UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRIA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

MATEMÁTICAS

La importancia de los métodos numéricos, en un ambiente constructivista, para apoyar la resolución de ecuaciones de grado mayor ó igual a dos, de la asignatura matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR, MATEMÁTICAS.

P R E S E N T A

Carlos Alberto Álvarez García

Tutor

Mtro. Víctor José Palencia Gómez
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

México, D.F. Junio del 2013

Dedicatorias y Agradecimientos

A mi abuelita Celestina† y mi padre Emilio†, por su honestidad y tenacidad, por buscar siempre nuestro bien.

A mi madre, Clementina, por su fortaleza y alegría, sus atenciones, paciencia, por estar siempre conmigo, amarme y aceptarme como soy.

A mi hermano José Luis por su ejemplo para enfrentar los momentos difíciles, por su constancia y fortaleza.

A mi sobrinita María Fernanda a quien espero volver a ver en un futuro próximo y que este trabajo le sirva de motivación para superarse.

A la Doctora Sara Lucía González Romero por su incondicional ayuda y amor de pareja. Por llegar en el mejor momento de mi vida.

A todos los alumnos que han contribuido a que este trabajo fuera posible y a todos aquellos con quienes he compartido conocimientos. También he aprendido de ellos.

Al Maestro Víctor José Palencia Gómez, tutor de la tesis, por su apoyo y tiempo

A mis sinodales, gracias por darme la oportunidad y por el tiempo que me han dedicado para leer este trabajo.

GRACIAS

ÍNDICE DE CONTENIDO

La importancia de los métodos numéricos, en un ambiente constructivista, para apoyar la resolución de ecuaciones de grado mayor ó igual a dos, de la asignatura matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades.

RESUMEN

El propósito de este trabajo es mostrar la importancia del manejo de métodos numéricos e iniciar al alumno de bachillerato en la aplicación de esta herramienta. Además el estudio de métodos aproximados es primordial para preparar mejor al estudiante, formándole la idea de que no por ser aproximada una solución el método que la produjo es malo, como sucede en los métodos llamados erróneamente exactos, sino que es la precisión con que se obtenga dicha solución lo más importante. En el plan de estudios actual de matemáticas IV, unidad 1, del Colegio de Ciencias y Humanidades, de la Universidad Nacional Autónoma de México, el objetivo fundamental es la graficación de funciones polinomiales, la introducción de métodos aproximados o numéricos se relaciona con un elemento de la graficación y se refiere a encontrar los cortes con el eje X o eje cartesiano horizontal.

ABSTRACT

The purpose of this paper is to show the importance of handling numerical methods and start to high school students in the application of this tool. Besides the study of approximate methods is essential to better prepare the student, mainly by creating the idea that not be approximated by a solution method that produced it is bad, as is erroneously called exact methods, but it is the accuracy with which obtain the solution most important. In the current curriculum Math IV, unit 1, the Colegio de Ciencias y Humanidades, of Universidad Nacional Autónoma de México, the fundamental goal is polynomial graphing functions, introducing approximate or numerical methods relates to an element of the plotting and refers to find cuts the X axis or cartesian axis horizontal.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Introducción.

Al revisar los documentos relacionados con la educación matemática se encuentra con el hecho de no existir mucho trabajo en relación a los métodos aproximados de solución de ecuaciones en el bachillerato, o en términos prácticos, métodos numéricos y la necesidad de modificaciones al currículo (Ruiz, 2002), (Gregorio, 2002), (Pérez, 2004), (De Guzmán, 2007), (Sanabria, 2007).

Si bien es cierto que el manejo de situaciones numéricas no es nuevo, se ha detectado en la mayoría del currículo, por lo menos en el del Colegio de Ciencias y Humanidades (Comisión de Revisión y Ajuste del Sentido y Orientación del Área de Matemáticas, 2006), el uso de métodos llamados exactos, los cuales los alumnos frecuentemente denominan ***fórmulas***, en realidad no reflejan la importancia que debe tener al manejar estas herramientas; el significado correcto y la interpretación usada de los resultados obtenidos con estas ***fórmulas*** (De Guzmán, 2007).

La matemática es una actividad vieja y polivalente (De Guzmán, 2007), entendiéndose este último término como el uso y significado que se le ha dado a lo largo de la historia de la humanidad. Por ejemplo, en la Edad Media fue utilizada como un importante elemento de disciplina del pensamiento y en el Renacimiento como herramienta para la exploración del universo. De igual forma, la matemática es una ciencia dinámica y cambiante: sólo hay qué recordar cómo a partir del siglo XIX se ha producido más matemática que todas las épocas anteriores a dicho siglo; esto da una idea de lo difícil de la actividad matemática, la cual no puede ser una realidad de abordaje sencillo, debido por una parte a que no es una ciencia natural mucho menos ciencia social, lo cual dificulta el análisis de problemas donde se aplica la matemática; por otra, por el hecho de explicar cómo se da cada conocimiento y la manera en que se explica cada uno, cómo se establece (la manera de probar que son ciertos esos conocimientos). En educación, la matemática se supone tampoco es algo simple su aprendizaje, considerando que en educación ha de hacer, forzosamente, referencia a lo más profundo de una persona, el adolescente, aún por conformar a la sociedad en evolución en la que dicha persona se ha de integrar (Amara, 1993), (De Guzmán, 2007).

Por lo anterior, tal vez se deba concebir la educación matemática como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático (De Guzmán, 2007). Por esta situación el aspecto histórico de la matemática juega un papel fundamental en la preparación en la escuela y en la vida, en primer lugar por el origen mismo de la matemática, el cual es mucho más interesante que su construcción formal; en segundo lugar porque la inmersión en ella debe realizarse teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge. De esto último y para entender la interacción entre realidad y matemática, es necesario acudir, en principio, a la propia historia de esta última con el fin de entender el proceso de cambio de la matemática y su fecundidad y potencia (De Guzmán, 2007). De hecho, nótese cómo la matemática ha procedido de forma muy semejante a las otras ciencias: por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas; unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible. Por eso, el autor de este trabajo considera que la enseñanza debería tratar de reflejar este carácter profundamente humano de la matemática, su carácter social si se permite, ganando con esta situación cumplir los objetivos plasmados en el currículo, además de dinamismo, curiosidad e interés por parte del alumno hacia la asignatura. La perspectiva histórica acerca al hombre a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces certera, en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores. Nos aproxima a las interesantes personalidades de las mujeres y los hombres que han ayudado a impulsarla a los largo de muchos siglos, por motivaciones muy distintas. Y aun así, este binomio historia-biografías hace consciente del carácter hondamente histórico, es decir, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, económicas, etc., así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, la matemática, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras. Aspecto éste último del que los mismos matemáticos, ocupados o concentrados en sus tareas, no suelen ser muy conscientes, por la misma forma en que la matemática suele ser presentada, como si fuera ajena a los cambios de la historia.

Como guía de lectura, a continuación se menciona brevemente lo que trata cada capítulo.

El capítulo 1, ***Antecedentes y planteamiento del problema***, presenta el papel que juegan los métodos de aproximación tanto en el aula como fuera de esta. Se recurre a la parte histórica como un elemento fundamental para entender la importancia de dichos métodos, así como el lugar que pudieran llegar a ocupar las nuevas tecnologías. Se plantea la pregunta de si es necesario trabajar con los alumnos de bachillerato la inexactitud del mundo, esto es, a no recurrir siempre a problemas cuya solución numérica sean conjuntos de valores enteros, por ejemplo.

En el capítulo 2, ***Marco referencial***, se muestra el lugar que ocupa la matemática, socialmente hablando, así como los factores que, posiblemente, inciden en el bajo rendimiento del alumno en la asignatura, aunque dichos factores pudieran ya no considerarse, a estas alturas, causales reales, por lo que se muestra en el capítulo. Se muestra que es la concepción conseguida de la matemática y la forma de trabajarla en el aula lo que debe cambiar. Y se hace énfasis en la necesidad de que la lectura y la escritura son dos tareas fundamentales que deberían lograr dominar los alumnos para que la educación se prolongue toda la vida, así como la necesidad de combinar el curriculum institucional educativo con el análisis constante de situaciones reales, lo cual permitiría formar al educando desde un enfoque humanista con énfasis moral y ético.

En el capítulo 3, ***Marco teórico*** se muestran los perfiles psicopedagógico y didáctico. Se propone, de acuerdo a Paulo Freire, cambiar la tradición de sólo transmisión de conocimientos invitando a establecer un diálogo con los demás seres humanos con el fin de aprender-enseñar, juntos, ya que la matemática debe verse como un reto y los alumnos pueden aprender de una mejor forma. Se menciona como uno de los graves problemas el de la desconexión entre familia, escuela y comunidad, agregando los problemas principales que se presentan en la adolescencia. En el perfil didáctico se habla de las ideas principales de Jean Piaget y David Ausubel que dan pauta a lo que se conoce como constructivismo y sirven para explicar el ambiente "pedagógico" del presente trabajo.

En el capítulo 4, ***Propuesta metodológica y validación de la estrategia didáctica*** se da cuenta del propósito del estudio: los métodos numéricos; mostrando el material relacionado con los tópicos (ecuación, función, etc.), tratando de dar a entender la importancia de la aproximación, todo esto en dos sesiones. Se muestran los resultados del estudio, haciendo énfasis en el uso y manejo de la calculadora.

Finalmente, el capítulo 5, ***Conclusiones y consideraciones finales***, se trata de dar respuesta al problema planteado, en el sentido de un posible manejo de métodos aproximados en el aula.

Existe en el trabajo una parte de anexos donde se muestran los instrumentos aplicados en las sesiones; una planeación didáctica en relación a los métodos numéricos; un material didáctico para la asignatura matemáticas IV, del cuarto semestre de bachillerato de la UNAM, preparado por el autor, como guía en el cumplimiento de los propósitos de la unidad; el texto del problema eje del presente trabajo: el problema de la caja, donde se muestran las estrategias de enseñanza y aprendizaje y los recursos; el primer método numérico utilizado en las sesiones, interpolación lineal, así como una actividad sobre métodos numéricos con hoja de cálculo, utilizando software libre, en particular, Open Office.org hoja de cálculo ***Calc***.

1.1. El papel de los métodos de aproximación en matemáticas.

Históricamente hablando el tema de este trabajo se puede remontar a la aritmética y forma de resolver problemas de los antiguos egipcios encontrados, por ejemplo, en el Papiro de Ahmes (Boyer, 1999). Estrictamente hablando, este tipo de problemas no se refieren a objetos concretos y específicos como pan y cerveza (Boyer, 1999), (Collete, 1998), (Kline, M., 1985); es notorio el uso de un procedimiento que hoy se conoce como ***método de falsa posición*** o ***regula falsi***, donde la solución a algunos problemas empieza a obtenerse a partir de otro, el cual no es precisamente el correcto, hasta acercarse al valor real.

Después de esta primera revista a lo más cercano a los métodos numéricos en la historia, hay que remontarse a los griegos, donde el problema mayor encontrado es el descubrimiento y manejo de los números irracionales o inconmensurables, cuando se observa que estos números son causa de la ruina de toda teoría de las proporciones. Fue Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) quien resolvió favorablemente e imaginativamente los problemas presentados con los inconmensurables. Además, él mismo resolvió el problema de la comparación de figuras rectilíneas y curvilíneas. Los matemáticos anteriores sugerían la opción de inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras indefinidamente, con lo que las figuras rectilíneas se iban aproximando cada vez más a la curvilínea, aunque lo que no sabían era cómo cerrar el razonamiento (Boyer, 1999), puesto que la idea de límite les era desconocida hasta por lo menos dos milenios más.

A partir del axioma de Eudoxo o de Arquímedes se demuestra, por reducción al absurdo, la proposición que constituye la base del método de exhaución griego:

Si de cualquier magnitud se sustrae una parte no menor que su mitad, y si del resto se sustrae de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si se continúa repitiendo este proceso de sustracción, se termina por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo, dada de

antemano (Collete, 1998). Esta proposición es equivalente al enunciado

$\lim_{n\to\infty} G(1-r)^n = 0$, donde G es la magnitud inicial, r es la razón tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, y n el número de subdivisiones efectuadas; esto es equivalente al actual cálculo integral, es decir, integración moderna de áreas, para demostrar teoremas sobre áreas y volúmenes de figuras rectilíneas.

No deja de sorprender el hecho de que el proceso anterior se parezca mucho a lo encontrado en algunos alumnos cuando buscan raíces irracionales de una ecuación de grado superior a dos, prescindiendo de algún procedimiento exacto (Rechimont & Ascheri, 2003): van restando en el intervalo donde localizaron la raíz el espacio donde se encuentra el valor real de la raíz, esto significa, encerrar el posible valor solución por encontrar.

A pesar de ser problemas no muy apegados a la realidad los chinos tienen un matemático que trasciende por ser el precursor del método que actualmente se conoce como ***método de Horner***. Del periodo de la Dinastía Sung, fue Chu Shih-Chieh (1280-1303) quien encontró algunas formas de resolver ecuaciones con métodos de aproximación, en su libro de 1303 llamado Ssu-yüan yü-Chien o ***Espejo Precioso de los Cuatro Elementos***, donde los cuatro elementos referidos por Chu Shih-

Chieh son el cielo, la tierra, el hombre y la materia representan las cuatro incógnitas de una ecuación (Boyer, 1999). El libro es la punta más alta de la montaña que logra la matemática china y en él se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como 14. Chu Shih-Chieh explica en su libro un método de transformación para ecuaciones, el cual llama ***fan fa***; y como se mencionó anteriormente es el antecedente del método de Horner, alrededor de quinientos años antes de aparecer este último método. Brevemente se explica el procedimiento de Chu Shih-Chieh para ecuaciones de la forma conocidas actualmente como $x^2 + bx + c = 0$ y $x^3 - c = 0$. Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 - 365x + 2012 = 0$ …(1)

Chu Shih-Chieh obtiene, por tanteo, la aproximación *x = 5*, lo cual significa que la ecuación tiene una raíz entre x=5 y x=6. En términos actuales, un alumno de bachillerato debe entender esto como si evaluara la función $f(x) = x^2 - 365x + 2012$ para los valores x=5 y x=6, esto es, *f(5)* y *f(6)* dando signos contrarios: *f(5)=212* y *f(6)=-142* y, por lo tanto, en ese intervalo de 5 a 6 se localiza y encuentra la solución de *f(x) = 0*. A continuación, Chu Shih-Chieh utiliza ***fan fa***, en este caso, la transformación *y = x - 5* para obtener la ecuación $y^2 - 355y + 212 = 0$ …(2), que tiene solución entre $y=0$ y $y=1$. Esta última transformación se obtuvo a despejar x quedando $x=y+5$ y sustituir x en la ecuación (1), de la página anterior, por y+5, llegando a la ecuación (2).

$$(y+5)^2 - 365(y+5) + 2012 = 0$$
$$y^2 - 355y + 212 = 0$$
$$y(y-355) + 212 = 0$$
$$y(y-355) = -212$$
$$y = \frac{-212}{y-355}$$

Y como la ecuación (2) tiene solución entre $y=0$ y $y=1$ el valor aproximado de la raíz es, para $y=1$,

$y = \frac{-212}{(1-355)} = \frac{-212}{-354} = \frac{106}{177} \approx 0.59887$. Así, el correspondiente valor de x es $x = \frac{106}{177}$ como aproximación al valor real que es $x=0.598191$, con 6 cifras decimales.

De manera similar trabaja los casos de $x^3 - c = 0$. Es así como se logra llegar por medio de aproximaciones a la solución de una ecuación, por medio de tanteos. En el ejemplo anterior sólo se consideró una de las raíces, se esperaría un procedimiento muy similar para encontrar la otra solución. Obsérvese que por tanteos también se justifica cada paso llevado a cabo. Eso es lo importante de las aproximaciones.

Para el siglo XIX, el mejor según algunas personas (Bell, 2009), (Boyer, 1999), (Collete, 1998), (Kline, M., 1985), aparecen dos matemáticos que superan, por su importancia al encontrar resultados fundamentales en teoría de ecuaciones, a los mejores matemáticos de la época, incluyendo a Gauss, Euler, Lagrange, Cauchy, etc. Estos matemáticos, Niels Henrik Abel(1802-1829),por una parte, y Évariste Galois (1811-1832), por otra, tuvieron una vida muy corta, el primero sucumbió a la pobreza, el otro a la estupidez (Bell, 2009), aunque a ambos se les considera como genios. Y es la indiferencia, la soberbia, el desdén de reconocidos matemáticos de su época quienes al no considerar o hasta no aceptar la genialidad de estas eminencias lo que frena, lo que parecía ser una brillante carrera matemática, quizá tal vez más con Galois. Esto hace pensar al autor del presente trabajo cómo en el aula pudiera suceder algo similar con alumnos que, por sus inquietudes, los docentes no les permiten o no los guían a mostrar todo el potencial que tienen en la escuela y la vida.

El intento por encontrar una solución general a las ecuaciones de quinto grado mediante radicales data principalmente de los siglos XVII y XVIII y éste fue infructuoso. Abel se apoyó en los trabajos de Lagrange y Gauss sobre la teoría de ecuaciones y atacó el problema de la solubilidad de ecuaciones de grado mayor a cuatro y pensó haber resuelto la ecuación general de quinto grado por radicales, aunque muy pronto se dio cuenta de su error y trató de evidenciar que tal demostración no era posible (Kline, M., 1992). De esta forma tuvo éxito en demostrar el teorema: las raíces de una ecuación soluble por radicales pueden ser dadas de tal forma que cada uno de los radicales que aparece en las expresiones para las raíces es expresable como una función racional de las raíces de la ecuación y ciertas raíces de la unidad. Y hacia 1826, Abel se sirve de este teorema para probar que la ecuación $y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$ no es resoluble por radicales, es decir, que y no puede ser expresada en términos de a, b, c, d y e utilizando un número finito de veces las cuatro operaciones aritméticas fundamentales además de la extracción de raíces. De igual manera, Abel usó su teorema para demostrar la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado mayor que cuatro. Luego presenta dos problemas generales relacionados entre sí que se propone discutir:

1. Encontrar todas las ecuaciones de cualquier grado que sean resolubles algebraicamente.
2. Determinar si una ecuación es o no resoluble algebraicamente.

A fin de cuentas, dice Abel, estos dos problemas son uno mismo. Aunque no puede haber ninguna fórmula general expresada en términos de operaciones algebraicas explícitas sobre los coeficientes de una ecuación polinómica que nos dé las raíces de la ecuación, si el grado del polinomio es mayor que cuatro.

Si bien es cierta la importancia de Évariste Galois en la explicación de la resolución de ecuaciones, su aportación principal se da en teoría de grupos, donde es precursor e iniciador, herramienta matemática abordada a través del más simple y práctico de todas las matemáticas, el de la resolubilidad de ecuaciones polinómicas de tercero y cuarto grados y mayores. Ya se comentó que fue Abel quien había demostrado la imposibilidad de resolver algebraicamente ecuaciones generales de quinto grado y demás grados superiores. Galois se propuso demostrar por qué tales ecuaciones de quinto grado, o superiores, no son resolubles algebraicamente y qué casos especiales son los resolubles; de ahí surge la teoría de grupos.

Mencionada ya la imposibilidad de resolver una ecuación polinómica de grado mayor a cuatro con fórmula y sabiendo la enorme cantidad de problemas que se resuelven en la vida real con estas ecuaciones es importante señalar la necesidad de contar con una alternativa para resolverlas (Ruiz, 2002). Si bien es cierto que Galois estudió el problema de caracterizar las ecuaciones solubles por radicales mejorando las ideas de Lagrange, si alguien desea saber si una ecuación se puede resolver o no simplemente lo intenta; Galois dice no. El enorme valor de su trabajo reside en examinar las permutaciones de las supuestas soluciones.

El autor considera mencionar sólo estos hechos por su relevancia histórica y relación con el tema del trabajo, suficientes para entender cómo se llegó a la necesidad de los métodos de aproximación. En ocasiones, precisamente ya sea por la dificultad de resolver una ecuación por la generación de errores al operar con números muy pequeños, o simplemente porque sólo se desea conocer una región donde se encuentra situada la solución, se utilizan métodos numéricos, entendiéndose con este término las aproximaciones sucesivas hasta un cierto grado de exactitud de la solución buscada de la ecuación y constituyen técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos, de tal forma que puedan resolverse utilizando operaciones aritméticas.

Aunque existen muchos tipos de métodos numéricos, éstos comparten una característica común: invariablemente requieren de un buen número de hasta tediosos cálculos aritméticos

(Chapra & Canale, 2007), aunque también es cierto el desarrollo de computadoras y su uso en el manejo de esta herramienta, con lo que la solución de problemas a través de los métodos numéricos vaya aumentando considerablemente.

1. 2. Los métodos numéricos en el aula.

El aprendizaje entendido como una reconstrucción intelectual de la realidad es una de las bases de las teorías constructivistas del conocimiento (Pérez, 2004). Compatible con esta idea y proceso, Ausubel (1983) llama aprendizaje significativo todo proceso de experimentación y visualización, aunque también la aproximación de resultados y juegan un papel fundamental en el proceso de aprendizaje, por lo que no es descabellado mencionar la importancia de los constructos de Bunge para generar alternativas constructivistas en transformación de aquellos (Bunge, 2002).

Gregorio Guirles (2002) indica que el problema de las matemáticas y el constructivismo no es de definición y concreción curricular, sino un problema más real: el de dar clase casi todos los días y, en definitiva, el de definir cuáles son las claves del trabajo constructivista en la actividad diaria del aula. Por esta razón muestra algunos elementos identificativos del constructivismo aplicado a las matemáticas. De esos elementos llaman la atención los siguientes puntos, obtenidos de lo que él llama ***Racionalización, ajuste y renovación de los contenidos matemáticos***, relacionados con el presente trabajo:

- Potenciar el cálculo mental, la aproximación y el tanteo y previsión/estimación de resultados de todo tipo de operaciones y problemas matemáticos, como elementos básicos para ***amueblar la cabeza*** de nuestros alumnos. De acuerdo a Piaget, el cambio se promueve a partir del individuo (proceso interpersonal). El desarrollo se concibe como el despliegue de las capacidades cognoscitivas a través de la transformación de estructuras.
- Favorecer la introducción y el uso continuado de la calculadora desde educación infantil y a lo largo de educación Primaria. La identificación de números, la asociación tecla-número, su utilización para el cálculo mental para trabajar el sentido numérico, resolver problemas a los que no se llega algorítmicamente o que suponen una pérdida innecesaria de tiempo son algunas de las posibles aplicaciones que tienen las calculadoras (y graficadoras).

- Trabajar los números y las operaciones elementales en relación con la resolución de problemas aritméticos y con contextos propios y no en fichas descontextualizadas de operaciones. Las operaciones o algoritmos si no sirven para resolver problemas carecen del más mínimo sentido.

Los alumnos de los niveles medios aprenden la importancia de los patrones, los cuales pueden representar y analizar matemáticamente (NCTM, 2000) y deberían explorar algunas relaciones no lineales, dicen los principios y estándares del NCTM. Sólo que las relaciones no lineales por lo regular no manejan situaciones ***exactas***. Cuando, por ejemplo, se expresa que la longitud de una tabla es de 2 metros se suele trabajar y asumir esa medida como exacta; sin embargo, generalmente no se tiene en cuenta que esa medida lejos de ser exacta es aproximada, por cuanto incluye dos tipos de errores: el propio de nuestros órganos de la visión, así como el error del propio instrumento de medición que se usa.

1.3. La importancia de los métodos numéricos.

Para una gran cantidad de problemas matemáticos sólo se dispone de métodos aproximados para obtener su solución.

Tales problemas involucran soluciones de ecuaciones polinómicas de grado mayor a dos en economía, ingeniería, etc.; problemas técnicos y científicos. En la realidad, cuando se tiene un método exacto para resolver un problema, el proceso de resolución es más laborioso y engorroso, siendo la solución por un método aproximado la mejor opción; por ejemplo, sistemas de ecuaciones lineales de orden 3 o mayores.

La inquietud del autor va en este sentido: si a la matemática se le conoce como ciencia exacta, no es precisamente por utilizar sólo métodos exactos, sino distinguirla de otras ciencias. Y cabría preguntarse si en el mundo real existe algo exacto. El propio método de conocimiento científico de la modelación en general y de la modelación matemática en particular, como una forma de conocer al objeto de estudio de una forma más simple y por tanto aproximada que la propia realidad, de por sí es compleja, constituye un método aproximado que, sin embargo, es fuente de conocimiento (Ruiz, 2002). Por lo tanto, es importante y objetivo llevarle al estudiante esta inexactitud del mundo, la necesidad de métodos aproximados y lo esencial que resulta obtener la solución del problema pero con un margen de error permisible y lo más pequeño posible.

