



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – ANÁLISIS Y DISEÑO DE CIMENTACIONES

INFLUENCIA DE LA INFILTRACIÓN DE AGUA EN LA ESTABILIDAD DE  
TALUDES

MODALIDAD DE GRADUACIÓN: TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
RIVERA CARMONA DELFINO

TUTOR PRINCIPAL:  
M.I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. JUNIO 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Echavéz Aldape Gabriel.

Secretario: Dra. Reyes Chavéz Lilia.

Vocal: M.I. Deméneghi Colina Agustín.

1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Acosta Flores José Jesús.

2<sup>do</sup> Suplente: M. en I. Zea Constantino Carmelino.

Lugar donde se realizó la tesis: Unidad de Posgrado, Facultad de Ingeniería.

**TUTOR DE TESIS:**

M.I. Deméneghi Colina Agustín

-----  
**FIRMA**

*LA FUERZA MOTRIZ DE LA INNOVACIÓN MATEMÁTICA, HA SIDO EL  
DESEO POR ENTENDER COMO FUNCIONA LA NATURALEZA.*

*Sir Isaac Newton*

*LOS FLUIDOS SON MUCHO MÁS SENCILLOS DE BEBER QUE DE ENTENDER*

*Alan Newell*

*TODA LA TEORÍA DEL MOVIMIENTO DE LOS FLUIDOS HA SIDO  
REDUCIDA A LA SOLUCIÓN DE FÓRMULAS ANALÍTICAS*

*Leonhard Euler*

*Quiero dedicar esta tesis a mis padres, por haber confiado ¡que en el futuro!, el saber puede cambiar la suerte de las personas, por sus enormes sacrificios, titánica paciencia e imperecedero amor. Que sea esta tesis un pequeño reconocimiento a su lucha incansable e indomable y un homenaje a la gran familia que consolidaron. Gracias por haberme enseñado a ser feliz independientemente de las circunstancias y momentos vividos.*

*Delfino Rivera*

“Primero fue un sollozo subterráneo que remeció los campos de algodón, encrespándolos como una espumosa ola. Los geólogos habían instalado sus máquinas de medir con semanas de anticipación y ya sabían que la montaña había despertado otra vez. Desde hacía mucho pronosticaban que el calor de la erupción podía desprender los hielos eternos de las laderas del volcán, pero nadie hizo caso de esas advertencias, porque sonaban a cuento de viejas. Los pueblos del valle continuaron su existencia sordos a los quejidos de la tierra, hasta la noche de ese miércoles de noviembre aciago, cuando un largo rugido anunció el fin del mundo y las paredes de nieve se desprendieron, rodando en un alud de barro, piedras y agua que cayó sobre las aldeas, sepultándolas bajo metros insondables del vómito telúrico. Apenas lograron sacudirse la parálisis del primer espanto, los sobrevivientes comprobaron que las casas, las plazas, las iglesias, las blancas plantaciones de algodón, los sombríos bosques del café y los potreros de los toros sementales habían desaparecido. Mucho después, cuando llegaron los voluntarios y los soldados a rescatar a los vivos y sacar la cuenta de la magnitud del cataclismo, calcularon que bajo el lodo había más de veinte mil seres humanos y un número impreciso de bestias, pudriéndose en un caldo viscoso. También habían sido derrotados los bosques y los ríos y no quedaba a la vista sino un inmenso desierto de barro.

[...] En el primer noticiario de la mañana vi aquel infierno, donde flotaban cadáveres de hombres y animales arrastrados por las aguas de nuevos ríos, formados en una sola noche por la nieve derretida. Del lodo sobresalían las copas de algunos árboles y el campanario de una iglesia, donde varias personas habían encontrado refugio y esperaban con paciencia a los equipos de rescate. Centenares de soldados y de voluntarios de la Defensa Civil intentaban remover escombros en busca de los sobrevivientes, mientras largas filas de espectros en harapos esperaban su turno para un tazón de caldo. Las cadenas de radio informaron que sus teléfonos estaban congestionados por las llamadas de familias que ofrecían albergue a los niños huérfanos. Escaseaban el agua para beber, la gasolina y los alimentos. Los médicos, resignados a amputar miembros sin anestesia, reclamaban al menos sueros, analgésicos y antibióticos, pero la mayor parte de los caminos estaban interrumpidos y además la burocracia retardaba todo. Entretanto, el barro contaminado por los cadáveres en descomposición amenazaba de peste a los vivos.

Azucena temblaba apoyada en el neumático que la sostenía sobre la superficie. La inmovilidad y la tensión la habían debilitado mucho, pero se mantenía consciente y todavía hablaba con voz perceptible cuando le acercaban un micrófono. Su tono era humilde, como si estuviera pidiendo perdón por causar tantas molestias...”

Isabel Allende, 2002, De barro estamos hechos, Cuentos de Eva Luna.

## RESUMEN

Los deslizamientos constituyen uno de los procesos geológicos con mayor repercusión socioeconómica en el mundo. Por ello, la comunidad científica se ha interesado en estudiar y analizar este fenómeno con todas las herramientas desarrolladas hasta el momento. En este contexto, la modelización numérica, como herramienta de estudio y análisis, tiene por objeto reproducir este tipo de fenómenos minimizando el número de simplificaciones a considerar. Dada la complejidad del fenómeno, la simulación del mismo ha dado lugar a dos líneas de investigación; la primera trata la iniciación del movimiento y tiene por objetivo reproducir la rotura del geomaterial. Una vez desencadenado el deslizamiento, el comportamiento del geomaterial se asemeja al de un fluido y el problema puede ser descrito en el marco de la dinámica de fluidos. Este cambio de condiciones ha dado lugar a una segunda línea de investigación que se ha especializado en la simulación de la propagación del movimiento. Esta tesis se enmarca dentro de esta segunda línea de investigación, pues presenta una modelización numérica de los geomateriales fluidificados aplicable a la simulación de los deslizamientos rápidos de ladera y específicamente a los flujos de derrubios.

A partir de este modelo y teniendo en cuenta las características de la propagación de los deslizamientos rápidos, se han integrado las ecuaciones del modelo según la dirección vertical del flujo, obteniéndose de este modo un modelo integrado en profundidad acoplado. El modelo obtenido se completa mediante una ecuación adicional (ley reológica), que refleja el comportamiento del geomaterial considerado.

Se presenta en este trabajo de tesis un modelo para la simulación de flujos de derrubios que consta de tres componentes. La primera, el modelo matemático, una formulación integrada en profundidad, acoplada, no lineal, planteada en una forma pseudo lagrangiana, donde se cumple los principios fundamentales de la conservación de la masa y del momento lineal en el contexto de la mecánica del medio continuo. La segunda, el modelo reológico, que aporta una expresión matemática adicional al sistema anterior, en la que están relacionadas las tensiones y las velocidades de deformación. Se han asociado las siguientes leyes reológicas: friccional puro, Bingham puro y Bingham con evolución. La tercera, el modelo numérico, con el que se realiza la integración en el espacio y en el tiempo del sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas de primer orden, que conforman el modelo matemático y el reológico. El esquema de resolución está basado en un método Lagrangiano sin malla conocido como Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH).

El modelo de simulación integrado en profundidad SPH, proporciona parámetros con los que se puede zonificar el riesgo, diseñar medidas estructurales de prevención y mitigación tanto a corto como a largo plazo, velocidad de avance, longitud, extensión del movimiento, altura máxima sobre el perfil topográfico y la profundidad del flujo. El modelo SPH ha sido implementado para simular los lahares acontecidos el 22 de Enero del 2001, en el volcán de Popocatépetl México, habiendo sido comparados los resultados del modelo con los datos proporcionados por CENAPRED.

## ABSTRACT

Landslides are one of the largest geological processes with socio-economic impact in the world. Therefore, the scientific community has been interested in studying and analyzing this phenomenon with all the tools developed so far. In this context, numerical modeling as a tool for study and analysis, aims to replicate this phenomenon minimizing the number of simplifications to consider. Given the complexity of the phenomenon, the simulation of it has led to two lines of research: the first is the initiation of the movement and aims to break geomaterial. Once triggered the sliding geomaterial behavior resembles that of a fluid and the problem can be described in the context of fluid dynamics. This change in conditions has led to a second line of research that has specialized in the simulation of the spread of the movement. This thesis is part of this second line of research, it presents a numerical modeling of fluidized geomaterials applicable to the simulation of the propagation of fast landslides hillside and specifically debris flows.

From this model and taking into account the characteristics of the propagation of fast landslides, have integrated the model equations in the vertical direction of flow, thus obtaining depth integrated model coupled. The resulting model is completed by an additional equation (rheological law) which reflects the behavior of geomaterial considered.

We present in this thesis work a model for the simulation of debris flows that consisting of three components. First, the mathematical model, a formulation depth integrated coupled nonlinear, raised in a pseudo Lagrangian which satisfies the fundamental principles of conservation of mass and momentum in the context of continuum mechanics. Secondly, the rheological model, which provides an additional mathematical expression previous system, which are related to the stresses and strain rates. Have been associated with the following rheological laws: frictional pure, Bingham pure and Bingham evolution. Third, the numerical model, with which the integration is performed in the space and time of hyperbolic system of differential equations of first order, that make up the mathematical model and rheology. Resolution scheme is based on a Lagrangian method known as without mesh Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH).

The simulation model SPH depth integrated, provides fundamental parameters and risk zoning in the design of structural measures to prevent and mitigate both the short and long term, such as speed, length, range of motion and flow depth.

The simulation model SPH depth integrated provides parameters that can risk zoning, design structural measures to prevent and mitigate the short and long term, speed, length, range of motion, maximum height of the profile topographic and depth of flow. The SPH model has been implemented to simulate the lahars that occurred on January 22, 2001, in Mexico Popocatepetl volcano, having been compared the model results with the data provided by CENAPRED.



## Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

### Índice

	Pág.
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>I.1 Objetivo del trabajo de tesis</b>	<b>15</b>
<b>II. FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE MEDIOS POROSOS</b>	<b>16</b>
<b>II.1 Medio poroso definición</b>	<b>17</b>
<b>II.2 Mecánica de fluidos en medios porosos</b>	<b>20</b>
<b>III. PROPIEDADES FÍSICAS E HIDRODINÁMICAS EN MEDIOS POROSOS</b>	<b>109</b>
<b>III.1 Porosidad</b>	<b>115</b>
<b>III.2 Relación de vacíos</b>	<b>119</b>
<b>III.3 Tortuosidad</b>	<b>120</b>
<b>III.4 Área Superficial Específica</b>	<b>122</b>
<b>III.5 Contenido volumétrico de agua</b>	<b>123</b>
<b>III.6 Saturación</b>	<b>124</b>
<b>III.7 Conductividad hidráulica</b>	<b>125</b>
<b>III.8 Presión de poro</b>	<b>141</b>
<b>III.9 Infiltración</b>	<b>150</b>
<b>III.10 Succión</b>	<b>171</b>
<b>III.11 Ley de Darcy</b>	<b>197</b>
<b>IV. MODELOS REOLÓGICOS</b>	<b>207</b>
<b>IV.1 Mecanismos de fluidificación</b>	<b>209</b>
<b>IV.2 Modelos reológicos</b>	<b>211</b>
<b>IV.3 Modelos reológicos integrados en profundidad</b>	<b>226</b>

<b>IV.4</b>	<b>Resistencia al corte</b>	<b>250</b>
<b>V.</b>	<b>DESLIZAMIENTO ANÁLISIS Y ESTUDIO</b>	<b>253</b>
<b>V.1</b>	<b>Definición de deslizamiento</b>	<b>256</b>
<b>V.2</b>	<b>Deslizamientos rápidos</b>	<b>264</b>
<b>V.3</b>	<b>Evaluación de la estabilidad de taludes</b>	<b>281</b>
<b>VI.</b>	<b>APLICACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO A LOS DESLIZAMIENTOS EN EL VOLCÁN DEL POPOCATÉPETL</b>	<b>289</b>
<b>VI.1</b>	<b>Deslizamiento de los lahares del Popocatepetl</b>	<b>290</b>
<b>VI.2</b>	<b>Área de estudio</b>	<b>293</b>
<b>VI.3</b>	<b>Lahares del Popocatepetl y datos de partida</b>	<b>295</b>
<b>VI.4</b>	<b>Elaboración de la malla y condición inicial</b>	<b>301</b>
<b>VI.5</b>	<b>Resultados</b>	<b>303</b>
<b>VII.</b>	<b>CONCLUSIÓN</b>	<b>325</b>
	<b>REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>328</b>
	<b>ANEXO</b>	<b>333</b>

## Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

### Índice

	Pág.
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>I.1 Objetivo del trabajo de tesis</b>	<b>15</b>
<b>II. FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE MEDIOS POROSOS</b>	<b>16</b>
<b>II.1 Medio poroso definición</b>	<b>17</b>
<b>II.2 Mecánica de fluidos en medios porosos</b>	<b>20</b>
II.2.1 Propiedades de los fluidos	24
II.2.1.1 Densidad $\rho$	26
II.2.1.2 Peso específico ( $\gamma$ )	28
II.2.1.3 Viscosidad $\mu$	<b>29</b>
II.2.1.4 Compresibilidad	36
II.2.1.5 Tensión superficial	38
II.2.1.6 Ángulo de contacto	42
II.2.1.7 Efectos capilares	44
II.2.1.8 Coeficiente de dilatación térmica	49
II.2.1.9 Clasificación de los flujos	57
II.2.2 Comportamiento dinámico de los fluidos	60
II.2.2.1 Conservación de la masa o ecuación de continuidad	65
II.2.2.2 Segunda ley de Newton o ecuación de cantidad de movimiento	68
II.2.2.3 Potencial de velocidades	78
II.2.2.4 Ecuaciones de Navier – Stokes	86
II.2.3 Ecuaciones básicas de mecánica de fluidos para medios porosos	88
II.2.3.1 Ecuación de continuidad	89
II.2.3.2 Ecuación de movimiento	100
II.2.3.3 Ecuación de la energía	105

<b>III.</b>	<b>PROPIEDADES FÍSICAS E HIDRODINÁMICAS EN MEDIOS POROSOS</b>	<b>109</b>
<b>III.1</b>	<b>Porosidad</b>	<b>115</b>
	III.1.1 Porosidad cinemática ( $n_e$ )	118
<b>III.2</b>	<b>Relación de vacíos</b>	<b>119</b>
<b>III.3</b>	<b>Tortuosidad</b>	<b>120</b>
<b>III.4</b>	<b>Área Superficial Específica</b>	<b>122</b>
<b>III.5</b>	<b>Contenido volumétrico de agua</b>	<b>123</b>
<b>III.6</b>	<b>Saturación</b>	<b>124</b>
<b>III.7</b>	<b>Conductividad hidráulica</b>	<b>125</b>
	III.7.1 Permeámetro de Carga Constante	134
	III.7.2 Permeámetro de Carga Variable	135
	III.7.3 Estimación de $K_g$ a partir de la Textura del suelo	137
<b>III.8</b>	<b>Presión de poro</b>	<b>141</b>
	III.8.1 Tensiones Capilares	146
<b>III.9</b>	<b>Infiltración</b>	<b>150</b>
	III.9.1 Infiltración y exfiltración	154
	III.9.2 Ecuaciones que gobiernan el proceso de infiltración en un medio poroso no saturado	156
	III.9.3 Método de Green y Ampt	161
	III.9.4 Modelo de Green y Ampt para dos capas	165
	III.9.5 Ecuación de Richards	166
	III.9.6 Ecuación de Iverson	169
<b>III.10</b>	<b>Succión</b>	<b>171</b>
	III.10.1 Componentes de succión	172
	III.10.1.1 Potencial osmótico	172
	III.10.1.2 Potencial mátrico ( $\psi_M$ )	174
	III.10.1.3 Potencial gravitacional ( $\psi_g$ )	175
	III.10.1.4 Potencial de presión ( $\psi_p$ )	176
	III.10.2 Curva característica suelo – agua (SWCC)	176
	III.10.2.1 Regiones de la curva característica	179
	III.10.2.2 Factores de influencia en la relación succión – humedad	180
	III.10.3 Tipo de suelo y arreglo estructural	182
	III.10.4 Modelos matemáticos de curva característica	183
	III.10.4.1 Modelo de distribución de tamaños de poros	184
	III.10.4.2 Modelo de Gardner (1958)	188

III.10.4.3	Modelo de van Genuchten	189
III.10.4.4	Modelo de Fredlund y Xing (1994)	192
III.10.4.5	Comparación de la SWCC a partir de las ecuaciones de Van Genuchten, Fredlund y Xing	194
<b>III.11</b>	<b>Ley de Darcy</b>	<b>197</b>
III.11.1	El gradiente hidráulico	199
III.11.2	Velocidad de flujo	200
III.11.3	Límite de validez de la ley de Darcy	202
III.11.4	Generalización de la ley de Darcy	203
<b>IV.</b>	<b>MODELOS REOLÓGICOS</b>	<b>207</b>
<b>IV.1</b>	<b>Mecanismos de fluidificación</b>	<b>209</b>
<b>IV.2</b>	<b>Modelos reológicos</b>	<b>211</b>
IV.2.1	Marco general	212
IV.2.2	Fluidos Newtonianos	216
IV.2.3	Fluidos de Bagnold	217
IV.2.4	Fluidos de Bingham	218
IV.2.5	El modelo viscoplástico generalizado de Chen & Ling	221
IV.2.5.1	El modelo friccional	225
<b>IV.3</b>	<b>Modelos reológicos integrados en profundidad</b>	<b>226</b>
IV.3.1	El modelo de deslizamiento infinito	236
IV.3.2	Fluidos Newtonianos	240
IV.3.3	Fluidos de Bingham	242
IV.3.3.1	Reología y estructura del flujo	242
IV.3.3.2	Fricción de fondo	245
IV.3.3.3	El factor de corrección	248
IV.3.3.4	Tensiones integradas en profundidad	249
<b>IV.4</b>	<b>Resistencia al corte</b>	<b>250</b>
IV.4.1	Ecuación de Fredlund	250
IV.4.2	Ecuación de Vanapalli	251
<b>V.</b>	<b>DESLIZAMIENTO ANÁLISIS Y ESTUDIO</b>	<b>253</b>
<b>V.1</b>	<b>Definición de deslizamiento</b>	<b>256</b>
V.1.1	Clasificación de los deslizamientos	259
V.1.2	Causas y mecanismos desencadenantes	263
<b>V.2</b>	<b>Deslizamientos rápidos</b>	<b>264</b>
V.2.1	Flujos de derrubios y coladas de barro	265

	V.2.1.1	Coladas de barro o tierra	267
	V.2.1.2	Flujo de derrubios	268
	V.2.1.3	Lahares	271
	V.2.2	Avalanchas granulares	275
	V.2.3	Flujos Deslizantes	277
<b>V.3</b>	<b>Evaluación de la estabilidad de taludes</b>		<b>281</b>
	V.3.1	Estudio de Freeze (1969)	282
	V.3.2	Estudio de Pradel y Raad (1993)	282
	V.3.3	Estudio de Anderson y Sitar (1995)	283
	V.3.4	Estudio de Ng y Shi (1998)	283
	V.3.5	Estudio de Gasmó, Rahardjo y Leong (2000)	284
	V.3.6	Estudio de Cho y Lee (2002)	285
	V.3.7	Estudio de Kim J., Jeong S., Park S., y Sharma J. (2004)	285
	V.3.8	Estudio de Cho (2009)	286
	V.3.9	Estudio de Lee L., Gofar N., Rahardjo H. (2009)	287
	V.3.10	Estudio de Lade (2010)	287
<b>VI.</b>	<b>APLICACIÓN DEL MODELADO NUMÉRICO A LOS DESLIZAMIENTOS EN EL VOLCÁN POPOCATÉPETL</b>		<b>289</b>
	<b>VI.1</b>	<b>Deslizamiento de los lahares del Popocatépetl</b>	<b>290</b>
	<b>VI.2</b>	<b>Área de estudio</b>	<b>293</b>
	<b>VI.3</b>	<b>Lahares del Popocatépetl y datos de partida</b>	<b>295</b>
		VI.3.1 El lahar del 1 de Julio de 1997	295
		VI.3.2 El lahar del 22 de Enero del 2001	298
	<b>VI.4</b>	<b>Elaboración de la malla y condición inicial</b>	<b>301</b>
	<b>VI.5</b>	<b>Resultados</b>	<b>303</b>
<b>VII.</b>	<b>CONCLUSIÓN</b>		<b>325</b>
	<b>REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA</b>		<b>328</b>
	<b>ANEXO</b>		<b>333</b>

# CAPÍTULO

# I

---

Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

## INTRODUCCIÓN

# CAPÍTULO

# I

# INTRODUCCIÓN

La historia de la humanidad ha girado siempre alrededor del agua, no solo como condiciones de sobrevivencia, también para la conservación de los ecosistemas naturales y como factor determinante del desarrollo de los pueblos. La vinculación del ser humano con el agua es tan fuerte que se convirtió en un factor de selección de asentamientos humanos, culturas milenarias florecieron en zonas favorables a la agricultura, como son las cuencas de los ríos. Es el caso de Mesopotamia, considerada la cuna de la civilización humana, surgida en el fértil valle del Éufrates y el Tigris; Egipto, una espléndida civilización que dependía por completo del Nilo y sus periódicas crecidas para su subsistencia, desarrollo y crecimiento. Muchas otras grandes ciudades, como Rotterdam, Londres, Montreal, París, Nueva York, Buenos Aires, Shanghái, Tokio, Chicago y Hong Kong deben su riqueza a la conexión o cercanía a estas importantes fuentes acuíferas que favorecen su prosperidad.

El agua es un recurso vital, es un elemento de la naturaleza, integrante de los ecosistemas naturales, fundamental para el sostenimiento y la reproducción de la vida en el planeta, constituye un factor indispensable para el desarrollo de los procesos biológicos que la hacen posible. El total del agua presente en el planeta, en todas sus formas, se denomina hidrosfera, cubre  $\frac{3}{4}$  partes (75%) de la superficie de la Tierra. Se puede encontrar esta sustancia en prácticamente cualquier lugar de la biosfera y en los tres estados de agregación de la materia: sólido, líquido y gaseoso. El 97 por ciento es agua salada, la cual se encuentra principalmente en los océanos y mares; sólo el 3 por ciento de su volumen es dulce, de esta última, un 1 % está en estado líquido, el 2% restante se encuentra en estado sólido en capas, campos y plataformas de hielo o banquisas en las latitudes próximas a los polos (Figura I.1). Fuera de las regiones polares el agua dulce se encuentra principalmente en humedales y en acuíferos subterráneos. En la superficie de la Tierra hay aproximadamente 1386 000 000 km<sup>3</sup> de agua que se distribuyen de la siguiente forma (Tabla I.1):

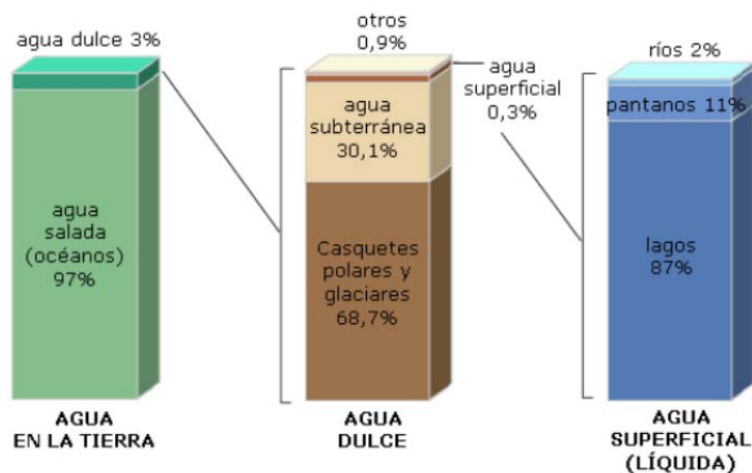


Figura I.1.- Representación gráfica de la distribución de agua en la superficie terrestre. (Custodio, 1976)



Tabla I.1.- Distribución del agua terrestre. (Adaptada de Custodio, 1976).

Situación del agua	Volúmen km <sup>3</sup>		Porcentaje	
	Agua dulce	Agua salada	Agua dulce	Agua total
Océanos y mares		1 338 000 000		96.5
Casquetes y glaciares polares	24 064 000		68.7	1.74
Agua subterránea salada		12 870 000		0.94
Agua subterránea dulce	10 530 000		30.1	0.76
Glaciares continentales y permafrost	300 000		0.86	0.022
Lagos de agua dulce	91 000		0.26	0.007
Lagos de agua salada		85 400		0.006
Humedad del suelo	16 500		0.05	0.001
Atmósfera	28 390		0.04	0.001
Embalses	11 470		0.03	0.0008
Ríos	2 120		0.006	0.0002
Agua biológica	1 120		0.003	0.0001
Total de agua	35 044 600	1 350 955 400	100	
Total de agua en la Tierra		1 386 000 000		100

El estado del agua depende de la fuerza de gravedad, si la Tierra fuese más pequeña, la menor gravedad ejercida sobre la atmósfera haría que ésta fuese más delgada, lo que redundaría en temperaturas extremas, evitando la acumulación de agua excepto en los casquetes polares (tal como ocurre en Marte). Algunos teóricos han sugerido que la misma vida, actuando como un macro organismo, mantiene las condiciones que permiten su existencia. La temperatura superficial de la tierra ha estado en constante variación a través de las eras geológicas, a pesar de los cambiantes niveles de radiación solar. Si el planeta Tierra fuese más grande, el agua que exista sobre él permanecería en estado sólido incluso a altas temperaturas, dada la elevada presión causada por la gravedad.

Este recurso encuentra su auto reproducción en el denominado ciclo del agua, lo que hace del agua un elemento renovable; sin embargo, el abuso de éste puede generar que la reproducción natural a la que está sujeta, se vea interrumpida y se convierta así, en un recurso natural limitado y vulnerable. El ciclo hidrológico debe entenderse como un fenómeno natural donde el agua permanece en constante movimiento, cambiando de un estado a otro; ya sea líquido (ríos, aguas subterráneas), gaseoso (nubes y vapor) o sólido (granizo, nieve, témpanos), se puede definir como:

- ❖ Conjunto de fenómenos físicos en los que concurre el agua. El ciclo se inicia con la evaporación que se produce en mares, depósitos superficiales y en la flora. Los vapores resultantes se elevan y forman nubes, que al enfriarse los condensan volviendo al vapor en diminutas partículas líquidas, las cuales al agruparse en diversas formas precipitan a la superficie de la Tierra. Depende de la temperatura puede precipitar en forma de nieve, granizo, lluvia y niebla. Al caer en forma de lluvia escurre por la superficie o se infiltra hacia el interior. Una parte circula después por los ríos o por el subsuelo, alimentando, lagos, mares, depósitos subterráneos. El resto lo toman los vegetales o se evapora, para reiniciar el proceso. (Monteverde, Belardino, Bravo, Ortiz, 2005; citado por Legorreta, 2005) (Figura I.2).



Figura I.2.- El ciclo hidrológico como ocurre en la naturaleza sin la interacción con el hombre (Pacheco M., 2008).

La mayor parte del vapor de agua que se desprende de los océanos vuelve a los mismos, pero el viento desplaza masas de vapor hacia la tierra firme, en la misma proporción en que el agua se precipita de nuevo desde la tierra hacia los mares (unos 45000 km<sup>3</sup> anuales). Ya en tierra firme, la evaporación de cuerpos acuáticos y la transpiración de seres vivos contribuye a incrementar el total de vapor de agua en otros 74000 km<sup>3</sup> anuales. Las precipitaciones, con un valor medio de 119000 km<sup>3</sup> anuales, pueden volver a la superficie de la Tierra en forma de líquido como lluvia, sólido (nieve o granizo), o de gas, formando nieblas o brumas. El agua de escurrimiento superficial suele formar cuencas, y los cursos de agua más pequeños suelen unirse formando ríos. El desplazamiento constante de masas de agua sobre diferentes terrenos geológicos es un factor muy importante en la conformación del relieve. Además, al arrastrar minerales durante su desplazamiento, los ríos cumplen un papel muy importante en el enriquecimiento del suelo. Parte de las aguas de esos ríos se desvían para su aprovechamiento agrícola. Los ríos desembocan en el mar, depositando los sedimentos arrastrados durante su curso, formando deltas. El terreno de estos deltas es muy fértil, gracias a la riqueza de los minerales concentrados por la acción del curso de agua. El agua dulce en la naturaleza se renueva gracias a la atmósfera que dispone de 12900 km<sup>3</sup> de vapor de agua. Sin embargo, se trata de un volumen dinámico que constantemente se está incrementando en forma de evaporación y disminuyendo en forma de precipitación, estimándose el volumen anual en forma de precipitación o agua de lluvia entre 113500 y 119000 km<sup>3</sup> en el mundo. Estos volúmenes suponen la parte clave de la renovación de los recursos naturales de agua dulce. En los países de clima templado a frío la precipitación en forma de nieve supone una parte importante del total. De esta forma el agua se convierte en un bien de primera necesidad para los seres vivos y un elemento natural imprescindible en la configuración de los sistemas medioambientales.

La grave crisis que enfrenta el planeta en cuanto a su disponibilidad y calidad, reclama de nuestra creatividad y compromiso social para encontrar alternativas de solución. Existe la necesidad de analizar en una forma integral, el problema de la escasez, de la calidad y del comportamiento humano con el recurso del agua. El mal manejo del recurso hídrico (a veces envuelto con actos de corrupción y enriquecimiento individual) aumenta la crisis en muchas regiones del mundo (Gleason, 2005; citado por Legorreta, 2005). Según el reciente Informe sobre Desarrollo Humano 2007/2008 de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), las proyecciones sobre los cambios climáticos y las implicaciones en la disponibilidad de agua, es de muy alto riesgo para la sustentabilidad de una vida digna en el planeta. Con el cambio climático y el aumento de las temperaturas se presentará un impacto fuerte en; las precipitaciones, aumento de la evaporación; los glaciares y la cobertura de nieve seguirán con una tendencia de retroceso.

A lo largo de los últimos siglos y especialmente desde la revolución industrial, se ha elevado la concentración de gases de efecto invernadero (GEI) que se emiten a la atmósfera, resultado de las

tecnologías y prácticas predominantes que han dinamizado las economías del mundo en estos años, en una medida que, de persistir esta tendencia, puede aumentar la temperatura de la atmósfera a un nivel que afectarían negativa e irreversiblemente a todos los sistemas del planeta. Resulta paradójico que los avances que permitieron la evolución histórica de la condición humana sean justamente los que ponen en riesgo la supervivencia a mediano y largo plazos. Según el Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA), el cambio climático podría ser el principal problema ambiental al que se enfrentará la humanidad en el transcurso del siglo XXI, junto a la sexta gran extinción de las especies (de cien a 1,000 veces más veloz que las anteriores), la disponibilidad de agua de calidad, la acumulación de residuos contaminantes, y los procesos de desertificación.

El cambio climático ha captado una atención sin precedentes a partir de 2007 (una década después de la firma del Protocolo de Kyoto de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático), movilizándolo la voluntad internacional para concertar acciones tendientes a mitigarlo y originando una preocupación creciente por sus potenciales implicaciones negativas en el desarrollo de los países. En 2007 se publicó el cuarto informe de evaluación del Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático (IPCC) y el informe Stern. El primero de ellos despejó incertidumbres sobre la responsabilidad humana en el componente principal del cambio del clima que afecta al planeta e ilustró extensivamente los esperables aumentos de la temperatura media del planeta, el nivel de los mares y los potenciales daños de esta alteración climática en distintos escenarios futuros. El informe Stern, por su parte, además de presentar estimaciones sobre los costos globales de bienestar y producto global, demostrando la conveniencia de actuar prontamente.

Asimismo, este último informe se pronunció por lo que crecientemente se ha convertido en el estándar de seguridad climática para los países industrializados y algunas economías emergentes con grandes emisiones de GEI: detener el aumento de la concentración de estos gases en la atmósfera de manera que se establezca en un rango de entre 450 y 550 partes por millón (ppm) hacia fines del siglo, lo que significaría un nivel de aumento global de la temperatura de entre 2°C y 6°C. Rebasado este nivel, los cambios en los sistemas del planeta ofrecerían reducidas alternativas de adaptación.

El futuro es aún más preocupante, el calentamiento medio proyectado para América Latina hacia fines del siglo varía, de acuerdo a los diferentes modelos climáticos, de 1°C a 4°C en escenarios que consideran ciertos niveles de mitigación de emisión, y de 2°C a 6°C en escenarios que no lo hacen. En la mayor parte de la región, la media anual de calentamiento probablemente sea más alta que la media global, con la excepción del sur de América Latina.

La incidencia de desastres naturales se ha triplicado en la década de los noventa, si la comparamos con la de los años setenta y las pérdidas económicas se han incrementado nueve veces. Asimismo, siete de los diez años más calurosos desde 1860 los encontramos en los años noventa del siglo XX. Sin poder correlacionar directamente la mayor incidencia de los desastres naturales con el cambio climático global, tampoco se puede negar que una de las causas probables sea precisamente la alteración de la atmósfera por parte de los humanos desde la Revolución Industrial. Por lo pronto, podemos decir que el origen del cambio climático se encuentra paradójicamente en la base del progreso de la civilización actual.

Nunca antes en la historia de la humanidad el hombre había logrado el nivel de desarrollo y conocimiento científico que tiene hoy en día. Nuestra civilización ha logrado conquistar el espacio, intercomunicar el mundo en fracciones de segundo, erradicar muchas enfermedades y ampliar las expectativas de vida de la población. Sin embargo nunca antes las formas de vida que conviven en

este extraordinario planeta, entre ellas la especie humana, habían estado amenazadas como lo están hoy en día.

A finales de los años noventa, un preeminente grupo mundial de expertos climáticos conformaron el Panel Intergubernamental sobre Cambio Climático (IPCC por sus siglas en inglés) y predijeron una variedad de impactos devastadores que incluye un aumento en la intensidad y número de eventos climáticos extremos que exacerbaban desastres naturales, la desaparición de bosques, el deshielo de los glaciares y la sequía en pastizales templados. La enorme diversidad geográfica hace extremadamente variados los patrones de vulnerabilidad al cambio climático.

Las predicciones que se venían haciendo sobre los posibles efectos del cambio climático y sus consecuencias han dejado de ser hipótesis para convertirse en realidades. Así lo evidencian las más recientes investigaciones y observaciones de los fenómenos climáticos y sus efectos sobre los ecosistemas y las poblaciones humanas. Aún si la humanidad lograra reducir o detener las emisiones de gases efecto invernadero a la atmósfera, la inercia del cambio climático y sus impactos se mantendrán a lo largo de los próximos dos siglos.

En toda la historia geológica y hasta el presente en el planeta se han liberado o absorbido diferentes fuerzas y energías, generándose procesos que modelan la faz terrestre, sin embargo una lista creciente de desastres con factura netamente humana, que se le puede considerar como amenazas al orden que ha guardado la Tierra durante milenios, incluye alteraciones de procesos y sistemas naturales como el cambio climático, daño en la capa protectora de ozono, desertización, pérdida de la biodiversidad, fragmentación de ecosistemas y la amenaza de las explosiones nucleares. Algunos de estos acontecimientos naturales se desencadenan súbitamente en pocos días o meses, con un flujo energético inusual o con una fuerza descomunal que produce transformaciones climatológicas, hidrológicas, oceanográficas geológicas y geográficas de gran magnitud y extensión.

Los sucesos catastróficos que derivan de una variedad de fenómenos naturales con manifestación extrema son: inundaciones, tifones, huracanes y ciclones, tornados, vendavales y tormentas eléctricas, ventiscas y nevadas, ondas cálidas y ondas frías, deslizamientos, derrumbes y avalanchas, terremotos (por desplazamiento de fallas locales o por movimientos de placas tectónicas), maremotos (tsunami), granizadas, heladas, sequías y tormentas de arena y polvaredas, erupciones volcánicas.

El desarrollo rápido de la población mundial, con su característica concentración en densos centros urbanos, ha hecho que los daños en vidas y materiales se noten cada vez con mayor intensidad. La estadística de las catástrofes de origen natural indica que durante el siglo que recién termina ha aumentado la frecuencia de los fenómenos de índole hidrometeorológico, mientras que los de origen sísmico, vulcanológico y geológico mantienen los ritmos históricos.

No hay nada de natural en un desastre. La naturaleza está llena de amenazas; terremotos, erupciones volcánicas, inundaciones, etc., pero los humanos contribuimos a crear el desastre. No podemos impedir una erupción volcánica pero podemos evitar que sea un desastre. Cuando un volcán entra en erupción en una zona silvestre, se trata de una amenaza natural. Pero si entra en erupción cerca de una gran ciudad, lo más probable es que se convierta en un desastre y amenace las vidas de cientos de miles de personas y sus comunidades. Una vez entendido que existe una diferencia entre amenaza natural y desastre, comprenderemos que los desastres están inducidos, en gran parte, por los seres humanos, y que cada vez más se desencadenan a causa de las actividades humanas como la deforestación, la rápida urbanización, la degradación ambiental y el cambio climático.

Los procesos de remoción en masa tienen múltiples causas, tales como las condiciones geológicas, geomorfológicas y la intervención antrópica; sin embargo, un solo factor como la precipitación o el

deshielo, es considerado el estímulo externo que puede generar una respuesta casi inmediata de movilizar los materiales que conforman las laderas, sea por el rápido incremento de los esfuerzos o por la reducción de la resistencia. La lluvia y el deshielo como factor detonante en la ocurrencia de movimientos en masa ha sido estudiada por numerosos autores, algunos de estos estudios han abordado esta problemática utilizando la estadística, definiendo umbrales críticos que relacionan generalmente la intensidad y la magnitud de la lluvia con la ocurrencia de los movimientos en masa. Igualmente son explorados modelos físicos basados en patrones geotécnicos e hidrológicos que relacionan lluvias, presión de poros y estabilidad de taludes.

Los movimientos en masa son el producto de diversos elementos, donde la configuración morfológica y evolución de los taludes juegan un papel determinante (Brunsden, 2002; Griffiths et al., 2002; Hutchinson, 1995; citado por Legorreta, 2005). La definición más simple y ampliamente aceptada es la dada por Cruden (1991), quien define el término como el movimiento de una masa de roca, escombros o tierra a lo largo de un talud. Bajo esta definición existe una gran variedad de movimientos en masa. Algunos son lentos, pequeños e imperceptibles, en tanto otros involucran grandes volúmenes de material y alcanzan altas velocidades con una gran poder destructivo (GEMMA, 2007). La clasificación de movimientos en masa más ampliamente conocida y aceptada es propuesta por Varnes (1978) y actualizada por Cruden & Varnes (1996). Estos autores emplean como criterio principal para la clasificación, el tipo de movimiento y el tipo de material. Los tipos de movimientos definidos por estos autores son caídas, volcamientos, deslizamientos, flujos, y propagación lateral. En tanto los materiales los dividen en suelo y roca. Una gran complejidad de movimientos puede surgir de la combinación de estos criterios sencillos.

Los movimientos en masa son el producto del debilitamiento progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales de las vertientes por procesos naturales tales como meteorización, levantamientos tectónicos y actividades humanas que activan movimientos lentos, generalmente imperceptibles (Costa & Baker, 1981; Soeteres & van Westen, 1996), sin embargo, un solo factor, comúnmente la precipitación, un sismo o el deshielo, es considerado como el estímulo externo que puede generar una respuesta casi inmediata de movilizar los materiales que conforman los taludes, (Wang & Sassa, 2006; citado por Legorreta 2005).

De esta forma los factores que controlan la ocurrencia y distribución de los movimientos en masa pueden dividirse en dos categorías: las variables cuasi – estáticas o condicionantes y las variables dinámicas o detonantes. Las variables cuasi – estáticas, tales como las propiedades de los suelos, la topografía contribuyen a la susceptibilidad de las vertientes y definen la distribución espacial de los movimientos en masa. En tanto, las variables dinámicas, tales como el grado de saturación del suelo y la cohesión controlan los factores detonantes de taludes susceptibles. La climatología, los procesos hidrológicos, y las actividades humanas controlan a su vez las variables dinámicas, y caracterizan el patrón temporal de los movimientos en masa (Crosta & Fratiini, 2003).

Los movimientos en masa detonados por lluvias y deshielos, generalmente denominados deslizamientos superficiales planares o soil slip, se caracterizan por su pequeño espesor (0.3 – 2m) mucho menor a la longitud del movimiento, superficie de falla sub paralela a la pendiente y escarpe de área reducida (Anderson & Sitar, 1995). Estos movimientos son generados durante eventos intensos de lluvia por el aumento rápido de la presión de poros o por la pérdida del componente de cohesión aparente (Wang & Sassa, 2003; Terlien, 1998; Crosta, 1998; citado por Legorreta, 2005). Posteriormente el material desplazado, por procesos de licuación o reducción rápida de la resistencia al cortante en condiciones no drenadas (Anderson & Sitar, 1995), se convierte en un flujo que se propaga ladera abajo trasportando sedimentos del canal, incrementando el volumen de material inicial desplazado. Para suelos parcialmente saturados, Li et al. (2005) describen dicho proceso como el resultado de la infiltración de lluvia o agua del deshielo que reduce la succión de la matriz de los suelos en la ladera, esa reducción reduce a su vez la resistencia al cortante del

material. Una vez el suelo está completamente saturado, la succión desaparece completamente, y un nivel freático colgado con presión de poros positiva se desarrolla. Esta presión de poros positiva reduce aún más la resistencia al cortante aumentando la probabilidad de ocurrencia de un movimiento.

