UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA EN SISTEMAS – OPTIMACIÓN FINANCIERA

Métodos alternativos para la selección de portafolios de inversión en Mercados Emergentes

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
FERNANDO ISRAEL GARCÍA MUNGUÍA

TUTOR PRINCIPAL
EDGAR, ORTIZ, CALISTO, FAC. DE C. POLÍTICAS Y SOCIALES

MÉXICO, D. F. JUNIO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Álvarez Hernández Federico
Secretario:	Dr. Padilla Longoria Pablo
Vocal:	Dr. Ortiz Calisto Edgar
1 er. Suplente:	M.F. González Castañón Jorge Alberto
2 do. Suplente:	Dr. Morales Camarena Jair Gabriel

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: México, Distrito Federal

TUTOR DE TESIS:

Dr. Edgar Ortiz Calisto

____

FIRMA

(Segunda hoja)

Índice general

Introducción

Los mercados de valores promueven el crecimiento económico de un país; las empresas que necesitan financiamiento se encuentran con inversionistas que asignan parte de sus recursos económicos con el objetivo de obtener intereses por dichas inversiones, permitiendo así, que las empresas puedan iniciar o continuar con sus proyectos. Como resultado de lo anterior, el sistema económico y la generación de empleos se estimulan lo que ocasionan un incremento en el ingreso y el consumo que resulta en la reactivación continua de la economía.

A partir de la década de 1950, con el desarrollo de la Teoría Moderna del Portafolio promulgada por Harry Markowitz, el estudio relativo a mercados financieros como son: la teoría del portafolio, finanzas corporativas o ingeniería financierade entre otras, se ha basado en investigaciones académicas que han marcado la pauta para fomentar la práctica de las finanzas modernas. En 1959, Harry Markowitz [Markowitz 1959 [10]] estableció la definición pionera de portaflios óptimos la cual establece la eficiencia de un portafolio con base en cuán grandes son sus rendimientos esperados dado un nivel de riesgo o, equivalentemente, el menor riesgo posible dado un nivel de rendimiento esperado para un universo de títulos.

El enfoque *Media-Varianza (MV)* que desarrolló Markovitz para determinar la eficiencia de portafolios, es un marco de trabajo conveniente para definir y construir portafolios óptimos. La varianza, como medida de riesgo futuro, es sumamente adecuada para representar la percepción de riesgo del inversionista incluso para rendimientos sobre índices y activos que presentan alta asimetría. Sin embargo, en la práctica, este medida presenta ciertas limitaciones, principalmente, en términos de inestabilidad y ambiguedad; como por ejemplo, cambios pequeños en las hipótesis de entrada resultan en grandes cambios en los portafolios optimizados (debido a que el proceso de optimización magnifica el impacto de los errores de estimación).

Teorías sobre los mercados de capitales (para mercados completos) como el *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*, desarrollado de manera independiente por William Sharpe, Jack L. Treynor y Jan Mossin entre 1964 y 1966. Así como modelos explicativos sobre los rendimientos de los activos como el *Arbitrage Pricing Theory (APT)*, cuyo objetivo es robustecer la administración de portafolios de inversión, son un punto de partida para el desarrollo de modelos sobre el funcionamiento de los sistemas financieros. Sin embargo, dichas teorías no necesariamente funcionan en la realidad. En particular, en México, muchos son los factores que complican el desarrollo del mercado de valores como son: la falta de comprensión sobre el funcionamiento del Sistema Financiero, el difícil acceso a la información relacionada con el mercado de valores además de la falta de difusión de publicaciones orientadas al mercado de valores. Lo anterior es en gran medida el resultado de que en México, a diferencia de muchos países desarrollados o en vías de desarrollo (por ejemplo, Rusia y Brasil), su mercado de valores sea un mercado cerrado al que muy pocos tienen acceso.

Un claro ejemplo de esto son los fondos de pensiones para el retiro donde el futuro económico de los trabajadores afiliados al ISSSTE e IMSS dependen de los rendimientos que ciertos fondos de inversión provean; estos, deben ser administardos por instituciones certificadas las cuales, en algunas ocasiones, terminan desapareciendo y vendiendo sus carteras a otras instituciones sin que los dueños del dinero puedan tomar decisiones. Otro ejemplo son los fondos de inversión que bancos e instituciones financieras diseñan y sacan al mercado ofreciendo tasas de interés por encima de la inflación. En ambos casos la leyenda es el misma "son inversiones de bajo riesgo".

Argumentos existen de sobra para explicar la falta de motivación de las personas para invertir en bolsa. El temor, la inseguridad y la falta de conocimeinto, hacen que el sólo hecho de mencionar estrategias de inversión asociadas a las acciones, denote en automático en pensamientos catastróficos. Por tal motivo, la contribución de este proyecto bajo un enfoque estructurado para construir portafolios de inversión óptimos es de suma importancia tanto para la comunidad académica, como para los emprendedores que se están inciando en la práctica de invertir en bolsa [1].

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar un marco teórico para la administración eficiente de portafolios de inversión con la finalidad de que los lectores tengan un sustento robusto, tanto teórico como práctico que les permita comprender la gestión de portafolios. Con base en lo anterior, el proyecto tiene su fundamento en un proceso de inversión de cuatro componentes que definen una administración exitosa de activos [ver Qian 2007 [11] pág. 23].

El primer y más importante elemento de la lista es el *Modelo alpha*, este modelo se encarga de predecir los rendimientos relativos de las acciones dentro de un marco específico de inversión.

El segundo componente es un *"modelo de riesgo"* que estima el riesgo de cada acción (de forma individual) asi como la correlación de los rendimientos sobre diferentes acciones. Este modelo se deriva principalemente de los modelos CAPM y APT. El CAPM como se menconó anteriormente, es un modelo desarrollado para explicar el comportamiento del mercado de capitales sin embargo, puede aplicarse como modelo de riesgo si se considera que el riesgo total de una acción o portafolio consiste de la medición del riesgo sistemático medido por beta (β) y el riesgo especifico de la acción dejando a un lado el rendimiento

[1] Cabe mencionar, que el objetivo del presente trabajo no es el de ser una guía o instructivo para el nuevo inversionista sino más bien el de ser un documento de análisis que explique y oriente la forma en la cual se pueden constituir portafolios de inversión bajo diferentes metodologias y enfoques para la creación de fondos de inversión.

esperado.

Por otro lado, el APT tiene su base en dos premisas fundamentales, primero, un proceso de generación de rendimientos seguro en el que los rendimientos de una acción están relacionados linealmente con un conjunto de factores y segundo, la ley de un sólo precio (dos artículos idénticos deben tener el mismo precio). A diferencia del CAPM (en el que el factor es el rendimiento del mercado), los factores del modelo APT no hay una regla para definir los factores subyacentes. Además, no se especifica como medir la exposición bursatil de los factores [ver Ortiz 2013 [12]]. Derivado de lo anterior, se han desarrollado modelos multifactores que se basan en el APT y que pueden ser clasificados como [Qian 2007 [11]]:

1. Modelos de factores macroeconómicos. Estos modelos seleccionan sus factores con base en fenóminos económicos como por ejemplo, el movimeinto de las tasas de interés.
2. Modelos de factor fundamental, Seleccionan sus factores con base en atributos de las acciones.
3. Modelos de factores estadísticos. Para la selección de sus factores se usan técnicas estadisticas como componentes principales.

Para predecir los rendimeintos relativos de las acciones, se seleccionó el modelo de factores estadísticos como *modelo alpha*. La selección se basó en que este tipo de modelos no presta atención a datos macroeconómicos o fundamentales. Se basa únicamente en la explotación datos históricos por lo que este tipo de modelos es capaz de explicar el riesgo.

Es importante mencionar que debido a la presencia ruido en el ajuste de los precios, así como a la falta de un modelo económico de causalidad, es posible que la predicción de riesgo para horizontes de tiempo largos sea débil, por lo tanto, el presente proyecto incluirá una mejora a dicho *modelo alpha*, a través de la inclusiónde una función que filtre dicho ruido y mejore la estimación ajustada del riesgo.

La tercer pieza es la metodología de construcción del portafolio para combinar los pronósticos tanto de los rendimientos como de los riesgos y formar asi un portafolio óptimo. Finalmente, uno debe tener el proceso de ejecución del portafolio en lugar de ejecutar las operaciones de tal forma que la implementación del proceso se realizó para que su ejecución sea automatizada.

El proyecto se enfoca en el desarrollo de portafolios óptimos, estables y confiables. Así mismo, se retomó la idea de Richard O. Michaud y Robert O. Michaud en [Michaud [22] 2008], referente a los portafolios equiponderados y su relación con el portafolio MV óptimo, para desarrollar una metodología integral que se fundamente en el proceso de Entropía así como en el proceso de optimización sobre portafolios de varianza mínima.

La presente investigación pretende establecer una administración eficiente de activos, fundamentándose en la identificación de inversiones deseables, así como en la estructuración óptima de activos dentro de un portafolio. También, se pretende establecer un entendimiento de la estructura de portafolios eficientes para la gestión óptima de los beneficios de los portafolios de inversión, sin perder de vista que el comportamiento de las inversiones es típicamente diferente de los activos que las conforman.

Para poder comprender las condiciones iniciales, asi como los supuestos y consideraciones del proyecto; el presente trabajo está ordenado en 4 capítulos. En el Capítulo 1, se describe el Sistema Financiero Mexicano como marco legal mediante el cual las acciones pueden ser creadas e intercambiadas. Es en este capítulo en el que se describen cada uno de los participantes que hacen posible la oferta y demanda de dichos instrumentos.

En el Capítulo 2 se establecen las bases teóricas y supuestos fundamentales sobre los rendimientos de las acciones así como la introducción al concepto de función de utilidad como función a optimizar bajo el enfoque MV. Es en este Capítulo, donde se define la forma de calcular los rendimientos bajo el supuesto de Lognormalidad así como el uso de la función de utilidad isoelástica como función objetivo.

El desarrollo del modelo propuesto será detallado en el Capítulo 3. En éste capítulo, se fundamenta el marco teórico para sustentar el uso de Componentes Principales y Filtración de Thikonov para reducir el ruido en la estimación de la matriz de Varianzas-Covarianzas. Además, para la obtención de ponderadores para la gestión de portafolios óptimos, se establecerán los supuestos relacionados con el uso de la Función de Utilidad Isoelástica como condición fundamental en la maximización de Entropía .

El Capítulo 4 tiene como objetivo, mostrar los resultados de la aplicación práctica del modelo propuesto. Para tal efecto, se desarrolló la aplicación en código SAS y se utilizó el precio de las acciones que conforman el IPC con base en la información disponible en el sitio de internet *"http://mx.finanzas.yahoo.com/"*. Para comprobar el modelo desarrollado, se utilizó la información pública contenida en dicho sitio y se dividió en 3 ventanas de tiempo (antes, durante y posterior a la crisis subprime del 2008).

Finalmente, en el último apartado del presente trabajo se presentan las conlusiones y siguientes pasos. Al finalizar, el lector tendra argumentos sólidos para comprender la creación y estructuración de portafolios óptimos bajo una metodología complementaria del modelo MV establecido por Harry Markowitz en la decada de 1950. Cabe señalar, que la metodología propuesta en este trabajo es un complemento a la metodologia MV. El presente proyecto se realizó, en líneas generales, con base en los trabajos de Bera [Bera [20] 2005] y Park [Park y O'Leary [19] 2010] así como en la idea de Bootstrapping patentada por Richard O. Michaud y Robert O. Michaud [[22] 2008].

Capítulo 1

Sistema Financiero y Mercado de Capitales

El desarrollo de la economía de México está íntimamente ligado al desarrollo de un Sistema Financiero Mexicano robusto y consolidado así como a la variedad de instrumentos financieros que puedan circular a través de los mercados de dinero, capitales y derivados. En México el Sistema Financiero ha sufrido cambios y modificaciones durante los ultimos 40 años debido en gran medida, a las dos grandes crisis de finales de siglo pasado (1982 y 1995) así como el retiro de la concesión del servicio bancario (nacionalización de la banca).

El Sistema Financiero en México está conformado por tres entidades fundamentales: 1) La Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), 2) La Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef) y 3) El Banco de México (Banxico). La SHCP es la máxima autoridad dentro del Sistema Financiero Mexicano; cuenta con tres comisiones nacionales (Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) y Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR)) mediante las cuales implementa funciones de supervisión y vigilancia. Por otro lado, la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Servicios Financieros (Condusef) tiene como objetivo asesorar y proteger los intereses de los usuarios del Sistema Financiero. Finalmente, el Banco de México es una institución autónoma que regula los cambios y la intermediación financiera con la finalidad de procurar la estabilidad del poder adquisitivo de la moneda nacional; es también el principal organismo del Sistema Financiero pues actúa como regulador de los tipos de cambio y moneda; presta servicios de tesorería al Gobierno Federal además de operar con organismos internacionales (en particular con el Fondo Monetario Internacional).

El análisis del Sistema Financiero en México es un tema basto que merece consideraciones especiales y un detenimiento profundo en cada una de sus estructuras fundamentales. El presente capítulo tiene como objetivo dar una breve visión de lo que es el Sistema Financiero Mexicano y profundizar en una de sus estructuras fundamentales, el Mercado de Capitales, ya que es necesario establecer un marco de referencia para el análisis cuantitativo asociado a un tipo particular de instrumentos financieros (Acciones) que será desarrollado en capítulos posteriores.

1.1. Sistema Financiero

El Sistema Financiero es un conjunto de Instituciones con funciones específicas que tienen como finalidad captar recursos económicos de inversores (personas físicas o morales) para ponerlos a disposición de empresas o instituciones gubernamentales de forma inteligente y, de esta manera, contribuir al crecimiento de la economía de un país a través de la asignación eficiente de capital. Un sistema financiero robusto y sólido es determinante para alcanzar la prosperidad y estabilidad económica de un país. Un sistema financiero ayuda al crecimiento de la riqueza de un país debido a la incorporación de incentivos para el ahorro y a la inversión productiva de este, favoreciendo así la reducción del costo de capital (ver [1]).

La principal función de un sistema financiero es intermediar entre quienes tienen y quienes necesitan dinero. Quienes tienen dinero y no lo requieren en el corto plazo para pagar deudas o efectuar consumos desean obtener un premio a cambio de sacrificar el beneficio inmediato que obtendrían disponiendo de esos recursos; ese premio es la tasa de interés. Quienes requieren en el corto plazo más dinero del que poseen, ya sea para generar un valor agregado mediante un proyecto productivo (crear riqueza adicional) o para cubrir una obligación de pago, están dispuestos a pagar, en un determinado periodo y mediante un plan de pagos previamente pactado, un costo adicional por obtener de inmediato el dinero; ese costo es la tasa de interés. Empatar las necesidades y deseos de unos, los ahorradores, con las necesidades de otros, los deudores, es la principal tarea del sistema financiero y en dicha labor las tasas de interés juegan un papel central (ver [3]).

El sistema financiero desempeña un papel central en el funcionamiento y desarrollo de la economía. Está integrado principalmente por diferentes intermediarios y mercados financieros a través de los cuales una diversidad de instrumentos movilizan el ahorro hacia usos más productivos. Los bancos son quizá los intermediarios financieros más conocidos, puesto que ofrecen directamente sus servicios al público y forman parte medular del sistema de pagos. Sin embargo, en el sistema financiero participan muchos otros intermediarios y organizaciones que ofrecen servicios de gran utilidad para la sociedad. La clasificación del Sistema Financiero en México es la siguiente:

- **Subsistema bancario y de valores**. Es un subsistema supervisado por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) el cual está integrado por las instituciones de crédito (banca múltiple y banca de desarrollo), organizaciones auxiliares de crédito, actividad auxiliar de crédito, sociedades financieras y Servicios Financieros, fideicomisos del Gobierno Federal para el fomento económico, bolsa de valores, bolsa de derivados, empresas calificadoras, casas de bolsa, Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles, sociedades de inversión, sociedades operadoras de sociedades de inversión y el S.D. Indeval. Es posible incluir sociedades cooperativas de ahorro y préstamo, las federaciones y confederaciones que las agrupan así como las financieras populares, integrantes del sistema financiero popular.

- **Subsistema de seguros y fianzas**. Es un subsistema supervisado por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) el cual está integrado por instituciones de seguros, sociedades mutualistas e instituciones de fianzas.

- **Subsistema de ahorro para el retiro**. Es un subsistema supervisado por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR) el cual está integrado por administradoras de fondos para el retiro(afores) y sociedades de inversión especializadas en fondos para el retiro (siefores).

1.1.1. Subsistema bancario de valores

Nacional Bancaria y de Valores

Es un órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público con facultades ejecutivas de acuerdo a su propia ley. Tiene por objeto supervisar y regular a las entidades financieras bancarias y bursátiles, buscando mantener y fomentar el equilibrio de este subsistema a través de su estabilidad y buen funcionamiento, para proteger el interés de los ahorradores e inversionistas. Otra de sus funciones es supervisar y regular a todas aquellas personas que realicen actividades previstas en las leyes relativas al sistema financiero.

Las entidades financieras que supervisa y regula son:

- **Sociedades controladoras de grupos financieros.** Su objetivo es adquirir y controlar las acciones de las empresas que lo integran (debe ser dueño de cuando menos el cincuenta y un por ciento del capital de las instituciones financieras que conforman un grupo financiero) además de tener el control de la asamblea de accionistas de todas las empresas integrantes del Grupo.

- **Instituciones de crédito.** Son sociedades con personalidad jurídica y patrimonio propio cuyo objetivo es prestar servicio de banca y crédito con apoyo a las prácticas y usos bancarios. Operan según directrices de política económica señaladas por el ejecutivo federal. Este tipo de sociedades participan en la intermediación financiera, orientada a captar el ahorro interno y canalizarlo hacia aquellas actividades estratégicas y prioritarias que se señalan en el Plan Nacional de Desarrollo y los Programas de Mediano Plazo.

- **Bolsa de Valores.** Es la sociedad anónima de capital variable eje del mercado accionario en México. Tiene por objetivo proporcionar los servicios, medios e infraestructura necesarios para que la emisión, colocación y comercio de valores inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios (RNVI) se lleve a cabo de manera eficaz y eficiente.

- **Sociedades de Inversión.** Es una sociedad anónima que tiene por objetivos fortalecer y descentralizar el mercado de valores, permitir el acceso del pequeño y mediano inversionista al mercado de valores, promover la diversificación o democratización del capital así como contribuir al financiamiento de la planta productiva.

- **Casas de bolsa.** Es una sociedad anónima de capital variable que puede operar como agente de valores asi como intermediario directo en la operación bursátil. Su objetivo es proporcionar la infraestructura necesaria para la realización eficaz de la emisión, colocación e intercambio de valores y títulos inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios (RNVI).

- **Emisoras.** Son empresas que obtienen recursos financieros vía la emisión de acciones, obligaciones, papel comercial y pagares de mediano plazo o certificados bursátiles.

- **Mercado mexicano de derivados (Mexder y Asigna).**

    - **Mexder.** Es una sociedad anónima de capital variable cuya misión es impulsar el crecimiento del mercado mexicano de derivados de acuerdo con las necesidades de las empresas, inversionistas y del Sistema Financiero en general. Su objetivo es desarrollar herramientas que faciliten la cobertura, administración de riesgos y eficiencia en el manejo de portafolios de inversión, bajo un marco de transparencia e igualdad de oportunidades para todos los participantes.
    - **Asigna, Compensación y Liquidación.** Es la cámara de compensación que sirve como garante de las obligaciones financieras del Mexder. Su objetivo es ser la contraparte o garante de todos los contratos negociados en el Mexder.

1.1.2. Subsistema de seguros y fianzas

Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF)

Es un órgano desconcertado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, con autonomía técnica y facultades ejecutivas de acuerdo con su propia ley, cuya misión es garantizar, a los usuarios de los seguros y fianzas, que los servicios y actividades que las instituciones y entidades autorizadas realizan, se apeguen a lo establecido por las leyes.

Las entidades financieras que supervisa y regula son:

- **Instituciones de Seguros.** Son empresas que se obligan mediante la celebración de un contrato, en el momento de su aceptación y mediante el cobro de una prima, a resarcir un daño o pagar una suma de dinero al ocurrir la eventualidad prevista en el contrato. La importancia de la función del seguro se da al redistribuir las aportaciones de menor cuantía para pagar o cubrir indemnizaciones cuantiosas a los afectados. La posibilidad de cubrir estos sinietstros se obtiene al administrar adecuadamente sus carteras de inversión.

- **Instituciones de fianzas.** Es la empresa que se obliga mediante la celebración de un contrato a cumplir a un deudor la obligación con su acreedor en caso de que éste no lo haga mediante el cobro de una prima. Existen tres tipos de fianzas:

    - **Fidelidad.** Es la que garantiza a un patrón el desempeño fiel y honesto de un trabajador.
    - **Judicial.** Garantiza el cumplimiento de una resolución emitida por una autoridad judicial, como libertad bajo fianza o condicional.
    - **Administrativa.** Es aquella que garantiza el cumplimiento de obligaciones derivadas de un contrato.
    - **De crédito.** Es aquella que garantiza el pago de algún crédito otorgado.

1.1.3. Subsistema de ahorro para el retiro

El Sistema de Ahorro para el Retiro tiene como objetivo regular el funcionamiento de los sistemas de ahorro para el retiro y sus participantes, los cuales están previstos en esta Ley y en las leyes del Seguro Social, del Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los trabajadores y del Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado y que la coordinación, regulación, supervisión y vigilancia de los sistemas de ahorro para el retiro están a cargo de la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro.
En este sistema, los trabajadores destinan parte de su salario a un ahorro forzoso para su supervivencia en el retiro, otra aportación la hace el patrón y una más el gobierno federal.

Las entidades financieras que supervisa y regula son:

- **Administradoras de fondos para el retiro (afores).** Las afores administran los ahorros de los trabajadores y cuentan con facultades para establecer el cobro de cuotas fijas y comisiones. Tienen prohibido emitir obligaciones, gravar su patrimonio, otorgar garantías y adquirir el control de empresas (con la finalidad de salvaguardar el patrimonio de los trabajadores).

- **Sociedades de inversión especializadsas de fondos para el retiro (siefores).** Son las empresas en las que se invierten los ahorros de los trabajadores, de las cuales éstos son accionistas. Su único objetivo es invertir los recursos provenientes de las cuentas individuales que reciben en los términos de las leyes de seguridad social, así como los recursos de las administradoras.

1.1.4. Banca de desarrollo

Es la banca orientada al desarrollo de ciertas actividades económicas que son de interes nacional como el desarrollo industrial, sector agropecuario, comercio exterior, financiamiento a la infraestructura o a las fuerzas armadas. Sus actividades son realizadas por las siguientes instituciones especializadas:

- **Nacional Financiera, S.N.C. (Nafin).** Es una institución cuyo objetivo es fomentar el desarrollo del Sistema Financiero Mexicano en particular, fomentar el desarrollo industrial.

- **Banco Nacional de Comercio Exterior, S.N.C. (Bancomext).** Esta institución tiene como objetivo financiar y promover el comercio exterior de bienes y servicios.

- **Financiera Rural (Finrural, antes Banrural).** Su objetivo es impulsar el desarrollo de las actividades agropecuarias, forestales, pesqueras y todas las demás actividades económicas vinculadas al medio rural, con la finalidad de elevar la productividad, así como mejorar el nivel de vida de su población.

- **Banco Nacional de Obras y Servicios Públicos, S.N.C. (Banobras).** Este banco tiene como objetivo financiar o refinanciar proyectos de inversión pública o privada en infraestructura y servicios públicos, así como coadyuvar el fortalecimiento institucional de los gobiernos federal, estatales y municipales, con la finalidad de contribuir al desarrollo sustentable del pais.

- **Banco Nacional del Ejército, Fuerza Aérea y Armada, S.N.C. (Banjército).** Este banco de las fuerzas armadas tiene como objetivo otorgar apoyos financieros a los miembros del Ejército, Fuerza Aérea y Armada mexicanos.

1.1.5. Banca popular

Está integrado por el Banco del Ahorro Nacional (Bansefi), el cuál es la institución líder y de respaldo de éste sistema; las sociedades financieras populares, que son uno de los dos tipos de institución que pueden llevar a cabo la actividad de banca popular y las sociedades cooperativas de ahorro y préstamo, que son las instituciones con el potencial para mexicanizar la banca y servir de palanca al desarrollo del crédito en México.

1.1.6. Sistema financiero no regulado

El sistema financiero no regulado comprende las operaciones de financiamiento, inversión y servicios financieros que no son controlados o supervisados por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público. Como ejemplo de esta actividad se tiene: préstamos entre familiares y conocidos, ventas en pagos así como las sociedades financieras de objeto múltiple que pueden tener por objeto la realización de operaciones de arrendamiento financiero y/o factoraje financiero y/o crédito para cualquier fin.

En este Capítulo se ha hecho una breve conceptualización sobre lo que es y quienes conforman el Sistema Financiero Mexicano con la finalidad de comprender la estructura del mismo así como de sus integrantes, sus funciones y objetivos. Este apartado permitirá comprender y contextualizar el siguiente apartado (mercado de valores).

A continuación se presentara el segundo y último apartado de este capítulo el cual tiene como finalidad presentar un panorama general del Mercado de Valores en México. ¿Qué es?, ¿cómo funciona? y ¿para qué sirve? el mercado de valores.

1.2. Mercado de Valores

El mercado de valores orienta los recursos de las empresas emisoras a la generación de empleos, pago de impuestos, producción de satisfactores y bienestar para trabajadores, proveedores, propietarios y gobierno. Está integrado por un conjunto de instituciones, instrumentos, autoridades, oferentes y demandantes de valores y dinero [8].

Los mercados de valores son aquellos en los que se intercambian activos con el propósito principal de movilizar dinero a través del tiempo. Están integrados fundamentalmente por los mercados de deuda, los mercados de acciones y el mercado cambiario. Existen dos tipos de valores que las empresas ofrecen a los inversionistas a través de dichos mercados: los títulos o instrumentos de deuda (obligaciones contractuales para recuperación de préstamos realizados a empresas) y los títulos accionarios (representan derechos no contractuales sobre los flujos de activo residuales de la empresa).

Las empresas que requieren recursos para financiar su operación o proyectos de expansión, pueden obtenerlo mediante el mercado bursátil, a través de la emisión de valores que son puestos a disposición de los inversionistas e intercambiados en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) en un mercado transaparente de libre competencia y con igualdad de oportunidades para todos sus participantes [8]. Los mercados de valores se componen de los mercados de dinero y de los mercados de capitales.

- **Mercado de Dinero.** Conjunto de Oferentes y Demandantes de fondos a corto plazo (menores a un año), representado por instrumetos de captación y colocación de recursos.
- **Mercado de Capitales.** Conjunto de oferentes y demandantes de fondos a plazos mayores a un año, representado por instrumentos de captación y colocación de recursos a mediano y largo plazo.