Los deseos y acciones por mejorar el aprendizaje de los alumnos no se refieren a un simple ajuste de la cantidad de tiempo que hay que dedicarle a cada tema por separado; tal vez considerar los cambios de énfasis dentro de cada tema, por ejemplo, que definitivamente pasar menos tiempo trazando curvas punto a punto y más tiempo interpretando gráficas. Tal vez ponerse de acuerdo las personas encargadas de trabajar con las modificaciones de los contenidos que se deben dar, el tiempo que se debe dedicar a estos y distinguir lo ocasional o puntual de lo sistemático.

Los métodos numéricos de resolución de ecuaciones brindan formas de interpretar la solución de una ecuación desde un punto de vista gráfico, ligando lo algebraico con lo geométrico, además permiten la resolución aproximada de una gran cantidad de ecuaciones y la introducción de problemas más apegados a la realidad (Sanabria, 2007).

Con las nuevas tecnologías las escuelas son capaces de ofrecer un conjunto variado de experiencias en álgebra a todos los estudiantes. Las ecuaciones polinómicas, que resultan muy útiles para describir relaciones entre variables en un amplio campo de situaciones reales, no tienen que ser ya un tema reservado para los alumnos que vayan a seguir un curso de análisis (NCTM, 2000). Como ilustración de ello el trabajo presentado en las siguientes páginas.

1.4. El problema.

Observando los puntos anteriores de este primer capítulo y considerando que los métodos exactos probablemente acarrean un problema en educación media superior, por lo expuesto anteriormente (NCTM, 2000), (Boyer, 1999), (Comisión de Revisión y Ajuste del Sentido y Orientación del Área de Matemáticas, 2006), (De Guzmán, 2007), (Gregorio, 2002), (Pérez, 2004), (Ruiz, 2002), (Sanabria, 2007), el autor de este trabajo cuestiona si la aplicación de programas de aprendizaje interactivo en los cursos de álgebra permitiría al estudiante experimentar con los objetivos matemáticos y sus propiedades, hacer conjeturas y "descubrir" por sí mismo resultados importantes y significativos, todo lo cual refuerza la comprensión intuitiva de los conceptos e incentiva la creatividad.

Si tiempo atrás la educación media superior ha sido criticada entre otras cosas porque sus métodos y contenidos son obsoletos (Sanabria, 2007); la propia UNESCO, desde 1982, propone que los alumnos vayan aprendiendo a través de un lenguaje programado, un buen manejo de la computadora, lo cual les permitirá entender el papel y la influencia real de las computadoras en la sociedad actual (Sanabria, 2007); si en verdad la aplicación de programas de aprendizaje interactivo en los cursos de álgebra permite al estudiante experimentar con los objetos matemáticos, ¿por qué no se ha hecho algo al respecto en las instituciones públicas para mejorar la calidad del aprendizaje de los alumnos? Basándose en (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983), (De Guzmán, 2007), (Ruiz, 2002), (NCTM, 2000), principalmente, este trabajo plantea y trata de mostrar la importancia de trabajar con métodos aproximados en álgebra, para alumnos de cuarto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades y se plantea el problema en los siguientes términos:

¿Es adecuado y necesario trabajar con los alumnos de bachillerato la inexactitud del mundo y, por lo tanto, dedicarle el tiempo suficiente al estudio de métodos aproximados, en particular a las funciones polinómicas, en lugar de priorizar el estudio de los mal llamados métodos exactos, consiguiendo con esto una mejor preparación del estudiante y formándolo con la idea de precisión o estimación, más que la exactitud en la solución de problemas?

CAPÍTULO 2. MARCO REFERENCIAL

Objetivo: que el alumno practique diversos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones de grado mayor o igual a dos de la asignatura matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades, para que tenga instrumentos adicionales para la graficación.

2.1. Perfil social.

De una u otra forma, a la Matemática siempre se le asocia con números o se le concibe como el manejo de números. Esto tal vez porque, socialmente, el nivel matemático que se tenga no rebase la aritmética.

En el caso de los estudiantes de bachillerato, se encuentra con una situación semejante, a pesar de que sus estudios en matemáticas van más allá de la aritmética. En particular, uno de los temas más importante es el de la resolución de ecuaciones. La importancia de este tema puede observarse cuando, a lo largo de la historia de la humanidad, la determinación de las raíces de una ecuación es uno de los problemas más antiguos que se presenta con frecuencia en la solución de una gran variedad de situaciones problemáticas reales. El verdadero problema se refiere a la forma en que los alumnos conciben y resuelven las ecuaciones.

Al revisar el documento sobre las dificultades en el aprendizaje de los alumnos en ***Matemáticas I y III*** (Santillán, 2008), se pretende encontrar algún dato que muestre el grave problema presente en Matemáticas.

El nivel de ingresos mensuales familiares aumentó en comparación con generaciones anteriores, por lo que al parecer, al menos tres cuartas partes de la población estudiantil del CCH tiene resuelto el problema de su manutención económica, aunque con ingresos familiares bajos, si es que se piensa que el factor económico es el de mayor relevancia. Respecto a sus antecedentes escolares, el reporte muestra una mejoría en el desempeño académico de los alumnos respecto de las generaciones anteriores; y aunque haya una tendencia ascendente con respecto a la trayectoria académica regular de ellos (bachillerato en tres años), sigue habiendo ciertas deficiencias con algunos temas, encontradas en el aula, en lo particular, desde operatividad y la resolución de ecuaciones, principalmente.

Entonces, tal vez el aspecto principal a tratar sea la manera de abordar estos temas, o como diría Paulo Freire, una reorientación curricular, si se permite hablar de su concepción de formación permanente, incluyendo una visión de escuela como totalidad orgánica, esto es, ***Una concepción de***

cambiarle el rostro a la escuela, es decir, entendiendo el papel educacional de todos los actores que en ella trabajan (desde el director, hasta el personal de confianza) (Saúl, 2003).

Las dificultades en el aprendizaje en matemáticas, muestran el escaso dominio que presentan los estudiantes en los contenidos de la asignatura, aun considerando la reducción del número de alumnos por grupo, a partir de la generación 2007. En el caso de la resolución de ecuaciones, analizando la información numérica, se encuentra que casi la mitad de los alumnos no demuestran su conocimiento al interpretar gráficas relacionadas con ecuaciones, mucho menos son capaces de resolver problemas en diversos contextos que dan lugar a ecuaciones lineales con una incógnita. Si a esto se le agrega que cuando estos alumnos llegan a cuarto semestre, la interpretación de gráficas y su construcción, la resolución de problemas, así como el concepto de función, no han sido claramente comprendidos. Tal vez se conozcan, pero no pueden ser comprendidos y hasta aprehendidos. Quizás se deba a una cuestión multifactorial.

De acuerdo a la investigación que se llevó a cabo en nuestro país, sobre algunos problemas de la educación en Matemáticas (De la Peña, 2002), sugiere y a su vez interroga a las autoridades en materia educativa, sobre la atención de algunas deficiencias de la educación básica, como por ejemplo, números decimales. Asimismo, poner mayor énfasis en la capacitación y actualización en matemáticas de personas que han dejado la escuela hace tiempo y disminuir lo que John Allen Paulos dice en su libro: El analfabetismo numérico (Allen, 1998). Se cree que cuando la vida diaria y la escuela compiten por ser escenarios de la adquisición de conocimientos, ésta última no es siempre la mejor, y que niveles bajos de escolaridad pueden incluso ser perjudiciales, en el sentido de que obstaculizan el desarrollo del sentido común para la resolución de problemas y le sobreponen algoritmos mal aprendidos y peor aplicados.

Métodos Numéricos en realidad no está contemplado como contenido temático en el plan de estudios de matemáticas IV, unidad I, aunque es pertinente resolver ecuaciones de grado superior a dos. Ahí la importancia del material para esta unidad, ya que muchos conocimientos matemáticos se van construyendo a partir de conocimientos previos. Se requiere incluir en esta asignatura conceptos y procedimientos que son sustento indispensable de otros más especializados, tanto de la propia Matemática como de otros campos del saber (Hernández, Monzoy, & Preisser, 2005).

Los métodos numéricos son técnicas generales que se pueden aplicar no solamente a ecuaciones algebraicas, sino también a las llamadas trascendentes, o sea, a cualquier ecuación, a pesar de que los estudiantes, al parecer, menosprecian los métodos que conducen a la solución aproximada del problema, ya que, hasta este momento, no existen estudios realizados al respecto, en este contexto.

Sin embargo, se debe valorar a los estudiantes por esa percepción debido a que, si calculamos el tiempo que se dedica a enseñarles métodos exactos de solución a lo largo de toda la enseñanza básica hasta la educación superior, se obtiene que el tiempo dedicado a la enseñanza de métodos aproximados es mínimo en comparación con el dedicado a métodos exactos, mientras que en la práctica ocurre, por ejemplo, que hay autores que señalan que sólo se pueden resolver por métodos exactos no más del 5% de las ecuaciones diferenciales que se pueden presentar (Ruiz, 2002).

El cambio que se necesita en el aspecto social se refiere a la concepción que se tiene de la Matemática y la forma de trabajar en el aula. En la práctica, sin percatarse del fenómeno, ésta muestra cómo se pueden resolver problemas, además de que nos enseña a pensar. Desgraciadamente, los propios maestros ignoran el propósito de las matemáticas y se cae en el viejo vicio de imponérselas a los estudiantes sin comprender su función y, por lo mismo, no les transmite el objetivo o finalidad de éstas. Se incluye, para la mayoría de maestros, la ignorancia de la diversidad de métodos dentro de las matemáticas.

2.2. Perfil educativo.

En relación con el párrafo anterior, y teniendo en cuenta la compleja sociedad como la nuestra, dos elementos fundamentales en la práctica docente que aparentemente los alumnos no dominan son la lectura y la escritura. La lectura es una destreza de supervivencia que nos permite reaccionar ante una serie de demandas sociales. La escritura, por el contrario, es una destreza menos necesaria en este sentido, pero que puede conducir a desempeñar papeles mucho más importantes; es una parte importante del proceso de comunicación no sólo como medio social y como una forma de obtener conocimiento y de resolver problemas. La escritura implica enfrentarse con una convención social preexistente que demanda ceñirse a sus reglas de composición e interpretación, y a las funciones que socialmente se le han otorgado. Los Métodos Numéricos no son la excepción. Plantear como objeto de estudio las notaciones numéricas hace converger una serie de áreas del conocimiento: la psicología, la historia y la antropología, la lingüística y la didáctica, todas ellas necesarias para comprender a cabalidad qué implica emplear notaciones numéricas, aprenderlas y desarrollarlas en un momento cultural determinado (Alvarado & Brizuela, 2005).

Los Métodos numéricos constituyen técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos, de tal forma que puedan resolverse utilizando operaciones aritméticas. Si bien es cierto que existen muchos tipos de métodos numéricos, estos comparten una característica común: invariablemente requieren de una considerable cantidad de cálculos aritméticos, lo que requiere de instrumentos que con el tiempo se han introducido en la educación y no es raro que con el desarrollo de computadoras digitales eficientes y rápidas, además de calculadoras graficadoras y programables, el papel de estas técnicas en la solución de problemas haya aumentado considerablemente en años recientes (Chapra & Canale, 2007). Aunque cabe señalar que, para lograr el objetivo, el trabajo con los instrumentos mencionados no es prioridad. Hasta este momento se ha pensado en la forma en que el alumno tenga alternativas para abordar la unidad I de Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), en particular la solución de ecuaciones de grado mayor o igual a dos. La actualización y revisión casi permanente de los programas de estudio del bachillerato le permite al CCH seguir siendo una institución educativa de nivel medio superior de vanguardia, acorde con las transformaciones de la cultura contemporánea (Hernández, Landa, Jiménez, Zaragoza, & Álvarez, 2003). Dichas transformaciones confirman la necesidad de formar alumnos que adquieran la capacidad de aprender a aprender, que a su vez atiendan la capacidad de obtener, organizar y evaluar la información disponible, en cualquier situación que se requiera ya sea del ámbito escolar pero sobre todo fuera del mismo, es decir, aprender para la vida. Por lo anterior, si se acepta que el conocimiento –información- se vuelve rápidamente anticuado, es muy poco probable que la enseñanza aprendida en la juventud conserve su importancia cuando se llegue a la vejez.

Por ello, la educación tiene que prolongarse durante toda la vida y estar dirigida a que los estudiantes, futuros ciudadanos, puedan lograr el complejo objetivo, pero al mismo tiempo irrenunciable de aprender a aprender. En este caso, la escuela debe preparar al alumno para enfrentarlo al mundo real que lo rodea. Y este mundo real presenta problemas reales. Entonces, por deducción, la escuela debe preparar a uno a resolver cuestiones, y la mejor manera de resolver dificultades, es saber pensar. En conclusión, la escuela debe enseñar a pensar. Pero además, la disciplina académica donde mayor énfasis se pone en la enseñanza de las argumentaciones lógicas, clave para aprender a pensar, es en matemáticas. Éstas enseñan a pensar y, por lo tanto, a resolver problemas; situaciones que se presentan a diario en la vida cotidiana. Por eso, cuando a los estudiantes se debe dar una respuesta acerca de la utilidad de las matemáticas y en particular los métodos numéricos y resolución de problemas y ecuaciones, se tiene una respuesta concisa y concreta para ellos: las matemáticas sirven y nos enseñan a pensar (Valiente, 1995). Son un reto al intelecto.

Existen diversas razones por las cuales se deben estudiar métodos numéricos (Chapra & Canale, 2007):

1. Son herramientas muy poderosas para la solución de problemas. Son capaces de manipular sistemas de ecuaciones grandes, manejar no linealidades y resolver geometrías complicadas, comunes en la práctica de muchas disciplinas y, a menudo, imposibles de resolver en forma analítica. Por lo tanto, aumentan la habilidad de quien los estudia para resolver problemas.
2. En el transcurso de la vida académica, es posible utilizar paquetes disponibles comercialmente, o programas que incluyan métodos numéricos. El uso

eficiente de estos programas depende del buen entendimiento de la teoría básica en que se basan tales métodos.

3. Hay muchos problemas que no pueden resolverse con programas que incluyan métodos numéricos. Cuando alguien conoce métodos numéricos y es hábil en la programación de computadoras, entonces tiene la capacidad de diseñar sus propios programas para resolver los problemas, sin tener que comprar un ***software*** costoso.
4. Son un medio para reforzar la comprensión de las matemáticas, ya que una de sus funciones es convertir las matemáticas superiores en operaciones aritméticas, de esta manera se puede profundizar en los temas que de otro modo resultarían oscuros. Esta perspectiva dará como resultado un aumento de su capacidad de comprensión y entendimiento en la materia.

A la fecha, el manejo de computadoras y calculadoras pone en nuestras manos una excelente oportunidad: hacer realidad de manera masiva e innovadora ideas pedagógicas que marcaron el camino en la historia de la educación, proyectos educativos como los de María Montessori, Pestalozzi, Freinet, Herbart y otros grandes pedagogos preocupados profundamente por establecer una conexión entre la escuela y la vida (Hernández, Landa, Jiménez, Zaragoza, & Álvarez, 2003). El saber matemáticas en una institución de educación media superior como el CCH tiene sentido cuando se hace la pregunta respecto a ese saber. Los propósitos educativos persiguen dotar al estudiante de herramientas intelectuales para allegarse por sí mismos nuevos conocimientos y para utilizarlos eficientemente en beneficio de la sociedad (Comisión de Revisión y Ajuste del Sentido y Orientación del Área de Matemáticas, 2006). Y también cabría agregar la situación de transformación acelerada de la sociedad en la que vivimos y es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a los alumnos (De Guzmán, 2007). Por esta razón el autor considera mucho más útil apropiarse de procesos de pensamiento que de contenidos, que en su momento se conviertan en simples ideas. Hacer énfasis en la comprensión de los procesos matemáticos más bien que en la ejecución de ciertas rutinas, las cuales ocupan, actualmente en algunos casos, gran parte de los esfuerzos y energía de los alumnos, con el consiguiente rechazo de estos en cuanto a la esterilidad en el tiempo que en ello emplean.

Por lo tanto, es indiscutible que la Matemática constituye un elemento indispensable para comprender, estudiar, modelar y hacer predicciones sobre el entorno físico y social;

representa una parte importante de la herencia cultural de la humanidad, producto de un gran número de pensadores.

2.3. Perfil ético.

En la sociedad compleja del aprendizaje se necesitan habilidades y conocimientos transferibles a nuevos contextos, ya que no podemos prever las nuevas demandas que el mercado laboral y la sociedad de la información van a plantear en un futuro próximo a los aprendices. Nuestra cultura del aprendizaje no sólo es muy exigente por la cantidad de aprendizajes distintos que nos exige, sino porque además deben ser aprendizajes buenos, transferibles a situaciones cada vez más diversas e impredecibles. Aunque no todas las formas de aprendizaje facilitan por igual la transferencia. Pero también, como bachilleres universitarios, el CCH busca que sus estudiantes se desarrollen como personas dotadas de valores y actitudes éticas fundadas; con sensibilidad e intereses en las manifestaciones artísticas, humanísticas y científicas; capaces de tomar decisiones, de ejercer liderazgo con responsabilidad y honradez, de incorporarse al trabajo con creatividad, para que sean al mismo tiempo, ciudadanos habituados al respeto, diálogo y solidaridad en la solución de problemas sociales y ambientales.

Por su trascendencia, el cumplimiento de esta misión debe determinar el rumbo de toda acción que se emprenda para construir el futuro del CCH y su aportación a la renovación de la enseñanza media superior del país.

Queda clara, en un momento de la historia de nuestro país tan difícil, la importancia que tiene la motivación hacia los aprendizajes de temas de valores, moral y ética, de tal forma que se encuentre una experiencia innovadora y positiva con la cual encontrar un modo adecuado para transmitir los conocimientos teóricos pertinentes para favorecer la reflexión y revisión del propio desarrollo moral y ético del grupo de alumnos al cual se atiende y a la vez cumplir con los contenidos del curso (Vargas, 2004). Aunque cabe mencionar lo importante de la educación moral que todos los ciudadanos y profesionales en Orientación y en Educación deben poner en práctica, que a su vez requiere de analizar cuál ha sido el propio desarrollo moral del educador y de todos los actores del sistema, cuál es su comportamiento ético, así como su escala de valores para poder entender la verdadera formación del alumno.

Ante una permanente transformación social, es necesario saber de dónde partir para transmitir a poblaciones juveniles una educación moral, que si bien es cierto debería hacerse desde la infancia, esta tarea se trata con la primera población mencionada porque es el conjunto donde se hace el estudio en este trabajo. Se ha experimentado en el aula y se ha obtenido un modelo de educación de calidad total que debe ser acorde con las creencias del personal y con la filosofía institucional. Consiste en combinar el currículum institucional educativo con el análisis permanente de situaciones reales (Vargas, 2004); esto permite formar al educando desde un enfoque humanista con énfasis moral y ético, indispensable en una época como la actual.

Si bien es cierto que el currículo ha reflejado con diferentes énfasis la prioridad de formar ciudadanos, tal vez falte reflexionar lo que se entiende por la educación de ciudadanos democráticos. Esto es importante para decidir qué educación se requiere para formar sujetos autónomos, que deliberen y acuerden las normas que los rigen, que se orientan al entendimiento y discuten racionalmente para llegar a consensos (Poveda, 2003). Pero a su vez esa educación implica nunca perder la humanidad del otro; hablar de una realidad que no hay que soslayar; no hacer del alumno un valor, esto referente a la cosificación que a menudo se presenta en el salón de clases hacia las personas. De ahí la importancia de fomentar la autonomía, esto es, hacerle ver al joven contra lo que se tiene que enfrentar y, entendiendo a Theodor W. Adorno, cuando hablaba de los líderes nazis, que ni por un momento se imaginen o deseen el mundo de otro modo que como es; poseído por la voluntad de hacer cosas, independientemente del contenido de ese hacer.

De acuerdo a Russell (1998), lo ético se refiere a las pasiones humanas y su regulación por medio de la razón. Ésta significa para él la elección de los medios adecuados para lograr un fin que se desea alcanzar, aunque no tiene nada que ver con la elección de los fines. Así, los deseos, las emociones, las pasiones son las únicas causas posibles de la acción. La razón no es la causa de la acción, sino sólo un regulador. Y si llevamos esto al aula, agregando otros elementos que menciona este autor, es innegable que los alumnos están llenos de impulsos y pasiones que le ayudan, en cierta forma, a sobrevivir mientras se desarrollan como personas; pero su inteligencia les enseña que las pasiones son a menudo contraproducentes, y que sus deseos podrían ser satisfechos si algunas de sus pasiones tuvieran menos alcance y otras más. Por lo regular están en constante rivalidad, tal vez causado por el modelo psicopedagógico, y se observa que la misma inteligencia provoca que haya un crecimiento continuo de los beneficios de cooperación y una continua disminución de los beneficios de la competición. La ética y los códigos morales le son necesarios, en este caso, a los alumnos a causa del conflicto entre la inteligencia y el impulso. Si sólo hubiera inteligencia o sólo impulso no habría lugar para la ética. Y bueno, como el ser humano no es completamente social, se necesita la ética para sugerir los propósitos y los códigos morales para inculcar las reglas de acción.

Las matemáticas sirven para transformar el mundo, afirmaba Engels en su momento, al concebirla social y políticamente. El temerles implica que el alumno no ha comprendido su papel de transformador de este mundo. El alumno se forma, entendiéndose por esto el proceso por el que el sujeto se crea como tal (como para sí), es decir, al crear cultura, pues en ese proceso transforma la realidad y se transforma a sí mismo (Camarena, 1995). El pensamiento crítico busca que las personas sean capaces de pensar por sí mismas, regresando al concepto de autonomía, no basadas en lo que otros dicen o piensan, sino en la capacidad para preguntar, reflexionar, discernir, capacidad de seguir aprendiendo, aprender a aprender.

Cada vez va siendo más evidente la enorme importancia que los elementos afectivos tienen participando a toda persona y que pueden tener también esa trascendencia en la mente en su ocupación con la matemática (De Guzmán, 2007). Es clara la presencia de gran parte de los fracasos matemáticos de muchos alumnos debido a una posición inicial afectiva totalmente destructiva hacia ellos, desdeñando sus propias potencialidades en este campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de los docentes (como sucedió con Évariste Galois, por ejemplo, y muchos más). Por eso se intenta también, a través de diversos medios, que los alumnos perciban el sentimiento estético, el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a fin de involucrarlos en ella de un modo más ligado a lo personal y humano. Porque, simplemente, se observa una fuerte tendencia hacia la deshumanización de la ciencia, ya no tanto por la despersonalización producida por la cultura computarizada (De Guzmán, 2007), sino por el modelo socioeconómico presente desde hace más de 20 años. Y es necesario un saber humanizado en que hombre y máquina ocupen cada uno el lugar que le corresponde. La educación matemática adecuada puede contribuir eficazmente a cumplir esa obra.

El aula, el temario, la comunicación del día a día, son momentos de oportunidad para invitar al alumno a que la reflexión, el análisis y la evaluación de lo que escucha o dice, sean un hábito, un compromiso. Las personas no son responsables de lo que escuchan, pero sí de elegir directrices para evaluar y decidir si son correctos o no, si deben o no tomarse en cuenta, si formarán parte de sí. Esto es lo importante con lo relacionado a la parte ética, del trabajo de matemáticas, en particular de los métodos numéricos.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

3.1. Perfil psicopedagógico

El trabajo de educar es una labor ardua y requiere tiempo y esfuerzo de todos. Al escribir estas líneas se desea comenzar con una pregunta que se relaciona con lo primario, es decir, a la enseñanza-aprendizaje, sobre lo que George Steiner (2004) trata en su libro ***Lecciones de los maestros***: ¿Qué es lo que confiere a un hombre o a una mujer el poder enseñar a otro ser humano? También hace las preguntas: ¿dónde está la fuente de su autoridad? ¿Cuáles son los principales tipos de respuesta de los educandos? Si bien es cierto, estamos inmersos en modelos de enseñanza en demasía: elemental, técnica, científica, humanística, moral y filosófica, donde el principal elemento a considerar es la dupla docente-discente.

En general, Paulo Freire es quien trata de cambiar esta tradición de sólo transmisión de conocimientos, invitando a establecer un diálogo con los demás seres humanos con el fin de aprender-enseñar juntos, definiendo la autoformación como parte de esta tarea, puesto que se trabaja con la formación humana, no sólo de nosotros mismos, sino de otros sujetos; transformarse en un ser humano para ***ser más***. Esto significa, en términos generales, comprender que es posible desafiar la vida, correr serios riesgos, ciertos peligros para liberarnos e independizarnos de modelos autoritarios y discriminatorios a los que la familia, la escuela, la religión, los partidos políticos y los medios masivos de comunicación nos pretenden someter. Se cree que todo lo que engloba la pedagogía de Freire es muy válido, de tal forma que si en realidad se tuviera la oportunidad de pensar de esta forma, todo lo relacionado con la educación en nuestro país sería completamente diferente.

