RP_S$ y ${}_SQ_R$ son bimódulos.

1) y 2) Como R_R es un progenerador y F es una equivalencia, se tiene que $F(R) = P_S$ es un progenerador. En particula P_S es un

generador, y por la versión derecha de [3](14.1(1)) P_S es balanceado y fiel, además $q : R \to End_S(P_S)$ es un isomorfismo, entonces por definición ${}_RP_S$ es balanceado fielmente. Con esto tenemos que ${}_RP_S$ es balanceado fielmente y P_S es progenerador, entonces de las dos vesiones del Lema 1.48 se sigue que ${}_RP$ es progenerador.
De manera similar, obtenemos que ${}_SQ_R$ es balanceado fielmente y Q_R junto con ${}_SQ$ son progeneradores.

4) Sea M_R un R-*módulo* derecho. Entonces tenemos a ϕ un $\mathbb{Z}$-isomorfismo natural en la variable M:

$$\phi : Hom_S(S, F(M)) \to Hom_R({}_SG(S), M) = Hom_R(Q, M)$$

este isomorfismo es un S-isomorfismo (de S-*módulos* derechos) para toda $M \in$**Mod-**R. Luego tenemos S-isomorfismos:

$$F(M) \cong Hom_S(S, F(M)) \cong Hom_R(Q, M)$$

que son naturales en la variable M. Por lo tanto $F \cong Hom_R(Q, \_)$. Para G lo hacemos de la misma manera, es decir, sea N_S un S-*módulo* derecho. Entonces tenemos a θ un $\mathbb{Z}$-isomorfismo natural en la variable N:

$$\theta : Hom_S(P, N) = Hom_S({}_RF(R), N) \to Hom_R(R, G(N))$$

este isomorfismo es un R-isomorfismo (de R-*módulos* derechos) para toda $N \in$**Mod-**S. Entonces se tienen R-isomorfismos:

$$G(N) \cong Hom_R(R, G(N)) \cong Hom_S(P, N)$$

que son naturales en la variable N. Por lo tanto $G \cong Hom_S(P, \_)$.

3) De la condición 4) tenemos los isomorfismos de bimódulos:

$${}_RP_S = {}_R F(R)_S \cong Hom_R({}_SQ, R)$$

y

$${}_SQ_R = {}_S G(S)_R \cong Hom_S({}_RP, S)$$

Ahora por 1), se tiene que $R \cong End_S({}_SQ)$ y $S \cong End_R({}_RP)$, luego aplicando una propiedad básica del $Hom(\_, \_)$ se tiene que:

$${}_RP_S \cong Hom_R(Q, R) \cong Hom_R(Q, Hom_S(Q, Q))$$

$$\cong Hom_S(Q, Hom_R(Q, Q)) \cong Hom_S(Q, S)$$

y

$$ {}_SQ_R \cong Hom_S(P,S) \cong Hom_S(P, Hom_R(P,P)) $$

$$ \cong Hom_R(P, Hom_S(P,P)) \cong Hom_R(P,R) $$

esto es lo que afirmaba 3).

5) Teniendo en cuenta que P es proyectivo y finitamente generado, entonces de la segunda versión de [3](20.11) y lo anterior se tienen los isomorfismos naturales:

$$ F \cong Hom_R(Q, \_) \cong Hom_R(Hom_R({}_RP_S, R), \_) $$

$$ \cong Hom_R(R, \_) \otimes_R P \cong \_ \otimes_R P $$

De manera similar se tiene que:

$$ G \cong Hom_S(P, \_) \cong Hom_S(Hom_S({}_SQ_R, S), \_) $$

$$ \cong Hom_S(S, \_) \otimes_S Q \cong \_ \otimes_S Q $$

y con esto queda demostrado este teorema. ∎

Teorema 1.65 *Sean R y S anillos con funtores aditivos F :**Mod-**$R \rightarrow$**Mod-**S y G :**Mod-**$S \rightarrow$**Mod-**R. Entonces F y G son equivalencias inversas una de la otra si y sólo si existe un bimódulo ${}_RP_S$ tal que:*

1) ${}_RP$ y P_S son progeneradores.

2) ${}_RP_S$ es balanceado.

3) $F \cong (\_ \otimes_R P)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$.

Por otro lado, si existe un ${}_RP_S$ bimódulo que satisface las condiciones 1),2) y 3), entonces con:

$$ Q = Hom_R(P,R) $$

se tiene que ${}_SQ_R$ es un bimódulo tal que ${}_SQ$ y Q_R son progeneradores y

$$ F \cong Hom_R(Q, \_) \quad y \quad G \cong (\_ \otimes_S Q) $$

Demostración: $\Rightarrow$) Se sigue del Teorema 1.64.

$\Leftarrow$) Supongamos que ${}_RP_R$ es un bimódulo que cumple 1) y 2), entonces de 1) se tiene que ${}_RP$ y P_S son fieles, y junto con 2) se sigue que ${}_RP_S$ es balanceado fielmente. Entonces $R \cong End_S(P)$ y $S \cong End_R(P)$. Dados M_R y N_S módulos, tenemos los siguentes isomorfismos naturales:

$$\begin{aligned} Hom_S(P, M \otimes_R P) &\cong M \otimes_R Hom_S(P, P) \\ &\cong M \otimes_R R \cong M \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Hom_S(P, N) \otimes_R P &\cong Hom_S(Hom_R(P, P), N) \\ &\cong Hom_S(S, N) \cong N \end{aligned}$$

Por lo tanto $F \cong (\_ \otimes_R P)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$ son equivalencias inversas una de la otra. ■

Corolario 1.66 *Sean R y S anillos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) S es equivalente Morita a R.

b) Existe un progenerador P_R tal que $S \cong End_R(P_R)$.

c) Existe un progenerador ${}_RQ$ tal que $S \cong End_R({}_RQ)$.

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Por hipótesis existen F :**Mod-**R$\rightarrow$**Mod-**S y G :**Mod-**S$\rightarrow$**Mod-**R equivalencias inversas una da la otra. Sea $P = G(S)$, entonces por el Teorema 1.64 sabemos que ${}_SP_R$ es un bimódulo balanceado fielmente y que P_R es progenerador. Luego $S \cong End_R(P)$.

$b) \Rightarrow a)$ Podemos suponer que $S = End_{P_R}$. Luego como P_R es generador, entonces P_R es balanceado y proyectivo finitamente generado como *S-módulo* izquierdo [3](17.8). Así pues, tenemos que ${}_SP_R$ es balanceado y P_R es proyectivo finitamente generado, entonces ${}_SP$ es generedor por el Lema 1.48. Por lo tanto, ${}_SP_R$ cumple (1) y (2) del Teorema 1.65, con $F = (\_ \otimes_S P)$ y $G = Hom_R({}_SP, \_)$ se sigue que S es equivalente Morita a R.

$a) \Leftrightarrow c)$ Es similar. ■

Capítulo 2

Clases Naturales

Este cápitulo esta dedicado a definir el concepto de clase natural en la categoría **Mod-**R y a probar que dado un anillo R, la colección de todas las clases naturales $\mathcal{N}(R)$ es una retícula booleana. También se verán algunas propiedades básicas de los submódulos tipo de un módulo M que serán de gran utilidad en los capítulos siguientes.

2.1. Los operadores $d(\_)$ y $c(\_)$

Definición 2.1 *Sea R un anillo. Una clase no vacia de R-módulos $\mathcal{K}$ es una clase natural si es cerrada bajo submódulos, copias isomorfas, sumas directas y cápsulas inyectivas. A la colección de todas las clases naturales de R-módulos la denotaremos por $\mathcal{N}(R)$.*

Notemos que la condición, en la definición anterior, de ser cerrada bajo cápsulas inyectivas puede ser sustituida por la condición de ser cerrada bajo extensiones esenciales.

Definición 2.2 *Sea R un anillo. Dada una clase $\mathcal{F}$ no vacia de R-módulos, definimos $d(\mathcal{F})$ y $c(\mathcal{F})$ como sigue:*

$d(\mathcal{F}) = \{N \in \textbf{\textit{Mod-}}R : \forall 0 \neq W \leq N, \exists 0 \neq V \leq W, V \hookrightarrow A \, para \, alg\acute{u}n \, A \in \mathcal{F}\}$
$c(\mathcal{F}) = \{W \in \textbf{\textit{Mod-}}R : \forall 0 \neq V \leq W, V \not\hookrightarrow A \, para \, cada \, A \in \mathcal{F}\}$.

*Cuando $\mathcal{F} = \{H\}$ con $H \in$**Mod-**R, denotaremos $c(\{H\}) = c(H)$ y $d(\{H\}) = d(H)$.*

Observación 2.3 *Sea $\mathcal{F}$ una clase no vacia de R-módulos entonces:*

a) Si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos y copias isomorfas, entonces $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas si y sólo si $\mathcal{F}$ es cerrada bajo extensiones esenciales.

b) $\mathcal{F} \subseteq d(\mathcal{F})$.

c) Si $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ son clases no vacías de R-módulos entonces $d(\mathcal{F}_1) \subseteq d(\mathcal{F}_2)$ y $c(\mathcal{F}_2) \subseteq c(\mathcal{F}_1)$.

Demostración: a) $\Rightarrow$) Sea $0 \neq N \in \mathcal{F}$ y $\sigma : N \hookrightarrow M$ un monomorfismo esencial entonces por la Proposición 1.25 existe $\tau : M \hookrightarrow E(N)$ monomorfismo y como $M \cong \tau(M) \subseteq E(N)$ entonces $M \in \mathcal{F}$, ya que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo submódulos, copias isomorfas y cápsulas inyectivas. $\Leftarrow$) Sea $N \in \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es cerrada bajo extensiones esenciales y $E(N)$ es una extensión esencial de N, entonces $E(N) \in \mathcal{F}$.

b) Sea $0 \neq N \in \mathcal{F}$ y $0 \neq H \leq N$, entonces $H \hookrightarrow N$ y se sigue de la definición de $d(\mathcal{F})$ que $N \in d(\mathcal{F})$.

c) Sea $0 \neq X \in d(\mathcal{F}_1)$ y $0 \neq N \leq X$, entonces existe $0 \neq U \leq N$ tal que $U \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{F}_1$, pero por hipótesis $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ entonces $A \in \mathcal{F}_2$ y por lo tanto $X \in d(\mathcal{F}_2)$. Ahora, sea $0 \neq Y \in c(\mathcal{F}_2)$ y $0 \neq M \leq Y$, entonces $M \not\hookrightarrow A$ para toda $A \in \mathcal{F}_2$, pero como $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, también $M \not\hookrightarrow A$ para toda $A \in \mathcal{F}_1$ y por lo tanto $Y \in c(\mathcal{F}_1)$. ■

Con la siguiente proposición se entenderá la importancia de los operadores $d(\_)$ y $c(\_)$.

Proposición 2.4 *Sea $\mathcal{F}$ una clase no vacia de R-módulos, entonces*

1) $d(\mathcal{F})$, $c(\mathcal{F})$ son clases naturales y $d(\mathcal{F}) \cap c(\mathcal{F}) = \underline{0} = \{\{0\}\}$.

2) Para toda $\mathcal{K} \in \mathcal{N}(R)$, $\mathcal{K} = d(\mathcal{K})$.

3) $c(c(\mathcal{F})) = d(\mathcal{F})$ es la menor clase natural que contiene a $\mathcal{F}$.

Demostración: 1) De la definición de $d(\mathcal{F})$ es inmediato que $d(\mathcal{F})$ es cerrada bajo submódulos y copias isomorfas, sean $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de *R-módulos* con $W_\alpha \in d(\mathcal{F})$ y $0 \neq N \leq \bigoplus_{\alpha\in I} W_\alpha$ entonces por la Proposición 1.40 existe $0 \neq H \leq N$ y $\beta \in I$ tal que $H \cong K \leq W_\beta$, como $W_\beta \in d(\mathcal{F})$ entonces $K \in d(\mathcal{F})$ y por lo tanto $H \in d(\mathcal{F})$, ya que $d(\mathcal{F})$ es cerrada bajo submódulos y copias isomorfas, esto muestra que $\bigoplus_{\alpha\in I} W_\alpha \in d(\mathcal{F})$, ahora probemos que

$d(\mathcal{F})$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, sea $M \in d(\mathcal{F})$ entonces $M \subseteq_e E(M)$, ahora sea $0 \neq N \leq E(M)$ entonces $0 \neq N \cap M \leq M$ y como $M \in d(\mathcal{F})$ existe $0 \neq H \leq N \cap M$ tal que $H \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{F}$ pero $0 \neq H \leq N$, y por lo tanto $E(M) \in d(\mathcal{F})$. De la definición de $c(\mathcal{F})$ es inmediato que $c(\mathcal{F})$ es cerrada bajo submódulos y copias isomorfas, sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de *R-módulos* con $V_\alpha \in c(\mathcal{F})$ para toda $\alpha \in J$ y $0 \neq N \leq \bigoplus_{\alpha \in J} V_\alpha$ supongamos que $N \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{F}$, por la Proposición 1.40 existe $0 \neq G \leq N$ y $\gamma \in J$ tal que $G \cong L \leq V_\gamma$ luego $L \hookrightarrow A$ y por lo tanto $V_\gamma \notin c(\mathcal{F})$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $N \not\hookrightarrow A$ para cada $A \in \mathcal{F}$, es decir $\bigoplus_{\alpha \in J} V_\alpha \in c(\mathcal{F})$, ahora sea $P \in c(\mathcal{F})$, $0 \neq N \leq E(P)$ y supongamos que $N \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{F}$ entonces como $P \subseteq_e E(P)$ tenemos que $0 \neq N \cap P \leq N$, por lo tanto $N \cap P \hookrightarrow A$ y $N \cap P \leq P$ lo cual nos lleva a que $P \notin \mathcal{F}$ que es una contradicción, por lo tanto $N \not\hookrightarrow A$ para cada $A \in \mathcal{F}$, es decir $E(P) \in \mathcal{F}$. Sea $H \in d(\mathcal{F}) \cap c(\mathcal{F})$ y $h \in H$, supongamos que $0 \neq hR$ entonces $0 \neq hR \leq H \in d(\mathcal{F})$ por lo tanto existe $0 \neq K \leq hR$ tal que $K \hookrightarrow A_0$ para alguna $A \in \mathcal{F}$, pero $c(\mathcal{F})$ es cerrada bajo submódulos, entonces $hR \in c(\mathcal{F})$ lo cual implica que $K \not\hookrightarrow A$ para cada $A \in \mathcal{F}$ pero esto es una contradición, por lo tanto $hR = 0$ y $h = 0$.

2) Sea $\mathcal{K} \in \mathcal{N}(R)$. Por la Observación 2.3(b) $\mathcal{K} \subseteq d(\mathcal{K})$, sea $0 \neq M \in d(\mathcal{K})$ y considerese la familia $f = \{\{V_i\}_{i \in I} : V_i \in \mathcal{K}\ para\ toda\ i \in I\ y\ \sum_{i \in I} V_i = \bigoplus_{i \in I} V_i\}$ como un conjunto parcialmente ordenado con la contensión usual. Verifiquemos que f satisface las hipótesis del Lema de Zorn, como $M \in d(\mathcal{K})$ entonces existe $0 \neq H \leq M$ tal que $H \hookrightarrow K$ para alguna $K \in \mathcal{K}$, notamos que $H \in \mathcal{K}$ por ser $\mathcal{K}$ una clase natural y además que $\{H\} \in f$, por lo tanto $f \neq \emptyset$, sea $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \subseteq ...$ una cadena con $\mathcal{C}_n \in f$ para toda $n \in \mathbb{N}$, proponemos a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ como cota superior de la cadena en f. Si $K \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ entonces $K \in \mathcal{C}_j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $K \in \mathcal{K}$, resta probar que $\sum \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n = \bigoplus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, para ello supongamos que $0 = x_1 + x_2 + ... + x_m$ con $x_i \in K_i \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ para toda $i = 1, 2, ..., m$ entonces $K_i \in \mathcal{C}_{k(i)}$ y elegimos $k = max\{k(1), k(2), ..., k(m)\}$, con esto obtenemos que $K_i \in \mathcal{C}_k$ para toda $i = 1, 2, ..., m$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^m K_i = \bigoplus_{i=1}^m K_i$ luego $x_i = 0$ para toda $i = 1, 2, ..., m$. Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un máximo de f entonces $\bigoplus_{\alpha \in J} N_\alpha \subseteq_e M$, de lo contrario existe $0 \neq H \leq M$ tal que $H \cap \bigoplus_{\alpha \in J} N_\alpha = 0$, pero $M \in d(\mathcal{K})$ entonces existe $0 \neq K \leq H$

tal que $K \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{K}$, por lo tanto $K \in \mathcal{K}$ y $\{N_\alpha\}_{\alpha\in J} \cup \{K\} \in f$ contradiciendo el hecho de que $\{N_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es máximo en f. Tenemos entonces que $\bigoplus_{\alpha\in J} N_\alpha \subseteq_e M$ y $\bigoplus_{\alpha\in J} N_\alpha \in \mathcal{K}$ por lo tanto $M \in \mathcal{K}$.