Gostelow (1991) e Iiritano et al. (1998) (Citados por Legorreta, 2005) consideran que la lluvia o el deshielo puede actuar de dos formas diferentes en la estabilidad de las laderas:

- (1) Eventos de lluvia o deshielo muy intensos causan una reducción de la resistencia al cortante por reducción de la cohesión aparente generando movimientos inicialmente superficiales.
- (2) Eventos de lluvia de larga duración que causan el incremento en la presión de poros sobre una superficie de falla potencial generando movimientos de masa mucho más profundos y frecuentemente a lo largo de superficies de cizalla pre existentes.

Los movimientos superficiales son usualmente detonados por lluvias cortas e intensas, en tanto que los movimientos profundos están más relacionados con la distribución y variación de la lluvia en periodos largos.

Wilson & Wieczorek (1995) (citado en Legorreta, 2005) sugieren que la precipitación puede inducir la generación de una zona saturada con el incremento lógico del nivel freático, especialmente para perfiles poco profundos; y por otro lado, Rahardjo et al. (1995) sugieren que un nivel freático colgado y temporal se forma en perfiles de suelo profundos, entre la superficie del terreno y el frente húmedo, reduciendo la presión de poros negativa e iniciando un flujo paralelo a la ladera que contribuye a la inestabilidad de la vertiente. Estas consideraciones permiten evaluar la presión de poros generada por el aumento de una capa saturada sobre una superficie de falla crítica predefinida, o por el contrario evaluar el desarrollo de la presión de poros a partir del avance de un frente húmedo.

Collins & Znidarcic (2004) proponen dos distintos mecanismos de falla generados por la infiltración. En el primer mecanismo, la falla ocurre al aumentar la presión de poro positiva originando licuación del material, en tanto el segundo mecanismo la falla ocurre en presiones de poros negativas donde el material está aún en estado no saturado y la falla ocurre por reducción de la succión y la masa se comporta similar a un cuerpo rígido. Suelos de grano fino y baja infiltración no tienden a desarrollar presiones de poros positivas y la falla ocurre generalmente por reducción de la resistencia al cortante causada por pérdida de succión. En general los movimientos en masa superficiales están asociados con el desarrollo de presiones de poros positivas mientras movimientos más profundos están asociados a pérdida de succión (Collins & Znidarcic, 2006).

Las propiedades del suelo y la intensidad de la lluvia ( $I$ ) son un factor primario que controla la inestabilidad de los taludes; la magnitud y tasa de reducción en el factor de seguridad ( $FS$ ) es directamente proporcional a la magnitud de la intensidad de lluvia, a mayor intensidad más rápidamente decrece el factor de seguridad (Rahardjo et al., 2007). Adicionalmente pequeñas variaciones en la conductividad hidráulica ( $k$ ) controlan la localización de la ocurrencia de movimientos en masa, lo que explica de cierta forma el carácter aleatorio en la distribución de los movimientos sobre una misma ladera aparentemente homogénea. Cho & Lee (2001) estudian los mecanismos de falla en taludes conformados por suelos residuales no saturados donde encuentran que el campo de los esfuerzos es modificado por la distribución de la presión de poros ( $\psi$ ), la cual es controlada por las variaciones espaciales de la conductividad hidráulica durante la infiltración de la lluvia o por el efecto del deshielo. Y aunque el talud es homogéneo texturalmente, la conductividad hidráulica tiene una distribución no homogénea ya que es una función del contenido de agua o de la succión.

La complejidad en encontrar las probabilidades de alcanzar una profundidad de saturación crítica y por lo tanto pronosticar la ocurrencia de movimientos en masa detonados por lluvias o el deshielo es función de una gran cantidad de parámetros involucrados e íntimamente relacionados (Figura I.3). El flujo de agua que entra al suelo ( $In$ ) es función de las propiedades del suelo, la lluvia ( $P$ ) y la morfología de la ladera ( $ML$ ); las características hidráulicas y la succión ( $-\psi$ ) son propiedades dominantes del suelo; mientras la intensidad de la lluvia ( $I$ ) y su duración ( $D$ ) son condiciones externas que inciden en la saturación del suelo (Wang & Shibata, 2007; citado por Legorreta, 2005). Otros factores que controlan la duración y cantidad de la precipitación crítica son el contenido volumétrico de agua en el suelo ( $\theta$ ) y la lluvia antecedente. En conclusión la mecánica, las propiedades físicas e hidráulicas de los suelos, el espesor del perfil de meteorización ( $Z$ ), y la cobertura vegetal ( $V$ ) contribuyen a la resistencia de los suelos y las condiciones de flujo sub superficial, induciendo condiciones variables de inestabilidad como respuesta a los patrones de lluvia.

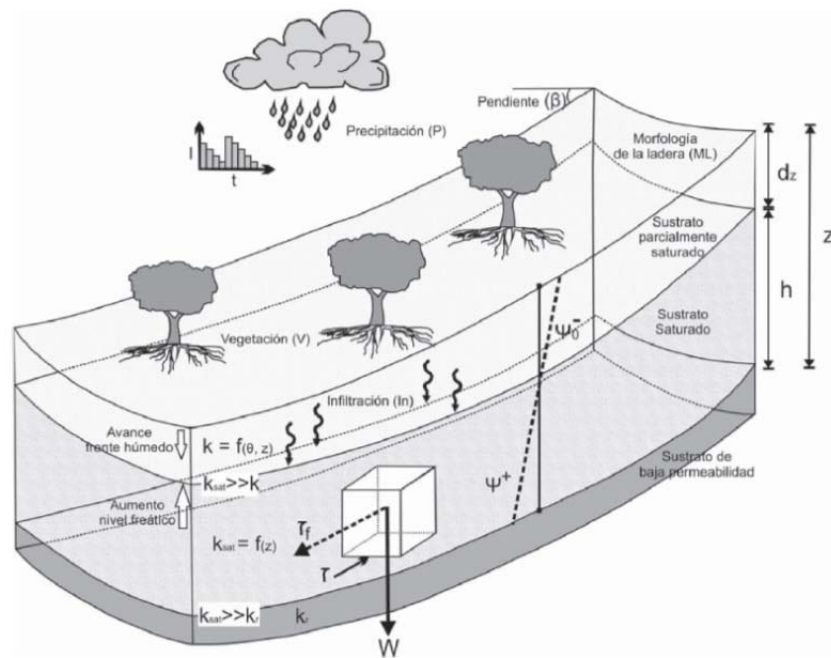


Figura I.3.- Representación esquemática tridimensional del perfil de meteorización sobre una ladera de morfología (ML) convergente bajo lluvia (P) y las variables hidrológicas - geotécnicas que influyen en la ocurrencia de movimientos en masa: intensidad de la precipitación (I), contenido de agua volumétrico ( $\theta$ ), presión de poros positiva ( $\psi^+$ ) y negativa o succión ( $\psi^-$ ), permeabilidad ( $k$ ), peso del suelo ( $W$ ), vegetación (V), infiltración (In), pendiente de la ladera ( $\beta$ ), resistencia al cortante ( $\tau$ ), profundidad (Z), espesor suelo saturado (h) (Suarez J. 1985).

Suelos con alta porosidad efectiva presentan una mayor capacidad para mantener y almacenar agua, por lo tanto retrasan la infiltración en el sub suelo. Consecuentemente el incremento en la presión de poros ( $\psi$ ) también se retrasa afectando positivamente la estabilidad de la ladera. Para tormentas no muy intensas, no se presentan movimientos superficiales cuando existen altos valores de porosidad efectiva. Sin embargo estos altos valores tienden a aumentar el contenido de agua de la masa desplazada, lo que genera finalmente movimientos más rápidos y que recorren mayores distancias, además de depositarse sobre áreas más extensas. Estas tres condiciones le dan características mucho más destructivas a estos movimientos en suelos con alta porosidad efectiva.

La succión ( $-\psi$ ) es una de las variables más importantes de esfuerzos en la teoría de suelos no saturados (Fredlund & Morgerstern, 1977; Fredlund & Rahardjo, 1993). Para suelos no saturados el coeficiente de permeabilidad es función del grado de saturación o succión debido a la distribución heterogénea de los poros y el agua o contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ) y succión dentro de la masa de suelo. La cantidad de agua almacenada depende también de la succión de la matriz y la retención de humedad característica de la estructura del suelo (Ng & Shi, 1998). Con el incremento del contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ), la succión y consecuentemente la conductividad hidráulica decrecen, debido al número menor de poros conectados dentro de la estructura del suelo que decrece el número de canales disponibles para el flujo de agua (Collins & Znidarcic, 2004). La existencia de succión incrementa la resistencia del suelo. Movimientos en masa superficiales ocurren en suelos residuales de fuertes pendientes después de fuertes o prolongadas lluvias, donde el agua empieza a infiltrarse en el suelo, la succión en los horizontes superficiales se reduce lentamente y se convierte en cero cuando el suelo alcanza la condición saturada. Es conocido que la lluvia induce un aumento en el nivel freático y un incremento en la presión de poros que genera la falla de la ladera. Sin embargo en numerosos casos no se encuentran evidencias de un aumento suficiente del nivel freático como para detonar dichos movimientos, en estos casos se atribuye la falla al avance del frente húmedo en el perfil de suelo hasta que alcanza una profundidad que detona el movimiento, esta situación se presenta por la reducción de la resistencia al cortante generada por la reducción de la succión. Gofar et al. (2008) estudian la respuesta de la distribución de la succión a la infiltración de la lluvia de dos taludes con dos suelos diferentes, uno de tamaño fino y el otro de tamaño grueso. Los resultados muestran que la distribución de la succión del suelo grueso es más influenciada por lluvias cortas e intensas, mientras que la succión en el suelo fino es gobernada por la duración de la lluvia.

Una de los más recientes e importantes avances que permite considerar todas estas variaciones de las propiedades de los suelos, la morfología de los taludes, así como el patrón de lluvias ha sido el uso de modelos físicos e hidrológicos distribuidos (Borga et al., 1998; Crosta, 1998; Burton & Bathurs, 1998; Griffiths & Collison, 1999; Frattini et al., 2004). A la escala de cuenca, los modelos distribuidos representan un acercamiento que incorpora la heterogeneidad espacial de la lluvia y de aspectos que afectan la producción de escorrentía y la estabilidad del talud. Un problema fundamental en el uso de modelos físicos distribuidos es el cómo parametrizar las propiedades del suelo y las consideraciones necesarias que por ende influyen en la calidad de los resultados.

En la práctica, la incorporación de los factores dinámicos o detonantes se realiza por métodos estadísticos o físicos. Los métodos basados en consideraciones estadísticas definen umbrales críticos que relacionan generalmente la intensidad y la magnitud de la precipitación ya por lluvia nieve o granizo con la ocurrencia del evento. Estos estudios dependen en gran medida de la calidad de los datos, tanto del inventario de movimientos en masa como historial de precipitación en sus tres modalidades. Por otro lado un grupo importante de investigadores, han enfrentado este problema desde el punto de vista matemático, desarrollando modelos físicos basados en patrones geotécnicos e hidrológicos que relacionan precipitación, presión de poros y estabilidad de taludes; estos modelos tienen la capacidad de evaluar la actividad espacial y temporal de la inestabilidad de los taludes pero depende fuertemente de las variables de entrada y condiciones de frontera (van Beek & van Asch, 2004).

De esta forma, cuantificar el mecanismo detonante es un paso esencial hacia el pronóstico de la amenaza por movimientos en masa, por lo cual el reto actual se enfoca en cuantificar los procesos físicos relacionados con la infiltración de la lluvia o deshielo, la recarga de los flujos sub-superficiales y consecuentemente la ocurrencia de los movimientos.

Estos métodos estadísticos y físicos, han permitido definir umbrales, los cuales son definidos como el mínimo o máximo nivel crítico de alguna cantidad necesaria para que un proceso ocurra. El



umbral mínimo corresponde al valor inferior por el cual no se registran movimientos, en tanto el umbral máximo representa el umbral de precipitación sobre el cual los movimientos en masa siempre ocurren. Para establecer umbrales de precipitación crítica adecuados es entonces necesario considerar las condiciones específicas de cada área, estableciendo la relación entre las condiciones locales y regionales de precipitación con las características de los suelos y morfología de los taludes.

En términos generales los métodos físicos explican generalmente la ocurrencia de los movimientos en masa combinando análisis geotécnicos para determinar presiones de poro críticas y análisis hidrológicos para evaluar la cantidad de lluvia que es requerida para aumentar tales presiones de poro críticas. Los modelos físicos definen umbrales relacionando la cantidad de precipitación medida a nivel regional y local con las características del terreno, y son calibrados usando eventos de lluvia para los cuales la cantidad de lluvia detonante, la localización y el tiempo de los movimientos en masa generados son conocidos (Guzzetti et al., 2005).

Modelos conceptuales que expliquen la respuesta hidrológica para la iniciación de flujos son diversos y se han planteado desde hace varias décadas. El modelo probablemente más reconocido se basa en la idea del incremento de la densidad y la disminución de la conductividad hidráulica ( $k$ ) del regolito con la profundidad ( $Z$ ), en donde la tasa de precipitación excede la tasa de percolación en profundidad, creando un nivel freático colgado en el regolito y asumiendo que el flujo en la zona saturada es paralelo a la vertiente. En este modelo la situación más crítica para la estabilidad del talud se considera cuando la zona saturada alcanza la superficie del talud y la presión del agua en los poros ( $\psi$ ) está limitada por su altura ( $h$ ) (Anderson & Sitar, 1995).

Existen consideraciones simples que toman la hidrología de la ladera como un flujo sub superficial en estado estático y evalúan el control topográfico en la presión de poros, los cuales tienen una tendencia a sobre estimar espacialmente la amenaza dependiendo de la calidad de los datos topográficos, y modelos hidrológicos para vertientes inicialmente no saturadas que consideran flujos dinámicos transitorios, que evalúan la amenaza por movimientos en masa para tormentas específicas; la presión de poros que se desarrolla en los suelos, en estos casos, ocurre como un proceso transitorio de acuerdo al movimiento de infiltración vertical en el perfil de suelo, adicionalmente la resistencia al cortante depende del grado de succión o presión de poros negativa (Collins & Znidarcic, 2004). La escala sub horizontal de los taludes es del orden de cientos de metros, mientras el espesor del suelo es usualmente de algunos pocos metros, por lo que el flujo no saturado paralelo al talud ocurre en escalas de tiempo mayores a la infiltración, y su efecto sobre la variabilidad de la presión de agua puede ser despreciable en la escala de tiempo con respecto a la infiltración vertical.

Algunos autores consideran que el concepto de flujo subterráneo en estado estático no es apropiado para evaluar las causas detonantes de los movimientos en masa, debido a los cortos periodos de respuesta de la carga de presión en algunos suelos. Al asumir la lluvia en estado estático consecuentemente se está eliminando el efecto de la redistribución de la presión del agua en el suelo perpendicular a la pendiente asociada a la infiltración de precipitación transitoria, por lo que dichos modelos no pueden predecir la respuesta temporal de los movimientos en masa (Iverson, 2000).

Sin embargo los controles topográficos del flujo sub superficial afectan los patrones de humedad en el largo plazo dentro de una cuenca y determinan la carga de presión anterior al inicio de una tormenta. Por lo tanto la carga de presión de agua dentro de la columna puede ser expresada como la suma de dos componentes, la carga producida por la tasa de infiltración a largo plazo en estado estático, y la respuesta de la carga de presión en el corto plazo originado por una tormenta dada.

Otros modelos en estado estático basados en hidrología de onda cinemática han sido usados para vertientes con laderas saturadas en un gran número de trabajos. Los cuales utilizan en general la ecuación de Boussinesq para capacidad de almacenaje en laderas formulada en términos de la ecuación de Darcy y continuidad en términos de capacidad de almacenaje de agua en el suelo como variable dependiente.

Uno de los modelos hidrológicos dinámicos más ampliamente conocido y utilizado a nivel mundial fue desarrollado por Iverson (2000), quien considera un régimen de flujo transitorio y suelo parcialmente saturado a partir de las ecuaciones de Richard (1931), requiriendo como datos de entrada la intensidad – duración de la precipitación y una característica de difusividad hidráulica. Iverson considera diferentes estados y consideraciones, específicamente para un comportamiento a largo y corto plazo. Encontrando para un comportamiento a largo plazo el modelo de flujo de agua estático utilizado por Montgomery & Dietrich (1994); advirtiendo que un estado estático y flujo de agua paralelo a la vertiente sobre una capa impermeable, se cumple sólo si la duración de la precipitación es muy larga, la profundidad es relativamente pequeña, la intensidad de la precipitación es muy baja y el componente de conductiva hidráulico perpendicular a la pendiente excede en gran medida el componente paralelo a la vertiente.

Iverson (2000) propone para periodos cortos en suelos parcialmente saturados y flujo transitorio, la variación de la carga de presión del agua en el suelo en función del tiempo, de la difusividad hidráulica máxima, la pendiente del talud, y la profundidad vertical del perfil de suelo. En el modelo de Iverson, la capacidad de infiltración es asumida como equivalente a la conductividad hidráulica saturada. Sin embargo la capacidad de infiltración debe variar de acuerdo a la duración de la lluvia, y la tasa de infiltración está significativamente relacionada con la capacidad de infiltración variable. Tsai & Yang (2006) demuestran que dichas presiones no realistas se deben a la sobrestimación de las tasas de infiltración inducidas por asumir que la capacidad de infiltración es igual a la conductividad hidráulica saturada, y proponen un modelo de Iverson modificado que evita dicha situación.

Otro modelo de infiltración vertical ampliamente conocido es el modelo de Green & Ampt, el cual se define como un modelo de infiltración simple con resultados muy consistentes con las ecuaciones de Richard (Xie et al., 2004). Originalmente este modelo fue desarrollado para la infiltración de agua sobre superficies horizontales donde se presenta encharcamiento, por lo que para su utilización en superficies inclinadas son necesarias algunas modificaciones; en el modelo de infiltración Green & Ampt se asume que se cumple las siguientes condiciones:

- ❖ La superficie del suelo se mantiene constantemente húmeda por encharcamiento en la superficie.
- ❖ La carga de succión en el frente húmedo es constante.
- ❖ El déficit del contenido de agua volumétrica es uniforme antes y después de la humedad.
- ❖ El coeficiente de conductividad hidráulico es constante e igual a la conductividad hidráulica saturada.

Estas condiciones significan que el suelo está completamente saturado desde la superficie hasta el frente húmedo, mientras por debajo del frente húmedo presenta un grado de saturación igual al inicial. Los modelos de avance de frente húmedo se basan en el movimiento gravitatorio de la humedad, lo que no es enteramente cierto. En realidad el frente húmedo tiene una distribución de la humedad variable y depende en gran medida de las características del suelo y de la intensidad de la precipitación (Sharma & Nakagawa, 2005).

Múltiples variaciones y ajustes se han realizado al modelo Green & Ampt. Pradel & Raad (1993) desarrollaron un método basado en el modelo de Green & Ampt para estimar las probabilidades de

falla de una ladera bajo prolongadas lluvias, el cual tiene en cuenta la intensidad y duración de la lluvia para varios periodos de retorno. El método requiere que se cumplan dos condiciones, que la intensidad de la lluvia sea mayor que la capacidad de infiltración del suelo, y segundo, que la duración de la lluvia sea mayor que el tiempo crítico necesario para saturar el suelo a una profundidad crítica. Cho (2009) utiliza un modelo unidimensional de infiltración y un análisis de estabilidad infinita para determinar la influencia de la infiltración en la estabilidad de una ladera considerando dos horizontes. Para esto utiliza el modelo de infiltración de Moore, el cual es basado en el modelo de Green & Ampt, pero a diferencia cubre una situación más general, incluyendo cuando el agua se mueve desde el perfil hacia arriba por la formación de un nivel freático colgado generado por una reducción de la permeabilidad del horizonte inferior. Algunos autores incluso como Cho & Lee (2002) han modificado del método de Pradel & Raad tomando en cuenta la intensidad y duración de la lluvia para varios periodos de retorno con el objeto de evaluar las probabilidades de falla para un evento de lluvia particular.

Finalmente existen algunas consideraciones, aplicables tanto a modelo hidrológicos estáticos o dinámicos, que no han sido incorporadas en los análisis hidrológicos, tales como la influencia de la reducción de la porosidad con la profundidad del suelo y el control del flujo lateral a través de rutas preferenciales denominadas pipes o macro poros (Vélez et al., 2004). Algunos estudios empíricos han encontrado que el flujo lateral a través de pipes controla la respuesta de las vertientes lo que trae serios problemas en la aplicación de los modelos hidrológicos que asumen condiciones isotrópicas, homogéneas y de constante permeabilidad.

En el capítulo II, nos introducimos en el estudio de la mecánica del medio poroso que tiene como objetivo el comportamiento de las propiedades mecánicas del fluido que ocupa sus poros y la interacción con la matriz sólida que los alberga. Definiremos el medio continuo equivalente compuesto por la superposición de dos fases con dos campos de desplazamientos, uno para la matriz sólida y otro para el fluido (cinemáticas distintas) que interactúan e intercambian energía y materia entre ellos. Los fluidos al igual que todos los materiales, tiene ciertas propiedades físicas que permiten caracterizar y cuantificar su comportamiento así como distinguirlos unos de otros. Algunas de estas propiedades son exclusivas de los fluidos y otras son típicas de cualquier sustancia. Propiedades como la viscosidad, tensión superficial, compresibilidad y presión de vapor se pueden definir en los líquidos y gases. Sin embargo, la masa específica, peso específico y densidad son atributos de cualquier materia, estas propiedades quedarán definidas en el desarrollo de este capítulo.

En el capítulo se verificará como las siguientes leyes se cumplen para la mecánica de fluidos:

- |      |  |                         |
|------|--|-------------------------|
| i.   | Conservación de la masa                          | Ecuación de continuidad |
| ii.  | Conservación de la energía                       | Ecuación de la energía  |
| iii. | Conservación de impulso y cantidad de movimiento | Ecs. De Movimiento      |

Finalizamos el capítulo II con un marco teórico para comprender el comportamiento de los suelos y rocas teniendo en cuenta el acoplamiento con el fluido intersticial. Los análisis que se llevan a cabo hoy en día son acoplados, empleando programas de cálculo en elementos finitos, diferencias finitas o volumen finito donde se han implementado estos modelos, debido a que sus ecuaciones son en derivadas parciales altamente no lineales.

En el capítulo III analizaremos al suelo como un material constituido por una parte sólida o matriz y unos espacios o poros, interconectados a manera de red dentro de la matriz sólida, los cuales pueden

ser ocupados por una o varias fases de fluido ya sea líquida (agua) o gaseosa (aire). El agua de los medios porosos se encuentra alojada en los espacios vacíos o intersticios del medio geológico que lo constituye. Estos intersticios actúan a la vez como depósitos y como conductos, permitiendo así al medio poroso cumplir con sus dos funciones de almacenar y transmitir el agua subterránea. El comportamiento hidráulico de un fluido en un medio poroso depende en gran medida de la geometría del espacio poroso, como por ejemplo, el tamaño y forma de los granos y su disposición espacial. Las principales características del medio poroso que se relacionan con el comportamiento hidráulico son la porosidad, la superficie específica, tortuosidad, grado de saturación, densidad, contenido de humedad, grado de saturación. Así como algunas teorías para la obtención y relación de algunas de estas propiedades.

El modelo matemático descrito en el capítulo anterior debe ser completado mediante una ecuación adicional, que relacione los tensores de tensiones o sus incrementos con las deformaciones o sus velocidades. En el capítulo IV se tratan las ecuaciones constitutivas, que en mecánica de fluidos suelen ser denominadas modelos reológicos.

En este capítulo IV presentamos los modelos reológicos más relevantes capaces de describir el comportamiento de los suelos fluidificados. En este contexto, en una primera fase se describen los mecanismos de licuación o fluidificación, que causan la transformación del suelo de un material con comportamiento sólido a un material con comportamiento fluido. En paralelo, se describen algunos aparatos y procedimientos de laboratorio que permiten determinar las propiedades de los materiales fluidificados, así como algunos aspectos básicos del comportamiento de estos materiales. Seguidamente, se introduce un marco general dentro del cual se pueden describir leyes reológicas como la de los fluidos Newtonianos, los fluidos de Bagnold y los fluidos tipo Bingham. A continuación, se integran estos modelos en profundidad con el objeto de determinar los términos de tensiones integradas en profundidad y fuerzas de fricción con el fondo.

Por último en este capítulo IV se presentan los conceptos básicos del método SPH haciendo hincapié en su aplicación a la modelización de deslizamientos rápidos. Por ello, estudiamos las aproximaciones integrales de las ecuaciones de balance de masa y momento lineal. A continuación, se presenta la discretización SPH de las leyes de balance así como de la ley reológica empleada.

En el capítulo V se intenta clarificar la terminología y definiciones relacionadas con los deslizamientos. Asimismo, se hace una revisión de las clasificaciones de deslizamientos encontradas en la bibliografía y se presentan las causas y mecanismos desencadenantes de este fenómeno. A continuación, se presentan y definen los deslizamientos rápidos objeto de este trabajo de tesis. Estos movimientos, se clasifican en base a criterios mecánicos agrupándoles en;

1) Flujos de derrubios y coladas de barro, 2) Avalanchas granulares, y 3) Flujos deslizantes.

Por último, se presenta una revisión bibliográfica de la evolución de los estudios de deslizamientos en general y de su modelización en particular.

En este capítulo VI, se presenta la aplicación tanto del programa SPH al estudio de un ejemplo representativo de los flujos de derrubios y coladas de barro. Se trata de los lahares ocurridos en el volcán Popocatepetl (México). Para simular esta clase de movimiento se recurre a una reología de Bingham.

En el capítulo VII se presentan las conclusiones y aportaciones de este trabajo de tesis y se proponen futuras líneas de investigación.

## **I.2      Objetivo del trabajo de tesis.**

El objetivo del presente trabajo de tesis es comprender, identificar y analizar los fundamentos teóricos sobre el comportamiento de los lahares, y su aplicación en las barrancas Tenenepanco – Huiloac provocados por el deshielo del glaciar Ventorrillo, ubicado en el flanco norte del volcán Popocatepetl, integrando un modelado numérico para su probable zona de afectación.

# CAPÍTULO

# II

---

Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

## FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE MEDIOS POROSOS

## CAPÍTULO

# II

## FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE MEDIOS POROSOS

---

### II.1 Medios porosos definición.

Los suelos y rocas son geo materiales con poros que pueden estar llenos de agua, aire y otros fluidos. Un medio poroso está compuesto por una red de vacíos (huecos) incluidos dentro de una matriz sólida y los cuales pueden estar interconectados, cerrados o aislados entre sí, esta distribución de vacíos, su tamaño y forma, caracteriza al material poroso. Se trata por lo tanto, de materiales multifase, cuyo comportamiento está regido por el acoplamiento entre sus fases, presentándose dos situaciones: flujo en fase simple, que consiste en que un fluido simple que llena o satura los huecos y el flujo bifásico, que se presenta cuando un gas y un fluido comparten el espacio vacío del medio poroso. Cuando hablamos de flujos en medios porosos nos referimos a fluidos (líquido o gaseoso) que se mueven a través de un material sólido el cual se caracteriza, por tener una gran cantidad de pequeños poros interconectados. Si consideramos el suelo como una mezcla, podremos formular para cada componente ecuaciones de conservación de masa, de momento lineal, y constitutivas (Nield & Bejan, 1992).

El régimen de flujo válido en este modelo de medio poroso es el laminar, y por lo tanto cada canal se define en el espacio como un tubo de corriente en el cual el patrón de las líneas de corriente es fijo, aunque la dirección de flujo a lo largo de ellos puede que no lo sea. En una unión no hay un patrón fijo de las líneas de corriente. Se asume que el fluido que satura el medio poroso es newtoniano, de temperatura constante, químicamente inactiva e incompresible. Las fuerzas activas son debidas a la presión, la gravedad y el cortante resultante de la viscosidad del fluido. El modelo asume sólo pérdidas de energía mientras el fluido se encuentre en el conducto y no en las uniones, así la red de canales conectados entre sí produce gradientes promedio de presión, de densidad, de viscosidad y de concentración de solutos, en cualquier volumen elemental representativo (VER). Estos gradientes promedio son prácticamente independientes de la geometría de cada canal dentro del VER. De otro modo, las desviaciones locales de los valores medios son mucho más pequeñas que el promedio mismo y dependen fuertemente de la geometría local de la matriz sólida.

El comportamiento del flujo en cada una de estas zonas tiene propiedades diferentes, lo cual ha generado el desarrollo de teorías para cada caso. Para caracterizar un medio poroso en el cual cada una de sus fases ocupa solo una porción de un determinado volumen es necesario definir el llamado volumen elemental representativo (VER), el cual es un elemento lo suficientemente pequeño como para considerar que las propiedades del medio poroso son constantes en él, pero lo suficientemente grande como para suponer que aún existe medio poroso en él y no únicamente uno de sus componentes (suelo, agua o aire). En conclusión el VER es el volumen más pequeño del material que puede considerarse como medio poroso y en el cual tiene sentido definir las características de

dicho medio. Cualquier volumen menor al VER analiza solo una de las componentes del medio y por lo tanto no es representativo del mismo. El tamaño del VER se selecciona de tal forma que los valores promedio de todas las características geométricas de la estructura en la fase sólida y de vacío en cualquier punto del medio poroso, sean una función única de la localización de ese punto e independiente del tamaño del VER.

En los últimos años se ha agregado una herramienta más para atacar el problema de la caracterización de sistemas porosos, que es la simulación por computadora, la que nos permite abordar problemas de una complejidad años atrás inimaginable.

El primer modelo matemático que describió el acoplamiento entre el esqueleto sólido y el fluido intersticial fue propuesto por Biot (1941, 1955). Se trataba de un modelo para materiales elásticos lineales. Este modelo inicial fue mejorado posteriormente por otros investigadores, siendo de destacar el trabajo del profesor Zienkiewicz y su equipo en la Universidad de Swansea, quienes extendieron la teoría a materiales no lineales y a grandes deformaciones (1980, 1990, 2000).

Se puede concluir, a la vista de los trabajos mencionados, que la comunidad geotécnica ha tenido a su disposición un marco teórico para comprender el comportamiento de los suelos y rocas teniendo en cuenta el acoplamiento con el fluido intersticial. De hecho, los análisis que se llevan a cabo hoy en día son acoplados, empleando programas de cálculo en elementos finitos, diferencias finitas o volumen finito donde se han implementado estos modelos.

La situación es sin embargo distinta en el caso de la propagación de deslizamientos rápidos de laderas, donde es claro que existe un importante acoplamiento entre el esqueleto sólido, el agua y aire intersticiales. No es frecuente analizar la propagación de un deslizamiento rápido empleando un modelo acoplado. El primer modelo (con grandes simplificaciones), que ha sido propuesto en esta área es el de Hutchinson (1986), que combinó para un bloque que se desliza ladera abajo un modelo mecánico de movimiento con la ecuación de consolidación unidimensional. Más recientemente, Iverson & Denlinger (2001) y Pastor et al., (2002) han propuesto formulaciones más completas.

En el caso de un medio poroso no saturado, es posible distinguir la presencia de tres fases, tal como se muestra en la Figura II-1:

- ❖ Una matriz sólida formada por un agrupamiento de granos de suelo, que puede ser eventualmente deformable y a través de la cual circula un fluido (líquido, gaseoso).
- ❖ Una fase gaseosa, esencialmente compuesta por aire y vapor de agua, que ocupa una fracción de los poros de la matriz sólida. Este gas puede circular a través de los poros o quedarse atrapado en forma de burbujas.
- ❖ Una fase líquida, la que considera el total de líquidos presentes en el medio poroso y que se encuentra en la fracción restante de los poros.



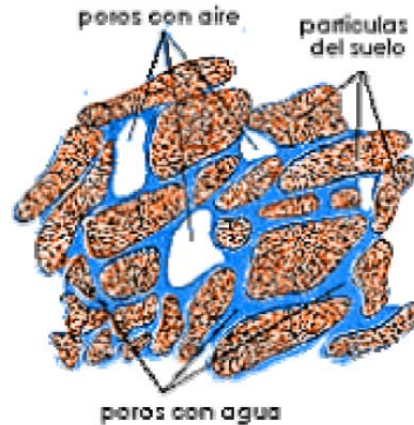


Figura II.1.- Ejemplo de un medio poroso (Martín D., 2011).

En la Física, la teoría de la dinámica de los fluidos es desarrollada bajo dos puntos de vista: el microscópico y el macroscópico. En el nivel microscópico se toma en cuenta la estructura molecular del medio y el movimiento unidimensional de las partículas que lo forman. En el macroscópico en cambio, se consideran las propiedades físicas del medio. Sin embargo es importante notar que la materia no es continua, es decir que a nivel microscópico la materia tiene espacios entre las moléculas que la componen y a su vez estas moléculas están compuestas por átomos que también están espaciados y así sucesivamente. Si se quiere describir el movimiento de un fluido se pueden aplicar las leyes de Newton a cada una de las partículas y seguir su evolución en el tiempo, pero desafortunadamente esto sería imposible de llevar a cabo incluso con el actual desarrollo de las computadoras. Así en lugar de estudiar por separado la conglomeración real de moléculas se supone que el flujo es un medio continuo.

En la hipótesis del continuo se considera que cada una de las propiedades del sistema está uniformemente distribuida sobre éste. Así, los sólidos y los fluidos se pueden considerar medios que poseen continuidad en todas sus propiedades y ser estudiados bajo tal suposición (VER). Esta hipótesis significa que es posible asignar valores definidos de las propiedades del sistema (o porción de materia) a un punto y que los valores de esas propiedades son funciones continuas de la posición y del tiempo. Por eso, la hipótesis del continuo es la base de la mecánica de fluidos. En lo sucesivo será necesario suponer la existencia de un elemento pequeño o partícula del fluido, la cual tendrá que ser suficientemente grande para contener muchas moléculas (VER).

Las hipótesis básicas en las que se sustenta el modelo de flujo en medios porosos son:

- ❖ El fluido es compresible, es decir puede haber variación de la densidad como función de la presión.
- ❖ El sólido poroso conocido también como matriz es elástico, es decir en general la porosidad depende de la presión.
- ❖ No hay difusión del fluido.
- ❖ La velocidad del fluido está dada por la ley de Darcy, que es una ecuación constitutiva que relaciona a la velocidad de las partículas del fluido con la presión.

## II.2 Mecánica de fluidos en medios porosos.

La mecánica de fluidos estudia las leyes del movimiento de los fluidos y sus procesos de interacción con los cuerpos sólidos, la mecánica de fluidos como hoy la conocemos es una mezcla de teoría y experimento que proviene por un lado de los trabajos iniciales de los ingenieros hidráulicos, de carácter fundamentalmente empírico, y por el otro del trabajo básicamente matemático, que abordaban el problema desde un enfoque analítico. Al integrar en una única disciplina las experiencias de ambas disciplinas, se evita la falta de generalidad derivada de un enfoque estrictamente empírico, válido únicamente para cada caso concreto, y al mismo tiempo se permite que los desarrollos analíticos matemáticos aprovechen adecuadamente la información experimental y eviten basarse en simplificaciones artificiales alejadas de la realidad.

La característica fundamental de los fluidos es la denominada fluidez. Un fluido cambia de forma de manera continua cuando está sometido a un esfuerzo cortante, por muy pequeño que sea éste, no es capaz de soportar un esfuerzo cortante sin moverse durante ningún intervalo de tiempo. Unos líquidos se moverán más lentamente que otros, pero ante un esfuerzo cortante se moverán siempre, la medida de la facilidad con que se mueve vendrá dada por la viscosidad.

Dentro de los fluidos, la principal diferencia entre líquidos y gases estriba en las distintas compresibilidades de los mismos:

- ❖ Gases.- Los gases presentan una gran compresibilidad, que influye sobre las características del flujo, ya que tanto el volumen como la densidad varían con facilidad. En el caso de los gases el movimiento térmico vence a las fuerzas atractivas y, por tanto tienden a ocupar todo el volumen del recipiente que los contiene.
- ❖ Líquidos.- En el caso de los líquidos por el contrario, la compresibilidad es muy débil. Esto es debido a que las fuerzas atractivas entre las moléculas del líquido vencen al movimiento térmico de las mismas, colapsando las moléculas y formando el líquido. Al contrario que en el caso de los gases, que tendían a ocupar todo el volumen que los contiene, los líquidos tienden a formar una superficie libre.

La noción de compresibilidad dada es la correspondiente a la estática de fluidos. En dinámica de fluidos, hay casos en los que la densidad no varía a lo largo del flujo, incluso en un fluido compresible, por lo que a ese flujo le podemos aplicar las leyes de los fluidos incompresibles. Los fluidos no conservan la forma, al situarlos en un recipiente toman la forma del mismo.

Así, mientras que un sólido experimenta un desplazamiento definido (o se rompe por completo) bajo la acción de una fuerza cortante, en los fluidos pequeñas fuerzas producen grandes deformaciones no elásticas (en general no se recupera la forma) a volumen constante, que se realizan de forma continua. En un sólido bajo una fuerza cortante constante se alcanza un ángulo de deformación determinado y constante, en un fluido debemos hablar de una velocidad de deformación constante o no, ya que la deformación se produce de forma continua.

El análisis de los fluidos tropieza con enormes dificultades de naturaleza matemática. Al contrario de lo que ocurre con otras teorías clásicas como la electromagnética o cuántica, descritas por ecuaciones en derivadas parciales lineales (las de Maxwell y Schrödinger, respectivamente), el movimiento de los fluidos está descrito por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que no

son lineales. Fue Leonard Euler quien, en 1755, escribió por primera vez las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido no viscoso. Setenta años después C. Navier e, independientemente, G. Stokes introdujeron el término de viscosidad en las ecuaciones que hoy denominamos de Navier-Stokes. A fecha de hoy, casi doscientos años después, la mera existencia de soluciones únicas no está garantizada, por lo que, en principio, las soluciones de dichas ecuaciones podrían desarrollar singularidades, es decir valores no acotados de la velocidad o de sus derivadas, o estructuras casi singulares en tiempo finito.

Es muy importante diferenciar entre la mecánica clásica del continuo y la mecánica del medio poroso continuo. La primera no toma en cuenta el intercambio de material con el mundo exterior, mientras que la segunda considera a menudo elementos de volumen que pueden intercambiar fluido con el exterior.

Los fluidos pueden moverse a través de ciertos materiales, como ocurre con las aguas subterráneas que se filtran a través de los terrenos, o el petróleo que se mueve en las capas petrolíferas hacia los pozos de extracción. Este movimiento es consecuencia de la acción conjunta de fuerzas gravitatorias, de presión, y otras de diverso origen, que dan lugar a un desplazamiento que se produce siempre hacia las zonas de menor energía potencial.

Se denominan materiales o medios permeables a aquéllos que permiten el paso de fluidos a través de su porosidad, ya se trate de gases o de líquidos. Los materiales permeables pueden ser de muy distintos tipos, esponjosos como algunas espumas, fibrosos, granulares como la arena de los terrenos, etc... En todos ellos la característica común es que el flujo tiene lugar a través de una intrincada red de micro canales, con una elevada pérdida de carga dada la pequeña sección de éstos. En el caso de líquidos aparecerán también fuerzas de ascensión capilar junto a las fuerzas que dan lugar al flujo.

Los distintos terrenos consisten en una gran cantidad de partículas pequeñas en contacto, con poros o espacios huecos entre las mismas que pueden estar ocupados por agua, gas o vapor. El fluido puede circular de una parte a otra del medio a través de multitud de micro canales entre las partículas que comunican los distintos poros, comportándose como medios permeables. En el caso de un fluido en reposo en un medio permeable, éste asciende por el medio permeable por encima de la altura de la superficie libre del líquido de fuera del medio permeable. Esto es debido a lo siguiente: El medio permeable está constituido por un complejo conjunto de micro canales, a través de los cuales asciende el fluido por capilaridad. En la Tabla II.1 se dan algunos valores típicos de esta subida capilar para una serie de materiales. A la hora de modelizar el comportamiento de este medio permeable frente a este efecto, se suele sustituir en los cálculos la red real de capilares por un sistema de capilares verticales de un cierto diámetro con una determinada densidad de capilares por unidad de superficie. De esta forma se puede tratar el problema, así como el problema que surge cuando hay dos medios permeables de distintas características superpuestos.

Tabla II.1.- Valores típicos del ascenso capilar (Adaptada de Gratton J., 2002).

<b>Material</b>	<b>Ascenso capilar (m)</b>
Arena gruesa	0.02 – 0.05
Arena mediana	0.12 – 0.35
Arena fina	0.35 – 0.70
Arcillas	2 – 6 y superior

Los terrenos naturales contienen partículas que se desvían de forma considerable del comportamiento esférico (como son por ejemplo las arcillas) y que además están lejos de ser de tamaño uniforme. Por tanto la red de micro canales es extremadamente complicada e imposible en la práctica tratar de una forma razonable un terreno atendiendo de forma detallada a la naturaleza microscópica de su estructura de dichos micro canales. Por esta razón no fue posible tratar de forma sistemática el flujo permeable hasta el tratamiento de Darcy.

Afortunadamente, en los problemas de flujo a través de medios permeables no es necesario tener en cuenta el flujo a través de los canales individuales. Nuestro interés principal es el flujo macroscópico, entendido como el flujo global a través de una sección que contiene multitud de micro canales, y que puede ser considerada uniforme a efectos macroscópicos, en contraste con la distribución aproximadamente parabólica que se tiene para un fluido newtoniano en régimen laminar a través de un micro canal individual de sección circular. De este modo, en vez de trabajar con el medio permeable real con toda su estructura microscópica, trabajaremos con un medio permeable ficticio de propiedades continuas en cada punto que coincide con el valor medio de las propiedades microscópicas del mismo en el entorno de dicho punto.