1.2.1. Mercado de Dinero

El mercado de dinero resguarda la actividad a corto plazo donde existen oferta y demanda de dinero e instrumentos para su inversión o financiamiento. En este mercado se trata de negociar la mercancía llamada *dinero*, en la forma de títulos valor representativo de deuda (gubernamental o privada). El costo de estos instrumentos es la tasa de interés o la tasa de descuento, de las cuales se deriva el rendimiento que proporcionan. Está compuesto por:

- *Oferentes.* Llevan los recursos al mercado (ahorradores o inversionistas).
- *Demandantes.* Requieren financiamiento para para satisfacer sus necesidades de capital de trabajo o dinero.
- *Intermediarios.* Casas de bolsa, bancos, sociedades financieras de objeto limitado, uniones de crédito o sociedades cooperativas de ahorro y préstamo.
- *Instrumentos.* Son los títulos de crédito, la deuda documentada que se comercia en este mercado.

Instrumentos del mercado de dinero

Las principales características del mercado de dinero son el tiempo (plazos menores a un año) y su liquidez. La participación en este mercado se realiza mediante mesas de dinero y diferentes depósitos como: cuenta de cheqes o en el mercado bursátil invirtiendo en instrumentos como:

I. Instrumentos Gubernamentales

- Cetes (Certificados de la Tesorería de la Federación). Son títulos de crédito al portador en los que se consigna la obligación de su emisor, el Gobierno Federal, de pagar una suma fija de dinero en una fecha predeterminada.
  - Valor Nominal: \$10 pesos, amortizables en una sola exhibición al vencimiento del título.
  - Plazo. las emisiones suelen ser a 28, 91, 182 y 364 días, aunque se han realizado emisiones a plazos mayores. Su principal característica es ser los valores más líquidos del mercado.
  - Rendimiento. se operan a descuento.
  - Garantía. Son los títulos de menor riesgo (están respaldados por el gobierno federal).
- Udibonos. Este instrumento está indexado al INPC para proteger al inversionista de las alzas inflacionarias.
  - Valor Nominal. 100 UDIS.
  - Plazo. 3, 5 y 10 años con pagos semestrales.
  - Rendimeinto. Operan a descuento y dan una sobretasa por encima de la inflación (o tasa real) del periodo correspondiente.
- Bondes (Bonos de desarrolo del Gobierno Federal). Son títulos emitidos por el Gobierno Federal.
  - Valor Nominal. \$100 pesos.
  - Plazo. Su vencimiento cualquiera en múltiplos de 28 días.
  - Rendimiento. Se colocan en el mercado a descuento, con un rendimiento pagable cada 28 días (la mayor entre CETES a 28 días o TIIE).
- Pic-Farac (Pagaré de Indemnización Carretero). Pertenece al Fideicomiso de Apoyo al Rescate de Autopistas Concesionadas), es un pagaré avalado por el Gobierno Federal a través del Banco Nacional de Obras y Servicios S.N.C. en el carácter fiduciario.
  - Valor Nominal. 100 UDIS.
  - Plazo. Su vencimiento es 5-30 años.
  - Rendimiento. Rendimiento en moneda nacional depende del precio de adquisición, con pago de la tasa de interés fija cada 182 días.
  - Garantía. Gobierno Federal.
- Bonos BPAS. Son emisiones del Instituto Bancario de Protección al Ahorro con el fin de hacer frente a sus obligaciones contractuales y reducir gradualmente el costo financiero asociado a los programas de apoyo a ahorradores.
  - Valor Nominal. \$100 pesos, amortizables al vencimiento de los títulos en una sola exhibición.
  - Plazo. 3 años.
  - Rendimiento. Se colocan en el mercado a descuento y sus intereses son pagaderos cada 28 días. La tasa de interés será la mayor entre la tasa de rendimiento CETES a 28 días y la tasa de interés anual más representativa

que el Banco de México de a conocer para los pagares con rendimiento liquidable al vencimiento (PRLVs) al plazo de un mes.
- Garantía. Gobierno Federal.

II. Instrumentos de deuda a corto plazo

- Papel Comercial. Es un instrumento de financiamiento e inversión representado por un pagaré a corto plazo; se cotiza en la BMV. Es emitido y operado por las sociedades mercantiles emitidas en el país.
  - Valor Nominal. $100 pesos o sus múltiplos.
  - Plazo. hasta 360 días (oscila entre 7 y 91 dias).
  - Rendimiento. Diferencia entre el precio de compra bajo par y el precio de venta.
  - Garantía. Depende de la capacidad financiera y crediticia de la empresa emisora
- Aceptaciones bancarias. Son la letra de cambio que emite un banco en respaldo al préstamo que hace una empresa. El banco, para fondearse, coloca la aceptación en el mercado de deuda, gracias a lo cual no se respalda en los depósitos del público.
  - Valor Nominal. $100 pesos.
  - Plazo. 7-182 días.
  - Rendimiento. Se fija con relación a una tasa de referencia que puede ser CETES o TIIE (tasa de interés interbancaria de equilibrio), pero siempre es un poco mayor debido a que no cuenta con garantía e implica mayor riesgo que un documento gubernamental.
- Pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento (PRLV). Títulos de corto plazo emitidos por instituciones de crédito.
  - Valor Nominal. $1 pesos.
  - Plazo. 7-360 días.
  - Rendimiento. Los intereses se pagan a la tasa pactada por el emisor al vencimiento de los títulos.
  - Garantía. El patrimonio de la institución de crédito que lo emite.
- Certificados bursátiles de corto plazo. Son títulos de crédito que se emiten en serie o en masa, destinados a circular en el mercado de valores, deben señalar que son certificados bursátiles y títulos al portador, así como la denominación social del emisor y el objeto de la sociedad o de la entidad pública paraestatal correspondiente. Si son emitidos por entidades federativas o municipios, únicamente su denominación.

1.2.2. Mercado de Capitales

Los mercados de capitales son los mercados financieros que se caracterizan por la oferta y demanda de fondos o medios de financiación a mediano y largo plazo; tienen como objetivo ser intermediarios y canalizar los recursos y ahorros de los inversionistas para que las empresas que emiten dicha deuda puedan financiarse y de esta manera, incentivar el ahorro interno y generar fuentes de capital para las empresas a través de una diversidad de productos financieros. [27]

El mercado de capitales se define como el conjunto de leyes, reglamentos, instituciones, intermediarios y participantes en general, tendientes a poner en contacto la oferta y la demanda de títulos de crédito. La intermediación de valores tiene como objetivo, financiar y capitalizar a las empresas para brindar a los inversionistas una expectativa de ganancia patrimonial.

Existen diferentes tipos de mercados de capitales los cuales se diferencían unos de otros de acuerdo a los títulos que se negocían, su estructura o los activos. En particular, los tipos de mercados de capitales se clasifican en:

- De acuerdo en lo que se negocía, se clasifican en:
    - Bolsa de Valores
        - Instrumentos de renta fija
        - Instrumentos de renta variable
    - Mercado de crédito a largo plazo
        - Préstamos
        - Créditos bancarios
- Con base en su estructura, se clasifican en:
    - Mercados organizados
    - Mercados no organizados
- Con base en los activos, se clasifican en:
    - Mercados primario
    - Mercados secundario

Instrumentos de deuda del mercado de capitales

Una diferencia clave entre el mercado de dinero y el mercado de capital es el plazo de los titulos. En el mercado de capital se operan títulos a mediano y largo plazo que de cualquier manera tienen buena liquidez. Así mismo, algunos de estos títulos del mercado de capital representan capital de deuda (pasivos) y otros representan capital de aportación (las acciones).

I. Instrumentos de deuda a mediano plazo.

    - Pagaré de mediano plazo. Son títulos de crédito emitidos por una sociedad mercantil para obtener financiamieno a mediano plazo.
        - Valor Nominal. Múltiplos de $100, 100 udis o sus múltiplos con cupones adheridos para el pago periódico de interés.

- Plazo. 1-7 años, su amortización puede ser al término del plazo o en parcialidades anticipadas.
- Rendimiento. A tasa variable, de acuerdo a las condiciones del mercado.
- Garantía. Puede ser quirografaria, fiduciaria, avalada.

II. Instrumentos de deuda a largo plazo.

- Obligaciones. Son instrumentos emitidos por empresas privadas que participan en el mercado de valores.
  - Valor Nominal. Variable.
  - Plazo. 3-8 años, su amortización puede ser al término del plazo o en parcialidades anticipadas.
  - Rendimiento. Dan una sobretasa teniendo como referencia a los CETES o TIIE.
  - Garantía. Puede ser quirografaria, fiduciaria, avalada, hipotecaria o prendaria.
- Certificados de participación inmobiliaria. Títulos colocados en el mercado bursátil por instituciones crediticias con cargo a un fideicomiso cuyo patrimonio se integra por bienes inmuebles.
  - Valor Nominal. \$10 a \$100 pesos.
  - Plazo. Mayores a 3 años.
  - Rendimiento. Se colocan en el mercado a descuento, con un rendimiento pagable cada 28 días (la mayor entre CETES a 28 días o TIIE).
- Certificados de participación ordinarios. Son títulos colocados en el mercado bursátil por instituciones crediticias con cargo a un fideicomiso cuyo patrimonio se integra por bienes inmuebles.
  - Valor Nominal. \$100 pesos o 100 udis.
  - Plazo. Mayores a 3 años y su amortización puede ser al vencimiento o con pagos periódicos.
  - Rendimiento. Pagan una sobretasa teniendo como referencia los Cetes, la TIIE o una tasa real.
- Certificados bursátiles. Es un instrumento de deuda de mediano y largo plazo, la emisión puede ser en pesos o en unidades de inversión.
  - Valor Nominal. \$100 pesos o 100 unidades de inversión dependiendo de la modalidad.
  - Plazo. Mayores a un año.
  - Rendimiento. Puede ser a tasa variable de acuerdo a condiciones de mercado por mes, trimestre, semestre, etc.; fijo determinado desde el inicio de la emisión; a tasa real, etc. El pago puede ser mensual, trimestral, semestral, etc.

Todos los instrumentos son susceptibles de venderse a vencimiento o en reporto a excepción del papel comercial (ver [8] para mayor detalle) [1].

Como se mencionó anteriormente, cuando una empresa requiere de capital, tiene básicamente dos formas de obtenerlo, una es a través de préstamos en forma de créditos o títulos de deuda, y la otra mediante la emisión de capital nuevo.

La principal diferencia entre estas dos fuentes de financiamiento radica en que, con los préstamos, las empresas están obligadas a pagar alguna forma de interés a la persona o institución que les otorga el financiamiento; mientras que con la emisión de capital, las empresas sólo efectúan pagos a los inversionistas si la empresa genera utilidades. Esta diferencia hace que la emisión de capital sea menos riesgosa para las empresas pero más riesgosa para los inversionistas.

Los títulos que representan el capital invertido en una compañía se conocen como acciones y pueden tener diferentes características dependiendo del poder de votación que el poseedor de las acciones tenga en la empresa, las utilidades a las que tiene acceso o el porcentaje de la empresa que representa. Por ejemplo, las acciones comunes u ordinarias son aquellas que, de acuerdo con los estatutos sociales de la emisora, no tienen calificación o preferencia alguna. Tienen derecho a voto general interviniendo en todos los actos de la vida de la empresa y, sólo tienen derecho a dividendos, es decir, a pagos periódicos provenientes de las utilidades generadas por la empresa, después de que se haya pagado a las acciones preferentes.

Una **Acción** es un título valor representativo de una parte alícuota del capital social de una sociedad anónima, siempre otorga a su titular derechos patrimoniales, y dependiendo del tipo de acción también otorga derechos corporativos. Las acciones son emitidas en masa o en serie y cuentan con títulos accesorios llamados cupones. El valor de una acción

[1] Las operaciones de compra-venta por parte de los clientes de Casa de Bolsa y Bancos, los cuales intervienen como intermediarios entre oferentes y demandantes de dinero, con instrumentos propios del Mercado de Dinero son aquellas en las que los clientes adquieren instrumentos a precio de mercado obteniendo sus rendimientos con base en los diferenciales de compra y venta en un periodo de tiempo determinado. La función de los intermediarios financieros es asesorar al cliente respecto del instrumento que le conviene adquirir, dependiendo del plazo al que se desee invertir, así como realizar la operación de compra de la misma, teniendo como utilidad un diferencial ya establecido entre el precio al que se lo vende al cliente.

Las operaciones en reporto son aquellas en las que los intermediarios, compran para posición propia, instrumentos dentro de este mercado, para luego financiarse esta posición con dinero de sus clientes, de tal modelo que la Institución financiera se comprometa a pagar un monto fijo de intereses a un plazo determinado por el monto con el cual se financia. Los intermediarios financieros pueden hacer negocio con este tipo de operaciones en la medida que, por una parte, las fluctuaciones de los precios en el mercado puedan ser pronosticables y por otro que el compromiso con el cliente sea el adecuado al momento de realizar la operación con respecto a las expectativas, con base en los diferenciales de precios.

El rendimiento que ofrecen los diversos instrumentos pueden ser con base en una tasa de rendimiento que es el porcentaje que produce una inversión a partir de un valor actual; o con base en el descuento que es el porcentaje que se le aplica al valor nominal de un instrumento para determinar el descuento a disminuirle.

puede ser expresado con base en:

- **Valor Nominal.** Se determina dividiendo el Capital Social (el capital expresamente invertido como tal en la sociedad) entre el número de acciones de la empresa.
- **Valor teórico.** Es el valor resultante de dividir el importe del capital social entre el número de acciones que lo conforman.
- **Valor en Libros o Valor Contable.** Es el valor que tendría el documento en caso de liquidación de la empresa. Se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{(ActivoTotal - PasivoTotal)}{TotalAcciones}$$

- **Valor del Mercado de una Acción.** Es el precio al que se cotiza en un momento dado en la Bolsa Mexicana de Valores. Las cotizaciones de cierre son las que aparecen como último hecho en esta figura y corresponden al valor de mercado al que se negociaron las acciones por última vez en el día.

A continuación se describen los diferentes tipos de acciones:

- **Acciones Comunes u Ordinarias.** Son las que confieren iguales derechos y obligaciones a todos los accionistas. Estos tienen derecho, a voz y voto en las asambleas de accionistas e igualdad de derechos para participar de los dividendos cuando la empresa obtenga utilidades.
- **Acciones Preferentes.** La preferencia dependerá exclusivamente de lo pactado por los socios. Una de las preferencias más comunes es la de estipular un dividendo mínimo, el cual será acumulable, cuando en un ejercicio social la empresa opere con pérdidas. No tienen derecho a voto en las asambleas de accionistas, salvo que se acuerde lo contrario. Antes de asignar un dividendo a las acciones comunes se debe cubrir un pago a las preferentes del 5 % mínimo, según lo establece la Ley.

En el caso de las empresas públicas, el intercambio de acciones se realiza en mercados organizados que operan con reglas transparentes y están abiertos al público inversionista, es decir, cualquier persona o entidad que cumpla con los requisitos establecidos por dichos mercados puede participar en ellos. Estos mercados organizados se conocen como mercados accionarios y existen en todo el mundo. Los mercados accionarios más importantes por su tamaño se localizan en Nueva York (New York Stock Exchange, y National Securities Dealers Automated Quotations, NASDAQ), Londres (London Stock Exchange), y Japón (Tokyo Stock Exchange). En México, el mercado accionario forma parte de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

Además de las acciones, otros instrumentos como los títulos de deuda privada o gubernamental, los certificados de capital de desarrollo (CCD) y los títulos emitidos por los fideicomisos de infraestructura y bienes raíces (fibras) se negocian en la BMV. La operación con estos valores en la BMV está sujeta a la regulación y supervisión tanto de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) como de la Secretaría de Hacienda y

Crédito Público (SHCP).

Si bien las primeras negociaciones de títulos accionarios de empresas mineras en México se realizaron en 1850, la Bolsa Mercantil de México se constituyó hasta 1886. En 1975, el mercado accionario cambió su nombre al que actualmente conserva, Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

En un principio, las acciones eran títulos de papel que los inversionistas intercambiaban físicamente aunque esto limitaba severamente su libre operación. No fue sino hasta el 11 de enero de 1999 que la totalidad de la negociación accionaria se incorporó a un sistema electrónico de negociación, denominado Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación (BMV-SENTRA Capitales). A partir de ese momento, el intercambio de acciones ya no se realiza de mano en mano sino mediante registros electrónicos.

Para que una empresa coloque o liste sus acciones en la BMV tiene que acudir a una casa de bolsa, quien además de brindarle asesoría en la colocación de sus acciones, es la encargada de realizar las operaciones de compra y venta a nombre de los inversionistas. Todos los inversionistas tanto nacionales como extranjeros que deseen hacer operaciones en la BMV tienen que abrir una cuenta en una casa de bolsa. Una vez que una empresa lista sus acciones en el mercado, éstas pueden cambiar libremente de manos conforme las necesidades de los participantes.

Las acciones representan una parte de una compañía y por ello los inversionistas asignan un valor o precio para cada una de ellas. Los poseedores de estos títulos ganan si sube el precio de dicha acción o si la empresa realiza un reparto de utilidades, a través del pago de dividendos. La interacción entre la demanda y oferta de acciones determina el precio de las mismas en el mercado. En el caso de compañías que no cotizan en la BMV, existen múltiples métodos para realizar una valuación accionaria. Uno de los más utilizados es calcular el valor presente de todos los flujos de efectivo que se espera recibir de la empresa a través del pago de dividendos.

La BMV desarrolló varios índices para medir el desempeño del mercado accionario mexicano en su conjunto. El más importante es el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), que normalmente cuenta con 35 emisoras. El IPC funciona como un termómetro del mercado al medir la evolución de los precios de las acciones listadas. Asimismo, si un inversionista quiere mitigar el riesgo de comprar acciones y busca replicar el rendimiento de algún índice sin tener que adquirir los títulos de las emisoras respectivas, puede invertir en *títulos referenciados a acciones (tracs)*. Estos valores son instrumentos emitidos por instituciones financieras que están vinculados a un conjunto de acciones. Por ejemplo, el trac que replica al IPC se llama Naftrac.

En la BMV no sólo se pueden encontrar empresas nacionales o extranjeras que acudieron a la bolsa mexicana para recabar capital, sino también cotizan acciones de otros mercados internacionales, como el NYSE, que decidieron colocar sus títulos para que inversionistas mexicanos inviertan en ellos. Esta compraventa de acciones listadas en otros mercados organizados se realiza a través del Mercado Global BMV, en el que actualmente se negocian acciones de empresas de Estados Unidos, Canadá, Australia, Europa y otros países asiáticos. De igual forma, las acciones de empresas mexicanas pueden comprarse en mercados estadounidenses a través de certificados de depósito estadounidenses (ADRs, por sus siglas en inglés) [3].

1.2.3. Bolsa Mexicana de Valores

La Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V. es una entidad financiera, que opera por concesión de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) con apego a la Ley del Mercado de Valores. Fomenta y supervisa la operación ordenada del mercado de valores y sus participantes conforme a la normatividad vigente. Siendo estas Instituciones en conjunto con la Comisión Nacional Bancaria y de Valores y el Banco de México las instituciones reguladoras en México.

La Bolsa Mexicana de Valores ha fomentado el desarrollo de México y en conjunto con las instituciones del sector financiero ha contribuido a canalizar el ahorro hacia la inversión productiva, lo que impacta directamente con el crecimiento y fuentes de empleo en el país.

La BMV se convirtió en una empresa cuyas acciones son susceptibles de negociarse en el mercado de valores bursátil, llevando a cabo el 13 de junio de 2008 la Oferta Pública Inicial de sus acciones representativas de su capital social.

Para realizar la oferta pública y colocación en el mercado de valores las empresas, utilizando capital de exportaciones o importaciones, acuden a una casa de bolsa que los ofrece (mercado primario) al gran público inversionista en el ámbito de la BMV. De ese modo, los emisores reciben los recursos correspondientes a los valores que fueron adquiridos por los inversionistas.

Una vez colocados los valores entre los inversionistas en el mercado de valores, éstos pueden ser comprados y vendidos (mercado secundario) en la BMV a través de una casa de bolsa.

La Bolsa Mexicana de Valores es el lugar físico donde se efectúan y registran las operaciones que hacen las casas de bolsa. Los inversionistas compran y venden acciones e instrumentos de deuda a través de intermediarios bursátiles llamados casas de bolsa que a su vez operan en el mercado de valores. Es muy importante recalcar que la BMV no compra ni vende valores.

El público inversionista del mercado de valores canaliza sus órdenes de compra o venta de acciones a través de un promotor de una casa de bolsa. Estos promotores son especialistas registrados que han recibido capacitación y han sido autorizados por la CNBV. Las órdenes de compra o venta son entonces transmitidas de la oficina de la casa de bolsa al mercado bursátil a través del sofisticado Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación (BMV-SENTRA Capitales) donde esperarán encontrar una oferta igual pero en el sentido contrario y así perfeccionar la operación.

La Bolsa Mexicana de Valores (BMV), es el foro en el que se llevan a cabo las operaciones del mercado de valores organizado en México, tiene como objetivo, facilitar las transacciones con valores y procurar el desarrollo del mercado, fomentar su expansión y competitividad, a través de las siguientes funciones:

- Establecer los locales, instalaciones y mecanismos que faciliten las relaciones y operaciones entre la oferta y demanda de valores, títulos de crédito y demás documentos inscritos en el Registro Nacional de Valores (RNV), así como prestar los servicios necesarios para la realización de los procesos de emisión, colocación en intercambio de los referidos valores.
- Proporcionar, mantener a disposición del público y hacer publicaciones sobre la información relativa a los valores inscritos en la Bolsa Mexicana y los listados en el Sistema Internacional de Cotizaciones de la propia Bolsa, sobre sus emisores y las operaciones que en ella se realicen.
- Establecer las medidas necesarias para que las operaciones que se realicen en la Bolsa Mexicana por las casas de bolsa se sujeten a las disposiciones que les sean aplicables.
- Expedir normas que establezcan estándares y esquemas operativos y de conducta que promuevan prácticas justas y equitativas en el mercado de valores, así como vigilar su observancia e imponer medidas disciplinarias y correctivas por su incumplimiento, obligatorias para las casas de bolsa y emisoras con valores inscritos en la Bolsa Mexicana.

Las empresas que requieren recursos (dinero) para financiar su operación o proyectos de expansión, pueden obtenerlo a través del mercado bursátil, mediante la emisión de valores (acciones, obligaciones, papel comercial, etc.) que son puestos a disposición de los inversionistas (colocados) e intercambiados (comprados y vendidos) en la Bolsa Mexicana, en un mercado transparente de libre competencia y con igualdad de oportunidades para todos sus participantes.

La BMV tiene entre sus entidades emisoras a sociedades anónimas, organismos públicos, entidades federativas, municipios y entidades financieras cuando actúen en su carácter de fiduciarias que, cumpliendo con las disposiciones establecidas y siendo representadas por una casa de bolsa, ofrecen al público inversionista, en el ámbito de la Bolsa Mexicana, valores como acciones, títulos de deuda y obligaciones.

En el caso de la emisión de acciones, las empresas que deseen realizar una oferta pública deberán cumplir con los requisitos de listado y, posteriormente, con los requisitos de mantenimiento establecidos por la Bolsa Mexicana; además de las disposiciones de carácter general, contenidas en las circulares emitidas por la CNBV.

En cuanto a las actividades relacionadas con las operaciones de compraventa de valores, asesoramiento a empresas (colocación de valores) e inversionistas (construcción de carteras de inversión), así como la recepción de fondos por concepto de operaciones con valores y realizar transacciones mediante sus operadores (registrados y autorizados por la CNBV y la Bolsa Mexicana) es necesario un intermediario autorizado el cual, en el caso de la BMV, son las casas de bolsa autorizadas.

Para concluir con este capítulo, a continuación se presenta una breve descipción del Mercado Mexicano de Derivados mexicano (MexDer).

1.2.4. Mercado Mexicano de Derivados(MexDer)

El Mercado Mexicano de Derivados es la Bolsa de Derivados de México; constituida como una sociedad anónima de capital variable, autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP). Este hecho, constituye uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo e internacionalización del Sistema Financiero Mexicano. MexDer y su Cámara de Compensación (Asigna) son entidades autorreguladas que funcionan bajo la supervisión de las Autoridades Financieras (SHCP, Banco de México y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores-CNBV).

La importancia de que países como México cuenten con productos derivados, cotizados en una bolsa ha sido destacada por organismos financieros internacionales como el International Monetary Fund (IMF) y la International Finance Corporation (IFC), quienes han recomendado el establecimiento de mercados de productos derivados listados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas [5].

Las instituciones participantes son:

- MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A de C.V. (Bolsa de Derivados).
- Asigna, Compensación y Liquidación (Cámara de Compensación constituida como fideicomiso de administración y pago).
- Socios Liquidadores.
- Miembros Operadores (No requieren ser accionistas de la Bolsa para operar).

La principal función de los derivados es servir de cobertura ante fluctuaciones de precio de los subyacentes, por lo que se aplican preferentemente a:

- Portafolios accionarios.
- Obligaciones contraídas a tasa variable.
- Pagos o cobranzas en moneda extranjera a un determinado plazo.
- Planeación de flujos de efectivo, entre otros.

Los productos derivados son instrumentos que contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros generando condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos. Los beneficios de los productos derivados, como los Futuros, son especialmente aplicables en los casos de:

- Importadores que requieran dar cobertura a sus compromisos de pago en divisas.
- Tesoreros de empresas que busquen protegerse de fluctuaciones adversas en las tasas de interés.
- Inversionistas que requieran proteger sus portafolios de acciones contra los efectos de la volatilidad.
- Inversionistas experimentados que pretendan obtener rendimientos por la baja o alza de los activos subyacentes.
- Empresas no financieras que quieran apalancar utilidades.
- Deudores a tasa flotante que busquen protegerse de variaciones adversas en la tasa de interés, entre otros.

MexDer y Asigna, así como sus socios y otros participantes, están regidos por las siguientes disposiciones:

- Reglas a las que habrán de sujetarse las sociedades y fideicomisos que intervengan en el establecimiento y operación de un mercado de futuros y opciones cotizados en Bolsa.
- Disposiciones de carácter prudencial a las que se sujetarán en sus operaciones los participantes en el mercado de futuros y opciones cotizados en Bolsa.
- Reglamento Interior de MexDer y Asigna, así como sus estatutos, manuales de procedimientos y otras disposiciones autorregulatorias.
- Las demás leyes y disposiciones que aplican al Sistema Financiero Mexicano.

Los derivados en México son usados como instrumetos de cobertura y administración de portafolios, el MexDer y Asigna son los responsables de salvaguardar y mantener un mercado organizado que poco a poco deberá ir creciendo y fortaleciendo los mecanismos de enlace entre los distintos mercados.

Como se ha observado, el Sistema Financiero en México es un sistema sólido con leyes y normas específicos que permiten la regulación de todo el Sistema y la autorregulación de sus partes con la finalidad de asegurar la estabilidad económica asi como el desarrollo de las instituciones financieras a través del mercado de dinero, capitales y derivados. Lo anterior ha permitido el desarrollo de diversos instrumentos como bonos, acciones, futuros, entre otros que sirven como mecanismos de inversión para captar recursos y preservar el desarrollo de la economía mexicana.