En general, cuando se habla del estilo de aprendizaje, éste está directamente relacionado con las estrategias que se utilizan para aprender algo, de tal forma que el alumno pueda ser más visual que auditivo, por ejemplo. Tal vez por que esto le abra la posibilidad de entender algunos de los términos en matemáticas, que desde el punto de vista de la hermenéutica, no es cualquier interpretación. El profesor está para brindar esas oportunidades de comprensión y explicación que trata esta ciencia. La matemática en clase debe verse como un reto y los alumnos pueden aprender mejor de forma combinada. Aunque tal vez una manera de entender la parte de los estilos de aprendizaje sería pensar en uno particular como la media estadística de todas las distintas estrategias que se lleguen a utilizar, aunque esto implica más bien el ser escéptico y ecléctico, desde el punto de vista pedagógico. Por otro lado, resulta interesante y, necesario, una enseñanza efectiva y contemporánea de la matemática, que hasta cierto punto se relacione con la vida y con la transformación inteligente del medio natural y social, con lo que se desea que garantice un desarrollo armónico y estable de todos los individuos y de nuestra sociedad en su conjunto. ¿Podremos llegar a lograrlo? ¿Será posible hacer entender a los alumnos de la necesidad de llegar a esta etapa?

En el caso de la matemática, se tienen algunas particularidades, las cuales son: debido a que no entra en ninguno de los saberes científicos que se manejan comúnmente en la escuela: ciencias sociales y ciencias naturales. Aún así, la matemática es más una construcción social donde en realidad no hay un campo grande de donde surjan las ideas matemáticas. Para cuando un profesor se presenta frente a un grupo de alumnos la intención de éste es dar los mejores contenidos y que los alumnos aprendan. Hay una relación en esto. Saber matemáticas implica dos aspectos: por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones. En un funcionamiento científico como éste, las nociones y teoremas matemáticos involucrados tienen un status de herramientas. Por otro, saber matemáticas también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente.

Si se revisa un poco el panorama, y tratando de relacionar con lo anterior, no hay en realidad una conexión directa entre la familia, la escuela, la comunidad, el barrio; están todos desconectados. Tal vez la familia y la escuela sean dos instituciones más conectadas, pero hasta cierto punto. Desgraciadamente el estilo de vida actual, las presiones laborales, los intereses políticos, los medios de comunicación masivos, entre otros, de una u otra forma han contribuido a deshacer ese vínculo entre la familia, la cultura, la religión, la comunidad y la escuela, por lo que es necesario revisar y encontrar una posible explicación a este fenómeno.

Es fundamental entender que no es el manejo de las nuevas tecnologías, la forma tan agotada de mostrarnos la panacea, ni mucho menos otras soluciones simples, sino la colaboración de gente con inquietudes, convicciones e intereses comunes con aquellos que trabajan unidos por el bien de los jóvenes. Entablar un diálogo profundo y sincero entre todos para alcanzar el bien común.

El papel del docente es fundamental en este proceso para llegar a lograr el objetivo planteado: el enseñar que ellos pueden aprender. Como lo manifiesta Heidegger: ***enseñar es más difícil que aprender porque lo que el enseñar exige es esto: permitir que se aprenda. El verdadero maestro, en realidad, no permite que se aprenda otra cosa que...aprender***. Entonces, la tarea fundamental del maestro es ***permitir aprender al alumno***, despertar la curiosidad, que se les da a la perfección. Freire (1996) dice: ***es posible oír a los alumnos hablar de cómo comprenden su mundo, caminar junto con ellos en el sentido de una comprensión crítica y científica de él***. Lo que nunca se podrá ignorar es el hecho esperado de que, cuando el estudiante está entusiasmado a causa de un descubrimiento, un nuevo conocimiento que le da sentido a su vida, la ilumina; tal circunstancia hace que toda esa ardua tarea, el esfuerzo personal de enseñar, se justifique plenamente.

En relación a los adolescentes que se atienden, se pueden decir muchas cosas. Lo más importante es que se les vea como seres humanos, con muchas inquietudes y, se permita al docente ser guía en el desarrollo de su personalidad. Los problemas principales que se presentan en esta etapa son dos: a) la descalificación (Amara, 1993) hacia al adolescente, por parte de muchos padres, pero también de profesores y sus propios compañeros; b)la manipulación, y son elementos negativos para su desarrollo. Así, mientras que los adolescentes tratan por definirse, pueden encontrarse con una sistemática tendencia que los descalifica, manteniendo los padres la autoridad mediante la crítica y el rechazo de los comportamientos de los hijos. El factor principal con el que se enfrentan es con el de la descalificación.

Sucede que los padres, en un afán de mantener su autoridad ante los adolescentes, los critican y rechazan el comportamiento de sus hijos. El hijo tenderá a repetir conductas infelices como estilo de vida. Precisamente, el no ser aceptado como se es, origina un grave menoscabo a procesos fundamentales, como la confianza, la seguridad, la concentración y la autoestima. No hay rechazo en realidad, ni algún tipo de reconocimiento. Por el estudio, lo que existe es una total indiferencia que hace sentir al otro inexistente, como lo afirma Giuseppe Amara (1993).

Si bien se piensa que los padres han perdido el control en la educación de los hijos, se ha observado que ambos llegan a una tregua para tener paz en el hogar (Batllori, 1993). Tanto padres como hijos desean encontrar el equilibrio y buscan con ansiedad definir parámetros sobre qué es la libertad y qué permisividad, pero la comunicación se rompe y se presenta el conflicto sin hallar solución a esta definición tan necesaria. Estas mismas personas tienen algo en común: ambos desconocen los caminos a seguir y buscan con ansiedad aquellos que los lleven a un nuevo equilibrio entre la libertad y la permisividad.

Es aquí cuando hay que hablar de los medios masivos de comunicación y la influencia que tienen sobre la familia, indiscutiblemente. Hay mayor variedad de consulta de temas que hasta hace treinta años era casi imposible informarse. La información en los medios de comunicación se ha convertido en una verdadera escuela en el cambio del proceso psicosocial, de la cual se llega a la gran necesidad de educar a los padres, en relación a la adolescencia.

La función de los padres como modelos se amplía durante el periodo de la adolescencia, por tres razones: 1) los adolescentes observan y analizan mejor que los niños el comportamiento de los padres; 2) los adolescentes son más eficaces en la integración a sus vidas de la conducta que les presentan los modelos; 3) los adolescentes adoptan una actitud más crítica frente a los modelos que ellos deben o quieren seguir. Todo lo que aparentemente es negativo en el seno familiar se resume en que estos comportamientos responden a una fase de desarrollo que tiene como propósito dar paso a su personalidad a través de las diferentes etapas desde la niñez –organización–, pasando por etapa de la adolescencia -desorganización-, terminando en la etapa adulta –reorganización-. El adolescente necesita rehacer su personalidad, tener que librarse de los lazos que durante la infancia lo unieron con los padres, establecer vínculos con sus iguales y encontrar finalmente su identidad, en la manera en la que la afirma Erik Erikson (1981), como un sentimiento vigorizante y subjetivo de mismidad y continuidad, que se manifiesta en la vida cotidiana cuando los adolescentes reclaman: ¡quiero ser yo! ¡Quiero vivir mi vida!, expresando así la intensidad de su necesidad de pertenecerse a sí mismos, de alcanzar un sentido de autonomía y de tomar sus propias decisiones. Aunque institucionalmente no se haya podido dar respuesta al reto que le plantean sus fines últimos de ***proporcionar una formación para la vida***, pues al no recibir en su proceso educativo los elementos suficientes para construir un adecuado auto concepto, difícilmente el adolescente podrá definir, desde el bachillerato, las capacidades, intereses, habilidades, motivos y valores que posee o los requiere cultivar para alcanzar una ***identidad*** personal y profesional (Merino, 1993).

3.2. Perfil Didáctico

El constructivismo es el ambiente donde se trata de presentar la importancia que tienen los métodos numéricos en el aula, como una propuesta para trabajar un tema cuyas dificultades se han presentado a lo largo de la vida escolar. Es una posición compartida por diferentes tendencias de la investigación psicológica y educativa. Entre ellas se encuentran las teorías de Jean Piaget, Lev Vygotsky, David Ausubel, Jerome Bruner, y a pesar de que ninguno de ellos se consideró constructivista sus ideas y propuestas ilustran las ideas de esta corriente.

Puede decirse que transmite la idea de que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como los afectivos, no es un mero producto del ambiente, ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores y la educación (Cruz, 2000).

Lo anterior significa que el conocimiento no es copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. Así, tiene sentido hablar que para que esto se cumpla es necesario contar con los esquemas que el sujeto ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea.

No cabe duda la importancia de Jean Piaget con su enfoque constructivista, por el impacto que ha tenido su teoría en el desarrollo, principalmente, de la psicología evolutiva del siglo XX y debido a que en su teoría abarca uno de sus principios fundamentales: el constructivismo.

El autor considera necesario mostrar el papel fundamental de Piaget en la explicación de este trabajo ya que él es creador de un sistema teórico completo y complejo, que pretende dar cuenta de prácticamente todas las facetas del desarrollo cognitivo humano. Dicho sistema teórico, asentado en sólidas suposiciones filosóficas, contrasta con la multiplicidad de mini-teorías o modelos que pretenden explicar únicamente dominios muy concretos de comportamiento que caracteriza el estado de la psicología evolutiva actual. Esa es la importancia de Piaget.

Dos son los conceptos fundamentales de la obra de Piaget que pueden tomarse para explicar la idea principal de este trabajo: asimilación y acomodación. Son conceptos clave para entender cómo los alumnos en esta etapa pueden construir el conocimiento. De esta manera, la construcción de unas estructuras de conocimiento cada vez más adaptadas tiene lugar gracias a estos dos conceptos.

Se puede mencionar (Hernandez, 1998), de acuerdo a la teoría piagetiana, que la asimilación es la integración de elementos exteriores a estructuras en evolución o ya acabadas de un organismo, por lo que el ser humano se enfrenta o encara al mundo con los conocimientos construidos hasta ese momento, los utiliza para atribuir significado, para comprender los objetos, la realidad y, por tanto, cada comportamiento supone asimilar el objeto de la actividad a las estructuras previas de conocimiento (lo que Piaget denomina ***esquemas***) utilizadas para darle sentido.

Sin embargo, si sólo hay asimilación en el desarrollo, no habría variaciones en las estructuras mentales del ser humano. Es necesaria porque asegura la continuidad de las estructuras y la integración de elementos nuevos a esas estructuras, aunque necesita un elemento que permita el cambio a alguno de los esquemas, adoptándolo a las características de la situación. Si el conocimiento se cimentara sólo en la asimilación se viviría en un mundo de fantasías, las cosas no serían sino lo que la persona quisiera o pretendiera fueran. Es por esta razón por la cual si los esquemas utilizados son insuficientes para asimilar una situación determinada, se ve en la necesidad de modificar esquemas, como se mencionaba en el párrafo anterior. Piaget llama acomodación a cualquier modificación causada por los elementos que se asimilen. De igual forma, la adquisición de nuevos conceptos, en la última etapa de desarrollo cognitivo, por modificación de otros conceptos anteriores, es un claro ejemplo de acomodación. Y es, de acuerdo a esto último, que los objetos ofrecen cierta resistencia a ser conocidos por estructuras ya conocidas (asimilados), por lo que el sujeto ha de modificar (acomodar) sus estructuras de conocimiento para que puedan también dar cuenta de los nuevos objetos. Aquí es donde se puede relacionar el desarrollo de este trabajo con la teoría de Piaget.

Por otra parte, la adaptación cognitiva consiste en un equilibrio entre asimilación y acomodación: no hay acomodación sin asimilación y viceversa. El sujeto parte de una estructura previa asimiladora, pero cada vez que el sujeto asimila algo, este produce ciertas modificaciones en el esquema asimilador. A su vez, el sujeto sólo es capaz de realizar acomodaciones dentro de ciertos límites impuestos por la necesidad de preservar en cierta medida la estructura asimiladora previa.

El conocimiento resulta de la interacción entre sujeto y objeto: el origen del conocimiento no radica en los objetos, ni en el sujeto, sino en la interacción de ambos. Para Piaget, la objetividad no es un a priori, más bien algo que se logra y construye a lo largo del desarrollo (refiriéndose principalmente al niño). El objeto es conocido por aproximaciones sucesivas, exige una elaboración por medio del sujeto. Y precisamente la construcción de unas estructuras de conocimiento cada vez más adaptadas tiene lugar a esos dos conceptos mencionados anteriormente: asimilación y acomodación.

Por otro lado, el autor considera importante señalar estos aspectos de la teoría piagetiana, agregando una tesis fundamental de su teoría, la cual se refiere a que todo conocimiento y desarrollo cognitivo es producto de la actividad constructiva del sujeto, una actividad que es tanto física como intelectual. El proceso de construcción de conocimientos a partir de la propia actividad tiene una serie de propiedades que las hace especialmente deseable desde un punto de vista educativo (Hernandez, 1998):

- Se logra aprendizaje con comprensión.
- El aprendizaje puede ser transferido o generalizado a otras situaciones o contextos, lo cual hace que sean duraderos en el tiempo.
- Como un aspecto actitudinal, el alumno se siente capaz de producir conocimientos valiosos por sí mismos si

recorre todo el proceso de construcción, lo cual potencia posteriores esfuerzos.

El énfasis en la actividad dentro de la teoría de Piaget es lo que vino a potenciar los métodos de enseñanza activa durante el primer tercio del siglo XX. El marco teórico de Piaget dotó a la enseñanza de fundamentos conceptuales de los que carecía ésta y ha sido fuente de numerosas sugerencias para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, la importancia que adquieren los errores dentro del proceso de aprendizaje.

El trabajo en sí tiene como base el constructivismo explicado bajo la teoría Ausubeliana (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983). En sentido estricto, las concepciones de Ausubel no pueden llamarse o considerarse constructivistas (Bustos, 2002), ya que para la Teoría del Aprendizaje Significativo el individuo no construye sino que asimila conceptos del mundo exterior. La importancia radica en el hecho de insistir en los conceptos y conocimientos previos como una herramienta utilizada para entender su teoría como constructivista, dando paso a otras investigaciones.

Es a partir de la concepción de Novak, quien ha intentado forzar la Teoría del Aprendizaje Significativo hacia una visión constructivista, iniciando por el cambio de nombre de la teoría inicial llamada Teoría de la Asimilación, más tarde como Teoría del Aprendizaje Receptivo Significativo y posteriormente como Teoría del Aprendizaje Significativo.

De esta manera, el tema propuesto con los métodos numéricos de una u otra forma ya es tema conocido por el alumno, esto es, no parte de cero, con lo que también se cumple una de las condiciones sobre lo que Ausubel también menciona: los conocimientos previos (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983).

Una situación muy importante respecto al éxito en la educación se refiere al hecho de que el ambiente no es determinante, según los estudios de los especialistas en las diferentes disciplinas, porque el ser humano en verdad que es libre, tiene esa libertad de ejercer en sus acciones. Pero tampoco la herencia ya que todos los seres humanos nacemos con las mismas facultades, con la misma predisposición para el aprendizaje, por lo que no determina la personalidad de los sujetos, al igual que el ambiente.

En educación hay tantos constructivismos como teorías psicológicas del desarrollo y del aprendizaje. Por esa razón se tiene a tantos autores. De esta manera, podemos distinguir entre el constructivismo inspirado en la teoría genética de Piaget y la escuela de Ginebra; la teoría del aprendizaje verbal significativo y de los organizadores previos, representada por los trabajos de Ausubel; el constructivismo inspirado en las teorías cognitivas del procesamiento humano de la información; y, por último, el constructivismo que se deriva de la teoría sociocultural del desarrollo del aprendizaje iniciada por Vygotsky. Por lo que el enfoque constructivista de la enseñanza y el aprendizaje no menosprecia la psicogenética de Piaget, donde, por ejemplo, se difiere un poco en lo referente a sus investigaciones donde afirmaba que se puede intervenir para acelerar el curso del desarrollo de las estructuras cognitivas, para así fomentar, mediante un acción pedagógica adecuada, una maduración más precoz. Y también se incorpora las aportaciones de Vygotsky con sus afirmaciones en el sentido de que los individuos aprenden unos de otros e inclusive refiere la posibilidad de que el aprendizaje remolque el desarrollo de los sujetos en contraposición a lo establecido por Piaget (Cruz, 2000), en el sentido de que no puede haber aprendizaje cuando los sujetos no se encuentran en determinado estado de desarrollo.

Coincidiendo con Zubiría (2001), las ideas constructivistas de este enfoque se acrecientan a partir de Novak, cuando cambia su concepción de los criterios para seleccionar los principales contenidos a ser trabajados en la escuela; el currículo debería partir de la determinación de los conceptos de mayor peso hacia investigaciones sobre ideas previas con las que llegan al aula niños y jóvenes, convirtiéndose de esta forma la teoría ausbeliana, propiamente pedagógica, a una visión fundamentalmente didáctica. Esto último tiene como ventaja tener una herramienta de trabajo en el salón de clase.

Ausubel trata de explicar el cómo se aprende y el cómo se olvida; el lugar ocupado por la comprensión en este proceso; el papel de la práctica y las variables del aprendizaje. De esta manera, un punto central de las ideas de Ausubel radica en el hecho de haber abordado los tópicos anteriores en un ambiente escolar, lo cual implica considerar su teoría como del aprendizaje propiamente educativo, marcando una gran diferencia entre enseñar y aprender. Su Teoría del Aprendizaje Significativo, por lo tanto, tiene esta connotación cuando los nuevos conocimientos se vinculen de manera clara y estable con los conocimientos previos de los cuales dispone el individuo.

Por otra parte, si bien es cierto que en la escuela se encuentra un currículo que aplica el estado y que el constructivismo no desconoce, tal currículo tiene dimensiones antropológicas, psicológicas, sociales, culturales, que estudian diversas disciplinas como la sociología, por ejemplo, entre otras. Por esta razón, el constructivismo trata de obtener una comprensión cada vez más amplia de la educación apropiándose no sólo de las aportaciones de la psicología, sino también de los descubrimientos y principios teórico-metodológicos de diversas disciplinas.

En cuanto a los conocimientos previos, como postulan Ausubel, Novak, y Hanesian (1983) sobre la posibilidad de que algún alumno careciera de conocimientos previos sobre determinado tema. En realidad, y considerando el nivel escolar de los alumnos de bachillerato, aunque también la edad matemática, no es posible encontrarse casos donde se carezca de dichos conocimientos; siempre habrá alguno. Sin embargo, se cree que el conocimiento previo en realidad es un obstáculo epistemológico tal vez porque en matemáticas se tenga que recurrir a los cambios de registro de representación. Aunque resulta importante distinguir entre lo que sería un conocimiento incompleto de lo que sería un impedimento para incorporar el nuevo.

En este último punto y de acuerdo a los trabajos de algunos investigadores mexicanos mencionados en el trabajo de Gustavo Martínez (2005), los saberes matemáticos son un bien cultural y son producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir su realidad, tanto natural como social.

Se trabaja con la hipótesis del origen social del conocimiento, asumiendo que los procesos de construcción y de creación humana son procesos de síntesis o integración de los objetos y herramientas culturales presentes en una sociedad o un grupo específico, lo que significa el proceso de interrelación de algunas partes para conformar un todo. Una propiedad ***emergente*** sería aquella presente en el todo y no presente en las partes, por ejemplo. Bajo esta perspectiva, los conocimientos nuevos serían aquellos que surgen emergentes en los procesos de síntesis de viejos conocimientos. Y de una u otra forma esto significa que el dominio del ***álgebra elemental*** es un campo de cultivo para la puesta en juego de prácticas que recuperen rasgos esenciales del quehacer matemático como lo son el tratamiento con lo general, la exploración, formulación y validación de conjeturas sobre propiedades numéricas, la verdad de una afirmación sustentada en argumentaciones deductivas, la coordinación entre diferentes registros de representación ***semiótica***, entre otros (Papini, 2003). Y tal vez sea Brousseau, quien es citado en (Papini, 2003), quien mejor aclara el por qué las explicaciones psicológicas no son suficientes para interpretar las intervenciones del alumno en situaciones de clase, dado que muchas de sus intervenciones obedecen a condicionamientos institucionales, no necesariamente ligados a las resistencias opuestas por el objeto de conocimiento.

Jeremy Kilpatrick (1990) en su artículo nos invita a reflexionar sobre lo que el constructivismo puede representar para las matemáticas, partiendo del impacto que tiene en el pensamiento y actividades de los educadores matemáticos, debido principalmente a la visión que se tiene de las matemáticas y de su aprendizaje.

Primero, parece que se tiene alguna dificultad en adoptar un lenguaje, así como el poder negociar, entre profesores y alumnos, sobre los términos que se utilizarán en clase. En este caso, el constructivismo evita la pretensión de que exista un mundo independiente de fuera, que puede ser conocido por el conocimiento subjetivo. Esta cancelación o anulación conduce a algunos educadores de matemáticas a rechazar la palabra ***descubrir*** en favor de ***construir*** cuando se refieren a la génesis de las ideas matemáticas.

Ernst von Glasersfeld, mencionado por Kilpatrick (1990), quien a través de sus escritos y su trabajo con algunos colegas y compañeros, argumentó en favor de una teoría moldeada tanto por experiencia organizativa como por el trato con un mundo real que no puede ser conocido en sí mismo, es considerado uno de los máximos exponentes del constructivismo en Norteamérica. Se considera que su teoría ofrece la más coherente y elaborada base para un análisis inicial para comprender lo que es el constructivismo.

La visión del constructivismo que aquí se abordará y fundamenta esta propuesta incluye dos principios:

1. El conocimiento es constructivamente activado por el conocimiento subjetivo, no recibido pasivamente por el medio ambiente.

2. Llegar a saber es un proceso adaptativo que organiza un mundo experimental, no descubierto e independiente. Un mundo preexistente fuera de la mente del conocedor.

La visión de Ernst von Glasersfeld con sus comentarios hace alusión a que el primer principio es de una aceptación mucho más amplia que el segundo por la gente que piensa en sí misma como constructivista. El segundo principio es el bloqueo erróneo para mucha gente, dice Glasersfeld, porque se separa del constructivismo radical, que es la base en la que se asientan ambos principios y consiste en rechazar el realismo físico donde descansan muchos restos empiricistas, lo cual implica romper con la posibilidad de conocer el mundo tal como es y abandonar nuestra búsqueda por un auténtico objetivo.

Los constructivistas necesitan poner a través, y deletrear claramente, que ellos tuvieron alejadas las relaciones entre constructivismo y matemáticas, como una disciplina, y matemáticas como un sujeto escolar. Los fundamentos de las matemáticas no presentan un problema para el constructivismo como la práctica de las matemáticas. El constructivismo necesita ir hacia términos con un realismo matemático. Por otra parte, el constructivismo necesita dirigir sus derechos hacia un nuevo acercamiento de la filosofía de las matemáticas, cuasi-empiricismo, que estudie la práctica de matemáticas en un contexto socio-histórico y que aparezca compatible con las matemáticas realistas y constructivistas.

Es posible escuchar que la matemática es una disciplina humanística. Si realmente es una disciplina humanística, entonces quizás el constructivismo radical puede encontrar una voz para hablar todo sobre humanística y no todo se verá justamente como lo más abstracto y subjetivo.

CAPÍTULO 4. PROPUESTA METODOLÓGICA Y VALIDACIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA

En principio el propósito de este estudio es explorar hasta qué punto el manejo de un método numérico es importante cuando al resolver un problema real sobre volúmenes (Rechimont & Ascheri, 2003) permite la comprensión, de entrada, de algunos aspectos fundamentales de la noción de función, en particular funciones polinomiales de grado mayor a dos. Asimismo, el manejo de las raíces de la ecuación cuando éstas no necesariamente son enteras (Ruiz, 2002), auxiliándose de una gráfica y tablas.

Para dicha tarea se elaboró material relacionado con los tópicos mencionados en el párrafo anterior, el cual se implementó ante un grupo de estudiantes de cuarto semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades. Antes de comenzar dicha implementación, se aplicó un examen diagnóstico (pre-test), diseñado con dos propósitos: como tal, servir como instrumento de evaluación de la comprensión, comparándose con la segunda actividad, denominada ***Volúmenes y la aproximación*** (la cual se puede consultar en los anexos), una vez concluida la puesta en práctica de la misma, tratando de evaluar el grado en que se consigue el desarrollo de comprensiones profundas sobre los conceptos de interés; como segundo propósito, brindar información sobre los conocimientos previos de los alumnos, en base a Ausubel (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983), quien expone sobre la importancia de la significatividad del aprendizaje logrado cuando la nueva información pone en movimiento y relación conceptos ya existentes en la mente del que aprende, o sea, conceptos inclusivos o inclusores. Además, la importancia de la existencia de la actitud para el aprendizaje significativo, dice Ausubel, lo cual se traduce a la disposición por parte del alumno para relacionar una tarea de aprendizaje sustancial y no arbitraria, con los aspectos relevantes de su propia estructura cognitiva.