Matemáticamente el flujo permeable es una situación análoga a la que se tiene en los procesos de conducción del calor en un cuerpo entre puntos que se encuentran a distintas temperaturas, actuando en ese caso la temperatura como magnitud potencial. De esta forma, se produce un flujo de calor a través del medio entre puntos que se encuentran a distintas temperaturas, dependiendo este flujo de las características del medio. En el estudio del problema de flujo a través de un medio permeable, la magnitud potencial que regula el proceso será la energía por unidad de peso del fluido, produciéndose entre puntos en los que el fluido tiene distinta energía por unidad de peso.

La mecánica del medio poroso tiene como objetivo el comportamiento de las propiedades mecánicas del fluido que ocupa sus poros y la interacción con la matriz sólida que los alberga. Esta clase de problemas se caracterizan por el movimiento del sólido y el fluido a diferentes velocidades. En la gran variedad de materiales donde encontramos los medios porosos están las rocas y los suelos que fueron objeto de estudio de la teoría de poro elasticidad desarrollada por Maurice Biot, usando como base la definición de medio continuo equivalente, Biot estableció en diferentes etapas (1941, 1955, 1962) la base de las teorías usadas hoy en día. Éstas consideran que el medio continuo equivalente está compuesto por la superposición de dos fases con dos campos de desplazamientos, uno para la matriz sólida y otro para el fluido (cinemáticas distintas) que interactúan e intercambian energía y materia entre ellos.

El concepto fundamental de medio continuo es una abstracción que, estrictamente hablando, está en contra de una teoría incontestable y ampliamente verificada, la teoría atómica, que describe la realidad a niveles inferiores a los nanómetros ( $10^{-9}$  m). En las matemáticas se construyen teorías que sirven de modelo a una parte de la realidad, este modelo ha de ser juzgado desde el punto de vista matemático y físico, por su eficacia en reflejar, explicar y permitirnos conocer la realidad observada para predecir su evolución futura. Hoy día en el periodo dorado de la ciencia computacional, añadiremos como esencial la capacidad de calcular y diseñar eficazmente en base a este modelo.

La hipótesis del continuo es rigurosamente falsa a niveles microscópicos, sin embargo se revela como extraordinariamente eficaz y ajustada cuando estudiamos fenómenos que ocurren a escalas llamadas macro o mesoscópicas, para fijar ideas longitudes mayores a  $10^{-5}$  cm. Así pues, haremos matemáticas exactas para describir con mayor aproximación fenómenos que de otro modo escapan a la capacidad de descripción cuantitativa e incluso cualitativa. Hemos de hacer notar que la mecánica de fluidos no es la única rama de la mecánica basada en esta abstracción, también la elasticidad y la plasticidad se basan en tal hipótesis.

La aproximación del medio continuo resulta ser tan efectiva que se olvida con frecuencia de que se trata de un modelo. Es con todo importante tener en cuenta las hipótesis de partida, así la consideración del fluido como un medio continuo se basa en que éste consiste en un agregado de partículas en movimiento caótico y que la distancia característica de este movimiento, que recibe el nombre técnico de recorrido libre medio entre colisiones ( $\lambda < 10^{-5}$  cm), es mucho menor que las longitudes experimentales, que tomamos típicamente como mayores de  $10^{-5}$  cm, de forma que solo percibimos un cierto promedio de los procesos individuales entre partículas. Ahora bien, en ocasiones el recorrido libre medio puede ser mucho menor, la hipótesis del continuo cesa de ser válida y no quedará más remedio que recurrir a teorías más detalladas que tengan en cuenta los movimientos moleculares.

Una vez establecido que trabajamos en escalas muy superiores al recorrido libre medio de las partículas podemos olvidar el fino detalle de su movimiento individual y ver en torno a cada punto del espacio  $\mathbf{X}$  y para instantes de tiempo  $t$  en un volumen elemental representativo (VER,  $\delta V$ ), de tamaño mesoscópico, es decir mucho mayor que  $\lambda$  y mucho menor que las longitudes macroscópicas en las que deseamos trabajar. Este volumen elemental representativo, que se denomina también partícula fluida, es considerado como un medio continuo y homogéneo; en él se define una velocidad media del movimiento de ese elemento, que será para nosotros la velocidad puntual en ese punto e instante,  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , o para decirlo en forma más matemática, admitimos que existe un valor límite de los promedios cuando  $\lambda V$  se hace muy pequeña en la escala intermedia, es decir es muy pequeño pero aún por encima de la escala atómica. Del mismo modo, se habla de las demás magnitudes macroscópicas, como la densidad, presión, temperatura, viscosidad, etc. La existencia de estos valores medios para las magnitudes fundamentales en cada partícula fluida es lo que constituye la hipótesis de continuidad del medio.

Las partículas en un medio continuo son consideradas como partículas puntuales ideales que promedian las propiedades de cada volumen elemental. De acuerdo con ello, el tratamiento matemático consiste en olvidar la existencia de otra realidad a escala inferior y realizar estos pasos al límite cuando  $\delta V$  es un volumen infinitesimal en el sentido usual. El tratamiento de esta realidad ideal sigue unas leyes, las leyes de la rama de medios continuos. De aquí surge una dualidad que

está en la base de la disciplina, dualidad que es común a todas las teorías que aspiran a describir matemáticamente el mundo físico. Por un lado la mecánica de fluidos es una rama de la ciencia natural, sus líneas de investigación obedecen a la necesidad de describir para comprender a la naturaleza, y los resultados obtenidos se validan experimentalmente. Pero al mismo tiempo, el estudio teórico se desarrolla según pautas estrictamente matemáticas, de forma auto consistente, dando lugar a una teoría matemática perfectamente independiente y autónoma, que se relaciona con las ecuaciones diferenciales, el análisis, la geometría, topología, cuyo desarrollo ha sido motivado por el estudio de los fluidos en alguna de sus partes más fundamentales.

La teoría matemática de los fluidos no vive aislada sino que forma con la mecánica de fluidos experimental y la mecánica de fluidos computacional el gran cuerpo de la mecánica de fluidos actual.

Como en todas las ramas de la ciencia, en la mecánica de fluidos probablemente la hipótesis más importante es la del medio continuo y en general de toda la mecánica de medios continuos, en función de las cuales se desarrollan todos los conceptos. En particular, en la mecánica de fluidos se asume que los fluidos verifican las siguientes leyes:

- |     |  |                         |
|-----|--|-------------------------|
| iv. | Conservación de la masa                          | Ecuación de continuidad |
| v.  | Conservación de la energía                       | Ecuación de la energía  |
| vi. | Conservación de impulso y cantidad de movimiento | Ecs. De Movimiento      |

### II.2.1 Propiedades de los fluidos.

La materia se clasifica por el estado en que se encuentra presente en la naturaleza, así puede presentarse como un sólido, el cual, usualmente no cambia su volumen ni su forma al cambiar de recipiente donde esté contenido; líquido, cambia de forma pero no de volumen; o gas, cambia de forma y de volumen al cambiar de recipiente donde esté contenido. Debido a que fluyen con facilidad, los líquidos y los gases reciben el nombre de fluidos. Las fuerzas intermoleculares son mayores en los líquidos, por lo que, al variar la presión o la temperatura los gases cambian fácilmente su volumen a diferencia de los líquidos.

Se puede hacer una subdivisión de los fluidos en dos clases principales, compresibles e incompresibles, sobre la base de su reacción a esfuerzos de presión (normales). Todos los gases y vapores son altamente compresibles. Los líquidos, por el contrario, son sólo ligeramente compresibles. Como veremos, la compresibilidad introduce consideraciones termodinámicas a los problemas de flujo de fluidos. Si se puede suponer la incompresibilidad, es mucho más fácil describir el estado del fluido y su comportamiento cuando está en movimiento. Con algunas excepciones importantes, los líquidos, para todo propósito práctico, se tratan generalmente como incompresibles. Los gases, por el contrario, pueden ser tratados como no comprimidos solamente si el cambio en la presión es pequeño a través del sistema de flujo.

Entre las propiedades que diferencian el estado de la materia, la que permite una mejor clasificación desde el punto de vista mecánico es la que relaciona la forma en que reacciona el material cuando se le aplica una fuerza. Cuando a un cuerpo sólido se le aplica una fuerza de corte, el material se

deforma hasta alcanzar una nueva situación de equilibrio (Figura II.2). Las partículas del sólido se reordenan de tal modo que en su nueva posición son capaces de equilibrar la fuerza aplicada. Esta reordenación trae consigo un cambio en la forma del cuerpo, una deformación de su aspecto original. Si se deja de aplicar la fuerza el cuerpo es capaz, dentro de ciertos límites elásticos de recuperar su forma original.

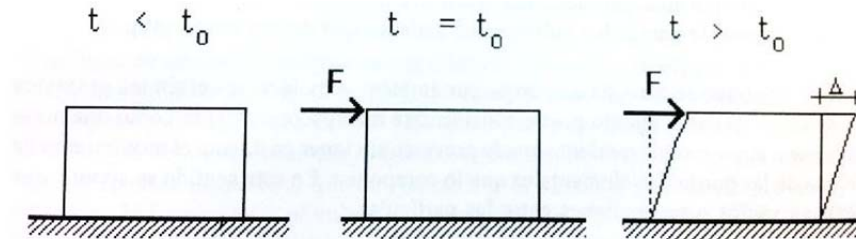


Figura II.2.- Comportamiento de un sólido sometido a una fuerza de corte o tangencial (Fernández, 1999).

Si se hace lo mismo con un fluido la reacción es diferente. En primer lugar debe disponerse de un método que permita aplicar la fuerza tangencial. Para ello se puede suponer que una delgada capa de fluido se encuentra en un plano horizontal y sobre la superficie del fluido se apoya una placa, con la cual se intenta aplicar una fuerza tangencial al fluido (Figura II.3).en este caso se puede observar que una vez que se aplica la fuerza, el fluido comienza a deformarse continuamente mientras ella permanezca aplicada. En otras palabras, las partículas del fluido adquieren una cierta velocidad desplazándose unas con respecto a las otras. El fluido se deforma continuamente, o sea escurre.

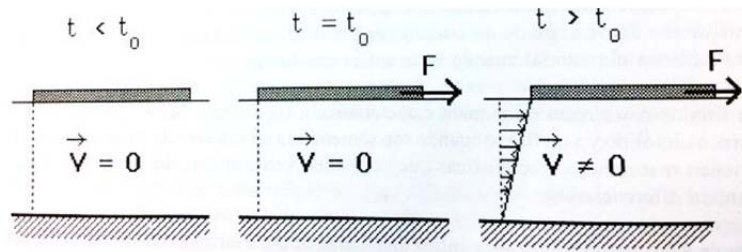


Figura II.3.- Comportamiento de un fluido sometido a una fuerza de corte o tangencial (Fernández, 1999).

Con base en el comportamiento descrito, se acostumbra definir un fluido como; una sustancia que se deforma continuamente, cuando está sometido a un esfuerzo de corte o tangencial no importa que tan pequeño sea éste. De esta definición se desprende que un fluido en reposo no soporta ningún esfuerzo de corte.

Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos interesa el comportamiento del material en un sentido global, macroscópico, considerándolo en su conjunto como un medio continuo y por ende sin vacíos intermedios. Esto es en contraposición a considerarlo como un sistema de partículas individuales aisladas que actúan como grupo. Un medio continuo se caracteriza porque sus átomos (o moléculas) están tan próximas unas de otras que el conjunto puede considerarse macroscópicamente como una masa homogénea, cuyo comportamiento puede preverse sin tener en cuenta el movimiento de cada una de las partículas elementales que lo componen. En este sentido se

supone que no existen vacíos o separaciones entre las partículas. En un medio continuo puede definirse propiedades intensivas y extensivas.

Una propiedad es una característica de una sustancia, invariante cuando la sustancia está en un estado particular. En cada estado la condición de la sustancia es única y está descrita por sus propiedades. Las propiedades intensivas o de intensidad, no dependen de la cantidad de materia involucrada, de modo que pueden asociarse a un punto, ejemplos son la temperatura, humedad, color, presión, porosidad, elasticidad, tensión superficial, viscosidad, etc. Las propiedades extensivas, o de extensión, dependen de la cantidad de materia que se considere, este es el caso del calor, peso, masa, energía, volumen de huecos, forma, etc.

En la práctica, muchas veces interesa asignar a un punto una propiedad del tipo intensiva, de manera que esa propiedad sea cuantitativamente independiente de la cantidad de materia. Para ello se divide la propiedad por la cantidad de materia involucrada, representada por el volumen, la masa o el peso, y se agrega el calificativo de específica. Así se tiene propiedades como la masa específica, calor específico, energía específica, etc. Esto solo puede hacerse con materiales homogéneos.

Los fluidos como todos los materiales, tiene ciertas propiedades físicas que permiten caracterizar y cuantificar su comportamiento así como distinguirlos unos de otros. Algunas de estas propiedades son exclusivas de los fluidos y otras son típicas de cualquier sustancia. Propiedades como la viscosidad, tensión superficial, y presión de vapor se pueden definir en los líquidos y gases. Sin embargo, la masa específica, peso específico y densidad son atributos de cualquier materia.

### II.2.1.1 Densidad $\rho$ .

Se define como la masa por unidad de volumen. Sus unidades en el sistema internacional son [kg / m<sup>3</sup>]. Para un fluido homogéneo, la densidad no varía de un punto a otro y puede definirse simplemente mediante (Ec.II.1):

$$\rho = \left( \frac{V}{m} \right)$$

Ec.II.1

Por el contrario, para un fluido no homogéneo, la densidad  $\rho$  varía de un punto a otro. Por tanto tenemos que definir la densidad en un punto como la masa por unidad de volumen en un elemento diferencial de volumen en torno a ese punto (Ec.II.2):

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \left( \frac{dm}{dV} \right)$$

Ec.II.2

Donde  $dm$  es un elemento infinitesimal de masa y  $dV$  un elemento infinitesimal de volumen.

Esto es posible gracias a la continuidad. En los líquidos, al tener baja compresibilidad, la densidad depende de la temperatura, pero apenas depende de la presión,  $\rho = \rho(T)$ . Para los fluidos



compresibles, la densidad depende en general tanto de la presión como de la temperatura,  $\rho = \rho(p, T)$ . Para el caso concreto de un gas ideal, con una ecuación de estado  $pV = nRT$ , la densidad tiene la forma concreta (Ec.II.3):

$$\rho(p, T) = \left( \frac{\bar{M}p}{RT} \right)$$

Ec.II.3

El cambio en la densidad de un fluido depende del cambio en algunos factores como la temperatura, presión o de la concentración de alguna sustancia. En el caso del agua subterránea no consideramos otras sustancias y además la temperatura se mantiene constante, entonces podemos escribirla como una función que depende sólo de las variaciones en la presión:

$$\rho = \rho(P)$$

Ec.II.4

También estamos considerando el hecho de que la cantidad de masa de agua que fluye no cambia, es decir se mantiene constante, de la ecuación II.1:

$$\rho = \left( \frac{1}{V} \right) * m$$

Ec.II.5

Y si además la consideramos unitaria:

$$\rho = \left( \frac{1}{V} \right)$$

Ec.II.6

Esta función está definida para todos y cada uno de los puntos de la región de estudio, así:

$$V = \left( \frac{1}{\rho} \right) = \rho^{-1}$$

Ec.II.7

Si derivamos:

$$\left( \frac{d\rho^{-1}}{dP} \right) = \left( \frac{dV}{dP} \right)$$

Ec.II.8

Si la compresibilidad se define como:

$$\left( \frac{\Delta V}{\Delta P} \right)$$

Ec.II.9

Entonces se pueden establecer la siguiente relación:

$$\left(\frac{\Delta V}{\Delta P}\right) = \left(\frac{dV}{dP}\right)$$

Ec.II.10

Cuando  $\rho$  es contante la compresibilidad es:

$$\left(\frac{\Delta V}{\Delta P}\right) = 0$$

Ec.II.11

Es decir el fluido es incompresible.

La compresibilidad puede usarse para distinguir los líquidos de los gases, los gases son mucho más compresibles que los líquidos. Desde el punto de vista de la dinámica, no importa si el fluido es líquido o gas, las leyes que se aplican son las mismas, pero en ocasiones, dependiendo del fluido que se trate, es posible despreciar algunos efectos y simplificar su estudio. Frecuentemente, líquidos como el agua pueden considerarse incompresibles bajo ciertas condiciones.

### II.2.1.2 Peso específico ( $\gamma$ ).

Se define como el peso por unidad de volumen

$$\gamma = \left(\frac{w}{V}\right) = \left(\frac{\text{peso}}{\text{volumen}}\right)$$

Ec.II.12

Sus unidades son: [F/L<sup>3</sup>]

Recordando que:

$$w = m g$$

Ec.II.13

Sustituyendo W en (Ec.II.12) y despejando a m en (Ec.II.12) tenemos:

$$m = \rho V = \left(\frac{\gamma V}{g}\right)$$

Ec.II.14

Así:

$$\gamma = \rho g$$

Ec.II.15

Y así el peso específico queda en términos de la densidad y la gravedad.

### II.2.1.3 Viscosidad $\mu$ .

La viscosidad es una propiedad distintiva de los fluidos, está ligada a la resistencia que opone un fluido al deformarse continuamente cuando se le somete a un esfuerzo de corte. Es la propiedad utilizada para distinguir el comportamiento entre los fluidos y los sólidos, además los fluidos pueden ser en general clasificados de acuerdo a la relación que exista entre el esfuerzo de corte aplicado y la velocidad de deformación.

Supóngase que se tenga un fluido entre dos placas paralelas separadas a una distancia pequeña entre ellas, una de las cuales se mueve con respecto a la otra. Esto es aproximadamente lo que ocurre en un descanso lubricado. Para que la placa superior se mantenga en movimiento con respecto a la inferior, con una diferencia de velocidades  $V$ , es necesario aplicar una fuerza  $F$ , que por unidad de área se traduce en un esfuerzo de corte,  $\tau = \left(\frac{F}{A}\right)$ , siendo  $A$  el área de contacto de la placa en contacto con el fluido. Se puede constatar además que el fluido en contacto con la placa inferior, que está en reposo, se mantiene adherido a ella y por lo tanto no se mueve. Por otra parte, el fluido en contacto con la placa superior se mueve a la misma velocidad que ella. Si el espesor del fluido entre ambas placas es pequeño, se puede suponer que la variación de las velocidades en su interior es lineal, de modo que se mantiene la proporción.

$$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \left(\frac{V}{y}\right)$$

Ec.II.16

Esta cantidad representa la tasa de deformación del fluido, o una velocidad de deformación angular  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ , siendo  $\theta$  el ángulo que se indica en la Figura II.4.

El ángulo  $\theta$  está relacionado con la velocidad de la placa mediante la expresión:

$$\tan \theta = \left(\frac{v_t}{y}\right)$$

Ec.II.17

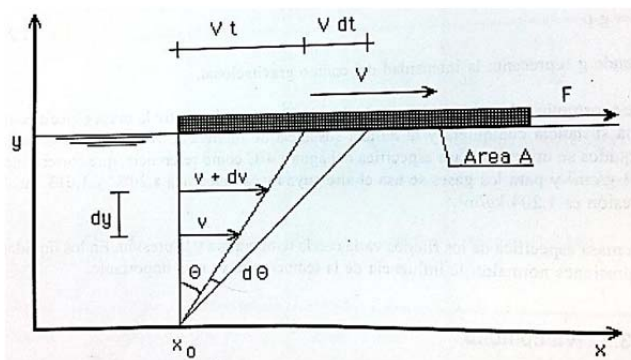


Figura II.4.- Comportamiento de un fluido entre dos placas paralelas (Fernández, 1999).

Como la distribución de velocidades en el interior del fluido es lineal, también se puede expresar como:

$$\tan \theta = \left( \frac{dv}{dy} \right) t$$

Ec.II.18

Para un instante  $t$  pequeño ( $dt$ ), el ángulo  $\theta$  es también pequeño y su tangente puede aproximarse por  $d\theta$ , entonces:

$$d\theta = \left( \frac{dv}{dy} \right) dt$$

Ec.II.19

De donde se deduce que:

$$\left( \frac{dv}{dy} \right) = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)$$

Ec.II.20

Es decir, la variación lineal de velocidades provocada en el interior del fluido representa una velocidad de deformación angular.

Para ciertos fluidos denominados newtonianos, se ha comprobado que la fuerza necesaria para lograr una velocidad  $v$  es proporcional a ella y al área, e inversamente proporcional a la separación entre las placas.

$$F \propto \left( \frac{AV}{y} \right)$$

Ec.II.21

La constante de proporcionalidad es una propiedad del fluido y se designa por  $\mu$ . Además debido a la distribución lineal de velocidades, esta relación puede ponerse como:

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{dv}{dy} \right) \quad (\text{Ecuación de Newton}); \quad \left[ \tau = \frac{F}{A} \left( \frac{N}{m^2} \right) = Pa \right]$$

Ec.II.22

Al coeficiente  $\mu$  se le conoce como viscosidad dinámica o absoluta del fluido y tiene por unidades:

$$\mu = \frac{\tau_{xy}}{\left( \frac{du}{dy} \right)} \rightarrow \mu = \frac{\left[ \frac{N}{m^2} \right]}{\left[ \frac{m}{s} \frac{1}{m} \right]} = \left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right] = [Pa \cdot s]; \quad \mu = \left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right] = \left[ \frac{kg \cdot m}{s^2} \frac{s}{m^2} \right] = \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right]$$

Ec.II.23

Se trata de una propiedad muy importante en ingeniería ya que liga el movimiento del fluido con el efecto que este tiene sobre la superficie por la que transcurre o baña. Es decir, nos permitirá calcular los esfuerzos que el fluido producirá sobre la frontera que lo confina.

Todos los fluidos tienen cierta viscosidad, pero existen algunos casos en los que está la podemos considerar tan pequeña que se desprecia, dando paso a un tipo muy especial de fluido no compresible a los que se llama fluidos ideales, en los que se considera que la viscosidad es nula.

La viscosidad se comporta de forma muy diferente en gases y en líquidos en función de las variaciones de presión y temperatura a la que someta el fluido.

La viscosidad es básicamente función de dos parámetros, la presión y la temperatura:

$$\mu = \mu(T, P) \quad \text{Ec.II.24}$$

$P$  influye poco, tan solo en variaciones muy grandes de la presión tiene que ser considerada. En los gases tiene mucha más influencia que en los líquidos.

$$\text{Gases y líquidos: } P \uparrow \rightarrow \mu \uparrow$$

$T$  tiene mucha influencia:

$$\text{Gases: } T \uparrow \rightarrow \mu \uparrow$$

$$\text{Líquidos: } T \uparrow \rightarrow \mu \downarrow$$

Unidades de la viscosidad:

$$\mu = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{du}{dy}\right)} \rightarrow \mu = \frac{\left[\frac{N}{m^2}\right]}{\left[\frac{m}{s} \frac{1}{m}\right]} = \left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right] = [Pa \cdot s] = \left[\frac{\left(kg \frac{m}{s^2} \cdot s\right)}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{m \cdot s}\right] = [ML^{-1}T^{-1}] = \text{Poiseuille } [P] \quad \text{Ec.II.25}$$

$$1 \text{ Poiseuille} = 10 \text{ Poise} = 100 \text{ centipoise (Cp)}$$

Al cociente entre la velocidad dinámica,  $\mu$ , y la masa específica de un fluido,  $\rho$ , se le llama viscosidad cinemática,  $\nu$ . Esta propiedad representa la dificultad que opone el fluido a escurrir sometido a los esfuerzos internos que provoca su propio peso.

$$\nu = \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \quad \text{Ec.II.26}$$

Unidades de la viscosidad cinemática:

$$\nu = \left(\frac{\mu}{\rho}\right) = \left[\frac{\frac{kg}{m \cdot s}}{\frac{kg}{m^3}}\right] = \left[\frac{m^2}{s}\right] = [L^2 T^{-1}]$$

$$1 \left(\frac{m^2}{s}\right) = 10^4 \text{ stokes (st)} = 10^6 \text{ centistokes (Cst)} \quad \text{Ec.II.27}$$

En los fluidos newtonianos  $\mu$  es una constante. Sin embargo, existen otros tipos de fluidos cuyo comportamiento es diferente. Por ejemplo, la pasta de dientes es capaz de escurrir cuando el tubo se aprieta pero no escurre solo si se abre la tapa, como debiera escurrir si se tratará de un fluido newtoniano. En este caso parece que existiera un valor mínimo de  $\tau$  necesario para iniciar el

escurrimiento. Con algunas pinturas ocurre que la tasa de deformación depende de cuánto se les agite, o se vuelven menos espesas cuando son sometidas a esfuerzos durante un tiempo prolongado. Existen varios casos de fluidos no newtonianos. El estudio de las propiedades de deformación de las sustancias en función de los esfuerzos que a ellas se les aplica se denomina reología. Un gráfico del comportamiento de algunos materiales típicos se incluye en la Figura II.5. Este es un gráfico reológico.

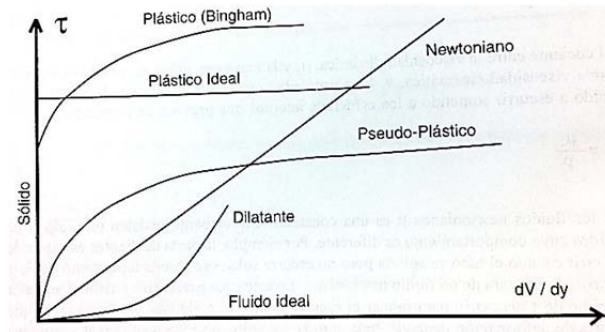


Figura II.5.- Gráfico reológico para materiales típicos (Fernández, 1999).

Los casos más típicos de los fluidos son:

- Fluido ideal, en el cual la viscosidad, se puede considerar despreciable.
- Fluido newtoniano, la viscosidad es constante.
- Fluido plástico o de Bingham (1919), en el cual es necesario un esfuerzo de corte inicial para que comience a fluir. Este es el caso de las pinturas de base aceite.
- Fluido dilatante, en estos la viscosidad aumenta con la tasa de deformación.

Desde el punto de vista físico la viscosidad se debe al efecto combinado de dos causas. Por una parte la cohesión entre las moléculas y por otra el intercambio de cantidad de movimiento entre las capas del fluido en movimiento.

Las fuerzas de cohesión entre las moléculas hacen que al desplazarse unas con respecto a las otras tiendan a ser arrastradas las partículas vecinas. Esta fuerza de cohesión depende de la separación entre las moléculas y es importante en los líquidos, no teniendo mucha importancia en los gases, cuyas partículas se encuentran más alejadas. A medida que la velocidad de las moléculas aumenta esta fuerza tiende a perder importancia.

Existe también un intercambio de cantidad de movimiento entre las capas del fluido que se desplazan debido a que hay partículas de distinta velocidad que, al escurrir el fluido, se pasan de una capa a las vecinas. Estas fuerzas serán más importantes en la medida que las velocidades de las partículas lo sean.

Debido a que la velocidad de las moléculas de los fluidos aumenta con la temperatura, el efecto de la fuerza de cohesión disminuye y el intercambio de cantidad de movimiento aumenta. Por otra parte, las fuerzas de cohesión son importantes en los líquidos y el intercambio de cantidad de movimiento lo es en los gases, de aquí se explica porque la viscosidad aumenta con la temperatura en los gases. El caso típico del agua y del aire se muestra en la Figura II.6.

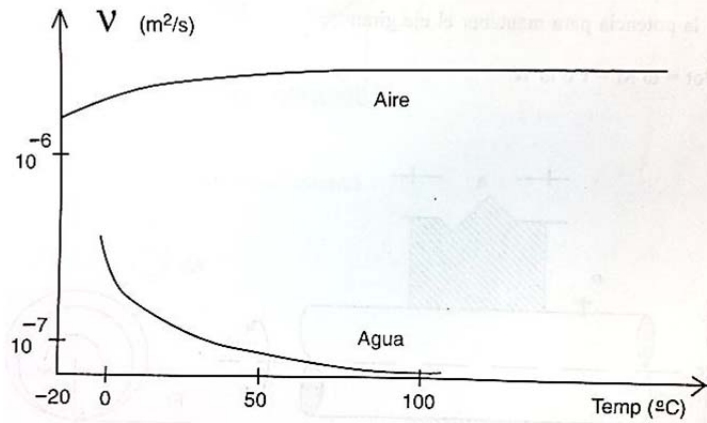


Figura II.6.- Variación de la viscosidad con la temperatura para el aire y el agua (Fernández, 1999).

Las dimensiones de la viscosidad dinámica son  $F T L^{-2}$ . Como la fuerza y masa están relacionadas por la segunda ley de Newton, también puede expresarse la viscosidad dinámica en términos de  $M L^{-1} T^{-1}$ . Entonces en el sistema SI la viscosidad se mide en:

$$1 \left( \frac{kg}{m s} \right) = 1 \left( \frac{N s}{m^2} \right)$$

El agua a 20°C tiene una viscosidad dinámica de 1 centipoise. A la unidad equivalente de 0.1 (kg/ms) se le denomina poise y a 0.001 (kg/ms) se le llama centipoise. Las dimensiones de la viscosidad cinemática son  $L^2/t$ , con unidades típicas de  $m^2/s$ .

La viscosidad molecular dinámica es una función de la temperatura y la presión. El efecto de la presión es prácticamente despreciable para los líquidos, y es pequeña o despreciable para la mayoría de los gases y vapores, a menos que sea muy elevada. Las curvas de viscosidad dinámica de la Figura II.7, muestran que las viscosidades de todos los líquidos disminuyen con la temperatura y que las de los gases aumentan. Estos diferentes efectos de la temperatura son la consecuencia de la diferencia estructural entre líquidos y gases. El estado líquido puede visualizarse en forma de una estructura de celosía o enrejado, relativamente estable, dentro de la cual las moléculas vibran alrededor de una posición de equilibrio. Bajo una fuerza tangencial, las capas del fluido se deslizan unas con respecto a otras, y las partículas que vibran en la capa saltarán a intervalos hacia nuevas posiciones de equilibrio. Un incremento en la vibración molecular, el cual se manifiesta como una elevación de la temperatura, disminuirá la rigidez de la estructura y las partículas serán más fácilmente desplazadas. Se incrementa la fluidez y la viscosidad disminuye. En los gases, la viscosidad es explicada por la teoría cinética, como una consecuencia de la transferencia de la cantidad de movimiento que acompaña al intercambio de moléculas entre capas del fluido. La temperatura incrementa la actividad molecular y, por tanto, incrementa a ambos, el intercambio de cantidad de movimiento y la viscosidad.

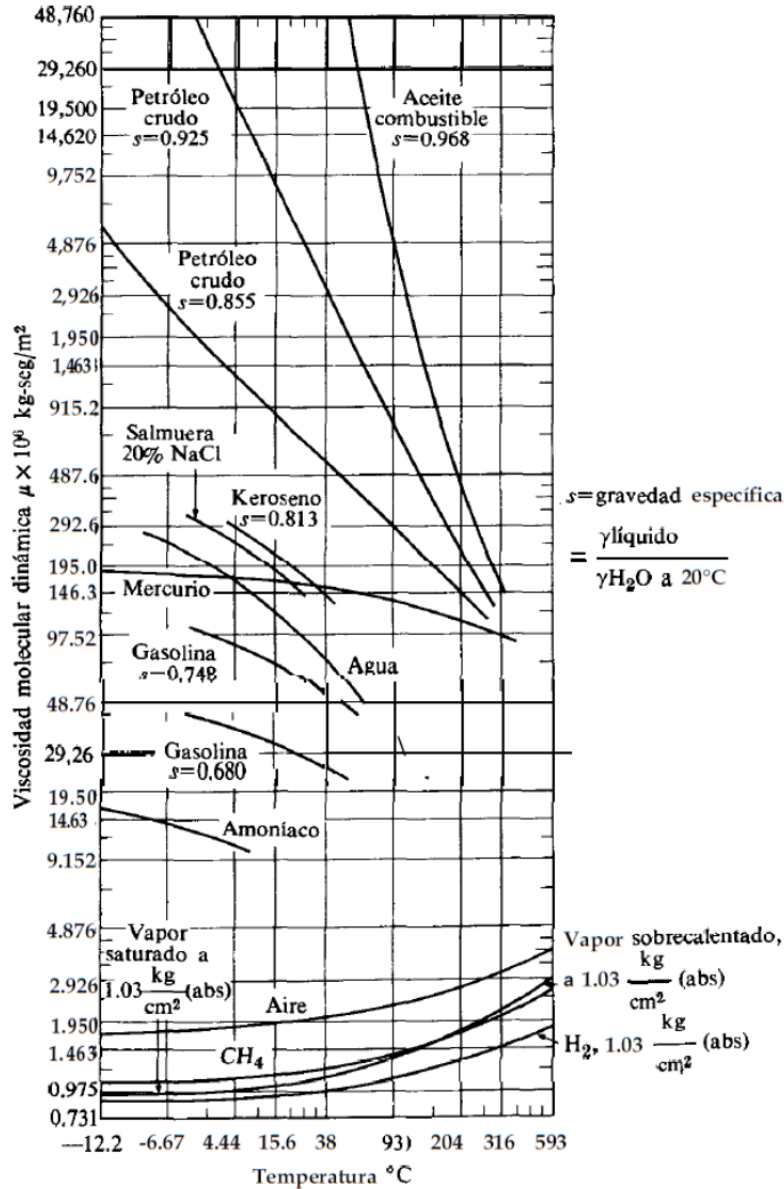


Figura II.7.- Viscosidad molecular dinámica (Daily J. & Harleman D., 1975).

Viscosidad (molecular cinemática), y la relación  $\mu / \rho$  aparece frecuentemente cuando trabajamos con dinámica de fluidos. Tiene solamente dimensiones y unidades cinemáticas, las cuales explican la razón de su nombre. Así:

$$v = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)$$

Ec.II.28

La Figura II.8 da los valores de la viscosidad cinemática, para diferentes sustancias, y en la Figura II.9 se presenta los factores de conversión, correspondientes a la viscosidad dinámica.



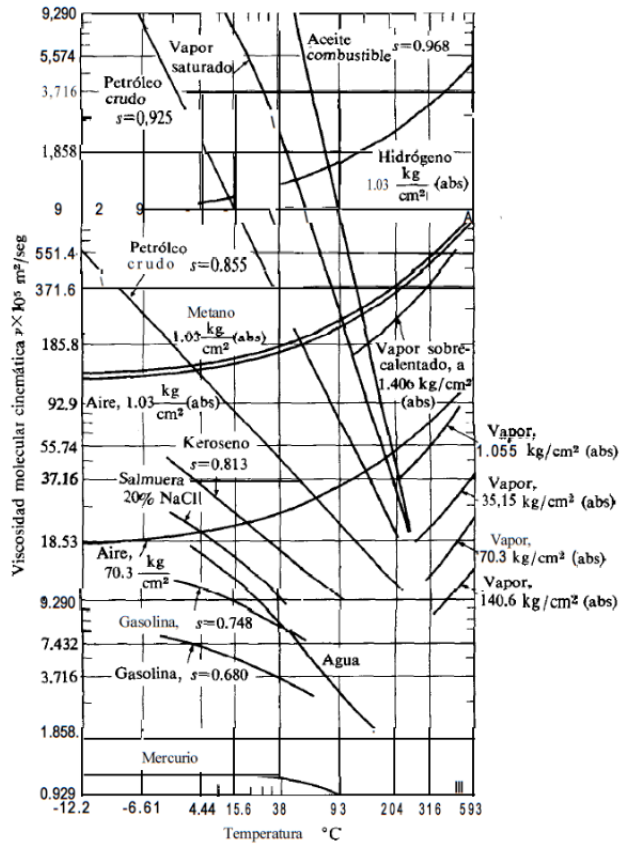


Figura II.8.- Viscosidad molecular dinámica (Daily J. & Harleman D., 1975).

$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$	Poise $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}}\right)$	Centipoise	
144		386.1	4633	6895	6895	6.895E4	6.895E6	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$
$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$	$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{poise}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$
		2.681	32.174	47.88	47.88	478.8	4.788E4	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$
		$\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pulg}^2}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$	$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ $\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$	$\frac{\text{poise}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pie}^2}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{lb}\cdot\text{seg}/\text{pie}^2}$	$\frac{\text{lb}\cdot\text{seg}}{\text{pie}^2}$
		12		17.86	17.86	178.6	1.786E4	$\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$
		$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$ $\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$		$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ $\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{poise}}{\text{lbm}/\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{lbm}/\text{pulg}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}}$
		1.488		1.488	1.488	14.88	1488	$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$
		$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ $\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$		$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ $\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{poise}}{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{lbm}/\text{pie}\cdot\text{seg}}$	$\frac{\text{lbm}}{\text{pie}\cdot\text{seg}}$
		1		1	1	10	1000	$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$
		$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ $\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$		$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$ $\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{poise}}{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2}$	$\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$
		10		10	10	1000	1000	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$
		$\frac{\text{poise}}{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}$		$\frac{\text{poise}}{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}$	$\frac{\text{poise}}{\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$
		100		100	100	10000	10000	Poise $\left(\frac{\text{g}}{\text{cm}\cdot\text{s}}\right)$
		$\frac{\text{centipoise}}{\text{poise}}$		$\frac{\text{centipoise}}{\text{poise}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{poise}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{poise}}$	$\frac{\text{centipoise}}{\text{poise}}$	Centipoise

Factores de conversión para las unidades de la viscosidad dinámica o absoluta,  $\mu$ .

Ejemplo:

$$1 \frac{\text{lbm}}{\text{pulg}\cdot\text{seg}} = 17.86 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$$

Figura II.9.- Factores de conversión para las unidades de la viscosidad dinámica o absoluta ( $\mu$ ) (Mijailov V., 1978).

#### II.2.1.4 Compresibilidad.

La compresibilidad representa la medida del cambio de volumen y densidad, cuando una substancia está sometida a presiones o tensiones normales en sus fronteras. Las variaciones de volumen pueden relacionarse directamente con variaciones de la masa específica ( $\rho$ ) si la cantidad de materia permanece constante. En general se sabe que en los fluidos la masa específica depende tanto de la presión como de la temperatura de acuerdo a la ecuación de estado, la compresibilidad está definida por:

$$-\left(\frac{dV}{V}\right)\left(\frac{1}{dp}\right) = \left(\frac{d\rho}{\rho}\right)\left(\frac{1}{dp}\right)$$

Ec.II.29

Donde el signo negativo indica una disminución en el volumen,  $V$ , debido a un incremento en la presión.

El recíproco de la compresibilidad es conocido como el módulo de elasticidad volumétrico:

$$E_v = -\left(\frac{dp}{dV/V}\right) = \left(\frac{dp}{d\rho/\rho}\right)$$

Ec.II.30

Para el caso en que la temperatura permanece constante se puede definir un módulo de compresibilidad como la variación de presión necesaria para producir una variación relativa de masa específica, o de volumen:

$$E_T = \rho T \left(\frac{dP}{dv}\right) = T_0$$

Ecs.II.31

Como  $\rho$  puede expresarse por  $\rho = \left(\frac{dm}{dv}\right)$  y la masa permanece constante, la definición II.31 1.19 es equivalente a:

$$E_T = -v T \left(\frac{dP}{dv}\right) = T_0$$

Ec.II.32

En el caso de los líquidos ésta es una propiedad prácticamente independiente de la temperatura. Por ejemplo para el agua  $E_T$  vale aproximadamente 22 000 bares.

Para el caso de los gases ideales se puede obtener el valor de  $dP / d\rho$  de la ecuación del proceso mediante diferenciación:

$$\left(\frac{P}{\rho^\alpha}\right) = cte.$$

Ec.II.33

De donde:

$$\left(\frac{dP}{d\rho}\right) = \alpha \left(\frac{P}{\rho}\right)$$

Ec.II.34

Y por lo tanto:

$$E = \alpha P$$

Ec.II.35

De tal modo que el coeficiente de compresibilidad (Figura II.10) de los gases no es constante sino que depende del proceso y se puede ver que:

$E = 0$  Para procesos isobáricos ( $\alpha = 0$ )

$E = P$  Para procesos isotérmicos ( $\alpha = 1$ )

$E = \alpha P$  Para procesos adiabáticos ( $\alpha = \kappa$ )

$E = \infty$  Para procesos isocóricos ( $\alpha = \infty$ )

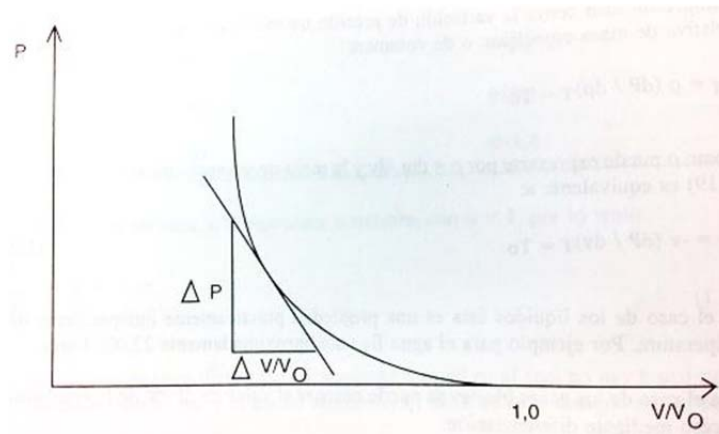


Figura II.10.- Módulo de compresibilidad. (Fernández, 1999)

El valor de  $E_v$ , para el agua a presión atmosférica y temperatura normales es  $2.18 \times 10^8$  (kg/m<sup>3</sup>). De la ecuación II.33 vemos que el valor isotérmico de  $E_v$ , para el aire atmosférico es del orden de  $1.05$  (kg/cm<sup>2</sup>). Así, el aire atmosférico es alrededor de 20,000 veces más compresible que el agua. El agua es alrededor de 100 veces más compresible que el acero. Sin embargo, como se puede ver en la Tabla II.2, incrementando la presión sobre el agua en  $70.3$  (kg/cm<sup>2</sup>), incrementaremos la densidad solamente alrededor de  $0.3 \%$ . Para propósitos prácticos, es satisfactorio suponer la incompresibilidad del agua, a menos que estén involucrados intervalos de presión muy grandes.