El siguiente capítulo se centrará en el desarrollo metodológico de la valuación de instrumentos financieros como Bonos, Acciones y Derivados (Futuros, Forwards, Swaps) con la intención de establecer un marco teórico de referencia que permita la creación y selección de portafolios de inversión.

Capítulo 2

Teoría del Portafolio

La teoría del portafolio es el análisis cuantitativo de la administración óptima del riesgo; su aplicación consiste en formular y evaluar la relación que existe entre el incremento en la riqueza de un individuo y el riesgo que este proceso conlleva. Las preferencias cambian con el tiempo y la teoría del portafolio se centra en el problema de como escoger entre las opciones financieras para maximizar las preferencias (para más detalle, ver Bodie y Merton en [6]). Harry Markowitz en 1952, publicó *Portfolio Selection [9]* que a la postre le dio el premio Nobel de Economía en 1990. En dicho trabajo, desarrolló un enfoque que revolucionó las finanzas con la llamada teoría moderna de portafolio. Markowitz estableció una selección de inversiones en las que asigna recursos líquidos entre las diversas opciones disponibles.

El enfoque de Markowitz considera que los rendimientos de los activos se comportan como un proceso estocástico en el cual los rendimientos siguen una distribución normal[1] sobre el intervalo de tiempo en el que se hace el análisis. A partir de esto es posible concluir que la eficiencia del portafolio está determinada por la composición de rendimientos esperados y la desviación estándar de los rendimientos. La hipótesis adicional de *utilidad iso-elástica* conduce a problemas de optimización de portafolios que son lineales al rendimiento y varianza.

2.1. Teoría de la utilidad y eficiencia

La noción de *Eficiencia* es de suma importancia dentro de la teoría del portafolio. La definición formal se basa en la teoría de la utilidad y asume que todo inversionista tienen aversión al riesgo.

2.1.1. Teoría de la utilidad

Una función de utilidad es una función de la riqueza $U(r)$ dos veces diferenciable definida para $r > 0$ que tiene las propiedades de no saciedad (es decir, la primera derivada

[1] La distribución lognormal implícita en el modelo de caminata aleatoria es una mejor aproximación a la distribución de los renidmientos históricos observados para activos financieros comunes como son acciones y bonos.

$U'(r) > 0$) y aversión al riesgo (que implica que $U''(r) < 0$).

Una función de utilidad mide la preferencia relativa de un inversionista para diferentes niveles de riqueza total. La propiedad de no saciedad establece que la utilidad aumenta con la riqueza, es decir, más riqueza es preferible a menor riqueza, asi mismo establece que un inversionista nunca se sacia (es decir, nunca tendrá demasiada riqueza como para no querer un poco más). Para un mayor detalle sobre la contextualización y desarrollo de la Teoría de la Utilidad ver (Schotter [17] 1996 p. 490-494).

La propiedad de aversión al riesgo establece que la utilidad marginal de la riqueza decrece cada que la riqueza aumenta. Lo anterior conduce a una función de utilidad cóncava, es decir, su pendiente es decreciente, lo que implica una utilidad esperada de una apuesta menor a la utilidad de un rendimiento seguro (que es igual al valor monetario esperado de la apuesta).

Para comprender mejor el postulado de función cóncava, considere una función de utilidad $U(r) = \sqrt{r}$

$$\begin{aligned} U(r) &= \sqrt{w} = r^{\frac{1}{2}} \\ U'(r) &= \frac{1}{2} * r^{-\frac{1}{2}} > 0 \\ U''(r) &= -\frac{1}{4} * r^{-\frac{3}{2}} < 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Suponga que un iversionista tiene \$15 y le proponen entrar en una inversión tal que, si la inversión es exitosa, puede aumetar su riqueza en \$25 mientras que si la apuesta es un fracaso, su riqueza disminuirá en \$5; las probabilidades de éxito y fracaso son las siguientes: $p(\textit{éxito}) = p(fracaso) = \frac{1}{2}$ y la ganancia esperada es: $\frac{1}{2} * 10 + \frac{1}{2} * -10 = 0$ por lo que este ejemplo se denomina en la literatura *juego justo* (vease Steele 2000 [14], Norstad 1999 [15]). La utilidad de la apuesta es un promedio ponderado como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} E(U(apuesta)) &= \frac{1}{2} * U(5) + \frac{1}{2} * U(25) \\ &= \frac{1}{2} * 2{,}23 + \frac{1}{2} * 5 \\ &= 3{,}61 \end{aligned} \tag{2.2}$$

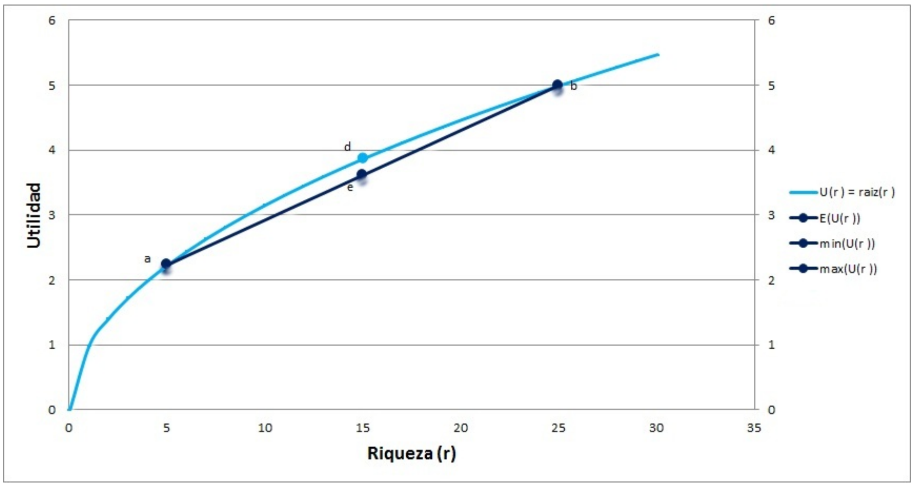

Figura 2.1: Función de Utilidad

El punto e (a la mitad de la recta ab) en la figura 2.1 representa la utilidad esperada. El punto d representa la riqueza actual del inversionista. Debido a que el inversionista tiene aversión al riesgo, preferirá mantener su riqueza actual en vez de arriesgarla en una inversión que ofrece un rendimiento esperado igual a su riqueza actual. Debido a que la utilidad marginal del ingreso está disminuyendo, la riqueza adicional que se recibe hacia el rango de ingresos de \$25 tiene menos importancia o valor marginal que la riqueza recibida en el extremo inferior del rango de ingresos.

Para explicar lo anterior, es importante mencionar el *principio de maximización de la utilidad esperada* el cual indica que un inversionista racional, cuando se enfrenta a una elección sobre un conjunto de posibles estrategias de inversión, seleccionará una inversión que maximice su utilidad de riqueza esperada. Retomando el ejemplo de la ecuación (2.2), la utilidad del inversionista es $\sqrt{15} = 3{,}87$ en cambio, la utilidad esperada es 3.61; con base en el principio de maximización de la utilidad esperada es posible concluir que el inversionista no invertirá.

En general, un inversionista averso al riesgo rechazará invertir en un una inversión o juego justo donde el rendimiento esperado sea 0. Si el rendimiento esperado es mayor que 0, el inversionista podrá o no entrar en la inversión, dependiendo tanto de su función de utilidad así como de su riqueza inicial. Por ejemplo, si la probabilidad de éxito cambia de ,5 a ,75 la utilidad esperada sería de 4.3 la riqueza r=20 con un rendimiento esperado (también llamado *prima de riesgo*)de 25 % el cual, es una compensación por tomar el riesgo de la inversión.

Otra manera de ver la propiedad de aversión al riesgo es que los inversionistas observan mayor peso a la magnitud de las pérdidas que lo que hacen sobre las ganancias. En el ejemplo de la ecuación (2.2), la péridia de \$10 es una disminución de la utilidad de \$1.63 mientras que una ganancia de \$10, es un incremento en la utilidad de \$1.02 por lo tanto, la apuesta no es lo suficientemente atractiva para un inversionista averso al riesgo con una riqueza inicial r=15.

Es posible obtener una apuesta atractiva para dicho inversionista con una riqueza inicial adecuada es decir, aquella riqueza que iguale la utilidad esperada (encontrar U^{-1} tal qué $U^{-1}(E(U(r))) = r$). En el caso del ejemplo analizado, la utilidad esperada es 3.61 por lo que el valor de la riqueza que tiene la misma utilidad es \$13.09 (este valor es llamado *certeza de equivalencia*). Por lo tanto, si la riqueza inicial es menor que \$13.09, un inversionista con una función de utilidad como la que se planteó en (2.1) podrá escoger entre entrar en una inversión donde el resultado de la riqueza final es de \$5 con probabilidad de .5 o \$25 con la misma probabilidad.

En general, la certeza de equivalencia para un inversionista cuyo resultado está dado por una variable aleatoria r es:

$$\begin{aligned} c &= U^{-1}(E(U(r))) \\ U(c) &= E(U(r)) \end{aligned}$$

De tal forma que si un inversionista tiene una función de utilidad U y una riqueza actual menor a c, deberá considerar invertir. Si su riqueza actual es mayor a c, no deberá considerar la inversión como atractiva (ya que no entrar en la inversión tienen una utilidad esperada mayor a la inversión). Si la riqueza es c, será indiferente entre hacer o no la inversión. El equivalente de certeza es siempre menor que el valor esperado de una inversión.

2.1.2. Eficiencia

La noción de eficiencia es central para la teoría del portafolio; la definición formal se basa en la teoría de la utilidad y asume que todos los inversionistas tienen aversión al riesgo.

Suponga que I_1 e I_2 son dos inversiones cuya riqueza al final del periodo t está dado por las variables aleatorias $w_1(t)$ y $w_2(t)$. Se dice que I_1 es más eficiente que I_2 para el horizonte de tiempo t si el valor esperado de la utilidad de $w_1(t)$ es mayor que el valor esperado de la utilidad de $w_2(t)$ para toda función de utilidad. Es decir:

$$E(U(w_1(t))) > E(U(w_2(t)))$$

La relación *"más eficiente que o igual a"* define un orden parcial sobre cualquier conjunto de inversiones factibles sobre un horizonte de tiempo dado.Si una inversión I_1 es más eficient que alguna otra inversión I_2 entonces, todo inversionista averso al riesgo preferirá I_1 en vez de I_2 para dicho horizonte de tiempo.

Dado un conjunto de alternativas de inversión viables, un miembro I del conjunto se dice que es eficiente para el conjunto factible o *çon respecto a"* el conjunto factible si es máximo con respecto al *"más eficiente que o igual al"* conjunto viable si tiene una ordenación parcial en el conjunto. Esto es, si ningún otro miembro del conjunto es más eficiente que I.

Al seleccionar sobre una colección de alternativas de inversión que compiten en un horizonte de tiempo dado, basta con considerar sólo la inversión eficiente del conjunto. Diferentes inversionistas actúan bajo el principio de maximización de la utilidad esperada con diferentes funciones de utilidad pueden seleccionar diferentes inversiones eficientes, pero ninguna de ellos seleccionará el ineficiente.

2.2. Hipótesis sobre los rendimientos de los activos y el modelo Media-Varianza

Los precios de los activos financieros evolucionan irregularmente, algunas veces se distinguen por tendencias escendentes y descendentes, su valor futuro es incierto y muy difícil de predecir. Mediante el uso de funciones de utilidad, la teoría de la probabilidad y ecuaciones diferenciales estocásticas, se puede llevar a cabo estudios que representen patrones adecuados a la realidad del comportamiento de las acciones y sus rendimientos. A continuación, se presentan algunos teoremas y lemas que involucran hipotesis de distribuciones Normal y Lognormal sobre el comportamiento del rendimiento de las acciones. En [Norstad (1999) [16]] se desarrolla ampliamente lo que a continuación se menciona.

2.2.1. Rendimientos Normales

En esta sección se definirá la hipótesis de distribución Normal que gobierna los rendimientos de las acciones. Lo anterior, se sustenta con base en la función de utilidad exponencial negativa [2] y sus parámetros (μ y σ). Es importante denotar que el análisis que se desarrollará a continuación, asume un horizonte de tiempo t fijo.

Lema 2.2.1. *Dado un horzonte de tiempo t, supóngase que los rendimientos de una inversión I tiene distribución Normal con media μ y desviación estándar σ. Sea U la función exponencial negativa con coeficiente de aversión al riesgo $A > 0$ tal que $U(w) = -e^{-Aw}$. Sea w_o la riqueza de un inversionista al comienzo del periodo. Entonces la utilidad esperada de la riqueza $w(t)$ al final de periodo es*

$$E(U(w(t))) = -e^{-Aw_0(1+\mu-frac12Aw_0\sigma^2}$$

El siguiente teorema define la forma en la que un inversioniasta realiza la elección de su inversión de entre un conjunto de alternativas de inversión en competencia.

Teorema 2.2.2. *Un inversionista que maximiza su utilidad y cuenta con riqueza inicial w_0 y función de utilidad exponencial negativa con coeficiente de aversión al riesgo A, cuando se enfrenta a una decisión entre un conjunto de alternativas de inversión en competencia F donde todos sus elementos tienen rendimientos que se distribuyen normalmente, actuúa para seleccionar una inversión $I \in F$ que maximiza*

$$\mu_I - \frac{1}{2}Aw_0\sigma_I^2$$

donde μ_I y σ_I son el rendimiento esperado y la desviación estándar del rendimiento para una inversión I respectivamente.

[2]para más detalles sobre la función de utilidad exponencial negativa, véase Norstad 1999 [15]

Es importante observar que para valores del coeficiente de aversión al riesgo A cercanos a cero, el inversionista estará mayormente interesado en maximizar su rendimiento esperado. De forma inversa, para valores muy grandes de A, el inversionista estará más interesado en maximizar su riesgo. El múltiplo $\frac{1}{2}Aw_0$ mide la tasa a la cual el inversionista está dispuesto a intercambiar rendimiento por riesgo. Como la riqueza del inversionista se incrementa y su función de utilidad es exponencial negativa, este se convierte rápidamente en un un inversionista con aversión al riesgo, lo que imlica que requerirá un mayor incremento en los rendimientos por cada unidad que se incremente en el riesgo.

Finalmente, el siguiente teorema que a continuación se enuncia, corresponde a la forma en que un inversionista puede discernir entre 2 inversiones, dependiendo de cual de ellas es más eficiente a partir del análisis de los parámetros de la función de utilidad (exponencial negativa).

Teorema 2.2.3. *Suponga que I_1 e I_2 son dos inversiones con rendimientos que tienen distribución Normal sobre un horizonte de tiempo t, con los siguiéntes parámteros de las distribuciones sobre un horizonte de tiempo media μ_1 y μ_2 y desviación estándar σ_1 y σ_2 respectivamente así como riqueza w_0 para las dos inversiones. Entonces I_1 es más eficiente que I_2 sí y solo sí $\mu_1 \geq \mu_2$ y $\sigma_1 \leq \sigma_2$ con desigualdad estrícta en al menos una de las desigualdades.*

Este teorema tiene algunos aspectos fundamentales que debemos tomar en cuenta para comprender la forma en que un inversionista con aversión al riesgo actuaría en caso de tener que elegir de entre dos o más inversiones. Es claro que para un inversionista averso al riesgo, preferirá aquella inversión que maximice su rendimiento y minimice su riesgo. Para mayor detalle sobre la demostración del lema y teoremas anteriores, vease [Norstad (1999) [16]].

Durante mucho tiempo, se trabajaron metodologías para analizar el comportamiento de activos financieros teniendo como base, la hipotesis de la distribución gaussiana. Louis Bachelier [vease Bachelier (1900) [18]] desarrolló su trabajo *Teoría de la especulación* en el cuál establece que los precios cambian siguiendo una distribución normal sin embargo, hoy es bien sabiedo que su modelo era incorrecto. Los supuestos de rendimientos normales deriva en algunos problemas cuando se trata de extender el análisis a periodos largos de tiempo asi como cuando se realiza dicho análisis en múltiples periodos de tiempo. Lo anterior, debido a que los rendimientos a largo plazo están lejos de ser normalmente distribuidos. Por tal motivo, a continuación se desarrollara una teoría paralela sobre la distribución de probabilidad que siguen los rendimientos de los activos financieros.

2.2.2. Rendimientos Lognormales

En el apartado anterior, se desarrolló un poco de la teoría del portafolio con la hipótesis de que los rendimientos tienen un comportamiento que puede ser representado con la distribución Normal. Sin embargo, y con el objetivo de desarrollar un modelo más realista, se tomará como hipótesis que los rendimientos de los activos financieros pueden estar representados por una caminata aleatoria con distribución Lognormal.

Sea y_i una variable independiente, idénticamente distribuida y de varianza finita que representa la tasa de rendimiento de una inversión en un intervalo de tiempo pequeño dt. Sea s_n el valor de una inversión después de n intervalos dt, tal que:

$$\begin{aligned}
s_n &= s_0 \prod_{i=1}^{n} (1+y_i) \\
log(s_n) &= log(s_0 \prod_{i=1}^{n} (1+y_i)) \\
&= log(s_0) + log(\prod_{i=1}^{n} (1+y_i)) \\
&= log(s_0) + \sum_{i=1}^{n} log((1+y_i)) \\
log(s_n) - log(s_0) &= \sum_{i=1}^{n} log((1+y_i)) \\
log(\frac{s_n}{s_0}) &= \sum_{i=1}^{n} log((1+y_i))
\end{aligned}$$

Haciendo $Z_i = log((1+y_i))$, se obtiene la ecuación:

$$log(\frac{s_n}{s_0}) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \tag{2.3}$$

donde s_0 es el valor de una inversión inicial. De tal forma que, aplicando el *Teorema del Límite Central*, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log(s_n/s_0)$ se distribuye normal y, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que para un periodo de un dia, si dt= 1 segundo, $Z_i \sim N[\mu dt, \sigma^2 dt]$ para toda $i = \{0, 1, 2, ..., n\}$. Si se estandariza Z_i respecto a la media μ y varianza σ^2, se obtiene la variable $dX_i \sim N[0, dt]$ como:

$$dX_i = \frac{Z_i - \mu dt}{\sigma} \tag{2.4}$$

de tal forma que es posible representar a $Z_i = \mu dt + \sigma dX_i$.

Sea $s(t)$ el valor de la inversión al tiempo t lo que implica que t representa el valor de la inversión después de n intervalos dt es decir, $t = ndt$ por lo tanto, y con la ayuda de la Ecuación (2.4); la Ecuación (2.3) se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
log(\frac{s(t)}{s(0)} &= log(\frac{s_n}{s_0}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Z_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mu dt + \sigma dX_i) \\
&= n\mu dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma dX_i) \\
&= \mu t + \sigma \sum_{i=1}^{n} dX_i)
\end{aligned}
$$

Dado que $dX_i \sim N[0, dt]$, la suma de variables aleatorias es de nuevo una variable aleatoria $X \sim N[0, ndt]$ por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
log(\frac{s(t)}{s(0)}) &= \mu t + \sigma X \\
\frac{s(t)}{s(0)} &= e^{\mu t + \sigma X} \\
s(t) &= s(0)e^{\mu t + \sigma X}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Ahora bien, considerando cambios en el calor de $ds(t)$ de la inversión s sobre un intervalo corto de tiempo, digamos $[t, t + dt]$. Se tiene:

$$
\begin{aligned}
s(t + dt) &= s(t)e^{\mu dt + \sigma dX} \\
s(t + dt) &= s(t) + ds(t) \\
s(t) + ds(t) &= s(t)e^{\mu dt + \sigma dX} \\
1 + \frac{ds(t)}{s(t)} &= s(t)e^{\mu dt + \sigma dX} \\
\frac{ds(t)}{s(t)} &= e^{\mu dt + \sigma dX} - 1
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Lo que implica que el comportamiento de una inversión riesgosa en el tiempo, se puede describir con la ecuación diferencial estocástica:

$$
\frac{ds}{s} = e^{\mu dt + \sigma dX} - 1 \tag{2.7}
$$

donde $dX \sim N[0, dt]$.

Para formalizar este resultado:

Teorema 2.2.4. *Para una variable aleatoria s,*

$$\frac{ds}{s} = \alpha dt + \sigma dX$$

Sí y sólo sí, $\frac{ds}{s} = e^{\mu dt + \sigma dX} - 1$, *donde* $dX \sim N[0, dt]$ *y* $\alpha = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$.

En este caso, s sigue una caminata aleatoria lognormal. El $log(\frac{s(1)}{s(0)}) \sim N[\mu, \sigma]$. *Para este caso,* α *es la tasa instantánea de rendimiento esperado,* μ *es la tasa de rendimiento esperada anual compuesta continuamente y* σ *es la desviación estándar de los rendimientos. Sobre cualquier horizonte de tiempo t,* $s(t) \sim Lognormal$ *con:*

$$s(t) = s(0)e^{\mu + \sigma X}; X \sim Normal[0, t] \tag{2.8}$$

Es importante mencionar que en el modelo de caminata aleatoria, para una inversión con rendimiento esperado anual instantáneo α, rendimiento esperado anual compuesto de forma continua μ, y desviación estándar de los rendimientos anuales compuestos de forma coninua σ, se tiene que $e^{\alpha} - 1$ es el rendimiento esperado anual con composición simple y $e^{\mu} - 1$ es rendimiento medio anual con composición simple. Algunas diferencias importantes respecto a la hipótesis de Normalidad, radica en que para este caso, la pérdia está topada al 100 % ($e^{-\infty} - 1 = -1 = -100\,\%$), el horizonte de tiempo t puede variar (no es fijo) además la medición de riesgo y rendimiento se realizará usando rendimeintos anuales instantáneos α y desviación estándar σ.

Finalmente, por *Teoria de la probabilidad*, se sabe que si una variable aleatoria $X \sim Lognormal[\mu, \sigma^2]$, entonces $E(X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ y $Var(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$. Por lo tanto, en lo que resta del presente trabajo, se asumirá que

$$\begin{aligned} R &= \frac{s(t)}{s(t-1} - 1 \\ &= e^{\hat{X}} - 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $\hat{X} \sim N[\mu, \sigma^2]$ y $e^{\hat{X}} \sim Lognormal[\mu, \sigma^2]$. Además:

$$\begin{aligned} E(R) &= E(e^{\hat{X}} - 1) \\ &= E(e^{\hat{X}}) - 1 \\ &= e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1 \\ &= e^{\alpha} - 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Teniendo ya una definición formal de la esperanza de los renidmientos y suponiendo que los renidmientos siguen una caminata aleatoria lognormal, a continuación se presentan dos lemas en el que se establece la esperanza de una función de utilidad que representa una inversión I que se distribuye Lognormal bajo un modelo de caminata aleatoria (esta función de utilidad sera la función objetivo en el modelo Media-Varianza [Modelo MV]). El primer lema establece una función de utilidad isoelástica y el segundo lema establece la esperanza de una función de utilidad logarítmica. Una de las hipótesis realizadas en el análisis siguiente, es que todo inversionista realiza una inversión al incio del periodo $t = 0$ y no cambia su decisión durante dicho periodo de tiempo.

Lema 2.2.5. *Supóngase que el rendimiento de una inversión I se distribuye Lognormal bajo el modelo de caminata aleatoria con la media de los rendimientos anuales con apitalización continua μ y desviación estándar de los rendimientos anuales con apitalización continua σ. Sea U la función de utilidad isoelástica $U(r) = \frac{r^{\lambda}-1}{\lambda}$ donde $\lambda < 1$ y $\lambda \neq 0$. Sea w_0 la riqueza actual de un inversionista. Entonces, la utilidad esperada de la riqueza $w(t)$ después de t años es:*

$$E(U(r(t))) = \frac{1}{\lambda} r_0^{\lambda} e^{\lambda t(\mu + \frac{1}{2}\lambda\sigma^2)} - \frac{1}{\lambda}$$

Lema 2.2.6. *Supóngase que el rendimiento de una inversión I se distribuye Lognormal bajo el modelo de caminata aleatoria con la media de los rendimientos anuales con apitalización continua μ y desviación estándar de los rendimientos anuales con apitalización continua σ. Sea U la función de utilidad logarítmica e isoelástica $U(w) = log(w_0)$. Sea w_0 la riqueza actual de un inversionista. Entonces, la utilidad esperada de la riqueza $w(t)$ después de t años es:*

$$E(U(w(t))) = log(w_0) + \mu t$$

Asi como en la sección anterior, a continuación se presenta un teorema en el cual, se define la forma en la que un inversioniasta realiza la elección de su inversión de entre un conjunto de alternativas de inversión en competencia.

Teorema 2.2.7. *Para un horizonte de tiempo t, un inversionista que maximiza su utilidad y cuenta con riqueza inicial w_0 y función de utilidad isoelástica con coeficiente de aversión al riesgo A, cuando se enfrenta a una decisión entre un conjunto de alternativas de inversión en competencia F donde todos sus elementos tienen rendimientos que se distribuyen lognormalmente bajo el modelo de caminata aleatoria, actuúa para seleccionar una inversión $I \in F$ que maximiza*

$$U(w) = \alpha_I - \frac{1}{2} A \sigma_I^2 \tag{2.11}$$

donde α_I y σ_I son el rendimiento esperado y la desviación estándar del rendimiento para una inversión I respectivamente.

En el Teorema 2.2.7 tiene implicaciones importantes. En primer lugar, la inversión óptima depende exclusivamente del coeficiente de aversión al riesgo además, no depende ni de la riqueza actual ni del horizonte de tiempo.

Entonces, para un inversionista neutral al riesgo con $A = 0$, el inversionista actúa en dirección a maximizar la media aritmética del rendimiento. Lo cual tien sentido debido a que un inversionista neutral al riesgo optaria por invertir el 100 % de su riqueza en el activo de mayor rendimiento esperado sin importar el riesgo que conllevaria realizar dicha transacción.

Para un inversionista con $A = 1$ y una función de utilidad logarítmica, el Teorema 2.2.7 indica que un inversionista actúa con base en maximizar la media geométrica del renidmiento. Tales inversionistas son tolerantes al riesgo y típicamente tienen portafolios óptimos que contienen activos riesgosos. Muchos inversionistas son más aversos y tienen coeficientes de aversión al riesgo significativamente mayores a 1.

Teorema 2.2.8. *Suponga que I_1 e I_2 son dos inversiones con rendimientos que tienen distribución Lognormal, con rendimientos instantáneos esperados anuales α_1 y α_2 y desviación estándar de los rendimientos inatantáneos anuales σ_1 y σ_2 respectivamente, y con riqueza inicial r_0 para ambos inversionistas. Entonces I_1 es más eficiente que I_2 sí y sólo sí $\alpha_1 \geq \alpha_2$ y $\sigma_1 \leq \sigma_2$ con desigualdad estrícta en al menos una de las desigualdades.*

Así como en el caso de la hipótesis de rendimientos con distribución Normal, este teorema explica la forma en que un inversionista con aversión al riesgo actuaría en caso de tener que elegir de etre dos o más inversiones. En el Apéncide se profundiza sobre el modelo lognormal visto como un proceso estocástico.