4.1. La población

El material se implementó ante un grupo de estudiantes de cuarto semestre del bachillerato de la UNAM (Colegio de Ciencias y Humanidades), turno vespertino. Se contó con la presencia de 20 estudiantes cuyas edades fluctúan los 15 y 17 años, siendo un grupo ordinario, esto significa, un grupo en un curso regular de dicho semestre; trabajando con ellos utilizando el currículum usual de la asignatura Matemáticas IV, contemplado en los Programas de Estudio Actualizados del Colegio.

Se contó con dos sesiones de 120 minutos cada una para llevar a cabo las actividades. Los materiales presentados se denominan:

1. Examen diagnóstico.
2. Volúmenes y la aproximación.
3. Interpolación lineal. Métodos numéricos.

4.2. Sesión 1.

Se explicó el objetivo de las dos sesiones y la forma en que se iba a trabajar. De igual forma, se aplicó el examen diagnóstico, contando para esta tarea un tiempo aproximado de entre 30 y 40 minutos.

Al término de esta primera actividad se tomó un tiempo de 5 a 10 minutos para contestar las dudas respecto a los términos presentados. Esta primera prueba resultó de gran importancia para poder conducir de manera adecuada la práctica acerca de métodos numéricos. A continuación se aplicó el segundo material ***Volumen y la aproximación.***

Se hace el análisis del examen diagnóstico por reactivo. Al final se muestra la parte cualitativa de esta primera actividad.

Reactivo 1.

Se ha observado una gran mayoría de alumnos con una idea del significado del término variable y lo relacionan con letras. Saben que se utilizan letras, aunque la mayoría no entiende y no puede diferenciar entre incógnita y variable. En general, definen variable como letras que pueden representar números en una ecuación cuando en realidad deben manejarse en funciones. Tampoco tienen una idea clara de intervalo, es decir, los alumnos no consideran la existencia de un conjunto infinito de valores para asignar a la variable en la función.

Reactivo 2.

En un solo caso se menciona la existencia de la relación entre variables, dice un alumno, considerando su idea como la relación entre los elementos de dos conjuntos. Una gran mayoría tiene idea del concepto de función como una fórmula. De igual manera, algunas personas consideran esa fórmula como responsable de un comportamiento y, además, sirve para hacer una gráfica o una tabla, haciendo alusión a los registros de representación, considerando el hecho que de cualquier manera el ***apropiarse*** de un concepto (independientemente de lo que eso signifique) siempre requiere algo más que ***nombrarlo***

(D'Amore, 2004), (Guzmán, 1998). En pocos casos relacionan ecuación con función pero como se tiene $f(x)$ dicen los alumnos "que hay que sacar el valor, en relación con $f(x)$" (sustitución).

Reactivo 3.

En principio, en algunos casos tienen la idea de una igualdad. En otros casos, confunden con una función el concepto de ecuación, aunque saben que tienen que realizar operaciones. Al confundir estos términos, siguen utilizando la expresión "***variable***" para una ecuación.

Reactivo 4.

Una gran mayoría sabe del manejo de exponentes de grado 2 y 3 en la expresión. El problema principal encontrado se refiere a dónde debe colocarse el exponente. La gran mayoría sabe que la variable x es la que lleva el exponente. Lo importante es escribir ejemplos de manera correcta en funciones cuadráticas y cúbicas.

Reactivo 5.

Una gran cantidad de los alumnos sabe de la sustitución de la incógnita x por valores. De hecho, se dan casos donde se comenta el lugar ocupado por un número en lugar de x. El encontrar el valor de las incógnitas es la respuesta que sólo algunos mencionaron. Hubo casos donde no contestaron.

Reactivo 6.

En algunos casos no contestaron y quienes lo hicieron se basaban en el hecho de que las cuadráticas se resuelven con la fórmula general. Se menciona la calculadora como medio para resolver ecuaciones, con la función EQN. Las personas que contestaron con fórmula general mencionan también las de tercer grado, pensando su resolución de igual forma que una cuadrática, eso es, con una fórmula, desconociendo la complejidad del manejo de una fórmula general para resolver las ecuaciones de tercer grado.

Reactivo 7.

En muy pocos casos se menciona la característica de la función: si hay exponentes; los términos que aparecen, en general. Muchos mencionan las tablas como punto de partida a la graficación, una vez sustituida la variable independiente en la función, por valores. Algunos alumnos hablan de parejas ordenadas como los puntos obtenidos. Un caso donde se especifica el uso de calculadora, lápiz, función, tabla, plano cartesiano.

Reactivo 8.

Prácticamente todo el grupo logró completar la tabla para cada función; esto se logró porque el profesor titular había enseñado a utilizar la función que obtiene tablas, en la calculadora. El error encontrado fue el caso de alumnos que aún no se dan cuenta del hecho de hacer la sustitución en *f(x)*, es decir, cambiar *x* por alguno de los valores y evaluar.

Reactivo 9.

Al igual que el reactivo anterior, todos resolvieron la ecuación $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ auxiliándose de la calculadora. Sólo algunos recurrieron al conocimiento de su clase con el profesor titular: la división sintética y la factorización. En general se observó un gusto por el uso de la calculadora.

Reactivos 10 al 15.

Estos reactivos se refieren básicamente a geometría euclidiana, en particular congruencia y semejanza de triángulos. Prácticamente todos no contestaron los reactivos 14 y 15 en relación a los criterios de congruencia y semejanza, aunque en realidad tienen noción de la diferencia entre estos dos términos, afirmando que para ser congruentes dos figuras geométricas ambas deben ser del mismo tamaño y tener la misma forma, mientras que para ser semejantes deben ser de diferentes tamaños, aunque la misma forma. Este tipo de respuesta fue más común en los reactivos 12 y 13. Sólo tres alumnos no contestaron los seis reactivos tratados en este apartado. Precisamente en estos seis reactivos a los alumnos se les proporcionó una hoja con los criterios de semejanza estudiados en la asignatura matemáticas II; los criterios se refieren a segmentos proporcionales, triángulos semejantes y el teorema fundamental de proporcionalidad.

4.2.1. Análisis del examen diagnóstico

Para el análisis de este examen se toma en cuenta sólo la información para identificar qué tanto han recordado los temas utilizados en cursos anteriores, en particular, matemáticas I y matemáticas II y observar el impacto de situaciones que el autor supone como manejadas con métodos exactos, como son las soluciones de ecuaciones de segundo grado (Guzmán, 1998), (Ruiz, 2002), (D'Amore, 2004). De igual forma, al incluir en las sesiones el manejo de la calculadora, se hace alusión a una herramienta auxiliar en las respuestas al examen, situación que facilitó al autor, en parte, el trabajo para evaluar este examen. El análisis de las respuestas de los estudiantes, registradas en los materiales que les fueron proporcionados –los cuales quedaron en poder del autor-, así como las propias notas que el propio autor tomaba en su bitácora de clase, han servido indiscutiblemente como apoyo al instrumento de evaluación de la comprensión (De la Rosa, 2001).

El instrumento se presenta, tal y como lo recibieron los alumnos para ser contestado por ellos, en el anexo. Las habilidades y conocimientos que se evalúan en cada uno de los reactivos que lo constituyen se especifican en la tabla 1, a continuación.

Tabla 1. Habilidades y conocimientos evaluados por reactivo

Habilidades/Conocimientos	**Reactivo**
Conceptos básicos: variable, función, ecuación.	1
	2
	3
Identificación de elementos de $y = ax^2 + bx + c$ y $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	4
Identificación de elementos de una ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ y $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Resolución.	5
	6
	9
Conocimiento del plano cartesiano. Elementos para graficar. Manejo de tablas y ubicación de puntos en el plano.	7
	8a-8c
Conocimiento de figuras geométricas. Clasificación de triángulos.	10
	11
Conocimiento de figuras geométricas. Congruencia y semejanza.	12
	13
Conocimiento de figuras geométricas. Criterios de congruencia y semejanza.	14
	15

En el análisis se han considerado datos de naturaleza primordialmente cualitativa y se espera obtener simplemente una mejoría en el manejo de los términos preguntados. Por ejemplo, para métodos numéricos es importante que recuerden sólo un criterio de semejanza, por lo que sí es importante señalar que prácticamente todo el grupo lo había olvidado.

Principalmente es necesario señalar los lineamientos seguidos para la comprensión de funciones y ecuaciones. Qué importante ha sido que se reconozcan las comprensiones de los alumnos hacia las funciones y ecuaciones, contando sus diferencias estructurales y de operación, hasta las posibles conexiones entre diversas representaciones y perspectivas de estos elementos matemáticos (NCTM, 2000), (D'Amore, 2004), (Guzmán, 1998) (Rechimont & Ascheri, 2003).

El instrumento de evaluación de la comprensión constó de 15 reactivos seleccionados en base a las sugerencias de materiales pertinentes a instrumentos de medición (Hernández, Roberto; Fernández, Carlos; Baptista, María, 2010).

Los resultados obtenidos en la aplicación de instrumento son mostrados en la gráfica 1, la cual especifica el número de respuestas ***correctas*** (la mayoría de los reactivos permitía respuestas abiertas y en muchos casos no se puede hablar de una respuesta absolutamente ***correcta*** o ***incorrecta***) para cada reactivo. La prueba, se recuerda, se aplicó a 20 alumnos, de tal forma que 20 es el número máximo de respuestas correctas que un reactivo hubiera podido registrar. Sólo hay que hacer notar la desaparición de los reactivos 8a, 8b y 8c porque todos contestaron con ayuda de la calculadora, por lo que se considera un solo punto y corresponde a 20 aciertos.

Gráfica 1.

Del eje horizontal, las etiquetas corresponden a los aspectos evaluados en cada reactivo y se utilizaron para la construcción de la gráfica. Se presentan a continuación en la siguiente tabla:

Tabla 2.

Reactivo	Aspectos evaluados
1	Dar una idea lo más aceptadamente posible del significado del término "variable", en matemáticas.
2	Dar una idea lo más aceptadamente posible del significado del término "función", en matemáticas.
3	Dar una idea lo más aceptadamente posible del significado del término "ecuación", en matemáticas.
4	Identificar la relación entre la expresión funcional polinomial y el grado máximo en la variable.

5	Identificar la relación entre la expresión matemática y el grado máximo de la incógnita, en la igualdad.
6	Especificar la herramienta matemática a utilizar en la resolución de la ecuación.
7	Orientación espacial. Situar puntos en el plano a través de tablas construidas. Deducir y analizar el tipo de función.
8ª	Manipular, explorar e interpretar tablas para las expresiones matemáticas funcionales y deducir el tipo de función de manera verbal.
8b	Manipular, explorar e interpretar tablas para las expresiones matemáticas funcionales y deducir el tipo de función de manera verbal.
8c	Manipular, explorar e interpretar tablas para las expresiones matemáticas funcionales y deducir el tipo de función de manera verbal.
9	Manipular. Explorar la expresión matemática y deducir el método a utilizar para resolver la ecuación.
10	Identificar los nombres de triángulos por sus ángulos.
11	Identificar los nombres de triángulos por sus lados
12	Comprender. Dar una idea lo más aceptadamente posible del significado del término "congruencia", en matemáticas y su generalización a triángulos.
13	Comprender. Dar una idea lo más aceptadamente posible del significado del término "semejanza", en matemáticas y su generalización a triángulos.
14	Mencionar por lo menos un criterio de congruencia.
15	Mencionar por lo menos un criterio de semejanza.

De acuerdo a la gráfica 1, siendo el examen diagnóstico el antecedente para trabajar con la práctica de métodos numéricos, se observa un bajo desempeño en los últimos 6 reactivos, lo cual significa que los conocimientos previos no han sido debidamente aprendidos por los alumnos, lo cual no afectará en lo absoluto en el desempeño de las siguientes dos tareas. Al final de la sesión del examen el autor le proporcionó a los alumnos una hoja con los teoremas de congruencia y semejanza posiblemente utilizados en las siguientes actividades.

Por otro lado, los estudiantes se desempeñaron de mejor manera en el aspecto de resolver ecuaciones, identificar los elementos de ecuaciones y los de funciones, aunque algunos confunden aun los términos variable e incógnita y los manejan indistintamente cuando hablan de funciones y de ecuaciones, reactivos 1 a 3, situación que se estuvo constantemente aclarando durante las sesiones. Esta parte corresponde a los reactivos 4 al 10.

Aunque el trabajo en este examen diagnóstico se pensó fuera contestado de manera individual, los alumnos se comunicaban, ayudaban y facilitaban la comprensión de sus compañeros, situación que permitió trabajar de manera efectiva en las siguientes prácticas.

En general, han identificado bien una función y sus características, debido a la constante aclaración en la sesión tanto del autor como del profesor titular del grupo. Además, es un tema visto por ellos y para cuando se aplicó el examen diagnóstico lo recordaron de una manera mucho más rápida. El problema se presentó con las ecuaciones, aunque en general tienen la idea de función en base a tablas, al darle valores a la variable independiente e identifican con letras. El autor manifiesta su sorpresa cuando observa que hay alumnos que confunden una ecuación con una función y tal vez esto pueda resolverse al utilizar una calculadora (De la Rosa, 2001), principalmente para los reactivos 8 y 9.

4.2.2. Análisis de la actividad *Volumen y la aproximación*

Al trabajar por parejas los alumnos se sienten más atraídos por el trabajo exploratorio, debido a la comunicación entre ellos y porque ya saben utilizar una herramienta importante como lo es la calculadora.

En esta segunda actividad, de esta sesión 1, se comenta propiamente el manejo de métodos numéricos. El objetivo es priorizar el estudio de métodos aproximados en lugar de los mal llamados métodos exactos, con la finalidad de preparar mejor al estudiante y formándole la idea de que no por ser aproximada una solución el método que la produjo es malo, sino que es la precisión con que se obtenga dicha solución lo más importante. De esta manera, aprovechando que los alumnos ya han trabajado con funciones (unidad 1) se trató de manejar principalmente lo que ellos ya conocían. Esto significa agregar sólo el manejo de la calculadora.

En esta sesión 1 se resolvió, con el método visto con su profesor, el problema de encontrar las medidas de los lados de una caja que se va a construir con ciertas características (Rechimont & Ascheri, 2003), las cuales se especifican en los anexos.

De nueva cuenta, los alumnos en su mayoría logran obtener la expresión matemática para representar el problema. Se observan ciertas dificultades para hacer operaciones con binomios y obtener la ecuación de la caja, siendo ésta $x^3+8x^2-20x-957=0$. Los alumnos construyen su tabla, situación que, de acuerdo al plan de estudios del Colegio, ya no deberían hacer, puesto que se pretende que el alumno obtenga conclusiones sobre el comportamiento de las funciones estudiadas y es capaz de distinguir el tipo de variación que las caracteriza, además de avanzar en el desarrollo de habilidades ya que el alumno trabaja con conceptos de mayor abstracción, estableciendo generalizaciones, obteniendo modelos algebraicos y analizar comportamientos. Al parecer esto es una cuestión que a algunos alumnos se les dificulta.

Una vez obtenida la tabla y al observar que, al aplicar división sintética para encontrar raíces, el alumno se encuentra con la dificultad de encontrar residuos diferentes de cero, por lo que supone la no existencia de soluciones de la ecuación anterior; cabe aquí la crítica hacia los métodos exactos (Ruiz, 2002), (Rechimont & Ascheri, 2003). Es a partir de este momento donde entran los métodos aproximados y, propiamente dicho, la parte fundamental o el motivo de este trabajo.

Para esta actividad el autor tiene presente cuáles son los propósitos de la unidad 1 de matemáticas IV del Colegio. Por esta razón y aunque el tema de este trabajo no se encuentre dentro de la temática del plan de estudios, se considera una herramienta fundamental para la graficación de funciones el conocer los ceros o raíces de una ecuación, lo cual espera no rompa en lo absoluto con los enfoques de la materia; al contrario, el autor cree cumplir con el enfoque disciplinario de la materia cuando éste se refiere a la forma de enfocar los contenidos temáticos de los Programas de Matemáticas, además de presentarlos y trabajarlos (Comisión de Revisión y

Ajuste del Sentido y Orientación del Área de Matemáticas, 2006). Además, en el enfoque didáctico se pretende promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos, cuidando que estos surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, y se sistematicen y complementen finalmente, con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos.

La propuesta didáctica se ha basado, se recuerda, en la Teoría del Aprendizaje Significativo de Ausubel (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983), al mencionar la característica más importante de éste, siendo la interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones, de tal modo que estas adquieren significado y son integradas a las estructuras cognitivas de manera no arbitraria y sustancial, favoreciendo la diferenciación, evolución y estabilidad de los conocimientos previos y, consecuentemente, de toda la estructura cognitiva, dice Ausubel. De igual forma, para este autor, la resolución de problemas es la forma de actividad o pensamiento dirigido en los que, tanto la representación cognoscitiva de la experiencia previa como los componentes de una situación problemática actual, son reorganizados, transformados o recombinados para lograr un objetivo diseñado; involucra la generación de estrategias que trasciende la mera aplicación de principios. Los problemas matemáticos entrañan un no saber, o bien una incompatibilidad entre dos ideas que se transforman en un obstáculo que se necesita atravesar. La solución de problemas tiene valor porque cultiva procedimientos, métodos y heurísticas que son valiosas para la escuela y la vida (Aebli, 1995).

Al analizar las respuestas de los estudiantes en base a los incisos de la actividad se puede observar que al realizar el bosquejo de la gráfica relacionada con la expresión obtenida muchos dejaron de lado las recomendaciones dadas con anterioridad dadas por el profesor titular: los alumnos saben que el número de cortes con el eje x es máximo tres, aunque no saben dónde están esos cortes, por lo que se les pregunta cómo obtener esos valores.

Muchos alumnos, un 80% de los 20 alumnos, mínimo, logró captar la pregunta formulada por el autor en el sentido de observar e indicar lo visto en la tabla construida en un principio: "el cambio de signo" de algunos valores en y. Este es el punto de partida para trabajar con números irracionales en a obtención de raíces de la ecuación.

Otra vez los alumnos hacen uso de la calculadora para obtener las raíces. El profesor titular del grupo les ha enseñado a usar la función que obtiene raíces de ecuaciones de segundo y tercer grado. A pesar de esta situación, de suma importancia según el autor, se pregunta a los estudiantes la manera de proceder a encontrar dichas raíces.

Una vez identificado en la tabla sólo un cambio de signo se menciona en el aula que posiblemente la raíz se encuentre entre los valores de $x=8$ y $x=9$. Esta respuesta se refiere al inciso c) de la actividad y, de manera grupal y verbal, se menciona la manera de obtener el valor buscado: se debería proceder a construir otra tabla, igual que la primera, empezando con el valor 8 y terminando con 9. A la pregunta ***¿cuáles deberían ser los valores para x?*** llegan a un acuerdo de utilizar sólo un valor decimal, esto es, empezar con 8, seguido de 8.1, 8.2, etc. Aquí, el manejo de la calculadora fue fundamental, considerando que ellos dejaran a un lado la obtención de las raíces con la función que habían aprendido a utilizar previamente. En la tabla 3 se muestra a lo que llegan los alumnos. Se muestra sólo una parte.

Tabla 3.

x	$F(x)$
8.0	-93
8.1	-62.67
8.2	-31.71
8.3	-0.093
8.4	32.184
. . .	. . .
9.0	240

Esta era la intención de trabajar en la actividad: los alumnos van obteniendo un procedimiento donde la aproximación al valor buscado se realiza por medio de evaluaciones de la función con diferentes valores, siempre y cuando se consideren los valores pertinentes. Al término de la construcción de la segunda tabla (tabla 3) se identifica de nueva cuenta el cambio (o los cambios) de signo, por lo que los alumnos deducen la construcción de una nueva tabla con las mismas características que la anterior, sólo que los valores van de 8.3 a 8.4, deduciendo también la introducción de un decimal más, o sea, las centésimas, como la tabla 4, mostrada a continuación.

Tabla 4.

x	$f(x)$
8.30	-0.093
8.31	3.1049
8.32	6.3095
. . .	. . .
8.38	25.431
8.39	28.926
8.40	32.184

Esto con la finalidad de recordar que el manejo de decimales es necesario en algunos casos reales y esto crea la idea de que no siempre se recurre a números enteros; desarrollar una comprensión más profunda de los números muy grandes y de los muy pequeños y de diversas maneras de representarlos (NCTM, 2000). De igual forma, es necesario que los alumnos sean capaces de decidir si un problema requiere una estimación, una aproximación con un determinado grado de precisión o una respuesta exacta.

Con esta actividad se termina la primera sesión, dejando para la segunda sesión, el camino para seguir utilizando esta herramienta y forma de manejar los números, aunque ya no necesariamente con tablas.

4.3. Sesión 2.

En relación a las sugerencias presentadas en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), a este nivel los alumnos deberían construir, sobre sus conocimientos previos, técnicas más variadas y complejas de resolución de problemas; aprender a usar una amplia serie de funciones definidas explícita y recursivamente, para modelar el mundo que les rodea. Además, deberían continuar desarrollando la habilidad en el uso de herramientas tecnológicas tales como hojas de cálculo, programas de sistemas algebraicos por computadora y utilidades gráficas que les permitan resolver problemas que requieran invertir mucho tiempo en cálculos a mano. La última actividad denominada ***Interpolación lineal. Métodos numéricos***, trata de mostrar esas facetas de los principios y estándares mencionados anteriormente y el papel que debería jugar la aproximación en la solución de problemas, en particular la resolución de ecuaciones.

Se sigue la línea propuesta por la literatura mencionada al principio del capítulo por ser textos que mencionan de una u otra forma el manejo de la aproximación y su importancia (Ruiz, 2002), (Chapra & Canale, 2007), (De Guzmán, 2007), (De la Rosa, 2001), (Rechimont & Ascheri, 2003) (Sanabria, 2007) y el aprendizaje significativo como elemento que caracteriza al constructivismo definido en la corriente relacionada con Ausubel (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983), (Cruz, 2000), (Gregorio, 2002).

4.3.1. Análisis de la actividad *Interpolación Lineal. Los métodos numéricos.*

La actividad se trabajó de nueva cuenta con 20 alumnos, los mismos que trabajaron en la sesión 1. El trabajar por parejas permitió conocer el punto de vista de cada uno de los integrantes y, si llegaban a un acuerdo, como grupo, al contestar cada uno de los tres reactivos propuestos en la actividad.

Los dos primeros reactivos tratan de un caso de ecuación no contextualizada con la finalidad de tratar la interpolación lineal como método de aproximación o método numérico a encontrar raíces. El tercer reactivo se refiere a resolver el problema de la caja, de la sesión 1, con el método visto.

Reactivo 1.

El generar una tabla de valores se trabajó en la sesión 1 y se considera fundamental debido al uso de la calculadora como herramienta que facilita el trabajo para los alumnos (De la Rosa, 2001). En este caso, prácticamente todo el grupo llegó a llenar la tabla con los valores $f(x)$. Se les presenta en la actividad a continuación una gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$ con la finalidad de familiarizarlos con los cortes en los ejes, en particular el eje horizontal. El hecho de que todos logren contestar este reactivo se debe al conocimiento que tienen los alumnos de la calculadora; el profesor les había enseñado a manejar la forma "TABLE", la cual proporciona los valores de la función para los valores de x. En particular, el modelo utilizado es fx-991ES de la marca CASIO, siguiendo el principio tecnológico en los Estándares y Principios (NCTM, 2000).

Reactivo 2.

Al identificar los ceros o raíces o soluciones de la ecuación $f(x)=0$ se pretende identificar aquellos intervalos donde cruzará el eje x la gráfica. Los alumnos lo entienden así sólo por el hecho de saber que los puntos por donde pasa la gráfica son números enteros (Guzmán, 1998). La identificación de estos se da textual en palabras. Algunos encierran los cuadros donde hay cambios de signo en $f(x)$, tal como lo hicieron en la sesión 1. Una gran mayoría identifica los intervalos correctos: (1, 2), (2, 3) y (4, 5).

A continuación se llevó a cabo el procedimiento relacionado con los métodos numéricos. Al hacer uso de la calculadora, ya se ha mencionado la recomendación del manejo de hoja de cálculo y por razones de tiempo el uso de esta herramienta en la actividad se muestra en los anexos. La ventaja de la hoja de cálculo respecto a la calculadora es cómo pueden modificar los valores para x e inmediatamente observar los cambios en $f(x)$; esto ayuda al aprendizaje mediante la retroalimentación que la tecnología proporciona (NCTM, 2000).

El manejo de una hoja de cálculo por parte de los alumnos se fundamenta por el hecho de haber cursado la asignatura Taller de Cómputo, la cual proporciona los conocimientos básicos de esta herramienta, durante su primer semestre en el Colegio de

Ciencias y Humanidades, con el plan de estudios de 1996 y modificado en el 2003.

De nueva cuenta, de acuerdo con los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), cuando los alumnos utilizan calculadoras o computadoras en clase, pueden mostrar sus formas de pensar sobre las matemáticas y de esta manera ayudar en la evaluación, permitiendo a los profesores examinar los procesos seguidos en las investigaciones de los alumnos.