Tabla II.2.- Módulo de elasticidad volumétrica del agua  $E_v$  ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ) (Adoptado de Gratton J., 2002).

Presión ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	Temperatura °C				
	0.0	20	49	93	149
1.0545	20 530	22 500	23 340	21 650	
105.450	21 090	23 200	24 040	22 425	17 435
316.350	22 285	24 464	25 450	23 760	19 050
1 054.50	26 714	28 825	29 950	28 470	24 605

### II.2.1.5 Tensión superficial.

En la frontera entre las fases gaseosa y líquida, o entre diferentes líquidos no miscibles, la atracción molecular introduce fuerzas que hacen que la superficie de contacto entre las fases se comporte como una membrana bajo tensión. En cualquier cuerpo líquido, cada superficie molecular sufre una fuerte atracción perpendicular a ella, la cual da por resultado una tendencia a deformar cualquier superficie plana. Cualitativamente esto tiene su origen en la fuerza de atracción molecular no compensada en las moléculas de la superficie. Mientras que en el interior de un líquido, cada molécula está rodeada de otras moléculas, y por tanto las fuerzas intermoleculares se compensan unas a otras, en la superficie no hay moléculas por encima de las moléculas superficiales. Así, las moléculas de la superficie experimentan una fuerza neta dirigida hacia el interior de modo que éstas no escapan, de este modo la superficie intenta hacerse lo menor posible (Figura II.11). Asimismo, si se eleva ligeramente una molécula superficial, los enlaces moleculares con las moléculas adyacentes se alargan, produciéndose una fuerza restauradora que tira de la molécula desplazada de nuevo hacia la superficie.

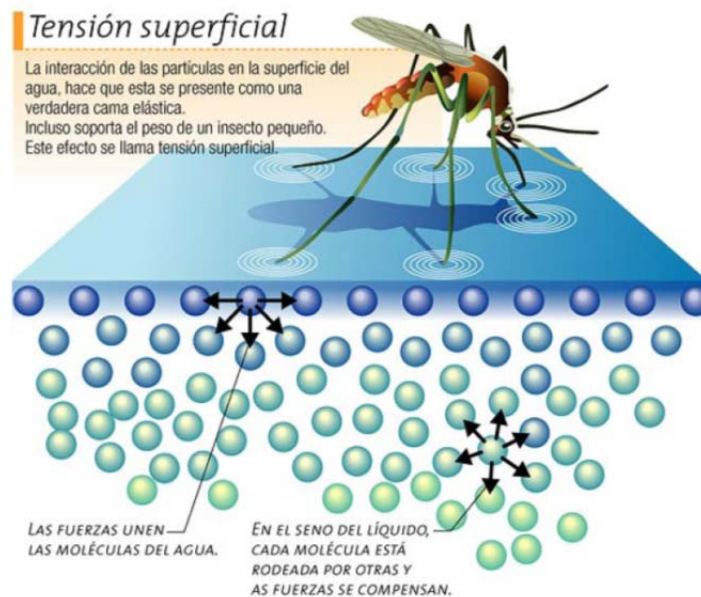


Figura II.11.- Tensión superficial (page web dereflexion.wordpress.com).

Por ejemplo, las gotas de agua en el aire se contraen espontáneamente hasta formar esferas; que es la forma ideal de una superficie mínima para un volumen dado de líquido. Inversamente, se debe de efectuar un trabajo para extender la superficie contraída, introduciendo más moléculas dentro de ella. Este trabajo es igual a la energía libre de la superficie, esto es, la energía potencial adicional por unidad de superficie, debida a la carencia de moléculas superficiales en una capa, con respecto a sus vecinas en la superficie de contacto opuesta. Esta energía libre es medida por la tensión superficial y tiene las unidades.

$$\sigma = \left( \frac{\text{fuerza} * \text{distancia}}{\text{área}} \right) = \left( \frac{\text{trabajo}}{\text{área}} \right) = \left( \frac{\text{fuerza}}{\text{longitud}} \right) \quad \text{Ec.II.36}$$

La tensión superficial ( $\sigma$ ) es la fuerza que se requiere para mantener en equilibrio una longitud unitaria de esa membrana elástica tensa, es responsable de la resistencia que un líquido presenta a la penetración de su superficie, del ascenso de los líquidos en los tubos capilares y de la flotación de objetos u organismos en la superficie de los líquidos. El valor de  $\sigma$  depende de los fluidos en contacto y de la temperatura.

El trabajo necesario para aumentar el área de una superficie líquida resulta ser, experimentalmente, proporcional al aumento del área de las moléculas de agua, definiéndose como coeficiente de tensión superficial a la relación entre ambos conceptos.

$$dw = T_s * dA \quad \text{Ec.II.37}$$

Por consiguiente:

$$T_s = \left( \frac{dw}{dA} \right) \quad \text{Ec.II.38}$$

Donde:

dw = Trabajo necesario

dA = Aumento de área del menisco.

$T_s$  = Fuerza de tensión superficial, que se mide en unidades de trabajo o energía entre unidades de área o sea, por ejemplo, en dinas/cm. Representa la fuerza por unidad de longitud, en cualquier línea sobre la superficie.

$$[T_s] = \left[ \frac{\text{unidad de trabajo}}{\text{unidad de superficie}} \right]$$

Tomemos como unidades de fuerza la dina y como unidades de longitud el cm. Luego:

$$[T_s] = \left[ \frac{\text{dina} * \text{cm}}{\text{cm}^2} \right] = \left[ \frac{\text{dina}}{\text{cm}} \right]$$

Cualquiera que se encuentra sobre la superficie dA. La tensión superficial del agua es de 75 (dinas/cm), como 1 gramo son 981 dinas:  $75 \text{ (dinas/cm)} = 0.0764 \text{ (gr/cm)}$ .

Puede probarse que cuando un líquido presenta al aire una superficie curva (menisco), se genera en ese menisco curvo un desnivel de presión, de modo que la presión en el lado convexo es siempre menor que la existente en el lado cóncavo.

Una demostración particular de esta afirmación, para el caso de un menisco semiesférico se da a continuación:

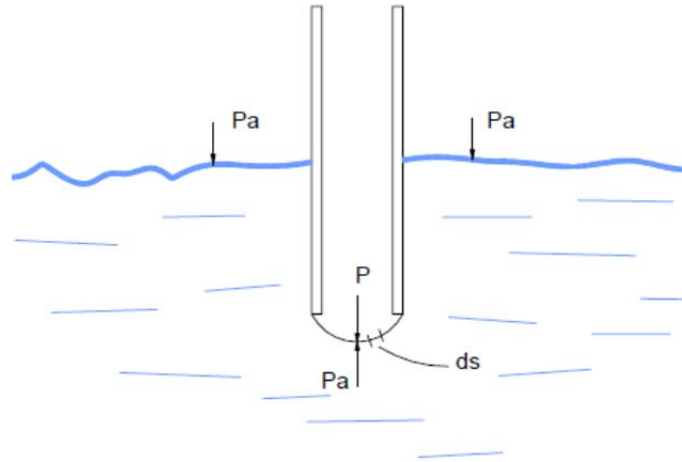


Figura II.12.- Menisco esférico formado en el extremo inferior de un tubo (Martín D., 2011).

En el dispositivo de la Figura II.12, se inyecta aire en un tubo de pequeño diámetro de aproximadamente 1 mm, a través de una boquilla, a una presión  $p$ . El líquido envasado en el extremo del tubo cede por la presión formando un menisco, que provoca un aumento en la superficie que encierra al tubo. Se demuestra que inmediatamente antes de que el menisco se rompa al crecer  $p$ , adopta la forma de una semiesfera.

El área de la semiesfera es:

$$A = 2 \pi R^2 \quad \text{Ec.II.39}$$

Siendo  $R$  el radio del menisco formado, que es igual al radio del tubo. Si ese radio varía a  $(R + dR)$ , el área de la esfera se incrementará en:

$$dA = 4 \pi R dR \quad \text{Ec.II.40}$$

Y según ecuación II.37, el trabajo necesario para lograr ese incremento será:

$$dw = 4 \pi R dR * T_s \quad \text{Ec.II.41}$$

En el lado cóncavo del tubo existe la presión  $p$  mientras que en el convexo obra  $p_a$  ( $p_a$  es la presión atmosférica), si se desprecia el pequeño aumento de presión hidrostática con la profundidad, bajo la superficie libre del líquido que rodea al tubo.

Considérese un elemento del área del menisco ( $ds$ ). La fuerza neta que obra en esa área es:

$$(p - p_a) ds \quad \text{Ec.II.42}$$

Y cuando el área del menisco se incrementa  $dA$ , esa fuerza realizará un trabajo:

$$dw = (p - p_a) ds dR \quad \text{Ec.II.43}$$

Ya que el  $dR$  es la distancia radial recorrida por el menisco. El trabajo total realizado en el incremento  $dA$  se puede obtener integrando la expresión anterior a toda el área del menisco, de modo que:

$$dw = (p - p_a) 2 \pi R^2 dR \quad \text{Ec.II.44}$$

Las expresiones II.41 y II.44 pueden igualarse:

$$4 \pi R dR * T_s = (p - p_a) 2 \pi R^2 dR \quad \text{Ec.II.45}$$

De donde:

$$p_a = p - \left( \frac{2 T_s}{R} \right) \quad \text{Ec.II.46}$$

La fórmula II.46 indica que la presión atmosférica  $p_a$  en el lado convexo del menisco es siempre menor que la presión  $p$  en el cóncavo, que en el caso de este ejemplo, fue proporcionado con aire comprimido introducido en el tubo.

Algunos valores de éste coeficiente de tensión superficial se dan en la Tabla II.3.

Tabla II.3.- Valores de tensión superficial medidos en din/cm. En todos los casos se asume que el líquido está en contacto con aire. (1din/cm =  $10^{-3}$  N m<sup>-1</sup>) (Adoptado de Gratton J., 2002).

Sustancia	Tensión superficial (din/cm)	Sustancia	Tensión superficial (din/cm)
Acetona	23.7	Agua a 0°C	75.60
Metanol	22.6	Agua a 10°C	74.22
Etanol	22.3	Agua a 20°C	72.75
Aceite de oliva	33	Agua a 30°C	71.18
Aceite de parafina	26	Agua a 60°C	66.20
Benceno	28.9	Agua a 100°C	58.9
Glicerina	64	Mercurio	465

### II.2.1.6 Ángulo de contacto.

Consideremos un líquido abierto al aire en la zona de contacto con la pared sólida del recipiente que lo contiene, Figura II.13.

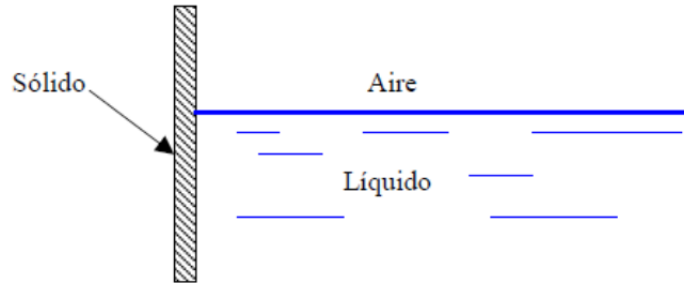


Figura II.13.- Contacto de un líquido y su pared, sin tomar en cuenta la formación de meniscos (Vélez M., 1999).

Se denominan fuerzas de cohesión a las fuerzas de atracción entre una molécula del líquido y otras moléculas del mismo. La fuerza que tiene lugar entre una molécula del líquido y otra sustancia, como la pared de un recipiente, es una fuerza adhesiva. Cuando la fuerza adhesiva es menor que la fuerza de cohesión el ángulo se hace grande, mientras que cuando la fuerza de cohesión es menor que la fuerza adhesiva, el ángulo se hace pequeño.

Estudiemos ahora en función de las tensiones superficiales. Por el borde de la superficie de un líquido que se halla en un recipiente concurren tres medios:

1. Sólido, que es la pared del recipiente.
2. Líquido.
3. Gaseoso, que es el aire.

En la línea de contacto están aplicadas tres fuerzas de tensión superficial, estando cada una de ellas dirigida según la tangente hacia el interior de la superficie de contacto de los dos medios correspondientes. El ángulo entre la superficie del líquido y la pared sólida se denomina ángulo de contacto  $\theta$ .

La superficie del líquido adquiere una forma tal que la resultante de las tres fuerzas sólido – líquido ( $\sigma_{SL}$ ), sólido – gas ( $\sigma_{SG}$ ) y líquido – gas ( $\sigma_{LG}$ ) no tenga componente a lo largo de la pared del recipiente (la reacción de la pared elimina la componente perpendicular a la misma), quedando la condición de equilibrio:

$$\sigma_{SG} = \sigma_{SL} + \sigma_{LG} \cos \theta \quad \text{Ec.II.47}$$

Donde no se ha incluido la longitud de la línea de contacto, que es la misma en todos los casos. Así, el coseno del ángulo de contacto queda:

$$\cos \theta = \left( \frac{\sigma_{SG} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LG}} \right) \quad \text{Ec.II.48}$$



Como se ve, el ángulo de contacto depende exclusivamente de la naturaleza de los tres medios en contacto (de las tensiones superficiales en los límites) y no depende ni de la forma del recipiente ni del valor de  $g$ . Estas tensiones superficiales y las fuerzas asociadas son muy sensibles al estado de las superficies divisorias y a sus purezas.

Si la tensión superficial sólido – gas ( $\sigma_{SG}$ ) es mayor que la tensión superficial sólido – líquido ( $\sigma_{SL}$ ), por tanto  $\sigma_{SG} > \sigma_{SL}$  se tiene que  $\cos \theta > 0^\circ$  y que  $\theta < 90^\circ$ . El ángulo es agudo y el menisco tiene la forma cóncava de la parte izquierda de las Figuras II.14 y II.15. En este caso se dice que el líquido moja a la superficie sólida, una gota del líquido depositada sobre la superficie se extiende sobre la misma.

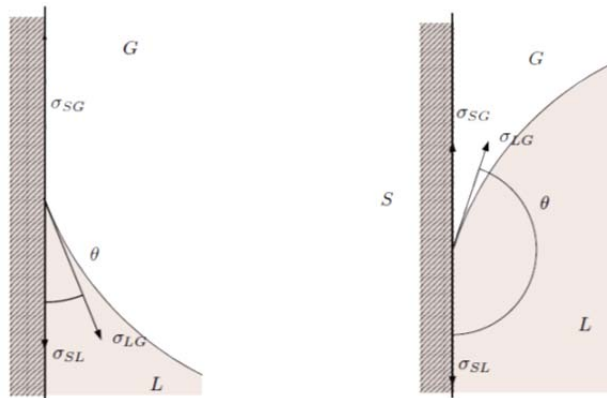


Figura II.14.- Equilibrio de fuerzas en la línea de contacto sólido – líquido – gas (Martín D., 2011).

Cuando la tensión superficial sólido – gas ( $\sigma_{SG}$ ) es menor que la tensión superficial sólido – líquido ( $\sigma_{SL}$ ), por tanto  $\sigma_{SG} < \sigma_{SL}$  se tiene que  $\cos \theta < 0^\circ$  y que  $\theta > 90^\circ$ . Este caso corresponde al menisco convexo, y una gota depositada sobre la superficie se recoge sobre sí misma, como se muestra en la parte derecha de las Figuras II.14 y II.15. En este caso se dice que el líquido no moja la superficie del sólido. Ejemplos de ángulos de este tipo se tienen en los casos de mercurio sobre vidrio ( $150^\circ$ ) y de agua sobre parafina ( $105^\circ$ ). Las gotas de estos líquidos se elevan intentando disminuir el área de contacto con la superficie.

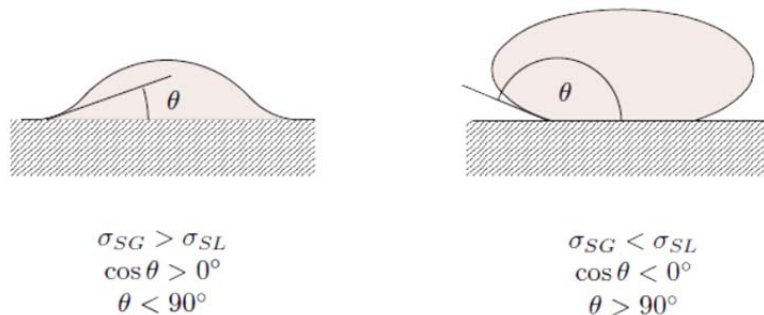


Figura II.15.- Distintos comportamientos de una gota sobre una superficie (Martín D., 2011).

En la Figura II.16 siguiente (a) y (b), se muestran dos posibilidades frecuentes.

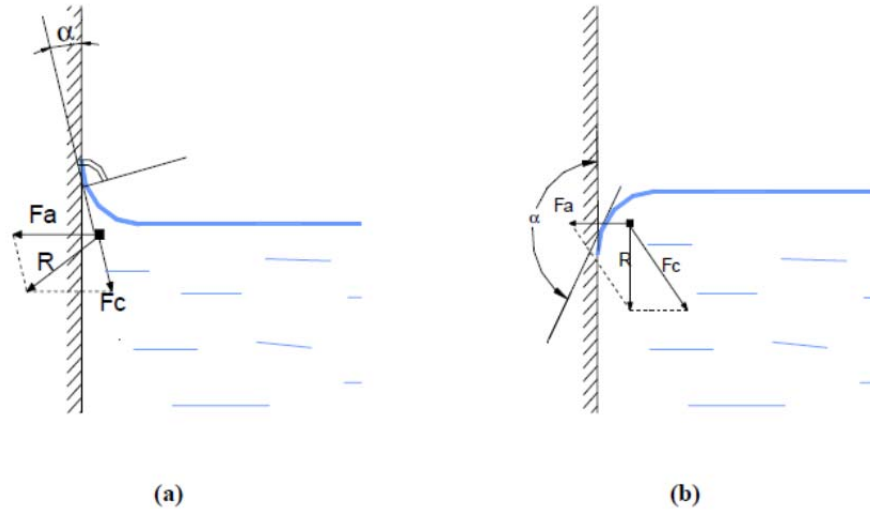


Figura II.16.- Formación de los meniscos (Vélez M., 1999).

En (a), dada la naturaleza del líquido y del sólido, la resultante de las fuerzas de adhesión ( $F_a$ ) y de cohesión ( $F_c$ ) tiene la inclinación que se muestra, dominando las fuerzas de adhesión.

En (b) dominan más las fuerzas de cohesión y ello hace variar la inclinación de la resultante.

### II.2.1.7 Efectos capilares.

La elevación de un líquido por un tubo delgado, llamado tubo capilar, es un fenómeno de superficie íntimamente ligado con la tensión superficial. En este proceso aparecen fuerzas tanto de cohesión como de adhesión. Si sumergimos un tubo delgado de vidrio en agua, tendremos un ángulo de contacto muy agudo, de forma que la superficie estará muy curvada si el tubo es lo suficientemente delgado. El resultado es que se producirá una fuerza ascendente, subiendo el agua por el tubo hasta que el peso de la columna de agua iguale esta fuerza, ver Figura II.17.

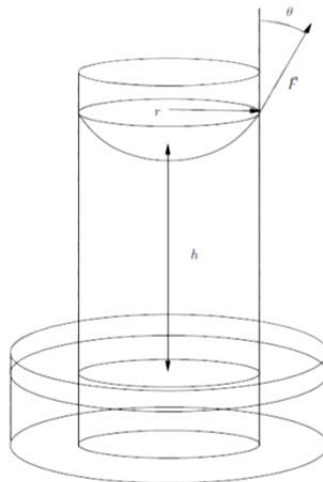


Figura II.17.- Capilaridad en un tubo fino (Martín D., 2011).

La altura de ascensión capilar queda dada en general, por la expresión:

$$h = \left( \frac{2 T_s \cos \alpha}{r \gamma_w} \right)$$

Ec.II.49

En el caso del contacto agua – aire, el experimento prueba que, aproximadamente:

$$T_s = 75 \left( \frac{\text{dinas}}{\text{cm}} \right) = 0.0764 \left( \frac{\text{gr}}{\text{cm}} \right)$$

Ec.II.50

En realidad,  $T_s$  varía con la temperatura del agua y no tiene valor fijo. El valor anterior corresponde aproximadamente a 20 °C, pero por otra parte, en el caso de agua sobre vidrio húmedo, se vio que el ángulo de contacto  $\alpha$  es nulo, por lo que la fórmula puede escribirse, para esas condiciones:

$$h = \left( \frac{4 * 0.0764 \text{ gr/cm}}{D * 1 \text{ gr/cm}^3} \right) = \left( \frac{0.3}{D} \right)$$

Ec.II.51

Con  $h$  y  $D$  en cm.

Considerando un tubo capilar lleno de agua y expuesto a la evaporación, durante este proceso el menisco en los extremos se desarrollará produciendo las fuerzas  $F_T$ , generadas por la tensión superficial en la periferia del menisco, ver Figura II.18.

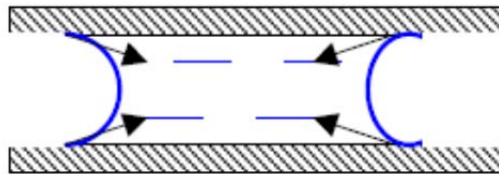


Figura II.18.- Esquema que ilustra la generación de presiones en un tubo capilar (Vélez M., 1999).

Por reacción a esas fuerzas, la pared del tubo sufre esfuerzos que tienden tanto a cerrar el tubo, como acortar su longitud.

En toda la masa del agua entre los meniscos, se generan tensiones, que producen a lo largo de la pared del tubo, esfuerzos de compresión que tienden a cerrarlo. Si el tubo estuviera hecho de un material compresible, las presiones capilares le producirían realmente un estrechamiento y un acortamiento.

Una masa compresible, atravesada por tubos capilares sujetos a evaporación, se contraerá, volumétricamente hablando, como resultado de los efectos descritos.

En la Figura II.19 se muestra la contracción por sacado que se presenta en probetas de arcilla plástica, talladas en el laboratorio para realizar ensayos triaxiales y que luego se dejaron secar al aire libre por un tiempo prolongado. La probeta de la izquierda representa el volumen inicial, la probeta de la derecha ha sido colocada para comparar el cambio de volumen.



Figura II.19.- Contracción por secado de probetas de arcilla (Martín D., 2011).

Una demostración simple y convincente de la existencia y acción de la presión capilar en una masa porosa, es la siguiente (Terzaghi):

Un pedazo de algodón absorbente se satura con agua; después, dentro del agua, se comprime con la mano y seguidamente se suelta; podrá observarse que la masa se recupera con cierta rapidez. Sin embargo, si después de comprimido se saca del agua y se abandona a sí mismo en el aire, se notará que no recupera su forma original, permaneciendo la masa comprimida. Si, posteriormente, el algodón vuelve a sumergirse, la recuperación volverá a presentarse. Este experimento se comprende fácilmente en términos de tensión capilar en el agua, y presión en las paredes de los tubos capilares que atraviesan el algodón. Cuando el algodón se comprime en estado seco o sumergido, sus fibras se recuperan elásticamente al quitarles la presión, pero si esto sucede en el aire, una muy pequeña expansión dará como resultado la generación de los meniscos en cada canaliculo y la tensión en éstos contrarresta la tendencia expansiva, dejando deformada a la masa. Al volver a sumergir la masa, los meniscos se destruyen y la expansión se manifiesta nuevamente.

Un suelo saturado exhibe primeramente una superficie brillante, que cambia a opaco al formarse, por evaporación, los meniscos cóncavos, en cada poro. Al irse evaporando el agua, va disminuyendo el radio de curvatura de esos meniscos y aumentando, por lo tanto, la presión capilar sobre las partículas sólidas, que por este efecto, se comprimen, la evaporación seguirá disminuyendo el radio de curvatura de los meniscos y comprimiendo la estructura del suelo, hasta un punto en que la presión capilar sea incapaz de producir mayor deformación; en ese momento comenzará la retracción de los meniscos hacia el interior de la masa de suelo. Físicamente ese momento está señalado por el cambio de tono del suelo, de oscuro a más claro.

En el suelo, los poros y canaliculos ocupados por el agua no son de tamaño uniforme, sino que varían entre amplios límites, por lo que el agua no se retraerá al mismo tiempo hacia el interior de la masa, comenzando el proceso en los poros de mayor diámetro.

Estadísticamente, puede decirse que toda la gama de diámetros de los canaliculos existentes se presentan a lo largo de un capilar, en una distancia relativamente pequeña a partir de la superficie. Esta distancia puede ser del orden de 2.5 cm, en arenas gruesas, pero en arcillas ordinarias, con diámetros de poro comprendidos entre 0.1 y 0.001 de micrón, todos ellos se presentan a una

distancia del exterior no mayor que una fracción de milímetro. Por lo tanto, aun cuando una de las aberturas de la superficie corresponda al mayor diámetro que pueda encontrarse en la muestra total de suelo, el menisco necesitará retraerse muy poco para llegar a una zona de pequeño diámetro en la cual pueda desarrollar esfuerzos de tensión importantes.

Finalmente, cada menisco se retirará al diámetro de poro más pequeño para el que un menisco totalmente desarrollado produzca en el suelo la máxima presión capilar que pueda deformar la estructura al máximo.

En ese instante, con su máxima contracción alcanzada bajo esa máxima presión capilar que el agua ejerce, el suelo habrá llegado a su límite de contracción. Cualquier evaporación posterior hará que los meniscos se retraigan hacia el interior sin más incremento en la presión capilar, pues el diámetro de los poros ya no disminuye.

Una manera sencilla de visualizar el proceso de secado de un suelo fino es la que se expone a continuación:

Supongamos una charca formada por agua de lluvia que tiene arcilla en suspensión y que por efecto del sol se va secando, la arcilla en suspensión, formará por lo tanto la capa superior de la superficie expuesta del suelo una vez que el agua se ha evaporado completamente. A medida que el sol sigue irradiando calor, más cantidad de agua se irá evaporando y ahora será a expensas del agua de los capilares del suelo, en este momento, veremos como la pequeña capa de arcilla, de solo algunos milímetros, que había estado en suspensión en el agua comienza a contraerse por acción de las presiones capilares. Observaremos además que la contracción no será igual en ambas caras y que será mayor en la cara superior donde el sol actúa en forma directa, lo que hace que los capilares de esta cara sufran un secado más importante que en la cara posterior y ejerzan un mayor esfuerzo de contracción sobre las partículas de arcilla con lo cual se produce una contracción diferencial, que se traduce en la curvatura de la capa, que a su vez hace que la misma se rompa en trozos muy similares, de acuerdo al esquema de la Figura II.20.

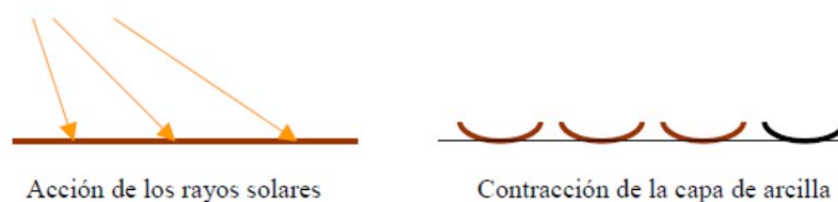


Figura II.20.- Contracción por secado de arcilla (Vélez M., 1999).

Hay suelos finos (las arcillas por ejemplo), donde además de los esfuerzos friccionales, contribuyen, a la resistencia al esfuerzo cortante, con otros factores que se suman al momento de evaluar la resistencia final.

Si tenemos una arcilla que haya soportado, a través de su vida geológica, sobrecargas tales como estratos que luego fueron erosionados, glaciares, estructuras que han sido demolidas, etc. podemos decir que, al presente, se encuentra preconsolidada. Cuando extraemos una muestra de este material, y la protegemos convenientemente de las pérdidas o de los incrementos de humedad, observaremos

que una parte importante de las presiones intergranulares a las que fue sometida en su proceso de consolidación, es retenida por efecto de la acción capilar sobre la superficie de la muestra.

Es decir que por acción del fenómeno de capilaridad, actúa sobre las partículas del suelo una tensión superficial que provoca una resistencia adicional al esfuerzo cortante, que se suma a la resistencia friccional y a la que llamaremos cohesión aparente.

Este nombre deriva por la circunstancia de que es un valor relativo y no permanente ya que depende del contenido de agua que tenga la muestra de suelo.

Supongamos como ejemplo que intentamos pegar un grano de arena fina con otro grano de arena del mismo tamaño, si los dos granos están secos, de ninguna manera se unirán (ver Figura II.21). Pero si hay una pequeña capa de agua sobre los mismos, es posible que se unan de tal manera que la tensión superficial que desarrolla el menisco que se forma por el acercamiento de los granos, genere el esfuerzo suficiente para soportar el peso de la partícula y que el mismo se pegue al otro.

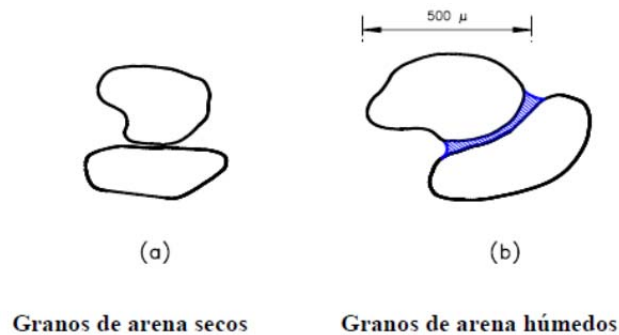


Figura II.21.- Menisco de agua en granos de arena (Vélez M., 1999).

Esta unión entre granos en una arena fina con tamaño de granos del orden de los 0.5 mm ( $500 \mu$ ) es muy débil, ya que los esfuerzos de gravedad (peso del grano) son muy importantes comparándolos con los esfuerzos de atracción que genera la tensión superficial.

Este fenómeno sin embargo es de potencial importancia entre las partículas de arcillas que son 500 veces más pequeñas que el grano de arena fina de nuestro ejemplo anterior ( $< 2 \mu$ ) y donde la forma de las mismas dejan de ser redondeadas para pasar a ser laminares, ver Figura II.22.

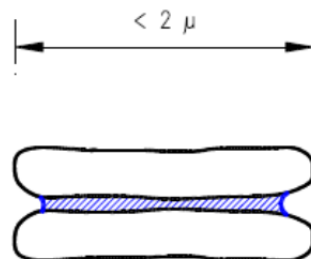


Figura II.22.- Menisco de agua en granos de arena (Vélez M., 1999).

Este fenómeno de atracción entre partículas en los suelos finos, (limos y arcillas) se conoce con el nombre de cohesión aparente.

En muchas arcillas esta atracción entre partículas como consecuencia de la tensión superficial, se pierde rápidamente si la muestra se sumerge en agua, ya que la muestra absorbe agua, los meniscos aumentan de radio con lo cual los esfuerzos que mantienen unidas a las partículas disminuyen, las partículas se separan y la muestra se desgrana totalmente o en trozos perdiendo de esta forma la cohesión aparente debida a la tensión superficial.

En otros tipos de arcilla esta pérdida de cohesión no se manifiesta cuando son sumergidas en agua. Evidentemente en estos casos las partículas son retenidas por fuerzas de otro tipo, que no alcanzan a ser destruidas, por la inmersión en agua.

Estas fuerzas pueden ser de carácter electrostático, que son generadas por la película de agua absorbida que se forma sobre cada partícula. O derivar de agentes cementantes naturales o no, como es el caso del cemento Portland cuando lo mezclamos con suelos para hacer suelo – cemento.

A esta forma casi permanente de resistencia al corte, o resistencia al desplazamiento relativo de partículas adyacentes motivada por esta fuerza de origen interno se la denomina cohesión verdadera (las pizarras por ejemplo son arcillas con una elevada cohesión verdadera).

Tanto la cohesión aparente como la verdadera reciben el nombre general de cohesión y se identifica en la mecánica de suelos con la letra  $c$ .

#### II.2.1.8 Coeficiente de dilatación térmica.

Cuando la temperatura de un material varia, se produce un cambio en sus dimensiones (dilata o contrae), y a menudo deforma, que se conoce como dilatación térmica. Cuando se recupera la temperatura inicial, se recuperan las dimensiones y la forma, y por tanto, el fenómeno es reversible, dentro de un rango elástico.

Un incremento de temperatura implica, normalmente, un aumento de las distancias interatómicas (y por tanto, una dilatación) debido al incremento de la vibración térmica de cada uno de los átomos. Si imaginamos un sistema sencillo formado por dos átomos enlazados, a  $0^{\circ}\text{K}$  el sistema es estático, no hay vibración térmica y los centros de los átomos se encuentran a una distancia  $d_0$ , (Figura II.23).

Al aumentar la temperatura, los átomos vibran alrededor de posiciones de equilibrio, y por tanto, la distancia promedio entre los dos centros ( $d_1$ ) es mayor y el sistema dilata. En la Figura II.23, para simplificación se ha representado una vibración esférica alrededor del centro. Intuitivamente, es fácil imaginar que a mayor temperatura, más amplia es la vibración, y más grande la distancia entre los átomos, con el límite de estabilidad del sistema (transformación o fusión, en el caso de los cristales).

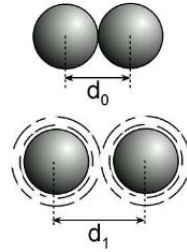


Figura II.23.- Sistema de dos átomos en dilatación y contracción (Daily J. & Harleman D., 1975).

La dilatación térmica de los materiales es un fenómeno homogéneo, pero no necesariamente isotrópico, por lo tanto la variación de dimensiones no será idéntica en todas las direcciones. En un material isotrópico, un vector  $\mathbf{p}$  se dilata  $\mathbf{q}$  en su misma dirección, de manera que la longitud final es, (Figura II.24):

$$\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

Ec.II.52

Expresión que es válida para cualquier dirección de  $\mathbf{p}$ , y por tanto,  $\alpha$  tendrá el mismo valor en todas direcciones.

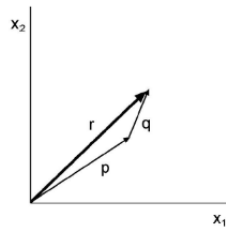


Figura II.24.- Sistema de referencia para un material isotrópico en dilatación (Vázquez J., 2003).

Si el cristal es anisotrópico, en general, cuando se aumenta  $T$  el vector  $\mathbf{p}$  pasa a ser  $\mathbf{r}$ , y también se cumple la anterior expresión, pero esta vez  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  no son codireccionales. En este caso, por tanto, la determinación del coeficiente de dilatación  $\alpha$  es un poco más complejo.

Consideremos que pasa con un cubo infinitamente pequeño situado de manera que tres de las aristas coincidan con un sistema ortogonal de ejes  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  (Figura II.25). Si se aumenta la temperatura  $1^\circ\text{C}$ , el cubo se deforma homogéneamente (Figura II.26).

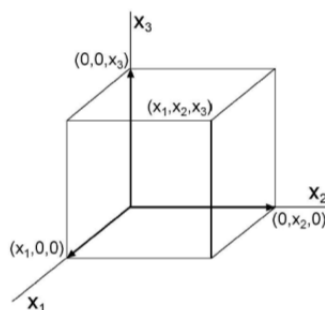


Figura II.25.- Cubo infinitesimal coincidiendo con un sistema ortogonal (Vázquez J., 2003).



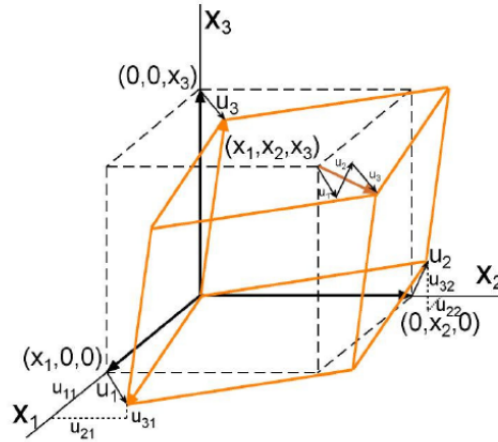


Figura II.26.- Cubo infinitesimal deformado por dilatación (Vázquez J., 2003).

Después de la deformación cada lado del cubo ha cambiado de longitud y de dirección, como antes se ha mostrado con el vector  $\mathbf{p}$ , los nuevos lados (dibujados en color) son las aristas de un paralelepípedo resultado de la deformación del cubo.

Las aristas que estaban sobre los ejes se han deformado según los vectores  $\mathbf{u}_i$ , que tienen por componentes  $(u_{1i}, u_{2i}, u_{3i})$  sobre los tres ejes de coordenadas. Lógicamente, la diagonal del cubo se ha transformado un vector que es la suma de los vectores  $\mathbf{u}_i$  de las aristas (Figura II.27).

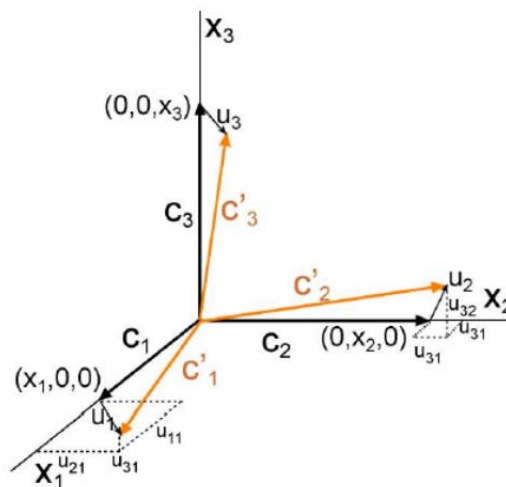


Figura II.27.- Componentes  $(u_{1i}, u_{2i}, u_{3i})$  de las aristas del cubo infinitesimal deformado por dilatación (Vázquez J., 2003).

Cada arista del cubo  $c_i$  pasa a ser una nueva arista  $c'_i$  y se cumple que:

$$c_i + u_i = c'_i$$

Ec.II.53

Cada uno de los vectores  $\mathbf{u}_i$  que describen la deformación de las aristas tiene unas componentes sobre los ejes:

$$\begin{aligned}u_1 &= u_{11} + u_{21} + u_{31} \\u_2 &= u_{12} + u_{22} + u_{32} \\u_3 &= u_{13} + u_{23} + u_{33}\end{aligned}$$

Ecs.II.54

Por tanto, las componentes sobre los ejes de la deformación del punto  $(x_1, x_2, x_3)$  son:

$$\begin{aligned}\left(\frac{s}{x_1}\right) &\rightarrow u_{11} + u_{12} + u_{13} \\ \left(\frac{s}{x_2}\right) &\rightarrow u_{21} + u_{22} + u_{23} \\ \left(\frac{s}{x_3}\right) &\rightarrow u_{31} + u_{32} + u_{33}\end{aligned}$$

Ecs.II.55

Como se ha visto antes,  $(dl / l)$  es independiente de  $l$ , por tanto, conviene definir la deformación como el desplazamiento dividido por la distancia original.

Así pues, por cada arista del cubo:

$$a_1 = \left(\frac{u_1}{x_1}\right); \quad a_2 = \left(\frac{u_2}{x_1}\right); \quad a_3 = \left(\frac{u_3}{x_1}\right)$$

Ec.II.56

Y los componentes de la deformación respecto de los ejes valen:

$$\begin{aligned}\text{para } a_1 \quad a_{11} &= \left(\frac{u_{11}}{x_1}\right); \quad a_{21} = \left(\frac{u_{21}}{x_1}\right); \quad a_{31} = \left(\frac{u_{31}}{x_1}\right) \\ \text{para } a_2 \quad a_{12} &= \left(\frac{u_{12}}{x_2}\right); \quad a_{22} = \left(\frac{u_{22}}{x_2}\right); \quad a_{32} = \left(\frac{u_{32}}{x_2}\right) \\ \text{para } a_3 \quad a_{13} &= \left(\frac{u_{13}}{x_3}\right); \quad a_{23} = \left(\frac{u_{23}}{x_3}\right); \quad a_{33} = \left(\frac{u_{33}}{x_3}\right)\end{aligned}$$

Ecs.II.57

Estos componentes definen un tensor de 9 componentes que describen la deformación causada por un incremento de 1°C:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ec.II.58

Y si se representa sobre los ejes de coordenadas, como en la Figura II.28 siguiente:

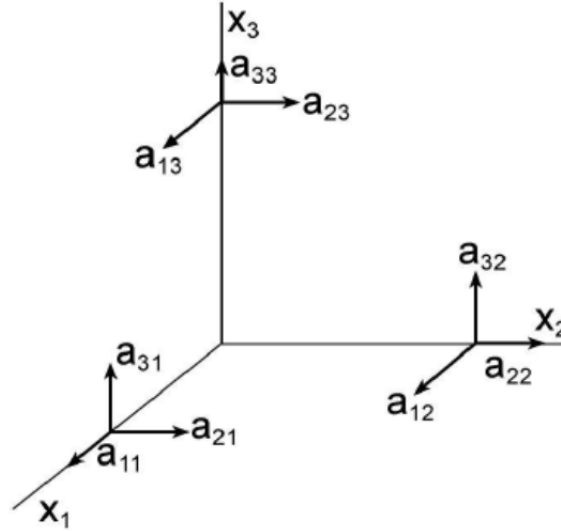


Figura II.28.- Componentes ( $u_{1i}$ ,  $u_{2i}$ ,  $u_{3i}$ ) de la deformación de las aristas del cubo infinitesimal (Vázquez J., 2003).