3) $\subseteq$) Sea $0 \neq N \in d(\mathcal{F})$, bastará probar que para cada $0 \neq H \leq N$, $H \not\hookrightarrow X$ para cada $X \in c(\mathcal{F})$, supongamos lo contrario, es decir que existe $0 \neq H \leq N$ tal que $H \hookrightarrow A$ para alguna $A \in c(\mathcal{F})$ entonces $H \in c(\mathcal{F}) \cap d(F) = \overline{0}$ por lo tanto $H = 0$ contradiciendo el hecho de que $H \neq 0$. $\supseteq$) Sea $M \in c(c(\mathcal{F}))$, bastará probar que para cada $0 \neq G \leq M$ existe $0 \neq F \leq G$ tal que $G \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{F}$, supongamos lo contrario, es decir que existe $0 \neq G \leq M$ tal que para todo $0 \neq F \leq G$ se tiene que $F \not\hookrightarrow X$ para toda $X \in \mathcal{F}$, entonces por definición $G \in c(\mathcal{F}) \subseteq d(c(\mathcal{F}))$ y $G \in c(c(\mathcal{F}))$ por lo tanto $G = 0$ lo cual es una contradicción. De la definición de $d(\mathcal{F})$ se tiene que $\mathcal{F} \subseteq d(\mathcal{F})$, supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ con $\mathcal{K}$ una clase natural, entonces $d(\mathcal{F}) \subseteq d(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. ■

Ejemplo 2.5

1) *Dado $M \in$**Mod-**R, definimos $Z(M) = \{x \in M : ann_r(x) \subseteq_e R\}$ el submódulo singular de M. Se dice que un módulo M es singular si $Z(M) = M$, pero si $Z(M) = 0$ diremos que M es no singular. Entonces la clase de módulos $\mathcal{K} = \{N \in$**Mod-**R: $E(N)$ es singular$\}$ es una clase natural.*

2) *Si se tiene un módulo $M \in$**Mod-**R, definimos el soclo de M como $Zoc(M) = \bigcap\{N \leq M : N \subseteq_e M\}$. Luego, se tiene que $\mathcal{K} = \{N \in$**Mod-**R: $Zoc(N) \subseteq_e N\}$ es una clase natural.*

3) *Sea R la extensión trivial de el anillo $\mathbb{Z}$ y el $\mathbb{Z}$-módulo $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i}$ donde $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de los números primos. De manera explícita tenemos que $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z},\ x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i} \right\}$, donde la suma y multiplicación de R son la suma y multiplicación usuales de matrices. Consideremos los siguientes ideales de R:*

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i} \right\},\ J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}_{p_1} \right\}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \bigoplus_{i=2}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i} \right\}$$

Entonces tenemos que $\mathcal{K} = d(K)$ es una clase natural. Lo que se quiere mostrar en este ejemplo es que esta clase no es cerrada bajo cocientes ni bajo productos. Note que, como $K \cap J = 0$ entonces existe $\sigma : K \hookrightarrow R/J$ monomorfismo dado por $\sigma(A) = A + J$ para toda $A \in K$. Se afirma que σ es monomorfismo esencial, sea $0 \neq A + J \in R/J$ con $A = \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix}$ entonces $A \notin J$ y por lo tanto $a \neq 0$ o $0 \neq x_j \in \mathbb{Z}_{p_j}$ para alguna $j \neq 1$, donde $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Supongamos que $a = 0$, proponemos $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} \in R$ y se tiene que $0 \neq AB + J \in \sigma(K)$, ahora supongamos $a \neq 0$, entonces podemos encontrar p_k un número primo tal que p_k no divide al número a y $k \neq 1$. En este caso proponemos $B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$, donde $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es tal que $y_i = 0$ para toda $i \neq k$ y $y_k = 1$, entonces $0 \neq AB + J \in \sigma(K)$. Por lo tanto σ es un monomorfismo esencial, y así se tiene que $R/J \in \mathcal{K}$. Ahora consideremos $0 \neq I/J \leq R/J$ entonces se tiene que el cociente $(R/J)/(I/J) \cong R/I$ no es un elemento de $\mathcal{K}$.

Por último, sean $I_i = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in p_i\mathbb{Z},\ x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i} \right\}$ ideales de R para cada $i \geq 2$. Entonces, se tienen $R/I_i \in \mathcal{K}$ y un epimorfismo $\tau : R \to \prod_{i \geq 2} R/I_i$ dado por $\pi_i\tau(A) = A + I_i$ donde $\pi_i : R \to R/I_i$ es la i-ésima proyección. Notemos que $Nuc(\tau) = I$ y por lo tanto $\prod_{2 \leq i} R/I_i \cong R/I \notin \mathcal{K}$.

2.2. La estructura de retícula de $\mathcal{N}(R)$

Definición 2.6 *Sea R un anillo y $\mathcal{F}$ una clase no vacia de R-módulos. Entonces para un R-módulo M definimos:*

$$H_{\mathcal{F}}(M) = \{N \leq M : M/N \in \mathcal{F}\}$$

.

Dado un anillo R, denotamos $L(R) = \{I \leq R : I \text{ es ideal derecho de } R\}$ al conjunto de ideales derechos de R.

Proposición 2.7 *Sea R un anillo. Entonces $\mathcal{N}(R)$ es un conjunto.*

Demostración: Bastará probar que la asignación $\mathcal{K} \longmapsto H_{\mathcal{K}}(R)$ que va de $\mathcal{N}(R)$ a $\mathcal{P}(L(R))$ es inyectiva. Sean $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2 \in \mathcal{N}(R)$ distintas, entonces podemos encontrar $H \in \mathcal{K}_1$ tal que $H \notin \mathcal{K}_2$ (el otro caso es análogo). Consideramos la familia $f = \{N \leq H : N \in \mathcal{K}_2\}$ como conjunto parcialmente ordenado con la conteción usual y verifiquemos que f satisface las hipótesis del Lema de Zorn. La familia f es no vacía pues $\{0\} \in f$, ahora sea $N_1 \subseteq N_2 \subseteq ...$ una cadena con $N_i \in f$ para toda $i \in \mathbb{N}$, proponemos $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$ una cota superior en f para la cadena, solo resta verificar que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \in \mathcal{K}_2 = d(\mathcal{K}_2)$ y para esto sea $0 \neq X \leq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i$ y $0 \neq x \in X$, entonces $x \in N_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$ y $0 \neq xR \leq N_j$ por lo tanto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i \in d(\mathcal{K}_2) = \mathcal{K}_2$. Sea G un elemento máximo de f, entonces $G \not\subseteq_e H$ de lo contrario $H \in \mathcal{K}_2$ debido a que $\mathcal{K}_2$ es cerrada bajo extensiones esenciales, pero esto contradice el hecho de que $H \notin \mathcal{K}_2$. Entonces podemos encontrar $0 \neq H_0 \leq H$ tal que $H_0 \cap G = 0$, sea $0 \neq h \in H_0$ entonces $hR \notin \mathcal{K}_2$ ya que de lo contrario $hR \oplus G \in \mathcal{K}_2$ contradiciendo el hecho de que G es máximo en f. Con $R/ann(h) \cong hR \in \mathcal{K}_1$ se tiene que $ann(h) \in H_{\mathcal{K}_1}(R)$ pero $ann(h) \notin H_{\mathcal{K}_2}(R)$ es decir $H_{\mathcal{K}_1}(R) \neq H_{\mathcal{K}_2}(R)$. ■

Ahora vamos a considerar $\mathcal{N}(R)$ como un conjunto parcialmaete ordenado con el orden parcial $\mathcal{K}_1 \leq \mathcal{K}_2$ si y sólo si $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$. Con lo que resta de la sección nos daremos cuenta que $\mathcal{N}(R)$ es más que un conjunto parcialmente ordenado.

Lema 2.8 *Sea R un anillo y $\{\mathcal{K}_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{N}(R)$ un conjunto de clases naturales. Entonces:*

1) $\bigcap_{j\in J} \mathcal{K}_j$ es una clase natural.

2) $d(\bigcup_{j\in J} \mathcal{K}_j)$ es la menor clase natural que contiene a $\mathcal{K}_j$ para toda $j \in J$.

Demostración: 1) Sea $M \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{K}_j$ con $N \leq M$, $M \cong M'$ y $M \subseteq_e E(M)$. Sea $i \in J$ entonces $M \in \mathcal{K}_i$ que es clase natural, entonces $N \in \mathcal{K}_i$, $M' \in \mathcal{K}_i$ y $E(M) \in \mathcal{K}_i$ y por lo tanto $N, M', E(M) \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{K}_j$. Sea $\{H_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de R-*modulos* contenida en $\bigcap_{j\in J}\mathcal{K}_j$ y $i\in J$, entonces $H_\alpha\in K_i$ para toda $\alpha\in I$, por lo tanto $\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha\in\mathcal{K}_i$ lo cual nos lleva a que $\bigoplus_{\alpha\in I} H_\alpha\in\bigcap_{j\in J}\mathcal{K}_j$.

2) Como $\bigcup_{j\in J}\mathcal{K}_j$ es una clase de *R-módulos* la condición 2) se sigue de la Proposición 2.4(3). ■

Proposición 2.9 *Sea R un anillo. Entonces $\mathcal{N}(R)$ es una retícula completa con elemento menor y elemento mayor.*

Demostración: Los elementos mayor y menor de $\mathcal{N}(R)$ son $\overline{1}=$**Mod-**R y $\underline{0}=\{\{0\}\}$. Dado un subconjunto $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{N}(R)$ por el Lema 2.8 se tiene que $\bigvee\mathcal{S}=d(\bigcup_{\mathcal{K}\in\mathcal{S}}\mathcal{K})$ y $\bigwedge\mathcal{S}=\bigcap_{\mathcal{K}\in\mathcal{S}}\mathcal{K}$. ■

En lo que resta de la sección necesitaremos el concepto de submódulo tipo, y esto con el fin de hacer mas claras las demostraciones.

Definición 2.10 *Sean N_1 y N_2 R-módulos. Diremos que N_1 es ortogonal a N_2 si para todo $0\neq V\leq N_1$ se tiene que $V\not\hookrightarrow N_2$ es decir N_1 y N_2 no comparten submódulos isomorfos, en tal caso denotamos como $N_1\perp N_2$. Por otro lado, diremos que N_1 y N_2 son paralelos si no existe $0\neq V_2\leq N_2$ tal que $V_2\perp N_1$ y también no existe $0\neq V_1\leq N_1$ tal que $V_1\perp N_2$, en tal caso denotamos $N_1\parallel N_2$.*

La siguiente observación se sigue de la Definición 2.10.

Observación 2.11 *Sean H y K R-módulos. Entonces:*

a) $H\parallel K$ si y sólo si $d(H)=d(K)$.

b) $H\perp K$ si y sólo si $d(H)\subseteq c(K)$.

Definición 2.12 *Sea R un anillo y M un R-módulo con $N\leq M$. Decimos que N es un submódulo tipo de M, que lo denotamos como $N\leq_t M$, si existe una clase natural $\mathcal{K}$ tal que $N\in\mathcal{K}$ y si $N\subseteq P\leq M$ con $P\in\mathcal{K}$ entonces $P=N$. En tal caso, diremos que N es submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$.*

Proposición 2.13 *Sea $N\in$ **Mod-**R y $P\leq N$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) Si $P\leq Y\leq N$ y $P\parallel Y$, entonces $P=Y$.

2) Si $P \subset Y \subseteq N$, entonces $P \perp X$ para algún $0 \neq X \subseteq Y$.

3) P es un submódulo pseudocomplemento de N tal que $P \oplus D \subseteq_e N$ y $P \perp D$ para algún $D \subseteq N$.

4) P es submódulo tipo de N de tipo $\mathcal{K}$ para alguna clase natural $\mathcal{K}$.

Demostración: 1) $\Rrightarrow$ 2) Sea $P \subset Y \leq N$ entonces por la condición 1) P no es paralelo a Y, por lo tanto existe $0 \neq X \leq Y$ tal que $X \perp P$.

2) $\Rrightarrow$ 1) Supongamos que $P \subseteq Y \leq N$ tal que $P \parallel Y$, si $P \subset Y$ entonces por la condición 2) existe $0 \neq X \leq Y$ tal que $X \perp P$ pero esto contradice el hecho de que P es paralelo a Y. Por lo tanto $P = Y$.

1) $\Rrightarrow$ 3) Notemos que P no tiene extensiones esenciales en N, ya que si suponemos que $P \subseteq_e H \leq N$ entonces $P \parallel H$ y por 1) $H = P$, luego por la Proposición 1.21 P es un submódulo pseudocomplemento de N y podemos encontrar un submódulo $D \leq N$ tal que P es un pseudocomplemento de D en N, como $D \oplus P \subseteq_e N$ bastará probar que $P \perp D$. Supongamos que P no es ortogonal a D, entonces existe $0 \neq X \leq D$ tal que $X \hookrightarrow P$, luego notamos que $P \parallel P \oplus X$, pues dado $0 \neq V_2 \leq P \oplus X$ por la Proposición 1.40 existe $0 \neq K \leq V_2$ tal que $K \hookrightarrow P$ o $K \hookrightarrow X$, en cualquier caso podemos concluir que $K \hookrightarrow P$ y por lo tanto P no es ortogonal a V_2. Con esto último y hipótesis se tiene que $P = P \oplus X$, y esto ocurre solamente cuando $X = 0$ lo cual contradice el hecho de que $X \neq 0$, por lo tanto $P \perp D$.

3) $\Rrightarrow$ 4) Considerese la clase natural $\mathcal{K} = d(P)$ luego es claro que $P \in \mathcal{K}$. Supongamos que se tiene $P \subset Y \leq N$ tal que $Y \in \mathcal{K}$, como P es un submódulo pseudocomplemento de N entonces P es esencialmente cerrado y por lo tanto podemos encontrar $0 \neq V \leq Y$ tal que $V \cap P = 0$, así pues bajo la proyección $V \cong (V \oplus P)/P \hookrightarrow N/P$. Luego consideramos $D \leq N$ como en la condición 3) y P' un pseudocomplemento de D relativo a P en N, entonces $P \subseteq_e P'$ y por lo tanto $P = P'$, así pues tenemos que P resulta ser un pseudocomplemento de D en N y por la Proposición 1.19 $D \cong (D \oplus P)/P \subseteq_e N/P$, entonces existe $0 \neq W \leq V$ tal que $W \hookrightarrow D$. Como $W \leq Y \in \mathcal{K}$ entonces $W \in d(P)$ lo cual nos lleva a que podemos encontrar un submódulo $0 \neq U \leq W$ tal que $U \hookrightarrow P$ y

además $U \hookrightarrow D$ pero esto contradice el hecho de que $P \perp D$, por lo tanto P es submódulo tipo de N de tipo $\mathcal{K}$.

4) $\mapsto$ 2) Notemos que P es un submódulo pseudocomplemento, ya que si $P \subseteq_e P' \leq N$ entonces $P' \in \mathcal{K}$ y como $P \leq_t N$ se tiene que $P = P'$. Supongamos que $P \subset Y \leq N$, entonces existe $0 \neq X \leq Y$ tal que $P \cap X = 0$, bastará probar que $X \perp P$. Si X no es ortogonal a P entonces podemos encontrar $0 \neq V \leq X$ tal que $V \hookrightarrow P$ y por lo tanto $V \in \mathcal{K}$, luego se tiene que $P \oplus V \in \mathcal{K}$ pero esto contradice que $P \leq_t N$. ∎

Observación 2.14 *Sea M un R-módulo y $\mathcal{K}$ un clase natural. Si K es un submódulo de M y $K \in \mathcal{K}$ entonces podemos encontrar N submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$ tal que $K \subseteq N$.*

Demostración: Considerese la familia $f = \{H \leq M : \ K \leq H \in d(\mathcal{K}) = \mathcal{K}\}$, notemos que $\emptyset \neq f$ pues $K \in f$ y que si tenemos $H_1 \subseteq H_2 \subseteq ...$ una cadena con $H_i \in f$ para toda $i \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i \in f$, ya que si se da un submódulo $0 \neq H \leq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i$ entonces con $0 \neq x \in H$ se tiene que $0 \neq xR \leq H_j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$, pero $H_j \in d(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ por lo tanto existe $0 \neq V \leq H \leq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i$ tal que $V \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{K}$ ($V = xR$ y $A = H_j$) lo cual nos lleva a que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i \in d(\mathcal{K})$. Así pues se tiene que f satisface las hipótesis del lema de Zorn y con N un elemento máximo de f se sigue que N es un submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$. ∎

Lema 2.15 *Sea R un anillo. Entonces para cada clase $\mathcal{F}$ de R-módulos se tiene que $d(\mathcal{F}) \wedge c(\mathcal{F}) = \underline{0}$ y $d(\mathcal{F}) \vee c(\mathcal{F}) = \overline{1}$.*