Es importante señalar y recordar la nula presencia del tema expuesto en este trabajo en el plan de estudio de Matemáticas IV, del Colegio y cómo la tecnología puede influir en la forma de enseñar y aprender las matemáticas. El NCTM (2000) recomienda usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas. Si bien es cierto que el proceso mostrado en el trabajo tiene características iterativas, el problema central es la identificación de los posibles valores donde la gráfica cruza al eje x y de ahí localizar las posibles raíces.

Debido a que los alumnos habían estudiado el comportamiento gráfico de algunas funciones polinomiales de grado mayor a dos, fue relativamente importante que observaran que efectivamente la curva mostrada corta tres veces al eje x, lo cual aprendieron por la mención del Teorema Fundamental del Álgebra, proporcionado por el profesor titular en el transcurso de la primera unidad.

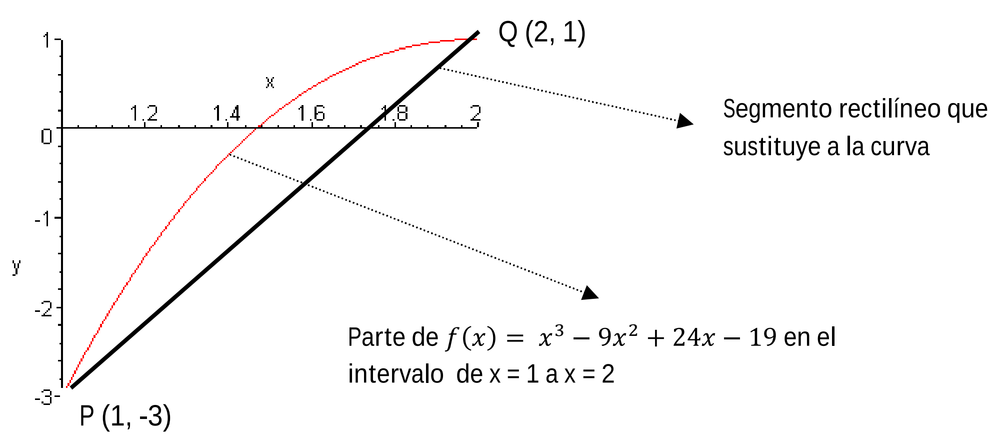
Cabe señalar que esta actividad se centró fundamentalmente en pequeños grupos, a pesar de haber indicado que trabajaran por parejas y por el hecho de no haber tenido muchas sesiones para la presentación de material. Esto facilita en ellos reconocer sus dificultades de comprensión y responder juntos a unas pocas preguntas, además de poder corregir errores.

Se ha observado que los alumnos se dieron cuenta de que los intervalos donde se encuentran las raíces coinciden con los que afirmaron en la tabla, lo que refleja su conocimiento sobre identificación de raíces; esto se dio en 90% de los casos, esto es, en 18 personas.

El método de interpolación lineal está fundado en la hipótesis de que un arco pequeño de una curva continua puede sustituirse por un segmento rectilíneo (Chapra & Canale, 2007). El estudio se realizó para el intervalo (1, 2). Esto se puede observar en la página tres de la actividad "Interpolación lineal. Los método numéricos", el cual se puede consultar en los anexos.

Obsérvese el cambio que se da con las gráficas. De la original se pasa a una porción de la misma, hasta llegar a la línea recta que forman los triángulos semejantes. Esto muestra la importancia de saber representar una misma gráfica, como el zoom en las calculadoras (Acevedo, 2007), ya sea en la misma graficadora o en una hoja de cálculo.

Al observar esta gráfica, el alumno puede determinar la sustitución de la curva original por la línea recta, con lo cual el alumno tiene dos opciones a considerar: el cruce con el eje *x* de la curva original y el cruce de la línea recta con este mismo eje. El alumno debe entender el hecho de que este segundo cruce es el utilizado para aproximarse al primer cruce, con cierta precisión, como lo muestra la actividad.



De acuerdo a Ausubel (1983), y al observar la gráfica donde se les pide identificar los dos triángulos semejantes y dado que, del examen diagnóstico, los alumnos recordaron los criterios para identificar dos triángulos semejantes (en particular, el primer teorema de Thales, sobre el Teorema Fundamental de Proporcionalidad), se presentan dos de las tres condiciones para que el aprendizaje sea significativo:

a) El material es suficientemente sustantivo y no arbitrario, ya que puede ser relacionado con las ideas relevantes que posee el alumno.
b) El alumno posee las necesarias ideas relevantes y las puede relacionar con el nuevo conocimiento.

De esta forma al preguntarles la relación de estos triángulos, la mayoría puede detectar la razón de los lados que se conocen: del lado más chico del triángulo, con el correspondiente lado del triángulo más grande CB y PR, respectivamente, y entre QB y QR (ver páginas 139 y 140, de la actividad, en los anexos).

Es interesante notar el hecho de encontrarse con alumnos manejando las fracciones equivalentes con la incógnita, como productos cruzados. Esto muestra la falta de entendimiento sobre la operación a realizar con estos elementos.

$$\frac{CB}{(2-1)} = \frac{1}{(1+3)}$$

Esto es, 4CB = 1, de donde CB = 1/4, en lugar de buscar un común denominador con el cual transfomar la expresión a fracciones equivalentes o multiplicar toda la ecuación por ese común denominador, olvidando de igual forma el significado de equivalencia del signo igual (Socas, Camacho, Palarea, & Hernández, 1997).

Cuando se le pregunta al alumno por qué al 2, que es el límite superior del intervalo donde se encuentra la raíz a aproximar, se le debe restar el valor obtenido CB = ¼, una gran cantidad de respuestas hace alusión a la relación del triángulo con ese límite superior. Esto significa que por empezar del lado derecho implica, para ellos, poder restarle a 2 y acercarse por este lado a la raíz. Es en este preciso momento donde el aprendizaje significativo hace posible la transformación del significado lógico en psicológico. Para que surja en el alumno el sigificado psicológico, no basta con que el material que se le presenta tenga significado lógico, sino que el alumno debe poseer una estructura cognitiva adecuada; una actitud postiva hacia el aprendizaje significativo y una motivación que le haga esforzarse deliberadamente (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983).

A contiuación se le pide a los alumnos realizar una nueva aproximación. Se encuentran ciertas dificultades al obtener la nueva aproximación $C_2 = 1.59$. En general se observa cómo construyen de manera satisfactoria los triángulos y obtienen la siguiente aproximación.

De acuerdo a Ausubel (1983), lo presentado hace alusión a una subsunción correlativa, que forma parte del aprendizaje subordinado en el aprendizaje significativo. También se da a conocer que se presenta un aprendizaje subordinado cuando las nuevas ideas son relacionadas subrdinadamente con ideas relevantes de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad, que se denominan inclusores y sirven de anclaje para las nuevas ideas o conceptos. Esto último hace referencia al hecho de considerar a los triángulos semejantes y sus propiedades inclusores ya que permiten, a través de utilidad en el análisis, encontrar las mejores aproximaciones a las raíces de la ecuación presentada.

Tal vez el procedimiento se pueda volver tedioso y convertirse en un simple proceso algorítmico, mas no es esa la intención. Algunos muestran cierto escepticismo cuando afirman que se les hizo aburrido, pero también reconocen que la aproximación es una forma de aprender nuevas cosas, saber otra forma de resolver problemas, mencionan. A algunos no les agrada trabajar con triángulos debido a que no aprendieron a trabajarlos, pero comprendieron el aproximar. Otras personas consideran lento el procedimiento, aunque recordaron temas olvidados, reafirmando con ello sus conocimientos y les pareció interesante el observar (sic) desde otro punto de vista cómo se pueden obtener las raíces. Y aunque se pueda llegar a pensar la relación de esta actividad con la definición de ejercicio, según la cual conlleva la práctica de la repetición y sirve para automatizar cursos de pensamiento y de praxis (Aebli, 1995), es importante llevar a la contextualización la actividad, de tal forma que vean la necesidad de no considerar las dimensiones de objetos y sus medidas como exactas. Por esta razón, si se asimila la noción de problema con la ejecución de ejercicios y se plantea el camino de la repetición sin que el alumno logre descubrir dónde reside el problema o la dificultad, se llevará a éste a la inhibición del aprendizaje, más que a su logro.

El resolver un problema pone en juego el despliegue de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales; es decir, implica tanto significatividad lógica como psicológica o fenomenológica. El alumno, en su naturaleza idiosincrásica puede, particularmente, trasnformar el significado lógico de la asignatura en producto de aprendizaje psicológicamente significativo.

De acuerdo a Boggino (2004), las posibilidades que tienen los alumnos de lograr aprendizajes genuinos están en íntima relación con los modos de enseñar del docente, modos de enseñar que tendrán que sustentarse sobre supuestos que consideren las peculiaridades del objeto de conocimiento y la singularidad del sujeto del aprendizaje.

Por lo anterior, se ha pedido a los alumnos resolver el problema de la caja en el reactivo 3, última parte de las sesiones y comenzado a resolver en la sesión 1, el cual sirve como referencia a la importancia de los métodos numéricos (Rechimont & Ascheri, 2003). El problema en sí contempla, de acuerdo al autor de este trabajo, lo mencionado en los párrafos anteriores, aunado a las representaciones, las cuales en este caso no es la intención analizar.

Las expresiones polinómicas muy útiles para describir relaciones entre variables en un amplio campo de situaciones reales son mencionadas en los estándares curriculares del NCTM (2000), en los niveles 5-8, por lo que es de esperar encontrarse con este tipo de elementos matemáticos para niveles superiores. Así que no debería ser tema reservado para los cursos de análisis, en cursos escolares posteriores.

De lo anterior y de acuerdo con los Principios y Estándares ya mencionados (NCTM, 2000), bien se podría llegar hasta un nivel 4, si es que no se requiere tanta formalidad en la resolución de ecuaciones polinómicas. Precisamente en el nivel 4, donde se puede asignar una tarea de grupo a los alumnos.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

Muchos conocimientos en Matemáticas se van construyendo a partir de conocimientos previos, por lo que es importante y necesario incluir conceptos y procedimientos que son sustento indispensable de otros más especializados, tanto de la propia Matemática como de otros campos del saber.

En el presente trabajo se planteó un problema relativo a la importancia de los métodos numéricos y su trato en el salón de clases. El problema planteado es:

¿Es adecuado y necesario trabajar con los alumnos de bachillerato la inexactitud del mundo y, por lo tanto, dedicarle el tiempo suficiente al estudio de métodos aproximados, en particular a las funciones polinómicas, en lugar de priorizar el estudio de los mal llamados métodos exactos, consiguiendo con esto una mejor preparación del estudiante y formándolo con la idea de precisión o estimación, más que la exactitud en la solución de problemas?

Los deseos y acciones por mejorar el aprendizaje de los alumnos no se refieren a un simple ajuste de la cantidad de tiempo que hay que dedicarle a cada tema por separado; tal vez considerar los cambios de énfasis dentro de cada tema, por ejemplo, que definitivamente pasar menos tiempo trazando curvas punto a punto y más tiempo interpretando gráficas. Tal vez ponerse de acuerdo las personas encargadas de trabajar con las modificaciones de los contenidos que se deben dar, el tiempo que se debe dedicar a estos y distinguir lo ocasional o puntual de lo sistemático.

Con el propósito de obtener información suficiente para poder determinar la importancia y posible respuesta al problema planteado, se concibió, en un principio, diseñó e implementó frente a un grupo de alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades, un conjunto de actividades destinadas a introducir, en su conjunto de conocimientos nuevos, la comprensión de elementos matemáticos auxiliares en la graficación de funciones polinomiales, insistiendo en tratar de evitar trabajar, por lo regular o constantemente, con métodos que comúnmente denominan exactos (Ruiz, 2002). En una primera oportunidad se aplicó un examen diagnóstico durante una primera sesión obteniéndose de la extracción del análisis, la información inicial, para continuar con la búsqueda de una posible respuesta satisfactoria al problema.

Si bien es cierto la presencia de olvido por parte de los alumnos de algunos conceptos, términos y procesos previos útiles en las actividades, esto es, los conocimientos previos no han sido debidamente aprendidos y aprehendidos, situación no fundamental en el transcurso de las mismas, debido a que las mismas actividades hicieron recordar términos que, lo más probable, fueron mal abordados en sus cursos anteriores, en palabras de los estudiantes y que a su vez permitió la continuidad del proceso una vez recordados esos elementos, supuestamente, olvidados.

Los alumnos muestran interés, fundamentalmente por el hecho de encontrar nuevas formas de resolver problemas, con la consciente dificultad mostrada con los cambios de registro de representación de los elementos involucrados: funciones, ecuaciones, variables, incógnitas. Se recomienda utilizar ciertos recursos didácticos: calculadoras, calculadoras graficadoras, computadoras (Rechimont & Ascheri, 2003). De igual forma, en el momento de resolver una ecuación, los alumnos siguen considerando la oportunidad de resolver ecuaciones de grado mayor a dos con fórmulas, situación que puede disminuir si se trabaja en forma aproximada, debido también por el manejo de números irracionales. Los alumnos al parecer se dan cuenta del error cuando encuentran fallas en el proceso, las cuales impedían llegar a resoluciones correctas a la ecuación, situación marcadamente encontrada en algunos alumnos en el examen diagnóstico. Al parecer, en la mayor parte de los casos, las dificultades eran de orden procedimental y eso se deba, de nueva cuenta, al manejo de los números irracionales, manipulaciones aritméticas-algebraicas; se logró detectar que algunos mostraban entender gráficas, tablas y ecuaciones, lejos de ser entidades aisladas son representaciones del mismo objeto (o proceso), entendiendo con esto la posibilidad de encontrar las dificultades con el álgebra involucrada e incluso con la aritmética.

En un principio, en el transcurso de la segunda actividad los alumnos ya saben manejar la calculadora que incluye la función para generar tablas y resolver ecuaciones de hasta tercer grado (CASIO fx-991ES), hubo necesidad de cambiar la estrategia para saber cómo resolverían una ecuación que no fuera menor a grado tres, considerando que no se encontraron problemas con relación al plano cartesiano. Es más, se logró hacer entender este último punto a la pregunta de cómo encontrar la raíz de la ecuación si en la división sintética que utilizaron no se obtenía un valor nulo en el residuo. Y a pesar de su limitado conocimiento sobre los intervalos, de manera efectiva logran deducir y explicar (verbalmente) en la tabla la localización de la raíz, por el cambio de signo de los valores $f(x)$ de la función. Entonces, se recomienda poner atención en estos elementos que no involucran en todo el proceso elementos algebraicos, sino de análisis.

Antes de la actividad ***volumen y aproximación*** fue importante observar su interés por el trabajo en equipos. Los alumnos constantemente iban de un lugar a otro para preguntar o comparar con sus compañeros los resultados obtenidos y fue poca la intervención de los profesores en el aula, tal vez sólo para cuestiones procedimentales o con las calculadoras. Este intercambio de ideas fue fundamental para que se entendiera lo que hacían. El manejo de tablas y la calculadora es una herramienta muy importante para ellos.

Prácticamente durante la actividad 3, que se basa en la segunda, el problema en contexto (Rechimont & Ascheri, 2003). Esta es la parte que a los alumnos básicamente les es significativo, importante y con sentido. Lo nuevo para ellos fue el manejo de los números irracionales y la obtención de raíces por medio de aproximaciones, a pesar de encontrar ciertas dificultades con el manejo de los inclusores, de acuerdo a Ausubel (1983), esto es, los triángulos semejantes, debido, en primer lugar, a su casi nulo aprendizaje y, por otro, con las operaciones aritméticas. Además de esta situación, hay pocos que muestran interés hacia el procedimiento. Se muestran interesados en conocer formas diferentes de resolver problemas y ecuaciones.

Es la última actividad una invitación a recorrer caminos similares al trabajo mostrado con el uso de tecnología: hojas de cálculo, programas de sistemas algebraicos por computadora y utilidades gráficas. Esto no significa el que se afirme el hecho de no haber funcionado la actividad; más bien se refiere a ampliar el panorama y la visión de los alumnos hacia la resolución de ecuaciones, como una herramienta útil para auxiliar el graficado de funciones y la resolución de problemas reales. El verdadero problema a resolver se refiere a la forma en que los alumnos conciben y resuelven las ecuaciones.

En la teoría piagetiana el error forma parte de los elementos que permiten optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los desajustes que, por tratar de aplicar a una realidad una estructura conceptual e interpretativa que no explica totalmente, pueden hacer saber cuáles son las comprensiones que mantienen los alumnos en ese momento y al ser fuente de desequilibrios que necesitan ser compensados por procesos de equilibración, son susceptibles de provocar una reestructuración de los esquemas de conocimiento existentes para alcanzar otros más explicativos. De esta manera, los alumnos llegan a comprender la importancia del intervalo como una estructura dentro de la cual hay una gran cantidad de valores numéricos, los cuales pueden darles la solución, aproximada, del problema planteado.

El autor percibe cómo el alumno cambia el proceso de asimilación al de acomodación después de una serie de errores al tratar de aplicar solamente una herramienta matemática: la división sintética, para obtener soluciones enteras. Es aquí donde se logra observar el concepto de adaptación, al haber un equilibrio entre la asimilación y acomodación, siguiendo a Piaget.

El carácter universal representativo de los métodos numéricos hace pensar su utilidad en toda la asignatura Matemáticas IV del Colegio de Ciencias y Humanidades, debido fundamentalmente a propuestas de los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y algunos trabajos elaborados con el uso de esta herramienta (Ruiz, 2002), (Pérez, 2004), (Rechimont & Ascheri, 2003), (De la Rosa, 2001), (Sanabria, 2007); el uso de tecnología en el aula (De Guzmán, 2007), (Butto, Delgado, & Zamora, 2003), (De la Rosa, 2001), (Rechimont & Ascheri, 2003); el papel que debería jugar la aproximación en la solución de problemas y resolución de ecuaciones es vital para entender las formas de pensar mostradas por los alumnos acerca de la matemática y, de esta forma, ayudar en la evaluación, permitiendo a los profesores examinar los procesos seguidos de las investigaciones de los alumnos.

El internet resulta de gran ayuda en la búsqueda de herramientas didácticas adecuadas. Existen muchas formas de emprender búsquedas que arrojarán programas diseñados para servir a la enseñanza-aprendizaje de varios conceptos matemáticos. Páginas como www.google.com, por ejemplo, donde se puede empezar a buscar software de matemáticas. El enlace http://math.exeter.edu/parris contiene software de varios campos de las matemáticas, bien se puede empezar por ahí.

Como ocurre regularmente al tratar de llevar nuevos elementos a un lugar determinado de enseñanza-aprendizaje, su introducción debe conducirse cuidadosamente para que existan posibilidades de conseguir resultados alentadores.

El autor cree importante mencionar de nuevo que el propio conocimiento científico de la modelación en general y de la modelación matemática en particular, como una forma de conocer al objeto de estudio de una forma simple y por tanto aproximada que la propia realidad, de por sí es compleja, constituye un método aproximado y es fuente de conocimiento. De igual forma, el alumno puede adquirir conocimiento de esta manera, sólo recuérdese la importancia del error, en la teoría de Piaget. De ahí la necesidad de llevarle la inexactitud del mundo al alumno, mostrarle los métodos aproximados y lo esencial que resulta obtener una solución del problema pero con un margen de error permisible y lo más pequeño posible.

El autor considera que el material presentado es suficientemente sustantivo y no arbitrario porque puede ser relacionado con las ideas relevantes que posee el alumno. Además, el alumno posee las necesarias ideas relevantes y las puede relacionar con el nuevo conocimiento. A fin de cuentas, con la finalidad de preparar mejor al estudiante y formarle la idea de que no por ser aproximada una solución el método que lo produjo es malo, sino que es la precisión con que se obtenga dicha solución lo más importante

Se deja a consideración la posibilidad de que este trabajo sirva para posteriores investigaciones o mejoras, con la pertinente aclaración de no querer dar solución a una situación bastante compleja de por sí en la Educación Matemática, sino mostrar situaciones que requieren una atención especial tanto en la forma de abordar los temas como la solución a los problemas que se presentan y se pueden resolver con métodos aproximados, que tienen un uso más general.

ANEXOS

Anexo 1. Instrumentos de instrucción.

Para este trabajo se contó con dos situaciones didácticas presentadas a los alumnos constituidas por dos tareas, principalmente: la primera, resolver un problema clásico sobre las medidas que deben tener los lados de una caja rectangular, con el procedimiento habitual para los alumnos en clase, con los denominados ***métodos exactos*** y agregando ahora algunos elementos relacionados con los ***métodos de aproximaciones*** de las soluciones, de tal forma que ambos métodos fueran visibles.

De acuerdo a varios autores (De Guzmán, 2007), (Rechimont & Ascheri, 2003), (De la Rosa, 2001), (Sanabria, 2007), (NCTM, 2000), se propone la inclusión de temas relacionados con la aproximación para soluciones de ecuaciones, elementos auxiliares en la elaboración de gráficas, problemas matemáticos contextualizados y, desde esta perspectiva que se ha considerado adecuada la introducción, en primera instancia, el trabajo con este problema, tratado de manera general, como los alumnos lo han resuelto en el aula para posteriormente tratarlo con aproximaciones (NCTM, 2000). De esta manera, se pretendió llegar al tema de métodos numéricos, tema de interés, conectándolo con temas y elementos ya conocidos por los alumnos, como la graficación de funciones polinomiales (tema principal en la unidad I de Matemáticas IV), la obtención de cortes con el eje horizontal.

Las situaciones propuestas involucraban el manejo de tecnología, principalmente con la calculadora en el aula y graficadoras o computadoras como tarea extraclase, de tal forma que al término de cada actividad o situación se organizaban discusiones grupales sobre las conclusiones de los equipos, antes de proporcionarles el escrito con la siguiente actividad. A continuación se incluyen los escritos en los que se planteaban las situaciones didácticas a trabajar, complementadas con la planeación didáctica en el anexo 3.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
MATEMÁTICAS IV

PROFESOR CARLOS ÁLVAREZ

Volumen y la aproximación

Alumnos: ____

____

Por parejas, lean atentamente y respondan lo que se les pide. Procuren llegar a un acuerdo sobre lo que responderán y si éste no es el caso, de igual manera indíquenlo en la respuesta, diciendo el por qué de su decisión. Escribir el punto de vista de ambas personas.

Problema de la caja. En una fábrica de chocolates se decidió envasar los bombones en un modelo de caja que sea un prisma de base *x* cm, de altura (x – 2) cm, de profundidad (x + 10) cm y cuyo volumen sea igual a 957 cm^3. Para poder armar esta caja se desean conocer las medidas de sus lados. Para ello:

a) Plantear la ecuación correspondiente, según los datos del problema.
b) Realizar un bosquejo de la gráfica relacionada con la expresión obtenida.
c) De esta gráfica, ¿cuáles son los cortes con el eje *x*, es decir, cuáles son los valores de x donde la gráfica corta a dicho eje?
d) ¿Cómo obtener esos valores?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
MATEMÁTICAS IV. GRUPO 472A

Interpolación lineal. Los métodos numéricos.

Alumnos: ____

____

Por parejas, lean atentamente y respondan lo que se les pide. Procuren llegar a un acuerdo sobre lo que responderán y si éste no es el caso, de igual manera indíquenlo en la respuesta, diciendo el por qué de su decisión. Escribir el punto de vista de ambas personas. Al final de la actividad se proporciona una lista de textos donde puedes consultar los conceptos o los temas sobre los que te gustaría profundizar.

1. Genera una tabla de valores para la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$ desde $x = -5$ hasta $x = 10$.

x	**–5**	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
f(x)																

2. Identifica los ceros o soluciones de la ecuación o, en su defecto, los cambios de signo observados en la actividad anterior.

3. Una vez contestadas las siguientes hojas, resuelve el problema de la caja visto en la sesión anterior, con este método.

Anexo 2. Instrumento de evaluación de la comprensión.

Identificar el grado en que la noción de aproximación como elemento de comprensión a seguir requirió del diseño de un instrumento que permitiera observar el desempeño de los estudiantes en tareas cuya resolución demandara conocimientos previos y la aplicación de estos a dichas tareas que trabajos pertinentes consideran fundamentales para la comprensión de tales conceptos (Hiebert & Carpenter, 1992), (NCTM, 2000) y en base a esos conocimientos previos conocer nuevas formas de resolver ecuaciones y, en general, problemas (De Guzmán, 2007), (De la Rosa, 2001), (Rechimont & Ascheri, 2003), (Sanabria, 2007).

Con este fin se diseñó una prueba escrita constituida por 15 reactivos del tipo sugerido por trabajos anteriores (Hernández, Roberto; Fernández, Carlos; Baptista, María, 2010). Los estudiantes debieron resolver dicha prueba individualmente antes de las situaciones didácticas (instrumentación de instrucción). El instrumento prueba se presenta a continuación:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL NAUCALPAN
MATEMÁTICAS IV

PROFESOR CARLOS ÁLVAREZ

EXAMEN DIAGNÓSTICO

Alumno: ____

Grupo: ____

Leer con atención:

Éste es un examen diagnóstico. Eso significa que sólo sirve para que el profesor obtenga información sobre los conocimientos que tienes sobre los temas que se preguntan en un examen o en una actividad. También significa que NO TENDRÁ VALOR PARA FINES DE CALIFICACIÓN.