Cada uno de los componentes ha sido definido, por un incremento de un grado como  $a_{ij} = \left(\frac{u_{ij}}{x_i}\right)$ , y habiendo definido  $\alpha = \left(\frac{\delta l}{l}\right)$ , podemos admitir que:

$$a_{ij} = \alpha_{ij}$$

Ec.II.59

Siendo  $\alpha$  el coeficiente de dilatación lineal, y por tanto se puede escribir el tensor de dilatación térmica:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Ec.II.60

Como la dilatación térmica es centro simétrica  $\delta [u, v, w] = \delta [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$  el tensor queda:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \mathbf{0} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Ec.II.61

Para mejor comprensión, imaginemos en primer lugar un espacio bidimensional y supongamos un vector  $\mathbf{p}$  referido a dos ejes  $x_1$  y  $x_2$ , que es la diagonal de un rectángulo de lados  $p_1$  y  $p_2$ . Después de un incremento de temperatura de  $1^\circ\text{C}$ , se deforma el vector  $\mathbf{q}$  y el rectángulo se transforma en otro paralelogramo de diagonal  $\mathbf{r}$  (Figura II.29).

$$\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$$

Ec.II.62

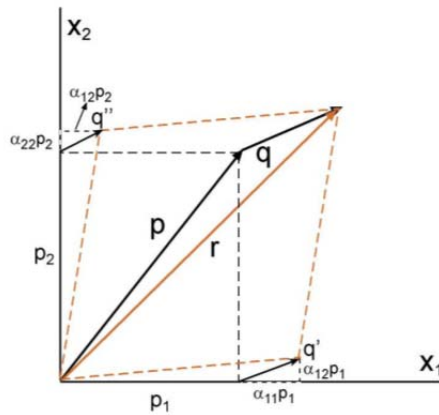


Figura II.29.- Deformación del vector  $\mathbf{p}$  en dos dimensiones ( $u_{1i}, u_{2i}$ ) (Vázquez J., 2003).

En dos dimensiones, el tensor dilatación térmica queda:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

Ec.II.63

Por tanto el vector deformación  $\mathbf{q}$  resulta del producto:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Ec.II.64

Es decir:

$$q_1 = \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2$$

$$q_2 = \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2$$

Ec.II.65

Como el tensor es simétrico,  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ :

Analicemos la deformación de una línea, uno de los lados del rectángulo de la Figura II.30:  $\mathbf{p}_1$  expande  $\mathbf{q}'$ , de componentes sobre los ejes (figura II.29):

$$q'_1 = \alpha_{11}p_1 \quad ; \quad q'_2 = \alpha_{21}p_1$$

Ec.II.66

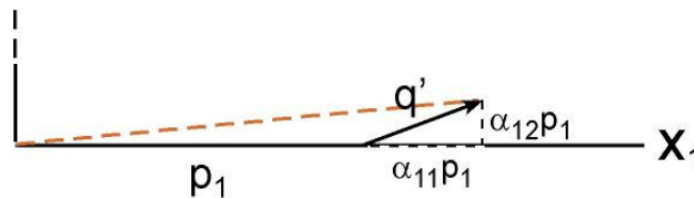


Figura II.30.- Deformación del vector  $\mathbf{p}_1$  a  $\mathbf{q}'$  en dos dimensiones ( $u_{1i}, u_{2i}$ ) (Vázquez J., 2003).

- ❖  $\alpha_{11}$  representa la dilatación por unidad de longitud de la línea inicialmente paralela a  $x_1$ .
- ❖  $\alpha_{12}$  representa el ángulo de rotación de la línea hacia el eje  $x_2$ , dado que es un número muy pequeño el ángulo, el seno y la tangente se igualan.

De la misma manera, una línea  $p_2$  paralela a  $x_2$ , expande:

$$q''_1 = \alpha_{12}p_2 \quad ; \quad q''_2 = \alpha_{22}p_2 \quad \text{Ec.II.67}$$

El rectángulo considerado hasta ahora, de lados  $p_1$  y  $p_2$  se ha distorsionado para dar lugar a otro paralelogramo, y como el tensor es simétrico ( $\alpha_{12} = \alpha_{21}$  y en general  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ), el nuevo paralelogramo está dispuesto simétricamente respecto de los ejes  $x_1$  y  $x_2$ , y los ángulos entre los lados pasan de ser  $90^\circ$  a  $(90^\circ \pm 2 \arctang \alpha_{12})$ , y como  $\alpha_{ij}$  son muy pequeños ( $90^\circ \pm 2\alpha_{12}$ ). La línea  $p$ , que era la diagonal del rectángulo, pasa a ser  $r$ , la diagonal del nuevo paralelogramo, que en general, no son coincidentes.

De manera general, cualquier línea que no coincida con los ejes de la cuádrlica representativa del tensor, rota respecto de un punto fijo y cambia de longitud. Solo en los ejes del elipsoide el cambio queda limitado a un cambio de tamaño, sin rotación.

Conviene tener presente, no obstante, que los componentes del tensor de la dilatación térmica son del orden de  $10^{-5}$ , por tanto, la rotación es menor de un segundo de grado por grado centígrado. En la mayor parte de los trabajos prácticos, esta desviación es despreciable.

Los coeficientes de dilatación correspondientes a las tres fases de la materia, se expresan como:

- ❖ Coeficiente de dilatación de aire:

$$\alpha_a = \frac{1}{V_a} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \quad \text{Ec.II.68}$$

- ❖ Coeficiente de dilatación del agua:

$$\alpha_w = \frac{1}{V_w} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right) \quad \text{Ec.II.69}$$

- ❖ Coeficiente de dilatación del esqueleto sólido:

$$\alpha_s = \frac{1}{V_s} \left( \frac{\partial V_s}{\partial T} \right) \quad \text{Ec.II.70}$$

En las Tablas II.4 a II.6 se proporcionan los valores típicos de las propiedades de la materia:

Tabla II.4.- Propiedades de los líquidos a 20°C, presión atmosférica y aceleración de la gravedad en condiciones estándar (Gratton J., 2002).

Substancia	Masa específica ( $\rho$ ) geok/m <sup>3</sup>	Peso específico ( $\gamma$ ) kg <sub>f</sub> /m <sup>3</sup>	Viscosidad dinámica ( $\mu \times 10^6$ ) cg <sub>f</sub> -seg/m <sup>2</sup>	Viscosidad cinemática ( $\nu \times 10^6$ ) m <sup>2</sup> /seg	Tensión superficial* ( $\sigma$ ) kg <sub>f</sub> /m	Presión de vapor a 20°C ( $p_v$ ) kg <sub>f</sub> /cm <sup>2</sup> (abs)	Módulo de elasticidad volumétrico ( $E_v$ ) kg <sub>f</sub> /cm <sup>2</sup>	Calor específico (c) cal/(kg <sub>m</sub> -°C)
Alcohol (etílico)	80.39	789.8	12.24	0.152	1.265	0.060	10.545	0.581-a 25°C
Benceno	89.84	879.5	6.68	0.074	2.158	0.102		0.406
Tetracloruro de carbono	162.35	1594.0	9.92	0.0613	0.00272	0.122		0.201
Freón-12 (a 19.06°C)	136.09	1334.5				5.624		
Glicerina	128.72	1262.4	15310.00	118.912		0.141 $\times 10^{-3}$	44.290	0.55
Keroseno	79.34 a 83.54	785.0 a 817.0			0.00238-0.0032'			
Mercurio	1381.80	13570.0	15.80	0.0114	0.0523-0.0496**	0.162 $\times 10^{-3}$	267.140	0.0332
Petróleo: crudo combustible	86.69 a 94.57 94.57 a 99.83	849.1 a 929.2 929.2 a 977.2			0.00238-0.0038'			
Aceite: de linaza lubricante	96.15 86.69 a 89.32	940.4 849.1 a 881.1	448.6	4.673	0.00342 0.00357-0.0038'			
Agua: dulce de mar con 20 % de NaCl	101.77 104.55 117.16	998.2 1025.3 1147.0	10.3 11.1	0.1005 0.1059	0.00743	0.0238	22,496	0.999

\* En contacto con el aire. \*\* En contacto con su propio vapor.

Tabla II.5.- Propiedades del agua a presión atmosférica y aceleración de la gravedad en condiciones normales (Gratton J., 2002).

Temperatura (T) °C	Masa específica ( $\rho$ ) geok/m <sup>3</sup>	Peso específico ( $\gamma$ ) kg/m <sup>3</sup>	Viscosidad dinámica ( $\mu \times 10^6$ ) kg-seg/m <sup>2</sup>	Viscosidad cinemática ( $\nu \times 10^6$ ) m <sup>2</sup> /seg	Tensión* superficial ( $\sigma$ ) kg/m	Presión de vapor ( $p_v$ ) kg/cm <sup>2</sup> (abs)	Módulo de elasticidad volumétrico ( $E_v$ ) kg/cm <sup>2</sup>
0	101.928	999.968	1.829	1.793	0.0077 1	0.00622	20,530
4.44	101.928	<b>1,000.129</b>	1.575	1.542	0.00765	0.00858	
10.0	101.928	999.808	1.336	1.310	0.00757	0.01251	
15.6	101.823	999.167	1.151	1.133	0.00750	0.01800	
20.0	101.770	998.206	1.029	1.013	0.00743	0.02383	22,500
26.7	101.612	996.764	0.878	0.864	0.00732	0.03564	
32.2	101.455	995.002	0.780	0.787	0.00723	0.04907	
38.0	101.245	993.240	0.692	0.687	0.00714	0.0667 1	
49.0	100.772	988.594	0.570	0.566	0.00695	0.11881	23,340
60.0	100.246	983.308	0.478	0.478	0.00756	0.203 17	
71.0	99.616	977.220	0.409	0.411	0.00655	0.33322	
82.0	98.933	970.492	0.354	0.358	0.00635	0.52795	
93.0	98.144	963.122	0.311	0.318	0.00615	<b>0.81056</b>	21,650
100.0	97.724	958.477	0.289	0.296	0.0060 1	1.03341	

\* En contacto con el aire.

Tabla II.6.- Tensión superficial de algunos elementos (Adoptado de Gratton J., 2002).

Lugar	Temperatura T, °C	Tensión superficial $\sigma$ , (kg/m)
Plata – Aire	970	0.0815
Cloruro de sodio – Aire	996	0.0102
Agua – Aire	20	0.00743
Cinc - Aire	590	0.00722
Benceno – Mercurio	20	0.0382
Agua – Benceno	20	0.00357
Agua – Tetracloruro de carbonato	20	0.00458
Agua - Mercurio	20	0.0382

### II.2.1.9 Clasificación de los flujos.

Existen muchas formas distintas de clasificar los flujos, por ejemplo, el movimiento de los fluidos, según se atienda a un aspecto u otro del mismo. Presentamos seguidamente algunas de las clasificaciones más frecuentes:

Flujos estacionarios y no estacionarios.- Un flujo se dice estacionario cuando las magnitudes de interés, tales como la presión, velocidad y densidad, no dependen del tiempo, esto es:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z); \quad p = p(x, y, z); \quad \rho = \rho(x, y, z) \quad \text{Ec.II.71}$$

Por el contrario, cuando alguna de las magnitudes de interés y, en particular, el campo de velocidades, dependen del tiempo, el flujo se denomina no estacionario o variable.

Flujos uniformes y no uniformes.- De forma análoga, un flujo se dice uniforme cuando las magnitudes de interés no cambian de un punto a otro en el fluido, siendo éstas función del tiempo exclusivamente:

$$\vec{v} = \vec{v}(t); \quad p = p(t); \quad \rho = \rho(t) \quad \text{Ec.II.72}$$

Cuando tal circunstancia no se cumple, el flujo será no uniforme.

Flujos viscosos y no viscosos.- Un flujo no viscoso es aquel en el que los efectos de la viscosidad no afectan de forma significativa al flujo y, por tanto, pueden ser ignorados. En un flujo viscoso, por el contrario, los efectos de la viscosidad son determinantes en el flujo.

Matemáticamente, el modelo de fluido no viscoso se obtiene haciendo cero la viscosidad, con lo que los efectos viscosos desaparecen. Sin embargo, tal requisito no se cumple en la práctica pues todos los fluidos de interés, tales como el agua o el aire, poseen cierta viscosidad. La cuestión que

entonces se plantea es: ¿existen flujos en los que los efectos de la viscosidad sean despreciables? La respuesta es sí, siempre que los esfuerzos cortantes en el fluido sean pequeños y actúen sobre áreas reducidas, de forma que no afecten de forma importante al flujo del fluido. Evidentemente, esta afirmación es muy general y se requiere un análisis más profundo para justificar la suposición de flujo no viscoso.

Sin embargo, de acuerdo con la experiencia, existe una clase primaria de flujos que pueden ser modelados como fluidos no viscosos: los flujos externos, es decir, los flujos que tienen lugar en el exterior o alrededor de un cuerpo, como por ejemplo el flujo del aire alrededor del ala de un avión o de un edificio. Los efectos viscosos que pudieran existir están confinados dentro de una capa muy delgada, denominada capa límite viscosa, que se encuentra adherida a la pared del cuerpo (Figura II.31). Para muchos flujos, la capa límite es tan delgada que puede simplemente ignorarse cuando se estudian las características generales del flujo. Así, para el caso ya mencionado del flujo del aire alrededor de un ala, el modelo de fluido no viscoso proporciona excelentes predicciones, exceptuando quizás las proximidades del borde de fuga del ala.

En el límite opuesto de flujos viscosos podemos citar los denominados flujos internos, tales como los flujos en tuberías y conductos. En estos flujos, los efectos viscosos causan pérdidas de presión muy importantes que explican la enorme cantidad de energía que debe usarse para transportar agua, petróleo o gas a través de las redes de tuberías.

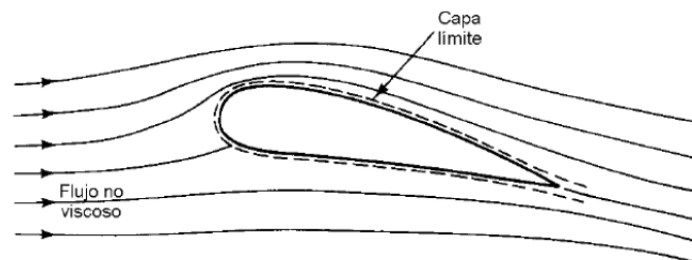


Figura II.31.- Flujo alrededor de un ala (Vélez M., 1999).

Flujos laminares y turbulentos.- Los flujos viscosos pueden ser a su vez divididos en flujos laminares y flujos turbulentos. En un flujo laminar, el fluido fluye sin que exista una mezcla significativa entre partículas de fluido vecinas. Si se inyectara tinta en el fluido, ésta sólo se mezclaría con el fluido circundante por la acción de la difusión molecular, por lo que retendría su identidad durante un período largo de tiempo. Los esfuerzos cortantes viscosos son determinantes en el flujo laminar.

En un flujo turbulento, los movimientos del fluido varían irregularmente, de forma que magnitudes tales como la velocidad y la presión presentan una variación azarosa con el tiempo y las coordenadas espaciales. Por ello, las magnitudes físicas son frecuentemente descritas mediante su promedio estadístico. En este sentido podemos definir un flujo estacionario turbulento como aquel en el que las magnitudes físicas promediadas temporalmente no cambian en el tiempo (Figura II.32). Al contrario que en el flujo laminar, si se inyectara tinta en un flujo turbulento, ésta se mezclaría inmediatamente por la acción del movimiento azaroso de las partículas de fluido, perdiendo muy rápidamente su identidad en este proceso de mezcla.



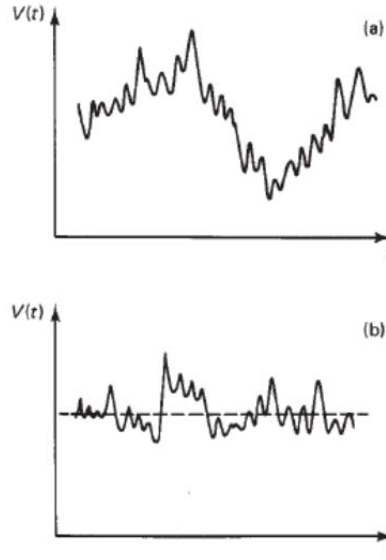


Figura II.32.- Velocidad como función del tiempo en un flujo turbulento: (a) flujo no estacionario, (b) flujo estacionario (Daily J. & Harleman D., 1975).

El que el flujo sea laminar o turbulento depende de cuatro parámetros físicos que describen las condiciones de flujo. El primer parámetro es una longitud característica,  $L$ , como por ejemplo el diámetro de la tubería por la que circula el fluido. El segundo parámetro es una velocidad característica del flujo,  $U$ , como por ejemplo el promedio espacio temporal de la velocidad del fluido en una sección de la tubería. Los dos restantes parámetros son la densidad del fluido,  $\rho$ , y su viscosidad dinámica,  $\mu$ . Estos cuatro parámetros se combinan en un único parámetro adimensional que se denomina número de Reynolds, y que se define como:

$$Re = \left( \frac{L U \rho}{\mu} \right)$$

Ec.II.73

Cuando el número de Reynolds es relativamente pequeño el flujo es laminar y, por el contrario, a elevados números de Reynolds el flujo se vuelve turbulento. Por tanto, valores elevados de  $L$ ,  $U$  y  $\rho$  favorecen la existencia de flujo turbulento, mientras que valores elevados de  $\mu$  favorecen el flujo laminar. La transición de flujo laminar a turbulento define un número crítico de Reynolds,  $Re_{crit}$ , de forma que el flujo es laminar si  $Re < Re_{crit}$ . Por ejemplo, para el flujo en el interior de una tubería rugosa de sección circular se encuentra que  $Re_{crit} \approx 2000$ .

En el régimen turbulento, las fluctuaciones de la velocidad son causa de intercambio de cantidad de movimiento entre regiones contiguas del fluido, por lo que tienen un efecto similar, aunque de magnitud diferente, a los esfuerzos cortantes viscosos. Estos esfuerzos cortantes de naturaleza turbulenta reciben el nombre de esfuerzos de Reynolds y dominan completamente a los correspondientes esfuerzos viscosos en la mayor parte del fluido, excepto en las regiones muy próximas a la pared donde se encuentra la capa límite viscosa y el flujo es laminar. El espesor de esta capa límite depende fuertemente del número de Reynolds, disminuyendo a medida que éste crece. Debido a los esfuerzos de Reynolds, el perfil de velocidades de los flujos turbulentos es siempre mucho más uniforme que los correspondiente a los flujos laminares (Figura II.33).

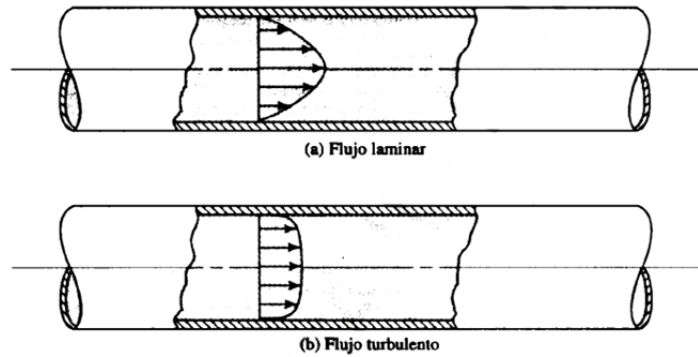


Figura II.33.- Perfiles de velocidad para flujos en conductos (Martín D., 2011).

Si lo definimos desde el punto de vista de la velocidad de las partículas del fluido en cada punto del espacio:

- ❖ Flujo estacionario.- La velocidad de las partículas del fluido que pasan por un punto dado es la misma en todo instante del tiempo.
- ❖ Flujo no estacionario.- Las velocidades de las partículas del fluido son una función del tiempo en cualquier punto dado.

Si lo definimos desde el punto de vista de la velocidad angular neta del fluido:

- ❖ Flujo irrotacional.- Si el elemento del fluido en un punto dado no tiene velocidad angular neta alrededor del punto.
- ❖ Flujo rotacional.- Cuando la velocidad angular neta del elemento del fluido no es nula.

Si lo definimos desde el punto de vista de las variaciones de densidad:

- ❖ Flujo compresible.- La densidad del fluido varía de punto a punto, en general es una función de las coordenadas.
- ❖ Flujo incompresible.- Cuando no hay variaciones de densidad en función de la posición. Generalmente el flujo de los líquidos es incompresible.

Si lo definimos desde el punto de vista de los rozamientos internos:

- ❖ Flujo viscoso.- Fuerzas tangenciales entre distintas capas del fluido: se disipa energía.
- ❖ Flujo no viscoso.- Ausencia de rozamientos internos.

## II.2.2 Comportamiento dinámico de los fluidos.

En la Física, la teoría de la dinámica de los fluidos es desarrollada bajo dos puntos de vista: el microscópico y el macroscópico. En el nivel microscópico se toma en cuenta la estructura molecular del medio y el movimiento unidimensional de las partículas que lo forman. En el macroscópico en cambio, se consideran las propiedades físicas del medio. Sin embargo es importante notar que la materia no es continua, es decir que a nivel microscópico la materia tiene

espacios entre las moléculas que la componen y a su vez estas moléculas están compuestas por átomos que también están espaciados y así sucesivamente.

Si se quiere describir el movimiento de un fluido se pueden aplicar las leyes de Newton a cada una de las partículas individuales que constituyen el sistema, cuyo movimiento se observa como una función del tiempo (análisis lagrangiano). Su posición  $\vec{r}(t)$ , velocidad  $\vec{v}(t)$ , y aceleración  $\vec{a}(t)$ , son las magnitudes de interés que deben ser calculadas. En el estudio de la dinámica de los fluidos este enfoque sería imposible de llevar a cabo incluso con el actual desarrollo de las computadoras. Así en lugar de estudiar por separado la conglomeración real de moléculas se supone que el flujo es un medio continuo.

En la hipótesis del continuo se considera que cada una de las propiedades del sistema está uniformemente distribuida sobre éste. Así, los sólidos y los fluidos se pueden considerar medios que poseen continuidad en todas sus propiedades y ser estudiados bajo tal suposición. Esta hipótesis significa que es posible asignar valores definidos de las propiedades del sistema (o porción de materia) a un punto y que los valores de esas propiedades son funciones continuas de la posición y del tiempo (análisis euleriano). Por eso, la hipótesis del continuo es la base de la mecánica de fluidos. Una descripción para la velocidad es considerar puntos fijos del espacio y registrar ésta propiedad en las partículas que pasan por dichos puntos. La velocidad del fluido se describirá así mediante un campo vectorial, conocido como campo de velocidades, que asigna a cada punto del espacio  $(x, y, z)$  y en cada instante de tiempo  $t$  un vector velocidad.

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

Ec.II.74

En un punto dado, la velocidad del fluido cambiará, en general, de un instante de tiempo a otro. El ritmo de cambio de la velocidad del fluido en el tiempo viene dado por  $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)$ . Además, si en un instante de tiempo dado comparamos la velocidad que tiene el fluido en puntos diferentes, ésta no será en general la misma. El ritmo de cambio de la velocidad del fluido cuando nos desplazamos según los ejes coordenados está dado por  $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\right)$ ,  $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\right)$ ,  $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)$ .

En mecánica se acostumbra analizar el comportamiento de un cuerpo recurriendo a la idea de cuerpo libre. Es decir, se aísla el elemento en estudio del resto y se indican las fuerzas que lo ligan con el exterior. Esto es simple de hacer cuando el cuerpo en cuestión es fácilmente identificable, como ocurre en el estudio de los cuerpos rígidos, cuya forma es constante. En termodinámica, por otra parte, se prefiere hacer el análisis en un sistema, entendiendo por tal a una cantidad fija e identificable de masa, aunque su forma cambie. Las fronteras del sistema puede ser fijos o movibles, pero la masa no puede sobrepasar estas fronteras, un ejemplo típico es el análisis del comportamiento de una masa de gas encerrada en un pistón.

En mecánica de fluidos no se puede hacer uso de la idea de cuerpo libre o de sistema, ya que es difícil fijar la atención sobre una parte identificable de masa que se mueve, desplaza y deforma en el espacio. En este caso, es más simple tomar como elemento de análisis un volumen fijo en el espacio a través del cual el fluido escurre, esta es la idea del volumen de control (VC). La superficie que

define el volumen de control puede ser real o imaginaria y puede estar fija o en movimiento, pero es indeformable (Figura II.34).

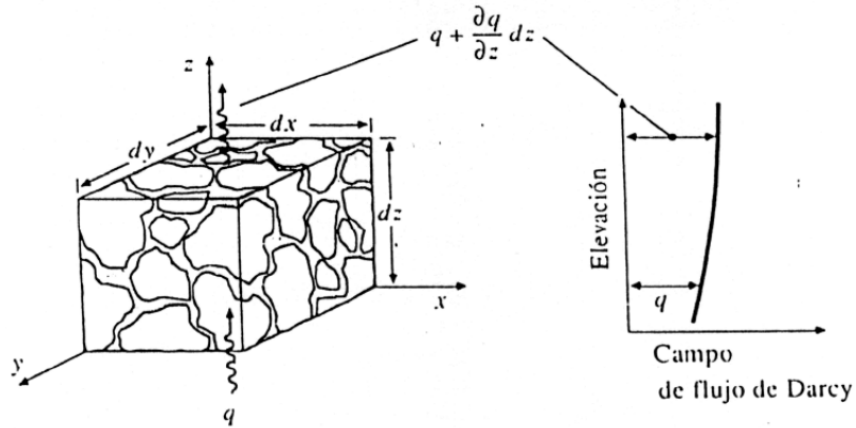


Figura II.34.- Volumen de control para el desarrollo de ecuaciones de continuidad en un medio poroso saturado (Vélez M., 1999).

Las leyes básicas de la mecánica y la termodinámica pueden aplicarse al caso de un fluido considerando ya sea un elemento infinitesimal o un volumen de control; en el primer caso, se obtiene ecuaciones diferenciales que podrán integrarse una vez que se conozcan las condiciones de frontera; en el segundo caso se puede llegar a ecuaciones integrales que toman en cuenta las variables globales que intervienen.

Frecuentemente en muchas situaciones prácticas no se requiere un grado de detalle importante, basta con conocer magnitudes globales o promedios. Esto se logra fácilmente con la aplicación de las leyes básicas de la mecánica y la termodinámica a un volumen de control adecuadamente elegido. Si por otra parte se dispone de una ecuación diferencial y se conocen las condiciones de frontera, mediante la integración de ellas a un caso en particular puede conocerse el detalle de lo que ocurre con un variable, por ejemplo, el valor de la presión en cada punto del espacio. En general este enfoque entrega mucho más información sobre el comportamiento del fluido, pero es más laborioso de realizar.

El análisis puntual está orientado a establecer un modelo matemático del comportamiento del fluido, que permita conocer en detalle lo que ocurre en cada punto. Para ello se establecen las ecuaciones básicas en pequeña escala, llegando a relaciones diferenciales, las cuales se deberán integrar para cada caso particular de acuerdo a las condiciones de frontera e iniciales respectivas. Con base en ello se podrá conocer la distribución espacial y temporal de las variables que definen el comportamiento del fluido, como son la presión, velocidad, masa específica, etc. Si bien hasta ahora ha sido posible establecer modelos matemáticos de complejidad razonable para casi cualquier tipo de flujo, las ecuaciones resultantes son fácilmente integrables por procedimientos analíticos sólo en el caso de flujos laminares, contándose con procedimientos aproximados de integración numérica para flujos más complejos. Una vez obtenido los valores de las variables que definen el escurrimiento en todos los puntos del espacio ocupado por el fluido, es posible mediante simple integración obtener valores del caudal que pasa por una sección, la fuerza total sobre la superficie y otras variables globales.

La idea central del análisis diferencial consiste en establecer las ecuaciones básicas del movimiento de un fluido para un punto cualquiera del espacio ocupado por él. Esto se ha hecho para el principio de conservación de la masa y de cantidad de movimiento.

Antes de comenzar a tratar el tema, es útil recordar las propiedades del operador vectorial nábla ( $\nabla$ ). A continuación se resumen sus principales propiedades, utilizando coordenadas cartesianas:

- a. Definición, operador vectorial nábla ( $\nabla$ ).

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)i + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)j + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)k$$

Ec.II.75

- b. Gradiente de una función escalar. Define la variación de la función  $F$  en el espacio y tiene por dirección aquella en la cual el aumento de  $F$  es mayor. En este caso opera sobre una función escalar y el resultado es un vector:

$$\text{grad } F = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)i + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)j + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)k$$

Ec.II.76

- c. Divergencia de una función vectorial. Indica la forma en que un vector se aleja de un punto en el espacio y el comportamiento de sus componentes. De esta manera opera sobre un vector y el resultado es un escalar.

$$\text{div } V = \nabla \cdot V = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Ec.II.77

La divergencia tiene importantes interpretaciones físicas si  $f = \vec{v}$  representa el campo de velocidades de un fluido entonces  $\text{div } \vec{v}$  representa la razón de expansión por unidad de volumen del fluido.

- i.  $\nabla \cdot (\vec{v}) < 0$ ; *el fluido se esta comprimiendo*
- ii.  $\nabla \cdot (\vec{v}) > 0$ ; *el fluido se esta expandiendo*
- iii.  $\nabla \cdot (\vec{v}) = 0$ ; *el fluido es incompresible*

- d. Rotacional o rotor de una función vectorial. Define la forma en que el vector gira en el espacio. En este caso opera sobre un vector y el resultado es también un vector.

$$\text{rot } V = \nabla \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)k$$

$$\text{rot } V = \nabla \times V = \left(\frac{\partial u}{\partial z} j - \frac{\partial v}{\partial y} k\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} k - \frac{\partial w}{\partial z} i\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} i - \frac{\partial w}{\partial x} j\right)$$

Ecs.II.78

- e. Laplaciano de una función escalar. Se define por este nombre a la divergencia del gradiente de una función escalar. El resultado es un escalar.

$$Lap F = \nabla^2 F = div (grad F) = \nabla \cdot \nabla F = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right)$$

Ec.II.79

- f. El elemento  $\nabla$  no es un vector, es un operador. Por ejemplo si  $\phi$  es un campo escalar:

- i.  $\phi \nabla$  es un operador mientras que:
- ii.  $\nabla \phi$  es una función vectorial llamada gradiente.

De igual manera si  $\vec{V}$  es un campo vectorial  $\vec{V} \nabla$  es un operador mientras que  $\nabla \cdot \vec{V}$  es una función escalar.

- iii. Multiplicando  $\nabla$  por la izquierda da operadores
- iv. Multiplicando  $\nabla$  por la derecha da funciones escalares o vectoriales.
- v. Reglas algebraicas para gradientes:

$$\begin{aligned} \diamond \nabla (C f) &= C \nabla f \\ \diamond \nabla (f + g) &= \nabla f + \nabla g \\ \diamond \nabla (f - g) &= \nabla f - \nabla g \\ \diamond \nabla (f g) &= f \nabla g + g \nabla f \end{aligned}$$

- g. Derivada material:

La derivada material, llamada también derivada total del tiempo, derivada sustancial, o derivada global  $\left( \frac{D}{Dt} \right)$ , representa la velocidad de cambio para una partícula fija del fluido y se define como:

$$\left( \frac{D}{Dt} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + v \cdot grad$$

Ec.II.80

Es decir:

$$\left( \frac{D\phi}{Dt} \right) = \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right) \vec{v}_i$$

Ec.II.81

Y de forma compacta:

$$\left( \frac{D\phi}{Dt} \right) = \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + v \cdot grad \phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + v \cdot \nabla \phi$$

Ec.II.82

Por lo tanto, es una combinación de:

- i. La derivada local  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$ , que representa la cantidad de cambio en el tiempo en un punto fijo.
- ii. Las derivadas convectivas  $v_i \cdot \text{grad } \phi$ , que representan el cambio debido al movimiento de la partícula del fluido de una posición a otra, donde las propiedades de flujo son espacialmente distintas.

Cuando aparecen los efectos convectivos en las leyes básicas que involucran la masa, el momento o la energía, las ecuaciones en derivadas parciales que describen el material se hacen no lineales y, por lo tanto, son de resolución más compleja.

### II.2.2.1 Conservación de la masa o ecuación de continuidad.

Los elementos de un fluido en movimiento deben cumplir con el requisito básico de la conservación de masa del sistema que conforman. Esto se traduce en una cierta relación entre las velocidades puntuales y la masa específica del fluido. El principio de conservación de la masa se expresa matemáticamente en la ecuación de continuidad (EC), en ella se puede emplear los métodos de análisis diferencial o integral, dependiendo de la información disponible y los intereses del análisis. A continuación se analizan las condiciones que el principio de conservación de la masa impone a la distribución de velocidades en cualquier punto del espacio ocupado por el fluido.

Supongamos que se conoce en cada punto del espacio ocupado por el fluido en movimiento la velocidad y la masa específica, ambas en función del punto en el espacio y tiempo, de manera que:

$$u = f_u(x, y, z, t)$$

$$v = f_v(x, y, z, t)$$

$$w = f_w(x, y, z, t)$$

$$\rho = f_\rho(x, y, z, t)$$

Ecs.II.83

En un campo conservativo la masa total del sistema debe permanecer constante, de manera que en ningún punto se cree o desaparezca masa del fluido. Esto requiere que las componentes de la velocidad y la masa específica estén relacionadas. Por ejemplo un fluido no puede expandirse a partir de un punto en todas direcciones sin que haya una disminución en el tiempo de la masa específica del fluido en ese punto.

Las condiciones que debe cumplir las componentes de la velocidad y la masa específica en un punto del espacio, de manera que se satisfaga el principio de continuidad, pueden obtenerse analizando lo que ocurre con un elemento de dimensiones  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  fijo en el espacio en cuyo centro la velocidad es  $V = ui + vj + wz$ , y la masa específica es  $\rho$ . En este caso, la ecuación de continuidad es la expresión cuantitativa del hecho de que el flujo de masa que entra al cubo menos el que sale de él es igual al aumento de masa en el interior por unidad de tiempo. La Figura II.35 indica las variables que intervienen.

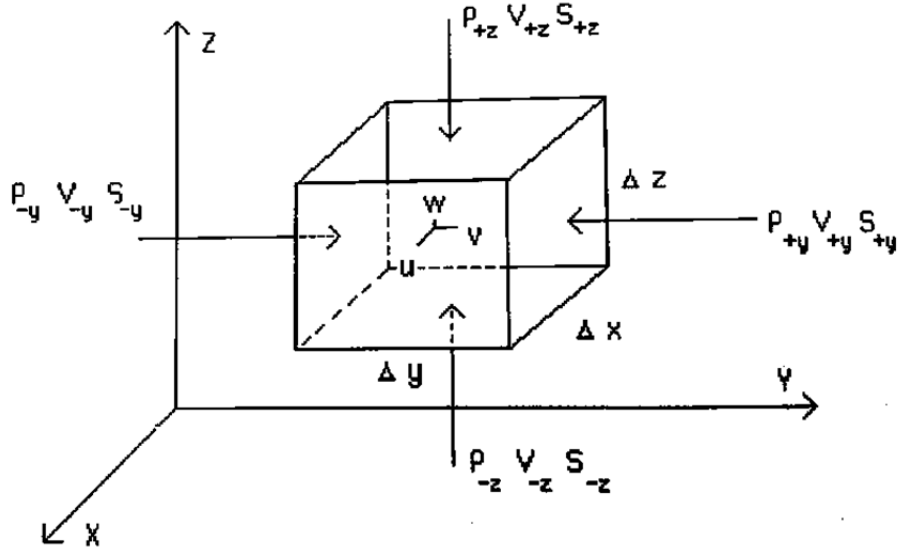


Figura II.35.- Flujo de masa en un cubo elemental (Fernández, 1999).

$$\begin{aligned} \rho_{+x} V_{+x} S_{+x} &= - \left( \frac{\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}}{\partial x} \right) \left( \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z = \\ &= - \left( \rho u + \frac{\rho \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x}{2} + \frac{u \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z + \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \Delta z \frac{\Delta x^2}{4} \right) \end{aligned}$$

Ec.II.84

Despreciando el término que contiene  $\Delta x^2$  frente a los otros de la suma, se obtiene:

$$\text{flujo en la cara (+x)} = - \rho u \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{flujo en la cara (+x)} = - \rho u \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u \rho}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{flujo en la cara (-x)} = \rho u \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u \rho}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{flujo en la cara (+y)} = - \rho v \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v \rho}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{flujo en la cara (-y)} = \rho v \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v \rho}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{flujo en la cara (+z)} = - \rho w \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w \rho}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\text{flujo en la cara (-z)} = \rho w \Delta y \Delta z - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w \rho}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Ecs.II.85



Sumando se obtiene el flujo neto de masa hacia el interior del volumen del cubo dado por:

$$\text{Flujo neto de masa} = - \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Ec.II.86

Este flujo neto hacia el interior del volumen debe ser igual al aumento de masa en su interior por unidad de tiempo, esto es:

$$\left( \frac{\partial(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \right)$$

Ec.II.87

Por lo tanto el principio de conservación de la masa exige que:

$$- \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Ec.II.88

Que corresponde a la ecuación que debe satisfacer las componentes de la velocidad para un campo conservativo. Esto puede expresarse como:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \text{div} (\rho V) = 0$$

Ec.II.89

Esta ecuación es válida para cualquier tipo de flujo, permanente e impermanente, y cualquier fluido, compresible e incompresible, homogéneo e isótropo y viscoso o ideal. Se puede desarrollar en coordenadas cartesianas para obtener:

$$\left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \left( v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \left( w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0$$

Ec.II.90

Se puede observar que:

$$V \cdot \text{grad} \rho = \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \left( v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \left( w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

Ec.II.91

Siendo **grad ρ** el gradiente de la masa específica, que representa su variación espacial. Entonces la ecuación de continuidad se expresa:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + V \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} V = 0$$

Ec.II.92

Dos casos particulares son interesantes de observar. Si el fluido es incompresible y homogéneo la masa específica no depende del tiempo ni del espacio, por lo tanto la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

Ec.II.93

Por otra parte, si el régimen es permanente, aunque el fluido sea incompresible, se obtiene:

$$\text{div } \rho \mathbf{V} = \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) = 0$$

Ec.II.94

### II.2.2.2 Segunda ley de Newton o ecuación de cantidad de movimiento.

Llamamos fluido ideal aquel cuya viscosidad es nula o despreciable, de manera que en su comportamiento no se observa el efecto de esfuerzos de corte y por lo tanto no existen fuerzas de fricción en las zonas de contacto con los bordes sólidos o las paredes. Si bien todos los fluidos tienen viscosidad, en muchos casos reales es posible analizar su comportamiento como si ella no existiera. Esto es particularmente cierto cuando los gradientes de velocidades son muy pequeños cerca de las paredes o cuando los tramos de contacto con ellas son muy cortos, de manera que la fuerza total debido a la fricción se puede despreciar frente a las otras que intervienen.

En el caso de fluidos ideales, las únicas fuerzas de superficie son las provocadas por la presión, que sumadas a las fuerzas másicas o de gravedad, son las responsables del movimiento del fluido. Bajo estas condiciones es fácil establecer una ecuación que represente la segunda ley de Newton, aplicada a un elemento de fluido, o ecuación de cantidad de movimiento, la que en este caso se conoce como la ecuación de Euler.

Interesa disponer de una expresión de la segunda ley de Newton para el caso de un fluido ideal en movimiento. Las fuerzas que actúan sobre el fluido ideal (viscosidad cero y por lo tanto ausencia de fuerzas de fricción) se puede dividir en fuerzas másicas y fuerzas superficiales provocadas por la presión.

Las fuerzas másicas,  $\mathbf{F}_m$ , puede expresarse como:

$$\mathbf{F}_m = \int_m \mathbf{f}_m \, dm = \int_V \rho \mathbf{f}_m \, dV$$

Ec.II.95

Si la masa específica del fluido,  $\rho$ , y la intensidad del campo de fuerzas,  $\mathbf{f}_m$ , permanecen constantes, para un pequeño elemento de volumen  $dV$  se tiene que:

$$d\mathbf{F}_m = \rho \mathbf{f}_m \, dV$$

Ec.II.96

Por otra parte, las fuerzas superficiales, debidas exclusivamente a la presión en este caso,  $F_{sp}$ , quedan determinadas por:

$$F_{sp} = \int_S P \mathbf{n} \cdot d\mathbf{s}$$

Ec.II.97

Donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a la superficie dirigida hacia el interior de ésta. Aplicando el teorema del gradiente:

$$\int_S P \mathbf{n} \, ds = \int_V \text{grad } P \, dV$$

Ec.II.98

Como el gradiente de presiones se puede suponer constante para un pequeño elemento  $dV$ :

$$dF_{sp} = -\text{grad } P \, dV$$

Ec.II.99

De acuerdo a la segunda ley de Newton la suma de estas fuerzas que actúan sobre el elemento de fluido de volumen  $dV$  y masa  $dm$  producen un cambio temporal de su velocidad, de manera que:

$$\sum dF = a \, dm = a \, \rho \, dV$$

Ec.II.100

Reemplazando las expresiones para las fuerzas:

$$\rho \, f_m \, dV - \text{grad } P \, dV = \rho \left( \frac{dv}{dt} \right) dV$$

Ec.II.101

Considerando la variación de la velocidad en términos de la aceleración local y convectiva:

$$\mathbf{f}_m - \left( \frac{\text{grad } P}{\rho} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Ec.II.102

La ecuación II.102 de hidrodinámica clásica recibe el nombre de ecuación de Euler. Un caso particular inmediato de esta ecuación es la Ley Hidrostática, que se obtiene si la velocidad es constante en el tiempo y el espacio. La ecuación de Euler corresponde al teorema de cantidad de movimiento aplicado a un punto de un fluido ideal y como tal es una expresión vectorial que da origen a tres ecuaciones escalares para un flujo en el espacio. En coordenadas cartesianas estas ecuaciones se pueden encontrar desarrollando la expresión anterior:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_{mx} - \left( \frac{1}{\rho} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = f_{my} - \left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + u\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = f_{mz} - \left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

Ecs.II.103

Es interesante expresar la ecuación de Euler en un sistema de coordenadas que se mueve a lo largo de las líneas de corriente, de modo que una de sus direcciones coincide siempre con la velocidad instantánea de un elemento de fluido. Este sistema de coordenadas se llama también coordenadas naturales. Mediante la utilización de este sistema de coordenadas se evita tener que expresar el vector velocidad mediante complejas expresiones matemáticas, las que para muchos casos reales sería imposible de determinar de manera explícita utilizando sistemas de coordenadas tan rígidos como los tradicionales rectangulares, cilíndricos o esféricos, los que se adaptan bastante bien en el caso de escurrimientos de geometría simple.