Demostración: Es claro que $d(\mathcal{F}) \wedge c(\mathcal{F}) = d(\mathcal{F}) \cap c(\mathcal{F}) = \underline{0}$. Sea $M \in \overline{1} =$**Mod-**R, $N_1 \leq_t M$ de tipo $d(\mathcal{F})$ y sea N_2 un pseudocomplemento de N_1 en M, notemos que N_2 es un submódulo tipo de M de tipo $c(\mathcal{F})$, ya que si $N_2 \notin c(\mathcal{F})$ entonces existe $0 \neq K \leq N_2$ tal que $K \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{F}$, luego $K \in d(\mathcal{F})$ y por lo tanto $N_1 \oplus K \in d(\mathcal{F})$, pero esto contradice que $N_1 \leq_t M$, por otro lado si $N_2 \subsetneq G \leq M$ entonces $0 \neq N_1 \cap G \leq N_1 \in d(\mathcal{F})$ es decir G tiene un submódulo no cero que pertenece a la clase natural $d(\mathcal{F})$, ahora si suponemos que $G \in c(\mathcal{F})$ entonces $0 \neq N_1 \cap G \in d(\mathcal{F}) \cap c(\mathcal{F}) = \underline{0}$ y esto es una contradición, así pues $G \notin c(\mathcal{F})$ y por lo tanto N_2 es un submódulo de M máximo respecto a la propiedad de pertenecer a $c(\mathcal{F})$. Como

N_1, $N_2 \in d(\mathcal{F}) \vee c(\mathcal{F})$ entoces $N_1 \oplus N_2 \in d(\mathcal{F}) \vee c(\mathcal{F})$ pero sabemos que $N_1 \oplus N_2 \subseteq_e M$ y como $d(\mathcal{F}) \vee c(\mathcal{F})$ es cerrada bajo extensiones esenciales, entonces $M \in d(\mathcal{F}) \vee c(\mathcal{F})$. ■

Lema 2.16 *Sean $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{H} \in \mathcal{N}(R)$, entonces $\mathcal{K} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{H}) = (\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H})$.*

Demostración: Primero veamos que $(\mathcal{K}\wedge\mathcal{L})\vee(\mathcal{K}\wedge\mathcal{H}) \leq \mathcal{K}\wedge(\mathcal{L}\vee\mathcal{H})$, para esto notemos que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L} \vee \mathcal{H}$ son cotas superiores del conjunto $\{(\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}), (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H})\}$ y entonces $(\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H}) \leq \mathcal{K}$ y $(\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H}) \leq (\mathcal{L} \vee \mathcal{H})$ por las propiedades de ser supremo, por lo tanto $(\mathcal{K}\wedge\mathcal{L})\vee(\mathcal{K}\wedge\mathcal{H}) \leq \mathcal{K}\wedge(\mathcal{L}\vee\mathcal{H})$ por las propiedades de ser ínfimo. Por último verifiquemos que $\mathcal{K} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{H}) \leq (\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H})$, sea $M \in \mathcal{K} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{H})$ con $L \leq_t M$ de tipo $\mathcal{L}$ y H un pseudocomplemento de L en M. Como $H \cap L = 0$ entonces $H \perp L$ y H no tiene submódulos distintos de cero que pertenescan a la clase $\mathcal{L}$ por el Lema 3.1(c). Como $H \leq M \in \mathcal{K} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{H})$ entonces $H \in \mathcal{L} \vee \mathcal{H} = d(\mathcal{L} \cup \mathcal{H})$ por lo tanto cada submódulo distinto de cero de H contiene un submódulo distinto de cero que pertenece a la clase $\mathcal{L} \cup \mathcal{H}$, pero H no contiene submódulos distintos de cero que pertenezcan a la clase $\mathcal{L}$, por lo tanto cada submódulo distinto de cero de H contiene un submódulo distinto de cero que pertenece a la clase $\mathcal{H}$ es decir $H \in d(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Con esto último, $L \in (\mathcal{K} \wedge \mathcal{L})$ y $H \in (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H})$, entonces $L \oplus H \in (\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H})$, así $M \in (\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{H})$ ya que $L \oplus H \subseteq_e M$. ■

Corolario 2.17 *Sea R un anillo. Entonces $\mathcal{N}(R)$ es una retícula Booleana completa.*

Ejemplo 2.18

1) Sea R un anillo artiniano, entonces $\mathcal{N}(R)$ es una retícula finita.

Capítulo 3

Submódulos tipo y Dimensión tipo

En este capítulo desarrollamos propiedades útiles que tienen los submódulos tipo de un módulo, la noción de dimensión tipo de un módulo y al final se introducen los *TS-módulos*.

3.1. Submódulos tipo

Como vimos en el capítulo anterior, un submódulo tipo de un *R-módulo* M es un submódulo N de M tal que es máximo con la propiedad de pertenecer a alguna clase natural. En esta sección se darán propiedades de estos submódulos y veremos los conceptos de pseudocomplemento de tipo y cerradura tipo.

Lema 3.1 *Sea M un R-módulo con N y P submódulos de M. Entonces:*

a) Si $N \leq_t M$, entonces N es de tipo $d(N)$.

b) Si $P \leq_t M$ y $P \subseteq N$, entonces $P \leq_t N$.

c) Si $N \leq_t M$. Entonces $N \cap P = 0$ si y sólo si $N \perp P$.

d) Si $N \leq_t M$ y $N \subseteq_e P \subseteq M$, entonces $N = P$.

e) Si $N \perp P$ y $N \oplus P \subseteq_e M$, entonces cada pseudocomplemento X de N relativo a P en M es un submódulo tipo de M.

f) Si $N \leq_t M$ y P es pseudocomplemento de N en M, entonces $P \leq_t M$.

g) *Sea* $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ *con* $X_i \leq_t M$. *Entonces cada cerradura esencial* $\overline{X}$ *de* X *en* M *es un submódulo tipo de* M.

h) *Si* $P \leq_t N \leq_t M$, *entonces* $P \leq_t M$.

Demostración: a) Es claro que $N \in d(N)$, ahora supongamos que $N' \in d(N)$ y $N \subseteq N'$ entonces $N \parallel N'$ y por la Proposición 2.13(1) $N = N'$.

b) Supongamos que P es submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$ para alguna clase natural $\mathcal{K}$, sea $P' \leq N$ tal que $P \subseteq P' \in \mathcal{K}$ entonces $P' \leq M$ y como P es submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$, entonces $P = P'$ y por lo tanto $P' \leq_t N$ de tipo $\mathcal{K}$.

c) Supongamos que N es submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$ para alguna $\mathcal{K}$ clase natural y $N \cap P = 0$. Si $N \not\perp P$ entonces existen $0 \neq V_1 \leq N$ y $0 \neq V_2 \leq P$ tales que $V_1 \cong V_2$, luego $V_2 \in \mathcal{K}$ y $V_2 \cap N = 0$ por lo tanto $V_2 \oplus N \in \mathcal{K}$, pero esto contradice el hecho de que N es submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$, por lo tanto $N \perp P$. El reciproco es evidente.

d) Supongamos que N es submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$ para alguna clase natural $\mathcal{K}$ y que $N \subseteq_e P \leq M$ entonces $P \in \mathcal{K}$, ya que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo extensiones esenciales, pero por hipótesis $N \leq_t M$ de tipo $\mathcal{K}$ y por lo tanto $P = N$.

e) Sea X un pseudocomplemento de N relativo a P en M, notemos que $P \subseteq_e X$ ya que dado $0 \neq x \in X$ por hipótesis existe $r \in R$ tal que $0 \neq xr \in N \oplus P$, entonces $xr = n + p$ donde $n \in N$ y $p \in P$ luego $n = xr - p \in X$ y por lo tanto $n \in N \cap X = 0$ asi $0 \neq xr \in P$. Ahora para demostrar que $X \leq_t M$ usaremos la Proposición 2.13(2) sea $X \subset Y \leq M$ entonces $0 \neq N \cap Y \leq Y$. Bastará probar que $N \cap Y \perp X$, notemos que $0 \neq N \cap Y \leq N$ y $N \perp X$ entonces $N \cap Y \perp X$ y por lo tanto $X \leq_t M$.

f) Sea $N \leq_t M$ y P un pseudocomplemento de N en M, entonces por c) $N \perp P$, además $N \oplus P \subseteq_e M$ y P es un pseudocomplemento de N relativo a P en M, por e) $P \leq_t M$.

g) Sea $\overline{X}$ una cerradura esencial de X en M y consideremos Y un pseudocomplemento de $\overline{X}$ en M. Si $Y = 0$ entonces $\overline{X} \subseteq_e M$ y por lo tanto $\overline{X} = M \leq_t M$. Si $Y \neq 0$ entonces se tiene que $Y \cap X_i = 0$ para toda $i \in I$ y por c) $Y \perp X_i$ para toda $i \in I$. Luego se afirma que $\overline{X} \perp Y$, si $\overline{X} \not\perp Y$ entonces existen $0 \neq V_1 \leq \overline{X}$ y $0 \neq V_2 \leq Y$ tales que $V_1 \cong V_2$, luego de la Proposición 1.25 se tiene que $0 \neq V_2 \cong V_1 \leq \overline{X} \hookrightarrow E(X)$, entonces podemos encontrar

$0 \neq W \leq E(X)$ tal que $V_2 \cong W$ pero por la Proposición 1.40 podemos encontrar, para alguna $j \in I$, $0 \neq U \leq W \cong V_2 \leq Y$ y $0 \neq U_j \leq X_j$ tales que $U \cong U_j$, pero esto contradice el hecho de que $Y \perp X_j$ y por lo tanto $Y \perp \overline{X}$. Sea K un pseudocomplemento de Y relativo a $\overline{X}$ en M y por $e)$ $K \leq_t M$, bastará probar que $\overline{X} = K$. Note que $\overline{X} \subseteq_e K$, ya que si $0 \neq k \in K$ entonces exite $r \in R$ tal que $0 \neq kr \in \overline{X} \oplus Y$, luego $kr = \overline{x} + y$ donde $\overline{x} \in \overline{X}$ y $y \in Y$ entonces $y = kr - \overline{x} \in K$ y por lo tanto $y \in Y \cap K = 0$, así $0 \neq kr \in \overline{X}$. Como $\overline{X}$ es una cerradura esencial de X en M entonces $\overline{X} = K$.

h) Para demostrar que P es submódulo tipo de M, usaremos la Proposición 2.13(3). Sea P' un pseudocomplemento de P en N y N' un pseudocomplemento de N en M, entonces tenemos que $P \oplus P' \subseteq_e N$ y $N' \oplus N \subseteq_e M$ y por lo tanto $P \oplus P' \oplus N' \subseteq_e M$. Afirmamos que $P \perp (P' \oplus N')$, primero notamos que $P \perp P'$ y como $N \perp N'$ entonces $P \perp N'$, ahora supongamos que P y $P' \oplus N'$ no son ortogonales, entonces existen $0 \neq V_1 \leq P$ y $0 \neq V_2 \leq P' \oplus N'$ tales que $V_1 \cong V_2$ y por la Proposición 1.40 podemos encontrar $0 \neq W_2 \leq V_2$ tal que $W_2 \hookrightarrow P'$ o $W_2 \hookrightarrow N'$ pero $W_2 \cong W_1 \leq V_1 \subset P$, lo cual implica que P no es ortogonal a P' o P no es ortogonal a N' lo cual es una contradicción. Por último notemos que por el inciso d) P es esencialmente cerrado en N y N es esencialmente cerrado en M y por la Proposición 1.22 P es un submódulo pseudocomplemento de M. ■

Definición 3.2 *Sea R un anillo, M un R-módulo y N, T submódulos de M tales que $T \perp N$. Una cerradura tipo de N en M es un submódulo tipo $\overline{N}^t \leq_t M$ tal que $N \leq \overline{N}^t$ y si $N \leq H \leq \overline{N}^t$ con $H \leq_t M$ entonces $H = \overline{N}^t$. Un pseudocomplemento de tipo de N en M relativo a T es un submódulo tipo $N^* \leq_t M$ tal que $T \subseteq N^*$, $N \cap N^* = 0$ y si $N \cap K = 0$ con $N^* \subseteq K \leq_t M$ entonces $K = N^*$. Un pseudocomplemento de tipo de N en M es un pseudocomplemento de tipo de N en M relativo a $\{0\}$.*

Proposición 3.3 *Sea $M \in$**Mod-**R con N y T submódulos de M tales que $T \perp N$. Entonces:*

a) N tiene al menos una cerradura tipo $\overline{N}^t$ en M.

b) N tiene al menos un pseudocomplemento de tipo N^* en M relativo a T.

Demostración: a) Consideremos la familia $f = \{Y \leq M : N \subseteq Y \text{ y } N \parallel Y\}$ como un conjunto parcialmente ordenado con el orden de la contención usual y verifiquemos que cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Notemos que $f \neq \emptyset$ pues $N \in f$, ahora sea $H_1 \subseteq H_2 \subseteq ...$ una cadena de elementos en f y supongamos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i \notin f$, entonces existe $0 \neq V \leq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i$ tal que $V \perp N$, luego sea $0 \neq v \in V$ entonces $v \in H_j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$ y con esto obtenemos que $N \perp vR$ con $0 \neq vR \leq H_j$ pero esto contradice que $H_j \parallel N$, por lo tanto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i \in f$. Sea H un elemento máximo en f entonces de la Proposición 2.13(1) $H \leq_t M$, sea $N \subseteq H_0 \leq_t M$ tal que $H_0 \subseteq H$ entonces se afirma que $H_0 \parallel H$, supongamos que $H_0 \nparallel H$ entonces existe $0 \neq U \leq H$ tal que $U \perp H_0$ y por lo tanto $U \perp N$ pero esto contradice que $N \parallel H$, por lo tanto $H_0 \parallel H$ y por la Proposición 2.13(1) se debe tener que $H_0 = H$. Así $\overline{N}^t = H$ es una cerradura tipo de N en M.

b) Consideremos $g = \{X \leq M : X \perp N \text{ y } T \subseteq X\}$ como un conjunto parcialmente ordenado con el orden de la contención usual y veamos que cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Por hipótesis $T \perp N$ y por lo tanto $T \in g$ con esto aseguramos que $g \neq \emptyset$, sea $K_1 \subseteq K_2 \subseteq ...$ una cadena de elementos en g entonces se afirma que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i \in g$, supongamos lo contrario, es decir que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i \notin g$ entonces podemos encontrar $0 \neq V_1 \leq N$ y $0 \neq V_2 \leq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ tal que $V_1 \cong V_2$, sea $0 \neq v_2 \in V_2$ entonces $v_2R \subseteq K_j$ para alguna $j \in \mathbb{N}$, ahora notemos que $0 \neq v_2R \hookrightarrow V_1 \leq N$ lo cual nos lleva a que K_j y N no son ortogonales, contradiciendo el hecho de que K_j es un elemento de g. Por lo tanto g cumple la hipótesis del Lema de Zorn, y con esto podemos encontrar un elemento K máximo en g. Vamos a demostrar que K es submódulo tipo de M y para ello usaremos la Proposición 2.13(2), sea $K \subset K' \leq M$ entonces $K' \notin g$ y por lo tanto N y K' no son ortogonales, así podemos encontrar $0 \neq W_1 \leq N$ y $0 \neq W_2 \leq K'$ tal que $W_1 \cong W_2$. Se afirma que $W_2 \perp K$, de lo contrario podemos encontrar $0 \neq W_3 \leq K$ tal que $W_3 \hookrightarrow W_2 \cong W_1 \subseteq N$ lo cual nos lleva a que N y K no son ortogonales contradicendo que $K \in g$, por lo tanto $K \leq_t M$. Por último sea $L \leq_t M$ tal que $L \cap N = 0$ y $K \subseteq L$, por el Lema 3.1(c) $L \perp N$ y como K es máximo en g entonces $L = K$. Así $K = N^*$ es un pseudocomplemento de tipo de N en M relativo a T. ■

Proposición 3.4 *Sea $M \in$***Mod-***R y N un submódulo de M. Entonces:*

a) *$\overline{N}^t$ es una cerradura tipo de N en M si y sólo si $\overline{N}^t$ es máximo con respecto a la propiedad de $N \parallel \overline{N}^t$.*

b) *N^* es un pseudocomplemento de tipo de N en M si y sólo si N^* es máximo con la propiedad de $N \perp N^*$.*

c) *Cualesquiera $\overline{N}^t$ y N^* cerradura tipo y pseudocomplemento de tipo de N en M son pseudocomplementos entre sí y por lo tanto $\overline{N}^t \oplus N^* \subseteq_e M$.*

Demostración: a) Supongamos que $\overline{N}^t$ es una cerradura tipo de N en M y sea $\overline{N}^t \subseteq H \leq M$ tal que $N \parallel H$, se afirma que $\overline{N}^t \parallel H$, de lo contrario podemos encontrar $0 \neq A \leq H$ tal que $\overline{N}^t \perp A$ y por lo tanto $A \perp N$ lo cual es una contradicción ya que N y H son paralelos, luego se sigue de la Proposición 2.13(1) que $\overline{N}^t = H$. Ahora supongamos que $\overline{N}^t$ es máximo con la propiedad de ser paralelo a N entonces de la Proposición 2.13(1) se tiene que $\overline{N}^t$ es submódulo tipo de M, sea $T \leq_t M$ tal que $N \subseteq T \subseteq \overline{N}^t$ entonces afirmamos que $T \parallel \overline{N}^t$, de lo contrario podemos encontrar $0 \neq B \leq \overline{N}^t$ tal que $T \perp B$ y por lo tanto $N \perp B$ pero esto es una contradicción pues $N \parallel \overline{N}^t$, luego de la Proposición 2.13(1) $T = \overline{N}^t$.

b) Supongamos que N^* es un pseudocomplemento de tipo de N en M entonces $N \cap N^* = 0$ y por el Lema 3.1(c) $N \perp N^*$, sea $V \leq M$ tal que $N \perp V$ y $N^* \subseteq V$ entonces por la Proposición 3.3(b) podemos encontrar K un pseudocomplemento de tipo de N en M relativo a V, por lo tanto $N^* \subseteq K$ y de la Definición 3.2 se tiene que $N^* \leq V \leq K = N^*$. Si N^* es máximo con la propiedad de ser ortogonal a N, tenemos que de la demostración de la Proposición 3.3(b) con $T = 0$, N^* es un pseudocomplemento de tipo de N en M.