Lee detenidamente las siguientes preguntas, contéstalas con tanto detalle como puedas en los espacios en blanco. Si requieres más espacio, comunícaselo al profesor y él te proporcionará hojas blancas.

1. ¿Qué es una variable?

2. ¿Qué es una función?

3. ¿Qué es una ecuación?

4. ¿Cuándo se dice que una función es cuadrática? ¿Y cúbica?

5. ¿Qué entiendes por solución de una ecuación?

6. ¿Cómo resuelves una ecuación cuadrática? ¿Y una cúbica?

7. Cuando graficas una función, ¿qué elementos consideras que son importantes para dicha tarea?

8. Para cada una de las siguientes funciones completar la tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

a) $f(x)=-3x+5$ b) $f(x)=-x^2-5x+10$ c) $f(x)=-x^3-3x^2+7x-8$

9. Resuelve la ecuación: $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

10. La clasificación de los triángulos dependiendo de sus ángulos, es:

11. La clasificación de los triángulos dependiendo de sus lados, es:

12. ¿Cómo defines a dos figuras geométricas que son congruentes? ¿Y dos triángulos?

13. ¿Cómo defines a dos figuras geométricas que son semejantes? ¿Y dos triángulos?

14. Enunciar los criterios de congruencia.

15. Enunciar los criterios de semejanza.

Anexo 3. Planeación didáctica.

Planeación Didáctica	
Maestro	Carlos Alberto Álvarez García
Nombre del curso	Matemáticas IV
1 Unidad	Unidad 1. Funciones polinomiales. Resolución de ecuaciones de grado mayor o igual a dos.
2 Propósitos	Que el alumno, a través de los métodos numéricos: *1) resolverá ecuaciones polinomiales que no se puedan factorizar, localizando las raíces por medio de intervalos.* *2) identificará los ceros de una función polinomial como las raíces de la ecuación polinomial asociada.* 3) A partir de las raíces reales de una ecuación polinomial bosquejará la gráfica asociada a ella.
3 Objetivo de Desempeño	*Que el alumno alcance a comprender la importancia de los métodos numéricos y logre la resolución de ecuaciones y problemas con un método más general que él mismo construya.*
4 Fundamentación Teórica	Generalmente los estudiantes menosprecian los métodos que conducen a la solución aproximada del problema. Sin embargo no debemos culpar a los estudiantes por esa valoración ya que si calculamos el tiempo que se dedica a enseñarles métodos exactos de solución a lo largo de toda la enseñanza incluyendo la educación superior, obtendremos que el tiempo dedicado a la enseñanza de métodos aproximados es mínimo en comparación con el dedicado a métodos exactos, mientras que en la práctica ocurre por ejemplo que sólo se pueden resolver por métodos exactos no más del 5 % de las ecuaciones diferenciales que se pueden presentar. Si a la contradicción anterior le sumamos que no siempre los profesores le demuestran a los estudiantes la importancia de los métodos aproximados, entonces el estudiante obviamente llega a pensar que lo más importante son los métodos exactos. Ruiz Socarras, José Manuel (2002). La importancia de los métodos aproximados de solución. Revista Axioma, 4, 018, 14-15.

5 Contenido	*6. Procedimientos instruccionales*
Las ecuaciones de grado superior al cuatro aparecen con frecuencia en problemas técnicos y científicos, por ejemplo, en la aerodinámica aplicada, en el estudio de las condiciones de estabilidad de un avión, interviene una ecuación de octavo grado. Hay que llevarle al estudiante la idea de que no solamente la mayoría de los problemas no pueden ser resueltos por métodos exactos, sino que existen también problemas cuya solución por un método exacto, aunque es posible, es más laboriosa y engorrosa que mediante la utilización de un método aproximado. Estamos hablando de métodos exactos y métodos aproximados, cuando lo correcto es hablar de Métodos analíticos y Métodos numéricos respectivamente, puesto que exacto hay muy poco en la vida. Digamos que cuando decimos que el largo de una mesa es de 4m, esa medida no es exacta, pues ella incluye un cierto error, me refiero al error que introducen los ojos como órganos de la visión más el error del propio instrumento de medición que se use. Lo importante es pues no tanto buscar la solución exacta de un problema, sino la solución aproximada pero con la precisión requerida, o sea, con un error lo suficientemente pequeño y próximo a cero, de ahí la utilidad de los Métodos	*a) Evento para fijar la atención:* *Mostrar a los alumnos una ilustración de una clase con una situación-problema.* *Usar la calculadora para evaluar funciones y complementar esta actividad con la división sintética.* *Mostrar las gráficas de las funciones con una computadora.*

	b) Procedimientos de enseñanza. *Verificar los conocimientos antecedentes de:* *Función y ecuación.* *Solución de una ecuación.* *Gráficas de funciones.* *Evaluación de función y análisis de tabla.*
	c) Verificación Formativa *Se identificará el desarrollo de habilidades en la obtención de soluciones irracionales.*
	d) Participación del estudiante *Trabajará con tablas e identificará los posibles ceros o soluciones.* *Usará una calculadora.* *Propondrá formas de acercarse a las soluciones.*

	e) Cierre *¿Qué significa encontrar la solución de una ecuación?* *Opinión acerca del método visto en sesión.* *¿Cuál es la diferencia de trabajar con un método exacto y uno aproximado?* *A partir de las soluciones de una ecuación, ¿cómo se elabora la gráfica de la función?*
7 Procedimiento de evaluación	*Evaluación Formativa*
8 Material y ayuda didácticos	*Pizarrón, marcadores para pizarrón, cuaderno, lápiz o pluma, calculadora, computadora y proyector multimedia para presentación de métodos numéricos (cañon). Cuestionario.*
9 Notas / Comentarios para al expediente	

Anexo 4. Material didáctico de matemáticas IV, unidad 1, para cuarto semestre de bachillerato.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES

CAMPUS ACATLÁN

MADEMS MATEMÁTICAS

MATERIAL DIDÁCTICO DE MATEMÁTICAS IV

PARA CUARTO SEMESTRE DE BACHILLERATO

QUE PRESENTA

CARLOS ALBERTO ÁLVAREZ GARCÍA

PRESENTACIÓN

La enseñanza de las matemáticas que se desarrolla en las aulas, es una tarea nada fácil, sobre todo si el objetivo fundamental es que se logren los aprendizajes significativos de los alumnos del Colegio en esta disciplina. Demasiados factores influyen en ello. Desde la revisión, ajuste y formulación del programa institucional, hasta la enseñanza efectiva de cada profesor en el aula, se han tomado un gran número de decisiones y se han realizado múltiples acciones, a todo nivel y con distinto grado de responsabilidad. Acciones y decisiones están enmarcadas en un contexto sociocultural, institucional y pedagógico. Todas y cada una de estas acciones y decisiones influyen en menor o mayor grado, en el resultado final del aprendizaje de los alumnos, que a su vez viene determinado por las características académicas individuales, así como de su contexto sociocultural y sus expectativas y creencias acerca de las matemáticas.

La pertinencia de la matemática en el nivel de bachillerato se da porque fundamentalmente proporciona una manera de razonar que es útil en la vida diaria como en cualquier actividad profesional, además de enseñar teoría y técnica que sirven para dotar al estudiante de un método para enfrentar ciertos problemas y proporcionándole las bases para poder seguir sus estudios profesionales, principalmente si se elige una carrera donde las matemáticas jueguen un papel importante.

En relación a los distintos temas de matemáticas IV del plan de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, es deseable que el profesor incluya tópicos de la historia de la matemática para que el alumno vea a ésta para el producto del desarrollo humano y se percate de cómo ha evolucionado a lo largo del tiempo y, además, por medio del estudio de diversas clases de funciones, se consoliden e integren conceptos y procedimientos de los ejes temáticos que el alumno ha venido asimilando en los cursos anteriores en el bachillerato, tanto en el manejo de expresiones algebraicas y del plano cartesiano, como en el estudio de relaciones numéricas entre objetos geométricos.

En un intento por definir el material didáctico, o en otros términos el material curricular, se entiende como cualquier instrumento u objeto que mediante su manipulación, observación o lectura ofrezca la oportunidad de aprender algo. Los materiales canalizan contenidos para su aprendizaje y permiten dirigir el proceso de enseñanza aprendizaje de manera parcial o total.

Se considera que el mejor medio para compendiar los conocimientos y su transmisión es el libro de texto. Pero si se considera que la escuela debe preparar para que los estudiantes aprendan a hacer previsiones reiteradas, probables, cada vez más lejanas, acerca del futuro, ésta no puede seguir haciendo del libro de texto el material fundamental y mucho menos un libro de texto diseñado y elaborado de manera tradicional. La necesidad hace pensar que el material que se requiere se refiera a promover habilidades y destrezas en el manejo de la información, así como el conocimiento y manejo de los procedimientos propios de las diferentes disciplinas; y que, estas habilidades puedan ser transferidas a situaciones nuevas, transformándose en poderosas herramientas para actuar en la realidad de todos los días.

El reto es poder elaborar materiales de apoyo al aprendizaje, cuyas líneas de diseño incorporen un discurso matemático escolar en el que se incorporen elementos epistemológicos, didácticos, cognitivos y sociológicos del saber matemático escolar pero sobre todo algún conjunto de principios psicopedagógicos sobre cómo enseñar. También es importante mencionar que el material haga enfrentar al estudiante a diferentes retos, que le proporcione metodologías para el manejo e interpretación de la información, pero también los procedimientos específicos de las disciplinas.

El material presentado a continuación se concentra en la unidad I de Matemáticas IV, *funciones polinomiales*, donde se pretende avanzar en el estudio de las funciones, introduciendo los conceptos de notación funcional, dominio y rango, así como profundizar en la comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica de una función polinomial, su comportamiento, aspecto y características principales de su gráfica. El tema relacionado con la unidad es el de métodos numéricos, por lo que también hace uso de herramientas se otras ramas de la matemática, que bien pueden ayudar al alumno a comprender más adelante el cálculo. Se tiene pensado apoyar la resolución de ecuaciones de grado mayor o igual a dos con los métodos numéricos, por lo que es importante señalar que es un elemento que forma parte del bosquejo de la gráfica de una función polinomial.

Consideraciones para la unidad 1 de matemáticas IV

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES (Zill & Dewar, 2000) (Smith, Charles, Dossey, Keedy, & Bittinger, 1998)

1. *Fíjate en el grado del polinomio y en su coeficiente principal*. Estos proporcionan mucha información acerca de la gráfica.
2. *Busca simetrías*. Cuando se presentan puntos simétricos, el resto de la gráfica se puede trazar rápidamente.
3. *Factoriza el polinomio, de ser posible*.
4. *Haz una tabla de valores utilizando la división sintética*.
5. *Encuentra la ordenada al origen (donde corta la gráfica al eje y) y tantas intersecciones con el eje x como sea posible*. Esto último se refiere a los ceros o raíces de la función f(x); o sea, resolver la ecuación f(x)=0.
6. *Trazar una recta numérica*. Determina los signos algebraicos de todos los factores entre las intersecciones en x. Esto indicará dónde $f(x) > 0$ y dónde $f(x) < 0$.
7. *Dibuja los puntos y únelos apropiadamente*.

GRÁFICAS DE FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO SUPERIOR

1. Toda función polinomial tiene como dominio el conjunto de los números reales.
2. La gráfica de cualquier función polinomial es una curva continua e ininterrumpida que debe satisfacer la prueba de la línea vertical.
3. A menos que la función polinomial sea líneal, ninguna parte de su gráfica es rectilínea.
4. Un polinomio de grado *n* no puede tener más de *n* raíces reales. Esto significa que la gráfica no puede atravesar el eje x más de *n* veces.

MATEMÁTICAS IV. UNIDAD 1. FUNCIONES POLINOMIALES.

Propósitos: Avanzar en el estudio de las funciones, introduciendo los conceptos de notación funcional, dominio y rango. Profundizar en la comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica de una función polinomial, su comportamiento, aspecto y características principales de su gráfica.

1. El problema de la caja y los métodos numéricos.

El clásico problema para introducir esta unidad ahora se puede trabajar con ayuda de los métodos numéricos. La idea central sigue siendo la obtención del modelo algebraico de la situación, la gráfica y las relaciones entre estos.

Puesto que en el modelo algebraico no es posible encontrar una solución entera o racional, se invita al alumno a reflexionar sobre la manera de obtener esas soluciones y el significado que tienen para el problema de aplicación. También se le pide encontrar el valor de la variable que logre maximizar el volumen de la cajita.

Problema de la caja.

En una fábrica de chocolates se decidió envasar los bombones en un modelo de caja que sea un prisma de base x cm, de altura $(x – 2)$ cm, de profundidad $(x+10)$ cm y cuyo volumen sea igual a 957 cm^3. Para poder armar esta caja se desean conocer las medidas de sus lados. Para ello:

a) Plantee la ecuación correspondiente, según los datos del problema.
b) Separe las raíces de esta ecuación realizando, primero manualmente y luego con la computadora, el gráfico de la función polinómica resultante.
c) En el apartado b), localizó las raíces de la ecuación polinómica. Utilizando estos datos y realizando 10 iteraciones del método numérico analizado, obtenga las medidas de los lados del prisma.

Es importante señalar el trabajar en un principio con un problema que pudiera tener soluciones enteras y con variantes del mismo problema. Esto permitirá percibir si se ha entendido lo que se pide en el problema.

Como un punto adicional a esta unidad se puede pedir al alumno que busque el valor de la variable independiente que da el valor máximo de la función sobre el eje positivo de las abscisas. Esto significa que como la función es $f(x) = x^3 + 8x^2 - 20x - 957$, al trazar la gráfica de esta función el alumno puede aproximar el valor de x que maximiza el volumen.

En el caso de las raíces o soluciones de la ecuación $x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0$ al no encontrar soluciones enteras ni racionales, al alumno se le pregunta qué hacer para encontrar esas soluciones.

Para ayudar al alumno, podemos manejar un caso antes, como por ejemplo preguntarles qué harían con una expresión como $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$. De acuerdo a esto, se tienen las:

Estrategias de enseñanza

1. El profesor inducirá al alumno a ir construyendo juntos un método general para obtener aproximaciones de las soluciones de una ecuación de grado mayor o igual a dos y relacionar lo que hizo con las soluciones enteras y la división sintética (teorema del residuo y teorema del factor).

2. Explicará ejemplos de cómo distinguir una solución entera o racional y una irracional.

3. Concluirá el método analizado para aproximar una raíz o una solución irracional de una ecuación de grado mayor a dos. Para el caso de una ecuación de segundo grado se utilizará la fórmula general.

4. Resolverá ecuaciones con soluciones irracionales para mostrar la importancia de contar con otras herramientas en el manejo de estas expresiones, tales como la interpolación lineal.

5. Aclarará dudas de los alumnos.

6. El profesor dará ejercicios y problemas después del tema. Incluyendo aplicaciones.

Estrategias de aprendizaje

1. Para este tema el alumno consultará cualquier libro dado en la bibliografía.

2. Realizará tareas a diario.

3. El alumno participará realizando ejercicios en clase, pizarrón y, aquellos que entiendan más ayudarán a los demás, haciendo grupos para apoyarse.

4. Asistirán a asesoría todo alumno que no comprendió, con cualquier profesor de matemáticas del Colegio.

Recursos

1. Uso del pizarrón.

2. Uso de software de matemáticas para mejor comprensión del tema, así como de proyector multimedia (con que cuenta cada salón) y computadora.

3. Uso de la bibliografía propuesta.

4. Uso de autoevaluaciones y de algunas páginas de internet dadas por el profesor.

5. Apoyo de los mejores alumnos como monitores.

Regresando al problema de la caja y de la solución aproximada de ecuaciones de grado superior a dos, se le plantea al alumno encontrar las raíces de la ecuación $x^3 - 9x^2 + 24x - 19 = 0$ con una tabla como la siguiente:

Primer intervalo: (1, 2)

Segundo intervalo: (2, 3)

Tercer intervalo: (4, 5)

x	$\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19}$
⋮	⋮
– 2	–111
– 1	–53
0	–19
1	–3
2	1
3	–1
4	–3
5	1
6	17
⋮	

Los valores para *x* consecutivos donde encontramos cambios de signo son (ver tabla):

x	y	P(x, y)
1	–3	(1, – 3)
2	1	(2, 1)

x	y	P(x, y)
2	1	(2, 1)
3	–1	(3, –1)

x	y	P(x, y)
4	–3	(4, – 3)
5	1	(5, 1)

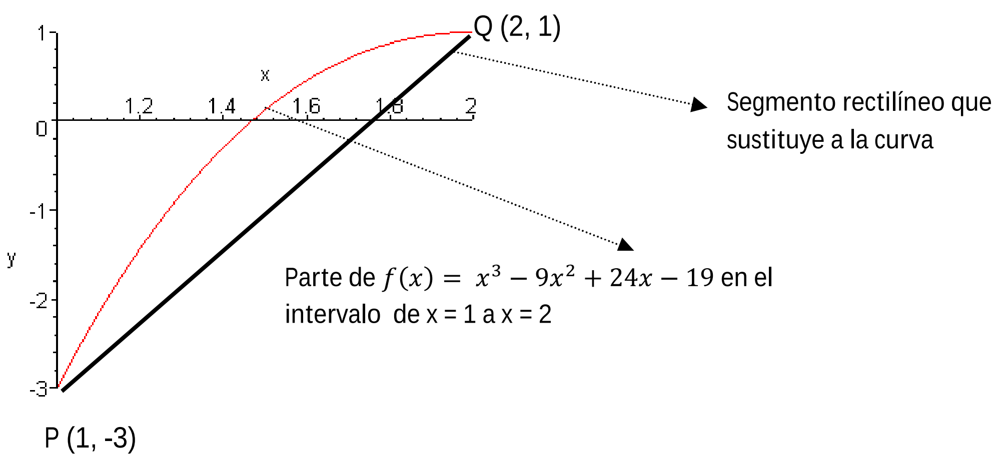
Se le pregunta al alumno por el número de soluciones que tiene la ecuación.

Al no encontrar ningún cero en la tabla para valores de *y*, se le pide analizar cada intervalo y el respectivo signo de cada valor de la variable dependiente. Es aquí donde puede mencionar el cambio de signo entre los valores como los mostrados en la tabla. Esto da pie al manejo de los métodos numéricos.

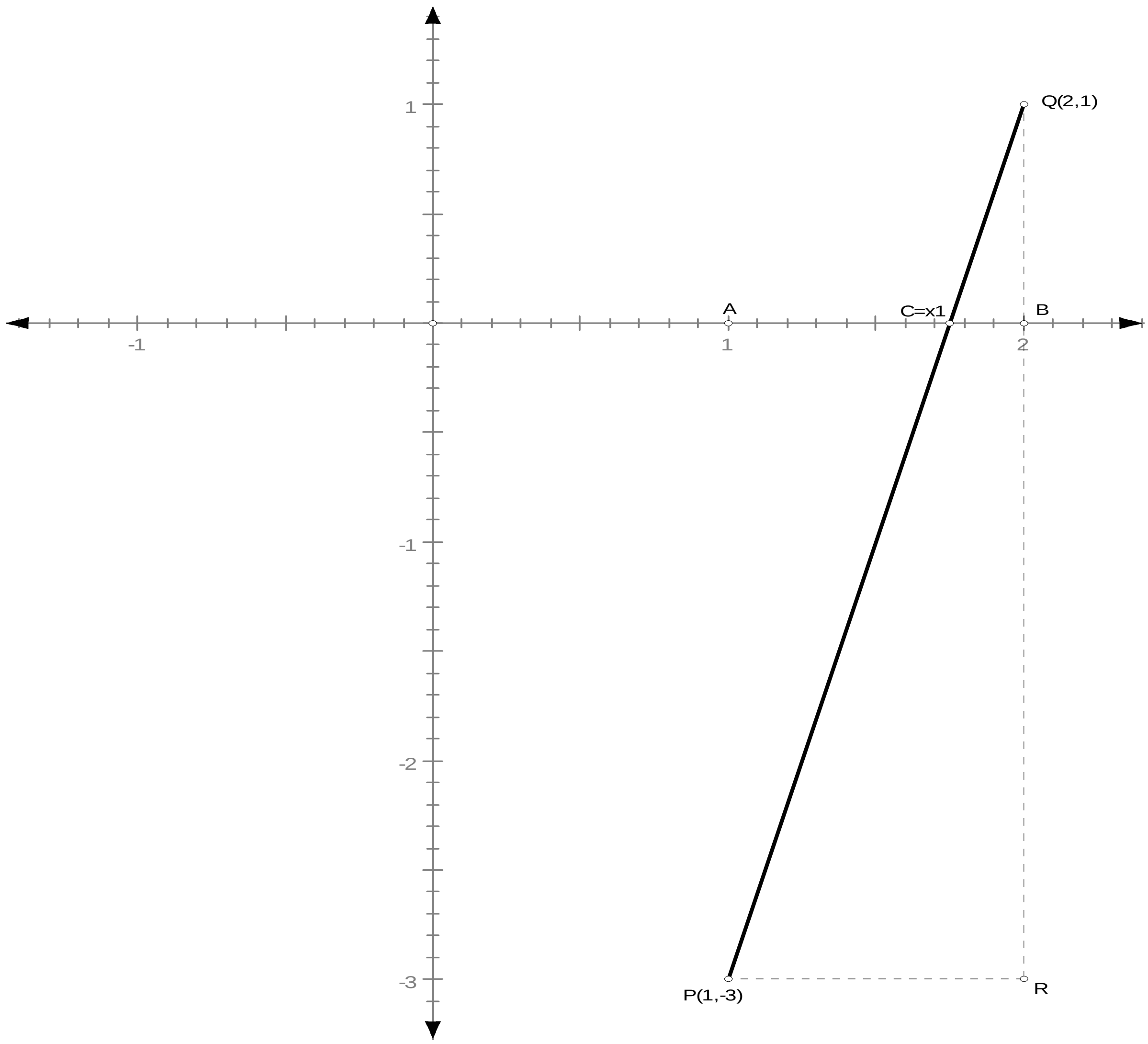
Un primer método numérico. Interpolación lineal.

Al encontrar cambio de signos entre valores de *x* consecutivos y regresando a la ecuación $x^3 - 9x^2 + 24x - 19 = 0$, tomando los puntos (1, –3) y (2, 1) para encontrar el valor de la raíz o solución en este intervalo, el método de interpolación lineal está fundado en la hipótesis de que un arco pequeño de una curva continua puede sustituirse por un segmento rectilíneo sin introducir un error apreciable. Naturalmente esto es sólo una aproximación, pero tiene la ventaja de que es posible mejorarla disminuyendo la longitud del arco considerado, como se pretende en este caso.

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19 = 0$ tiene una raíz entre los valores de x, 1 y 2. Calcularla con dos cifras decimales con el método de interpolación lineal.



Observando y siguiendo la gráfica anterior se puede mostrar la siguiente figura:



a) De esta gráfica, se pueden observar dos triángulos semejantes. ¿Cuáles son estos?

b) ¿Qué relación se obtiene de estos triángulos?

Para este caso particular, los triángulos semejantes y la relación entre estos es la siguiente:

△QCB y △QPR. La relación está dada por:

$$\frac{CB}{PR} = \frac{QB}{QR}$$

¿Por qué?