Por simplicidad se considera un flujo bidimensional en un plano vertical como el que se indica en la Figura II.36. Las ecuaciones del movimiento se deducen en términos de una coordenada  $s$ , a lo largo de una línea de corriente, por lo tanto es función solo de  $s$  y del tiempo,  $V = V(s, t)$ . Supóngase un elemento de fluido de volumen  $(\Delta s \cdot \Delta n \cdot \Delta x)$ , con masa específica  $\rho$  y presión  $P$ . Entonces si se desprecian las fuerzas tangenciales debidas a la viscosidad, la ecuación del movimiento en la dirección de las coordenadas  $s$  es:

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial s} \frac{\Delta s}{2}\right) \Delta n \Delta x - \left(P + \frac{\partial P}{\partial s} \frac{\Delta s}{2}\right) \Delta n \Delta x - \rho g \Delta n \Delta x \Delta s \sin \beta = \rho \Delta n \Delta x \Delta s a_s$$

Ec.II.104

Donde:

- , $\beta$  = Ángulo entre el vector  $s$  y una línea horizontal
- , $a_s$  = aceleración de la partícula a lo largo de la línea de corriente
- , $\Delta x$  = espesor del elemento en la dirección normal al plano del movimiento

Simplificando y sumando la ecuación anterior se obtiene:

$$-\frac{\partial P}{\partial s} - \rho g \sin \beta = \rho a_s$$

Ec.II.105

Como  $\sin \beta = \frac{\partial z}{\partial s}$  siendo  $z$  una coordenada vertical, se puede escribir:

$$-\frac{\partial P}{\partial s} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} = \rho a_s$$

Ec.II.106

La aceleración a lo largo de la línea de corriente se puede expresar en términos de la velocidad como:

$$a_s = \left(\frac{dv_s}{dt}\right); \quad a_s = \left(\frac{\partial v_s}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial v_s}{\partial s}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$a_s = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) v$$

Ec.II.107

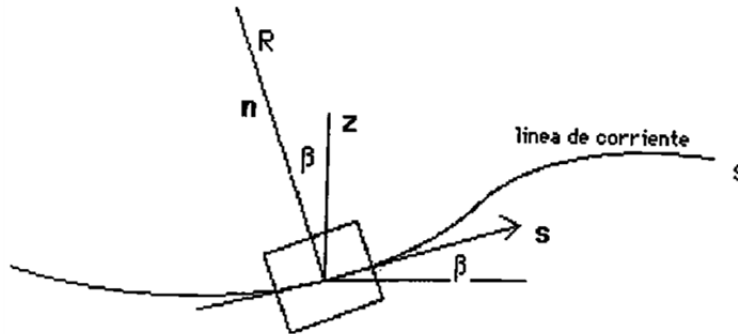


Figura II.36.- Coordenadas naturales para un flujo bidimensional (Fernández, 1999).

Como  $\mathbf{v} = v_s$ , en cada instante, puesto que es siempre tangente a la línea de corriente, el subíndice  $s$  de la velocidad es redundante. La ecuación de Euler a lo largo de la línea de corriente en un campo gravitacional resulta ser:

$$\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}\right) - \left(g \frac{\partial z}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) v$$

Ec.II.108

Lo que puede ponerse como:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}\right) + \left(g \frac{\partial z}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) v = -\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

Ec.II.109

Para régimen impermanente de un fluido ideal.

Es interesante observar que en régimen permanente esta ecuación se reduce a:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}\right) + \left(g \frac{\partial z}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) v = 0$$

Ec.II.110

Y si además el fluido es incompresible:

$$\frac{\partial \left(\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2}\right)}{\partial s} = 0$$

Ec.II.111

Y si el fluido se mueve en un plano horizontal, de manera que las líneas de corriente queden contenidas en ese plano y por lo tanto en ellas se cumpla que  $\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = 0$ , la ecuación de Euler indica que:

$$v \left( \frac{\partial v}{\partial s} \right) = - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} \right)$$

Ec.II.112

Es decir, bajo esas condiciones (régimen permanente, fluido ideal incompresible. A lo largo de una línea de corriente en un plano horizontal) un aumento de la velocidad acarrea una disminución de la presión y viceversa. Si la velocidad permanece constante la presión también. Debido a la diferencia de signos de ambos miembros de la ecuación si la velocidad aumenta a lo largo de la línea de corriente entonces la presión disminuye en esa dirección y viceversa.

Aplicando la segunda ley de Newton en el sentido del eje  $n$  se obtiene, despreciando las fuerzas viscosas:

$$\left( P - \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\Delta n}{2} \right) \Delta s \Delta x - \left( P + \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\Delta n}{2} \right) \Delta s \Delta x - \rho g \Delta n \Delta x \Delta s \cos \beta = \rho \Delta n \Delta x \Delta s a_n$$

Ec.II.113

Donde:

, $\beta$  = Ángulo entre la vertical y la dirección del vector  $n$ . Simplificando:

$$- \frac{\partial P}{\partial n} - \rho g \cos \beta = \rho a_n$$

Ec.II.114

Como  $\sin \beta = \frac{\partial z}{\partial n}$ , se puede escribir:

$$- \frac{\partial P}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial n} = \rho a_n$$

Ec.II.115

La aceleración normal  $a_n$ , se puede expresar en términos de velocidad como:

$$a_n = - \left( \frac{\partial v_t}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial v^2}{\partial s} \right)$$

Ec.II.116

Donde el segundo término representa la aceleración centrífuga, siendo  $R$  el radio de curvatura instantáneo de las líneas de corriente. Entonces:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} \right) + \left( g \frac{\partial z}{\partial n} \right) + \left( \frac{v^2}{R} \right) = \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)$$

Ec.II.117

En el caso de régimen permanente se reduce a:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}\right) + \left(g \frac{\partial z}{\partial n}\right) = - \left(\frac{v^2}{R}\right)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{P}{\rho} + gz\right)}{\partial n} = - \left(\frac{v^2}{R}\right)$$

Ec.II.118

Lo que indica que la cota piezométrica en cualquier dirección transversal normal, a la línea de corriente, cambia sólo si existe curvatura. En flujo rectilíneo la cota piezométrica en esa dirección es constante. Esto normalmente se expresa diciendo que en estos casos se cumple la ley hidrostática en la transversal al flujo. Más aún, es interesante observar lo que ocurre si el fluido se mueve en el plano horizontal de modo que las líneas de corriente quedan contenidas en él y por lo tanto  $\left(\frac{\partial z}{\partial n}\right) = 0$ . En estas condiciones la ecuación de Euler queda:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right) = - \left(\frac{v^2}{R}\right)$$

Ec.II.119

Lo que expresa que la presión aumenta hacia afuera de la curvatura de la línea de corriente siempre que el radio de curvatura sea finito. En el caso de flujo rectilíneo, en líneas de corriente rectas, la cota piezométrica no cambia en el sentido transversal a la corriente.

En general, con el objeto de conocer las características del movimiento de un fluido, será necesario determinar el valor del campo de velocidades para cada punto del espacio, el tiempo, las aceleraciones respectivas, la presión y la masa específica, esto es:  $(u, v, w, P, \rho)$  en función de  $(x, y, z, t)$ . La ecuación de continuidad proporciona una relación para el conjunto  $(u, v, w, \rho)$ . La ecuación de Euler corresponde a tres relaciones escalares entre las velocidades, la presión, y la masa específica del fluido. Para resolver el sistema se requiere de una ecuación adicional que explique las variaciones de la masa específica con la presión y con el tiempo. En el caso simple de fluidos incompresibles  $(\rho = \rho_0)$ , el sistema podrá resolverse con las ecuaciones de Euler y de continuidad. En casos más complejos en los cuales la masa específica varía con la presión o con la temperatura, será necesario recurrir a relaciones termodinámicas adicionales. Entre estas últimas lo más usado es recurrir a la ley de los gases ideales y a una ecuación que defina el proceso.

La aplicación de las ecuaciones de Euler en régimen permanente se simplifica si se integran a lo largo de una línea de corriente. Con el objeto de establecer claramente las condiciones bajo las cuales esta ecuación es aplicable, se procederá a su deducción siguiendo dos caminos paralelos: el uso de coordenadas naturales y cartesianas.

- a. En coordenadas naturales se obtuvo para flujo permanente de un fluido ideal la siguiente expresión a lo largo de una línea de corriente.

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s}\right) + \left(g \frac{\partial z}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) v = 0$$

Ec.II.120

Si el elemento de fluido que se está considerando se mueve una distancia  $ds$  a lo largo de la línea de corriente, se tiene:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right) ds = \text{Cambio de presión a lo largo de } s = dP$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) ds = \text{Cambio de altura a lo largo de } s = dz$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) ds = \text{Cambio de velocidad a lo largo de } s = dv$$

Entonces proyectando cada uno de los términos de las ecuaciones de Euler a lo largo de una línea de corriente sobre la dirección  $ds$  se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} dP + g dz + v dv = 0$$

Ec.II.121

La que se puede integrar a lo largo de la línea de corriente:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \int g dz + \int v dv = cte.$$

Ec.II.122

La integral del primer término sólo puede realizarse si se conoce la forma en que varía  $\rho$  con la presión. En el caso simple de fluido incompresible, esta integral es inmediata y se obtiene:

$$\left(\frac{P}{\rho}\right) + gz + \left(\frac{v^2}{2}\right) = cte.$$

Ec.II.123

La que se acostumbra escribir dividiendo por  $g$  como:

$$H = \left(\frac{P}{\gamma}\right) + z + \left(\frac{v^2}{2g}\right)$$

Ec.II.124

Y se conoce como ecuación de Bernoulli.  $H$  corresponde a la energía específica por unidad de peso y se conoce con el nombre de carga hidráulica o Bernoulli. Es importante destacar las condiciones bajo las cuales esta ecuación es aplicable y que han sido usadas en su deducción:

- ❖ Fluido ideal, sin fricción
- ❖ Régimen permanente
- ❖ A lo largo de una línea de corriente
- ❖ Fluido incompresible

Esta ecuación relaciona los cambios de altura, velocidad y presión de un fluido ideal que se mueve a lo largo de una línea de corriente. En general los cambios de velocidad son impuestos por condiciones de continuidad y los cambios de altura estarán dados por la geometría del movimiento,



por lo tanto la ecuación de Bernoulli, aplicada cumpliendo las restricciones ya mencionadas, permitirá conocer los cambios de presión a que se ve sometido el fluido a medida que se desplaza a lo largo de una línea de corriente.

- b.** Con el objeto de aclarar aún más las condiciones bajo las cuales la ecuación de Bernoulli se puede aplicar, ella se puede deducir también si se utiliza la ecuación de Euler en forma vectorial para coordenadas cartesianas (fig. 5.12).

$$f_m - \left( \frac{\text{grad } P}{\rho} \right) = \left( \frac{dv}{dt} \right)$$

Ec.II.125

Par aun campo de fuerzas gravitacionales  $f_m = -g k$ , pero  $k = \text{grad } z$ , por lo tanto:

$$- \text{grad } z - \text{grad} \left( \frac{P}{\rho} \right) = \left( \frac{dv}{dt} \right)$$

Ec.II.126

Y la aceleración puede expresarse en términos de la aceleración local y la convectiva como:

$$\left( \frac{dv}{dt} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (v \cdot \nabla) v$$

Ec.II.127

Donde:  $\nabla$  es el operador vectorial definido anteriormente.

Para un campo gravitacional la ecuación de Euler se puede expresar como:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (v \cdot \nabla) v = - \text{grad } z - \text{grad} \left( \frac{P}{\rho} \right)$$

Ec.II.128

El término de la izquierda se puede desarrollar de acuerdo a la identidad:

$$(v \cdot \nabla) v = \left( \frac{1}{2} \right) \text{grad} (v \cdot v) - v \times (\text{rotor } v)$$

Ec.II.129

Pero rotor de  $v = 2w$  corresponde a la vorticidad del flujo. Reagrupando los términos en que interviene el gradiente:

$$\text{grad} \left( gz + \left( \frac{P}{\rho} \right) + \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) = -2v \times w - \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Ec.II.130

Utilizando la idea de carga hidráulica se puede poner:

$$\text{grad} (gH) = -2v \times w - \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Ec.II.131

Esta ecuación indica que para un fluido ideal, los cambios que experimenta la carga hidráulica en el espacio se puede atribuir a aceleración local del flujo, es decir su impermanencia, o a la existencia de vorticidad. Cuando mayores son la aceleración local o la vorticidad, más disminuye la carga hidráulica.

En régimen permanente esta ecuación puede integrarse siguiendo dos caminos alternativos, dependiendo de si el flujo es rotacional o no.

- i. Si el escurrimiento es irrotacional ( $w = 0$ ) y permanente, entonces claramente:

$$\text{grad} \left( gz + \left( \frac{P}{\rho} \right) + \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) = 0$$

Ec.II.132

Lo que significa que la variación en el espacio ocupado por el fluido en movimiento de la cantidad entre paréntesis, es nula. Entonces para un fluido ideal en régimen permanente, si el escurrimiento es irrotacional, la carga hidráulica permanece constante entre dos puntos cualesquiera del espacio, no necesariamente sobre la misma línea de corriente. Es decir, la ecuación de Bernoulli se puede aplicar entre dos puntos cualesquiera del escurrimiento sólo si es irrotacional. La ecuación II.132, que indica que el gradiente de la carga hidráulica es nulo en cualquier punto ocupado por el flujo permanente de un fluido ideal incompresible, es una relación vectorial, por lo tanto da origen a tres relaciones escalares independientes, cada una de las cuales indica que la carga hidráulica permanece constante en una dirección independiente. En coordenadas cartesianas:

$$\text{grad} (H) = \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) i + \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) j + \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) k = 0$$

Ec.II.133

Corresponde a:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0$$

Ec.II.134

- ii. Si el flujo es rotacional ( $w \neq 0$ ) y permanente:

$$\text{grad} \left( gz + \left( \frac{P}{\rho} \right) + \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) = -v \times w$$

Ec.II.135

Esta es una ecuación vectorial, que es posible proyectarla en cualquier dirección. En particular, proyectándola en el sentido de una línea de corriente, multiplicándola por un elemento de ella  $ds$ , se tiene:

$$\text{grad} \left( gz + \left( \frac{P}{\rho} \right) + \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) ds = -(v \times w) ds$$

Ec.II.136

El término de la derecha es nulo ya que por definición de línea de corriente  $\mathbf{v}$  y  $d\mathbf{s}$  son colineales y como  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ , también lo es a  $d\mathbf{s}$ . Por lo tanto  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  tiene una proyección nula sobre la línea de corriente. Entonces, aunque el flujo sea rotacional, a lo largo de una línea de corriente se cumple:

$$\text{grad} \left( gz + \left( \frac{P}{\rho} \right) + \left( \frac{v^2}{2} \right) \right) ds = 0$$

Ec.II.137

Lo que significa:

$$g dz + \left( \frac{1}{\rho} \right) dP + d \left( \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

Ec.II.138

Donde:

$dz$ ,  $dP$  y  $dv^2$  = Variaciones de altura, presión y cuadrado de la velocidad a lo largo de  $d\mathbf{s}$ .

Integrando esta ecuación entre dos puntos de la misma línea de corriente, si el fluido es incompresible se obtiene:

$$gz + \left( \frac{P}{\rho} \right) + \left( \frac{v^2}{2} \right) = \text{cte.}$$

Ec.II.139

Válida para un fluido ideal incompresible en régimen permanente a lo largo de una línea de corriente, pero sin que sea necesario averiguar sobre el comportamiento de la vorticidad.

La ecuación de Bernoulli (Ec.II.139) es aplicable para el caso de un fluido ideal incompresible en régimen permanente. Además, ella se puede aplicar entre dos puntos cualesquiera del espacio ocupado por el fluido sólo si el escurrimiento es irrotacional. Si el flujo es irrotacional sólo se puede aplicar la igualdad de Bernoulli a lo largo de una misma línea de corriente. Los casos más típicos son aquellos en los cuales el flujo es además unidireccional, en estas condiciones, las únicas incógnitas son el valor de la velocidad y de la presión, por lo tanto el sistema puede resolverse con sólo dos ecuaciones: continuidad y Bernoulli.

La aplicación de las ecuaciones de continuidad y Bernoulli permite encontrar las velocidades y las presiones, pero requiere conocer la forma de las líneas de corriente, ello se puede hacer en escurrimiento sencillo, como es el caso de flujo unidimensional. Si el movimiento del flujo es más complicado, como ocurre con flujos bidimensionales o tridimensionales por ejemplo, no es fácil saber la forma que pueden adoptar la línea de corriente. Para describir el movimiento de un fluido es necesario conocer la velocidad en cualquier punto del espacio ocupado por él. Esto es equivalente a determinar la geometría y trayectoria de las líneas de corriente. En una situación real, la solución del problema podía consistir en realizar medidas directas de la velocidad en todos los puntos de interés mediante instrumentos adecuados. Sin embargo, desde el punto de vista del diseño, es conveniente poder predecir, basados en consideraciones teóricas, el movimiento del fluido, para ello será necesario un método que permita bajo ciertas condiciones, encontrar la

velocidad como una función de las coordenadas y del tiempo dadas las condiciones de frontera donde se realiza el escurrimiento y las características del fluido.

Este problema tiene solución matemática sólo bajo algunas condiciones concretas, en ciertos tipos de escurrimientos. Si estas condiciones se cumplen, será posible encontrar soluciones analíticas simples para flujos complejos. En otros casos se deberá recurrir a la experimentación del laboratorio sobre modelos, el desarrollo de técnicas más sofisticadas de análisis numéricos. Uno de los casos en los cuales es posible determinar matemáticamente las características del escurrimiento es en el denominado flujo potencial. Este se caracteriza por considerar un fluido ideal incompresible en escurrimiento permanente irrotacional.

### II.2.2.3 Potencial de velocidades.

Se conoce como flujo irrotacional a aquel en el cual las partículas del fluido no están sometidas a rotación, de manera que la distribución de velocidades se genera con vorticidad nula. Esto es, se cumple que  $rot V = \nabla \times V = 0$ , lo que equivale a que las componentes del vector de velocidad estén relacionadas entre ellas de acuerdo a las relaciones siguientes:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Ec.II.140

Matemáticamente estas ecuaciones proporcionan la condición necesaria y suficiente para que  $u dx + v dy + w dz$  sea una diferencial exacta, o sea que, exista una función escalar  $\phi$  tal que:

$$d\phi = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dy - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) dz$$

Ec.II.141

El signo menos es arbitrario y corresponde a una convención, de modo que la velocidad está orientada en la dirección en que disminuye  $\phi$ . Entonces los componentes de la velocidad se obtienen de  $\phi$  mediante:

$$u = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right); \quad v = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right); \quad w = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

Ec.II.142

Lo que es equivalente a:

$$V = -grad \phi = -\nabla \phi$$

Ec.II.143

Se puede verificar bajo estas condiciones la vorticidad es nula, ya que se satisface para todas las direcciones que:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Ecs.II.144

Lo anterior prueba la existencia de una función escalar tal que su derivada negativa respecto a una dirección cualquiera, es la componente de la velocidad en esa dirección. La función escalar  $\phi$  se conoce como potencial de velocidad.

Por esos motivos, el escurrimiento irrotacional se le llama también escurrimiento potencial. Adicionalmente, en las superficies equipotenciales ( $F = \text{cte.}$ ) la velocidad es normal a dichas superficies, dado que a lo largo de ellas el gradiente de velocidades tiene una proyección nula.

Para un fluido incompresible en régimen permanente, la ecuación de continuidad II.93, establece que en cada punto el campo vectorial de velocidades debe satisfacer la condición:

$$\text{div } V = \nabla \cdot V = 0$$

Ec.II.145

Si el flujo es irrotacional, es decir sin vorticidad, la velocidad puede expresarse en términos de su potencial, de manera que la ecuación de continuidad para un flujo irrotacional será:

$$\text{div } (\text{grad } \phi) = \nabla (\nabla \phi) = 0$$

Ec.II.146

O lo que es igual:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Ec.II.147

Que se conoce como ecuación de Laplace y es de amplia aplicación en varias ramas de la física. En términos de sus componentes se expresa como:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

Ec.II.148

Cualquier función  $\phi$  que satisfaga la ecuación de Laplace es un posible potencial de velocidad para un flujo irrotacional permanente de un fluido incompresible, puesto que satisface simultáneamente la ecuación de continuidad y condición de vorticidad nula. Dado que existen infinitas soluciones de la ecuación de Laplace, cada una de las cuales sirve para ciertos contornos del flujo, el problema principal consiste en la selección de la función conveniente para el caso particular del flujo estudiado.

Una de las principales características de la ecuación de Laplace es su linealidad esto es si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son dos soluciones cualesquiera de la ecuación de Laplace, y  $C_1$ ,  $C_2$  son dos constantes arbitrarias,

entonces  $\phi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2$  también satisface la ecuación de Laplace. Esta propiedad tiene interesantes consecuencias prácticas ya que significa que los flujos son sumables, es decir, se pueden superponer físicamente cada uno con su potencial de velocidades y la función potencial del flujo resultante es también la suma de las funciones respectivas.

La resolución de la ecuación de Laplace permite encontrar  $\phi$  y por lo tanto, a partir de  $\phi$  la distribución de velocidades. El problema planteado en términos expuestos permite reemplazar una situación en la cual se trata de encontrar un vector, la velocidad, dado que se sabe que su rotor y divergencia son nulas, por otro problema equivalente consiste en encontrar una función escalar, el potencial de velocidades, sabiendo que su laplaciano es cero. Este segundo problema es más sencillo de resolver. Numerosos matemáticos han estudiado la ecuación de Laplace y existen diversos métodos para encontrar soluciones en condiciones particulares.

Una partícula de fluido moviéndose sin rotación en un campo de velocidades no puede comenzar a rotar sólo bajo la acción de las fuerzas másicas y las fuerzas debidas a la presión sobre la superficie. El comienzo de la rotación, en una partícula que venía sin rotar, requiere la acción del esfuerzo de corte sobre la superficie que definen al elemento. Debido a que las fuerzas de corte son proporcionales a la velocidad de deformación angular, entonces una partícula que esta inicialmente sin rotar, no va a comenzar a rotar sin que simultáneamente no sufra una deformación angular. La pregunta entonces es ¿se deduce de esto que si hay esfuerzos de corte presentes necesariamente el escurrimiento debe ser rotacional? Se puede obtener una respuesta cualitativa si se considera la rotación de un elemento de fluido en cada uno de los planos. Se sabe de la definición de vorticidad que la rotación en el plano  $XY$  está relacionada con el comportamiento de la vorticidad por:

$$\omega_s = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Ec.II.149

Siendo  $\omega_s$  la velocidad de rotación angular del elemento de fluido sobre el plano  $XY$ . La variación de velocidad en sentido transversal a sus respectivas direcciones, que son los elementos de la derecha de la ecuación, están ligadas a los esfuerzos de corte y la viscosidad del fluido a través de la ecuación de viscosidad de Newton, de modo que:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\tau_x}{\mu}\right); \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\frac{\tau_y}{\mu}\right)$$

Ec.II.150

Es decir:

$$\omega_z = \left(\frac{\tau_x - \tau_y}{\mu}\right)$$

Ec.II.151

En un fluido viscoso es bastante difícil que los gradientes de velocidades sean tales que se cumpla que  $\tau_x = \tau_y$ , lo que hace en la práctica que la teoría de flujo potencial sea aplicable sólo a escurrimientos en los cuales los efectos de la viscosidad son despreciables, como son los llamados fluidos ideales.

En el caso de un escurrimiento bidimensional permanente de un fluido incompresible, la ecuación de continuidad es:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Ec.II.152

Se define entonces la función escalar  $\Psi = \Psi(x, y)$ , llamada función de corriente, a una que cumple la ecuación de continuidad, para la cual basta definirla como:

$$u = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right); \quad v = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

Ec.II.153

En efecto, si se reemplaza en la ecuación de continuidad, se ve que la satisface automáticamente, ya que:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

Ec.II.154

Por otra parte, las líneas de corriente están determinadas por  $dr \times V = 0$ , lo que en escurrimiento bidimensional se traduce en:

$$\left(\frac{v}{dy}\right) = \left(\frac{u}{dx}\right); \quad -vdx + udy = 0$$

Ec.II.155

Reemplazando las velocidades en términos de la función de corriente, se obtiene:

$$d\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) dy = 0$$

Ec.II.156

Luego para una línea de corriente  $d\Psi = 0$  ó  $\Psi = cte$ . Además se aprecia que la función escalar  $\Psi$ , función de corriente, satisface la ecuación de Laplace en un campo irrotacional. En efecto, la condición de irrotacionalidad en escurrimiento bidimensional es:

$$\omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Ec.II.157

Reemplazando las velocidades en términos de la función de corriente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = 0$$

Ecs.II.158

O finalmente en forma resumida:

$$\nabla^2 \Psi = 0$$

Ec.II.159

El significado físico de estas ecuaciones puede entenderse de la siguiente forma. Si  $\phi$  es la función potencial, entonces:

$$u = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right); \quad v = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

Ec.II.160

Además de la definición de funciones de corriente se obtiene:

$$u = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right); \quad v = - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

Ec.II.161

Si se forma el gradiente de  $\phi$ :

$$\text{grad } \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) i + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) j = -ui - vj$$

Ec.II.162

Y también el gradiente de  $\Psi$ :

$$\text{grad } \Psi = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) i + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) j = uj - vi$$

Ec.II.163

Se observa que el gradiente de  $\phi$  es perpendicular al gradiente de  $\Psi$  ya que:

$$(\text{grad } \phi) \cdot (\text{grad } \Psi) = 0$$

Ec.II.164

Además:

$$I \text{ grad } \phi I = I \text{ grad } \Psi I = (u^2 + v^2)^{0.5}$$

Ec.II.165

Como se muestra en la Figura II.37:



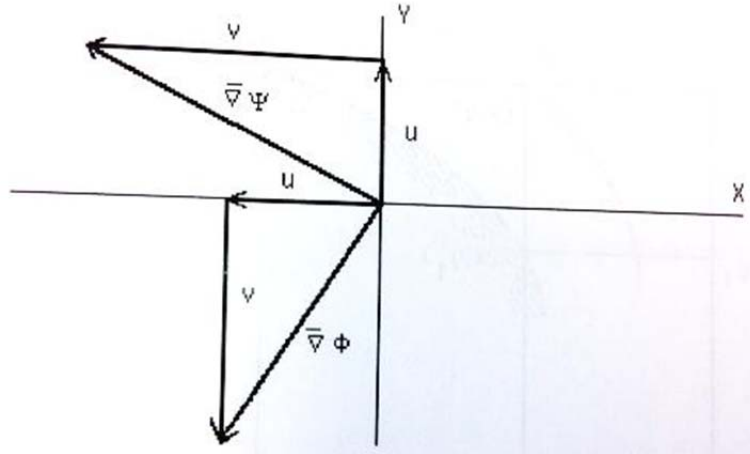


Figura II.37.- Representación de grad  $\phi$  y de grad  $\psi$  (Fernández, 1999).

De estas observaciones se deduce que la familia de curvas  $\phi = cte.$  y  $\Psi = cte.$ , forman un sistema ortogonal y que cuando los intervalos entre valores consecutivos de  $\phi$  y  $\Psi$  son iguales y suficientemente pequeños, ellos forman una red de cuadrados.

El significado físico de las líneas de  $\Psi$  constante coincide con el de las líneas de corriente. Además, el valor numérico de las constantes corresponde al gasto que pasa entre un borde físico y la línea en cuestión. Esto puede entenderse fácilmente con la ayuda de la Figura II.38, en la cual se muestra el flujo a lo largo de una pared donde es de interés conocer la cantidad de fluido que pasa, por unidad de tiempo, entre la pared y el punto  $A$ , de coordenadas  $(x, y)$ , es decir el gasto  $Q$ . La pared es una línea de corriente ya que el fluido no puede atravesarla, por lo tanto las velocidades deben ser tangentes a ella.

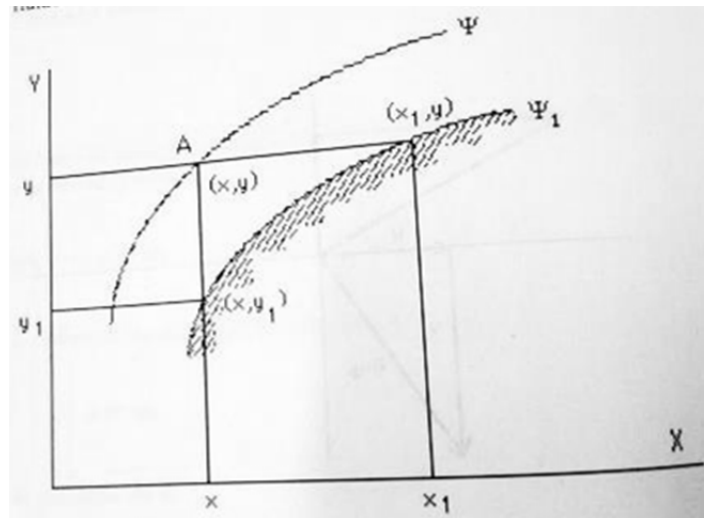


Figura II.38.- Flujo bidimensional a lo largo de un plano paralelo al flujo (Fernández, 1999).

El gasto que fluye a través de un rectángulo formado por una línea paralela al eje X, que pasa por el punto  $A$ , de profundidad  $h$  perpendicular a la figura es:

$$Q = h \int_x^{x_1} v \, dx$$

Ec.II.166

Y como  $v = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$  se obtiene:

$$Q = h \int_x^{x_1} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) dx = h [\Psi(x) - \Psi(x_1)] = h(\Psi - \Psi_1)$$

Ec.II.167

De manera similar, el gasto que atraviesa una línea paralela al eje  $Y$ , que pasa por el punto  $A$  es:

$$Q = h \int_y^{y_1} u \, dy = h \int_y^{y_1} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) dy = h [\Psi(y) - \Psi(y_1)] = h(\Psi - \Psi_1)$$

Ec.II.168

Como el gasto que atraviesa ambos sectores es el mismo, se deduce que:

$$\Psi = \Psi_1 + \left(\frac{Q}{h}\right)$$

Ec.II.169

Tomando el gasto que pasa entre dos líneas de corriente por unidad de profundidad,  $(Q/h)$ , como  $q$  se obtiene en general:

$$\Psi = \Psi_1 + q$$

Ec.II.170

Entonces las curvas  $\Psi = cte.$ , dejan pasar entre ellas y los límites físicos del escurrimiento cantidades constantes de fluido. Si al dibujar una familia de estas líneas se eligen las constantes, de manera que  $\Delta\Psi$  sea a su vez constante, entonces el gasto que ocurre entre dos líneas de corriente cualesquiera es constante (Figura II.39).

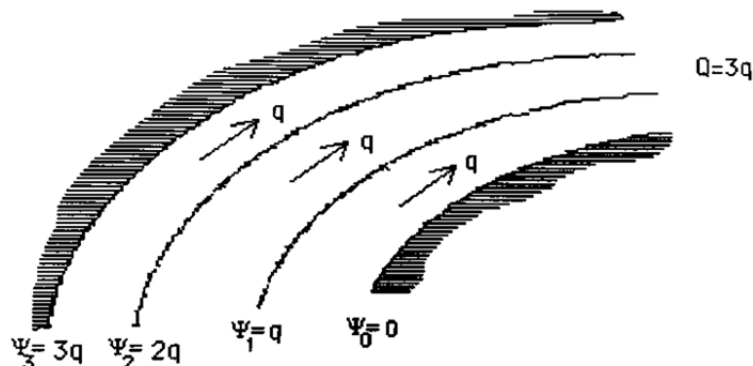


Figura II.39.- Ejemplo de valores de la función  $\psi = \text{Constante}$  (Fernández, 1999).

Las líneas  $\Psi = cte.$  son líneas de corriente, por lo tanto tangentes al vector velocidad, mientras las líneas  $\phi = cte.$  son perpendiculares al vector velocidad. Entonces las familias  $\Psi = cte.$  y  $\phi = cte.$  forman una red de líneas mutuamente ortogonales, que recibe el nombre de red de flujo.

Por lo tanto en un escurrimiento bidimensional, si  $V = ui + vj$  entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

- i.  $u = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)$
- ii.  $v = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$
- iii.  $\nabla^2 \phi = 0$ ;  $\phi = cte.$  coreponde a una línea de potencial
- iv.  $\nabla^2 \Psi = 0$ ;  $\Psi = cte.$  coreponde a una línea de corriente

La determinación del potencial de velocidades, o de las líneas de corriente, a través de la utilización de funciones complejas, solo puede lograrse en forma sencilla cuando las condiciones de borde son relativamente simples.

Se ha sugerido que mediante el método analítico se podrá resolver cualquier condición de borde, ya que siempre se podrían sumar los flujos básicos necesarios hasta lograr que una línea de corriente coincida con los límites físicos del escurrimiento. Esto se podría conseguir por ejemplo, determinando la ubicación e intensidad de fuentes o sumideros hasta lograr estas condiciones. Sin embargo, dado el avance que se ha alcanzado con otros métodos, parece poco conveniente tratar de resolver todos los problemas prácticos en forma analítica con tal procedimiento.

Existe un gran número de situaciones prácticas en las cuales no es fácil resolver la ecuación de Laplace para las condiciones de borde del problema. Para estos casos es posible usar métodos alternativos de solución, basados en procedimientos gráficos, analógicos o numéricos. El más usado por su simplicidad y que permite tener una primera visión de las características del escurrimiento, es el método gráfico. Este procedimiento es particularmente útil, en el caso de escurrimientos bidimensionales. Consiste esencialmente, en dibujar a mano alzada las líneas equipotenciales y de corriente, aprovechando ciertas características específicas que presentan estas funciones por el hecho de satisfacer la ecuación de Laplace.

Se ha demostrado anteriormente que tanto la función potencial  $\phi$ , como la función de corriente  $\Psi$ , satisfacen la ecuación de Laplace y que además, las familias de curvas dadas por los valores constantes de ellas son ortogonales entre sí. Una red de flujo se compone de una familia de líneas equipotenciales, y la familia correspondiente de líneas de corriente, con las constantes variando en progresión aritmética. Es habitual hacer que el incremento de la constante entre líneas equipotenciales adyacentes y líneas de corriente adyacentes sea el mismo, por ejemplo  $\Delta c$ . Si en un punto cualquiera de una red de flujo, la distancia entre líneas de corriente es  $\Delta h$  y la distancia entre líneas equipotenciales es  $\Delta s$ , la velocidad aproximada  $V_s$ , viene dada entonces en función de la distancia de las líneas equipotenciales por:

$$V_s = \left(-\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right) = \left(-\frac{\Delta c}{\Delta s}\right)$$

Ec.II.171

O en función de las líneas de corriente:

$$V_s = \left(-\frac{\Delta\Psi}{\Delta n}\right) = \left(-\frac{\Delta c}{\Delta n}\right)$$

Ec.II.172

Las expresiones anteriores son aproximadas cuando  $\Delta c$  es finito, pero cuando  $\Delta c$  se hace muy pequeño, se hacen exactas y dan las velocidades en un punto. Como las dos velocidades obtenidas tienen que ser las mismas, las ecuaciones demuestran que  $\Delta s = \Delta n$ , o que la red de corriente consiste de un reticulado ortogonal, que cuando el tamaño de la retícula tiende a cero, está formada por cuadrados perfectos.

Se considera que la red de flujo está correctamente construida cuando se satisface las siguientes condiciones:

1. Las líneas equipotenciales son normales a los bordes
2. Las líneas equipotenciales y las líneas de corriente son ortogonales entre sí y forman una red de cuadrados curvilíneos.
3. Ambas familias de líneas son curvas suaves.

La red de flujo obtenida en forma gráfica, al igual que la analítica, también se puede sumar. Por ejemplo, se puede superponer gráficamente una fuente con un flujo uniforme como se muestra en la Figura II.40.



Figura II.40.- Superposición gráfica de la red de flujo de un escurrimiento uniforme y una fuente (Fernández, 1999).

#### II.2.2.4 Ecuaciones de Navier – Stokes.

El caso de flujo permanente laminar unidireccional, entre placa o en el interior de una tubería circular, muestran cómo influye la viscosidad en el movimiento de un fluido y cómo es posible considerarlas en las ecuaciones del movimiento. Sin embargo, ellas están limitadas a los casos concretos para las cuales fueron deducidas. Para encontrar la ecuación del movimiento en el caso general de un flujo tridimensional de un fluido viscoso, en régimen laminar o turbulento, es necesario considerar las condiciones de equilibrio de un volumen elemental, teniendo en cuenta los esfuerzos normales y tangenciales. Esto da origen a un sistema de tres ecuaciones diferenciales que se conocen como las ecuaciones de Saint Venant.

El siguiente paso consiste en relacionar los esfuerzos superficiales con las características del fluido y la deformación del fluido. Estas relaciones no son inmediatas, pero se puede entender que los esfuerzos de corte están ligados a la viscosidad del fluido y su deformación angular. Incorporando estas consideraciones y suponiendo una relación lineal entre esfuerzo y deformación, Navier y Stokes (1820 – 1845), plantearon para un fluido viscoso incompresible las siguientes ecuaciones generales:

$$\rho a_x = \rho f_{mx} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho a_y = \rho f_{my} - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho a_z = \rho f_{mz} - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Ec.II.173

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones de Navier – Stokes y son válidas para cualquier fluido viscoso incompresible, ya sea en régimen laminar o turbulento. Adicionalmente se dispone de la ecuación de continuidad, con lo cual se tiene 4 ecuaciones con 4 incógnitas ( $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ). La integración de ellas en cada caso particular requiere imponer las condiciones de frontera correspondientes. Cuando el fluido es viscoso, la condición de frontera típica es que en contacto con las paredes la velocidad es nula debido a la adherencia del fluido.

En flujo turbulento la distribución de velocidades es tan complicada que la integración de estas ecuaciones resulta muy difícil, a pesar de que existen algunas soluciones numéricas para muchos casos particulares. Para régimen laminar las velocidades son más estables, sin componentes aleatorias, de manera que resulta posible integrarlas en la mayoría de las situaciones prácticas. Dos casos obvios en las cuales estas ecuaciones resultan integrables corresponden al de un fluido en reposo, que derivan en la llamada ley hidrostática, y en el caso de un fluido ideal, donde se transforman en la ecuación de Euler.

Estas ecuaciones se pueden expresar en forma vectorial resumida como:

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho f_m - \nabla P + \mu \nabla^2 V$$

Ec.II.174

Donde el término de la izquierda corresponde al cambio de cantidad de movimiento producido por el conjunto de fuerzas incluidas en el lado derecho de la ecuación. Estas consideran las fuerzas de gravedad, representadas por el primer término, las de presión en el segundo y las viscosas en el último.

Si el fluido es compresible, las relaciones entre esfuerzos y deformación deben incluir esta propiedad, la que queda representada por un término adicional dando origen a la ecuación general de Navier – Stokes:

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho f_m - \nabla P + \mu \nabla^2 V + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla V)$$

Ec.II.175

Esta ecuación se reduce a la anterior si el fluido es incompresible, ya que según la ecuación de continuidad, en este caso el último término es nulo.

Las ecuaciones completas para fluidos incompresibles en coordenadas cartesianas son las siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f_{mx} - \frac{\partial P}{\rho \partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = f_{my} - \frac{\partial P}{\rho \partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = f_{mz} - \frac{\partial P}{\rho \partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Ecs.II.176

### II.2.3 Ecuaciones básicas de mecánica de fluidos para medios porosos.

Los estados de equilibrio de la materia están caracterizados por la distribución espacial uniforme de cada una de las variables de estado del sistema continuo, de modo que cada elemento de la materia se encuentra en equilibrio termodinámico y mecánico con los elementos contiguos. Si alguna de estas variables de estado estuviera fuera de equilibrio, se podría observar un intercambio de las cantidades mecánicas y térmicas entre elementos, que siempre tenderían a llevar al medio continuo al estado de equilibrio.

Esta tendencia a la uniformidad, postulada como principio rector de la termodinámica (asentada en el Segundo Principio), sólo requiere que las porciones vecinas del continuo puedan interactuar. La naturaleza de esta interacción depende de la estructura molecular. Sin embargo desde la perspectiva de los medios continuos, interesa que esta tendencia existe y que se puede modelar en forma independiente de la estructura microscópica.