■

Definición 3.5 *Sea R un anillo y $0 \neq M$ un R-módulo. Decimos que M es atómico si $d(M)$ es un átomo en $\mathcal{N}(R)$.*

Proposición 3.6 *Sea $0 \neq M$ un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *M es atómico.*

b) *Para cualesquiera $0 \neq H \leq M$ y $0 \neq K \leq M$ existen $0 \neq H_1 \leq H$ y $0 \neq K_1 \leq K$ tales que $H_1 \cong K_1$.*

c) *Si $N \leq_t M$ entonces $N = 0$ o $N = M$.*

Demostración: $a) \Rightarrow b)$ Sean $0 \neq H \leq M$ y $0 \neq K \leq M$ entonces $d(H) \subseteq d(M)$, por hipótesis $d(M)$ es un átomo en $\mathcal{N}(R)$ y por lo tanto $K \in d(M) = d(H)$, luego existe $0 \neq K_1 \leq K$ tal que $K_1 \hookrightarrow H$.

$b) \Rightarrow c)$ Sea $0 \neq N \leq_t M$ y supongamos que N no es esencial en M entonces existe $0 \neq V \leq M$ tal que $N \cap V = 0$ y por lo tanto $N \perp V$, luego por $b)$ existen $0 \neq N_1 \leq N$ y $0 \neq V_1 \leq V$ tales que $N_1 \cong V_1$ pero esto contradice que N y V son ortogonales. Por lo tanto $N \subseteq_e M$ y por el Lema 3.1(d) $N = M$.

$c) \Rightarrow a)$ Supongamos que $d(H) \subseteq d(M)$ con $H \neq 0$, luego $H \in d(M)$ entonces existe $0 \neq U \leq H$ tal que $U \cong V \subseteq M$, ahora por la Observación 2.14 existe N submódulo tipo de M de tipo $d(H)$ tal que $V \subseteq N$, pero $0 \neq V$ entonces $0 \neq N \leq_t M$ y por $c)$ $N = M$. Con esto se tiene que $M \in d(H)$ y por lo tanto $d(M) \subseteq d(H) \subseteq d(M)$. ■

Ejemplo 3.7

1) *Si $U \in$**Mod-**R es uniforme entonces U es atómico.*

3) *En **Mod-**$\mathbb{Z}$, tenemos que $\mathbb{Q}$ es atómico y $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es atómico para todo p número primo.*

3.2. Dimensión tipo

Definición 3.8 *Sea R un anillo. Diremos que $\{N_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de R-módulos es ortogonal por pares si $N_\beta \perp N_\gamma$ para toda $\beta \neq \gamma$.*

Lema 3.9 *Sean M un R-módulo y $A_1, A_2, ..., A_n \leq M$ submódulos atómicos de M y ortogonales por pares tales que $A_1 \oplus ... \oplus A_n \subseteq_e M$. Si $N_1, N_2, ..., N_m \leq M$ son ortogonales por pares entonces $m \leq n$.*

Demostración: De la hipótesis tenemos que $\bigoplus_{i=1}^n A_i \subseteq_e M$, así $N_1 \cap \bigoplus_{i=1}^n A_i \neq 0$ y por la Proposición 1.40 podemos encontrar $0 \neq B_1 \leq N_1$ y $0 \neq V_{i_1} \leq A_{i_1}$ tal que $B_1 \cong V_{i_1}$ para alguna $i_1 \in \{1, 2, ..., n\}$, ahora consideramos que $N_2 \cap \bigoplus_{i=1}^n A_i \neq 0$ y entonces por la Proposición 1.40 podemos encontrar $0 \neq B_2 \leq N_2$ y $0 \neq V_{i_2} \leq N_{i_2}$ tales que $B_2 \cong V_{i_2}$ para alguna $i_2 \in \{1, ..., n\}$, si continuamos de este modo tenemos que para cada $k \in \{1, 2, ..., m\}$ encontramos $0 \neq B_k \leq N_k$ y $0 \neq V_{i_k} \leq A_{i_k}$ tales que $B_k \cong V_{i_k}$, notemos que $d(V_{i_k}) = d(A_{i_k})$ para toda $k \in \{1, 2, ..., m\}$ ya que A_{i_k} es atómico. Se afirma que la función $f : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ dada por $f(k) = i_k$ es inyectiva, supongamos que $f(k) = f(j)$ con $k \neq j \in \{1, ..., m\}$, entonces tenemos que $0 \neq V_{i_k} \leq A_{i_k}$ y $0 \neq V_{i_j} \leq A_{i_j} = A_{i_k}$ son dos submódulos tales que $d(V_{i_k}) = d(A_{i_k}) = d(V_{i_j})$ y por la Observación 2.11 se tiene que $V_{i_k} \parallel V_{i_j}$ lo cual implica que $B_k \parallel B_j$ pero esto contradice que $N_k \perp N_j$, por lo tanto f es inyectiva y $m \leq n$. ■

Definición 3.10 *Sea R un anillo y $M \in$**Mod-**R. Diremos que M tiene dimensión tipo igual a n si M contiene esencialmente una suma directa de n submódulos atómicos de M ortogonales por pares, es decir para cada $i = 1, ..., n$ existe $U_i \leq M$ atómico tal que $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \subseteq_e M$ y $U_i \perp U_j$ para toda $i \neq j$, en tal caso denotamos $t.dimM = n$. De lo contrario, diremos que M tiene dimensión tipo infinita, $t.dimM = \infty$. Si $M = 0$ entonces $t.dimM = 0$.*

Observación 3.11 *Sea M un R-módulo, entonces $t.dim(M) = \infty$ si y sólo si existe una familia infinita de submódulos no cero de M que son ortogonales por pares.*

Demostración: Supongamos que $t.dim(M) = \infty$. Note que M no es un módulo atómico, por lo tanto existen $0 \neq A_1 \leq M$ y $0 \neq B_1 \leq M$ tal que $A_1 \perp B_1$, consideremos $\overline{A_1}^t$ una cerradura tipo de A_1 en M y A_1^* un pseudocomplemento de tipo de A_1 en M relativo a B_1, entonces por la Proposición 3.4(c) se tiene que $\overline{A_1}^t \oplus A_1^* \subseteq_e M$. De esto último, podemos concluir que cada vez que se tenga un módulo N tal que $t.dim(N) = \infty$, entonces existen $0 \neq N_1 \leq N$ y $0 \neq N_2 \leq N$ tales que $N_1 \perp N_2$ y $N_1 \oplus N_2 \subseteq_e N$. Asi pues podemos suponer que $A_1 \oplus B_1 \subseteq_e M$, luego de la hipótesis se sigue que $t.dim(A_1) = \infty$ o $t.dim(B_1) = \infty$, podemos suponer que $t.dim(A_1) = \infty$, entonces existen $0 \neq A_2 \leq A_1$ y $0 \neq B_2 \leq A_1$ tales que $A_2 \perp B_2$ y $A_2 \oplus B_2 \subseteq_e A_1$, nuevamente como $t.dim(A_1) = \infty$ se tiene que $t.dim(A_2) = \infty$ o $t.dim(B_2) = \infty$, podemos suponer que $t.dim(A_2) = \infty$, entonces existen $0 \neq A_3 \leq A_2$ y $0 \neq B_3 \leq A_2$ tal que $A_3 \perp B_3$ y $A_3 \oplus B_3 \subseteq_e A_2$. De manera inductiva podemos encontrar dos familias $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y

$\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de submódulos de M, tales que $A_k \perp B_k$, $A_{k+1} \oplus B_{k+1} \subseteq_e A_k$ y $t.dim(A_k) = \infty$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces la familia $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia infinita de submódulos de M que son ortogonales por pares. El reciproco es evidente. ■

Lema 3.12 *Sea M un R-módulo y $N \leq M$. Entonces:*

a) $t.dim(M) \leq t.dim(N) + t.dim(M/N)$.

b) Si $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$, *entonces*
$t.dim(M) \leq t.dim(M_1) + ... + t.dim(M_n)$

c) Si $N \parallel M$ *entonces* $t.dim(N) = t.dim(M)$.

Demostración: a) Supongamos que $t.dim(N) < \infty$ y $t.dim(M/N) < \infty$. Es claro que si $N \subseteq_e M$ entonces a) es válido, así pues supongamos que N no es esencial en M. Sea $0 \neq K \leq M$ un pseudocomplemento de N en M, entonces tenemos que $N \oplus K \subseteq_e M$ y que además $K \hookrightarrow M/N$, entonces por la Observación 3.11 y el Lema 3.9 se tiene que K tiene dimensión tipo finita y debe ser menor a la dimensión tipo de M/N. Luego se sigue que $t.dim(M) = t.dim(N \oplus K) \leq t.dim(N) + t.dim(K) \leq t.dim(N) + t.dim(M/N)$.

b) Si $M = M_1 \oplus M_2$ entonces se tiene la sucesión exacta $0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$ y de a) se tiene el resultado. Con inducción se tiene el caso general en b).

c) Supongamos que $t.dim(N) = \infty$, entonces por la Observación 3.11 existe un conjunto $\{N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de submódulos de N que son ortogonales por pares. Como $N \parallel M$, existen $0 \neq H_i \leq M$ tal que $H_i \hookrightarrow N_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, note que $H_i \perp H_j$ para toda $i \neq j$ y por lo tanto $t.dim(M) = \infty$. Ahora supongamos que $t.dim(N) = n$, entonces sean $U_1, ..., U_n \leq N$ submódulos atómicos tales que $\bigoplus_{j=1}^{j=n} U_j \subseteq_e N$, luego como $N \parallel M$ existen $0 \neq V_j \leq M$ tales que $V_j \hookrightarrow U_j$ para toda $j = 1, ..., n$. Para cada j, consideramos $\overline{V_j}^t \leq M$ una cerradura tipo de V_j en M, notemos que $\overline{V_i}^t \perp \overline{V_j}^t$ para toda $i \neq j$. Se afirma que $\bigoplus_{j=1}^{n} \overline{V_j}^t \subseteq_e M$, si suponemos lo contrario podemos encontrar $0 \neq V \leq M$ tal que $V \perp \overline{V_j}^t$ para toda $j = 1, ..., n$. De la hipótesis, podemos encontrar $0 \neq U \leq N$ tal que $U \hookrightarrow V$ y por lo tanto $U \perp U_j$ para toda $j = 1, ..., n$ luego $U \cap \bigoplus_{j=1}^{n} U_j = 0$ y por lo tanto $U = 0$, lo cual es una contradicción. Con esto se tiene que

$\bigoplus_{j=1}^{n} \overline{V_j}^t \subseteq_e M$, y como $U_j \parallel \overline{V_j}^t$ entonces V_j es atómico para toda $j = 1, ..., n$ y por lo tanto $t.dim(M) = n$. ∎

3.3. TS-módulos

Definición 3.13 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Se dice que M es un TS-módulo si cada submódulo tipo $N \leq_t M$ es un sumando directo de M.*

Lema 3.14 *Si M es un TS-módulo, entonces cualquier submódulo tipo $N \leq_t M$ también es TS-modulo.*

Demostración: Sea $H \leq_t N$, entonces $H \leq_t M$ y por la hipótesis $M = H \oplus K$. Se sigue que $N = H \oplus (N \cap K)$ y por lo tanto N es un *TS-módulo*. ∎

El objetivo de esta sección es determinar cuando la suma directa de módulos atómicos es un *TS-módulo*. Diremos que dos clases naturales $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ son ortogonales si $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' = \underline{0}$. Dado un anillo R, para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos a considerar al conjunto $\Psi_n^{\perp} = \{\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{N}(R) : \mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \underline{0}\}$ cuyos elementos son familias, con n elementos, de clases naturales ortogonales por pares. Note que $\Psi_n^{\perp}$ es un conjunto parcialmente ordenado con el orden $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{n} \leq \{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^{n}$ si y sólo si existe σ una permutación tal que $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{L}_{\sigma(i)}$. En este contexto, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.15 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Diremos que M es n-escindible para algún $n \in \mathbb{N}$ si para cualquier conjunto $\{\mathcal{K}_i\}_{i=1}^{n}$ de clases naturales ortogonales por pares y máximo en $\Psi_n^{\perp}$, existe una descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ con $M_i \in \mathcal{K}_i$.*

Proposición 3.16 *Sea M un R-módulo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *M es 2-escindible.*
2) *Para todo $N \leq M$, N tiene un pseudocomplemento de tipo Q en M tal que Q es un sumando directo de M.*
3) *Cada submódulo tipo $N \leq_t M$ tiene un pseudocomplemento Q en M tal que Q es un sumando directo de M.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $N \leq M$, y $\mathcal{K} = d(N)$. De la hipótesis se tiene que $M = M_1 \oplus M_2$, con $M_1 \in \mathcal{K}$ y $M_2 \in c(\mathcal{K})$. Si $M_2 = 0$ entonces con $Q = 0$ hemos terminado, así que supongamos que $M_2 \neq 0$, luego $N \perp M_2$. Supongamos que $N \perp P$ para algún $M_2 \subset P \leq M$. Entonces como $M_2 \leq_t M$ se sigue que existe $0 \neq X \leq P$ tal que $X \perp M_2$. Por la Proposición 1.40, podemos encontrar $0 \neq Y \leq X$ tal que $Y \hookrightarrow M_1 \in d(N)$, lo cual es una contradicción pues $X \perp N$. Por lo tanto con $Q = M_2$ se tiene 2).

2) $\Rightarrow$ 3) Es inmediato.

3) $\Rightarrow$ 1) Sean $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{N}(R)$ tal que $\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2 = \overline{1}$ y $\mathcal{K}_1 \wedge \mathcal{K}_2 = \underline{0}$. Entonces $\mathcal{K}_2 = c(\mathcal{K}_1)$, pues $\mathcal{N}(R)$ es un retícula Booleana y por lo tanto los complementos son únicos. Sea N un submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}_1$. Por hipótesis N tiene un pseudocomplemento Q tal que $M = P \oplus Q$ para algún $P \leq M$. Luego $Q \perp N$ por el Lema 3.1(c), y por lo tanto $Q \in c(\mathcal{K}_1)$. Notemos que $N \hookrightarrow (N \oplus Q)/Q \subseteq_e M/Q \cong P$, entonces N es isomorfo a un submódulo esencial en P, y por lo tanto $P \in \mathcal{K}_1$. ■

Proposición 3.17 *Sean M_i un módulo n-escindible para toda $i \in J$. Entonces $\bigoplus_{i \in J} M_i$ es un módulo n-escindible.*

Demostración: Sea $M = \bigoplus_{i \in J} M_i$ donde M_i es n-escindible. Supongamos que $\{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n\}$ es una familia máxima de clases naturales ortogonales por pares. Entonces para cada $i \in J$, $M_i = \bigoplus_{j=1}^{n} M_{ij}$ con $M_{ij} \in \mathcal{K}_j$. Consideramos $M_j = \bigoplus_{i \in J} M_{ij}$ para toda $j = 1, ..., n$. Luego con $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ se tiene el resultado. ■

Proposición 3.18 *Sea M un R-módulo no singular y $\mathcal{K}$ una clase natural. Entonces $N = \sum\{V : V \subseteq M, V \in \mathcal{K}\}$ es el único submódulo tipo de M de tipo $\mathcal{K}$.*

Demostración: Sea $f : P = \bigoplus\{V : V \subseteq M, V \in \mathcal{K}\} \to N$ un epimorfismo y $K = Nuc(f)$. Como $Z(N) = 0$, entonces K es un submódulo pseudocomplemento de P. Sea $K \oplus W \subseteq_e P$ ($W \in \mathcal{K}$). Entonces $W \cong (K \oplus W)/K \subseteq_e P/K \cong N$ y por lo tanto $N \in \mathcal{K}$. ■

Observación 3.19 *Sea M es un módulo no singular. Entonces M es TS-módulo si y sólo si M es 2-escindible.*

Proposición 3.20 *Toda suma directa de* TS*-módulos no singulares es un* TS*-módulo.*

Demostración: Se tiene de la Observación 3.19 y la Proposición 3.17.
■

Corolario 3.21 *Toda suma directa de modulos atómicos no singulares es un* TS*-módulo.*

Capítulo 4

Anillos que satisfacen t-CCA y t-CCD

En la teoría general de módulos es muy conocido un resultado que caracteriza a los anillos neterianos, el cual dice que un anillo es neteriano si y sólo si todo inyectivo se descompone como suma directa de módulos inescindibles. En este cápitulo se prueba un resultado analogo a éste.