Entonces, de esta relación se tiene:

$$\frac{CB}{2-1} = \frac{1}{1+3}$$

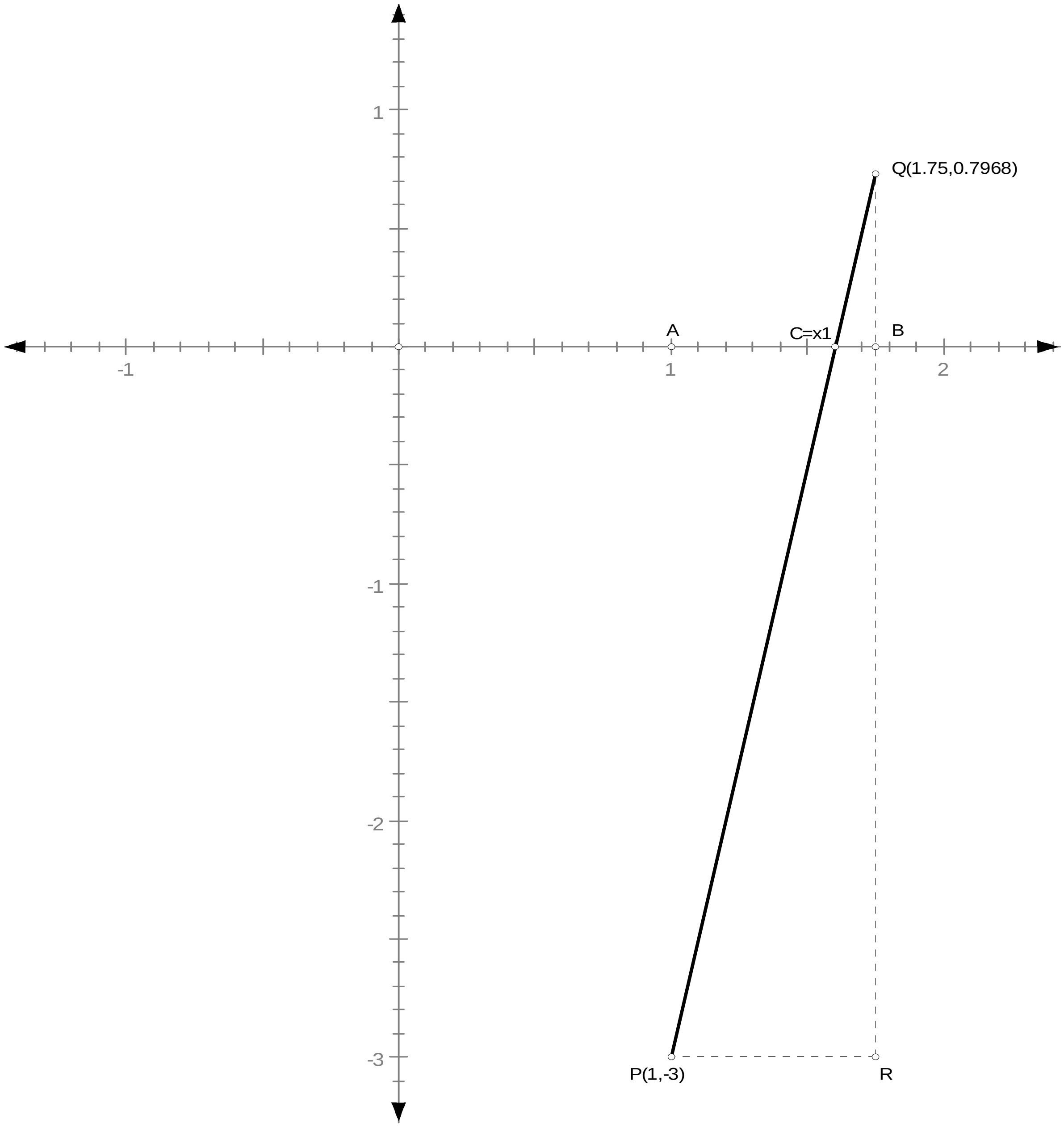
Por lo que CB = ¼ = 0.25. Esto significa que nuestra primera aproximación es, por tanto, C = x_1 = 2 – 0.25 = 1.75, nuestra solución aproximada.

c) ¿Por qué crees que tuvimos que restar este valor de C a 2? Si tuviéramos que sumarlo, ¿cuándo tendría qué suceder?

Ahora se te pide tratar de buscar una aproximación más cercana al verdadero valor de la raíz o solución de la ecuación en el intervalo de x = 1 a x = 2 a partir de la aproximación obtenida. ¿Cómo procederías? ¿Puedes mostrar la forma en que quedaría la figura anterior, la del segmento rectilíneo que sustituyó a la curva original?

Sólo recuerda que seguirás trabajando con triángulos semejantes y que la relación mostrada anteriormente seguirá intacta. Evalúa la función original $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$ pero ahora con el valor aproximado obtenido x_1 = 1.75 y compáralo con f(1) = –3 y f(2) =1 para decidir cuál será tu nuevo intervalo.

A continuación se muestra la nueva figura con el segmento rectilíneo.



$f(1.75) = (1.75)^3 - 9(1.75)^2 + 24(1.75) - 19 = 0.7968.$

Para este caso particular, los triángulos semejantes y la relación entre estos es la misma:

$\triangle$QCB y $\triangle$QPR. La relación está dada por:

$$\frac{CB}{PR} = \frac{QB}{QR}$$

Entonces, de esta relación se tiene:

¿Por qué?

$$\frac{CB}{1.75-1} = \frac{0.7968}{0.7968+3}$$

Por lo que CB = 0.1574. Esto significa que nuestra segunda aproximación es, por tanto, C = x_1 = 1.75 – 0.1574 = 1.5926, nuestra solución aproximada.

Puedes continuar obteniendo mejores aproximaciones sabiendo que vas a tener los mismos triángulos semejantes y la misma relación. ¿Hasta cuándo dejarías aplicar el procedimiento? ¿Cuál crees que sería una buena aproximación a la solución verdadera? Comenta con tus compañeros.

Después de una cierta cantidad de procedimientos se observa que la solución aproximada es C = x_1 = 1.468. Es decir, con dos cifras, puedes escoger C = x_1 = 1.46 o C = x_1 = 1.47.

Este ha sido el método de interpolación lineal. Existen otros métodos numéricos para aproximar soluciones a ecuaciones. Lo importante es que logres identificar qué características deben tener estos métodos, antes de conocer el procedimiento. Por ejemplo, si en lugar de empezar a aproximar esa solución con un segmento, ¿qué se te ocurre hacer con el intervalo donde se localiza esa raíz o solución?

Bibliografía

Britton, J. R., & Bello, I. (1986). *Álgebra y trigonometría contemporáneas.* México, D.F. : HARLA.

Johnson, L. M., & Steffensen, A. R. (1994). *Álgebra y trigonometría con aplicaciones.* México, D.F.: Trillas.

Lehmann, C. H. (1989). *Álgebra.* México, D.F.: Limusa.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (1996). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2000). *Álgebra y Trigonometría.* Santafé de Bogotá: McGraw-Hill.

Anexo 5. Actividad sobre métodos numéricos con hoja de cálculo. Software libre OpenOffice.org. Hoja de Cálculo "Calc".

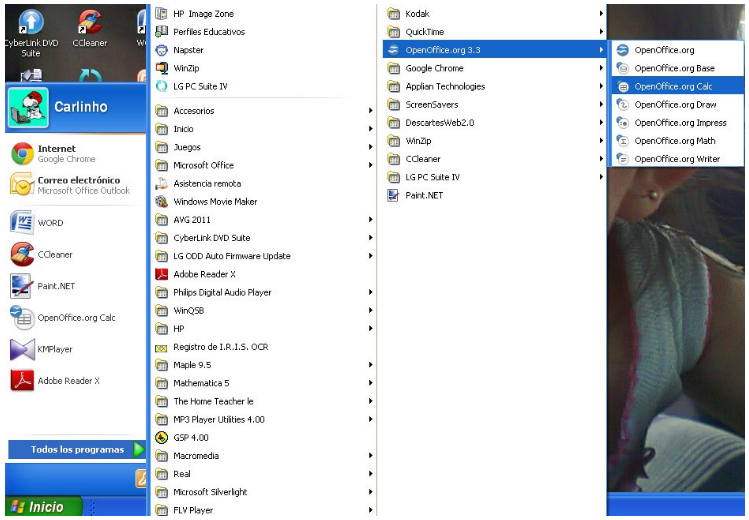
El problema planteado de la caja bien se puede resolver de manera efectiva a través de una computadora con una hoja de cálculo donde, para evitar problemas de comercialización, el alumno puede hacer uso de software libre. Ahora bien, independientemente del ambiente de trabajo, WINDOWS o LINUX, por ejemplo, la versión del software libre OpenOffice.org puede ser desde la inicial 1.1.0 hasta la que se presenta en este espacio, 3.3.

El objetivo de esta actividad con hoja de cálculo es observar el cambio de las cifras en las diferentes aproximaciones de la solución; además, la interpretación, por parte del alumno, de las mismas. Hay que hacer notar que esta hoja de cálculo no es desconocida por el alumno, ya que durante su primer semestre en el Colegio se le impartió una asignatura de nombre "Taller de cómputo" (Comisión de Revisión y Ajuste del Sentido y Orientación del Área de Matemáticas, 2006), donde seguramente trabajaron esta herramienta que a continuación se muestra..

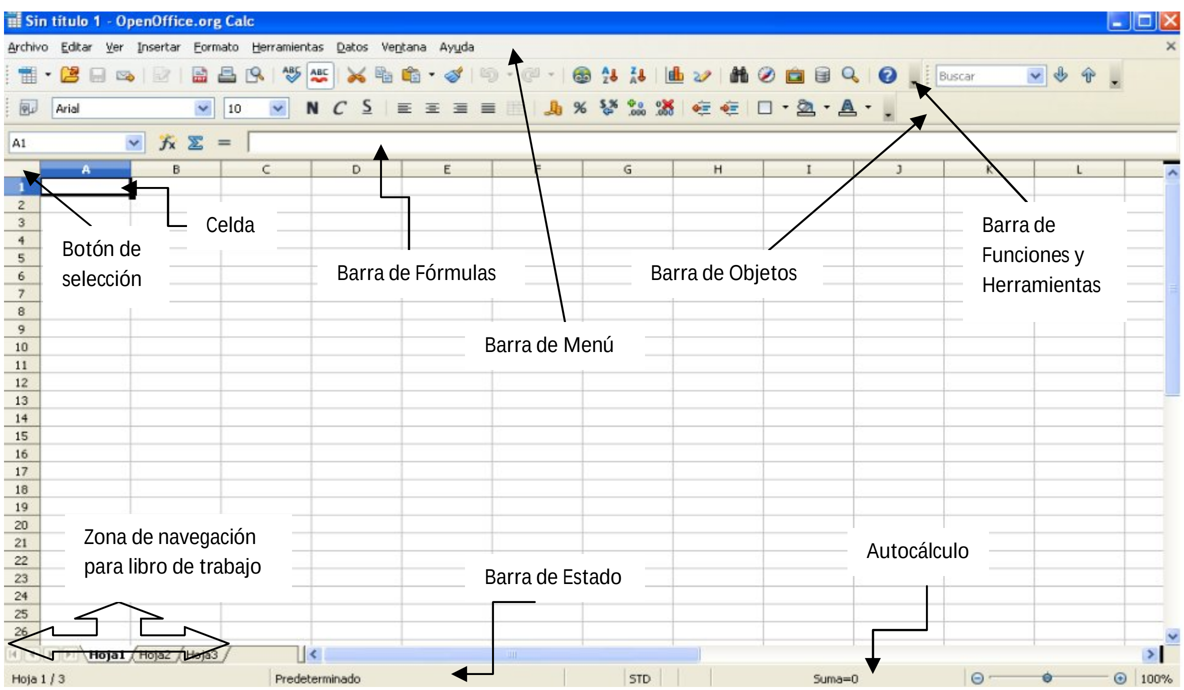
El trabajar con hoja de cálculo permite al alumno simplificar el trabajo hecho a mano, junto con los triángulos semejantes utilizados en la actividad en el salón de clases.

Se ha observado el hecho de que los alumnos se interesan en la creación de modelos matemáticos, ya que son ellos los que generan sus propios datos y pueden manipularlos con libertad, de tal forma que este interés es creciente (NCTM, 2000). De igual forma, es posible manejar funciones con las hojas de cálculo y el hecho de permitir a los alumnos interpretar los resultados obtenidos (Chapra & Canale, 2007).

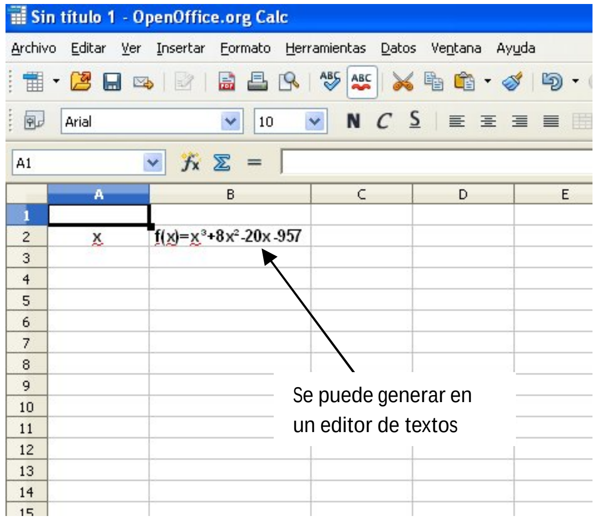
En principio una vez instalado el programa, de la pestaña Inicio se busca y selecciona la opción "OpenOffice.org", dependiendo la versión que se haya instalado y se escoge OpenOffice.org →Calc, como se muestra en la siguiente ilustración:



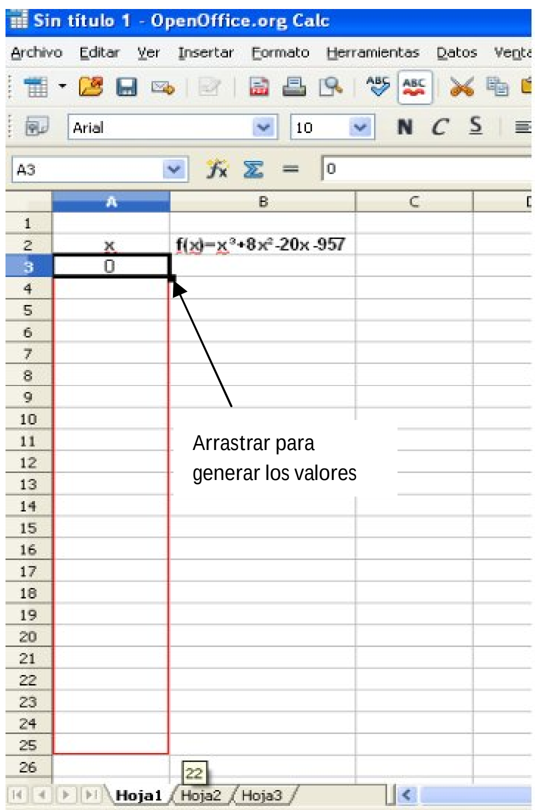
Una vez dentro de la hoja de cálculo se encuentra con un ambiente muy parecido a la mayoría de las hojas de cálculo, Excel de Microsoft Windows, por ejemplo. La hoja de trabajo de Calc se presenta a continuación, mostrando y recordando los elementos principales del ambiente de trabajo:



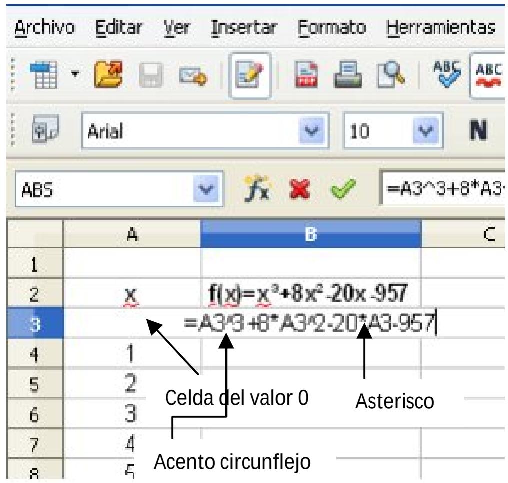
De entrada, se genera una tabla la cual permite al alumno observar el comportamiento de los valores de x y de la función del problema de la caja. El objetivo a cumplir es observar cuántos cambios de signo se encuentran en f(x).



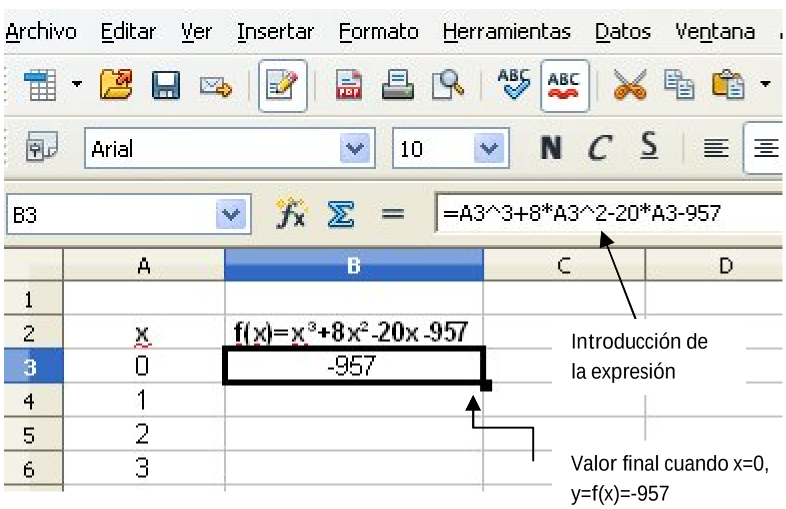
Es importante señalar, para el alumno, qué valores para *x* son necesarios en el problema (NCTM, 2000). Con fines ilustrativos y de exploración se puede pedirle al alumno que indique el motivo por el cual se empieza con el cero.



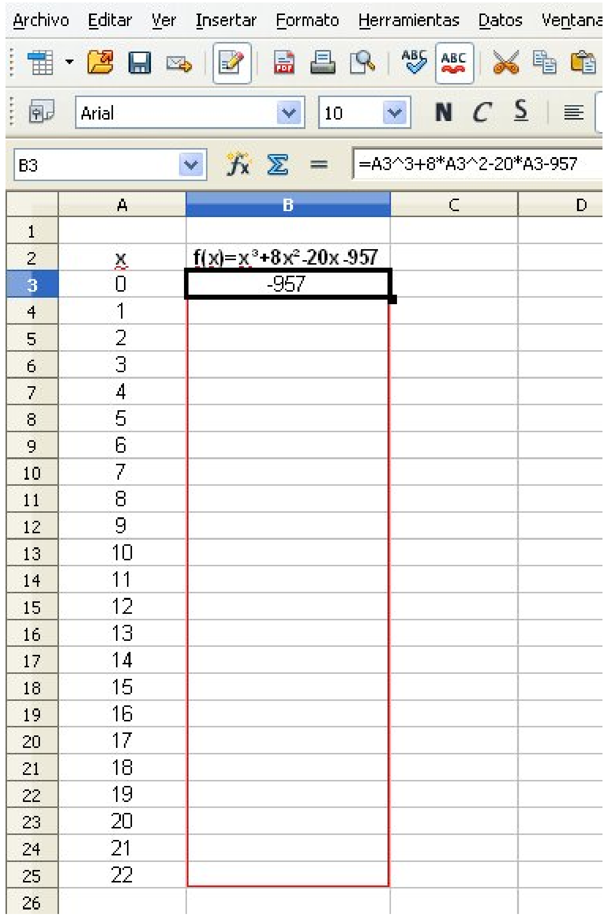
Ahora, se obtienen los valores para *y* o *f(x)* a partir de la celda inmediata a *f(x)*, esta es B3, en este caso, introduciendo de la siguiente forma:



Una vez obtenido el valor de *y* para *x = 0* (–957) se realiza el mismo procedimiento hecho con los valores de *x*; esto es, "arrastrar" o "jalar" con el cursor el cuadrito negro que se encuentra en el ángulo inferior derecho de la celda B3.

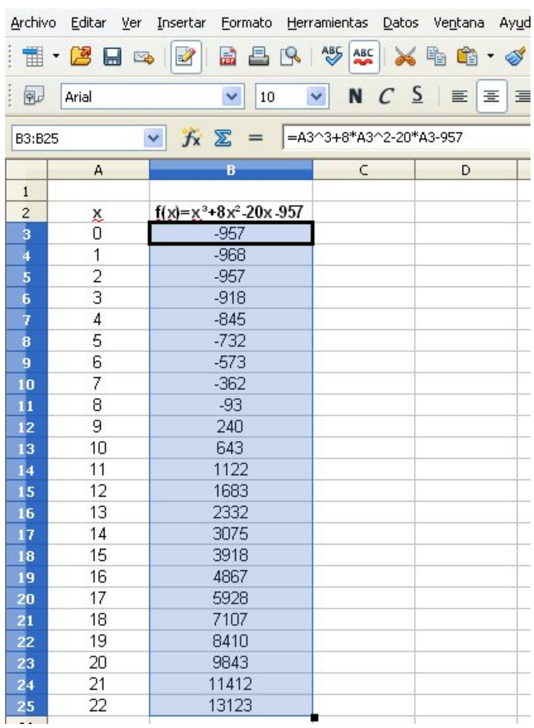


Entonces, al arrastrar el cursor se observa algo como lo siguiente:



	A	B	C	D
1				
2	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$		
3	0	-957		
4	1			
5	2			
6	3			
7	4			
8	5			
9	6			
10	7			
11	8			
12	9			
13	10			
14	11			
15	12			
16	13			
17	14			
18	15			
19	16			
20	17			
21	18			
22	19			
23	20			
24	21			
25	22			
26				

Por lo que la tabla generada es la siguiente:



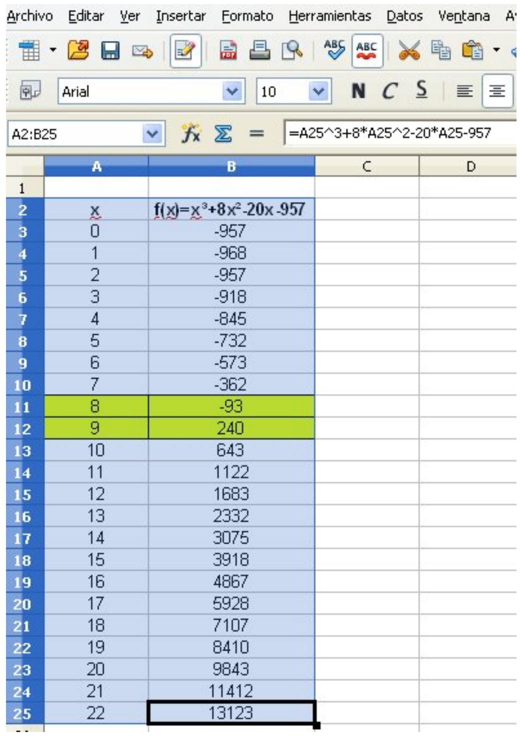
	A	B	C	D
1				
2	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$		
3	0	-957		
4	1	-968		
5	2	-957		
6	3	-918		
7	4	-845		
8	5	-732		
9	6	-573		
10	7	-362		
11	8	-93		
12	9	240		
13	10	643		
14	11	1122		
15	12	1683		
16	13	2332		
17	14	3075		
18	15	3918		
19	16	4867		
20	17	5928		
21	18	7107		
22	19	8410		
23	20	9843		
24	21	11412		
25	22	13123		

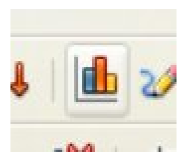
Es momento para que el alumno identifique los cambios de signo en la tabla, con lo cual se inicia en sí el procedimiento de métodos numéricos. La importancia de este ejercicio muestra cuántas raíces tendrá qué buscar el alumno, ya sean enteras o racionales y cuántos cambios de signo encontrará cuando las raíces no pertenecen a ninguna de las dos anteriores. De aquí, obsérvese cómo los valores se acercan al 0 de x = 0 a x = 8. De 8 a 9 se encuentra el cambio de signo y de 9 en adelante los valores aumentan sin límite.

A partir de los valores de *y=f(x)* puede preguntarse a los alumnos el significado que tienen esos valores en relación al contexto del problema. Recuérdese del significado de los valores de *f(x)*: como al trabajar con la función, esperamos que estos valores estén muy cercanos a cero, por lo que a los alumnos se les pide el significado de las celdas que están obscurecidas (filas 11 y 12).

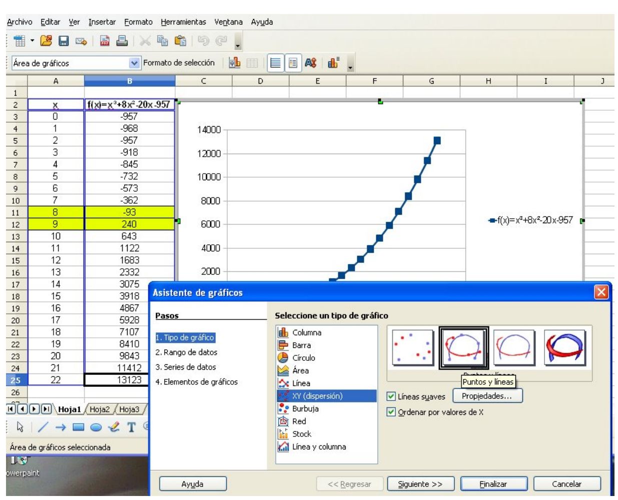
	A	B
1		
2	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$
3	0	-957
4	1	-968
5	2	-957
6	3	-918
7	4	-845
8	5	-732
9	6	-573
10	7	-362
11	8	-93
12	9	240
13	10	643
14	11	1122
15	12	1683
16	13	2332
17	14	3075

Ahora, a partir de estos valores, el alumno ya habrá deducido, por lo visto anteriormente que la gráfica sólo corta al eje x una sola vez; viene subiendo la curva de izquierda a derecha, esto es, la curva asciende; baja un poco, vuelve a subir, corta al eje x y asciende para nunca bajar jamás. A continuación se genera la gráfica a partir de la tabla.