Estudiando el comportamiento dinámico de los fluidos, nos interesamos en los fenómenos de transferencia, en la capacidad de los fluidos en movimiento por medio del cual los materiales y propiedades se difunden y se transmiten a través de un medio fluido. Los métodos de análisis deberán elegirse en tal forma que podamos aplicar las leyes físicas pertinentes al problema que se desea resolver. Los procesos fundamentales de transferencia que están asociados con el movimiento de un fluido, son las transferencias de masa, calor y de cantidad de movimiento.

### II.2.3.1 Ecuación de continuidad.

La ley de conservación de la materia es de naturaleza puramente cinemática, lo que quiere decir que es independiente de la naturaleza del fluido o de las fuerzas que actúan sobre él. Expresa el resultado empírico de que, en un fluido, la masa no puede desaparecer del sistema ni ser creada. De momento no consideraremos fluidos multifase suponiendo que no existen fuentes o sumidero debido a reacciones químicas. La ecuación correspondiente se deduce aplicando un balance de materia a un elemento unitario de volumen a través del cual está circulando el fluido; entonces, la velocidad de acumulación de materia debe ser igual a la diferencia entre la velocidad de entrada de materia y la velocidad de salida de materia.

El movimiento de los fluidos debe satisfacer el principio de conservación de la materia. Si analizamos el movimiento de un fluido, es evidente que tendremos que tratar con transferencia de masa. En los fluidos homogéneos, la ley de la conservación de la materia nos lleva a una expresión, conocida como la ecuación de continuidad, la cual relaciona al tiempo y las variaciones espaciales de la densidad y la velocidad. Si el fluido homogéneo es considerado también como incompresible, la ecuación de continuidad se reduce a una expresión en las derivadas de la velocidad, con respecto a las variables de posición.

Para un fluido no homogéneo, el principio de conservación de la materia deberá ser satisfecho por cada componente o especie de la mezcla de fluidos. En este caso, además de la transferencia de masa debida a la velocidad local del flujo de la mezcla, hay un proceso independiente de transferencia de masa, debido a la tendencia de una componente de la mezcla a moverse en la dirección en que decrece la concentración de esa componente. De aquí que las especies individuales se muevan con una velocidad relativa a la velocidad local de la mezcla. Esto se puede visualizar fácilmente si consideramos un vaso de precipitado con la mitad inferior llena con una solución de cloruro de sodio y la de arriba con agua fresca. En este caso, la velocidad local del sistema es cero; sin embargo, después de un cierto tiempo, el cloruro de sodio se podrá detectar en la mitad superior, arriba de la frontera original entre las dos fases. Este proceso es conocido como difusión molecular.

En la mayoría de los casos nuestro interés se centrará en el fluido contenido dentro de un volumen elemental representativo (VER), de la que el fluido pueda entrar o salir. A tal región se le denomina volumen de control (Figura II.41). En particular, consideraremos un volumen de control fijo en el espacio, en el que el fluido entra a través de una superficie  $A_1$  y sale a través de una superficie  $A_2$  (Figura II.42). Por conveniencia, las superficies de entrada y salida se tomarán siempre normales a la velocidad del fluido. Cuando las ecuaciones de conservación se formulan para la masa y la energía contenidas dentro del volumen de control y no para un sistema físico, la masa y la energía que entran y salen del volumen de control debido al flujo del fluido deben incluirse en el balance total.

La ley de conservación de la masa, aplicada sobre el volumen de control y considerando un volumen euleriano fijo en el espacio, mostrado en la figura establece que:

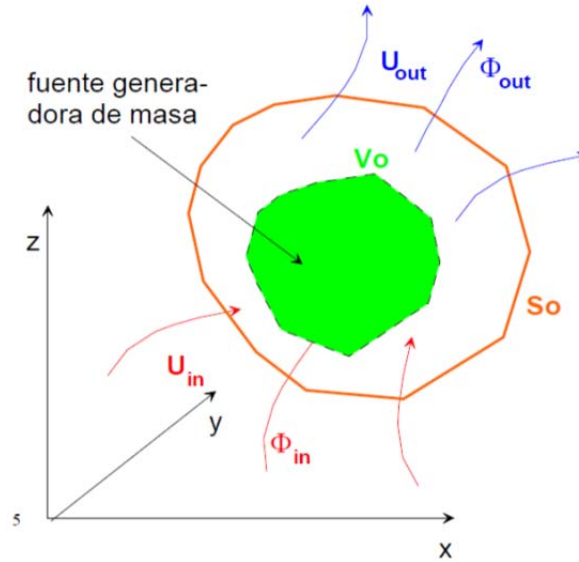


Figura II.41.- Flujo dentro de un volumen elemental representativo (VER) (Vázquez J., 2003).

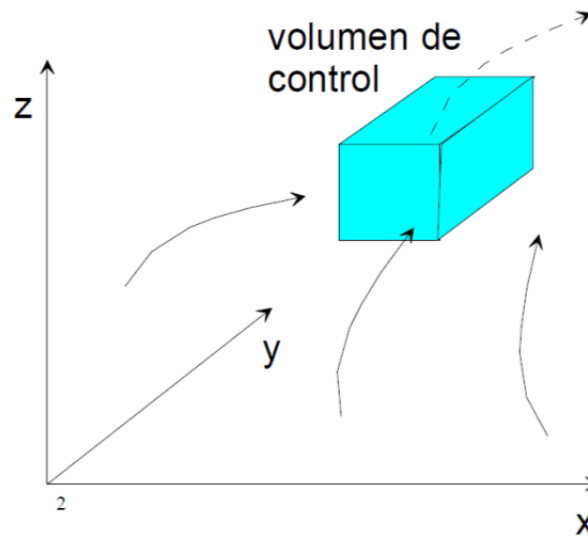


Figura II.42.- Volumen elemental representativo (VER), fijo en el espacio (Vázquez J., 2003).

El elemento diferencial de área es  $d\vec{S} = \vec{n} ds$  (Figura II.43).

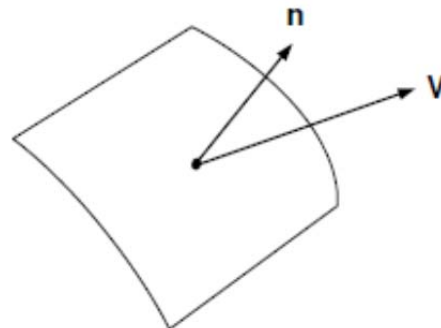


Figura II.43.- Elemento diferencial de área (Vélez M., 1999).



La componente de  $\vec{v}$  que acarrea material a través de la superficie es:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \quad \text{Ec.II.177}$$

El flujo de masa a través de un elemento infinitesimal de superficie  $dS$  (hacia fuera) es:

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{Ec.II.178}$$

El flujo total de masa a través de toda la superficie  $S$  es:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{Ec.II.179}$$

Consideremos:

Para el elemento de volumen, con densidad  $\rho$ , la masa total en  $V$  es:

$$\int_V \rho dV \quad \text{Ec.II.180}$$

La razón de cambio de masa en  $V$  es:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \text{Ec.II.181}$$

La razón de cambio de masa dentro del volumen  $V$  tiene que deberse al flujo neto de masa a través de  $S$  (suponiendo que no hay fuentes ni sumideros dentro de  $V$ ), por lo tanto:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{Ec.II.182}$$

Esta es la ecuación de conservación de la masa en forma integral. Para convertirse a la forma diferencial utilizaremos el teorema de la divergencia:

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad \text{Ec.II.183}$$

El teorema de la divergencia permite transformar a una integral de superficie en una integral de volumen.

Por lo tanto podemos escribir la ecuación de la conservación de masa en forma de integral de la siguiente forma:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0$$

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

Ecs.II.184

Para que esta integral sea cero para cualquier volumen  $V$ , la única posibilidad es que el integrando sea cero:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

Ec.II.185

Podemos simplificar la ecuación si consideramos que:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

Ec.II.186

Entonces tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

Ec.II.187

Y recordando la definición del operador derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Ec.II.188

Que es la ecuación de conservación de masa en forma diferencial.

Esta ecuación escrita en forma explícita, en coordenadas rectangulares, para  $\vec{v} = (u, v, w)$ , es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0$$

Ec.II.189

Si se estudia un fluido incompresible, la densidad del fluido es constante ( $\rho = \text{cte.}$ ) entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Y:

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \hat{k} = 0$$

Ecs.II.190

La ecuación de conservación de la masa se reduce a  $\rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$ , y por lo tanto:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Ec.II.191

Que es la ecuación de conservación de masa para fluidos incompresibles. En forma explícita esta ecuación es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ec.II.192

Método alternativo para obtener en forma diferencial la ecuación de conservación de la materia.

Consideremos un paralelepípedo de volumen infinitesimal  $dx \, dy \, dz$ , fijo con un flujo  $\vec{v}$  (Figura II.44):

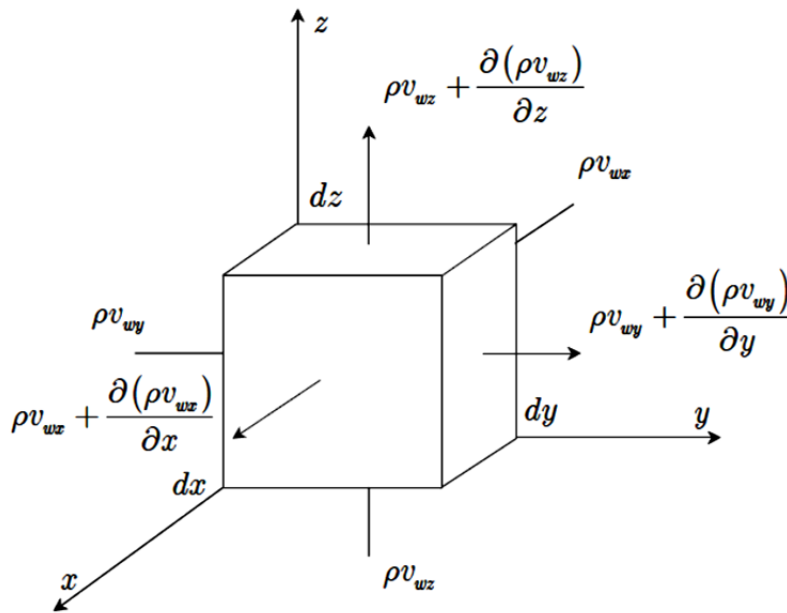


Figura II.44.- Elemento de volumen representativo para flujo de agua en medios porosos (Vázquez J., 2003).

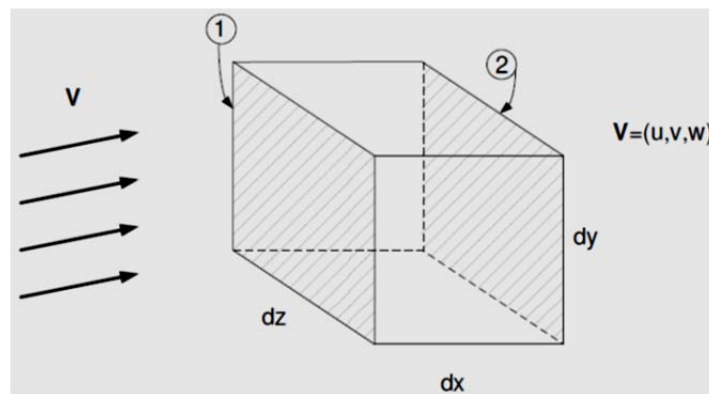


Figura II.45.- Diferencial de un elemento de volumen representativo (Vázquez J., 2003).

El flujo a través de 1 es (Figura II.45):

$$\rho u \, dy \, dz \quad \text{Ec.II.193}$$

El flujo a través de 2 es (Figura II.45):

$$\left( \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right) dy \, dz \quad \text{Ec.II.194}$$

El flujo neto a través de 1 y 2 es (Figura II.45):

$$+ (\rho u) \, dy \, dz - \left( \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right) dy \, dz = - \left( \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \right) dx \, dy \, dz \quad \text{Ec.II.195}$$

De manera análoga, el flujo entre 3 y 4 es:

$$+ (\rho v) \, dx \, dz - \left( \rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \right) dx \, dz = - \left( \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \right) dy \, dx \, dz \quad \text{Ec.II.196}$$

Y el flujo entre 5 y 6 es:

$$+ (\rho w) \, dx \, dy - \left( \rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \right) dx \, dy = - \left( \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right) dz \, dx \, dy \quad \text{Ec.II.197}$$

Por lo tanto el flujo neto a través del volumen  $dx \, dy \, dz$  es:

$$\sum (\rho A \vec{v}_i)_{saliente} - \sum (\rho A \vec{v}_i)_{entrante} = - \left( \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \quad \text{Ec.II.198}$$

Ahora consideremos:

La masa total dentro de  $dx \, dy \, dz$ :

$$\rho \, dx \, dy \, dz \quad \text{Ec.II.199}$$

La tasa de cambio de masa dentro del volumen de control es:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \, dx \, dy \, dz) \quad \text{Ec.II.200}$$

La masa dentro del volumen de control solo puede cambiar como resultado del flujo entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = - \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Ec.II.201

Simplificando tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = 0$$

Ec.II.202

Que se puede escribir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Ec.II.203

Obteniéndose:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

Ec.II.204

Utilizando la definición de derivada material (ecuación II.82) se tiene:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Ec.II.205

A esta ecuación también se le llama ecuación de continuidad, ya que no requiere hipótesis alguna, excepto la densidad y la velocidad que son funciones continuas. Esta ecuación escrita en forma explícita, en coordenadas rectangulares, para  $\vec{v} = (u, v, w)$ , es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0$$

Ec.II.206

En una gran cantidad de fluidos, la densidad puede ser considerada constante durante todo su movimiento (tanto en espacio como en tiempo), no hay compresión o expansión notables del fluido; en tales casos se habla de fluidos incompresibles, lo cual implica que  $\rho$  es constante, por lo que la ecuación II.206 se reduce a:

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Ec.II.207

Operando en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ec.II.208

Esta ecuación es muy importante en la teoría de flujo de agua y se conoce con el nombre de Ecuación de la Continuidad. Es significativo recordar que esta ecuación es solo aplicable cuando se cumplen las siguientes hipótesis:

- ❖ Flujo permanente
- ❖ Suelo saturado
- ❖ El agua y las partículas son incompresibles
- ❖ El flujo no modifica la estructura del suelo

También puede considerarse a esta ecuación (Ec.II.208) como la condición sobre la distribución de velocidad en cualquier sistema de fluido incompresible. Analíticamente sin embargo, no es suficiente para determinar las componentes individuales de la velocidad, y físicamente no se discrimina entre un fluido incompresible y otro, ni se distingue entre sistemas expuestos a fuerzas externas, tales como la gravedad, y aquellos flujos que sólo están bajo la acción de diferencias de presión, o entre fluidos que fluyen a través de medios porosos y fluidos que fluyen por conductos no obstruidos.

Entonces debemos caracterizar el fluido, y establecer explícitamente cómo reacciona al gradiente de presión a las fuerzas externas. Específicamente debemos formular la equivalencia hidrodinámica a la Segunda Ley de Newton, es decir, la ecuación de movimiento. Los detalles de esta formulación dependerán de la naturaleza del fluido y de las condiciones bajo las cuales fluye.

Aplicando el concepto de conservación de la masa a las distintas fases del medio poroso, se puede escribir las ecuaciones de balance de masa para el esqueleto sólido y las fases, del modo que sigue:

$$\frac{D^s \rho^s}{Dt} + \rho^s \nabla \cdot \vec{v}^s = 0 \quad \text{Ec.II.209}$$

$$\frac{D^\alpha \rho^\alpha}{Dt} + \rho^\alpha \nabla \cdot \vec{v}^\alpha = 0 \quad \text{Ec.II.210}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \rho^s &= (1 - n) \rho_s \\ \rho^\alpha &= n S_\alpha \rho_\alpha \end{aligned} \quad \text{Ecs.II.211}$$

Y desarrollando las ecuaciones II.209 y II.210 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{D^s n}{Dt} &= (1 - n) \left[ \frac{1}{\rho_s} \frac{D^s \rho_s}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v}^s \right] \\ \frac{D^\alpha n}{Dt} &= -n \left[ \frac{1}{\rho_\alpha S_\alpha} \frac{D^\alpha \rho_\alpha S_\alpha}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v}^\alpha \right] \end{aligned} \quad \text{Ecs.II.212}$$

En un medio poroso la masa del fluido contenido en las oquedades está expresada en términos de la densidad del fluido y la porosidad del medio. Y entonces la expresamos de la siguiente manera:

$$M(t) = \int_{\beta(t)} n(x, t) \rho(x, t)$$

Ec.II.213

Donde  $n$  es la porosidad. Así en un medio poroso la propiedad extensiva  $M$  tiene como propiedad intensiva al producto de la densidad por la porosidad.

La variación de una cantidad física dentro de un volumen de control  $\Omega$  del medio poroso, se puede expresar de manera general de acuerdo con la siguiente ecuación de balance global (Allen, Herrera, Pinder, 1988):

$$\int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\lambda v) - \nabla \cdot \eta - \kappa = 0$$

Ec.II.214

Donde:

- , $\kappa$  = Es la cantidad que se genera o consume dentro del cuerpo en la unidad de tiempo
- , $\eta$  = Es la cantidad que entra o sale por la frontera del cuerpo en la unidad de tiempo
- , $v$  = Representa la velocidad
- , $\lambda$  = Es una propiedad intensiva

Que un sistema satisfaga la ecuación de balance global es equivalente a que dicho sistema cumpla con la siguiente ecuación diferencial (Allen, Herrera, Pinder, 1988):

$$\left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\lambda v) = \nabla \cdot \eta - \kappa$$

Ec.II.215

Para todo punto  $x$  del volumen ocupado por el sistema, esta es la ecuación de balance local. Para utilizar esta ecuación se debe elegir a  $\lambda$ ,  $\eta$ , y a  $\kappa$  correctamente, donde  $\lambda = \lambda(x, t)$  es la propiedad intensiva.

De la ecuación II.213 tenemos que:  $\lambda = n(x, t) \rho(x, t)$ , si además suponemos  $\eta = 0$  y  $\kappa = 0$ , así sustituyendo en la ecuación II.215 tenemos:

$$\left( \frac{\partial n\rho}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (v n \rho) = 0; \quad \forall x \in \Omega(t)$$

Ec.II.216

La ecuación de conservación de la masa en un medio poroso por lo tanto la podemos obtener con la ecuación de Darcy que es la expresión básica para el balance de momento de un flujo en un medio poroso. Debe combinarse con la ecuación de continuidad o de balance de masa para obtener una descripción completa del flujo. Por el momento derivaremos esa ecuación para obtener una expresión general que será válida para medios saturados y no saturados.

Consideremos un pequeño elemento de volumen  $dV = dx dy dz$  del medio poroso, y apliquemos sobre él la ecuación integral de conservación de la masa en la forma:

$$\left(\frac{\partial \Delta M}{\partial t}\right) = - \oint_{\Delta S} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds$$

Ec.II.217

Donde  $\Delta M = \rho \Delta V_w$  es la masa de agua contenida en  $\Delta V$  (siendo  $\Delta V_w$  el volumen de agua) y  $\Delta S$  es la superficie de control que rodea  $\Delta V$ . La ecuación II.217 expresa que la tasa de variación de la masa contenida en  $\Delta V$  es igual al flujo neto del fluido a través de su contorno  $\Delta S$ . Utilizando el teorema de Green, convertimos el flujo a través de  $\Delta S$  en una integral de volumen en  $\Delta V$  obtenemos:

$$\oint_{\Delta S} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

Ec.II.218

Para  $\Delta V$  suficientemente pequeño, el integrando puede extraerse fuera del signo integral, y la ecuación II.218 se escribe ahora:

$$\left(\frac{\partial \Delta M}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \Delta V = 0$$

Ec.II.219

En general, el agua ocupa sólo una fracción del elemento de volumen, y entonces podemos escribir:

$$\Delta V_w = \theta \Delta V$$

Ec.II.220

Donde  $\theta (<1)$  es el contenido volumétrico de agua en el medio. Además, el agua sólo puede ocupar parte o a lo sumo, todo el volumen vacío del elemento (volumen de poros). Se define la porosidad del medio como la relación entre el volumen de poro y el volumen total en la forma:

$$n = \left(\frac{\Delta V_v}{\Delta V_t}\right)$$

Ec.II.221

Si el agua no llena todas las cavidades del elemento, esto es si  $\Delta V_w < \Delta V_v$ , se dice que el medio no está saturado. Se define el grado de saturación, o simplemente saturación a la relación:

$$S = \left(\frac{\Delta V_w}{\Delta V_v}\right) \leq 1$$

Ec.II.222

De modo tal que  $S = 1$  corresponde a un medio saturado. Nótese que el contenido volumétrico de agua puede escribirse ahora en términos de la porosidad del medio y la saturación como:

$$\theta = n S$$

Ec.II.223



Haciendo uso de estas definiciones, la masa de agua contenida en nuestro elemento  $\Delta V$  puede escribirse como:

$$\Delta M = \rho n S \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{Ec.II.224}$$

Su variación temporal puede deberse a variaciones de  $\rho$ ,  $n$ ,  $S$  y  $\Delta z$ , puesto que consideramos que la sección horizontal  $\Delta x \Delta y$  del elemento no se deforma por efecto del flujo o la fuerza de gravedad, luego obtenemos:

$$\left(\frac{\partial \Delta M}{\partial t}\right) = \Delta x \Delta y \left( n S \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho n S \frac{\partial \Delta z}{\partial t} + \rho S \Delta z \frac{\partial n}{\partial t} + \rho n \Delta z \frac{\partial S}{\partial t} \right) \quad \text{Ec.II.225}$$

Analizaremos por separado cada uno de estos cuatro términos entre paréntesis, tenemos que, para el primer término, empleamos la definición del coeficiente de compresibilidad (isotérmico) del agua.

$$\beta = \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) \quad \text{Ec.II.226}$$

Que expresa la variación relativa de densidad por unidad de cambio de la presión (a temperatura constante), por otro lado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\beta \rho \frac{\partial p}{\partial t}\right) \quad \text{Ec.II.227}$$

Análogamente, para el segundo término, se define el coeficiente de compresibilidad vertical del suelo,  $\alpha$ , como:

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta z} \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \sigma_e}\right) \quad \text{Ec.II.228}$$

Donde  $\sigma_e$  es el esfuerzo normal efectivo que soporta la matriz porosa. La carga vertical por unidad de área a una determinada profundidad del suelo debe ser balanceada tanto por este esfuerzo matricial como por la presión  $p$  del agua contenida en los poros. Así,  $p + \sigma_e = cte$  y entonces:

$$\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial t}\right) = -\alpha \Delta z \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} \quad \text{Ec.II.229}$$

Para el tercer término, suponemos que el flujo de agua no desgasta el volumen sólido  $V_s$  (arrancando y arrastrando partículas del medio), es decir:

$$\Delta V_s = \Delta V - \Delta V_v = (1 - n) \Delta V = (1 - n) \Delta x \Delta y \Delta z = cte. \quad \text{Ec.II.230}$$

De donde obtenemos:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right) = (1 - n) \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} = - (1 - n) \alpha \frac{\partial \sigma_e}{\partial t}$$

Ec.II.231

Combinando las ecuaciones II.227, II.229 y II.231 con las ecuaciones II.217 y II.222 obtenemos:

$$n \rho \frac{\partial S}{\partial t} + n S \rho \left(\beta \frac{\alpha}{n}\right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) = 0$$

Ec.II.232

Que es la ecuación de conservación de la masa para flujos en medios porosos. Ésta dará lugar a la ecuación fundamental de gobierno para flujos en medios saturados y no saturados. A ella debe agregársele la ley de Darcy, que da cuenta de la dinámica del flujo atendiendo a las propiedades de la conductividad hidráulica del medio poroso.

### II.2.3.2 Ecuación de movimiento.

La conservación del momento lineal en mecánica de fluidos equivale a la segunda ley de Newton en mecánica de medios continuos. De acuerdo con la ley de Newton, las fuentes que causan la variación del momento en un sistema físico son las fuerzas que actúan sobre él. Estas fuerzas son las externas de volumen ( $f_e$ ), actúan en toda la masa del volumen de control (por ejemplo la gravedad), y las internas ( $f_i$ ), son las tensiones  $\sigma_{ij}$ , que actúan en la superficie de las caras del volumen de control.

La ecuación dinámica del movimiento se obtiene al igualar la suma de estas fuerzas al producto de la masa y la aceleración del elemento de volumen al cual se aplica la fuerza (segunda ley de Newton). Debido a que la velocidad en el fluido variará, en general de punto a punto, debe hacerse notar en los cálculos de su aceleración, que no sólo hará que la velocidad del elemento del fluido cambie durante cualquier intervalo de tiempo en la posición que tenía originalmente, sino que experimentará un cambio adicional causado por el hecho de que en el intervalo de tiempo se ha movido a otra región del fluido. La aceleración debe, por lo tanto, expresarse mediante la derivada temporal total de la velocidad como:

$$a = \frac{dv}{dt} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial v}{\partial z}$$

Ec.II.233

Donde los cambios infinitesimales de posición de una partícula están directamente relacionados con la velocidad local, es decir:

$$dx = v_x dt ; dy = v_y dt ; dz = v_z dt$$

Ec.II.234

Sustituyendo estos valores en la ecuación II.233 obtenemos la expresión para la aceleración de la partícula

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left( v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Ec.II.235

El primer término del segundo miembro se denomina derivada (u aceleración) local, el cual indica el cambio en la velocidad durante un tiempo infinitesimal  $dt$  en un punto fijo en el espacio, y se anula cuando el flujo es estacionario (independiente del tiempo). Los tres términos entre paréntesis forman la derivada (o aceleración) convectiva, la cual aparece cuando la partícula se mueve a través de regiones en que la velocidad varía. La aceleración convectiva puede ser expresada como:

$$\left( v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) \equiv (v \cdot \nabla) v$$

Ec.II.236

En esta forma, podemos escribir la aceleración total, ecuación II.235 de manera breve como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v$$

Ec.II.237

Notamos que aunque el término  $(v \cdot \nabla) v$  representa adecuadamente los efectos convectivos del fluido, es un término no lineal debido a que contiene productos de variables y con ello origina dificultades matemáticas en el análisis de los flujos.

Finalmente, la ecuación de movimiento para un elemento de volumen, en un fluido incompresible, viene dada por la suma de fuerzas involucradas por unidad de volumen, tales como: fuerza de presión ( $-V P$ ), fuerza viscosa ( $V \tau$ ), donde  $\tau$  representa el tensor de esfuerzos viscosos, y la fuerza gravitacional  $\rho g$ , igualada al producto de la masa por unidad de volumen y la aceleración:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \tau + \rho g$$

Ec.II.238

Para el caso de un fluido ideal, no viscosos, sin tensiones desviadoras (esto es, para un fluido sin viscosidad), la fuerza ( $V \cdot \tau$ ) no aparece, la ecuación del momento se reduce a la ecuación del movimiento de Euler:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \rho f_e = -\nabla P + \rho g$$

Ec.II.239

Considerando un elemento unitario de volumen, encontramos que en general estará sujeto a tres tipos de fuerzas: los gradientes de presión, fuerzas externas (como la debida a la gravedad) y fuerzas que se oponen al movimiento del fluido y que se deben a la resistencia interna o fricción que experimenta el fluido.

Debemos re expresar la segunda ley de Newton para un fluido (medio continuo): fuerza total sobre un cuerpo = rapidez de cambio de momentum; consideremos de nuevo, un volumen euleriano fijo suspendido en un flujo cualquiera mostrado en la Figura II.46.

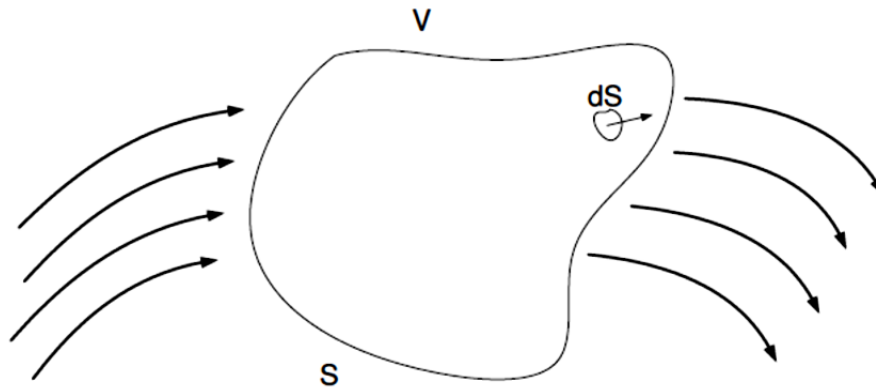


Figura II.46.- Volumen elemental representativo (VER) en un sistema euleriano (Martín D., 2011).

Las fuerzas en un fluido son:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_s + \vec{F}_v \quad \text{Ec.II.240}$$

Donde  $\vec{F}_s$  son las fuerzas de superficie y  $\vec{F}_v$  son las fuerzas de volumen.

Cada una se puede definir como:

$$\vec{F}_v = \int_V \rho \vec{f} dV \quad \text{Ec.II.241}$$

Donde  $\rho$  es la densidad y  $\vec{f}$  es un campo de fuerzas (magnéticas, gravitacionales, etc.), además:

$$\vec{F}_s = \int_S \Sigma \vec{n} dS \quad \text{Ec.II.242}$$

Donde  $\Sigma$  es el tensor de esfuerzos.

Consideremos:

Flujo de momentum a través de un elemento diferencial de área:

$$\vec{v} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{Ec.II.243}$$

Flujo total de momentum a través de toda la superficie  $S$ :

$$\int_S (\vec{v} \rho) \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \text{Ec.II.244}$$

El momentum total contenido en  $V$  es:

$$\int_V \vec{v} \rho \, dV$$

Ec.II.245

La razón de cambio de momentum en  $V$  es:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\vec{v} \rho) \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\vec{v} \rho) \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \rho) \, dV$$

Ec.II.246

El cambio total de momentum en  $V$  está dado por el flujo a través de  $S$  más la razón de cambio de momentum dentro de  $V$ :

$$\int_S (\vec{v} \rho) \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \rho) \, dV$$

Ec.II.247

Entonces, la segunda ley de Newton queda expresada como:

$$\int_V \rho \vec{f} \, dV + \int_S \Sigma \vec{n} \, dS = \int_S (\vec{v} \rho) \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \rho) \, dV$$

Ec.II.248

Que es la ecuación de conservación de momentum lineal en forma integral.

Utilizando, de nuevo, el teorema de la divergencia podemos realizar las siguientes transformaciones:

$$\int_S \Sigma \vec{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \Sigma \, dV$$

Y:

$$\int_S (\vec{v} \rho) \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot ((\vec{v} \rho) \vec{v}) \, dV$$

Ecs.II.249

A esta última integral la podemos expandir sabiendo que:

$$\nabla \cdot ((\vec{v} \rho) \vec{v}) = (\vec{v} \rho) \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v} \rho)$$

Ec.II.250

Entonces podemos escribir la ecuación de conservación de momentum como:

$$\int_V \left( \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Sigma - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \rho) - ((\vec{v} \rho) \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v} \rho)) \right) dV = 0$$

Ec.II.251

Una vez más, para que esto sea cierto, independientemente de la elección de  $V$ , el integrando debe ser cero:

$$\rho \vec{f} + \nabla \cdot \Sigma - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \rho) - ((\vec{v} \rho) \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v} \rho)) = 0$$

Ec.II.252

Podemos expandir el término  $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \rho)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \rho) = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ec.II.253

Entonces:

$$\rho \vec{f} + \nabla \cdot \Sigma = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + ((\vec{v} \rho) \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \nabla \cdot (\vec{v} \rho))$$

Ec.II.254

Podemos reagrupar algunos términos, tal que:

$$\rho \vec{f} + \nabla \cdot \Sigma = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \cdot \vec{v} \right) + \vec{v} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \rho) \right)$$

Ec.II.255

Del último término de esta expresión, la cantidad dentro del paréntesis es exactamente igual a la ecuación de conservación de masa ecuación II.188, y por lo tanto es igual a cero.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Ec.II.256

La cantidad dentro del paréntesis del penúltimo término puede escribirse de manera compacta usando la definición de la derivada material.

Por lo tanto podemos escribir:

$$\rho \vec{f} + \nabla \cdot \Sigma = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Ec.II.257

Esta es la ecuación de conservación de momentum en forma diferencial.

En el caso particular de un medio poroso las fuerzas netas que actúan sobre un volumen de control son además de las fuerzas exteriores ( $\mathbf{b}$ ) y del tensor de tensiones de Cauchy ( $\sigma^{(s)}$  y  $\sigma^{(a)}$ ), las fuerzas debidas a la interacción de la matriz sólida con el fluido intersticial ( $\mathbf{R}_a = -\mathbf{k}_a^T \omega_a$ ).

Por lo tanto, el balance del momento lineal de los componentes del medio poroso es, para el caso del fluido intersticial:

$$\rho^\alpha \frac{D^\alpha v^\alpha}{Dt} = \rho^\alpha b + \text{div } \sigma^\alpha - k^{-1}_\alpha u^\alpha$$

Ec.II.258

Y para el esqueleto sólido:

$$\rho^s \frac{D^s v^s}{Dt} = \rho^s b + \text{div } \sigma^s + k^{-1}_s u^s$$

Ec.II.259

Donde:

$b$  = Término de las fuerzas exteriores

$\sigma^s$  = Tensor de tensiones parciales de Cauchy correspondiente a la fase sólida

$\sigma^\alpha$  = Tensor de tensiones parciales de Cauchy correspondiente a la fase fluida

$k_\alpha$  = Permeabilidad de la fase  $\alpha$

$u^\alpha$  = Velocidad relativa de Darcy

### II.2.3.3 Ecuación de la energía.

La ley de conservación de la energía, aplicada al sistema físico que en un instante de tiempo dado ocupa un cierto volumen de control, establece que:

- ❖ El calor transferido por unidad de tiempo al sistema, menos el trabajo realizado por unidad de tiempo por el sistema, más la diferencia entre la energía que entra y sale por unidad de tiempo debido al flujo del fluido a través de las paredes que rodean al volumen de control, es igual a la variación temporal de la energía contenida en dicho volumen de control.

Para analizar la ecuación de la energía expresada a través de la primera ley de la termodinámica aplicada a un medio poroso por donde fluye o se aloja un fluido, es necesario hacer las siguientes consideraciones: el medio es isotrópico, con la finalidad de simplificar los análisis sobre el medio poroso; los efectos radiactivos, disipación viscosa y trabajo hecho por los cambios de presión son muy pequeños por lo cual se pueden llegar a despreciar; se considera un equilibrio térmico tal que las temperaturas del sólido  $T_s$  y del fluido  $T_f$  son aproximadamente iguales; se asume que la conducción en el sólido y el fluido ocurren en paralelo, por lo que no hay calor neto transferido de una fase a otra (Nield D. A, Bejan A. 2006). De esta forma tomando promedios sobre un volumen elemental del medio poroso, para la fase sólida, la ecuación de la energía es:

$$(1 - \phi) (\rho C_p)_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial t} \right) = (1 - \phi) \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) + (1 - \phi) q''_s$$

Ec.II.260

Y para el fluido:

$$\phi (\rho C_p)_f \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} \right) + (\rho C_p)_f V \cdot \nabla T_f = \phi \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \phi q''_f$$

Ec.II.261

En donde los subíndices  $s$  y  $f$  se refieren al sólido y al fluido respectivamente,  $C$  es calor específico del sólido,  $C_p$  es el calor específico a presión constante del fluido,  $k$  es la conductividad térmica y  $q''$  es la generación de energía por unidad de volumen.

Sumando las ecuaciones II.259 y II.260 se tiene:

$$(\rho C)_e \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C)_f v \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_e \nabla T) + q_e'' \quad \text{Ec.II.262}$$

Donde:

$$(\rho C)_e = (1 - \phi) (\rho C)_s + \phi (\rho C_p)_f \quad \text{Ec.II.263}$$

$$k_e = (1 - \phi) k_s + \phi k_f \quad \text{Ec.II.264}$$

$$q_e'' = (1 - \phi) q_s'' + \phi q_f'' \quad \text{Ec.II.265}$$

Las ecuaciones anteriores II.262, II.263 y II.264, son respectivamente la capacidad calorífica global por unidad de volumen, la conductividad térmica global, y la generación global de calor por unidad de volumen del medio poroso.

La ecuación de la energía II.261 puede extenderse como sigue (Bejan A. 1995):

$$\rho_f C_{pf} \left( \xi \frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) = k_e \nabla^2 T + q_e'' + \frac{\mu}{K} (v)^2 \quad \text{Ec.II.266}$$

Donde, se ha agregado el término  $\frac{\mu}{K} (v)^2$ , que es el efecto de disipación viscosa y:

$$\xi = \left( \frac{\phi \rho_f C_{pf} + (1 - \phi) \rho_s C_s}{\rho_f C_{pf}} \right) \quad \text{Ec.II.267}$$

, $\xi$  se define como la relación de capacidades caloríficas, la cual considera la inercia térmica del medio que depende del sólido y del fluido, y es la relación de la capacidad calorífica global a la capacidad calorífica del fluido.

En el caso que se desprecie la generación de energía y el efecto de disipación viscosa, de la ecuación de la energía II.265 se escribe como:

$$\xi \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{Ec.II.268}$$

Donde:



$$\alpha = \frac{k_e}{\rho_f C_{pf}}$$

Ec.II.269

Nótese, que  $k_e$  es una propiedad del medio poroso saturado por el fluido, mientras que  $\rho_f C_{pf}$  es una propiedad del fluido solamente y  $\alpha$  es la difusividad térmica del medio.

La distribución de temperatura se rige por una ecuación que describe el balance de calor en cada elemento unitario de volumen promedio, la cual es una expresión de la primera ley de la termodinámica. Representando por  $C_p$  el calor específico, la razón de cambio de calor contenido en este elemento de volumen está dado por  $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$ , el cual a su vez es el resultado de agregar (o quitar) calor en el transporte de calor advectivo por movimiento de fluidos intersticiales, por conducción térmica, y por producción (o absorción) de calor por reacciones químicas, si éstas se presentan.

Así, la entrada de calor advectivo (Landau & Lifschitz, 1998) es:

$$-(\rho C_p) \nabla \cdot (Tv) = -(\rho C_p (v \cdot \nabla T + T \nabla \cdot v))$$

Ec.II.270

Si el fluido es incompresible, entonces esta ecuación se reduce a:

$$-(\rho C_p) \nabla \cdot (Tv) = -(\rho C_p (v \cdot \nabla T))$$

Ec.II.271

Por otra parte, el flujo de calor puede ser expresado como  $-k_s \nabla T$ , donde  $k_s$  es la conductividad térmica del medio. La razón de acumulación de calor por volumen unitario es entonces:

$$\nabla \cdot (k_s \nabla T) = k_s \nabla^2 T$$

Ec.II.272

Esta simplificación se obtiene cuando el medio es localmente homogéneo ( $k_s = \text{cte.}$ ). Si además se presentan reacciones químicas y denotando por  $Q$  la energía calorífica asociada a dichas reacciones, se tiene entonces que la ecuación de energía toma la forma:

$$(\rho C_p) \frac{\partial T}{\partial t} = -(\rho C_p) v \cdot \nabla T + k_s \nabla^2 T + Q$$

Ec.II.273

Reordenando la ecuación II.272 y dividiendo entre  $\rho C_p$ , tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T = \left( \frac{1}{\rho C_p} \right) (k_s \nabla^2 T + Q)$$

Ec.II.274

Observamos que el lado izquierdo no es otra cosa que la derivada total de la temperatura, así que la ecuación de energía finalmente toma la forma:

$$\frac{dT}{dt} = \left( \frac{1}{\rho C_p} \right) (k_s \nabla^2 T + Q)$$

Ec.II.275

La complejidad del análisis de la ecuación de energía II.265 puede aumentarse si el trabajo hecho por el cambio de presión no es despreciable, es decir que la condición  $\beta_T T \left( \frac{g \beta_T}{c_{pf}} \right) L \ll 1$  (donde  $G_e = \left( \frac{g \beta_T L}{c_{pf}} \right)$  es el número de Gebhart) no sea satisfecha, entonces el término  $-\beta_T T \left( \frac{\partial P}{\partial T} + v \cdot \nabla P \right)$  debe ser agregado al lado izquierdo de la ecuación II.265, donde  $\beta_T$  es el coeficiente de expansión térmica definida por  $\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$  (Nield D. A, Bejan A. 2006).

De esta forma las ecuaciones II.259, II.261 y II.265 describen la dinámica de flujo y la transferencia de calor a través de un medio poroso. A lo anterior se deben agregar las siguientes suposiciones (Bejan A. 1995):

- ❖ El medio es homogéneo; es decir, el material sólido y el fluido embebido a través de los poros son distribuidos uniformemente por todo el medio poroso.
- ❖ El medio es isotrópico, esto significa que las propiedades de transporte tales como  $K$  y  $k$  no dependen de la dirección del experimento del cual son medidos. Si el medio fuera no isotrópico, la ley de Darcy de la ecuación 1.4 se asumiría de la forma:

$$u = -\frac{K_x}{\mu} (\nabla P + \rho g_x)$$

$$v = -\frac{K_y}{\mu} (\nabla P + \rho g_y)$$

$$w = -\frac{K_z}{\mu} (\nabla P + \rho g_w)$$

Ecs.II.276

Y la ecuación de la energía II.267 sería remplazada por:

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Ec.II.277

Donde:

$$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z = \frac{k_x, k_y, k_z}{\rho_f C_{pf}}$$

Ec.II.278

- ❖ El número de Reynolds se basa sobre la velocidad promedio y  $\mathbf{K}^{1/2}$ , y no excede el orden de magnitud 0 – 10, esto significa que la ley de Darcy se aplica en su forma original.