4.1. Familias independientes

Definición 4.1 *Sea R un anillo, M un R-módulo y $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M. Diremos que la familia $\{N_i\}_{i\in I}$ es independiente si $\sum_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I} N_i$.*

Observación 4.2 *Sea M un R-módulo y $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq ...$ una cadena de familias de submódulos de M que son independientes. Entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_i$ es una familia independiente de submódulos de M.*

Demostración: Sea $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_i = \{H_\alpha\}_{\alpha\in J}$, $\beta \in J$ y $h \in H_\beta \cap \sum_{\alpha\neq\beta} H_\alpha$, luego $h = h_1 + h_2 + ... + h_k$ donde para cada $j = 1, 2, ..., k$ se tiene que $h_j \in H_{\alpha_j}$ para alguna $\alpha_j \in J$ y por lo tanto $h \in H_\beta \cap \sum_{j=1}^{k} H_{\alpha_j}$. Notemos que para cada $j = 1, 2, ..., k$ se tiene $H_{\alpha_j} \in \mathcal{L}_{t_j}$ para alguna $t_j \in \mathbb{N}$ y que $H_\beta \in \mathcal{L}_r$ para alguna $r \in \mathbb{N}$, sea $t = máx\{r, t_1, ..., t_k\}$ entonces H_α, $H_{\alpha_j} \in \mathcal{L}_t$ para toda $j = 1, 2, ..., k$, luego por hipótesis tenemos que $\mathcal{L}_t$ es una familia independiente entonces $\sum_{j=1}^{k} H_{\alpha_j} + H_\beta = (\bigoplus_{j=1}^{k} H_{\alpha_j}) \oplus H_\beta$ y por lo tanto $h = 0$. ■

Definición 4.3 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Una suma directa local de M es una familia $\{X_j\}_{j\in J}$ independiente de submódulos de M tal que para cualquier subfamilia $\mathcal{F} \subseteq \{X_j\}_{j\in J}$ finita se tiene que $\sum \mathcal{F}$ es un sumando directo de M. Si X_j es submódulo tipo de M para toda $j \in J$, entonces diremos que la familia $\{X_j\}_{j\in J}$ es una suma local de tipo.*

Observación 4.4 *Sea M un R-módulo y $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq ...$ una cadena de familias de submódulos de M tal que $\mathcal{L}_i$ es una suma directa local de M para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_i$ es una suma directa local de M.*

Demostración: Por la Observación 4.2 tenemos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_i$ es una familia independiente. Sea $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_i$ una familia finita, es decir $\mathcal{F} = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$, entonces $L_k \in \mathcal{L}_{i_k}$ para toda $k = 1, 2, ..., n$ y algunas $i_k \in \mathbb{N}$, sea $m = máx\{i_k : k = 1, 2, ..., n\}$ entonces $L_k \in \mathcal{L}_m$ para toda $k = 1, 2, ..., n$ y por hipótesis tenemos que $\mathcal{L}_m$ es una suma directa local de M, por lo tanto $\sum \mathcal{F} = \bigoplus_{k=1}^{n} L_k$ es un sumando directo de M. ■

Definición 4.5 *Sea R un anillo y N un R-módulo. Se dice que N es t-inescindible si N no es una suma directa de dos submódulos ortogonales y distintos de cero.*

Proposición 4.6 *Sea M un R-módulo. Si para cada $\mathcal{S}$ suma local de tipo de M se tiene que $\sum \mathcal{S}$ es un sumando directo de M, entonces M es una suma directa de módulos t-inescindibles y ortogonales por pares.*

Demostración: Consideremos la familia $f = \{\mathcal{F} \subseteq Sub_R(M) : \mathcal{F}$ es una suma local de tipo de M de elementos *t-inescindibles*$\}$ como un conjunto parcialmente ordenado con el orden de la contención usual y verifiquemos que satisface las hipótesis de Lema de Zorn. Notemos que $\{0\} \in f$ por lo tanto $f \neq \emptyset$, ahora sea $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq ...$ una cadena elementos en f entonces se afirma que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_k \in f$, por la Observación 4.4 se tiene que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_k$ es una suma directa local de M, además es claro que todo elemento de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_k$ es *t-inescindible* y es un submódulo tipo de M, por lo tanto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_k \in f$. Sea $\mathcal{H} = \{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un elemento máximo de la familia f y $X = \bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$, entonces por hipótesis $M = X \oplus Y$, luego $X_\alpha \perp Y$ y de la Proposición 1.40 se tiene que $X \perp Y$. Bastará probar que $Y = 0$, supongamos lo contrario y sea $0 \neq y \in Y$, luego consideramos la familia $\mathscr{g} = \{\mathcal{G} \subseteq Sub_R(Y) : \mathcal{G}$ es una suma local de tipo de Y y $y \notin \sum \mathcal{G}\}$ como un conjunto parcialmente ordenado con la contención usual y verifiquemos que $\mathscr{g}$ satisface las hipótesis del lema de Zorn. Como $\{0\} \in \mathscr{g}$ entonces $\mathscr{g} \neq \emptyset$, sea $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq ...$ una cadena de elementos de en $\mathscr{g}$, por la Obsevación 4.4 se sigue que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_i$ es una suma local de tipo de Y, resta probar que $y \notin \sum \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_i$, si $y \in \sum \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_i$ entonces $y \in G_1 + G_2 + ... + G_n$ con $G_j \in \mathcal{G}_{l_j}$ para alguna $l_j \in \mathbb{N}$, sea $l = máx\{l_j : j = 1, 2, ..., n\}$ entonces $y \in \sum \mathcal{G}_l$ pero esto contradice que $y \notin \mathcal{G}_l$, por lo tanto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_i \in \mathscr{g}$. Sea $\mathcal{L} = \{L_\beta\}_{\beta\in I}$ un elemento máximo de $\mathscr{g}$, notemos que por la Proposición 2.13(3) tenemos que $Y \leq_t M$, ademas $L_\beta \leq_t Y$ para toda $\beta \in I$ ya que $\mathcal{L}$ es una suma local de tipo de Y, por lo tanto $L_\beta \leq_t M$, también notemos que cada sumando directo de Y es un sumando directo de M y por lo tanto $\mathcal{L}$ es una suma local de tipo de M, sea $A = \sum \mathcal{L}$ luego de la hipótesis $M = A \oplus B'$ entonces si $B = Y \cap B'$ tenemos que $Y = A \oplus B$, así se tiene que $L_\beta \cap B = 0$ para toda $\beta \in I$ entonces $L_\beta \perp B$ para toda $\beta \in I$ pues $L_\beta \leq_t Y$ y por lo tanto de la Proposición 1.40 $A \perp B$, luego por la Proposición 2.13(3) se sigue que $B \leq_t Y \leq_t M$, por lo tanto $B \leq_t M$. Se afirma que B no es *t-inescindible*, de lo contrario la familia $\mathcal{H} \cup \{B\}$ es una suma local tipo de M de elementos *t-inescindibles*, pero esto contradice que $\mathcal{H}$ es máxima en f. Sea $B = B_1 \oplus B_2$ donde $B_1 \perp B_2$ y $B_\lambda \neq 0$ para $\lambda = 1, 2$, entonces por la Proposición 2.13(3) se tiene que $B_\lambda \leq_t B \leq_t Y$ y por lo tanto $B_\lambda \leq_t Y$ para $\lambda = 1, 2$. Por último notemos que $\mathcal{L} \cup \{B_1\}$ y $\mathcal{L} \cup \{B_2\}$ son sumas locales de tipo de Y, pues $Y = A \oplus B = \bigoplus_{\beta\in I} L_\beta \oplus B_1 \oplus B_2$ y como $\mathcal{L}$ es un elemento máximo en $\mathscr{g}$ se sigue que $y \in A \oplus B_1$ y $y \in A \oplus B_2$ lo cual implica que $y \in (A \oplus B_1) \cap (A \oplus B_2) = A$ pero esto contradice que $y \in \sum \mathcal{L}$. Por lo tanto $Y = 0$ y con $M = \bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ se ha probado lo que se pedia. ■

Proposición 4.7 *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos ortogonales por pares, y $0 \neq V \leq E(\bigoplus_{i\in I} M_i)$. Entonces:*

1) *Para cada $0 \neq x \in E(\bigoplus_{i\in I} M_i)$, existe $i \in I$ y $r \in R$ tal que $0 \neq xrR \leq M_i$.*

2) *$\bigoplus_{i\in I}(V \cap M_i) \subseteq_e V$.*

Demostración: 1) Sea $0 \neq x \in E(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ y consideremos los conjuntos $\emptyset \neq \mathcal{S} = \{s \in R : 0 \neq xs \in \bigoplus_{i \in I} M_i\}$ y $\emptyset \neq \mathcal{A} = \{m \in \mathbb{N} : \ xs = x_1 + x_2 + ... + x_m$ para algún $s \in \mathcal{S}\}$ ambos distintos del vacío pues $\bigoplus_{i \in I} M_i \subseteq_e E(\bigoplus_{i \in I} M_i)$, luego por el principio del Buen Orden en $\mathbb{N}$ el conjunto $\mathcal{A}$ tiene un elemento n mínimo, sea $r \in \mathcal{S}$ tal que $0 \neq xr = x_1 + x_2 + ... + x_n$ con $0 \neq x_k \in M_{i_k}$ para toda $k = 1, 2..., n$. Luego se tiene que $ann_r(xr) = \bigcap_{i=1}^{n} ann_r(x_i) \neq R$. Si $n = 1$, con $i = i_1$ se tiene que $0 \neq xrR \subseteq M_i$, supongamos que $2 \leq n$ entonces se afirma que $ann_r(x_i) = ann_r(x_j)$ para toda $i, j \leq n$, de lo contrario podemos encontrar $t \in ann_r(x_i)$ tal que $t \notin ann_r(x_j)$, entonces $0 \neq xrt \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ y tiene longitud $l<n$, note que $rt \in \mathcal{S}$ y por lo tanto $l \in \mathcal{A}$ pero esto contradice que n es mínimo en $\mathcal{A}$, por lo tanto $ann_r(xr) = ann_r(x_k)$ para toda $k = 1, 2, ..., n$. Notemos que $0 \neq x_1R \leq M_{i_1}$ y $0 \neq x_2R \leq M_{i_2}$ son tales que $x_1R \cong R/ann_r(x_1) = R/ann_r(x_2) \cong x_2R$ y esto contradice que $M_{i_1} \perp M_{i_2}$ por lo tanto $n = 1$.

2) Sea $0 \neq v \in V$ entonces por 1) existe $r \in R$ tal que $0 \neq vr \in M_j$ para alguna $j \in I$ y por lo tanto $0 \neq vr \in V \cap M_j \leq \bigoplus_{i \in I}(V \cap M_i)$. ■

4.2. Descomposición con submódulos tipo

Definición 4.8 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Diremos que una descomposición de M, $M = \bigoplus_{j \in J} N_j$ complementa sumandos tipo si para cada $N \leq_t M$ sumando directo de M existe un conjunto $I \subseteq J$ tal que $M = N \oplus (\bigoplus_{j \in I} N_j)$.*

Lema 4.9 *Sea M un R-módulo y $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ una descomposición de M que complementa sumandos tipo tal que $M_i \perp M_j$ para toda $i \neq j$. Entonces $M_J = \bigoplus_{j \in J} M_j$ con $J \subseteq I$ es una descomposición de M_J que complementa sumandos tipo.*

Demostración: Notemos que $M = M_{I \setminus J} \oplus M_J$ con $M_{I \setminus J} = \bigoplus_{i \in I \setminus J} M_i$, luego de la Proposición 1.40 $M_{I \setminus J} \perp M_J$ y por lo tanto $M_J \leq_t M$. Sea $N \leq_t M_J$ un sumando directo de M_J entonces $N \leq_t M$ es un sumando directo de M y por hipótesis $M = N \oplus (\bigoplus_{j \in I'} M_j)$ para algún subconjunto $I' \subseteq I$. Consideremos $J' = J \cap I' \subseteq J$, afirmamos que $M_J = N \oplus (\bigoplus_{j \in J'} M_j)$, sea $m \in M_J$ entonces $m = n + m_{j_1} + ... + m_{j_l}$ con $n \in N$ y $m_{j_k} \in M_{j_k}$ para algunas $j_k \in I'$. Podemos renumerar los índices j_k de tal manera que $j_1, j_2, ..., j_s \in J$ y $j_{s+1}, ..., j_l \notin J$, luego tenemos que $m - n - m_{j_1} - ... - m_{j_s} = m_{j_{s+1}} + ... + m_{j_l} \in M_J \cap (\bigoplus_{j \in I \setminus J} M_j) = 0$, lo cual implica que $m \in N \oplus (\bigoplus_{j \in J'} M_j)$ y por lo tanto $M_J = \bigoplus_{j \in J} M_j$ es una descomposición de M_J que complementa sumandos tipo. $\blacksquare$

Lema 4.10 *Sea M un R-módulo inyectivo y $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ una descomposición de M que complementa sumandos tipo tal que $M_i \perp M_j$ para toda $i \neq j$. Si $\mathcal{Z} = \{Z_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una suma local de tipo de M tal que $\sum \mathcal{Z} \subseteq_e M$ entonces $\sum \mathcal{Z} = M$.*

Demostración: Si Λ es un conjunto finito entonces de la hipótesis se tiene que $\sum \mathcal{Z}$ es un sumando directo de M y como $\sum \mathcal{Z} \subseteq_e M$ se sigue que $\sum \mathcal{Z} = M$. Supongamos entonces que Λ es un conjunto infinito y consideremos a $Z = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$. Si $Z \neq M$, $(*)$afirmamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existen $0 \neq m_i \in M_{s_i}$ y $m_i \notin Z$ con $s_i \neq s_j$ para toda $i \neq j$, tales que $ann_r(m_1) \subset ann_r(m_2) \subset ... \subseteq R$ es una cadena estrictamente ascendente. Esto último se construirá de manera inductiva. Como $Z = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \neq \bigoplus_{i \in I} M_i = M$, entonces existe $0 \neq m_1 \in M_{s_1}$ tal que $m_1 \notin Z$ y $ann_r(m_1) \subset R$, luego supongamos que se tiene una sucesión $m_1, ..., m_n$ donde $0 \neq m_k \in M_{s_k}$ y $m_k \notin Z$ con $s_i \neq s_j$ si $i \neq j$, tal que $ann_r(m_1) \subset ann_r(m_2) \subset ... \subset ann_r(m_n) \subset R$, luego como $Z \subseteq_e M$ existe $r_k \in R$ tal que $0 \neq m_k r_k \in Z_F$ para toda $k = 1, ..., n$ y donde $Z_F = \bigoplus_{\lambda \in F} Z_\lambda$ con $F \subseteq \Lambda$ finito. Por la hipótesis $\mathcal{Z}$ es una suma local de tipo de M y por lo tanto $M = Z_F \oplus C$, note que $Z_\lambda \perp C$ para toda $\lambda \in F$ y de la Proposición 1.40 se sigue que $Z_F \perp C$, por lo tanto Z_F es un submódulo tipo de M, pero de la hipótesis sabemos que M tiene una descomposición que complementa sumandos tipo y entonces existe $J \subseteq I$ tal que $M = Z_F \oplus (\bigoplus_{j \in J} M_j)$. Luego se tiene que $m_n = z + m_{j_1} + ... + m_{j_l}$ con $z \in Z_F$, $0 \neq m_{j_q} \in M_{j_q}$, $j_q \in J$ para toda $q = 1, ..., l$. Note que $r_n \in ann_r(m_{j_q}) \setminus ann_r(m_n)$ pues $m_n r_n - z r_n = m_{j_1} r_n + ... + m_{j_l} r_n \in Z_F \cap \bigoplus_{j \in J_2} M_j = 0$. Ahora se afirma que $s_k \notin J$ para toda $k = 1, ..., n$, supongamos lo contrario, entonces $s_k \in J$ para alguna $k \in \{1, ..., n\}$ luego $0 \neq m_k r_k \in Z_F \cap M_{s_k} \subseteq Z_F \cap (\bigoplus_{j \in J} M_j) = 0$ lo cual es una contradicción. Note que $m_n \notin Z$ y por lo tanto existe $s_{n+1} \in \{j_1, ..., j_l\}$ tal que $0 \neq m_{n+1} = m_{s_{n+1}} \in M_{s_{n+1}} \setminus Z$. Con esto, se ha construido una sucesión $m_1, ..., m_n, m_{n+1}$ donde $m_k \notin Z$, $m_k \in M_{s_k}$ con $s_i \neq s_j$ si $i \neq j$ tal que $ann_r(m_1) \subset$

$ann_r(m_2) \subset ... \subset ann_r(m_n) \subset ann_r(m_{n+1}) \subset R$. Por lo tanto, lo que se afirmaba en (*) es cierto. Por último sea $x = (m_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} M_{s_i}$ y $I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} ann_r(m_i)$, definimos $f : m_1 I \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_{s_i}$ dada por $f(m_1 r) = xr$ para toda $r \in I$. Verifiquemos que f esta bien definida, supongamos que $m_1 r = m_1 r'$ con $r, r' \in I$ entonces por la manera que obtuvimos $m_2 \in M_{s_2}$ sabemos que $m_1 = ... + m_2 + ...$ es una expresión única de m_1 en una suma directa y por lo tanto $m_2 r = m_2 r'$, luego por inducción podemos concluir que $m_n r = m_n r'$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $f(m_1 r) = xr = xr' = f(m_1 r')$. Luego como $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{s_i}$ es inyectivo, existe $g : m_1 R \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{s_i}$ tal que $g|_{m_1 I} = f$. Note que $m_1 R$ es un *R-módulo* finitamente generado, entonces $g(m_1 R) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{s_i}$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $xI = f(m_1 I) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{s_i}$. De esto último, se obtiene que $m_i I = 0$ para toda $i>k$, lo cual nos lleva a que $\bigcup_{i=1}^{\infty} ann_r(m_i) = I \subseteq ann_r(m_{k+1})$ y por lo tanto $ann_r(m_{k+1}) = ann_r(m_{k+l})$ para toda $l \in \mathbb{N}$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto $Z = M$. ∎

Proposición 4.11 *Sea M un R-módulo inyectivo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) M es una suma directa de módulos atómicos.