Tomando como base lo observado en esta sección, en el siguiente apartado se desarrollará la teoría que envuelve la selección de portafolios bajo el enfoque Media-Varianza y la hipótesis de rendimietos lognormales (también conocidos como log-rendimeintos).

2.3. Selección eficiente de portafolios

La Distribución Normal juega un rol importante en la teoria de portafolios [Markowitz (1952) [10]] ya que, como se vio en la sección anterior, la Teoría de Markowitz es consistente con la maximización de la utilidad esperada. En este caso, es bien conocido (muchos trabajos desarrollados bajo las hipótesis de la Teoría de Portafolios de Markowitz) que el portafoolio maximiza la utilidad esperada sí y sólo sí se obtiene una *media-varianza* eficiente. Esto último, empata sí y sólo sí, los cambios en los precios son ajustados a distribuciones de varianza finita.

La evidencia empírica en apoyo de la hipótesis Gaussiana la realizaron Maurice Kendall y Arnold Moore. Ambos proporcionaron en sus trabajos, resultados similares, por un lado, Kendall descubrió que los cambios semanales de precios para el trigo (EUA) y acciones comunes (UK) podrían ser aproximados a una distribución normal mientras que Moore reportó resultados similares para los cambios semanales en el registro del precio de una muestra de acciones de la Bolsa de Nueva York.

2.3.1. Modelo Media Varianza

El modelo de Markowitz es la piedra angular de la administración y diversificación de portafolios sin embargo, es complejo matemáticamente. En el presente apartado, se describe brevemente el modelo de Markowitz así como la solución analítica de Robert C. Merton (1972). Finalmente con base en el Teorema 2.2.7 se presenta el modelo de optimización de portafolios con base en la maximización de la función de utilidad isoelástica.

Modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz [Markowitz (1952) [9]] es un modelo media-varianza cuyo objetivo es minimizar la varianza de un portafolio. Por lo anterior, antes de entrar de lleno al problema de optimización para asignar los ponderadores asociados a los activos financieros, es necesario definir algunos preceptos importantes.

Sea π un portafolio de activos financieros, su rendimiento esperado se define como:

$$\begin{aligned} E(r_\pi) &= \tilde{r_\pi} \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{r_i} \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $E(r_i) = \tilde{r_i} = e^{\alpha_i} - 1$, es la rendimiento esperado compuesto continuamente del activo i y las w_i es el peso que se le dará a cada activo. La varianza π se define como:

$$\sigma_\pi = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \right) \tag{2.13}$$

donde $cov(r_i, r_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ es la covarianza de los rendimientos, con ρ_{ij} como el coeficiente de correlación de los rendimientos de los activos i, j. [3]

De forma matricial, la varianza de π se define como:

$$\sigma_\pi^2 = W' \Sigma W$$

donde Σ representa la matriz de varianzas y covarianzas:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Es posible definir $\tilde{r_\pi} = W' \tilde{R_i}$ donde W' es la matriz transpuesta del vector de ponderaciones. $\tilde{R_i}$ es el vector de los rendimientos esperados del portafolio.

Dado el enfoque de Markowitz, se tiene que resolver un problema de maximización tomando en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y dado que se asume que no hay restriccines, es posible realizar la venta en corto por lo tanto, por lo que el problema es encontrar la combinación de los n activos para obtener el portafolio de varianza mínima global, es decir:

$$\begin{gathered} Min\sigma_\pi^2 \\ s.a. \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ E(W'R) = \alpha_{ef} \end{gathered} \tag{2.15}$$

para resolver dicho problema de optimización se utilizan multiplicadores de Lagrange:

[3] Si $\rho_{ij} = 1$, los rendimientos se mueven en el mismo sentido; si $\rho_{ij} = -1$, los rendimientos se mueven en sentidos opuestos; si $\rho_{ij} = 0$ los activos son independientes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right) \tag{2.16}$$

se deriva la Ecuación (2.16) respecto a los ponderadores w_i y al multiplicador de Lagrange y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} &= \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_{ij} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^{n} w_i - 1 = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

para toda $j = 1, 2, \ldots, n$; de forma matricial se puede representar como:

$$V \cdot W = B \tag{2.18}$$

donde:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} ; W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si se multiplican ambos lados de la Ecuación (2.18),se obtiene que el vector de ponderaciones que optimizan el portafolio es:

$$W = V^{-1} \cdot B \tag{2.19}$$

Para obtener el valor de las ponderaciones y el punto de varianza mínima global sólo es necesario obtener la matriz inversa (V^{-1}).

Ya encontrado el punto de varianza mínima, se debe encontrar una combinación de activos que proporcione varianza mínima para una tasa de rendimiento esperada y que a su vez sea superior al rendimiento del portafolio de varianza mínima global ($\tilde{r_m}$).

De manera similar al procedimiento anterior:

$$\begin{aligned} Min\frac{1}{2}\sigma_p^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ s.a \qquad & \bar{r_p} = \sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{r_i} \\ & \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{aligned}$$

donde $\bar{r_p} > \tilde{r_m}$ representa una tasa de rendimiento arbitraria. Con multiplicadores de Lagrange se obtiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right) + \gamma\left(r_p - \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \tilde{r_i}\right) \tag{2.20}$$

y, derivando la expresión 2.20 respecto a los ponderadores w_i y a los dos multiplicadores de Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} &= \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_{i1} - \gamma \tilde{r_i} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^{n} w_i - 1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} &= \sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{r_i} - \bar{r_p} \end{aligned} \tag{2.21}$$

El sistema es de $n+2$ ecuaciones con $n+2$ incógnitas, de forma matricial se expresa de la siguiente forma:

$$\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} = \mathcal{B} \tag{2.22}$$

donde:

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & \tilde{r_1} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & \tilde{r_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & \tilde{r_n} & 1 \\ \tilde{r_1} & \tilde{r_2} & \dots & \tilde{r_n} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathcal{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \gamma \\ \lambda \end{pmatrix}; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{r_p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

encontrando la solución al sistema y los valores de λ y γ, se obtienen las proporciones para invertir los activos y obtener la tasa de rendimiento $\bar{r_p}$, el cual asegura que se tenga la varianza mínima dentro de todos los portafolios con dicha tasa esperada de rendimientos.

Método de Merton

En la sección anterior, se presentó de manera breve el modelo para encontrar el portafolio de varianza mínima global, así como el conjunto de portafolios que conformen la frontera eficiente dado un rendimiento esperado fijo, ambos, mediante la implementación de multiplicadores de Lagrange y resolviendo sistemas de ecuaciones.

En esta sección, se presenta de forma breve el modelo de Merton [Merton (1972) [13]] en el que desarrolló de forma analítica un método para obtener portafolios de inversión.

Como en la sección se asume que los rendimientos r_i asi como la varianza de dichos rendimientos σ_i siguen un comportamiento de caminata aleatoria Lognormal. Los renidmientos se representan con la ecuación (2.9) y la esperanza de dichos rendimeintos conforme a la ecuación (2.10).

$$\begin{aligned} Var(r_a) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - E(r))^2}{n} && (2.23) \\ Cov(r_a, r_b)^4 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_a - E(r_a) * (r_b - E(r_b))}{n-1} && (2.24) \end{aligned}$$

La varianza y covarianza se representan por las ecuaciones (2.23) y (2.24) respectivamente. Con dichos estadísticos, se construye la matriz de varianzas-covarianzas Σ de tal forma que $a_{ii} = Var(r_a)$ y $a_{ij} = Cov(r_a, r_b)$ para toda $i, j = 1, \ldots, n$.

Merton establece que para encontrar las w_i, los multiplicadores de Lagrange al problema representado en 2.15 son:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C\alpha_0 - A}{D} \\ \eta &= \frac{B - A\alpha_0}{D} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= 1_N^{'}\Sigma^{-1}\tilde{r_\Pi} \\ B &= \tilde{r_\Pi}^{'} * \Sigma^{-1} * \tilde{r_\Pi} \\ C &= 1_N^{'}\Sigma^{-1}1_N \\ D &= (B * C) - (A^2) \end{aligned}$$

De tal forma que la solución a 2.15 está dado por:

$$W = \left(\frac{\alpha_0}{B}\right)\Sigma^{'}\tilde{r_\pi}$$

donde la varianza mínima del portafolio se obtiene de:

$$\sigma_{ef}^2 = W^{'}\Sigma W = \frac{C\alpha_0^2 - 2A\alpha_{ef} + B}{D}$$

Por lo tanto, es posible escribir:

$$(\frac{D}{C})\sigma_{ef}^2 - (\alpha_{ef} - \frac{A}{C})^2 = \frac{D}{C_2} \tag{2.25}$$

donde α_{ef} toma los valores de distintos rendimientos esperados previamente establecidos. Por lo tanto, dada una media de los rendimientos y una matriz de varianzas y covarianzas, el paradigma MV provee una forma elegante de lograr una asignación eficiente de tal forma que mayores renidimientos esperados puedan lograrse únicamente tomando mayor riesgo.

En este capítulo se revisó la *Teiria del Portafolio* mediante la cual es posible conseguir una asignación de instrumentos financieros eficiente a partir de la optimización de la ecuación (2.15) sin embargo, y con base en el Teorema 2.2.7. En adelante se asumirá que el portafolio Media-Varianza se obtendrá del resolviendo el problema de optimización sobre la función de utilidad isoelástica, es decir:

$$\begin{aligned} &Max(E(W^{'}R) - \frac{\lambda}{2}Var(W^{'}R)) \\ &s.a. \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{aligned} \tag{2.26}$$

y cuando las ventas en corto no estén permitidas, se maximizará:

$$\begin{aligned} &Max(E(W^{'}R) - \frac{\lambda}{2}Var(W^{'}R)) \\ &s.a. \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \geq 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Capítulo 3

Análisis Multivariado y Principio de Entropía

En el Capítulo anterior, se revisó la terоría del portafolio desde un punto de vista de microeconomía y, utilizando como base algunos conceptos de teoria de probabilidad y prcesos estocásticos se construyo la forma en la cual es posible modelar la selección de portafolios bajo el enfoque Media-Varianza que desarrolló Markowitz en 1952. En este capítulo se desarrollarán dos modelos matemáticos para robustecer el enfoque Media-Varianza, en particular, este capítulo se centra en el análisis multivariado y la mecánica estadística. Como primer apartado, se desarrollará la teoría necesaria para comprender la aplicación de la regularización de Tikhonov a la matriz de Covarianzas (parte fundamental en el enfoque Media-Varianza y cáluclo de valor en riesgo VaR Delta-Normal) para continuar con el apartado referente a la teoría sobre el principio de máxima Entropía. Este Capítulo tiene como objetivo sustentar teóricamente el uso de dos métodos que por separado, han comprobado mejorar el modelo MV para la selección de portafolios [ver Park y [19] (2010) y [20] (2005)].

En esta sección se definirá una técnica que provee transformaciones lineales de un grupo de variables correlacionadas de tal forma que se logran ciertas condiciones óptimas. El desarrollo aplicativo que se desarrollará en el siguiente capítulo, se basa en el análisis PCA para obtener una base ortogonal que maximice la varianza de los datos proyectados dentro de la base. Como segundo paso, se aplicará el método de *Regularización de Tikhonov* para filtrar el ruido de los datos ocasionados por la aleatoriedad de los mismos.

Para finalizar, una vez que se obtengan los pesos w_i mediante la solución al problema de optimización en (2.27) se hará uso del principio de máxima entropía para mejorar las ponderaciones obtenidas para la selección de activos en un portafolio de acciones.

3.1. Análisis Multivariado

El problema de optimización estipulado en (2.15) es sensible a parámetros de entrada por lo tanto, y con la finalidad de mejorar el problema de optimización propuesto en el capítulo anterior, es necesario obtener una buena medición de la varianza muestral del portafolio.

Sea $R = \{r(1), r(2), ..., r(T)\}$ una matriz $N\ x\ T$ con rendimientos de N acciones para cada tiempo T. Usualmente se utiliza la matriz de varianzas-covarianzas asociado a la muestra de datos que se quiere estudiar.

Desde el punto de vista de la estadística clásica, el estimador $\tilde{\Sigma}_{muestral}$ es consistente cuando N es fijo sin embargo, en el análisis de información que se realizará en el siguiente capítulo, T es fija y del mismo orden que N por lo tanto, asumir que $\tilde{\Sigma}_{muestral}$ es un buen estimador, no es tan evidente.

Por otra parte, dado que la matriz R contiene ruido, la matriz $\tilde{\Sigma}_{muestral}$ pude no estar estimando correctamente la matriz de varianzas-covarianzas. Por tal motivo, en este apartado se desarrollará la teoría relacionada a componentes principales (*Principal Components Analysis (PCA)* asi como la *filtración de Tikhonov* con la finalidad de sustentar con fundamentos teóricos el ejercicio práctico que se desarrollará en el siguiente capítulo.

3.1.1. Componentes Principales

El *análisis multivariado* consiste en aquellas técnicas estadísticas que consideran dos o más variables aleatorias relacionadas como una sola entidad e intenta producir un resultado total a través de las relaciones entre las variables consideradas.

El método de componentes pric se basa en un resultado de álgebra matricial. Una matriz simétrica y no singular de $p\ x\ p$, tal como la matriz de varianzas-covarianzas S, puede ser reducida a una mariz diagonal L si esta se multiplica por U^T y U tal como:

$$U^T S U = L \tag{3.1}$$

donde los elementos de $L = \{l_1, l_2, ..., l_p\}$ son llamados raíces características o eigenvalores de S. Las columnas de $U = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ son llamados los vectores característicos o eigenvectores de S.

Para un problema de p variables, sea S una matriz de varianzas-covarianzas como en (2.14) donde σ_{ii} es la varianza de la variable x_i y σ_{ij} es la covarianza entre las variables x_i y x_j.

Si la covarianza no es igual a cero, indica que existe una relación lineal entre x_i y x_j y la fuerza de dicha relación está representada por el coeficiente de correlación $r_{ij} = \frac{\sigma ij}{(\sigma_i \sigma_j}$. De tal forma que la transformación mencionada anteriormente se aplica para transformar las variables correlacionadas $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ en p variables no correlacionadas $\{z_1, z_2, ..., z_p\}$.

Los ejes coordenados de estas nuevas variables son describidos por los vectores característicos u_i que constituyen la matriz U tal que:

$$z = U^T[x - \bar{x}] \quad (3.2)$$

donde x y $\bar{x}$ son vectores *p x 1* de observaciones sobre las variables originales y sus medias. Las variables transformadas son llamadas componentes principales de x de tal forma que el *i-ésimo* componente principal es:

$$z = u_i^T[x - \bar{x}] \quad (3.3)$$

y tendran media cero y varianza l_i que corresponde a la *i-ésima* raíz característica. Las observaciones transformadas son llamadas *z-scores.*

Algunas propiedades de los componentes principales son:

- **Transformación**.

  Si uno desea transformar un conjunto de variables x a través de una transformación lineal $z = U^T[x - \bar{x}]$ ya sea que U se ortonormal o no, la matriz de vairanzas-covarianzas de las nuevas variables (Σ_z), puede ser determinada directamente de la matriz de varianzas-covarianzas de las observaciones originales (Σ), por la relación:

  $$\Sigma_z = U^T SU \quad (3.4)$$

  Este resultado no asegura que las variables transformadas sean no correlacionadas sin embargo, produce una matriz diagonal como la matriz L definida en (3.1).

- **Medidas generalizadas y componentes de variabilidad**.

  Existen dos tipos de medidas sobre la variabilidad total de un conjunto de información multivariada. Estas son:

  1. Determinante de la matriz de varianzas-covarianzas, $|\sigma|$. Esta cuantía (también conocida como varianza generalizada) provee de información relevante. En particular, su raíz cuadrada es proporcional al área o volumen generado por un conjunto de datos.
  2. Suma de las varianzas de las variables es igual a la trzas de σ. Es decir:

     $$\sum_{i=1}^{p} s_i^2 = Tr(\Sigma) \quad (3.5)$$

     Una propiedad del PCA muy útil es que la variabilidad especificadas por cualquiera de estas medidas se preserva.

     $$|\Sigma| = |L| = l_1 l_2 ... l_p \quad (3.6)$$

     es decir, el determinante de la matriz de varianzas-covarianzas es igual al producto de las raices características. Además

     $$Tr(\Sigma) = Tr(L) \quad (3.7)$$

esto es, la suma de las varianzas originales es igual a la suma de las raíces características.

3.1.2. Regularización de Tikhonov

La filtración Tikhonov es un método para obtener soluciones regularizadas a problemas en los cuales se cree que una respuesta y se relaciona linealmente a un conjunto de variables explicativas. Para comprender este mecanismo, a continuación se describe brevemente lo que es la solución a sistemas lineales.

Uno de los problemas más comunes en cálculo numérico es la solución al sistema lineal

$$Ax = b \tag{3.8}$$

esto es, para cada A y b, encontrar x tal que la ecuación se mantenga. EL sistema se dice que es *consistente* si existe una x tal que la solución para x sea $A^{-}b$, donde A^{-} es alguna inversa de A. Si A es una matriz cuadrada y tiene rango completo, es posible escribir la solución $A^{-1}b$.

Es importante distringuir la expresión $A^{-1}b$ o $A^{+}b$, que representan la solución, del método de cálculo de la solución. Nunca se calculará A^{-1} por lo que sólo podría multiplicarse por b para formar la solución $A^{-1}b$.

Existen dos modelos generales para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

- Métodos directos
- Métodos iterativos

Un método directo utiliza un número fijo de calculos que proporciona una solución de forma aritmética en cambio, un método iterativo genera una secuencia de aproximaciones para la solución.

Los métodos iterativos trabajan bien para matrices dispersas de gran tamaño. En muchas aplicaciones, los sisemas lineales son altamente utilizados como modelos de relacionamiento entre una variable observavble, una *respuesta* y otro grupo de variables observables *variables predictivas.*

Es improbable que exista un modelo que ajuste de forma exacta cualquier conjunto de datos de respuesta y variables predictivas. Es posible que lo anterior se deba a efectos de otras variables predictivas que no son consideradas dentro del modelo, errores de medición, relación no lineal en el conjunto de variables, o algún componente aleatorio se presenta en el sistema. En tales aplicaciones, generalmente se utiliza un gran número de observaciones el cual, es mucho mayor que el número de variables en el sistema, entonces, con cada conjunto de observaciones sobre la variable respuesta y variables predictivas asociadas que forman una ecuación, se tiene un sistema com más ecuaciones que variables.

Un sistema sobredeterminado puede escribirse como:

$$Xb \approx y \tag{3.9}$$

donde X es una matriz de nxm, $rank(X|y) > m$; esto es, el sistema no es consistente, lo cual, en aplicaciones estadisticas es una ecuación muy común a resolver. El problema es determinar un valor de b que haga una aproximación en cierto sentido. En aplicaciones de sistemas lineales, es usual referirse a lo anterior como ajustar el sistema es decir, crear un modelo de ajuste. Los sistemas sobredeterminados abundan en ecuaciones de ajuste a datos reales. El modelo usual de regresión lineal es un sistema sobredeterminado.

Aunque puede no existir b como solución al sistema explicado por la ecuación (3.9), el sistema puede reescribirse como:

$$Xb = y - r \tag{3.10}$$

donde r es un vector-n de posibles residuales o errores arbitráreos. Una solución de *mínimos cuadrados* $\hat{b}$ para el sistema 3.9 es uno tal que minimice la norma Euclideana del vector de residuales es decir, la solución al problema:

$$\min_b ||y - Xb||_2 \tag{3.11}$$

La solución de mínimos cuadrados es también llamado ajuste de cuadrados mínimos ordinarios (*.ºrdinary least squares (OLS)"*. Reescribiendo el cuadrado de esta norma como:

$$(y - Xb)^T(y - Xb) \tag{3.12}$$

en la cual, diferenciando e igualando a cero, es posible obervar que el mínimo (tanto de la norma como de su cuadrado) ocurre para la $\hat{b}$ que satisface el sistema cuadrado:

$$X^T\hat{X}b = X^Ty \tag{3.13}$$

El sistema (3.13) es llamado de ecuaciones normales. La matriz X^TX es llamada matriz *Gram*. Su condición determina la aproximación esperada de una solución para un problema de mínimos cuadrados. Las ecuaciones normales son expresiones útiles sin embargo, no son usadas en cálculos. Asi mismo, es importante hacer notar que cualquier información sobre la estabilidad de un problema que la matriz Gram pueda proveer, puede ser obtenida directamente de X.

EL ajuste por mínimos cuadrados para sistemas sobredeterminados tiene propiedades útiles con consecuencias importantes. El ajuste por mínimos cuadrados hace una partición del espacio en dos espacios ortogonales interpretables además, el vector de residuales $y - X\hat{b}$ es ortogonal a cada columna en X es decir:

$$X^T(y - X\hat{b}) = 0 \tag{3.14}$$

Dos consecuencia a modelos que incluyen una itercepción es, en primer lugar, el hecho de que el vector de residuales es ortogonal al vector unitario y, en segundo lugar, la solución por mínimos cuadrados provee un ajuste exacto a la media.

Soluciones regularizadas

En cualquier aplicación en la que se ajusta un sistema sobredeterminado, es posible que los valores dados de X y y sean sólo una muestra (no necesariamente una muestra aleatoria) de algún universo de información de interés. Cualquier valor de b provee el mejor ajuste en términos del criterio elegido sin embargo, puede no ser el mejor ajuste si es aplicado a otros valores igualmente válidos de X y y utilizados. El conjunto de información es ajustado óptimamente, pero el fenómeno adyascente no necesariamente es modelado bien. Los datos proporcionados podrían sugerir una relación sobre las variables que no se presenta sobre el universo de dats de interés.

Algunos elementos de b pueden ser cero, pero en el mejor ajuste para un conjunto de datos dado, el valor de dicho elemento pudiera ser significativamente diferente de cero. Decidir que existe relación sobre ciertas variables cuando esta relación no se presenta sobre un universo más amplio de información, es un ejemplo de sobreajuste.

Existen varios enfoques que evitan el sobreajuste de los modelos. Uno de ellos es la *regularización.* Esta técnica restringe en cierto sentido los valores de b. Minimizar $||y-Xb||$ puede dar como resultado una b con muchos elementos, o elementos que probablemente varirán ampliamente de un conjunto de datos a otro. Una forma de *regularizar* la solución es minimizar la norma de b. La formulación general del problema es:

$$\min_b(||y - Xb||_r + \lambda||b||_b) \tag{3.15}$$

donde λ es un número no negativo elegido apropiadamente. La norma de los residuales, $||\cdot||$, y la norma del vector solución b, $||\cdot||_b$, son elegidos de tal manera que sean la misma y además, deben ser Normas L_2 (Normas Euclidianas). Si las dos normas son la Norma L_2 el ajuste es llamado ***Regularización de Thikonov***

De este problema de minimización se obtienen las ecuaciones normales modificadas:

$$(X^TX + \lambda I)b = X^Ty \tag{3.16}$$

que se obtiene incluyendo λI a la suma de cuadrados y producto cruzado de matrices. La inclusión de la matriz positiva definida tiene el efecto de reducción numérica mal acondicionado.

Estas ecuaciones normales corresponden a la aproximación por mínimos cuadrados para:

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} X \\ \sqrt{\lambda}I \end{bmatrix} \beta \tag{3.17}$$

La contracción hacia 0 es evidente en esta formulación. Por esto, es posible decir que los grados de libertad *efectivos* de una regularización Tokhonov decrece cuando λ se incrementa.

Para evaluar los grados de libertad efectivos en un modelo de regularización Tikhonov para X y λ dados, por ejemplo, usando una descomposición sigular, $X = UDV^T$, se tiene:

$$\begin{aligned} tr(X(X^TX + \lambda I)^{-1}X^T) &= tr(UDV^T(UD^2V^T + \lambda VV^T)^{-1}VDU^T) \\ &= tr(UDV^T(V(D^2 + \lambda I)V^T)^{-1}VDU^T) \\ &= tr(UD(D^2 + \lambda I)^{-1}DU^T) \\ &= tr(D^2(D^2 + \lambda I)^{-1}) \\ &= \sum \frac{d_i^2}{d_i^2 + \lambda} \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde $\lambda = 0$, este es lo mismo que los grados de libertad del modelo ordinario y, cuando λ es positiva, esta cantidad es pequeña, que es como se requiere en el argumento anterior. La $\frac{d_i^2}{(d_i^2+\lambda)}$ es llamado el factor de contracción.

Si X^TX no es de rango completo, la inclusión de λI tiene el efecto de obtener una matriz de rango completo, si λ, y entonces la inversa de $X^TX + \lambda I$ existe aún cuando la de X^TX no.

3.1.3. Filtración de Tikhonov aplicado a rendimientos de acciones

Sea $R = [r(1), ..., r(T)]$ una matriz NxT con información de los rendimientos de las acciones para cada tiempo T, y sea $Z = [z(1), ..., z(T)]$ tal que $E[z(t)] = 0$ y $Var[z(t)] = 1$ la matriz de rendimientos estandarizados de R. Una forma de obtener la base ortogonal U es a partir de una descomposición singular como en la ecuaicón 3.18, alternativamente, es posible obtener dicha matriz aplicando análisis de componentes principales (PCA) para obetner una representación $Z = UF$[1] (ver [Park y O'Leary [19] (2010)]) donde U es la base ortogonal $U = [u_1, u_2, ..., u_k] \in \mathbb{R}$ para Z y $f(t) = [f_1(t), f_2(t), ..., f_k(t)]^T$ es una columna de F que representa los datos proyectados al tiempo t de tal forma que:

$$z(t) = Uf(t) = [u_1, u_2, ..., u_k]f(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i(t)u_i \tag{3.19}$$

donde $f_i(t)$ llamado el i-ésimo componente principal del análisis PCA. U y $f(t)$ en la Ecuación (3.19) forman un modelo lineal con una base ortonormal de dimensión k para la base de rendimientos normalizados Z. Debido a que $z(t)$ contienen ruido, el modelo de dimensión k está sobreajustado y contiene componentes principales irrelevantes; por tal motivo, el uso del método de regularización de Tikhonov contribuye a la reducción de componentes principales irrelevantes para la matriz de rendimientos normalizados Z.