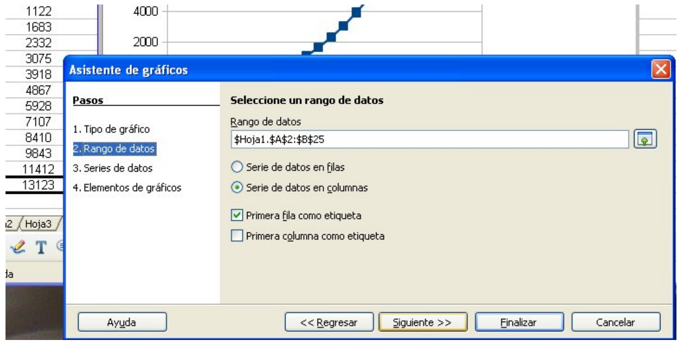


Una vez seleccionadas las celdas se oprime el botón “Gráfico”  .

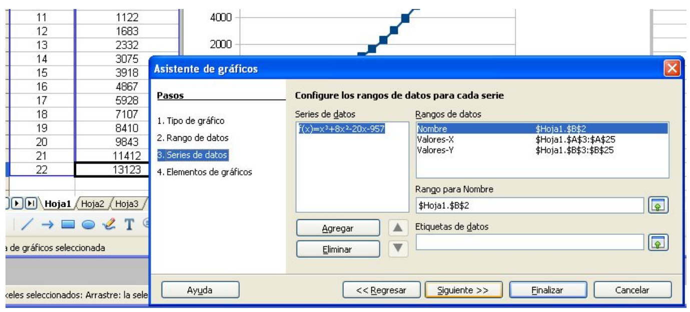
De la selección del gráfico aparece la ventana “Asistente de gráficos”. De aquí, seleccionar la opción XY (dispersión) puesto que se está trabajando con dos variables y seleccionar los dos cuadros mostrados con flechas y seleccionar “siguiente>>”.



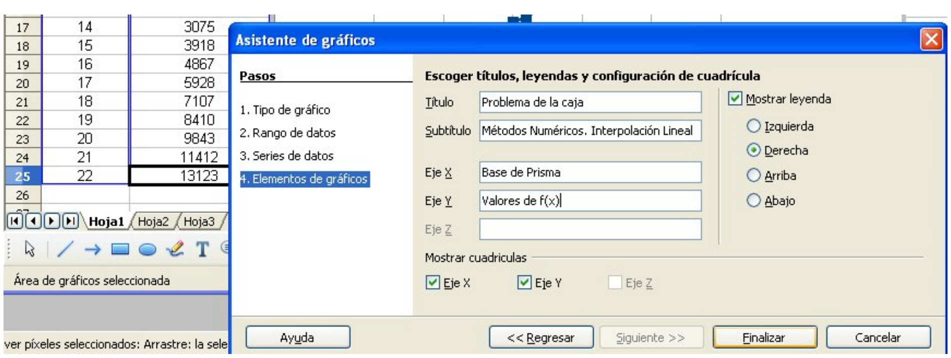
En el paso 2, “Rango de datos” el rango de celdas mostrado es el que se seleccionó y ya no es necesario hacer modificaciones. Seleccionar la opción “siguiente>>”.



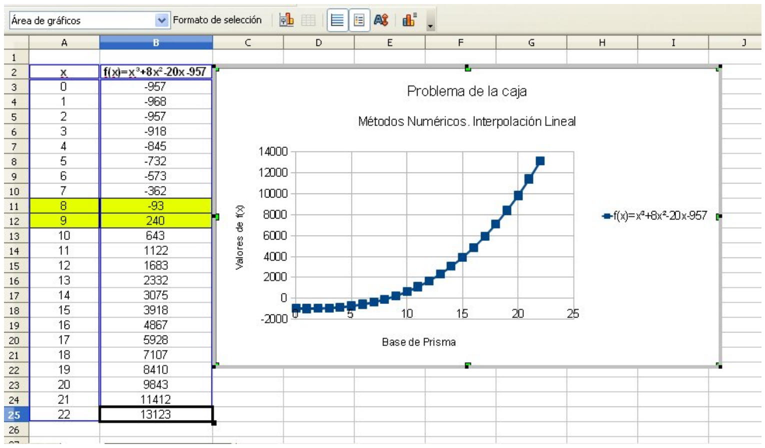
En el paso 3, “Serie de datos”, automáticamente se muestra la configuración de los rangos para cada columna de la tabla. Por el momento se deja tal y como está y seleccionar “siguiente>>”.

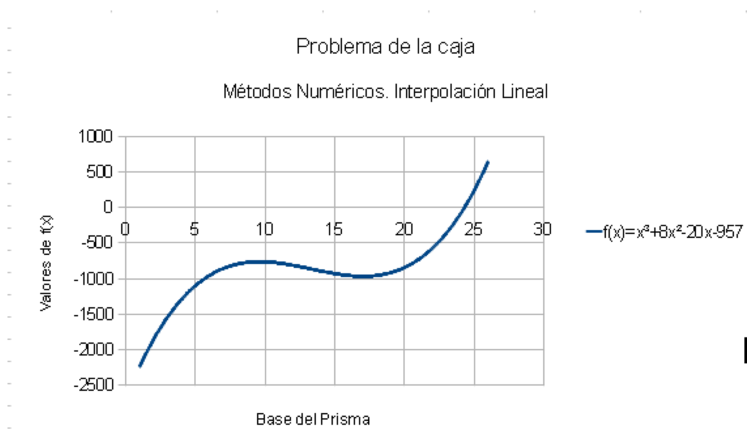


Por último, en el paso 4, “Elementos de gráficos”, se tienen varias opciones. En título se podrá escribir “Problema de la caja”. En subtítulos se puede escribir “Métodos numéricos. Interpolación lineal”. En eje <u>x</u> se podría escribir “Base de Prisma” y en eje <u>y</u>, tal vez “valor de *f(x)*, el cual se espera lo más próximo al cero. Seleccionar a continuación “Finalizar”.

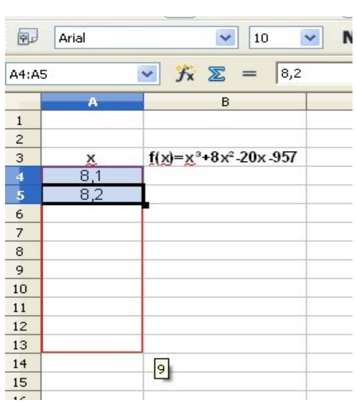


Se muestra a continuación la gráfica. Adviértase de la posibilidad de modificar valores en la tabla para mostrar más detalle.



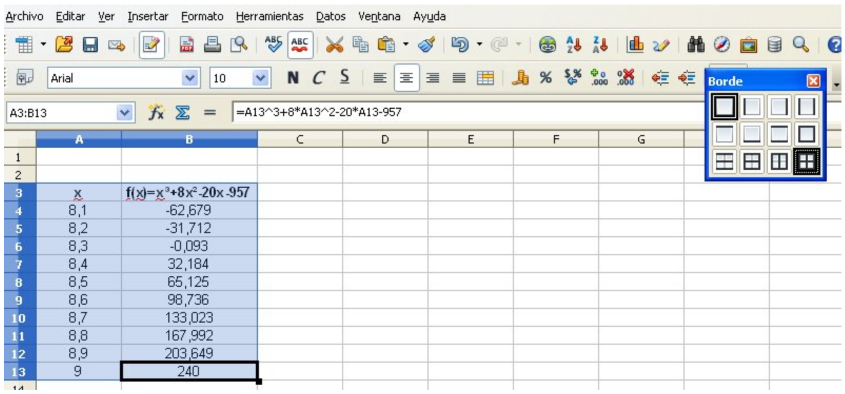


El objetivo de la gráfica es mostrar cuántos cortes en realidad tiene la curva con el eje *x*. Regresando a la tabla, con el intervalo de 8 a 9, se puede repetir el procedimiento anterior para valores racionales mostrados con números decimales, con valores crecientes en décimas. La observación que se haría consiste en investigar en esta hoja de cálculo si acepta el punto decimal o la coma.

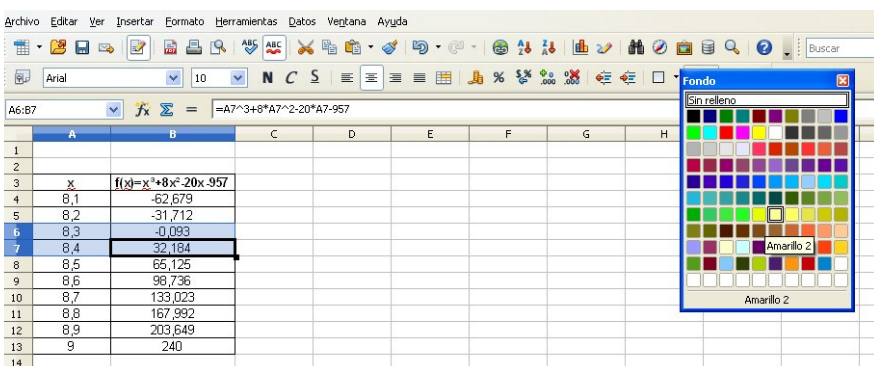


Si se seleccionan dos o más celdas adyacentes que contienen distintos números y se arrastra, las celdas se rellenan con el patrón aritmético que se recorre en los números. Ver también: Herramientas – Opciones – OpenOffice.org – Calc – Listas ordenadas.

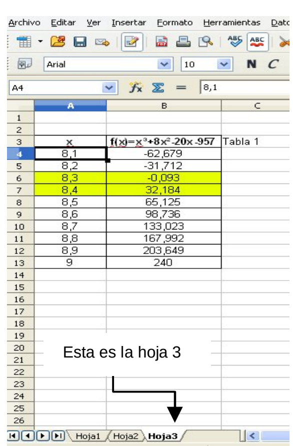
Se le puede dar formato a la tabla de tal forma que quede con un borde y resaltar las celdas donde se encuentre un cambio de signo como se muestra a continuación:



Se selecciona el conjunto de celdas (en este caso del rango A3 a la celda B13) y se oprime el botón o ícono "borde" mostrado en la imagen anterior, seleccionando la última opción de la lista. Se resaltan las celdas con signos contrarios en los valores de *f(x)* con el ícono "color de fondo", escogiendo un color que contraste con el texto, amarillo, por ejemplo.



La tabla quedaría de la siguiente forma en una hoja diferente, la 3, por ejemplo.

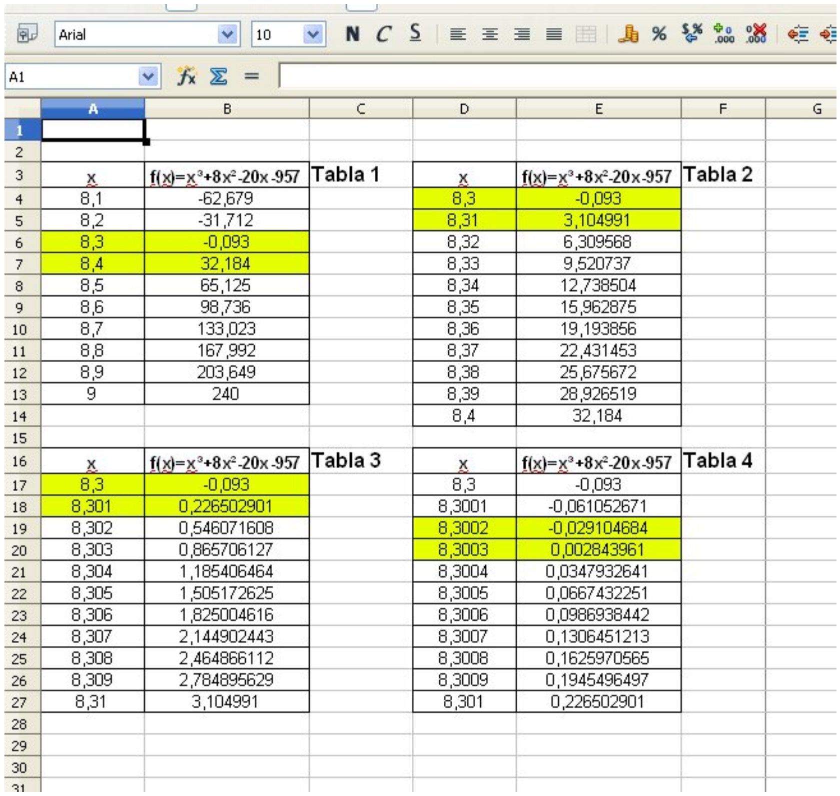


x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 1
8,1	-62,679	
8,2	-31,712	
8,3	-0,093	
8,4	32,184	
8,5	65,125	
8,6	98,736	
8,7	133,023	
8,8	167,992	
8,9	203,649	
9	240	

Se puede generar una nueva tabla, con número 2, a un lado de la tabla anterior con solo copiar el rango mostrado a continuación y copiarlo a partir de la celda D3, por ejemplo y repetir el proceso llevado a cabo anteriormente, observando que automáticamente cambian los valores para *f(x)* y aumentando una columna al final para contemplar el valor 8.4 y su correspondiente valor *f(x)*, seleccionando las celdas D13 y E13, respectivamente, del ángulo inferior derecho. Además, se seleccionaron las celdas con cambio de signo y se resaltan con un color que haga contraste con los números, por ejemplo y en este caso, las filas D4:E4 y D5:E5.

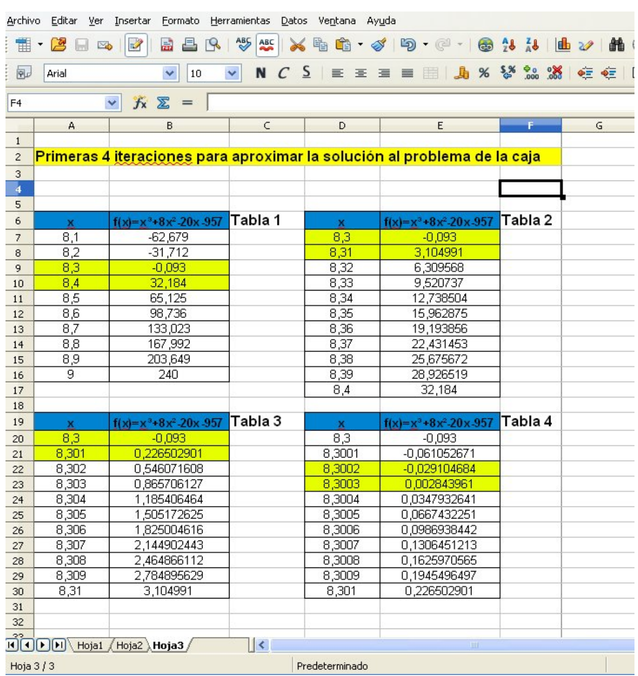
x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 1	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 2
8,1	-62,679		8,3	-0,093	
8,2	-31,712		8,31	3,104991	
8,3	-0,093		8,32	6,309568	
8,4	32,184		8,33	9,520737	
8,5	65,125		8,34	12,738504	
8,6	98,736		8,35	15,962875	
8,7	133,023		8,36	19,193856	
8,8	167,992		8,37	22,431453	
8,9	203,649		8,38	25,675672	
9	240		8,39	28,926519	
			8,4	32,184	

Ahora, se puede copiar la tabla 2 y pegarla debajo de la tabla 1 y hacer las modificaciones correspondientes para observar cómo los valores de *f(x)* se acercan cada vez más a cero, lo que significa que el valor correspondiente de *x* está cada vez más cerca del valor buscado en el problema. A continuación se muestran cuatro tablas (iteraciones), las cuales muestran que el valor buscado en el problema es $x = 8.30$ *cm*, como una muy buena aproximación.



	A	B	C	D	E	F
3	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 1	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 2
4	8,1	-62,679		8,3	-0,093	
5	8,2	-31,712		8,31	3,104991	
6	8,3	-0,093		8,32	6,309568	
7	8,4	32,184		8,33	9,520737	
8	8,5	65,125		8,34	12,738504	
9	8,6	98,736		8,35	15,962875	
10	8,7	133,023		8,36	19,193856	
11	8,8	167,992		8,37	22,431453	
12	8,9	203,649		8,38	25,675672	
13	9	240		8,39	28,926519	
14				8,4	32,184	
16	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 3	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 4
17	8,3	-0,093		8,3	-0,093	
18	8,301	0,226502901		8,3001	-0,061052671	
19	8,302	0,546071608		8,3002	-0,029104684	
20	8,303	0,865706127		8,3003	0,002843961	
21	8,304	1,185406464		8,3004	0,0347932641	
22	8,305	1,505172625		8,3005	0,0667432251	
23	8,306	1,825004616		8,3006	0,0986938442	
24	8,307	2,144902443		8,3007	0,1306451213	
25	8,308	2,464866112		8,3008	0,1625970565	
26	8,309	2,784895629		8,3009	0,1945496497	
27	8,31	3,104991		8,301	0,226502901	

En este momento se le recomienda al alumno seguir obteniendo más tablas o iteraciones o dejar por terminado el proceso. Esto cumple con el nivel 3 de los estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y puede mostrar una presentación de las iteraciones sus resultados escritos de la siguiente forma:



Primeras 4 iteraciones para aproximar la solución al problema de la caja

	A	B	C	D	E	F
6	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 1	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 2
7	8,1	-62,679		8,3	-0,093	
8	8,2	-31,712		8,31	3,104991	
9	8,3	-0,093		8,32	6,309568	
10	8,4	32,184		8,33	9,520737	
11	8,5	65,125		8,34	12,738504	
12	8,6	98,736		8,35	15,962875	
13	8,7	133,023		8,36	19,193856	
14	8,8	167,992		8,37	22,431453	
15	8,9	203,649		8,38	25,675672	
16	9	240		8,39	28,926519	
17				8,4	32,184	
19	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 3	x	$f(x)=x^3+8x^2-20x-957$	Tabla 4
20	8,3	-0,093		8,3	-0,093	
21	8,301	0,226502901		8,3001	-0,061052671	
22	8,302	0,546071608		8,3002	-0,029104684	
23	8,303	0,865706127		8,3003	0,002843961	
24	8,304	1,185406464		8,3004	0,0347932641	
25	8,305	1,505172625		8,3005	0,0667432251	
26	8,306	1,825004616		8,3006	0,0986938442	
27	8,307	2,144902443		8,3007	0,1306451213	
28	8,308	2,464866112		8,3008	0,1625970565	
29	8,309	2,784895629		8,3009	0,1945496497	
30	8,31	3,104991		8,301	0,226502901	

Con esta actividad se pretende hacer del alumno más consciente del manejo numérico. A fin de cuentas, a lo largo de la historia de la humanidad se ha trabajado con esta herramienta (Boyer, 1999).

BIBLIOGRAFÍA

Trabajos citados

Acevedo, J. I. (2007). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el dis.curso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. Tesis doctoral.* Barcelona: Universitat de Barcelona.

Aebli, H. (1995). *12 formas básicas de enseñar. Una didáctica basada en la psicología.* Madrid: Narcea.

Allen, J. (1998). *El hombre anumérico: el analfabetismo matemático y sus consecuencias.* Barcelona: Tusquets Editores.

Alvarado, M., & Brizuela, B. M. (2005). *Haciendo números.* México, D.F.: Paidós Mexicana, S.A.

Amara, G. (1993). El adolescente y la familia. *Perfiles Educativos. , 15* (60), 13-18.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México, D.F.: Trillas.

Batllori, A. (1993). El adolescente y la problemática familiar. *Perfiles educativos , 15* (60), 68-72.

Bell, E. T. (2009). *Los grandes matemáticos.* Buenos Aires: Losada.

Boggino, N. (2004). *El constructivismo en el aula.* Rosario: Homo Sapiens.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Britton, J. R., & Bello, I. (1986). *Álgebra y trigonometría contemporáneas.* México, D.F. : HARLA.

Bunge, M. (2002). *Epistemología.* México, D.F: Siglo XXI editores.

Bustos, F. (2002). Peligros del Constructivismo. *Educación y cultura , 6* (18), 204-210.

Butto, C., Delgado, J., & Zamora, J. (2003). Ejemplos del uso de la hoja de cálculo como herramienta didáctica. *Educación Matemática , 15* (3), 141-160.

Camarena, M. T. (1995). *Eticidad, valores sociales y Educación.* México, D.F.: UPN (Universidad Pedagógica Nacional).

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Métodos numéricos para ingenieros.* México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Collete, J.-P. (1998). *Historia de las matemáticas I.* México, D.F: Siglo veintiuno editores.

Comisión de Revisión y Ajuste del Sentido y Orientación del Área de Matemáticas. (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado .* México, D.F.: Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades.

Cruz, J. A. (2000). El constructivismo en la educación. (R. mexiquense, Entrevistador)

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno , 11* (35), 90-106.

De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* (43), 19-58.

De la Peña, J. A. (2002). *Algunos problemas de la educación en Matemáticas en México.* D.F.: Siglo XXI Editores; Instituto de Matemáticas, UNAM.

De la Rosa, A. (2001). La calculadora y los sistemas semióticos de representación. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas , 2* (1), 2-9.

De Zubiría, J. (2001). *De la Escuela nueva al Constructivismo. Un análisis crítico.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

El enigma de los códigos secretos. (2004). Madrid: LIBSA/Grupo editorial Diana.

Erikson, E. (2000). *Sociedad y Adolescencia.* México, D.F.: Siglo XXI.

Flórez, R. (2005). *Pedagogía del conocimiento.* Bogotá: McGraw-Hill Interamericana, S.A.

Gregorio, J. R. (2002). El constructivismo y las matemáticas. *Sigma , 21* (21), 113-129.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime , 1* (1), 5-21.

Hernández, C., Landa, E., Jiménez, C. J., Zaragoza, J. G., & Álvarez, C. A. (2003). *Programa operativo de Matemáticas III del programa oficial de 2003.* Naucalpan de Juárez: UNAM. CCH-Naucalpan.

Hernández, F. J., Monzoy, J. A., & Preisser, R. (2005). *Orientación y sentido de las áreas.* D.F.: Documento de trabajo, Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM.

Hernandez, G. (1998). *Paradigmas en psicología de la educación.* México, D.F.: Paidós.

Hernández, Roberto; Fernández, Carlos; Baptista, María. (2010). *Metodología de la investigación.* México, D.F: McGraw-Hill.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). *Learning and Teaching with understanding. En D.A. Grouws (Ed.).* New York: McMillan.

Johnson, L. M., & Steffensen, A. R. (1994). *Álgebra y trigonometría con aplicaciones.* México, D.F.: Trillas.

Kilpatrick, J. (1990). Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la matemática. *Educar , 2* (17), 37-52.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días II.* Madrid: Alianza Editorial.

Kline, M. (1985). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* México, D.F: Siglo XXI editores.

Lehmann, C. H. (1989). *Álgebra.* México, D.F.: Limusa.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 8* (2), 195-218.

Merino, C. (1993). Identidad de vida en la adolescencia media tardía. *Perfiles educativos , 15* (60), 44-48.

NCTM, N. C. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones vygotskyanas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 6* (1), 41-71.

Pérez, J. A. (2004). Las cuadráticas. Una aproximación constructivista. *Educación Matemática , 16* (3), 127-133.

Poveda, C. L. (2003). De la cívica, la ética y las aulas. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México) , XXXIII* (3), 143-149.

Rechimont, E. E., & Ascheri, M. E. (2003). Registros de representación semiótica en el concepto "resolución numérica de ecuaciones polinómicas". *Relme , 17* (I), 67-84.

Ruiz, J. M. (2002). La importancia de los métodos aproximados de solución. *Axioma , 4* (18), 14-15.

Russell, B. (1998). *Sociedad humana: ética y política.* Barcelona: Ediciones Altaya, S.A.

Sanabria, G. (2007). Hacia una propuesta didáctica para la enseñanza de Métodos Numéricos en secundaria. *Revista digital Matemática, Educación e internet* , 1-8.

Santillán, D. M. (2008). *Reporte: Dificultades en el aprendizaje de los alumnos en Álgebra y Geometría (Matemáticas I), generación 2008, y Álgebra y Geometría Analítica (Matemáticas III), generación 2007.* D.F.: Documento interno del Colegio de Ciencias y Humanidades, Dirección General, Secretaría de Planeación.

Saúl, A. M. (2003). *Paulo Freire y la formación de educadores: múltiples miradas.* D.F.: Siglo XXI editores.

Smith, S. A., Charles, R. I., Dossey, J. A., Keedy, M. L., & Bittinger, M. L. (1998). *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica.* Naucalpan de Juárez: Addison Wesley Longman de México, S.A. de C.V.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M., & Hernández, J. (1997). *Iniciación al álgebra.* Madrid: Síntesis.

Steiner, G. (2004). *Lecciones de los maestros.* México, D.F.: Fondo de Cultura Económica-Ediciones Siruela.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (1996). *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Valiente, S. (1995). Procesos operativos cotidianos extraescolares en adultos analfabetas de la tercera edad. *Anamnesis 3* , 1-3.

Vargas, Z. R. (2004). Desarrollo moral, valores y ética; una investigación dentro del aula. *Revista Educación , 28* (2), 91-104.

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2000). *Álgebra y Trigonometría.* Santafé de Bogotá: McGraw-Hill.