2) M tiene una descomposición que complementa sumandos tipo.

3) Para cada $\mathcal{S}$ suma local de tipo de M se tiene que $\sum \mathcal{S}$ es un sumando directo de M.

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$ donde N_i es un módulo atómico, notemos que si $k \neq l \in I$ entonces $N_k \perp N_l$ o $N_k \parallel N_l$, pues si N_k no es ortogonal a N_l podemos encontrar $0 \neq V_1 \leq N_k$ y $0 \neq V_2 \leq N_l$ tales que $V_1 \cong V_2$ y como N_k y N_l son atómicos se tiene que $d(N_k) = d(V_1) = d(V_2) = d(N_l)$ y por lo tanto $N_k \parallel N_l$. Definimos una relación en el conjunto I, dada por $i \sim i'$ si y sólo si $N_i \parallel N_{i'}$, notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia en I, sea J la partición que induce la relación $\sim$ y consideramos $M_\alpha = \bigoplus_{i\in\alpha} N_i$ para cada $\alpha \in J$, entonces se tiene que $M = \bigoplus_{\alpha\in J} M_\alpha$ y $M_\beta \perp M_\gamma$ para toda $\beta \neq \gamma \in J$, note que M_α es atómico para toda $\alpha \in J$ pues como $d(N_i) \subseteq d(M_\alpha)$ con $i \in \alpha$ y además $N_k \in d(N_i)$ para toda $k \in \alpha$ por lo tanto $M_\alpha = \bigoplus_{k\in\alpha} N_k \in d(N_i)$, luego $d(M_\alpha) = d(N_i)$. Sea $N \leq_t M$ un sumando directo de M y consideremos $H =$

$\{\alpha \in J : M_\alpha \cap N = 0\}$, entonces de la Proposición 1.40 se sigue que $N \cap (\bigoplus_{\alpha \in H} M_\alpha) = 0$, ahora como M es un módulo inyectivo, entonces N y $\bigoplus_{\alpha \in H} M_\alpha$ son inyectivos ya que ambos son sumandos directos de M, luego $N \oplus (\bigoplus_{\alpha \in H} M_\alpha)$ es un módulo inyectivo y por lo tanto es un sumando directo de M. Entonces tenemos que $M = N \oplus (\bigoplus_{\alpha \in H} M_\alpha) \oplus X$ para algún $X \leq M$, bastará probar que $X = 0$, supongamos que $X \neq 0$ entonces por la Proposición 1.40 existe $0 \neq Y \leq X$ tal que $Y \hookrightarrow M_\gamma$ para alguna $\gamma \in J$, notemos que por la Proposición 2.13(3) $\bigoplus_{\alpha \in H} M_\alpha$ es un submódulo tipo de M y por lo tanto $X \perp \bigoplus_{\alpha \in H} M_\alpha$, luego $\gamma \notin H$ y se tiene que $V_1 = N \cap M_\gamma \neq 0$, como M_γ es atómico obtenemos $d(V_1) = d(M_\gamma) = d(Y)$, es decir con $0 \neq V_1 \leq N$, $0 \neq Y \leq X y V_1 \parallel Y$ se tiene que N y X no son ortogonales, pero esto contradice que $N \perp X$ ($N \leq_t M$).

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ una descomposición que complementa sumandos tipo. Afirmamos que M_i es un módulo atómico para toda $i \in I$, si M_k no es atómico para alguna $k \in I$ entonces existen $0 \neq A \leq M_k$ y $0 \neq B \leq M_k$ tal que $A \perp B$. Sea $\mathcal{K} = d(A)$, entonces para cada $i \in I$ sea X_i un submódulo tipo de M_i de tipo $\mathcal{K}$ y Y_i un pseudocomplemento de X_i en M_i entonces de la Observación 2.11 $Y_i \in c(\mathcal{K})$ y además $X_i \oplus Y_i \subseteq_e M_i$. Sea $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ y $Y = \bigoplus_{i \in I} Y_i$, entonces $X \in \mathcal{K}$ y $Y \in c(\mathcal{K})$, luego $X \perp Y$ y de la Proposición 1.16 $X \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} (X_i \oplus Y_i) \subseteq_e \bigoplus_{i \in I} M_i = M$. Consideremos $\overline{X}$ una cerradura esencial de X en M, entonces $\overline{X} \in \mathcal{K}$ y con $\overline{X} \perp Y$ se sigue de la Proposición 2.13(3) que $\overline{X} \leq_t M$, luego como M es inyectivo se tiene que $\overline{X}$ es inyectivo por lo Proposición 1.30 entonces $\overline{X}$ es un sumando directo de M. Luego por la hipótesis $M = \overline{X} \oplus (\bigoplus_{j \in J} M_j)$ para algún conjunto $J \subseteq I$. Notemos que $k \notin J$ ya que si $k \in J$ entonces $0 \neq X_k \subseteq \overline{X}$ cumple que $X_k \hookrightarrow \bigoplus_{j \in J} M_j$ pero esto contradice que $\overline{X} \perp \bigoplus_{j \in J} M_j$. Entonces para $0 \neq B \leq M_k$ se tiene que $B \hookrightarrow (\bigoplus_{i \in I \setminus J} M_i) \cong \overline{X} \in \mathcal{K}$ y por lo tanto $B \in \mathcal{K} \cap c(\mathcal{K}) = \underline{0}$ lo cual es una contradición, por lo tanto M_k es un módulo atómico. De la prueba 1) $\Rightarrow$ 2) podemos suponer que $M_i \perp M_j$ para toda $i \neq j \in I$ y también que $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ complementa sumandos tipo. Sea $\mathcal{S} = \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ una suma local de tipo de M y consideremos $S = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda$, luego de la Proposición 3.1(g) tenemos que una cerradura esencial $\overline{S}$ de S en M es un submódulo tipo de M, además $\overline{S}$ es esencialmente cerrado en M que es inyectivo, por lo tanto $\overline{S}$ es inyectivo y $M = \overline{S} \oplus C$ con $C \leq_t M$ inyectivo, como $S \subseteq_e \overline{S}$ entonces

$S \oplus C \subseteq_e M$. Note que $\mathcal{Z} = \mathcal{S} \cup \{C\}$ es una suma local de tipo de M y $Z \subseteq_e M$ con $Z = \sum \mathcal{Z}$, luego del Lema 4.10 $S \oplus C = Z = M$.

3) $\Rightarrow$ 1) De la Proposición 4.6 tenemos que $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ con M_i *t-inescindible* y $M_i \perp M_j$ para toda $i \neq j$. Bastará probar que M_i es atómico para toda $i \in I$, sea $k \in I$ y $0 \neq N \leq_t M_k$, entonces N es esencialmente cerrado en M_k con M_k inyectivo, entonces N es inyectivo y por lo tanto un sumando directo de M_k. Sea $K \leq M_k$ tal que $N \oplus K = M_k$, entonces $K \perp N$ y K es un pseudocomplemento de N en M_k tal que $N \oplus K \subseteq_e M_k$, por lo tanto K es un submódulo tipo de M_k. Como M_k es *t-inescidible* se sigue que $K = 0$, por lo tanto $N = M$ y de la Proposición 3.6 se tiene que M_k es atómico. ■

4.3. Una caracterización de anillos que satisfacen t-CCA

Definición 4.12 *Sea R un anillo y $M \in$**Mod-**R. Se dice que M satisface t-CCA (condición de cadena ascendente de tipo) si para cualquier cadena $N_1 \subseteq N_2 \subseteq ... \subseteq M$ se tiene que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/N_i) < \infty$. Diremos que R satisfece t-CCA si R_R satisface t-CCA.*

Lema 4.13 *Sea $M \in$**Mod-**R. Si M no satisface t-CCA, entonces existen $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ familias de submódulos de M tal que $X_1 \subset X_2 \subset ... \subseteq M$ es una cadena estrictamente ascendente, donde para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $X_i \subset Y_i \subseteq X_{i+1}$ y $Y_i/X_i \perp Y_j/X_j$ para toda $i \neq j$.*

Demostración: Vamos a considerar dos casos. Si existe $N \leq M$ tal que $t.dim(M/N) = \infty$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $0 \neq (N_i/N) \leq M/N$ tal que $N_i/N \perp N_j/N$ para toda $i \neq j$. Sea $X_i = \sum_{k=1}^{i} N_k$ y $Y_{i-1} = X_i$ entonces $X_1 \subset X_2 \subset ... \subseteq M$ es una cadena estrictamente ascendente, note que $Y_i/X_i = (\sum_{k=1}^{i+1} N_k)/(\sum_{k=1}^{i} N_k) \cong [(\sum_{k=1}^{i+1} N_k)/N)]/[(\sum_{k=1}^{i} N_k)/N] \cong N_{i+1}/N$ y por lo tanto si $i \neq j$ se tiene que $Y_i/X_i \perp Y_j/X_j$.

El otro caso a considerar, es que para todo $N \leq M$ se tiene que $t.dim(M/N) < \infty$. Por hipótesis existe $N_1 \subseteq N_2 \subseteq ... \subseteq M$ una cadena de submódulos de M tal que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/N_i) = \infty$. Notemos que la cadena $N_1 \subseteq N_2 \subseteq ... \subseteq M$ no se estaciona, ya que si lo hace podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_n = N_{n+k}$ para toda

$k \in \mathbb{N}$, luego tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/N_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M/N_i$ y por lo tanto $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/N_i) \leq \sum_{i=1}^{n} t.dim(M/N_i) < \infty$ lo cual es una contradicción, por lo tanto podemos suponer que $N_1 \subset N_2 \subset ... \subseteq M$ es una cadena estrictamente ascendente. Se afirma que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $0 \neq P_i/N_i \subseteq M/N_i$ tal que $P_i/N_i \perp P_j/N_j$, por hipótesis tenemos que $t.dim M/N_i < \infty$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existen $U_{i_j} \leq M/N_i$ submódulos atómicos ortogonales por pares donde $\bigoplus_{j=1}^{d_i} U_{i_j} \subseteq_e M/N_i$ y $t.dim M/N_i = d_i$, luego observemos que la familia $\{d(U_{i_j})\}_{i,j}$ es una familia infinita de clases naturales que son atómos en $\mathcal{N}(R)$, ya que si $\{d(U_{i_j})\}_{i,j}$ es finita se tiene que $\bigoplus_{i,j} U_{i_j} \subseteq_e \bigoplus_{i=1}^{\infty} M/N_i$ pero esto contradice que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/N_i) = \infty$. Ahora note que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que en M/N_n podemos encontrar U_{n_k} para alguna $k \in \{1, ..., d_n\}$ tal que $U_{n_k} \notin \bigcup_{i \leq N} d(U_{i_j})$, pues de lo contrario podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N$ se tiene que $U_{n_j} \in \bigcup_{i \leq N} d(U_{i_j})$ para toda j, pero esto nos lleva a que la familia $\{d(U_{i_j})\}_{i,j}$ es finita, lo cual es una contradicción. Con esto último podemos suponer que $N_1 \subset N_2 \subset ... \subseteq M$ es una cadena estrictamente ascendente y que además para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $0 \neq P_i/N_i \subseteq M/N_i$ tal que $P_i/N_i \perp P_j/N_j$. Sea $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ y $V = \{i \in \mathbb{N} : P_i \cap L = N_i\}$. Supongamos que V es infinito, luego $P_i/N_i \cong (P_i + L)/L \hookrightarrow M/L$ para toda $i \in V$, entonces $t.dim(M/L) = \infty$ pero esto contradice lo que se ha supuesto, es decir que $t.dim(M/N) < \infty$ para todo $0 \neq N \leq M$. Por lo tanto V es finito, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N_i \subset P_i \cap L$ para toda $i \geq N$. Sea $A_i = N_{i+N}$ y $B_i = P_{i+N} \cap L$ para cada $i > 0$, entonces se tiene que $A_1 \subset A_2 \subset ... \subseteq M$ es una cadena estrictamente ascendente y $A_i \subset B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = L$ para toda $i \in \mathbb{N}$, además $B_i/A_i \perp B_j/A_j$ para toda $i \neq j$. Se afirma que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $(B_n \cap A_m) \setminus A_n \neq \emptyset$, sea $n \in \mathbb{N}$ entonces existe $0 \neq b_n \in B_n \setminus A_n$, entonces $b_n \in P_{n+N} \cap L = P_{n+N} \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (P_{n+N} \cap A_i)$ y por lo tanto $b_n \in P_{n+N} \cap A_m \subseteq A_m$ para alguna $m > n$, que es lo que se afirmaba. De la afirmación anterior podemos construir una sucesión $\{1 = n_1 < n_2 < ...\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $b_i \in B_{n_i} \cap A_{n_{i+1}}$ pero $b_i \notin A_{n_i}$. Así las cosas, sea $X_i = A_{n_i}$ y $Y_i = b_i R + A_{n_i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$, notemos que $X_1 \subset X_2 \subset ... \subseteq M$ es una cadena estrictamente ascendente, ahora si $i \in \mathbb{N}$ entonces $X_i = A_{n_i} \subset b_i R + A_{n_i} = Y_i \subseteq (B_{n_i} \cap A_{n_{i+1}}) + A_{n_i} \subseteq A_{n_{i+1}} = X_{i+1}$, además $Y_i/X_i \subseteq B_{n_i}/A_{n_i}$ y $Y_j/X_j \subseteq B_{n_j}/A_{n_j}$ y por lo tanto $Y_i/X_i \perp Y_j/X_j$ para toda $i \neq j$, y

por lo tanto las familias $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cumplen lo que se pedía.
■

Proposición 4.14 *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una suma local de tipo de un R-módulo M y $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$. Si $X \neq \overline{X}$ entonces para cada $j = 0, 1, 2, ...$ existe $y_j \in \overline{X}$ tal que $ann_r(y_1) \subset ann_r(y_2) \subset ... \subseteq R$ es una cadena estrictamente ascendente y $t.dim(\bigoplus_{j\geq n} R/ann_r(y_j)) = \infty$.*

Demostración: Supongamos que $X \neq \overline{X}$, entonces se afirma que I es un conjunto infinito, si I es finito entonces X es un sumando directo de M, es decir $M = X \oplus C$, además $X_i \perp C$ para toda $i \in I$ entonces por la Proposoción 1.40 se tiene que $X \perp C$, luego X es un submódulo tipo de M, y por el Lema 3.1(d) $X = \overline{X}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto I es infinito. Sea $y_0 \in \overline{X} \setminus X$, luego de la Proposición 4.7 se tiene que existen $i_1 \in I$, $r_1 \in R$ con $0 \neq y_0 r_1 \in y_0 R \cap X_{i_1}$. Como $\{X_i\}_{i\in I}$ es una suma local de tipo entonces X_{i_1} es un sumando directo de M y por lo tanto podemos escribir $\overline{X} = X_{i_1} \oplus Y_1$, $y_0 = x_1 + y_1$ con $x_1 \in X_{i_1}$, $y_1 \in Y_1$ y $ann_r(y_0) \subseteq ann_r(y_1)$, además $y_0 \notin X$ entonces $y_1 \notin X$, note que $y_0 r_1 - x_1 r_1 = y_1 r_1 \in X_{i_1} \cap Y_1 = 0$ y por lo tanto $r_1 \in ann_r(y_1) \setminus ann_r(y_0)$. Luego tenemos que $y_1 R \cap X \neq 0$ ya que $X \subseteq_e \overline{X}$, y por la Proposición 4.7 existen $i_2 \in I$ y $r_2 \in R$ tales que $0 \neq y_1 r_2 \in y_1 R \cap X_{i_2}$ y como $y_1 R \subseteq Y_1 \perp X_{i_1}$ entonces $i_1 \neq i_2$. Por la hipótesis $X_{i_1} \oplus X_{i_2}$ es un sumando directo de M y por lo tanto podemos escribir $\overline{X} = X_{i_1} \oplus X_{i_2} \oplus Y_2$, $y_1 = x_2 + y_2$ con $x_2 \in X_{i_1} \oplus X_{i_2}$, $y_2 \in Y_2$ y $ann_r(y_1) \subset ann_r(y_2)$, tenemos que $y_1 \notin X$ entonces $y_2 \notin X$, note que $y_1 r_2 - x_2 r_2 = y_2 r_2 \in X_{i_1} \oplus X_{i_2} \cap Y_2 = 0$ por lo tanto $r_2 \in ann_r(y_2) \setminus ann_r(y_1)$. Continuamos con $y_2 R \cap X \neq 0$ ya que $X \subseteq_e \overline{X}$, y por la Proposición 4.7 existen $i_3 \in I$ y $r_3 \in R$ tales que $0 \neq y_2 r_3 \in y_2 R \cap X_{i_3}$ y como $y_2 R \subseteq Y_2 \perp (X_{i_1} \oplus X_{i_2})$ entonces $i_3 \neq i_2$ y $i_3 \neq i_1$. Tenemos que $\overline{X} = X_{i_1} \oplus X_{i_2} \oplus X_{i_3} \oplus Y_3$, $y_2 = x_3 + y_3$ con $x_3 \in X_{i_1} \oplus X_{i_2} \oplus X_{i_3}$, $y_3 \in Y_3$ y $ann_r(y_2) \subseteq ann_r(y_3)$, notemos que $y_2 r_3 - x_3 r_3 = y_3 r_3 \in (X_{i_1} \oplus X_{i_2} \oplus X_{i_3}) \cap Y_3 = 0$ y por lo tanto $r_3 \in ann_r(y_3) \setminus ann_r(y_2)$. Si continuamos de este modo podemos encontrar $\{y_j\}_{j=0}^{\infty} \subseteq \overline{X} \setminus X$ y $\{i_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq I$ todos distintos, tal que $0 \neq y_{j-1} R \cap X_{i_j} \subseteq X_{i_j}$ y $ann_r(y_0) \subset ann_r(y_1) \subset ... \subseteq R$ es una cadena estrictamente ascendente. Observese que $\{y_{j-1} R \cap X_{i_j}\}_{j=0}^{\infty}$ es una familia de módulos ortogonales por pares y que $\bigoplus_{j=n}^{\infty} y_j R \cap X_{i_{j+1}} \subseteq \bigoplus_{j\geq n} y_j R \cong \bigoplus_{j\geq n} R/ann_r(y_j)$ para toda $n = 0, 1, ...$, y por lo tanto $t.dim(\bigoplus_{j\geq n} R/ann_r(y_j)) = \infty$. ■

Teorema 4.15 *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) R satisface t-CCA.

b) Para cada familia $\{M_i : i \in I\}$ de módulos ortogonales por pares, $\bigoplus_{i\in I} E(M_i)$ es inyectivo.

c) Todo módulo inyectivo es una suma directa de módulos atómicos.

d) Todo módulo inyectivo tiene una descomposición que complementa sumandos tipo.

e) Cada TS-modulo es una suma directa de módulos atómicos.

f) Cada módulo contiene un submódulo tipo inyectivo máximo.