Como resultado, se obtiene la construcción del componente principal filtrado $\tilde{f}(t)$ así como la matriz de rendimientos filtrada $\tilde{Z}$. La formulación del problema lineal para encontrar $\tilde{f}(t)$ se describe a continuación. Sea

[1]donde $F = S_kV_k^T$, $S_k = diag(s_1, ..., s_k \in \mathbb{R}^{kxk}$ es una matriz diagonal de eigenvalores $s : i$

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t) &= U\tilde{f}(t) & (3.20) \\ z(t) &= \tilde{z}(t) \\ &= U\tilde{f}(t) + \epsilon_z(t) & (3.21) \end{aligned}$$

donde $\tilde{z}(t)$ es el dato resultante filtrado y $\epsilon_z(t)$ es el ruido extraído. Dado que se espera que los componentes principales $f_i(t)$ están más contaminados por el ruido, es necesario reducir la contribución de dichos componentes; por lo tanto, se propone aplicar una matriz de filtración $\Phi = diag(\phi_1, ..., \phi_k)$ a $f(t)$ con $\phi_i \in [0, 1]$ tal qué:

$$\tilde{f}(t) = \Phi f(t) \tag{3.22}$$

Por lo que el elemento ϕ_i será tan pequeño cuando s_i así lo sea. La matriz filtrada resultante es:

$$\tilde{Z} = U\Phi F \tag{3.23}$$

De tal forma que, aplicando el método de Tikhonov para estimar la matriz de varianzas-covarianzas, es posible formular el problema de de mínimos cuadrados regularizado para resolver la ecuación (3.15) como

$$\min_{\tilde{f}}(M((\tilde{f}(t)))) \tag{3.24}$$

con $M((\tilde{f}(t))) = ||z(t) - U\tilde{f}(t)||^2 + \lambda^2||P\tilde{f}(t)||^2$, donde λ^2 y P son respectivamente, el parámetro y la matriz de penalización. El primer término $||z(t) - U\tilde{f}(t)||^2$ forza $\tilde{f}(t)$ a que sea cercano a la solución exacta de $f(t)$. El segundo término $||P\tilde{f}(t)||^2$ controla el magnitud de $\tilde{f}(t)$. Con base en [Park y O'Leary [19] (2010)], se elige $P = diag(s_1^{-1}, ..., s_k^{-1})$.

Como resultado, se obtiene la estimación de Tikhonov

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= diag\left(\frac{s_1^2}{s_1^2 + \lambda_1^2}, ..., \frac{s_k^2}{s_k^2 + \lambda_k^2}\right) f(t). \\ &= \Phi(\lambda) f(t). & (3.25) \end{aligned}$$

donde $\Phi(\lambda) = \frac{s_i^2}{s_i^2 + \lambda_i^2} \in [0, 1]$ es la matriz del filtro de Tikhonov de tal forma que $\tilde{f}(t)$ es el resultado de filtrar el componente principal $f(t)$ con la matriz diagonal $\Phi(\lambda)$

Selección del parámetro de Tikhonov λ

Para la estimación de Tikhonov propuesta y con base en [Park y O'Leary [19] (2010)]. Se utilizará el modelo de factores estadísticos como modelo para representar los rendimientos de los activos como se muestra a continuación. Sea

$$r(t) = E[r(t)] + \mathcal{B}\psi(t) + \epsilon(t) \tag{3.26}$$

Con la hipótesis la siguiente hipótesis

$$
\begin{aligned}
E[\psi(t)] &= E[\epsilon(t)] && (3.27)\\
E[\epsilon_i(t)\epsilon_j(t)] &= E[\epsilon_i(t)\psi_l(t)] && (3.28)\\
&= E[\psi_i(t)\psi_j(t)] &&\\
&= 0 &&
\end{aligned}
$$

Con base en la ecuación (3.26), es posible interpretar el modelo de la ecuación (3.21), como un modelo de factores.

$$
\begin{aligned}
r(t) &= E_m[r(t)] + D_V^{\frac{1}{2}}\left(U\tilde{f}(t) + \epsilon_z(t)\right) && (3.29)\\
&= E_m[r(t)] + B\tilde{f}(t) + \epsilon_r(t) && (3.30)
\end{aligned}
$$

donde $B = D_V^{\frac{1}{2}}U$ y $\epsilon_r(t) = D_V^{\frac{1}{2}}\epsilon_z(t)$. Si se asume que $\tilde{f}(t)$ es una buena representación de los factores simétricos $\psi(t)$, es posible interpretar B y $\epsilon_r(t)$ como de la matriz de carga $\mathcal{B}$ y el factor no sistemático $\epsilon(t)$, entonces, dado que $\epsilon_z(t) = z(t) - U\tilde{f}(t)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\epsilon_r(t) &= D_V^{\frac{1}{2}}\epsilon_z(t)\\
&= D_V^{\frac{1}{2}}(Uf(t) - U\Phi f(t))\\
&= B(I_k - \Phi)f(t)
\end{aligned}
$$

donde I_k es la matriz identidad de dimensión kxk.

Con base en lo anterior, como criterio para dterminar una λ adecuada, es necesario formular un problema de optimización minimizando las correlaciones entre el ruido,

$$
\min_{\lambda\in[s_k,s_1]} ||corr_s[\epsilon_r(t) - I_N||_F \tag{3.31}
$$

donde s_1 y s_k son el mayor y menor valor singular de Z.

Estimación de la varianza

Partiendo de la ecuación (3.28), la matriz de varianzas-covarianzas es $\Sigma = \mathcal{B}cov[\psi(t)]\mathcal{B}^T + cov[\epsilon(t)] = \Sigma_m + D_\epsilon$, donde Σ_m es el componente sistemático $\mathcal{B}cov[\psi(t)]\mathcal{B}^T$ y D_ϵ denota el componente no sistemático $cov[\epsilon(t)]$.

La párte sistemática Σ_m se estima por $\Sigma_m = \mathcal{B}cov_m[\tilde{f}(t)]\mathcal{B}^T$. Tomando en cuenta que $f(t)$ tienen media cero, $\tilde{f}(t) = \Phi f(t)$ también tiene media cero de tal forma qué,

$$
\begin{aligned}
cov_m[\tilde{f}(t)] &= \frac{1}{T}(\Phi F)(\Phi F)^T && (3.32)\\
&= \frac{1}{T}(\phi^2 S_k^2) &&\\
\tilde{\Sigma}_m &= Bcov_m[\tilde{f}(t)]B^T && (3.33)\\
&= \frac{1}{T}B(\phi^2 S_k^2)B^T &&
\end{aligned}
$$

La parte no sistemática D es diagonal pues los factores no sistemáticos $\epsilon_i(t)$ son mutuamente no correlacionados. Por lo tanto, es posible estimar $cov[\epsilon(t)]$ a través de la parte diagnal de la diferencia entre $\tilde{\Sigma}_{muestral} = cov_m[r(t)] = \frac{1}{T}BS_k^2B^T$ y $\tilde{\Sigma}_m$. Esto es,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_\epsilon &= diag\left(\tilde{\Sigma}_{muestral} - \tilde{\Sigma}_m\right) \\
&= diag\left(\frac{1}{T}(B(I_k - \Phi^2)S_k^2B^T)\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la matriz filtrada de varianzas-covarianzas

$$\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_m + \tilde{D}_\epsilon \tag{3.34}$$

3.2. Principio de Entropía

La adecuación de un modelo que permita obtener distribuciones de probabilidad a partir de la información de macroestados y microestados es descrita por Thomas M. Cover y Joy A. Thomas [Cover & Thomas (1991) [23]] y a continuación se describe:

La temperatura de un gas corresponde a la energía cinética promedio de las moléculas en el gas. ¿Qué se puede decir sobre la distribución de la velocidad en el gas dada cierta temperatura? Se sabe por las Leyes de la Física, que dicha distribución es la distribución de máxima entropía bajo restricciones de la temperatura, en otro caso, se conoce como la distribución de Maxwell-Boltzmann.

La distribución de máxima entropía corresponde a los macroestados indexados por la distribución empírica que contienen el mayor número de microestados (velocidad actual del gas). Implícitamente en el uso de métodos de máxima entropía en el área de la Física es un ordenamiento de Propiedad de Equiparatición Asintótica (AEP en inglés) que postula que todos los microestados son igualmente probables.

En palabras simples, el principio de máxima entropía es un procedimiento para generar distribuciones de probabilidad con la mayor incertidumbre de entre un conjunto de distribuciones compatibles.

La incertidumbre de una distribución está representada por la función:

$$H =: -\sum_{i=1}^{n} p_i ln(p_i) \tag{3.35}$$

El objetivo es resolver H de manera que se maximice la ecuación.

Como menciona [Romero Méndez [24] (2008)], el principio de máxima entropía y el objetivo bayesiano se encuentran intrínsecamente relacionados, cuando se acepta el hecho de que la probabilidad es una extensión de la lógica, que nos permite razonar en situaciones de información incompleta.

En términos de información, se define que, si un evento A ocurre con probabilidad $P(A)$, se define la *información* $I(A)$ obtenida al conocer que A ha ocurrido como:

$$I(A) =: log_2 \frac{1}{(P(A)} = -log_2 P(A) \tag{3.36}$$

Por lo que se puede concluir que mientras más raro sea un evento, más información obtenemos al saber que ha ocurrido. Es decir, la reducción en la incertidumbre que se espera obtener en la siguiente realización de X.

De esta manera se puede hacer la siguiente definición: Sea X una variable aleatoria discreta, con valores $x_1, ?, x_n$, con distribución de probabilidad $p_i = (P = x_i)$. Sea $p = (p_1, ?, p_n)$. Se define la Entropía de Shannon como:

$$\begin{aligned} H(p) &:= E(I(X = x_i)) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} p_i ln p_i \end{aligned} \tag{3.37}$$

Donde $0log?0 = 0$ para conservar la continuidad. $H(p)$ mide la cantidad de información que se espera obtener al conocer el valor de X.

Propiedades de la entropía.

1. Es simétrica respecto a permutaciones de las p_i.
2. H(p) es un espacio vectorial invariante bajo traslaciones y multiplicación por escalares.
3. Es continua respecto a las p_i.
4. Es no negativa.
5. Es una función cóncava de las p_i.
6. El valor máximo se alcanza cuando las x_i se distribuyen de manera Uniforme, por lo tanto $0 \leq H(X) \leq ln(n)$.
7. Dadas dos variables aleatorias se tiene que :

   $$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \tag{3.38}$$

   donde (X, Y) es la distribución conjunta de X e Y. La igualdad se alcanza sólo cuando ambas son independientes.
8. Cualquier cambio que tienda a igualar las probabilidades $\{p_i\}$ incrementa H.

A continuación se describe el argumento sobre *La derivación de Wallis* el cual se basa en argumentos de Teoría Combinatoria.

Supóngase que se tiene cierta información I, la cual se va a utilizar para asignar las probabilidades $(p_1, ..., p_m)$ a m distintas probabilidades. Por lo tanto, se utilizará la información I (información inicial).

Se escoge un entero n mucho mayor que m, y supóngase que se tienen n pequeñas porciones de probabilidad de magnitud $\frac{1}{n}$ de tal manera que se puedan distribuir de la mejor manera de entre las m posibilidades.

Una mejor manera de visualizar lo anterior es imaginar que se tienen n cestas y m bolas. El objetivo es arrojar las bolas en las cestas de tal forma que cada cesta tenga la misma probabilidad de recibir bolas. Para evitar probabilidades cargadas o no justas, supóngase que las bolas son arrojadas a las cestas con los ojos vendados. Después de tirar la última bola, se cuenta la cantidad de bolas que cayeron en cada cesta. Por lo tanto, se ha generado la distribución de probabilidades:

$$p_i := \frac{n_i}{n}; i = 1, ..., m \tag{3.39}$$

La probabilidad de que caigan exactamente n_1 canicas en la primera cesta, n_2 en la segunda y así sucesivamente se puede calcular con la distribución multinomial:

$$m^{-n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!} \tag{3.40}$$

Cada vez que se realiza el experimento se examina la asignación de probabilidades. Si es compatible con la información I, se acepta, en caso contrario se rechaza y se repite el experimento. Una vez que se ha encontrado una distribución compatible con I se termina él proceso.

Dado que no se establecieron condiciones iniciales y las bolas tienen la misma probabilidad de terminar en cualquiera de las cestas, la distribución esperada es la Uniforme.

Cuando se tienen restricciones o condiciones iniciales, la distribución resultante tendría que ser aquella con más alta probabilidad de ocurrir dentro de la clase de las distribuciones compatibles con I; es decir, aquella que maximice la distribución multinomial antes mencionada sujeta a las restricciones que provea la información I. Es decir:

$$maxW = m^{-n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} n_i!} \tag{3.41}$$

Que es equivalente a maximizar:

$$S = -\sum_{i=1}^{n} p_i ln p_i \tag{3.42}$$

Entropía Relativa.

La principal objeción en contra de la entropía diferencial es que no es invariante bajo cambios de escala. Esta característica util de la entropía de Shannon se puede recuperar si consideramos la entropía relativa, también conocida como divergencia de Kullback-Leibler o como entropía cruzada:

$$D(p||q) := \sum p_i ln \frac{p_i}{q_i} \tag{3.43}$$

donde $p = (p_i, ..., p_n)$ y $q = (q_1, ..., q_n)$ son distribuciones de probabilidad. Se puede generalizar al caso continuo de la siguiente forma:

$$D(f||m) := \int_a^b f(x) ln \frac{f(x)}{m(x)} dx \qquad (3.44)$$

donde $D(f||m)$ satisface varias propiedades:

- $D(p||q)$ es una función contínua de las p_i y q_j.
- Es simétrica respecto a permutaciones de las p_i entre si y las q_j entre sí.
- $D(p||q) \geq 0$, y la igualdad se alcanza si y solo si $p = q(a.e.)$.
- Por lo tanto, el valor mínimo para $D(p||q)$ es cero.
- Es una función cóncava de las p y q.
- $D(p||q) \neq D(q||p)$
- Sea $u = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$ es la distribución uniforme.

$$D(p||u) = lnn - H(p_1, ..., p_n)$$

de donde se ve que $H(p)$ corresponde a tomar la entropía relativa entre p y la distribución uniforme.

3.2.1. Diversificación óptima de portafolios

En [Bera 2005 [20]] se ntroducen algunas medidas de Entropía que se definen a continuación. Una distribución de probabilidad discreta $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^T$ de una variable aleatoria toma N valores, provee una medida de incertidumbre (desorden)con respecto dicha variable aleatoria. Esta medida de desorden, como se vio al incio de este apartado, es llamado *Entropía*. Para el caso del estudio en cuestión. Sea $W = (w_1, w_2, ..., w_N)^T$ la proporción a asignar sobre N activos riesgosos, con la particularidad de que $w_i \geq 0, i = 1, 2, ..., N$ y $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$, tiene la estructura correcta de una distribución de probabilidad. Se utilizará la medida de Entropía de Shannon definida por la ecuación (3.37) como una medida de la diversificación de un portafolio. La ecuación (3.37) provee una buena medida del desorden en un sistema o información esperada en una distribución de probabilidad, por lo que puede ser tomada como una medida de la diversificación de un portafolio. Por lo tanto, se incluirá entropía en la función objetivo para obtener una diversificación máxima para la asignación de activos de un portafolio. Lo que se busca es contraer el portafolio hacia un portafolio igualmente ponderado.

Supóngase que las ponderaciones de un portafolio cambian de w_i a q_i, de tal manera que el cambio en la entropía es $-lnq_i - (-lnw_i) = ln(\frac{w_i}{q_i})$. Tomando el prmedio de $ln(\frac{w_i}{q_i})$ con las w_i como las ponderaciones, se obtiene la notación de entropía cruzada definida por la ecuación (3.43). Por lo tanto, la maximización de (3.37) es un caso especial de minimizar (3.43) respecto a un portafolio igualmente pnderado. Así, a partir de una asignación inicial

q de un portafolio y, minimizando (3.43) es posible obtener un portafolio más diversificado. De tal forma que:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i ln\left(\frac{w_i}{q_i}\right) \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i}(w_i - q_i)^2; q_i > 0 \tag{3.45}$$

De tal forma que las proporciones pequeñas se ajustarán más que las grandes lo que se probará en la siguiente sección, podria resultar en un portafolio más diversificado.

Enfoque preliminar

Un buen punto de partida para incorporar la medida de entropía en la selección de portafolios es a través del problema del dado descrito por E. T. Jaynes en 1962. El problema del dado se describe como:

Se cuenta con dado de 6 caras que puede tomar los valores $x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y el único resultado conocido es el resultado promedio μ_0 y se desea estimar las probabilidades $\beta = (p_1, ..., p_6)$ asociado a los resultrados posibles, producto de tirar un dado.

Existen un número infinito de combinaciones de las p_i que conducen al valor de la media μ_0. Edwin T. Jaynes [[25] 1967] sugiere la necesidad de tener una medida de *incertidumbre* de la distribución de probabilidad que pueda ser maximizada sujeta a la restricción sobre la media, que representa la información disponible. Así, es posible considerar un problema de selección de portafolio tal que, dicha selección se realice con base en selecconar proporciones $W = (w_1, w_2, ..., w_N)^T$ sobre N activos con base en las preferencia que un inversionista tenga sobre el rendimiento esperado, por ejemplo, el descrito en la ecuación (2.10). De tal forma que el prblema de selección de activos puede ser determinado con dos tipos de información disponible: *la media de los rendimientos Ecuación (2.10) y la restricción de los pesos ($\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$).*

Por lo tanto, el problema de la optimización de portafolios puede plantearse como:

$$\begin{aligned} max - &\sum_{i=1}^{N} w_i ln w_i \\ s.a. & \\ &\sum_{i=1}^{N} \alpha_i w_i = \mu_0, \\ &\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \end{aligned} \tag{3.46}$$

donde α_i, denota el rendimiento esperado del activo i.

Utilizando multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{L} = -\sum_{i=1}^{N} w_i ln w_i - \gamma \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i w_i - \mu_0 \right) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} w_i - 1 \right) \tag{3.47}$$

se obtiene la solución:

$$\hat{w}_i = \frac{1}{\Omega(\gamma)} e^{-\gamma \alpha_i} \tag{3.48}$$

donde $\Omega(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} e^{-\gamma\alpha_i}$ que satisface $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$.

La solución (3.48)resulta ser la función de masa de probabilidad que tiene la forma de una distribución exponencial y por lo tanto, y de forma natural impide las venas en corto. Además, dado que la función objetivo descrita en (3.46) es igual igual al negativo de (3.43) con $q = N^{-1}1$ mas una constante, es posible interpretar la solución $\hat{W}$ es la solución más cercana al portafolio con ponderaciones equiprobables $w_i = \frac{1}{N}$ condicionado a la media predeterminada μ_0.

En este sentido, las proporciones resultantes del portafolio son diversificadas al máximo dada la restricción del rendimiento esperado del partafolo.

Para tomar en cuenta la varianza, es posible extender el problema de optimización como se propone a continuación:

$$\begin{aligned} & max{-}W^T lnW \\ & \quad s.a. \\ & \qquad W^T \alpha \geq \mu^0, \\ & \qquad \sqrt{W^T \Sigma W} \leq \sigma^0, \\ & \qquad W^T 1_N \end{aligned} \tag{3.49}$$

donde Σ denota la matriz de varianzas-covarianzas definida por la ecuación (2.14). Las desigualdades en (3.49) se pueden interpretar como condiciones frontera (preferencias de un inversionista) es decir, el rendimiento medio de un portafolio no puede ser menor μ^0 ni la desviación estándar mayor a σ^0.

Aunque el problema (3.49) es intuitívamente sencillo, mo tiene una solución sencilla, Para más detalles sobre la solución ver [Bera (2005)[20] pág. 9].

Enfoque General

Debido a que las medidas estadísticas para a medir la media y varianza mestral, es necesario definir una restricción más general que la definida en (3.49). En general, considerese el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
minD(p||q) &= \sum_{i=1}^{N} w_i ln \frac{w_i}{q_i} \\
s.a. & \\
E(U(W,R,\lambda)) &\geq \tau, \\
W &\geq 0, \\
W^T 1_N &= 1
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

donde $U(W,R,\lambda)$ es una función de utilidad , λ es el parámetro de aversión al riesgo y τ refleja la fuerza con la que un inversionista cree en el valor estimado de la utilidad esperada. Se asume que el vector *R N x 1* tiene una distribución *F(R)* con una función de densidad *f(R)*. Para ver la significancia de τ, se define:

$$\zeta \equiv E(U(\check{W},R,\lambda)) \tag{3.51}$$

donde $\check{W} = (\check{w}_1, \check{w}_2, ..., \check{w}_N)$ satisfacen la maximización de la utilidad esperada:

$$
\begin{aligned}
&\hat{W} = arg \max_W E(U(W,\tilde{R},\lambda)) \\
&s.a. \\
&\quad W^T 1_N = 1 \\
&\; W \geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

donde $\tilde{R}$ es una muestra aleatoria de tamaño T de la distribución empírica $\hat{F}(R)$.

Con base en lo anterior, en el trabajo de aplicación se considerará la maximización de la función de utilidad isoelástica definida en (2.11), es decir,

$$
\begin{aligned}
\max_W E(U(W,R,\lambda)) &= \max_W \left[W^T \alpha - \frac{\lambda}{2} W^T \Sigma W \right] \\
s.a. & \\
W^T 1_N &= 1 \\
W &\geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Anil K. Bera [Bera [20] (2005) p. 11] propone el uso de bootstrap o métodos de Monte Carlo para obtener la utilidad esperada $E(U(W,\check{R},\lambda))$ es decir, hacer un remuestreo de $T\ x\ N$ muestras para B veces de la distribución empírica, $\hat{F}(R)$. Sea $\tilde{R_{(b)}}, b = 1,2,...,B$ la serie de remuestreos. Entonces $\check{W_{(b)}}$ y $\zeta_{(b)}$ pueden calcularse como:

$$\check{W_{(b)}} = arg \max_W \left[W^T \tilde{\alpha_{(b)}} - \frac{\lambda}{2} W^T \tilde{\Sigma_{(b)}} W \right] \tag{3.54}$$

$$\zeta_{(b)} = \check{W}^T_{(b)} \hat{\alpha} - \frac{\lambda}{2} \check{W}^T_{(b)} \hat{\Sigma} \check{W}_{(b)} \tag{3.55}$$

donde $\hat{\alpha}$ y $\hat{\Sigma}$ son el vector de la media y matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos R. $\tilde{\alpha}$ y $\widetilde{\Sigma_{(b)}}$ son resultado de los rendimientos simulados $\widetilde{R_{(b)}}$.

La distribución empírica ζ puede ser estimada con base en $\zeta_{(b)}, b = 1, 2, ..., B$. Por lo tanto, el problema de optimización utilizando entropía cruzada es:

$$
\begin{aligned}
& \min_{W} \sum_{i=1}^{N} w_i ln \left(\frac{w_i}{q_i} \right) \\
& s.a. \\
& \quad W^T \hat{\alpha} - \frac{\lambda}{2} W^T \hat{\Sigma} W \geq \hat{G-}1(r) \\
& \quad W^T 1_N = 1 \\
& \quad W \geq 0,
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

donde $\hat{G}(\dot{})$ denota la función de la distribución empírica de ζ.

Este último resultado es fundamental para la aplicación que se realizará en el siguiente capítulo.

En conclsión, este capítulo provee el marco teórico necesario para utilizar con base en la **filtración de Tikhonov** una matriz de varianzas-covarianzas mejorada además, establece los lineamientos para utilizar una función objetivo, con base en el principio de **entropía relativa**, para obtener los ponderadores óptimos en el problema de selección de activos para crear portafolios de inversión.

Capítulo 4

Portafolios de inversión

En los capítulos anteriores se desarrolló el sustento teórico que motivó este proyecto de investigación, se definieron tres de las cuatro etapas que comprende el proceso de creación de portafolios de inversión óptimos. En este capítulo se realizará a aplicación del modelo de selección de activos con base en la medida de máxima Entropía. Como se comentó con anterioridad, el motor de cálculo para el desarrollo de la aplicación está desarrollado en código SAS y fue desarrollado en su totalidad por el autor del presente trabajo.

En la figura 4.1 se describe el diseño de la aplicación para obtener portafolios óptimos con base en la medida de máxima Entropía. En dicho diseño, se describen los pasos a seguir para llevar a cabo la construcción de los modelos teóricos definidos en los Capítulos 2 y 3.

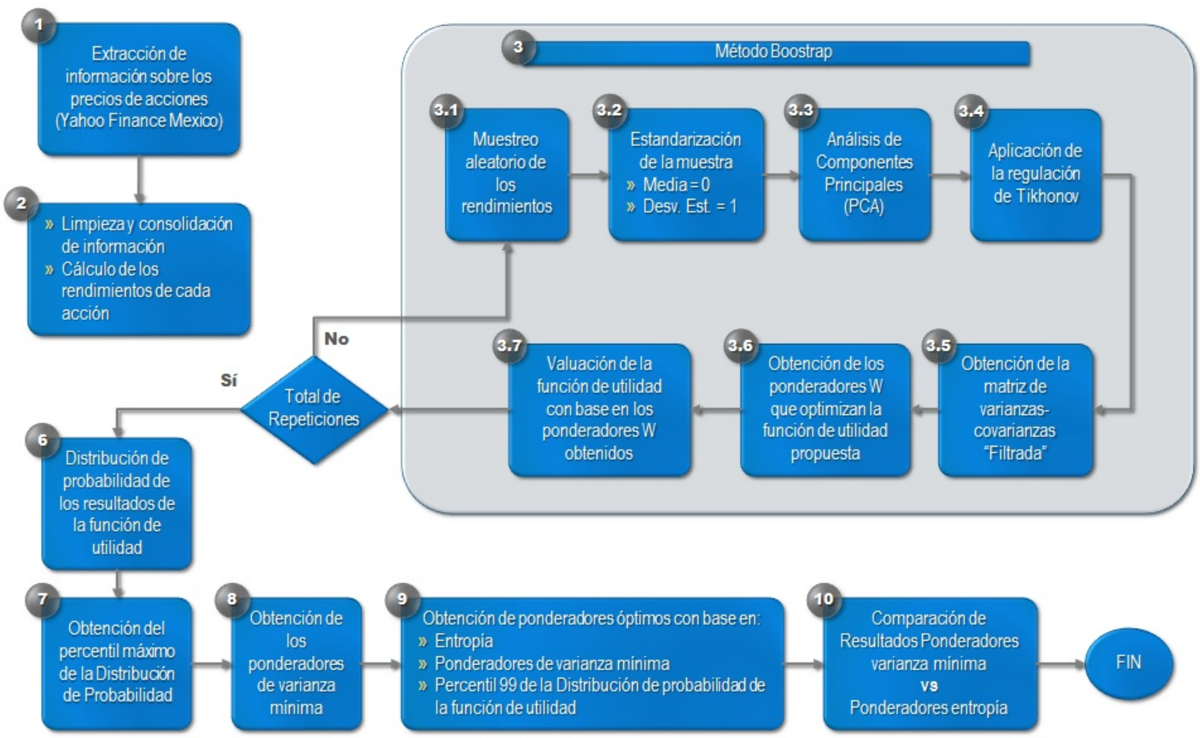

Figura 4.1: Proceso de obtención de ponderadores para portafolios de inversión óptimos

4.1. Sobre la información disponible

Debido a la dificultad para obtener datos de PIP o Valmer[1], los datos fueron obtenidos de la página de yahoo, denominada Yahoo Finance. A continuación se describen los pasos 1 y 2 del proceso presentado en la Figura 4.1.

La información descargada de Yahoo Finance se devidió en tres periodos de información con las siguientes caracteristicas:

- **Tipo de acciones**. Para la realización del análisis propuesto, se consideraron las acciones que hoy en día conforman el IPC[2].
- **Selección de acciones**. Debido a que muchas acciones no cuentan con información suficiente, se determinó utlizar únicamente aquellas acciones con más de 150 observaciones.
- **Temporalidad de las acciones**. Para llevar a cabo un análisis del modelo, se detrminó realizar la aplicación del modelo con base en cuatro diferentes periodos de tiempo de tal forma que la información histórica del periodo t se utilizó para obtener los ponderadres óptimos que conformarán el portafolio en el periodo $t+1$ con $t = 1, 2, 3$. Utilizando como base la **Crisis Suprime**, se determinó dividir la información en periodos de 19 meses. El detalle de la información se describe a continuación:
  - *Información histórica anterior a la crisis.* En este segmento de información, se consideró incluir la información de las acciones que hayan cotizado del 1° de enero de 2006 al 31 de julio del 2007.
  - *Información histórica durante la crisis.* Para este segmento de informacióm, se tomaron en cuenta las acciones que cotizaron entre 1° de agosto del 2007 y el 27 de febrero del 2009. Este periodo sirve para construir los ponderadores óptimos del periodo y la valuacion del portafolio construido con base en la información del periodo anterior.
  - *Información histórica posterior a la crisis.* La información que se consideró el periodo del 1 marzo del 2009 al 30 de septiembre del 2010 como el periodo posterior a la crisis. Este periodo sirve para construir los ponderadores óptimos del periodo y la valuacion del portafolio construido con base en la información del periodo anterior.
  - *Información del último periodo de valuación.* Finalmente, se consideró el periodo del 1 octubre del 2010 al 30 de mayo del 2012 como el periodo para la construcción y valuación del tercer portafoolio de inversión. Este periodo sirve para valuar el portafolio construido con base en la información del periodo anterior.

[1] Ambas instituciones son las proveedoras de precios sobre la información de mercado. Se especializan en la distribución de factores de riesgo, precios de instrumentos como bonos, futuros, acciones, etc. La información que proporcionan a instituciones financieras tiene un costo asociado y varia dependiendo del nivel de información y temporalidad requeridos.

[2] Ver anexo para revisar el detalle de las acciones por sector.

- **Calidad de la información**. Se determinó, que para aquellas acciones que no tuvieran precios de cotización diario y, tuviera valores nulos entre dos fechas distintas (entre lunes y viernes, [no se considerá información para sábado y domingo]), se tomaría el último precio conocido antes del primer valor nulo y se reemplazarían los valores nulos por dicho valor hasta un dia antes de la siguiente fecha con valor distinto a nulo. Con base en estos supuestos, se calculó el rendimiento de la acción con base en la ecuación (2.3).

- **Seguimiento**. Para finalizar, se determinó utilizar las mismas acciones en los 3 escenarios por lo tanto, las acciones que seleccionadas en el primer análisis (*Información anterior a la crisis*), serán las mismas a analizar en los dos bloques de tiempo siguiente.

Como resultado, se obtuvieron tres tablas resumen (una para cada periodo de análisis) con la información de los rendimientos de las acciones. Estas tablas son el insumo para el análisis de información y construcción de portafolios óptimos. En las siguientes secciones del presente capítulo, se detalla la forma en que dichos insumos fueron utilizados para obtener los portafolios óptimos.

4.2. Modelo Bootstrap

Como se comentó anteriormente, obtener resultados confiables al momento de implementar estrategias de inversión con base en la resolución de problemas de optimización es un tema delicado cuando la información con la que se cuenta, no es del todo confiable. Por tal motivo, se desarrollló la aplicación del modelo Boostrapping utilizando la Filtración de Tikhonov. Como punto de partida para la implementación del modelo Boostrap y la filtración de Tikhonov, se tomó la información de los rendimientos con base en la extracción, limpieza y consolidación de información de los precios de las acciones. La finalidad de este apartado es describir la forma en la que se obtuvo la distribución de probabilidad asociada a los posibles resultados de la Función de Utilidad definida en la ecuación (2.11) es decir, obtener el valor esperado máximo de distribución de la función de utilidad

$$\begin{aligned} \max_{\pi} E[U(\pi, R, \lambda)] &= \max_{\pi} \left[\pi' m - \frac{\lambda}{2} \pi' \tilde{\Sigma} \pi \right] \\ s.a. &\quad \pi \geq 0, \pi' 1_N = 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

El proceso de implementación del modelo bootstrapping consiste en siete pasos a seguir. Cada paso, representa un componente del proceso iterativo. El número de repeticiones que se contemplaron para la aplicación de este proceso fue de 1,500 iteraciones.

Aún cuando el problema de optimización juega un papel fundamental en la Teoría moderna del portafolio, es imperativo implementar nuevas técnicas para mejorar la estimación de las estadísticas descriptivas del portafolio de inversión. Con base en lo anterior, se decidió realizar 1,500 iteraciones con base en la selección del 30 % de las observaciones disponibles en la matriz de rendimientos; es decir, si se consideraron 19 meses de análisis

(400 observaciones por acción), cada iteración contempló la selección aleatoria de entre 110 y 120 registros. A partir de los registros seleccinados se procedió a calcular la media y desviación estándar de los rendimientos muestrales para cada acción.

Posteriormente, se obtuvo la matriz Z para obtener la matriz $\tilde{\sigma}$ con base en el desarrollo del Capítulo 3. La matriz de varianzas-covarianzas de la muestra aleatoria, es un insumo primordial para el modelo de Bootstrapping mencionado en Bera [Bera [20] (2005)] y representado por la ecuación (4.1). En dicho planteamiento, se utiliza la matriz de varianzas-covarianzas y los rendimientos de cada muestra, como insumos para maximizar en cada iteración, la función de utilidad descrita en la ecuación (2.11).

Sea $\tilde{R}_{(b)}$, los rendimientos seleccionados en cada iteración $b = 1, 2, ..., 1500$ del modelo bootstrap. Por lo tanto, como se mencionó en el Capítulo anterior, el valor del portafolio de cada iteración $\hat{\pi}_{(b)}$ y la distribución $\psi_{(b)}$ pueden ser calculados con base en las ecuaciones (3.54) y (3.55). Con base en lo anterior y con base en Park y y O'Leary [Park y O'Leary [19] (2010)], se decidió que en cada iteración se incluiría la matriz mejorada $\tilde{\Sigma}$, descrita por la ecuación (3.34), resultado de la filtración de Tikhonov, como insumo para la obtención de los ponderadores que se utilizaron para $\zeta_{(b)}$ con $b = 1, 2, ..., 1500$. Como resultado a continuación se muestran las distribuciones ζ (para cada periodo de análisis) resultado del modelo de bootstrapping.

La rabla 4.2 y la figura 4.3, muestran el análisis estadístico de la distribución obtenida mediante el modleo bootstrap y comprende el periodo (01/01/2006-31/07/2007).

Parámetros bajo la distribución Lognormal	
Theta	0.001103
Zeta	-6.45966
Sigma	0.200992
Media	0.0027
Desv Est.	0.000324

Cuadro 4.1: Análisis de los rendimeintos de las acciones

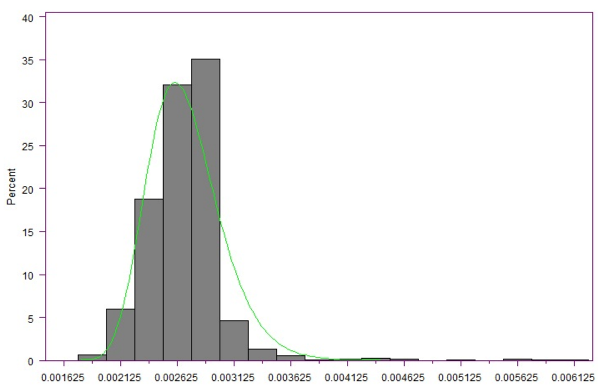

Figura 4.2: Distribución rendimientos esperados (Antes de la crisis)

Como puede observarse, la distribución de la función de utilidad presenta una utilidad esperada (μ_{AC}) de .27 % (la mayor utilidad esperada comparada con los dos intervalos de riesgo restantes) y una desviación estándar (σ_{AC}) de .034 %. Debido a que visualmente, la distribución de la función de utilidad es semejante a una distribución lognormal, se realizó un análisis de bondad y ajuste con un intervalo de confianza del 99.9 %. Los resultados de la prueba de hipótesis se muestran en la tabla 4.4; con base en los resultados obtenidos, se concluye que la distribución de la utilidad esperada no sigue una distribución Lognormal por lo que se utilizara el valor máximo observado como $\hat{G}(\dot{}) = 0{,}0059913382$ en la ecuación (3.56)

Pruebas de bondad y ajuste para la distribución Lognormal				
Prueba	Estadísticos		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.1094	Pr > D	<0.001
Cramer-von Mises	W-Sq	2.1228	Pr > W-Sq	<0.001
Anderson-Darling	A-Sq	15.4643	Pr > A-Sq	<0.001
Chi-Square	Chi-Sq	53317.68	Pr > Chi-Sq	<0.001

Cuadro 4.2: Análisis de los rendimeintos de las acciones

También se obtuvieron los análisis para el periodo (01/08/2007-27/02/2009), los resultados del análisis estadístico y la distribución de probabilidad se muestran la tabla 4.5 y la figura 4.7 respectivamente.

Parámetros bajo la distribución Lognormal	
Theta	-0.00371
Zeta	-5.90276
Sigma	0.163771
Media	-0.00094
Desv Est.	0.000456

Cuadro 4.3: Análisis de los rendimeintos de las acciones

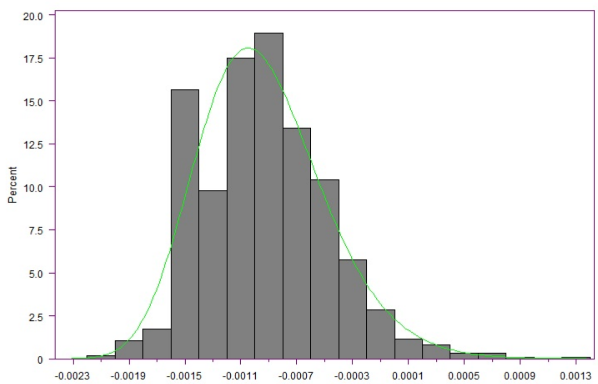

Figura 4.3: Distribución rendimientos esperados (Periodo de crisis)

Para este caso (perdiodo de crisis), se esperaba una utilidad esperada negativa ($\mu_{DC} = -0{,}093\,\%$)lo cuál se confirmó con el análisis estadístico sobre la distribución de la función de utilidad. Así mismo, como parte del análisis se detectó una desviación estándar σ_{DC} de 0.045 % qué, comparada con las desviaciones estándar de los otros periodos, resultó ser la más alta. También se percibió que era posible ajustar la dstribución de la función de utilidad a una distribión lognormal. El ajuste se realizó con un nivel de confianza del 99.9 %. Los resultados de la prueba de hipótesis se muestran en la tabla 4.8; con base en los resultados obtenidos, se concluye que la distribución de la utilidad esperada no sigue una distribución Lognormal por lo que se utilizara el valor máximo observado como $\hat{G}(\dot{}) = 0{,}0033009759$ en la ecuación (3.56)

Pruebas de bondad y ajuste para la distribución Lognormal				
Prueba	Estadisticos		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.079897	Pr > D	<0.001
Cramer-von Mises	W-Sq	0.698069	Pr > W-Sq	<0.001
Anderson-Darling	A-Sq	6.29106	Pr > A-Sq	<0.001
Chi-Square	Chi-Sq	125.5751	Pr > Chi-Sq	<0.001

Cuadro 4.4: Análisis ajuste de la distribución lognormal (Periodo de crisis)

Finalmente, se realizó el mismo análisis para el periodo posterior a la crisis (al menos después del periodo de desplome de la economía de Estados Unidos de América) que comprende el perido de tiempo (01/03/2009-30/09/2010). los resultados del análisis estadístico y la distribución de probabilidad se muestran las figuras 4.8 y 4.9 respectivamente.

Parámetros bajo la distribución Lognormal	
Theta	-0.00759
Zeta	-4.63778
Sigma	0.01426
Media	0.002086
Desv Est.	0.000138

Cuadro 4.5: Análisis de los rendimeintos de las acciones

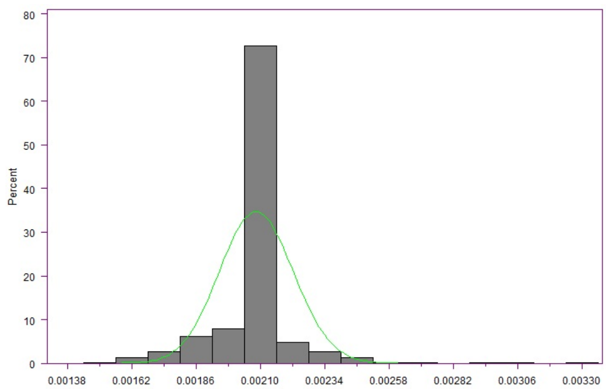

Figura 4.4: Distribución rendimientos esperados (Después de la crisis)

Para este periodo se esperaba una recuperación en la función de utilidad, se confirmó dicha recuperación con una utilidad media de 0.208 % y una desviación estándar (la menor de los tres periodos de tiempo analizados) de 0.0013 % lo que indica un periodo de mayor estabilidad. Al igual que en los dos análisis previos, se decidió realizar el ajuste de la distribución de la función de utilidad a una distribución lognormal. A continuación se presenta el análisis de bondad y ajuste al 99.9 % de confianza. El ajuste se realizó con un nivel de confianza del 99.9 %. Los resultados de la prueba de hipótesis se muestran en la tabla 4.10; con base en los resultados obtenidos, se concluye que la distribución de la utilidad esperada no sigue una distribución Lognormal por lo que se utilizara el valor máximo observado como $\hat{G}(\dot{}) = 0{,}0029076152$ en la ecuación (3.56)

Pruebas de bondad y ajuste para la distribución Lognormal				
Prueba	Estadísticos		p Value	
Kolmogorov-Smirnov	D	0.354	Pr > D	<0.001
Cramer-von Mises	W-Sq	45.5138	Pr > W-Sq	<0.001
Anderson-Darling	A-Sq	205.6686	Pr > A-Sq	<0.001
Chi-Square	Chi-Sq	44072.53	Pr > Chi-Sq	<0.001

Cuadro 4.6: Análisis ajuste de la distribución lognormal (Después de la crisis)

4.2.1. Optimización de portafolios

Para poder determinar si la estrategia propuesta para la implementación de portafolios óptimos es eficiente, se decidió crear 4 alternativas de inversión para cada periodo como se describe a continuación,

- Portafolio de Varianza Mínima, obtenido a través del proceso de optimización definido por la ecuación (4.2).
- Portafolio de Varianza Mínima con matriz de varianzas-covarianzas ($\tilde{\Sigma}$) obtenida de la Filtración de Tikhonv.
- Portafolio Entropía, obtenido bajo el enfoque de Entropía utilizando los ponderadores del portafolio de varianza mínima como la distribución a priori.
- Portafolio Entropía con ponderadores del portafolio de matriz de varianzas-covarianzas ($\tilde{\Sigma}$) obtenida de la Filtración de Tikhonv como distrbución a priori.

De tal forma que dichas estrategias se aplicarán con base en la selección de activos a inicio de cada periodo y se le dió seguimiento hasta finalizar cada periodo. Finalmente, se realizó un seguimiento al portafolio creado con base en la información disponible al 27 de febrero de 2006 y se observó su comportamiento hasta el último día de análisis (30 de septiembre de 2010).

A continuación se presneta el Cuadro (4.1) con la información de las acciones seleccionadas [3].

[3] La selección de las acciones se realizó de manera aleatoria con dos requisitos fundamentales: en primer lugar, que fueran acciones del IPC y segundo, que tuvieran más de 150 días de información.

Acciones	Rendimientos AC	Desv.Est. AC	Rendimientos DC	Desv.Est. DC	Rendimientos PC	Desv.Est. PC
ALFA_A	0.082%	1.761%	-0.345%	3.324%	0.402%	2.661%
ALSEA	0.653%	8.003%	-0.407%	3.156%	0.317%	2.675%
ARA	0.543%	7.948%	-0.383%	3.669%	0.209%	2.200%
AXTELCPO	0.376%	2.889%	-0.135%	6.929%	0.095%	2.885%
BIMBOA	0.180%	1.721%	-0.097%	2.616%	0.152%	1.970%
CEMEXCPO	0.233%	4.315%	-0.372%	4.468%	0.056%	3.079%
COMERCIU	0.140%	2.022%	-0.641%	8.624%	0.320%	2.816%
ELEKTRA	0.208%	1.765%	0.093%	2.764%	0.028%	2.399%
FEMSAUBD	0.412%	6.495%	-0.011%	2.826%	0.152%	1.829%
GAPB	0.165%	1.995%	-0.186%	2.629%	0.177%	2.084%
GFNORTEO	0.197%	2.129%	-0.274%	4.149%	0.247%	2.849%
GMEXICOB	0.298%	2.337%	0.011%	7.026%	0.341%	2.723%
GMODELOC	0.122%	1.791%	-0.070%	2.345%	0.147%	2.128%
HOMEX	0.159%	1.989%	-0.313%	4.245%	0.196%	2.753%
ICA	0.235%	2.081%	-0.288%	3.938%	0.097%	2.224%
KIMBERA	0.066%	1.617%	0.035%	2.342%	0.177%	1.786%
LIVEPOLC	0.276%	2.783%	-0.102%	3.524%	0.160%	3.689%
MEXICHEM	0.326%	2.033%	0.280%	6.669%	0.336%	2.064%
SORIANAB	0.598%	6.633%	-0.153%	2.865%	0.125%	2.087%
URBI	0.517%	6.348%	-0.315%	4.125%	0.175%	2.710%
WALMEXV	0.096%	1.950%	-0.079%	2.571%	0.335%	3.917%

Cuadro 4.7: Análisis de los rendimeintos de las acciones

Para el caso del anális de los rendimeintos, ASEA, SORIANA, ARA, URBI y FEMSA presentaron tanto los rendimientos como las desviaciones estándar más elevadas. Durante la crisis, MEXICHEM fue el único que reportó rendimiento mayor a 0.20 % sin embargo, la desviación estándar 6.66 % fue comparable con la que presentó SORIANA (6.63 %)en el intervalo anterior a la crisis pero presentando 0.31 puntos porcentuales menos de rendimiento esperado (lo que confirma el periodo de crisis). Finalmente, durante el periodo posterior a la Crisis ALFA, GMEXICOB, MEXICHEM, WALMEX, COMERCIU Y ALSEA reportaron un rendimiento medio por encima del 0.3 % y una varianza entre 2 % y 4 % que indica un periodo de estabilidad post-crisis [4].

Para fines de la aplicación, se consideró utilizar el problema de optimización definido por la ecuación (4.2) para obtener los ponderadores del portafolio de varianza mínima.

$$\begin{aligned} &Min\sigma_{\pi}^2 \\ s.a. &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ &w_i \geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

[4]Revisar Anexo para el detalle de nombres y sectores asociados a cada ación.

Con base en la ecuación (4.2), se determinó generar dos escenarios. El primero con la matriz Σ y el segundo con la matriz filtrada $\tilde{\Sigma}$(ver Filtración de Tikhonov). El objetivo de este procedimiento fue obtener los ponderadores .ª priori”que servirán de insumo para aplicar Entropía y obtener los ponderadores que maximicen (2.27). En este sentido, se obtuvieron dos escenarios para los ponderadores, el primero utlizo los ponderadores obtenidos bajo el enfoque MV y la matriz Σ y el segundo utilizo la información .ª prioriçon base en los ponderadores de varianza mínima asociados a la matriz filtrada $\tilde{\Sigma}$.

Con base en los escenarios descritos en el párrafo anterior, se consideró invertir \$100,000 pesos mexicanos. A continuación se presentan los resultados, es decir, como se hubiesen comportado los portafolios de inversión en caso de haber elegido algún método de optimización.

4.3. Construcción y seguimiento de portafolios de inversión

4.3.1. Análisis del portafolio durante el periodo de crisis

A continuación se presentan los resultados obtenidos si se hubiese realizado alguna estrategia de inversión con base en el Modelo MV asi como el modelo propuesto de Entropía.

Cuadro resumen	Utilidad esperada	Rendimiento esperado	Varianza
Ponderadores MV	5.836%	0.278%	0.020%
Ponderadores MVTikonov	9.197%	0.389%	-2.051%
Ponderadores MVEntropy	5.951%	0.284%	0.020%
Ponderadores MVTikEntr	5.651%	0.280%	0.446%

Cuadro 4.8: Utilidad por estrategia de inversión

Como resultado del proceso de optimización, se obtuvieron los ponderadores óptimos bajo los 4 escenarios descritos anteriormente (ver Anexo con los cuadro resumen de la estrategia de inversión). Posteriormente, se calculó la utilidad esperada, el rendimiento medio y la varianza del portafolio. El Cuadro (4.2) muestra los resultados obtenidos,

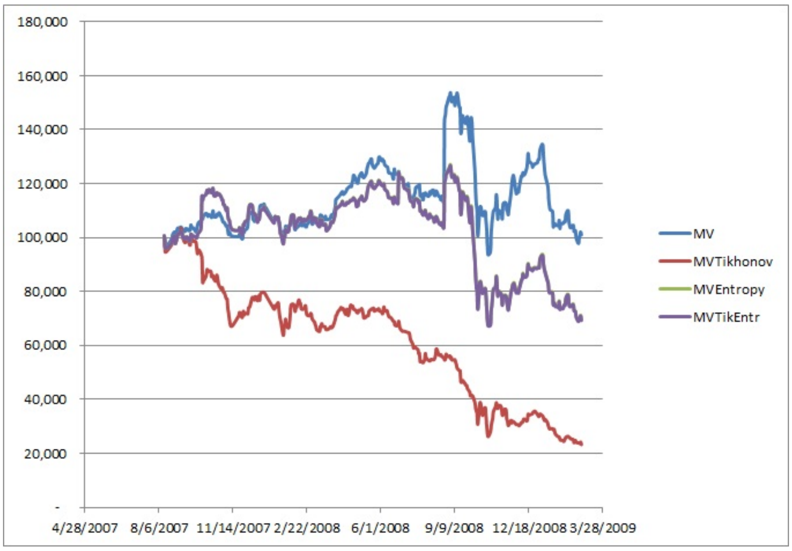

Figura 4.5: Gráfica del valor del portafolio en el tiempo (periodo antes de la crisis)

Acción	Ponderadores MV	Ponderadores MVTikhonov	Ponderadores MVEntropy	Ponderadores MVTikEntr
ALFA_A	8.538%	0.000%	4.789%	4.734%
ALSEA	1.044%	49.993%	4.753%	4.973%
ARA	0.020%	49.999%	4.722%	4.973%
AXTELCPO	0.411%	0.000%	4.738%	4.731%
BIMBOA	10.788%	0.000%	4.793%	4.731%
CEMEXCPO	0.424%	0.000%	4.738%	4.745%
COMERCIU	1.985%	0.000%	4.764%	4.749%
ELEKTRA	13.877%	0.000%	4.798%	4.745%
FEMSAUBD	1.061%	0.001%	4.754%	4.755%
GAPB	10.987%	0.000%	4.794%	4.725%
GFNORTEO	0.125%	0.000%	4.722%	4.725%
GMEXICOB	0.137%	0.000%	4.723%	4.738%
GMODELOC	7.520%	0.000%	4.787%	4.747%
HOMEX	2.554%	0.000%	4.769%	4.734%
ICA	0.569%	0.000%	4.743%	4.725%
KIMBERA	19.809%	0.000%	4.804%	4.725%
LIVEPOLC	9.897%	0.000%	4.792%	4.751%
MEXICHEM	8.297%	0.000%	4.789%	4.748%
SORIANAB	0.230%	0.001%	4.729%	4.753%
URBI	0.943%	0.001%	4.752%	4.753%
WALMEXV	0.783%	0.000%	4.748%	4.741%
Total	100%	100%	100%	100.000%

Cuadro 4.9: Ponderadores por metodología de inversión

La estrategia que presentó una mayor utilidad esperada es la realizada bajo el enfoque de varianza mínima, este resultado se confirma en la figura 4.11 en la cual, se muestra la gráfica del valor de los portafolios en el tiempo y su evolución. Como puede observarse, el portafolio creado con los ponderadores de varinza mínima presenta un crecimiento muy bajo en el valor del portafolio (presenta un rendimeinto del 1.08 %) sin embargo, como se muestra en la tabla A.4, la concentración de los ponderadores se presentó en: ALFA_A, BIMBOA, ELEKTRA, GAPB, KIMBERA, LIVERPOLC y MEXICHEM. Para este periodo, fue la única estrategia que presentó resultados positivos.

4.3.2. Análisis del portafolio posterior al periodo de crisis

Los portafolios creados en esta sección, se desarrollaron con base en la información de las acciones en el periodo crisis, es decir, la incertidumbre y volatilidad juegan un factor decisivo para las estrategias de inversión. De la misma forma que en la sección anterior, se realizo el análisis de los portafolios construidos con los 4 escenarios de aplicación. Se obtuvieron los ponderadores y se realizó la inversión hipotética. Se dio seguimiento durante 19 meses de evaluación y se observaron resultados completamente diferentes respecto al periodo anterior.

Como primer análisis, se realizó la estimación de la utilidad, media y varianza del portafolio hipotético bajo los cuatro escenarios. En el Cuadro (4.4) se muestran los resultados,

Cuadro resumen	Utilidad esperada	Rendimiento esperado	Varianza
Ponderadores MV	-3.874%	-0.183%	0.053%
Ponderadores MVTikonov	-4.512%	-0.308%	-3.927%
Ponderadores MVEntropy	0.519%	0.027%	0.110%
Ponderadores MVTikEntr	0.253%	0.017%	0.205%

Cuadro 4.10: Utilidad por estrategia de inversión

Figura 4.6: Gráfica del valor del portafolio en el tiempo (periodo de crisis)

Como puede observarse,la utilidad es negativa cuando se utilizan tanto el enfoque Media-Varianza simple como el enfoque Media-Varianza utilizando la filtración de Tikhonov en la matriz de varianzas-covarianzas. Para el caso del uso de ponderadores con base en Entropía, la utilidad es positiva. En la figura 4.12 puede observarse que el resultado es distinto a lo esperado. Todas las estrategias presentaron rendimientos positivo (lo que es conistente tomando en cuenta que es un periodo de recuperación. Algo sobresaliente es el hecho de que la estrategia que utilizó los ponderadores obtenidos por el enfoque de Entropía fue el que presentó mejores resultados (rendimeinto de 160 %).