Demostración: $a) \Rightarrow e)$ Sea M un *TS-módulo* y $\mathcal{S} = \{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una suma local de tipo de M con $S = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$, se afirma que $S = \overline{S}$, si $S \neq \overline{S}$ entonces por la Proposición 4.14 se sigue que R no satisface *t-CCA*, pero esto contradice la hipótesis, por lo tanto $S = \overline{S}$. Luego por el Lema 3.1(g) se tiene que $S = \overline{S} \leq_t M$ y como M es *TS-módulo* se tiene que S es un sumando directo de M. De la Proposición 4.6 se sigue que $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ con M_i *t-inescindible* y $M_i \perp M_j$ para toda $i \neq j$, note que $M_i \leq_t M$ y por el Lema 3.14 se tiene que M_i es *TS-módulo* para toda $i \in I$. Bastará probar que M_i es atómico para toda $i \in I$, sea $k \in I$ y $0 \neq N \leq_t M_k$ entonces N es un sumando directo de M_k, es decir que $M_k = N \oplus K$ para algún $K \leq M_k$, notemos que $K \leq_t M_k$ y como M_k es *t-inescindible* se tiene que $K = 0$, por lo tanto M_k es atómico.

$e) \Rightarrow c)$ Es inmediato ya que cada módulo inyectivo es un *TS-módulo*.

$c) \Rightarrow d)$ Se sigue de la Proposición 4.11.

$d) \Rightarrow f)$ Sea M un *R-módulo*. Considerese $f = \{\mathcal{H} \subseteq Sub_R(M) : \mathcal{H}$ es independiente y $H \leq_t M$ es inyectivo $\forall H \in \mathcal{H}\}$ como un conjunto parcialmente ordenado con el orden de la contensión usual. Verifiquemos que f satisface las hipótesis del Lema de Zorn, notemos que $0 \leq M$ es un submódulo tipo de M de tipo $\underline{0}$ y por lo tanto $\{0\} \in f$, sea $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \subseteq ...$ una cadena de elementos de f entonces $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_i$ es una familia independiente cuyos elementos son inyectivos y submódulos tipo de M, por lo tanto $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_i \in f$. Sea $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j\in J}$

un elemento máximo de f y $F = \bigoplus_{j\in J} F_j$ entonces afirmamos que F es inyectivo, considerese $F \hookrightarrow E(F)$ y sea $F \cong F' = \bigoplus_{j\in J} F'_j \subseteq E(F)$ donde $F'_j \cong F_j$ para toda $j \in J$. Sea $k \in J$, entonces F'_k es un sumando directo de $E(F)$ ya que F'_k es inyectivo, por lo tanto existe $K \leq E(F)$ tal que $E(F) = F'_k \oplus K$, si F'_k no es ortogonal a K entonces existe $0 \neq V \leq K$ tal que $V \hookrightarrow F'_k$, luego por la Proposición 4.7 se tiene que $\bigoplus_{j\in J}(V \cap F'_j) \subseteq_e V$, pero $V \cap F'_j = 0$ para toda $j \neq k$ ya que $V \perp F'_j$ para toda $j \neq k$, entonces $F'_k \cap V \subseteq_e V$, lo cual es una contradición pues $F'_k \cap V = 0$ y por lo tanto $F'_k \perp K$ y de la Proposición 2.13(3) se sigue que $F'_k \leq_t E(F)$. Note que $\{F'_j\}_{j\in J}$ es una suma local de tipo de $E(F)$ que por la hipótesis tiene una descomposición que complementa sumandos tipo, luego por la Proposición 4.11 se tiene que $F' = \bigoplus_{j\in J} F'_j$ es un sumando directo de $E(F)$ y por lo tanto $F' \cong F$ es inyectivo. Entonces $\overline{F} = F$, donde $\overline{F}$ es una cerradura esencial de F en M, y por el Lema 3.1(g) se tiene que F es un submódulo tipo de M. Ahora sea $E \leq_t M$ inyectivo tal que $F \subseteq E$, entonces existe $H \leq E$ tal que $F \oplus H = E$, luego $H \leq_t E$ es inyectivo. Si $H \neq 0$ entonces se tiene que $\mathcal{F} \cup \{H\} \in f$ lo cual es una contradicción pues $\mathcal{F}$ es un máximo en f, por lo tanto $F = E$.

$f) \Rightarrow b)$ Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos ortogonales por pares y $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, entonces por hipótesis existe $N \leq_t M$ inyectivo máximo. Sea $i \in I$, entonces $E(M_i) \cap N \subseteq E(M_i)$ y por lo tanto $E(E(M_i) \cap N) \subseteq E(M_i)$, luego podemos encontrar $K_i \leq E(M_i)$ tal que $E(M_i) = E(E(M_i) \cap N) \oplus K_i$, de esto se sigue que $N \cap K_i = 0$ y por lo tanto $N \perp K_i$. Observese que $E(E(M_i) \cap N) \hookrightarrow N$, entonces $E(E(M_i) \cap N) \perp K_i$ y por la Proposición 2.13(3) se tiene que $K_i \leq_t E(M_i)$ es inyectivo. Tenemos que $E(M_i) \leq_t M$ y por lo tanto $K_i \leq_t M$, note que $N \oplus K_i$ es inyectivo y por lo tanto $M = N \oplus K_i \oplus H$, como $N, K_i \leq_t M$ tenemos que $N \perp H$ y $K_i \perp H$, entonces de la Proposición 1.40 se sigue que $N \oplus K_i \perp H$. Por lo tanto $N \oplus X_i \leq_t M$ es inyectivo, pero N es submódulo tipo de M inyectivo máximo, entonces $X_i = 0$ para toda $i \in I$. De lo anterior, se tiene que $E(M_i) \cap N \subseteq_e E(M_i)$ para toda $i \in I$, entonces $\bigoplus_{i\in I} E(M_i) \cap N \subseteq_e \bigoplus_{i\in I} E(M_i) = M$ y como $\bigoplus_{i\in I} E(M_i) \cap N \subseteq N$, se tiene que $N \subseteq_e M$ y por lo tanto $N = M$.

$b) \Rightarrow a)$ Sea R un anillo y supongamos que R no satisface t-CCA, entonces por el Lema 4.13 existen $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ familias de ideales derechos de R tales que $I_1 \subset I_2 \subset ...$, y para cada $i \in \mathbb{N}$

se tiene que $I_i \subset J_i \subseteq I_{i+1}$ y $J_i/I_i \perp J_j/I_j$ para toda $i \neq j$. Por hipótesis $E = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(J_i/I_i)$ es inyectivo, sea $h_i : J_i/I_i \hookrightarrow E(J_i/I_i)$ la inclusión, entonces existe $f_i : R/I_i \hookrightarrow E(J_i/I_i)$ tal que $f_i|_{J_i/I_i} = h_i$. Sea $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ y $f : I \to E$ dada por $(\pi_i f)(a) = f_i(a+I_i)$ donde $\pi_i : E \to E(J_i/I_i)$ es la proyección. Como E es inyectivo, existe $g : R \to E$ tal que $g|_I = f$, entonces $f(I) \subseteq g(R) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{m} E(J_i/I_i)$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, dada $x \in J_{m+1}$ se tiene que $0 = \pi_{m+1} f(x) = f_{m+1}(x + I_{m+1}) = h_i(x + I_{m+1}) = x + I_{m+1}$ y por lo tanto $x \in I_{m+1}$, entonces $I_{m+1} = J_{m+1}$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto R satisface t-CCA. ■

Con el siguiente ejemplo se tiene que no todo anillo satisface la condición t-CCA.

Ejemplo 4.16 *Sea F un campo. Considerese R el anillo cuyos elementos son series de potencias de la forma $r = \sum\{c_q x^q : q \in \mathbb{Q}^+\}$, donde $c_q \in F$ y $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q\}$ y además $sop(r) = \{q : c_q \neq 0\}$ cumple la condición de cadena descendente, es decir si $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq 0$ con $q_i \in sop(r)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $q_k = q_{k+j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$, con esta condición aseguramos que el producto de series tenga sentido, así pues las operaciones de R son la suma y producto usual de series. Ahora definamos $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^+$ dada por $\nu(r) = \text{mín}(sop(r))$ (existe por CCD). Entonces ν satisface las siguientes propiedades:*

a) $\nu(\lambda r) = \nu(r)$ *para toda* $0 \neq k \in F$.

b) $\nu(r_1 + r_2) \geq \text{mín}\{\nu(r_1), \nu(r_2)\}$ *cuando* $r_1 + r_2 \neq 0$.

c) $\nu(r_1 r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2)$.

Ahora, para cada $\eta \in \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r\}$, definimos el conjunto $P_\eta = \{r \in R : \eta < \nu(r)\}$ que por la propiedades anteriores de ν se tiene que P_η es un ideal de R. Sea $\eta_i = \sqrt{p_i}$ donde p_i es el i-ésimo número primo, entonces se tiene la siguiente cadena $P_{\eta_1} \subset P_{\eta_2} \subset \ldots \subset P_{\eta_n} \subset \ldots$, de ideales de R. Se afirma que $R/P_{\eta_i} \perp R/P_{\eta_j}$ para toda $i \neq j$, supongamos lo contrario, entonces existen $i<j$, $a + P_{\eta_i} \in R/P_{\eta_i}$ y $b + P_{\eta_j} \in R/P_{\eta_j}$ tales que $0 \neq aR + P_{\eta_i} \cong bR + P_{\eta_j}$, luego consideremos $q_1 = \nu(a) \leq \sqrt{p_i}$, $q_2 = \nu(b) \leq \sqrt{p_j}$ y sean $I_i = ann_r(a + P_{\eta_i}) = \{r \in R : ar \in P_{\eta_i}\} = \{r \in R : \nu(a) + \nu(r) > \sqrt{p_i}\} = \{r \in R : \nu(r) > \sqrt{p_i} - q_i\}$, $I_j = ann_r(b + P_{\eta_j}) = \{r \in R : \nu(r) > \sqrt{p_j} - q_j\}$. Entonces se tiene que $I_i \subseteq I_j$ y $(R/I_i)/(I_j/I_i) \cong R/I_j \cong R/I_i$, *por lo tanto $I_i = I_j$ pero esto sólo es posible (considerando que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$) si $\sqrt{p_i} - q_i = \sqrt{p_j} - q_j$, luego $\sqrt{p_i} - \sqrt{p_j} = q_i - q_j \in \mathbb{Q}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/P_{\eta_i}) = \infty$.*

4.4. Ambas condiciones t-CCA y t-CCD

Definición 4.17 *Sea R un anillo y M un R-módulo. Decimos que M satisface t-CCD si para cada cadena descendente $X_1 \supseteq X_2 \supseteq ...$ de submódulos de M, se tiene que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/X_i) < \infty$. Un anillo R satisface t-CCD (derecho) si R_R como R-módulo satisface t-CCD.*

Lema 4.18 *Sea N un submódulo de M un R-módulo. Entonces:*

1) M satisface t-CCA si y sólo si N y M/N satisfacen t-CCA.

2) M satisface t-CCD si y sólo si N y M/N satisfacen t-CCD.

Demostración: 1) Si M satisface t-CCA, entonces de la Definición 4.12 se sigue que N y M/N satisfacen t-CCA. Supongamos que N y M/N satisfacen t-CCA, sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ una cadena de submódulos de M. Entonces se tienen $N \cap M_1 \subseteq N \cap M_2 \subseteq ... \subseteq N$ y $N + M_1/N \subseteq N + M_2/N \subseteq ... \subseteq M/N$ cadenas de módulos. Notemos que $N/(N \cap M_i) \cong (N + M_i/M_i)$ y que $(M/N)/[(N + M_i)/N] \cong M/(N + M_i)$, por lo tanto $\bigoplus_{i=1}^{\infty}(N + M_i)/M_i \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} N/(N \cap M_i)$ y $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/(N + M_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty}(M/N)/[(N + M_i)/N]$, que por hipótesis tienen dimensión tipo finita. Luego se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{\infty}(N + M_i)/M_i \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} M/M_i \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} M/(N + M_i) \to 0$$

Por el Lema 3.12(a) se tiene que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/M_i) < \infty$. Por lo tanto M satisface t-CCA.

2) Si M satisface t-CCD, entonces de la Definición 4.17 se sigue que N y M/N satisfacen t-CCD. Supongamos que N y M/N satisfacen t-CCD, sea $M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$ una cadena de submódulos de M. Entonces se tienen $N \supseteq N \cap M_1 \supseteq N \cap M_2 \supseteq ...$ y $M/N \supseteq N + M_1/N \supseteq N + M_2/N \supseteq ...$ cadenas de módulos. Notemos que $N/(N \cap M_i) \cong (N + M_i/M_i)$ y que $(M/N)/[(N + M_i)/N] \cong M/(N + M_i)$, por lo tanto $\bigoplus_{i=1}^{\infty}(N + M_i)/M_i \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} N/(N \cap M_i)$

y $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/(N+M_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty}(M/N)/[(N+M_i)/N]$, que por hipótesis tienen dimensión tipo finita. Luego se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{\infty}(N+M_i)/M_i \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} M/M_i \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} M/(N+M_i) \to 0$$

Por el Lema 3.12(a) se tiene que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M/M_i)<\infty$. Por lo tanto M satisface t-CCD. $\blacksquare$

Corolario 4.19 *Sean $M_1, M_2, ..., M_n$ R-módulos. Si M_i satisface la condición t-CCA (t-CCD) para toda $i = 1, ..., n$, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ también satisface la condicion t-CCA (t-CCD).*

Lema 4.20 *Sea R un anillo que satisface t-CCA. Si $N = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} N_i$ con $N_i \perp N_j$ para toda $i \neq j$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $y_i \in N$ tal que $ann_r(y_1) \supset ann_r(y_2) \supset ...$ y $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} y_iR) = \infty$.*

Demostración: Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $0 \neq x_i \in N_i$. Luego tenemos que x_iR es ortogonal a x_jR para toda $i \neq j$ y por lo tanto $ann_r(x_i) \neq ann_r(x_j)$. Notemos que a la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no le podemos extraer una subsucesión $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que la cadena $ann_r(x_{i_1}) \subset ann_r(x_{i_2}) \subset ... \subset ann_r(x_{i_n}) \subset ...$ sea extrictamente ascendente, ya que si este fuera el caso, con $I_j = ann_r(x_{i_j})$ se tendría una cadena de ideales de R tal que $t.dim(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} R/I_j) = \infty$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $0 \neq x_{i_1} \in N_{i_1}$ tal que el conjunto $X_1 = \{x_j : ann_r(x_{i_1}) \nsubseteq ann_r(x_j)\}$ es infinito. Ahora nos fijamos en la familia de ideales $\{ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_j) : x_j \in X_1\}$, luego notemos que si $ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_j) = ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_k)$ se tiene que:

$$0 \neq [ann_r(x_{i_1})/(ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_j))]$$
$$\cong (ann_r(x_{i_1}) + ann_r(x_j))/ann_r(x_j) \subseteq x_jR$$

y

$$0 \neq [ann_r(x_{i_1})/(ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_j))]$$
$$\cong (ann_r(x_{i_1}) + ann_r(x_k))/ann_r(x_k) \subseteq x_kR$$