Acción	Ponderadores MV	Ponderadores MVTikhonov	Ponderadores MVEntropy	Ponderadores MVTikEntr
ALFA_A	0.10%	0.00%	0.01%	0.00%
ALSEA	0.23%	0.00%	0.01%	0.00%
ARA	0.12%	0.00%	0.02%	0.00%
AXTELCPO	0.13%	33.08%	1.02%	9.58%
BIMBOA	0.18%	0.00%	1.81%	1.18%
CEMEXCPO	0.03%	0.00%	0.01%	0.00%
COMERCIU	0.05%	41.28%	0.01%	0.24%
ELEKTRA	11.99%	0.00%	15.73%	12.30%
FEMSAUBD	0.17%	0.00%	3.93%	6.80%
GAPB	16.93%	0.00%	7.19%	3.80%
GFNORTEO	0.03%	0.00%	0.02%	0.00%
GMEXICOB	0.02%	0.00%	4.44%	8.87%
GMODELOC	19.78%	0.00%	12.84%	7.06%
HOMEX	0.02%	0.00%	0.01%	0.00%
ICA	0.03%	0.00%	0.01%	0.00%
KIMBERA	14.25%	0.00%	14.37%	10.23%
LIVEPOLC	20.27%	25.63%	10.84%	13.59%
MEXICHEM	0.08%	0.00%	16.46%	19.96%
SORIANAB	1.48%	0.00%	2.06%	1.62%
URBI	0.02%	0.00%	0.01%	0.00%
WALMEXV	14.09%	0.00%	9.18%	4.76%
Total	100%	100%	100%	100%

Cuadro 4.11: Ponderadores por metodología de inversión

Con base en los ponderadores de la tabla 4.7, los rendimeintos de cada portafolio simulado fueron: 127 % para el portafolio MV tradicional, 158 % para el portafolio MV con la foltración de Tikhonov. Por otro lado, con base en el enfoque de Entropía, se obtuvieron los siguientes resultados: 160 % para el portafolio que utilizó los ponderadores del enfoque tradicional como distribución .ª prioriz 159 % para el portafolio con los ponderadores del enfoque MV-Tikhonov como distribución .ª priori".

4.3.3. Análisis del portafolio 19 meses después de la crisis

Para finalizar este apartado, a continuación se presenta el análisis de los portafolios creados a partir de la información correspondiente al periodo de análisis 19 meses después de la crisis. Así como en los análisis previos, en este aprtado se presenta la información relacionada con la utilidad, media y varianza para cada portafolio construido. A continuación se muestra la tabla 4.6; a diferencia de la utilidad esperada durante el periodo de crisis, este muestra una recuperación en la utilidad calculada para cada estrategia, siendo el portafolio MV-Tikhonov, el que mayor utilidad calculada presenta.

Cuadro resumen	Utilidad esperada	Rendimiento esperado	Varianza
Ponderadores MV	4.137%	0.197%	0.019%
Ponderadores MVTikonov	7.787%	0.241%	-5.444%
Ponderadores MVEntropy	4.192%	0.200%	0.019%
Ponderadores MVTikEntr	1.111%	0.198%	6.078%

Cuadro 4.12: Utilidad por estrategia de inversión

Figura 4.7: Gráfica del valor del portafolio en el tiempo (periodo posterior a la crisis)

Acción	Ponderadores MV	Ponderadores MVTikhonov	Ponderadores MVEntropy	Ponderadores MVTikEntr
ALFA_A	1.22%	0.00%	4.75%	4.76%
ALSEA	0.32%	0.00%	4.70%	4.76%
ARA	0.15%	0.00%	4.69%	4.75%
AXTELCPO	0.11%	0.00%	4.68%	4.76%
BIMBOA	8.95%	0.00%	4.83%	4.75%
CEMEXCPO	0.03%	0.00%	4.70%	4.76%
COMERCIU	0.16%	0.00%	4.69%	4.76%
ELEKTRA	6.41%	0.00%	4.82%	4.76%
FEMSAUBD	20.02%	0.00%	4.86%	4.75%
GAPB	4.45%	0.00%	4.80%	4.76%
GFNORTEO	0.11%	0.00%	4.68%	4.75%
GMEXICOB	3.82%	7.89%	4.80%	4.80%
GMODELOC	7.54%	0.00%	4.82%	4.75%
HOMEX	0.04%	0.00%	4.69%	4.76%
ICA	0.38%	0.00%	4.71%	4.75%
KIMBERA	22.03%	0.00%	4.87%	4.75%
LIVEPOLC	6.94%	46.59%	4.82%	4.80%
MEXICHEM	3.53%	0.00%	4.79%	4.75%
SORIANAB	12.30%	0.00%	4.84%	4.76%
URBI	0.05%	0.00%	4.69%	4.76%
WALMEXV	1.43%	45.52%	4.76%	4.80%
Total	100%	100%	100%	100%

Cuadro 4.13: Ponderadores por metodología de inversión

La figura 4.13 confirma un mercado alzista. El Portafolio VM presenta un crecimeinto del 124 % sin embargo concentra el 77.78 % de su inversión en 6 acciones; esto, contradice el principio de diversificación que persigue el modelo MV. El Portafolio de inversión MV con matriz de varianzas y covarianzas con filtración de Thikonov obtuvo un 36 % de crecimiento y una concentración de más del 90 % de sus activos en 2 acciones. Ambos ponderadores que utilizaron el enfoque de Etropía tuvieron un rendimiento hipotético del 48 % con una diversificación en la totalidad de sus activos.

Finalmente y para finalizar esta sección, se dio seguimiento a los portafolios creados con base en la información disponible para el periodo de análisis anterior a la crisis. La gráfica del valor del portafolio en el tiempo se muestra en la figura 4.14.

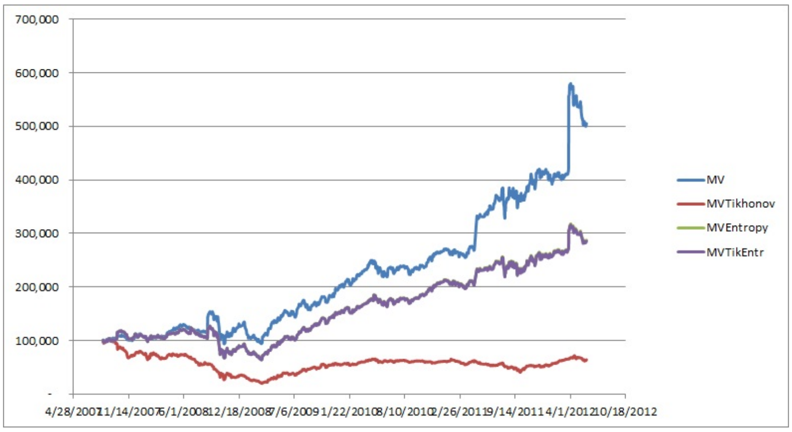

Figura 4.8: Gráfica del valor del portafolio en el tiempo

Como puede observarse, aún cuando la estrategia MV presentó ganancias mucho mayores a las restantes estrategias en el largo plazo, la concentración sigue siendo un problema para dicha estrategia (73.66 % de sus activos en 6 acciones).

Para finalizar el presente trabajo, a continuación se presentan las conclusiones generales del proyecto.

Conclusión

El ejemplo que habla de poner todos los huevos en una misma canasta definido por Bodie y Meron en [Bodie y Merton [6] (1999)], la concentración de activos resultado de la aplicación del modelo MV sobre portafolios de inversión así como la falta de literatura especializada para mercados emergentes, han sido el motivo para el desarrollo de la presente investigación. El modelo MV es un modelo que presenta muchas objeciones académicas y en la práctica; por tal motivo, el presente proyecto estructuró y definió el modelo alpha y el modelo de riesgos con base en la descomposición de la matriz de rendimientos en eigenvalores y eigenvectores. Se definió la función de utilidad isoelástica para la cual el modelo de Entropía y la filtración de Tikhonov fueron desarrolladas como metodologías alternativas para mejorar la construcción de portafolios óptimos que basan su construcción en la relación media-varianza.

La aplicación del modelo teórico se desarrolló con base en información del mercado mexicano es decir, con base en empresas que cotizan en el mercado de valores de México el cual, es un mercado que aún necesita ser explorado a fondo y para el cual, su difusión y alcance está limitado a un nicho exclusivo de personas e instituciones lo que limita la inversión y con ello el desarrollo y reactivación de la economía del país. Lo anterior, un problema del sistema financiero mexicano y en general de la sociedad mexicana, que ve en el ahorro y la inversión una carga y no una oportunidad de crecimiento en sus finanzas personales, son motivo suficiente para promover investigaciones relacionadas con inversiones en bolsa de mercados emergentes que permitan introducir al lector en el mundo de las inversiones y finazas, un mundo que crece y se transforma tan veloz como veloz es l evolución en la tecnología y las telecomunicaciones.

Hoy en día existen muchas instituciones privadas dedicadas a promover la inversión en bolsa sin embargo, aún queda un largo camino en el desarrollo y la regulación de dichas instituciones. Comisiones, costos por transacción, capital mínimo para invertir y demás gastos operativos imputados a los inversionistas, asi como el riesgo que implica invertir en instrumentos bursátiles con incertidumbre, hacen de la inversión en bolsa sea un paradigma que pocos utilizan como medio u oportunidad para el crecimiento económico personal.

A lo largo del presente proyecto, se establecieron las bases teóricas para el desarrollo de un proceso robusto para la gestión de portafolios de inversión eficiente. De manera tal, qué aún en periodos de crisis, se logre mantner la generación de resultados estables y rendimientos positivos. El punto de comparación utilizado fue el desarrollo de estrategias de inversión utilizando el enfoque de portafolios de varianza mínima con el objetivo de comparar portafolios hiptéticos, desarrollados bajo ambas perspectivas (portafolios de varianza mínima y portafolios construidos bao el proceso de entropía), siguiéndo ambos enfoques bajo escenarios de estabilidad diferentes.

Los resultados obtenidos presentados en el capítulo anterior, mostraron que el portafolio de inversión de varianza mínima, fue el portafolio que brindó mayores rendimientos en 3 de 4 escenarios sin embargo, en el escenario en el cual no fue ganador, presentó el peor funcionamiento (ver figura 4.12). De hecho, el escenario en el que no resultó ganador fue en el cual, el análisis se realizó con base en la información disponible para el periodo de crisis.

Así mismo, la aplicación de este método (varianza mínima), mostró alta concentración en pocas acciones lo que evita una diversificación eficiente, de hecho, la alta concentración de las acciones, impacta directamente en el rendmiento del portafolio. Un ejemplo de esto es la evolución que presentó este portafolio durante el tercer panel de tiempo (información disponible para el periodo de crisis).

El portafolio MV, basó su rendimiento en 6 acciones. En particular, mejoró debido a que WALMEX tuvo una recuperación sorprendente en el valor de su acción de \$6.61 el 2 de marzo de 2009 a \$30.56 el 20 de abril de 2010 y terminar con un valor de \$36.02 el 30 de mayo de 2012 lo que confirma la hipótesis de diversificación ineficiente y la dependencia directa con algunos activos.

A continuación se presenta un cuadro resumen con la concentración del enfoque de Varianza Mínima.

Acción	Antes de la crisis	Acción	Durante la crisis	Acción	Posterior a la crisis
ALFA_A	8.538%	ELEKTRA	11.99%	BIMBOA	8.95%
BIMBOA	10.788%	GAPB	16.93%	ELEKTRA	6.41%
ELEKTRA	13.877%	GMODELOC	19.78%	FEMSAUBD	20.02%
GAPB	10.987%	KIMBERA	14.25%	GAPB	4.45%
GMODELOC	7.520%	LIVEPOLC	20.27%	GMODELOC	7.54%
KIMBERA	19.809%	WALMEXV	14.09%	KIMBERA	22.03%
LIVEPOLC	9.897%			LIVEPOLC	6.94%
MEXICHEM	8.297%			SORIANAB	12.30%
Total	89.713%	Total	97.303%	Total	88.630%

Cuadro 4.14: Ponderadores Varianza-Mínima

Como se observa en el Cuadro (4.8), el portaflio de varianza mínima concentra más del 80 % de los ponderadores en algunas acciones (de 6 a 8). Aunque el método de Entropía es una mejora para este problema (el proceso descrito por la Ecuación (3.56) encuentra la solución óptima cuando $w_i = \frac{1}{N}$), como se observa en los Cuadros (A.4) y (4.7) la solución es $w_i \approx \frac{1}{N}$ sin embargo, los resultados no son suficientemente buenos como para asumir que la alta concentración es un impedimento para no obtener buenos resultados.

Método Entropía		Entropía-Filtro de Tikhonov	
Acción	Durante la crisis	Acción	Durante la crisis
ELEKTRA	15.73%	AXTELCPO	9.58%
FEMSAUBD	3.93%	BIMBOA	1.18%
GAPB	7.19%	ELEKTRA	12.30%
GMEXICOB	4.44%	FEMSAUBD	6.80%
GMODELOC	12.84%	GAPB	3.80%
KIMBERA	14.37%	GMEXICOB	8.87%
LIVEPOLC	10.84%	GMODELOC	7.06%
MEXICHEM	16.46%	KIMBERA	10.23%
SORIANAB	2.06%	LIVEPOLC	13.59%
WALMEXV	9.18%	MEXICHEM	19.96%
		WALMEXV	4.76%

Cuadro 4.15: Ponderadores Varianza-Mínima

El periodo de crisis fue el periodo de mayor incertidumbre, para el cuál, sólo el Portafolio con los ponderadores obtenidos bajo la optimización de Entropía presentó el mayor rendimiento al final del periodo de valuación (ver gráfica 4.12). Aunque el número de acciones disminuyó debido al aumento en la concentración de los ponderadores, este aumentó de 6 activos para el caso del portafolio de varianza mínima a 10 acciones para el portafolio que utilizó Entropía y a 11 para el que usó Entropía y la Filtración de Tikhonov para la matriz de varianzas y covarianzas (ver tabla 4.9), se obtuvo una utilidad positiva que minimizó la varianza elevada en dicho periodo y genero resultados favorables aún en presencia de volatilidad elevada.

Con base en lo anterior, se propone realizar estrategias de diversificación de portafolios con base en el uso de Entropía y Filtración de Tikhonov cuando se presenta mucha volatilidad e incertidumbre ya que se demostró empíricamente que el uso de estrategias de inversión bajo este procedimiento conlleva a obtener mejores resultados tanto en la diversificación de portafolios como en la obtención de rendimientos.

Finalmente, el presente trabajo logró establecer un proceso de generación de estrategias de inversión robusto, un complemento al modelo de diversificación de portafolios bajo el enfoque de varianza mínima. Se estableció y mostró una metodlogía robusta que mejora el problema de concentración de activos y mejora los rendimientos esperados cuando se utiliza información con alta volatilidad.

Acciones por sector de actividad

Clave de la Emisora	Razón Social
AHMSA	ALTOS HORNOS DE MEXICO, S.A. DE C.V.
ALPEK*	ALPEK,S.A. DE C.V.*
AUTLAN	COMPAÑIA MINERA AUTLAN, S.A.B. DE C. V.
CEMEX*	CEMEX, S.A.B. DE C.V.*
CMOCTEZ	CORPORACION MOCTEZUMA, S.A.B. DE C.V.
COLLADO	G COLLADO, S.A.B. DE C.V.
CONVER	CONVERTIDORA INDUSTRIAL, S.A.B. DE C.V.
CYDSASA	CYDSA, S.A.B. DE C.V.
FRES	FRESNILLO PLC
GCC	GRUPO CEMENTOS DE CHIHUAHUA, S.A.B. DE C.V.
GMEXICO*	GRUPO MEXICO, S.A.B. DE C.V.*
ICH*	INDUSTRIAS CH, S.A.B. DE C.V.*
MEXCHEM*	MEXICHEM, S.A.B. DE C.V.*
MFRISCO*	MINERA FRISCO, S.A.B. DE C.V.*
PAPPEL	BIO PAPPEL, S.A.B. DE C.V.
PE&OLES*	INDUSTRIAS PEÑOLES, S. A.B. DE C. V.*
POCHTEC	GRUPO POCHTECA, S.A.B. DE C.V.
QBINDUS	Q.B. INDUSTRIAS, S.A. DE C.V.
SIMEC	GRUPO SIMEC, S.A.B. DE C.V.
TEAK	PROTEAK UNO, S.A.P.I.B. DE C.V.
TEKCHEM	TEKCHEM, S.A.B. DE C.V.
TS	TENARIS S.A.
VITRO	VITRO, S.A.B. DE C.V.

Cuadro 16: Acciones del sectro Materiales

Clave de la Emisora	Razón Social
ACCELSA	ACCEL, S.A.B. DE C.V.
AEROMEX	GRUPO AEROMÉXICO, S.A.B. DE C.V.
ALFA*	ALFA, S.A.B. DE C.V.*
ARA	CONSORCIO ARA, S.A.B. DE C.V.
ASUR*	GRUPO AEROPORTUARIO DEL SURESTE, S.A.B. DE C.V.*
CERAMIC	INTERNACIONAL DE CERAMICA, S.A.B. DE C.V.
CICSA	CARSO INFRAESTRUCTURA Y CONSTRUCCIÓN, S.A.B. DE C.V.
DINE	DINE, S.A.B. DE C.V.
GAP*	GRUPO AEROPORTUARIO DEL PACIFICO, S.A.B. DE C.V.*
GCARSO	GRUPO CARSO, S.A.B. DE C.V.
GEO*	CORPORACION GEO, S.A.B. DE C.V.*
GISSA	GRUPO INDUSTRIAL SALTILLO, S.A.B. DE C.V.
GMD	GRUPO MEXICANO DE DESARROLLO, S.A.B.
GMDR	GMD RESORTS, S.A.B.
HOGAR	CONSORCIO HOGAR, S.A.B. DE C.V.
HOMEX*	DESARROLLADORA HOMEX, S.A.B. DE C.V.*
ICA*	EMPRESAS ICA, S.A.B. DE C.V.*
IDEAL	IMPULSORA DEL DESARROLLO Y EL EMPLEO EN AMERICA LATINA, S.A.B. DE C.V.
INCARSO	Inmuebles Carso, S.A.B. de C.V.
KUO	GRUPO KUO, S.A.B. DE C.V.
LAMOSA	GRUPO LAMOSA, S.A.B. DE C.V.
OHLMEX*	OHL MEXICO, S.A.B. DE C.V.*
OMA	GRUPO AEROPORTUARIO DEL CENTRO NORTE, S.A.B. DE C.V.
PASA	PROMOTORA AMBIENTAL, S.A.B. DE C.V.
PINFRA	PROMOTORA Y OPERADORA DE INFRAESTRUCTURA, S.A.B. DE C.V.
SARE	SARE HOLDING, S.A.B. DE C.V.
TMM	GRUPO TMM, S.A.
URBI*	URBI DESARROLLOS URBANOS, S.A.B. DE C.V.*

Cuadro 17: Acciones del sectro Industrial

Clave de la Emisora	Razón Social
ALSEA*	ALSEA, S.A.B. DE C.V.*
ARISTOS	CONSORCIO ARISTOS, S.A. DE C.V.
CIDMEGA	GRUPE, S.A.B. DE C.V.
CIE	CORPORACION INTERAMERICANA DE ENTRETENIMIENTO, S.A.B. DE C.V.
CMR	CMR, S.A.B. DE C.V.
EDOARDO	EDOARDOS MARTIN, S.A.B. DE C.V.
ELEKTRA*	GRUPO ELEKTRA, S.A. DE C.V.*
GFAMSA	GRUPO FAMSA, S.A.B. DE C.V.
GMARTI	GRUPO MARTI, S.A.B. DE C.V.
GOMO	GRUPO COMERCIAL GOMO, S.A. DE C.V.
GPH	GRUPO PALACIO DE HIERRO, S.A.B. DE C.V.
HILASAL	HILASAL MEXICANA S.A.B. DE C.V.
IASASA	INDUSTRIA AUTOMOTRIZ, S.A. DE C.V.
LIVEPOL*	EL PUERTO DE LIVERPOOL, S.A.B. DE C.V.*
POSADAS	GRUPO POSADAS, S.A.B. DE C.V.
REALTUR	REAL TURISMO S.A. DE C.V.
SANLUIS	SANLUIS CORPORACION, S.A.B. DE C. V.
SPORT	GRUPO SPORTS WORLD, S.A.B. DE C.V.
VASCONI	GRUPO VASCONIA S.A.B.

Cuadro 18: Acciones del sectro Consumo no básico

Clave de la Emisora	Razón Social
AC*	ARCA CONTINENTAL, S.A.B. DE C.V.*
AGRIEXP	AGRO INDUSTRIAL EXPORTADORA, S.A. DE C.V.
BACHOCO	INDUSTRIAS BACHOCO, S.A.B. DE C.V.
BAFAR	GRUPO BAFAR, S.A. DE C.V.
BIMBO*	GRUPO BIMBO, S.A.B. DE C.V.
CHDRAUI*	GRUPO COMERCIAL CHEDRAUI, S.A.B. DE C.V.*
COMERCI	CONTROLADORA COMERCIAL MEXICANA, S.A.B. DE C.V.
FEMSA*	FOMENTO ECONÓMICO MEXICANO, S.A.B. DE C.V.*
GAM	GRUPO AZUCARERO MÉXICO, S.A.B. DE C.V.
GEUPEC	GRUPO EMBOTELLADORAS UNIDAS, S.A.B. DE CV
GIGANTE	GRUPO GIGANTE, S.A.B. DE C.V.
GMACMA	GRUPO MAC MA, S.A.B. DE C.V.
GMODELO*	GRUPO MODELO, S.A.B. DE C.V.*
GRUMA*	GRUMA, S.A.B. DE C.V.*
HERDEZ	GRUPO HERDEZ, S.A.B. DE C.V.
KIMBER*	KIMBERLY - CLARK DE MEXICO S.A.B. DE C.V.*
KOF*	COCA-COLA FEMSA, S.A.B. DE C.V.*
MASECA	GRUPO INDUSTRIAL MASECA, S.A.B. DE C.V.
MINSA	GRUPO MINSA, S.A.B. DE C.V.
NUTRISA	GRUPO NUTRISA, S.A.B. DE C. V.
SAVIA	SAVIA, S.A. DE C.V.
SORIANA	ORGANIZACION SORIANA, S.A.B. DE C.V.
WALMEX*	WAL - MART DE MEXICO, S.A.B. DE C.V.*

Cuadro 19: Acciones del sectro Consumo frecuente

Clave de la Emisora	Razón Social
BEVIDES	FARMACIAS BENAVIDES, S.A.B. DE C.V.
FRAGUA	CORPORATIVO FRAGUA, S.A.B. DE C.V.
LAB*	GENOMMA LAB INTERNACIONAL, S.A.B. DE C.V.*
MEDICA	MEDICA SUR, S.A.B. DE C.V.
SAB	GRUPO CASA SABA, S.A.B. DE C.V.

Cuadro 20: Acciones del sectro Salud

Clave de la Emisora	Razón Social
ACTINVR	CORPORACION ACTINVER, S.A.B. DE C.V.
BBVA	BANCO BILBAO VIZCAYA ARGENTARIA, S.A.
BOLSA*	BOLSA MEXICANA DE VALORES, S.A.B. DE C.V.*
C	CITIGROUP INC.
COMPARC*	COMPARTAMOS, S.A.B. DE C.V.*
FINAMEX	CASA DE BOLSA FINAMEX, S.A.B. DE C.V.
FINDEP	FINANCIERA INDEPENDENCIA, S.A.B. DE C.V. SOFOM, E.N.R.
FUNO	DEUTSCHE BANK MEXICO, S.A. INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE, FIDEICOMISO F/1401
GBM	CORPORATIVO GBM, S.A.B. DE C. V.
GENSEG	GENERAL DE SEGUROS, S.A.B.
GFINBUR*	GRUPO FINANCIERO INBURSA, S.A.B. DE C.V.*
GFINTER	GRUPO FINANCIERO INTERACCIONES, S.A. DE C.V.
GFMULTI	GRUPO FINANCIERO MULTIVA S.A.B.
GFNORTE*	GRUPO FINANCIERO BANORTE, S.A.B DE C.V.*
GFREGIO	BANREGIO GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.
GNP	GRUPO NACIONAL PROVINCIAL, S.A.B.
GPROFUT	GRUPO PROFUTURO, S.A.B. DE C.V.
INVEX	INVEX CONTROLADORA, S.A.B. DE C.V.
LASEG	LA LATINOAMERICANA SEGUROS, S.A.
MONEX	HOLDING MONEX, S.A.P.I.B. DE C.V.
PATRIA	REASEGURADORA PATRIA, S.A.
PROCORP	PROCORP, S.A. DE C.V., SOCIEDAD DE INV. DE CAPITAL DE RIESGO
Q	QUALITAS COMPAÑIA DE SEGUROS, S.A. DE C.V.
SAN	BANCO SANTANDER, S.A.
SANMEX	GRUPO FINANCIERO SANTANDER, S.A.B. DE C.V.
VALUEGF	VALUE GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.

Cuadro 21: Acciones del sectro Servicios financieros

Clave de la Emisora	Razón Social
AMX*	AMERICA MOVIL, S.A.B. DE C.V.*
AXTEL	AXTEL, S.A.B. DE C.V.
AZTECA*	TV AZTECA, S.A.B. DE C.V.*
CABLE	EMPRESAS CABLEVISION, S.A. DE C.V.
MAXCOM	MAXCOM TELECOMUNICACIONES, S.A.B. DE C.V.
MEGA	MEGACABLE HOLDINGS, S.A.B. DE C.V.
QUMMA	GRUPO QUMMA, S.A. DE C.V.
RCENTRO	GRUPO RADIO CENTRO, S.A.B. DE C.V.
TELMEX	TELEFONOS DE MEXICO, S.A.B. DE C.V.
TLEVISA*	GRUPO TELEVISA, S.A.B.*

Cuadro 22: Acciones del sectro Materiales

Código SAS

.1. Código para bajar precios de las acciones

```
FILENAME IPC_MXX 'C:\Documents and Settings\smxfga
\My Documents\Preventas\Academia\OptiFin\ListaIPC.txt';
LIBNAME AccBC 'C:\Tesis\Acciones\BC';
LIBNAME RendBC 'C:\Tesis\Acciones\Rend\BC';
LIBNAME RstdBC 'C:\Tesis\Acciones\Rstd\BC';
LIBNAME AccDC 'C:\Tesis\Acciones\DC';
LIBNAME RendDC 'C:\Tesis\Acciones\Rend\DC';
LIBNAME RstdDC 'C:\Tesis\Acciones\Rstd\DC';
LIBNAME AccAC 'C:\Tesis\Acciones\AC';
LIBNAME RendAC 'C:\Tesis\Acciones\Rend\AC';
LIBNAME RstdAC 'C:\Tesis\Acciones\Rstd\AC';

LIBNAME AccRC 'C:\Tesis\Acciones\RC';
LIBNAME RendRC 'C:\Tesis\Acciones\Rend\RC';
LIBNAME RstdRC 'C:\Tesis\Acciones\Rstd\RC';

%global N;

%macro cambio_nombre(library);

data &library..overall (%do i=1 %to &N;
        rename=(&&acciones&i=accion&i)%end;);
 set &library..overall;
run;
data contents1;
do i=1 to &N;
 memname=catx("n","accio",i);
 output;
end;
run;
%mend;

%macro Down_stock(Acciones,Rend, Rstd);
proc datasets library=&acciones. kill;
```

```
run;
quit;

proc datasets library=&rend. kill;
run;
quit;

proc datasets library=&rstd. kill;
run;
quit;

DATA IPCLIST;
        INFILE IPC_MXX DELIMITER = '|'
                MISSOVER LRECL = 128 FIRSTOBS = 2;
        LENGTH SYMBOL $15. NAME $55.;
        INPUT SYMBOL $ NAME ;
run;

%if &acciones. = AccBC %then %do;
DATA _NULL_;
        SET IPCLIST;
        CALL EXECUTE("filename "||substr(Name,1,8)
        ||" url '"||'http://ichart.finance.yahoo.com/table.csv?s='
        ||compress(Symbol)||'&d=7&e=1&f=2007&g=d&a=11&b=
                        10&c=2005&ignore=.csv'||"' DEBUG;");
        CALL EXECUTE("data &acciones.."
                        ||substr(Name,1,8)||";");
        CALL EXECUTE("infile "||substr(Name,1,8)
                        ||" dsd lrecl = 128 firstobs = 2;");
        CALL EXECUTE("informat Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("input Date Open High
                         Low Close Volume AdjClose;");
        CALL EXECUTE("format Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("RUN;");
RUN;
PROC CONTENTS DATA = &ACCIONES.._ALL_ OUT = CONTENTS NOPRINT;
RUN;

PROC SORT DATA = CONTENTS(WHERE = (NOBS > 150) KEEP = MEMNAME NOBS) NODUPKE
        BY MEMNAME;
RUN;
%end;
%else %if &acciones. = AccDC %then %do;
DATA _NULL_;
        SET IPCLIST;
        CALL EXECUTE("filename "||substr(Name,1,8)
```

```
        ||" url '"||'http://ichart.finance.yahoo.com
        /table.csv?s=||compress(Symbol)||
                '&d=2&e=01&f=2009&g=d&a=7&b=1&c=2007&ignore=.csv'
                ||"' DEBUG;");
        CALL EXECUTE("data &acciones.."
                        ||substr(Name,1,8)||";");
        CALL EXECUTE("infile "||substr(Name,1,8)
                        ||" dsd lrecl = 128 firstobs = 2;");
        CALL EXECUTE("informat Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("input Date Open High
                        Low Close Volume AdjClose;");
        CALL EXECUTE("format Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("RUN;");
RUN;
%end;
%else %if &acciones. = AccAC %then %do;
DATA _NULL_;
        SET IPCLIST;
        CALL EXECUTE("filename "||substr(Name,1,8)
        ||" url '"||'http://
        ichart.finance.yahoo.com/table.csv?s='
        ||compress(Symbol)||'&d=8&e=30&f=2010&
                g=d&a=2&b=02&c=2009&ignore=.csv'||"' DEBUG;");
        CALL EXECUTE("data &acciones.."||
                                substr(Name,1,8)||";");
        CALL EXECUTE("infile "||substr(Name,1,8)
                        ||" dsd lrecl = 128 firstobs = 2;");
        CALL EXECUTE("informat Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("input Date Open High
                            Low Close Volume AdjClose;");
        CALL EXECUTE("format Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("RUN;");
RUN;

%end;
%else %if &acciones. = AccRC %then %do;
DATA _NULL_;
        SET IPCLIST;
        CALL EXECUTE("filename "
        ||substr(Name,1,8)||" url '"||'http:
        //ichart.finance.yahoo.com/table.csv?s='
        ||compress(Symbol)||'&d=04&e=30&f=2012&g
        =d&a=09&b=01&c=2010&ignore=.csv'||"' DEBUG;");
        CALL EXECUTE("data &acciones.."
                        ||substr(Name,1,8)||";");
        CALL EXECUTE("infile "
```

```
                ||substr(Name,1,8)||" dsd
                        lrecl = 128 firstobs = 2;");
        CALL EXECUTE("informat Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("input Date Open High
                        Low Close Volume AdjClose;");
        CALL EXECUTE("format Date yymmdd10.;");
        CALL EXECUTE("RUN;");
RUN;

%end;
PROC SQL;
        DROP TABLE IPCLIST;
QUIT;


DATA _NULL_; SET CONTENTS;
        CALL EXECUTE("PROC SORT DATA=&ACCIONES.."
                ||MEMNAME||"; BY DATE; run;");
DATA _NULL_;
        SET CONTENTS END = EOF;
        IF _N_ = 1 THEN
        CALL Execute("DATA &ACCIONES..OVERALL;MERGE");
        CALL EXECUTE("&ACCIONES.."||MEMNAME
        ||" (KEEP= DATE AdjClose
                RENAME=(AdjClose="||MEMNAME||"))");
        IF EOF THEN DO;
                CALL EXECUTE(";BY DATE;RUN;");
        END;
RUN;
DATA _NULL_; SET CONTENTS;
                CALL EXECUTE("DATA &ACCIONES..OVERALL;
                                set &ACCIONES..OVERALL;");
                CALL EXECUTE("PIV_"||MEMNAME||"
                                =lag("||MEMNAME||");");
                CALL EXECUTE("IF PIV_"||MEMNAME||"
                        NE . AND "||MEMNAME||" EQ . THEN
                                        "||MEMNAME||"= PIV_"
                                ||MEMNAME||"; DROP PIV_"||MEMNAME||";
                                        IF "||MEMNAME||" NE .; RUN;
RUN;
DATA _NULL_; SET CONTENTS;
        CALL EXECUTE("DATA &REND..OVERALL
                (DROP=AdjClose piv_"||MEMNAME||");");
        if _N_=1 then CALL EXECUTE("SET
                &ACCIONES..overall (rename=("||MEMNAME||
                                "=AdjClose));");
```

```
        else CALL EXECUTE("SET &REND..overall
                (rename=("||MEMNAME||"=AdjClose));");
        CALL EXECUTE("PIV_"||MEMNAME||"=lag(AdjClose);");
        CALL EXECUTE(MEMNAME||"=
                log(AdjClose / piv_"||MEMNAME||"); RUN;");
RUN;

data null;
 set contents;
 call symput('acciones'||trim(left(_N_)),memname);
 call symputx('N',_N_);
run;

%cambio_nombre(&rend.);
%mend;
%Down_stock(AccBC,RendBC, RstdBC);
%Down_stock(AccDC,RendDC, RstdDC);
%Down_stock(AccAC,RendAC, RstdAC);
%Down_stock(AccRC,RendRC, RstdRC);
```

.2. Código para Optimizar Portafolios

```
FILENAME IPC_MXX 'C:\Documents and Settings\smxfga\My Documents\Preventas\A
LIBNAME AccBC 'C:\Tesis\Acciones\BC';
LIBNAME RendBC 'C:\Tesis\Acciones\Rend\BC';
LIBNAME RstdBC 'C:\Tesis\Acciones\Rstd\BC';
LIBNAME AccDC 'C:\Tesis\Acciones\DC';
LIBNAME RendDC 'C:\Tesis\Acciones\Rend\DC';
LIBNAME RstdDC 'C:\Tesis\Acciones\Rstd\DC';
LIBNAME AccAC 'C:\Tesis\Acciones\AC';
LIBNAME RendAC 'C:\Tesis\Acciones\Rend\AC';
LIBNAME RstdAC 'C:\Tesis\Acciones\Rstd\AC';
%inc "C:\Tesis\Programas\Bootstrap.sas";
*options mprint mlogic source source2;
%macro StockAnalysis(Acciones,Rend, Rstd, nsim, pct);

%if &rend.=RendBC %then %do;
        PROC CONTENTS DATA = &ACCIONES.._ALL_ OUT =
         CONTENTS NOPRINT;
        RUN;

        data contents;
                set contents;
                if memname ne "OVERALL";
        run;
```

```
        PROC SORT DATA = CONTENTS(WHERE = (NOBS > 150)
         KEEP = MEMNAME NOBS) NODUPKEY;
                BY MEMNAME;
        RUN;
%end;
/* Aquí iba la macro %cambio_nombre. Le incluí
 la macro variable*/
data null;
 set /*&rend..*/contents;
 call symput('acciones'||trim(left(_N_)),memname);
 call symputx('N',_N_);
run;

*%cambio_nombre(&rend.);

data &REND..overall;
 set &REND..overall;
 if _N_>1;
run;

data /*&rend..*/contents1;
do i=1 to &N;
 memname=catx("n","accio",i);
 output;
end;
run;


/*****************************************************/
/*                                   Tikhonov Filtering
*/
/* Para estimar la matriz de covarianzas, es necesario     */
/* aplicar el análisis de componentes principales (PCA)    */
/* para encontrar una base ortogonal que maximice la       */
/* varianza de los datos proyectados en la base.           */
/* Par lo anterior, se aplicará el método de               */
/*regularización de tikhonov para filtrar el rudo          */
/* de los datos. Posteriormente, se explicará la función   */
/* de descarte gradual la cual es un diferencador clave    */
/* entre la filtración de Tikhonov y otros métodos         */
/*****************************************************/

proc printto log="C:\examples\Riesgo\Tesis\mylog_&REND..log";
run;
/*
Aquí va la macro %Boost*/
```

```
%BOOST(&nsim, &REND., &RSTD.,&pct);
proc printto ;
run;
PROC CAPABILITY DATA = &rend..Boost
          OUTTABLE=&rend..CAPOCapability
                    CIBASIC(TYPE=TWOSIDED ALPHA=0.001)
                    MU0=0
                    CIPCTLDF(TYPE=SYMMETRIC ALPHA=0.001)
          ROBUSTSCALE
;
          VAR COL1;
          ;
          HISTOGRAM   COL1 / LOGNORMAL
          (W=1 L=1 COLOR=LIME ZETA=EST THETA=EST SIGMA=EST)

          CAXIS=PURPLE
          CTEXT=BLACK
          CFRAME=WHITE
          CBARLINE=BLACK
          CFILL=GRAY
          /*midpoints=0 to .006 by .001*/
          outfit=&rend..BOOSTrend
;
RUN; QUIT;

data &rend..CAPOCapability /*(keep=psi)*/;
 set &rend..CAPOCapability;
 uno=quantile('LOGNORMAL',.05,_MEAN_,_VARI_);
 UNO=_MAX_;
   call symputx('psi',UNO);
run;
%put el valor de psi es: &psi;

%BOOST(1, &REND., &RSTD.,100);

proc optmodel;
ods output SolutionSummary=exss ;
          set N = 1..&N; /* N number of assets index */
          num R{N};
          num var{N,N}; /* N x N covariance matrix */
          num vartik{N,N}; /* N x N covariance matrix */

          /* Reading Data */
          read data &rend..CX into
```

```
[_n_]{i in N}<var[_n_,i]=col("COL"||i)>;

read data &rend..Cy into
[_n_]{i in N}<vartik[_n_,i]=col("COL"||i)>;
read data &rend..Rendmean into
[_n_]{i in N}<R[i]=col("accion"||i)>;

var x1{i in N} init 0; /* N x 1 vector of weights */
var x2{i in N} init 0; /* N x 1 vector of weights */
var y1{i in N} init 0; /* N x 1 vector of weights */
var y2{i in N} init 0; /* N x 1 vector of weights */
var y3{i in N} init 1/&N; /* N x 1 vector of weights */

/* Objective Function */

min f = (sum{i in N}
(sum{j in N}(y1[i]*var[i,j]*y1[j])));
con c: sum{i in N} y1[i] = 1;
con ci{i in N}:y1[i] >= 0;
con cj{j in N}:y1[j] <= 1;

/* Execute Optimization */
solve with ipnlp;

create data &rend..minvar
from {i in N}<col("y1"||i)=y1[i]>;

min g =1*(sum{i in N}
((x1[i]*log(x1[i]/y1[i]))));
/* Constraints */
con d: sum{i in N} x1[i] = 1;
con di{i in N}:x1[i] >= 0;
con dj{j in N}:x1[j] <= 1;
con dn: (sum{i in N}(sum{j in N}
(x1[i]*R[i]-1/2*(x1[i]*var[i,j]*x1[j])))) >= &psi.;
/* Execute Optimization */

solve with NLPC / tech=quanew maxiter=10000
 RELOPTTOL=1E1 OPTTOL=1E1 ABSOPTTOL= 1E1;
create data &rend..entropy
from {i in N}<col("x1"||i)=x1[i]>;

min h = (sum{i in N}(sum{j in N}
(y2[i]*vartik[i,j]*y2[j])));
con e: sum{i in N} y2[i] = 1;
con ei{i in N}:y2[i] >= 0;
```

```
con ej{j in N}:y2[j] <= 1;

/* Execute Optimization */
solve with ipnlp;

create data &rend..minvar_tik
from {i in N}<col("y2"||i)=y2[i]>;

min ff =1*(sum{i in N}((x2[i]*log(x2[i]/y2[i]))));
/* Constraints */
con k: sum{i in N} x2[i] = 1;
con ki{i in N}:x2[i] >= 0;
con kj{j in N}:x2[j] <= 1;
con kn: (sum{i in N}(sum{j in N}
(x2[i]*R[i]-1/2*(x2[i]*vartik[i,j]
*x2[j])))) >= &psi.;
/* Execute Optimization */
*solve with SQP;
solve with NLPC / tech=quanew maxiter=10000
 RELOPTTOL=1E2 OPTTOL=1E2 ABSOPTTOL= 1E2;

/**LP, MILP, QP, NLPC, NLPU, SQP, or IPNLP
/* Create Solution Weights Data Set */
create data &rend..entropy_tik
from {i in N}<col("x2"||i)=x2[i]>;

var utmvtik INIT 0;
var mmvtik INIT 0;
var smvtik INIT 0;

var utmvtike INIT 0;
var mmvtike INIT 0;
var smvtike INIT 0;

var utmv INIT 0;
var mmv INIT 0;
var smv INIT 0;

var utmve INIT 0;
var mmve INIT 0;
var smve INIT 0;
var max init 0;

utmv=(sum{i in N}(sum{j in N}
(y1[i]*R[i]-1/2*(y1[i]*var[i,j]*y1[j]))));
mmv=(sum{i in N}(y1[i]*R[i]));
```

```
        smv=(sum{i in N}(sum{j in N}
        ((y1[i]*var[i,j]*y1[j]))));

        utmve=(sum{i in N}(sum{j in N}
        (x1[i]*R[i]-1/2*(x1[i]*var[i,j]*x1[j]))));
        mmve=(sum{i in N}(x1[i]*R[i]));
        smve=(sum{i in N}(sum{j in N}
        ((x1[i]*var[i,j]*x1[j]))));
        max=&psi.;

        utmvtik=(sum{i in N}(sum{j in N}
        (y2[i]*R[i]-1/2*(y2[i]*vartik[i,j]*y2[j]))));
        mmvtik=(sum{i in N}(y2[i]*R[i]));
        smvtik=(sum{i in N}(sum{j in N}
        ((y2[i]*vartik[i,j]*y2[j]))));

        utmvtike=(sum{i in N}(sum{j in N}
        (x2[i]*R[i]-1/2*(x2[i]*vartik[i,j]*x2[j]))));
        mmvtike=(sum{i in N}(x2[i]*R[i]));
        smvtike=(sum{i in N}(sum{j in N}
        ((x2[i]*vartik[i,j]*x2[j]))));

        /* Print Solution Weights */
        print utmv mmv smv utmvtik mmvtik
         smvtik utmve mmve smve utmvtike
         mmvtike smvtike;
quit;


%mend;
%StockAnalysis(AccBC,RendBC, RstdBC, 1500, 30);
%StockAnalysis(AccDC,RendDC, RstdDC, 1500, 30);
%StockAnalysis(AccAC,RendAC, RstdAC, 1500, 30);
```

Código Bootstrap

```
%macro boost(M, rend, rstd,pct);

%do i=1 %to &M;
PROC SURVEYSELECT DATA=&Rend..OVERALL()
        OUT=overall
        METHOD=SRS
        RATE= %SYSEVALF(&pct/100)
        NOPRINT;
RUN;

proc means data    = OVERALL noprint;
           var accion1-accion&N;
                      output out=rendstat ;
run;

/* El proc means provee  5 estadísticas básicas
(Número de observaciones, valor mínimo,
        valor máximo, media y desv estándar
   para el análisis deseado, sólo se necista
        el vector Dv de las desviaciones estándar
        de los rendimientos de las accines
   por tal motivo, se ejecuta el siguiente código.
*/

data &rend..desvstd (drop=_type_ _freq_ _stat_)
        &rend..rendmean (drop=_type_ _freq_ _stat_);
 set rendstat;
 if _stat_="STD" then output &rend..desvstd;
 if _stat_="MEAN" then output &rend..rendmean;
run;

/*       Análisis de Componentes principales */

/* El primer paso es estandarizar los rendimientos
                R en Z tal que Mean[Z]=1 y var[Z]=1 */
```

```
DATA _NULL_; SET /*&rend..*/CONTENTS1;
        CALL EXECUTE("proc standard data=overall
         mean=0 std=1 out=&rstd.."||MEMNAME||"
          (keep= date "||MEMNAME||");");
        CALL EXECUTE("var "||MEMNAME||"; run;");
    /*CALL EXECUTE("proc means data=rstd."
                                        ||MEMNAME||"; run;");
        CALL EXECUTE("PROC SORT DATA=rstd."
                        ||MEMNAME||"; BY DATE; run;");*/
RUN;

/* Una vez estandarizados los rendimientos Z[i],
 se procede a construir una matriz consolidada
   con los rendimientos de las acciones
*/
DATA _NULL_;
        SET /*&rend..*/CONTENTS1 END = EOF;
        IF _N_ = 1 THEN CALL Execute
                ("DATA &Rstd..OVERALL;MERGE");
        CALL EXECUTE("&Rstd.."||MEMNAME||" ");
        IF EOF THEN DO;
                CALL EXECUTE(";BY DATE;RUN;");
        END;
RUN;

/* Se aplican componentes principales a Z
 para obtener Sk (eigenvalores) y Vk (eigenvectores) */

proc princomp data    = &rstd..OVERALL
                                            /*cov*/
                        OUTSTAT=EIGEN_CORR
                        OUT=SCORES_CORR NOPRINT;
           var accion1-accion&N;;
run;


/* Así como el proc means, el proc princomp provee un
   dataset con los resultados más importantes como
   matriz de correlaciones (dado que los renidmientos
   están estandarizados, dicha matriz es
   la matriz de variancas-covarianzas también
*/

/* Se obtiene el vector de valores propos */
data &rend..eigenval (drop= _type_ _name_);
 set EIGEN_CORR;
```

```
 if _type_="EIGENVAL";
run;

/* Se obtiene la matriz de vectores propios */
data &rend..eigenvec (drop= _type_ _name_);
 set EIGEN_CORR;
 if _type_="SCORE";
run;

/* Se obtiene la matriz de vectores propios */
data &rend..princomp ;
 set scores_CORR;
 keep prin1-prin&N.;
run;

data &rend..over (drop=date);
 set &rend..overall;
run;

proc iml;
        use &rend..desvstd;
        read all into D;
        Dvsq=diag(t(D));

        *print Dvsq;
        k=ncol(Dvsq);
        In=I(k);

        use &rend..rendmean;
        read all into m;

        use &rend..princomp;
        read all into TFk;

        use &rend..eigenval;
        read all into S;
        T=ncol(S);

        use &rend..eigenvec;
        read all into TUk;

        use &rend..over;
        read all into overall;

        R1 = overall[:,];
```

```
/* Se calcula la media y covarianza muestral*/

n = nrow(overall);
y = overall - repeat( R1, n );
/*Cx es la Cov muestral (el 100% de las observaciones)*/
Cx = t(y)*y / (n-1);

Sk=diag(S);
Fk=t(TFk);
Uk=t(TUk);
Ik=TUk*Uk;
ren=nrow(Ik);

B=Dvsq*Uk;
TB=T(B);
s1=S[<>]*1;
sk=S[><]*1;
alpha0=S[:];

Z=Uk*Fk;

ub = j(1,1,s1);
lb = j(1,1,sk);
con = (lb || {. .}) //
(ub || {. .}) //
(ub || {0 1})
        ;

start frobenius(alpha) global(S,B,Fk,Ik,ren,In);
        ph=J(ren,1,0);
        do i=1 to ren;
                ph[i]=S[i]**2/(S[i]**2+alpha**2);
        end;
        phi=diag(ph);
        A1=corr(B*(Ik-phi)*(Fk) - In);
        *print A1;
        f=sqrt(A1[##]);
return(f);
finish;

optn = {0 0};
CALL NLPQN(rc,alphar,"frobenius",alpha0,optn,con);

phi=Ginv(Sk**2+alphar**2*Ik)*Sk**2;

cov=1/T*((phi*Fk)*t(phi*Fk));
```

```
        sigmas=B*(cov)*t(B);
        ssample=(B*(Sk)*TB);

        De=vecdiag(ssample-sigmas);
        Cy=sigmas+diag(De);

        /*NLP to relax the positive constraint
                on weight*/
        /*relax 0 <= weight to
               -2 <= weight <=2   */
               ub = j(1,k,1);
               lb = j(1,k,0);

        /*linear constraint matrix layout
        { Lower Bounds   .            .,
               Upper Bounds   .            .,
               LC1 LHS        (-1|0|1)  LC1 RHS,
               LC2 LHS        (-1|0|1)  LC2 RHS,
               ...
        }
               where (-1|0|1) signals (<= | = | >=)
        */
con = (lb || {. .}) //
      (ub || {. .}) //
      (ub || {0 1})
;
               x = j(1,k,1/k);
        /*routine for calculating the
         variance (note x vector is (1 x N),
               not (N X 1) )*/

         start Rto(x) global(Cy,m);
                f =x*t(m)-1/2*x*Cy*x`;
        return (f);
        finish Rto;
        /*Set starting point as QP result*/
               *x = results;
        /*Options matrix, 1st slot=0 signal MINIMIZATION
         2nd slot=2 signals print summary info and results*/
        optn = {1 0};
        /*Solve with the NLP Quasi Newton Solver*/
        *call nlpdd(rc,results,"F_VAR",x,optn,con);

        call NLPLM(rc,results,"Rto",x,optn,con);
        suma=sum(results);
```

```
        reset fuzz;

        Rend =results*t(R1)+1/2*results*Cx*t(results);

        create Rend from Rend;
        append from Rend;

        create &rend..Cy from Cy;
        append from Cy;

        create &rend..Cx from Cx;
        append from Cx;
quit;

%IF &I=1 %THEN %DO;
 DATA &rend..BOOST;
  SET REND;
 RUN;
%END;
%ELSE %DO;
DATA &rend..BOOST;
 SET &rend..BOOST REND;
RUN;
%END;
%END;

%mend;
```

Bibliografía

[1] http://www.promexico.gob.mx/inversion-extranjera/entendiendo-el-mercado-de-valores-en-mexico.html

[2] Bolsa Mexicana de Valores Web-Seite: "www.bmv.com.mx/".

[3] Banco de México Web-Seite: "www.banxico.org.mx/".

[4] Pro México Web-Seite: "www.promexico.gob.mx".

[5] http://www.mexder.com.mx

[6] Zvi Bodie y Robert C. Merton. *Finanzas*. México. Prentice Hall. 1999

[7] Villegas Hernández, Eduardo, Ortega Ochoa, Rosa Maria (2009). *Sistema Financiero de México*. México. McGraw Hill

[8] Elizondo Silva, Erika Maricela. *El Mercado de Valores en México*. Universidad Autónoma de Nuevo León, FACPYA. Diviión de Posgrado. Mat. 673803

[9] Harry Markowitz. *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. (Mar., 1952), pp. 77-91.

[10] Harry M. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1959.

[11] Qian, Edward E., Hua, Ronald H. and Sorensen, Eric H. *Quantitative Equity Portfolio Management. Modern Techniques and Applications*. Chapman & Hall. CRC Financial Mathematics Series. USA. 2007

[12] Ortiz, Edgar. *Finanzas Modernas y Teorías de las inversiones*. 2013.

[13] Merton, R., 1972. *An analytical derivation of the efficient portfolio frontier*. Journal of Financial and Quantitative Analysis 7, 1851?1872.

[14] Steele, J. Michael. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. New York, USA. Springer. 2000

[15] Norstard, John. *An Introduction to Utility Theory*. Northwestern. USA. 1999

[16] Norstard, John. *An Introduction to Portfolio Theory*. Northwestern. USA. 1999

[17] Schotter, Andrew R. *Microeconomía. Un enfoque moderno*. México. CECSA. 1996

[18] Bachelier L. *Théorie de la spéculation.* Ann. Ecole Norm. Sup., 1900, v. 17, pp 21-86. (Reprinted in: The random character of stock market prices. Ed. by P.H. Cootner Cambridge, Massachusetts: MIT Preess, 1967. pp. 17-78.)

[19] Park Sungwoo y O'Leary Dianne. *Portfolio Selection Using Tikhonov Filtering to Estimate the Covariance Matrix.* Society for Industrial and Applied Mathematics. Maryland 2010.

[20] Bera, Anil K. y Park Sung. *Optimal Portfolio Diversification Using Maximun Entropy Principle.* Department of Economics. University of Illinois at Urbana-Champaign. 2005

[21] Gentle, James E. *Matrix Algebra. Theory, Computations, and Applications in Statistics.* USA. Springer. 2007.

[22] Michaud, Richard O. y Michaud, Robert O. *Efficient Asset Management. A practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation.* Oxford University Press. 2008.

[23] Cover, Thomas M. and Thomas, Joy A. *Elements of Information Theory.* USA. John Wiley & SONS, INC. 1991.

[24] Romero Méndez, Juan Pablo. *Máxima Entropía.* 2008.

[25] Jaynes, E.T. *Information theory and statistical mechanics.* In: Statistical Physics. New York, pp. 181-218. 1963

[26] Jackson, J. Edward. *A User´s Guide to Principal Components.* USA. Wiley Inter-Science. 2003.

[27] Ross, S., Westerfield, R., Jaffe, Jeffrey. (2009). *Finanzas Corporativas.* México: Mc Graw Hill.

[28] Osborne, M.F.M., *Periodic Structure in the Brownian Motion of Stock Prices.* Operations Research, v.10, No. 3. pp. 345-379.

[29] Samuelson, Paul A., *Rational Theory of Warrant Pricing.* Industrial Management Reviews. 6:2 (1965:Spring) p. 13.

[30] Merton, R.C. *Theory of rational option pricing*, Bell J. Econom. Manag. Sci. 4. (1973) p 141.

[31] Black, R. Scholes, M. *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy 81. (1973) p. 637.

[32] Mandelbort and the Stable Paretian Hypothesis. Eugene F. Fama. Journal of Business, Vol. 36, No. 4 (Oct., 1963), p. 420.

[33] The Behavior of the Stock-Market Prices. Eugene F. Fama. The Journal of Business, Vol. 38, No. 1 (Jan, 1965), 34-105.