Pero sólo es posible si $j = k$. Afirmamos que de la familia $\{ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_j) : x_j \in X_1\}$ no podemos extraer una subsucesión tal que la cadena $ann_{x_i} \cap ann_r(x_{j_1}) \subset ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_{j_2}) \subset ... \subset ann_r(x_{i_1})$ sea extrictamente ascendente, de lo contrario se tendría que:

$$0 \neq ann_r(x_{i_1})/(ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_{j_n}))$$

$$\cong (ann_r(x_{i_1}) + ann_r(x_{j_n}))/ann_r(x_{j_n}) \subseteq x_{j_n}R$$

y entonces $t.dim(\bigoplus_{n=1}^{\infty} R/(ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_{j_n}))) = \infty$ lo cual es una contradicción, ya que por hipótesis se tiene que R satisface t-ACC, por lo tanto la afirmación es cierta. En vista de la afirmación anterior, podemos encontrar $x_{i_2} \in X_1$ tal que el conjunto $X_2 = \{x_j : ann_r(x_{i_1}) \cap ann_r(x_{i_2}) \nsubseteq x_j\}$ es infinito. Si continuamos de este modo, encontramos una sucuesión $\{x_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $ann_r(x_{i_1}) \nsubseteq ann_r(x_{i_j})$ para toda $j>1$ (pues $x_{i_j} \in X_1$), y para cada $n \geq 2$ se tiene que $ann_r(x_{i_1}) \cap ... \cap ann_r(x_{i_n}) \nsubseteq ann_r(x_{i_j})$ para toda $j>n$ (ya que $x_{i_j} \in X_n$). Proponemos $y_n = x_{i_1} + ... + x_{i_n}$, entonces se tiene una cadena descendente $ann_r(y_1) \supseteq ann_r(y_2) \supseteq ...$, ahora para cada $n>1$ sea $r_n \in ann_r(x_{i_1}) \cap ... \cap ann_r(x_{i_{n-1}})$ tal que $r_n \notin ann_r(x_{i_n})$. Entonces $y_1R = x_1R$, $0 \neq y_2r_2R = x_{i_2}r_2R \subseteq x_{i_2}R$,..., $0 \neq y_nr_nR = x_{i_n}r_nR \subseteq x_{i_n}R$ para toda n. Por último, nótese que la familia $\{y_nr_nR\}_{n \geq 1}$ es de módulos ortogonales por pares y por lo tanto $t.dim(\bigoplus_{n=1}^{\infty} y_nR) = \infty$ y esto es lo que se quería probar. ■

Teorema 4.21 *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) *R satisface t-CCA y t-CCD.*

2) *Todo conjunto de módulos distintos de cero y ortogonales por pares, es finito.*

3) *Todo módulo tiene dimensión tipo finita.*

4) *Cada módulo inyectivo es una suma directa finita de módulos atómicos.*

5) *Todo módulo satisface t-CCA y t-CCD.*

6) *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier cadena $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ de ideales de R, se tiene que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/I_i)<n$.*

7) *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier cadena $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...$ de ideales de R, se tiene que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/I_i)<n$.*

Demostración: 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que existe $\{N_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunto infinito de *R-módulos* distintos de cero y ortogonales por pares. Sea $N = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} N_j$, entonces por el Lema 4.20 existen $y_i \in N$ tal que $ann_r(y_1) \supset ann_r(y_2) \supset ...$ y $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/ann_r(y_i)) = \infty$. Por lo tanto el *R-módulo* $R/\bigcap_{i=1}^{\infty} ann_r(y_i)$ no satisface t-CCD y por el Lema 4.18(2) se sigue que R no satisface t-CCD, lo cual es una contradicción.

2) $\Rightarrow$ 3) Con la Observación 3.11 es inmediato.

3) $\Rightarrow$ 5) Como todo módulo tiene dimensión tipo finita se sigue de las definiciones la condición 5).

5) $\Rightarrow$ 1) Es claro.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea E un módulo inyectivo, por hipótesis existen $A_1, ..., A_n \leq E$ submódulos atómicos ortogonales por pares tal que $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i \subseteq_e E$. Notemos que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E(A_i)$ y que $E(A_i)$ es atómico para toda $i = 1, ..., n$.

4) $\Rightarrow$ 3) Sea M un *R-módulo* entonces $M \hookrightarrow E(M)$ y por la Observación 3.11 se tiene que M debe tener dimensión tipo finita.

3) $\Rightarrow$ 6) Sea $L(R)$ el conjunto de ideales derechos del anillo R. Entonces por hipótesis se tiene que $t.dim(\bigoplus_{I\in L(R)} R/I) = m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Así pues, con el Lema 3.9 se tiene que si $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq R$ es una cadena de idelaes entonces $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/I_i) \leq m$, ya que $\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/I_i \subseteq \bigoplus_{I\in L(R)} R/I$ y entonces consideramos $n = m + 1$.

3) $\Rightarrow$ 7) Con un pequeo cambio en la prueba de 3) $\Rightarrow$ 6) se tiene el resultado.

6) $\Rightarrow$ 1) Sea n como en la condición 6). Es claro que R satisface la condición t-CCD. Supongamos que R no satisface t-CCA, entonces existe $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq R$ una cadena de ideales de R tal que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/I_i) = \infty$. Note que por hipótesis se tiene que $t.dim(R/I_i)<\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto podemos suponer que la cadena es extrictamente ascendente. De la misma forma con la que se probó el Lema 4.13, podemos suponer que existen K_i ideales de R tal que $0 \neq K_i/I_i$ y que $K_i/I_i \perp K_j/I_j$ para toda $i \neq j$. Por último, si consideramos la cadena descendente $R \supseteq I_n \supseteq I_{n-1} \supseteq ... \supseteq I_1$, con lo anterior tendríamos que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{n} R/I_i) \geq n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto R satisface t-CCA.

7) $\Rightarrow$ 1) Es similar a 6) $\Rightarrow$ 1). $\blacksquare$

Ejemplo 4.22

1) *Todo anillo artiniano satisface t-CCD.*

2) *Todo anillo neteriano satisface t-CCA. Entonces el anillo $\mathbb{Z}$ satisface t-CCA, pero no satisface t-CCD. Sea p_i el i-ésimo número primo y consideramos los ideales $I_n = p_1p_2...p_n\mathbb{Z}$, luego tenemos que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ y t.dim$(\bigoplus_{i=1}^{\infty} R/I_i) = \infty$. Pues $\mathbb{Z}_{p_n} \hookrightarrow R/I_n$.*

3) *Sea R la extensión trivial de el anillo $\mathbb{Z}_2$ y el $\mathbb{Z}_2$-módulo $\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}$, es decir $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}_2,\ x \in \mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)} \right\}$, donde la suma y producto de R son la suma y producto usual de matrices. Notemos que este anillo no es neteriano pues se tienen los ideales $I_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}_2,\ x \in \bigoplus_{i=1}^{n} N_i,\ \text{donde } N_i = \mathbb{Z}_2 \right\}$ y la cadena $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ... \subset R$ extrictamente ascendente. Afirmamos que R satisface las condiciones t-CCA y t-CCD. Para esto usaremos el Lema 4.18, sea $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_2,\ x \in \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i,\ \text{donde } N_i = \mathbb{Z}_2 \right\}$, entonces bastará probar que I y R/I satisfacen las condiciones t-CCA y t-CCD. Notemos que I es un R-módulo semisimple, pues con $J_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :\ x \in N_i,\ \text{donde } N_i = \mathbb{Z}_2 \right\}$ para $i \in \mathbb{N}$ y $J_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, se tiene que $I = \bigoplus_{i=0}^{\infty} J_i$ además se tiene que $J_i \cong J_0$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto I y todos sus cocientes son módulos atómicos y pertenecen al mismo atómo en $\mathcal{N}(R)$, con esto último y de las definiciones se sigue que I satisface las condiciones t-CCA y t-CCD. Ahora, tenemos que el R-módulo R/I solo posee dos elementos, por lo tanto R/I es un módulo simple y esta claro que cualquier módulo simple satisface las condiciones t-CCA y t-CCD.*

4) *Sea R la extensión trivial de el anillo $\mathbb{Z}$ y el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ con p número primo, es decir $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Z}_{p^\infty} \right\}$, donde la suma y producto de R son la suma y producto usual de matrices. Este anillo satisface la condición t-CCA pero no*

satisface t-CCD. Para demostrar esto, consideramos el ideal $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{Z}_{p^\infty} \right\}$ *y supongamos que* I *no satisface la condición t-CCA, entonces existe una cadena* $V_1 \subseteq V_2 \subseteq ... \subseteq I$ *de submódulos de* I *tal que* $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} I/V_i) = \infty$*, ahora observe que* V_i *es un submódulo de* $\mathbb{Z}_{p_\infty} \oplus \mathbb{Z}$ *(salvo isomorfismo) y consideremos* $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} I/V_i$ *un* R*-módulo y* $N = \bigoplus_{i=1}^{\infty}(\mathbb{Z}_{p_\infty} \oplus \mathbb{Z})/V_i$ *un* $\mathbb{Z}$*-módulo, entonces el lector puede verificar que si* $U_1, U_2 \leq N$ *son submódulos isomorfos (en* ***Mod-***$\mathbb{Z}$*) entonces* U_1 *y* U_2 *se pueden considerar como submódulos isomorfos de* M *(en* ***Mod-***R *) y con esto se puede comcluir que* $t.dim((\mathbb{Z}_{p_\infty} \oplus \mathbb{Z})/V_i) = \infty$ *(en* ***Mod-***$\mathbb{Z}$*) pero esto contradice que* $\mathbb{Z}_{p_\infty} \oplus \mathbb{Z}$ *satisface la condición t-CCA (en* ***Mod-***$\mathbb{Z}$*). Por lo tanto* I *satisface t-CCA. Ahora note que* R/I *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$ *en* ***Mod-***$\mathbb{Z}$*, luego si suponemos que* R/I *no satisface la condición t-CCA, entonces como en lo anterior se obtiene que* $\mathbb{Z}$ *no satisface la condición t-CCA (en* ***Mod-***$\mathbb{Z}$*) lo cual es una contradicción. Por lo tanto* R *satisface la condición t-CCA. Por último consideremos los ideales* $J_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : c \in p_1 p_2 ... p_n \mathbb{Z} \right\}$ *donde* $p_i \neq p_j$ *son números primos para toda* $i \neq j$*. Luego se tiene la cadena* $J_1 \supseteq J_2 \supseteq ...$ *de ideales de* R*, tal que* $t.dim(\bigoplus_{n=1}^{\infty} R/J_n) = \infty$*.*

El Teorema de Hopkins-Levitzki dice que si un anillo es artiniano izquierdo (derecho) entonces es neteriano izquierdo (derecho). Ya que los conceptos presentados aqui generalizan ser artiniano o neteriano, es natural preguntarse ¿si un anillo satisface la condición t-CCD entonces satisface la condición t-CCA?. El siguiente teorema da una respuesta parcial a esta pregunta.

Lema 4.23 *Sean* R *y* S *anillos equivalentes Morita mediante equivalencias* F :***Mod-***$R \to$***Mod-***S *y* G***Mod-***$S \to$***Mod-***R *inversas una de otra. Si* $M \in$***Mod-***R *entonces:*

1) M_R *satisface la condicion t-CCD si y sólo si* $F(M)_S$ *satisface la condición t-CCD.*

2) M_R *satisface la condicion t-CCA si y sólo si* $F(M)_S$ *satisface la condición t-CCA.*

Demostración: 1) Supongamos que M satisface la condición t-CCD. Entonces $GF(M)$ satisface la condición t-CCD ya que $M \cong GF(M)$. Supongamos que $F(M)$ no satisface t-CCD, entonces existe una cadena $F(M) \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq ...$ tal que $t.dim(\bigoplus_{i=1}^{\infty} F(M)/N_i) = \infty$. Sea $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de módulos ortogonales por pares tal que $V_j \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} F(M)/N_i$ para toda $j \in \mathbb{N}$, luego aplicamos el funtor G y se obtiene que:

$$G(V_j) \hookrightarrow G(\bigoplus_{i=1}^{\infty} F(M)/N_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} GF(M)/G(N_i)$$

si $X_i = Im(G(j_{N_i}))$ donde $j_{N_i} : N_i \hookrightarrow F(M)$ es la inclusión, obtenemos que $GF(M)/X_i \cong GF(M)/G(N_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$, y además $X_1 \supseteq X_2 \supseteq ...$ es una cadena de submódulos de $GF(M)$ tal que $G(V_j) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} GF(M)/X_i$. Pero como G es una equivalencia, se sigue que la familia $\{G(V_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de módulos ortogonales por pares, pero esto contradice el hecho de que $GF(M)$ satisface la condición t-CCD. Por lo tanto $F(M)$ satisface t-CCD.
Conversamente, si $F(M)$ satisface t-CCD entonces $GF(M)$ satisface t-CCD por lo anterior, y como $GF(M) \cong M$ se sigue que M satisface t-CCD.

2) Es similar a 1). ∎

Proposición 4.24 *Sea R un anillo que es equivalente Morita a un producto finito de dominios enteros. Si R satisface la condición t-CCD entonces R satisface la condición t-CCA.*

Demostración: Supongamos que R es un dominio entero y satisface t-CCD. Entonces se tiene que para toda $0 \neq x \in R$ y cualquier ideal I de R, $R/I \cong xR/xI \subseteq R/xI$. Ahora si R no satisface t-CCA, entonces podemos encontrar $0 \neq I_0 = I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq R$ una cadena de ideales de R tal que $t.dim(\bigoplus_{n=1}^{\infty} R/I_n) = \infty$. Si consideramos $0 \neq x_n \in I_n$ para toda n, entonces obtenemos $I_0 \supseteq x_0 I_1 \supseteq x_0 x_1 I_2 \supseteq ... \supseteq x_0 x_1 ... x_n I_{n+1} \supseteq ...$, una cadena descendiente de ideales de R, tal que $R/I_n \hookrightarrow R/x_0 ... x_{n-1} I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\infty = t.dim(\bigoplus_{n=1}^{\infty} R/I_n) \leq t.dim(\bigoplus_{n=1}^{\infty} R/x_0 ... x_{n-1} I_n) < \infty$ lo cual es una contradicción, por lo tanto R satisface t-CCA.

Ahora supongamos que $R = R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$ con R_i dominio entero, y R satisface t-CCD. Notemos que cada R_i es un submódulo de R y entonces R_i satisface t-CCD, pero por lo anterior R_i también satisface t-CCA y por el Corolario 4.19 R satisface la condición t-CCA.

Por último supongamos que R es equivalente Morita a S, un anillo que es producto de dominios enteros, y que R satisface la condición t-CCD. Del Corolario 1.66, podemos suponer que $S = End_R(P_R)$ donde P_R es un progenerador. También se tiene la equivalencia $F(\_) = Hom_R(P, \_)$:**Mod-**R$\rightarrow$ **Mod-**S dada por $N_R \mapsto Hom_R({}_SP_R, N_R)$ con inversa $G(\_) = \_ \otimes_S P$: **Mod-**S $\rightarrow$**Mod-**R dada por $M_S \mapsto M \otimes P$. Como P_R es un sumando directo de R^n para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces P_R satisface la condicion t-CCD por el Lema 4.18. Note que $F(P) = S$ y por el Lema 4.23(1) se tiene que S satisface la condición t-CCD. Luego sabemos que $G(S) \cong P$, aplicando el Lema 4.23(2), se sigue que P satisface la condición t-CCA. Notemos que, desde la Observación 1.47, R es una sumando directo de $P^{(m)}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y finalmente del Lema 4.18 se sigue que R satisface la condición t-CCA. ■

Bibliografía

[1] K.R. Goodearl, Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules, *Marcel Dekker Inc.*, 1976.

[2] R. Wisbauer, Foundations of Module and Ring Theory, *Gordon and Breach Science Publishers*, 1991.

[3] F.W. Anderson and K.R. Fuller, Rings and Categories of Modules, *Springer-Verlag*, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

[4] B. Stenström, Rings of Quotients, *Springer-Verlag*, New York, 1975.

[5] Y. Zhou, Descomposing modules into direct sums of submodules with types, *J. Pure Appl. Algebra* 138 (1999) 83-97.

[6] Y. Zhou, The lattice of natural classes of modules, *Comm. Algebra* 24 (5)(1996), 1637-1648.

[7] S.H. Mohamed and B.J. Müller, Continuous and Discrete Modules, *London Math. Soc. Lectures Notes* 147, Cambridge Univ. Press, 1990.

[8] J. Dauns, Modules and Rings, *Cambridge University Press*, Cambridge and New York, 1994.

[9] J. Dauns and Y. Zhou, Type dimension of modules and chain conditions, *Houston J. Math.* 29 (1)(2003), 15-23.

[10] J. Dauns, Type submodules and direct sum descompositions of modules, *Rocky Mountain J. Math.* 35 (1)(2005), 83-104.

[11] J. Dauns and Y. Zhou, Classes of Modules, *Chapman & Hall/CRC*, 2006.