# CAPÍTULO III

---

Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

## PROPIEDADES FÍSICAS E HIDRODINÁMICA EN MEDIOS POROSOS

CAPÍTULO  
III

PROPIEDADES FÍSICAS E  
HIDRODINÁMICA EN MEDIOS  
POROSOS

Los suelos y rocas son geo materiales multifase, cuyo comportamiento está regido por el acoplamiento entre sus fases. La presión intersticial de los fluidos que rellenan los huecos juega un papel fundamental en el comportamiento global de estos materiales, y puede llegar a causar su rotura. Si consideramos el suelo como una mezcla, podremos formular para cada componente ecuaciones de conservación de masa, de momento lineal, y constitutivas.

Un aspecto fundamental es la elección del tipo de formulación, ya que puede ser euleriana, lagrangiana y mixta, esta última opción es la empleada usualmente en geotecnia y mecánica del suelo, donde se emplea una formulación lagrangiana para el esqueleto sólido y una formulación euleriana para el fluido intersticial. Se considera, el movimiento del fluido relativo al esqueleto sólido, y suele hacerse una hipótesis adicional suponiendo que las aceleraciones relativas de las fases líquidas son muy pequeñas.

El primer modelo matemático que describió el acoplamiento entre el esqueleto sólido y el fluido intersticial fue propuesto por Biot (1941, 1955). Se trataba de un modelo para materiales elásticos lineales. Este modelo inicial fue mejorado posteriormente por otros investigadores, siendo de destacar el trabajo del profesor Zienkiewicz y su equipo en la Universidad de Swansea, quienes extendieron la teoría a materiales no lineales y a grandes deformaciones (1980, 1984, 1990, 2000).

Se puede concluir, a la vista de los trabajos mencionados, que la comunidad geotécnica ha tenido a su disposición un marco teórico para comprender el comportamiento de los suelos y rocas teniendo en cuenta el acoplamiento con el fluido intersticial. De hecho, los análisis que se llevan a cabo hoy en día son acoplados, empleando programas de cálculo en elementos finitos o diferencias finitas donde se han implementado estos modelos.

La situación es sin embargo distinta en el caso de la propagación de deslizamientos rápidos de laderas, donde es claro que existe un importante acoplamiento entre el esqueleto sólido y el agua y aire intersticiales. No es frecuente analizar la propagación de un deslizamiento rápido empleando un modelo acoplado. De hecho, el primer modelo –con grandes simplificaciones– que ha sido propuesto en esta área es el de Hutchinson (1986), que combinó para un bloque que se desliza ladera abajo un modelo mecánico de movimiento con la ecuación de consolidación unidimensional. Más recientemente, Iverson & Denlinger (2001) y Pastor et al. (2002), han propuesto formulaciones más completas.

Existen diferentes alternativas para describir el acoplamiento entre el sólido y el fluido intersticial. En este trabajo se ha elegido el marco teórico que proporciona la teoría de mezclas, puesto que es

más general que el empleado en mecánica del suelo, y puede aplicarse tanto a la iniciación del movimiento como a la propagación del deslizamiento.

El suelo es un material constituido por una parte sólida o matriz y unos espacios o poros, interconectados a manera de red dentro de la matriz sólida, los cuales pueden ser ocupados por una o varias fases de fluido ya sean líquidas o gaseosas. El líquido que se presenta comúnmente en los poros es el agua. De igual manera el gas más común presente en los poros es el aire, aunque por procesos de contaminación pueden existir otros tipos de gases. El agua de los medios porosos se encuentra alojada en los espacios vacíos o intersticios del medio geológico que lo constituye. Estos intersticios actúan a la vez como depósitos y como conductos, permitiendo así al medio poroso cumplir con sus dos funciones de almacenar y transmitir el agua subterránea (Figura III.1).

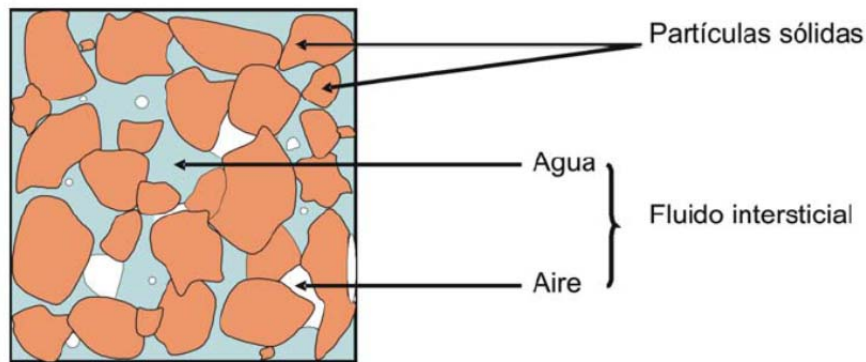


Figura III.1.- Esquema de un suelo trifásico (Adoptado de Montenegro H. & Malagón D., 1997).

Una de las herramientas empleadas en todas las ramas de la física, para la investigación de fenómenos en sistemas complejos, es el modelo conceptual. De acuerdo con esta aproximación, en un fenómeno físico complicado, o sistema, el tratamiento matemático es prácticamente imposible, por lo cual es conveniente hacer suposiciones y simplificaciones que hagan posible el análisis matemático del fenómeno o sistema. Al realizar el análisis de estos sistemas simplificados (ficticios), los resultados encontrados son relaciones matemáticas de varios parámetros estudiados en el fenómeno (Bear, 1972). El modelo conceptual es usado para visualizar los fenómenos que no se pueden observar microscópicamente, pero del que pueden obtenerse mediciones de excitaciones y respuestas a nivel macro.

Uno de los modelos conceptuales de mayor aceptación es el modelo de flujo en suelos de Bear y Bachmat de 1966 y 1967 (Bear, 1972). Ellos visualizaron el espacio de vacíos de un medio poroso como una red espacial de conductos (canales y tuberías) conectados aleatoriamente, de longitud, sección transversal y orientación variables, y uniones donde al menos tres canales se reúnen. Un canal posee dirección y por lo tanto se define un eje, mientras que la unión no la posee. Las uniones y los canales poseen una distribución espacial más o menos uniforme. La matriz de sólidos se asume como rígida y no interactúa con el llenado de fluidos del espacio vacío.

El régimen de flujo válido en este modelo de medio poroso es el laminar, y por lo tanto cada canal se define en el espacio como un tubo de corriente en el cual el patrón de las líneas de corriente es fijo, aunque la dirección de flujo a lo largo de ellos puede que no lo sea. En una unión no hay un patrón fijo de las líneas de corriente. Se asume que el fluido que satura el medio poroso es

newtoniano, de temperatura constante, químicamente inactivo e incompresible. Las fuerzas activas son debidas a la presión, la gravedad y el cortante resultante de la viscosidad del fluido. El modelo asume sólo pérdidas de energía mientras el fluido se encuentre en el conducto y no en las uniones, así la red de canales conectados entre sí produce gradientes promedio de presión, de densidad, de viscosidad y de concentración de solutos, en cualquier volumen elemental representativo (VER). Estos gradientes promedio son prácticamente independientes de la geometría de cada canal dentro del VER. De otro modo, las desviaciones locales de los valores medios son mucho más pequeñas que el promedio mismo y dependen fuertemente de la geometría local de la matriz sólida. Para entender mejor el comportamiento del flujo en el suelo, Darcy planteó la ley que rige el movimiento del agua en el suelo.

En este modelo, todas las ecuaciones de conservación (Energía, Masa y Momentum) son válidas para cualquier punto del espacio de vacíos del medio poroso. La utilidad radica en la determinación de los valores de los parámetros de flujo de las ecuaciones, los cuales son tomados en el VER del medio poroso. Un valor promedio,  $\Omega(P)$ , en el punto  $P$  de alguna propiedad intensiva del fluido,  $\Omega$  (cantidad de propiedad por unidad de volumen en el fluido), lo define la ecuación III.1. Esta expresión no es representativa de propiedades extensivas.

$$\Omega(P) = \frac{1}{(\Delta U_0)_V} \int_{[(\Delta U_0)_V]_P} \Omega(X') dU_V(X')$$

Ec.III.1

Donde:

$[(\Delta U_0)_V]_P$  = Es el volumen de espacios vacíos dentro del VER, y tiene centro en el punto P.

El comportamiento hidráulico de un fluido en un medio poroso depende en gran medida de la geometría del espacio poroso, como por ejemplo, el tamaño y forma de los granos y su disposición espacial, en el caso de material granular. Las principales características del medio poroso que se relacionan con el comportamiento hidráulico son la porosidad, la superficie específica, tortuosidad, grado de saturación, densidad, contenido de humedad, grado de saturación.

La naturaleza y tipo de fluido que se encuentra rodeando las partículas de un suelo son de fundamental importancia ya que las interacciones resultantes son diferentes para el caso de agua, soluciones electrolíticas y fluidos orgánicos. En los poros de los suelos se pueden encontrar agua y fluidos contaminantes de diferente naturaleza química, ya sea en forma natural o como consecuencia de actividades antrópicas (Fetter 1993; Suthersan 1997; Santamarina et al. 2001; Bidner 2001).

Los efectos de interacción líquido – partícula se deben a las propiedades de la molécula de agua, la misma está formada por un átomo de oxígeno (con diferencial de carga negativa) y dos de hidrógeno (con carga positiva), unidos por medio de enlaces covalentes. Los átomos de hidrógeno se encuentran orientados de manera que forman un ángulo de aproximadamente 104.5° entre ellos (Figura III.2). Este ángulo satisface la condición de mínimo potencial (Mortimer, 1983) y constituye a la molécula de agua como un dipolo eléctrico debido a la asimetría de diferenciales de cargas eléctricas que posee.

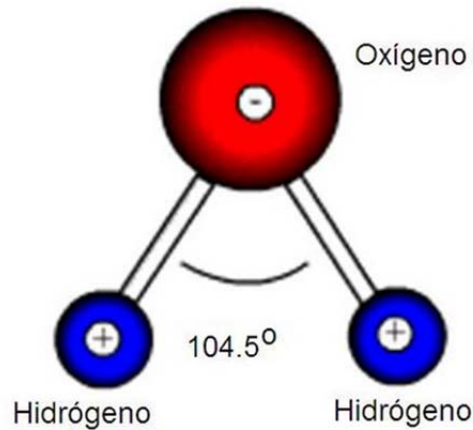


Figura III.2.- Molécula del agua (Benítez A., 1972).

Los vacíos en la matriz sólida pueden estar ocluidos o interconectados entre sí (Dullien 1992), desde el punto de vista de la ingeniería civil, la geotecnia ambiental y la ingeniería de reservorios, los medios porosos de interés lo constituyen los suelos y las rocas.

Los suelos y rocas pueden estar formados por diferentes cantidades de minerales de arcilla, minerales no arcillosos, materia orgánica y sales precipitadas. Los minerales en forma cristalina son la fracción más importante que conforma un suelo, sin embargo pequeñas proporciones de la fracción arcillosa y materia orgánica, debido a su gran superficie específica y reactividad superficial, afectan en forma significativa las propiedades del mismo (Sposito 2008).

La mineralogía de las partículas es el factor principal que controla el tamaño y la forma de la partícula como así también tiene influencia en la permeabilidad, resistencia y transmisión de los esfuerzos en el suelo (Lambe y Whitman 1969, Holtz y Kovacz 1981).

Para una clara comprensión de los distintos mecanismos de interacción fluido – partícula y los fenómenos emergentes a macro escala, resulta necesario estudiar las características físico – químicas y mineralógicas de las fracciones finas que componen los suelos.

Por su composición química la mayoría de los minerales arcillosos son aluminosilicatos (Holtz y Kovacz 1981). Estos minerales se presentan en partículas de pequeños tamaños, usualmente menores a 2  $\mu\text{m}$ .

La estructura de estos minerales se origina mediante la combinación de dos unidades estructurales simples, el tetraedro de silicio y los octaedros de aluminio (Gibbsita) o magnesio (Brucita). Las diferentes formas de asociación de estas unidades dan origen a las diversas clases de minerales arcillosos cada uno con propiedades específicas (Mitchell y Soga, 2005). En la Figura III.3 se muestran las diferentes estructuras posibles para la formación de los principales grupos de arcillas comúnmente encontrados.

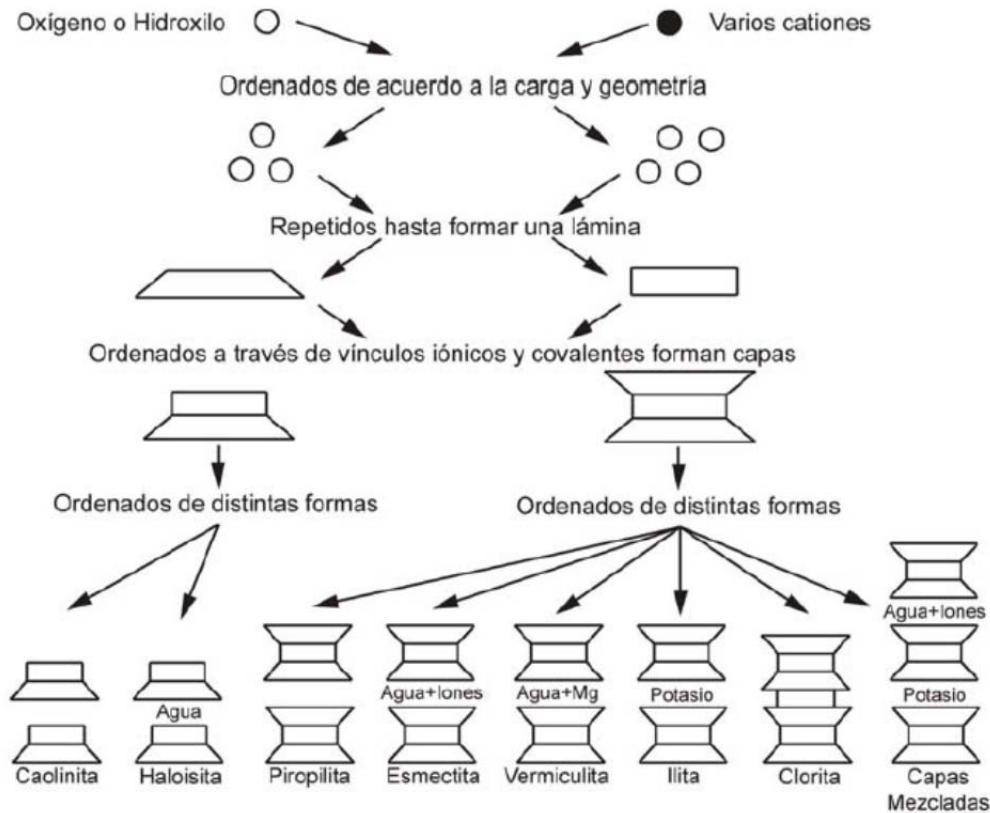


Figura III.3.- Minerales arcillosos (Mitchell y Soga, 2005).

Las partículas son consideradas gruesas cuando su tamaño supera los 2 micrones. Desde el punto de vista de la interacción con el fluido son consideradas inertes. Cuando el contenido de partículas finas en las muestras es escaso (menor al 7%) las propiedades físicas de las partículas gruesas predominan en los problemas de flujo y de resistencia, su tamaño, forma y textura superficial, son las principales propiedades a considerar para su análisis. Cuando el contenido de partículas de tamaño inferior a 2 micrones es superior al 7% esta fracción es la que gobierna el comportamiento hidromecánico de la muestra de suelo y carece de sentido investigar las propiedades de la fracción gruesa (Martin y Lambe 1956,).

Las características de una partícula reflejan su origen mineralógico, revela los mecanismos de formación y los efectos en el comportamiento del conjunto de partículas. La composición mineralógica de las partículas define la dureza, la resistencia a los agentes químicos y la presencia de algún plano de clivaje (González de Vallejo et al. 2004). Las principales propiedades de las partículas individuales son su tamaño, forma, superficie específica y densidad.

Para poder cuantificar los diferentes procesos que ocurren en un medio poroso, las propiedades físicas han sido expresadas en una serie de parámetros, que son expuestos a continuación, definiendo estas propiedades para describir la morfología de los materiales porosos, a las que dividiremos en macroscópicas y microscópicas. Las propiedades macroscópicas más importantes son la porosidad, tortuosidad, grado de saturación, contenido de humedad y la permeabilidad, las propiedades microscópicas son la superficie específica y densidad.



### III.1 Porosidad (n).

Al momento en que son formadas, algunas rocas contienen espacios vacíos mientras que otras son completamente sólidas. Aquellas rocas que se forman cerca de la superficie de la tierra no son totalmente sólidas debido a los procesos físicos y químicos producidos por cambios climáticos. Estos procesos causan la descomposición de las rocas, lo que se traduce en un aumento de los espacios vacíos.

Se denomina sedimentos a la acumulación de granos individuales que fueron depositados por el agua, el viento, el hielo, o por gravedad, producto de la descomposición por agentes erosivos de la roca. Los espacios vacíos o poros entre los granos del suelo dan origen a la porosidad. Las fracturas, espacios vacíos y los poros en los materiales de la tierra son de gran importancia para la geología ya que el agua subterránea y la humedad del suelo ocurren en ellos.

La porosidad de los materiales es el porcentaje de la roca o suelo que está compuesto de espacios vacíos (Figura III.4). Su definición matemática es:

$$n = \left( \frac{\text{Volumen de vacíos}}{\text{Volumen total del suelo}} \right) = \left( \frac{V_v}{V_T} \right) * 100$$

Ec.III.2

Donde:

n = Es la porosidad (porcentaje).

$V_v$  = Es el volumen de espacios en una unidad de suelo.

$V_T$  = Es el volumen total de suelo usado como referencia para el análisis.

$V_s$  = es el volumen ocupado por el esqueleto sólido.

$$n = \left( \frac{V_v}{V_T} \right) = \left( \frac{V_v}{V_v + V_s} \right)$$

Ec.III.3

Partiendo de esta definición de la porosidad, se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$V_s = (1 - n) V_T$$

Ec.III.4

$$V_v = V_a + V_w = n V_T$$

Ec.III.5

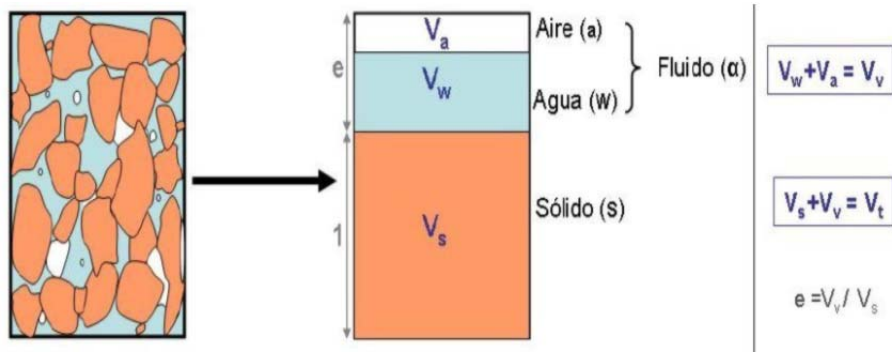


Figura III.4.- Esquema de una muestra representativa de suelo (Adoptado de Montenegro H. & Malagón D., 1997).

La porosidad se determina en laboratorio utilizando una muestra de volumen conocido. La muestra se seca en un horno a 105°C hasta que alcance un peso constante. Esto elimina todo el contenido de humedad desde los poros del suelo, pero no aquella agua contenida en algunos minerales que componen el suelo. A continuación la muestra se introduce en un recipiente con un volumen de agua conocido, donde se mantiene hasta que se sature completamente y se remueve. El volumen de los poros o espacios vacíos ( $V_v$ ) es igual al volumen de agua que había originalmente en el recipiente menos el volumen de agua en éste luego que la muestra ha sido removida.

Este procedimiento de laboratorio permite obtener no la porosidad total del suelo sino el valor de la porosidad efectiva, debido a que se excluye aquellos poros que no son suficientemente grandes para contener moléculas de agua y aquellos que no se encuentran interconectados. La porosidad efectiva,  $n_e$ , es la porosidad disponible para el flujo de un fluido. Estudios realizados han permitido concluir que en la mayoría de los suelos la porosidad y la porosidad efectiva son prácticamente similares.

La Figura III.5 muestra seis ejemplos de suelos formados por distintos materiales que presentan diferentes valores de porosidad. La Tabla III.1 muestra rangos de valores de porosidad para distintos materiales.

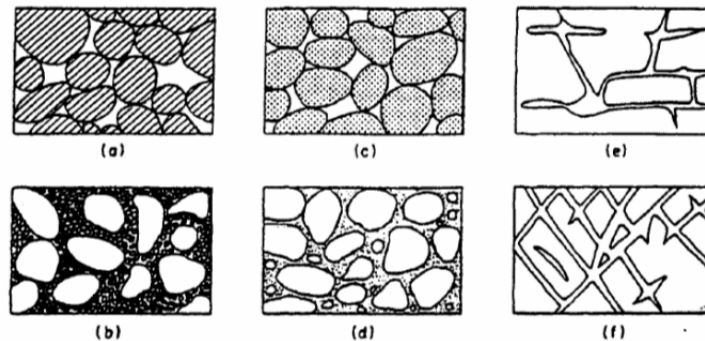


Figura III.5.- a) Depósito de material bien graduado y de alta porosidad (Tamaño de partículas parecido; granulometría uniforme). b) Depósito de material sedimentario mal graduado y de baja porosidad Esquema de una muestra representativa de suelo (Tamaño de partículas diferente; granulometría bien graduada). c) Similar al caso a) pero con guijarros o gravas gruesas, porosidad muy elevada. d) Similar al caso a) pero con porosidad disminuida por el depósito de material mineral en los intersticios. e) Rocas que se volvieron porosas por procesos químicos. f) Rocas con porosidad adquirida por fractura (Benítez A., 1972).

Tabla III.1.- Rango de valores de porosidad (Adaptada de Fetter C., 1999).

<b>Depósitos no consolidados</b>	<b>n (%)</b>
Grava	24 - 40
Arena	25 - 50
Arena y grava	36
Limo	35 - 50
Arcilla	40 - 70
<b>Rocas</b>	
Basalto	0.1 – 2.9
Basalto fracturado	5 - 50
Limo kárstico	5 - 50
Dolomita	0 - 2
Roca cristalizada fracturada	0 - 10
Roca cristalina densa	0 - 5
Mármol	0.1 – 0.2
Esquisto	1 - 10
Granito	1.5 – 0.02

La porosidad total depende de los siguientes factores principales:

- La forma de los granos, la cual determina a su vez la forma y dimensiones de los poros. Así, por ejemplo, un suelo en el cual prevalece la forma esférica tiene una porosidad menor que otro para el cual los granos tienen forma cúbica.
- La colocación de los granos: por ejemplo, para el caso de granos esféricos existen varios tipos de arreglos posibles, los cuales afectan en forma directa la porosidad, de tal forma que a diámetro igual de los granos la porosidad total es función de la colocación de los granos.
- La granulometría: mientras más uniforme sea la granulometría mayor es la porosidad. Esto debido a que en los suelos con granulometría heterogénea los granos pequeños tienden a llenar los vacíos que quedan entre los granos de mayor tamaño.
- El grado de compactación: a causa de una mayor compactación se pueden reducir considerablemente tanto el volumen de los poros como la interconexión entre ellos.

Pueden considerarse dos tipos de porosidad la macro y la microporosidad. La primera corresponde al porcentaje del volumen de poros ocupados por la fase gaseosa cuando el suelo se encuentra a capacidad de campo; involucra los poros grandes (>30  $\mu\text{m}$ ) y está asociada a los procesos de aireación y de infiltración en el suelo. Los macroporos o poros no capilares han sido clasificados en cuatro grupos morfológicos: poros formados por la fauna del suelo, poros formados por raíces de plantas, grietas y fisuras, y conductos naturales del suelo. Típicamente los macroporos constituyen entre el 0.001 y el 0.05% del total del volumen del suelo (Tindall & Kunkel, 1999). Además no hay duda de que bajo condiciones saturadas el agua se mueve por los grandes poros, dado que el agua a través de los macroporos encontrará menor resistencia viscosa porque los macroporos tienen

grandes conductividades. La microporosidad involucra los poros pequeños (<30 µm) y está asociada a los fenómenos de conducción, almacenamiento y retención del agua por encima del nivel freático. En los suelos la forma y tamaño de las partículas varían considerablemente formando espacios porosos igualmente irregulares, en consecuencia el valor de la porosidad de un material depende de la forma y organización de sus partículas. La Tabla III.2 amplía la ilustración acerca de los intervalos de tamaños de los poros, y sus funciones dentro del suelo.

Tabla III.2.- Propiedades representativas de los poros y su relación de tamaños (Adaptada de Marshall, Homes & Rose, 1991)

TIPO	TAMAÑO			DESCRIPCIÓN	RELACIÓN CON EL AGUA
Macroporos	1 mm	a	10 mm	Fisuras, túneles, y espacios entre terrones	Transmiten agua libremente, pero sólo si el suelo está saturado. No son conductantes si $\psi > -0.3$ kPa.
Poros de transmisión	30 µm	a	< 1mm	Poros entre agregados y dentro de ellos, especialmente en las interfases de pequeñas unidades. Poros entre partículas y suelos arenosos.	Transmiten agua durante la infiltración y son drenados a capacidad de campo, si $\psi = -1.5$ kPa.
Poros de almacenamiento	200 nm	a	< 30 µm	Principalmente, poros entre los agregados	El agua retenida por estos poros está disponible para plantas si $\psi = -1.5$ kPa., en un nivel más bajo de disponibilidad.
Poros complejos de arcillas	1nm	a	< 200 nm	Poros de arcillas complejas, incluyendo aquellos entre los dominios y <10 nm.	Los poros cambian de tamaño a medida que el suelo cambia de contenido de agua. Si la arcilla es lo suficientemente reactiva, el volumen bulk del suelo también cambia.

$\psi$  es el potencial matricial.

### III.1.1 Porosidad cinemática ( $n_e$ ).

Corresponde al volumen de vacíos que ocupa el agua que efectivamente circula a través de un medio poroso. Desde el punto de vista del desplazamiento del fluido, el agua adherida se puede considerar como parte del sólido. Se define entonces porosidad cinemática o efectiva como:

$$n = \left( \frac{\text{Volumen de agua grafica}}{\text{Volumen total del suelo}} \right) = \left( \frac{V_e}{V_T} \right) * 100$$

Ec.III.6

La porosidad efectiva está relacionada sólo con el concepto de fluido en movimiento y puede ser afectada por algunos fenómenos como:

- ❖ Existencia de poros desconectados, como burbujas de líquido en la fase sólida
- ❖ Existencia de bolsas de vacíos que no participan en el movimiento
- ❖ Suelos con grandes fracturas porosas que hacen que el fluido circule preferentemente por ellas, mientras que el resto de los poros no participa del movimiento.

De acuerdo a Walton 1970, y Driscoll 1986, la porosidad eficaz de algunos tipos de rocas y sedimentos es la mostrada en la Tabla III.3 siguiente:

Tabla III.3.- Porosidad eficaz de lagunas rocas y sedimentos (Adaptada de Walton & Driscoll, 1986).

Rocas y sedimentos	Porosidad eficaz ( $n_e$ ) %
Arcilla	1 – 10
Arena	10 – 30
Grava	15 – 30
Grava y arena	15 – 25
Arenisca	5 – 15
Lutita	0.5 – 5
Caliza	0.5 – 5

Parte del agua es retenida en los poros por fuerzas de atracción molecular y de capilaridad y la cantidad de agua que una unidad de volumen de un medio poroso retiene después del drenaje gravitacional se denomina retención específica. Esta es mayor en sedimentos finos, de manera que éstos tienen una porosidad eficaz menor que sedimentos gruesos, aunque ambos puedan tener la misma porosidad.

### III.2 Relación de vacíos.

En mecánica de suelos se utiliza también como un parámetro indicativo de la porosidad de una roca el índice de vacíos ( $e$ ), definido como la relación entre el volumen de vacíos ( $V_v$ ) y el volumen de sólidos ( $V_s$ ).

$$e = \left( \frac{V_v}{V_s} \right)$$

Ec.III.7

Este índice de vacíos está ligado a la porosidad total y expresa, de hecho, una misma propiedad del terreno. Las expresiones que relacionan estos dos parámetros son:

$$n = \left( \frac{e}{1 + e} \right); \quad e = \left( \frac{n}{1 - n} \right)$$

Ec.III.8

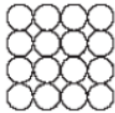
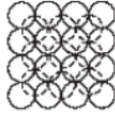
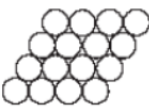
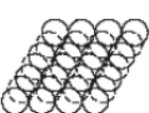
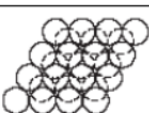
El espacio de poros es el aspecto más relevante de la microestructura de los suelos para el estudio del flujo de fluidos y contaminantes, en tanto que la cantidad de contactos entre partículas define aspectos de la resistencia mecánica de los suelos (Seed et al. 1960). El espacio de poro dependerá del tamaño de las partículas, por lo que por un lado se tiene la microestructura debida a las partículas gruesas y la microestructura debida a las partículas finas.

Para el estudio de las microestructuras formadas por partículas gruesas, se puede asumir que las mismas son de forma esférica. Muchos trabajos teóricos tratan el problema considerando diferentes

acomodamientos de esferas de igual tamaño, lo que conduce a diferentes densidades del medio poroso y en consecuencia a diferentes porosidades (Vuković y Soro 1992; Mitchell y Soga 2005).

En la Tabla III.4 se muestran las características de los diferentes acomodamientos de esferas posibles. El arreglo más denso entre esferas de igual tamaño es el cúbico con esferas centradas en las caras. En el caso de combinación de más de un tamaño se logran mezclas más densas debido a que las esferas de menor diámetro se acomodan en los espacios vacíos dejados por las de mayor diámetro.

Tabla III.4.- Propiedades de los arreglos regulares de esferas de igual tamaño (Modificado de Santamarina et al., 2001).

Arreglo Geométrico	Nº Coordinación	Espaciamiento entre capas	Porosidad $n$	Relación Vacíos $e$	Densidad de empaquetamiento $1 - n$
Cúbico Simple (CS) 	6	$d_g$	0.476	0.908	0.524
Cúbico – Tetraédrico (CT) 	8	$d_g$	0.395	0.652	0.605
Tetragonal – Esfenoidal (TS) 	10	$d_g/2\sqrt{3}$	0.302	0.432	0.698
Cúbica Centrada en la Cara (CCC) 	12	$d_g/2\sqrt{2}$	0.260	0.351	0.740
Tetraédrica (T) 	12	$d_g\sqrt{2/3}$	0.260	0.351	0.740

### III.3 Tortuosidad.

Otra característica importante de un medio poroso es la tortuosidad ( $T$ ), usualmente definida como la razón entre la longitud real que debe recorrer una partícula de fluido para unir dos puntos en el seno del medio poroso y la distancia en línea recta entre dichos puntos (Figura III.6).

Como es de esperar,  $T$  depende de  $n$ . Si  $n$  es muy baja,  $T$  es muy grande. Generalmente  $T$  no puede ser medido experimentalmente y en la mayoría de los modelos clásicos de flujo y transporte en medios porosos lo tratan como un parámetro ajustable.

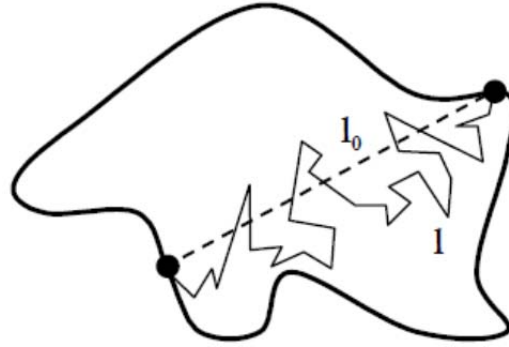


Figura III.6.- Tortuosidad (Benítez A., 1972).

El agua se mueve alrededor de partículas individuales y de poros de diferentes tamaños dentro del medio poroso, resultando un patrón mucho más largo que una línea recta. Los efectos de este camino meándrico en la permeabilidad del suelo es tomada en cuenta por la tortuosidad. Carman en 1937 (Bear, 1972) propuso un factor de tortuosidad, cuando estudiaba las relaciones entre la velocidad media en un tubo capilar tortuoso y uno recto (línea recta que separa el inicio y el final del mismo tubo capilar tortuoso), y la diferencia de carga piezométrica entre el inicio y el final del tubo. Él hizo el análisis teniendo en cuenta dos efectos, el de la velocidad y el de la fuerza del movimiento.

Efecto en la velocidad: Si la dirección de la línea recta de longitud  $L$ , la cual conecta los extremos del tubo tortuoso de longitud  $L_e$ , está definida en la dirección  $s$ , y la proyección en la misma dirección  $s$  de la velocidad media en el tubo,  $V$ , es  $u_s$ , se puede definir la velocidad media tangencial a la dirección de flujo mediante la ecuación III.9.

$$\bar{u} = \bar{V} \left( \frac{L}{L_e} \right)$$

Ec.III.9

Efecto en la fuerza del movimiento: Si  $|\nabla h|_s$  es el vector absoluto de la componente en la dirección  $s$ , del gradiente hidráulico medio, el cual actúa como la fuerza de movimiento en el medio poroso, se plantea la ecuación III.10.

$$|\nabla h|_s = \left( \frac{\Delta h}{L_e} \right) \left( \frac{L_e}{L} \right)$$

Ec.III.10

Extendiendo los dos anteriores conceptos y utilizando la Ley de Poiseuille para flujo en tubos no circulares (Ec.III.11), Carman planteó la ecuación de la velocidad media tangencial como lo describe la ecuación III.12.

$$V = \left( \frac{R_H^2 \rho g}{m \mu} \right) \left( \frac{\bar{\nabla} h}{L_e} \right)$$

Ec.III.11

Donde  $R_H$  es el radio hidráulico medio y  $m$  es el factor de forma de los poros.

$$\bar{u}_s = \left( \frac{R_H^2 \rho g (L/L_e)^2}{m \mu} \right) |\bar{\nabla}h| = \left( \frac{\left( \frac{R_H^2 \rho g}{m} \right) T}{\mu} \right) |\bar{\nabla}h|$$

Ec.III.12

De esta última expresión se entiende que Carman definió la tortuosidad del medio poroso como:

$$T = \left( \frac{L}{L_e} \right)^2 < 1$$

Ec.III.13

Y no como la relación  $(L / L_e)$ , como es definida por otros autores, ya que esta última representa el promedio del coseno del ángulo entre la dirección del eje del tubo de flujo y la dirección principal analizada. La tortuosidad es un factor que afecta la conectividad de los poros y por lo tanto presentará una alta influencia en los modelos de estimación de la conductividad hidráulica.

#### III.4 Área Superficial Específica.

Se define superficie específica ( $S_e$ ) a la superficie que tiene una partícula por unidad de volumen o por unidad de peso. Así, la unidad en que se expresa es en  $[m^2/m^3]$  o en  $[m^2/gr]$ :

$$S_e = \left( \frac{S}{V} \right); S_e = \left( \frac{S}{M} \right)$$

Ec.III.14

Las dos definiciones anteriores son similares ya que  $S_e$ , es sólo función de la forma y tamaño de los granos. La importancia de este concepto es que representa de alguna manera los fenómenos que se producen entre el agua y la superficie del suelo. A mayor superficie específica de un suelo, mayores serán las interacciones que se producirán entre el agua y el suelo.

El área superficial específica de un sólido,  $S_e$  es el área intersticial de la superficie de los poros por unidad de masa y es uno de los parámetros para evaluar la capacidad de adsorción de los sólidos. Varía desde unos pocos  $cm^2/gr$  para rocas, llega a valores de entre 600 y 1000  $m^2/gr$  para aerogeles y alcanza valores de hasta 2000 – 3000  $m^2/gr$  para carbones activados. Es difícil de imaginar, pero si pudiéramos dividir 7 gramos de aerogel de modo que su superficie interna quedara esparcida, esta ocuparía una superficie equivalente a una cancha de fútbol reglamentaria.



### III.5 Contenido volumétrico de agua ( $\theta_w$ ).

Ya que en un medio poroso parcialmente saturado el espacio vacío del material está parcialmente lleno de agua y parcialmente lleno de aire, se hace necesario definir la cantidad relativa de agua en él. El contenido de humedad relaciona la cantidad de agua presente en una muestra de suelo, con el volumen total de la muestra:

$$\theta_w = \left( \frac{\text{Volumen de agua}}{\text{Volumen total}} \right) = \left( \frac{V_w}{V_T} \right)$$

$$\theta_{wm} = \left( \frac{\text{Masa de agua}}{\text{Masa de sólidos totales}} \right) = \left( \frac{M_w}{M_T} \right)$$

Ecs.III.15

Donde:

$\theta_w$  = Contenido de agua volumétrico ( $\text{m}^3 / \text{m}^3$ ).

$\theta_{wm}$  = Contenido de agua gravimétrico ( $\text{kg} / \text{kg}$ ).

El contenido de agua volumétrico y el contenido de agua gravimétrico se relacionan de la siguiente manera:

$$\theta_w = \theta_{wm} * \left( \frac{\rho_a}{\rho_w} \right)$$

Ec.III.16

Donde  $\rho_w$  es la densidad del agua y  $\rho_a$  es la densidad aparente, la Tabla III.5 muestra relaciones existentes entre la densidad de un material y su porosidad total, que está definida como:

$$\rho_a = \left( \frac{\text{Masa de sólidos}}{\text{Volumen total}} \right) = \left( \frac{M}{V} \right) = \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

Ec.III.17

Tabla III.5.- Relaciones densidad – porosidad (Adaptada de Montenegro & Malagon, 1990).

Densidad ( $\text{Mg/m}^3$ )	Porosidad total (%)
< 1.0	> 63
1.0 – 1.2	55 - 62
1.2 – 1.4	47 – 54
1.4 – 1.6	40 – 46
1.6 – 1.8	32 – 39
> 1.8	< 31

Existen dos conceptos importantes asociados al contenido de humedad de un suelo los cuales son capacidad de campo (**CC**) y punto de marchitez permanente (**PMP**). La **CC** se define como el contenido de agua del suelo que se permite drenar libremente desde la saturación con pérdidas despreciables por la evaporación (Townend, Reeve & Carter, 2001), en otro sentido es el contenido mínimo de humedad al que puede llegar un suelo por efecto de drenaje únicamente (es decir si no se presentaran fenómenos de evapotranspiración). El **PMP** se define como el contenido de humedad por debajo del cual las plantas ya no pueden extraer agua del suelo; se le llama también límite

inferior de agua disponible. La capacidad de campo es propiedad del suelo, mientras que el **PMP** es además función del tipo de vegetación.

### III.6 Saturación.

La saturación de un medio poroso hace referencia al porcentaje de espacios vacíos que están ocupados por agua, se define de la siguiente manera:

$$S_e = \left( \frac{\text{Volumen de agua}}{\text{Volumen de vacíos}} \right) = \left( \frac{V_w}{V_v} \right)$$

Ec.III.18

Donde:

$S_e$  = Es el grado de saturación efectivo ( $m^3/m^3$ )

Se dice que el medio está saturado en determinado punto cuando su saturación efectiva es del 100%, es decir, cuando el medio tiene sus poros totalmente llenos de la fase líquida. Los distintos grados de saturación de un medio poroso determinan la existencia o no del flujo; tal como se ilustra en la Figura III.7a, para un estado de baja saturación el agua forma los llamados meniscos alrededor de los puntos de contacto de los granos y la interfase líquido – gas toma la forma de una silla de montar; en este punto los meniscos se hallan aislados uno del otro y no existe una fase líquida continua. Al incrementarse la humedad (Figura III.7b) los meniscos se expanden hasta alcanzar la saturación de equilibrio en la cual ambas fases (líquida y gaseosa) son continuas. Si se continúa incrementando la humedad se llega a la saturación funicular en la cual comienza el flujo de agua. Finalmente en la Figura III.7c se presenta una situación en la cual la fase gaseosa deja de ser continua y se rompe en burbujas que escapan hacia otros poros más grandes; se dice entonces que el aire está en saturación insular. Si toda la fase gaseosa desaparece se tendrá entonces un estado de saturación completa (Bear, 1972).

Por tanto, según el grado de saturación de la mezcla se puede hablar de:

Suelo saturado, cuando  $S_a = 0$  y  $S_w = 1$ , de modo que los huecos están ocupados exclusivamente por agua.

En el otro extremo están los suelos secos con  $S_a = 1$  y  $S_w = 0$ .

Donde:

$S_a$  = Grado de saturación del aire

$S_w$  = Grado de saturación del agua

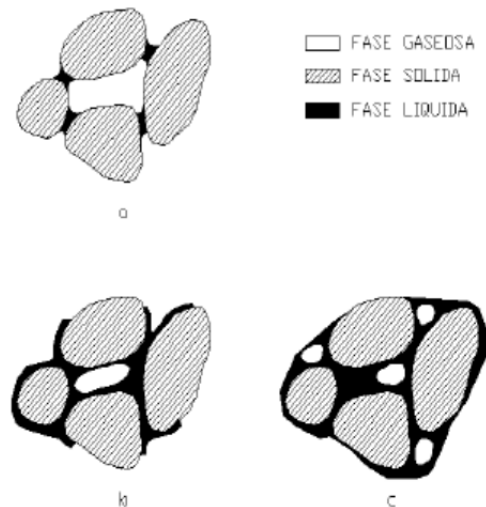


Figura III.7.- Grados de saturación (Bear, 1972)

Finalmente, se habla de suelo semisaturado, cuando el espacio intersticial está ocupado tanto por agua como por aire. (Figura III.8).

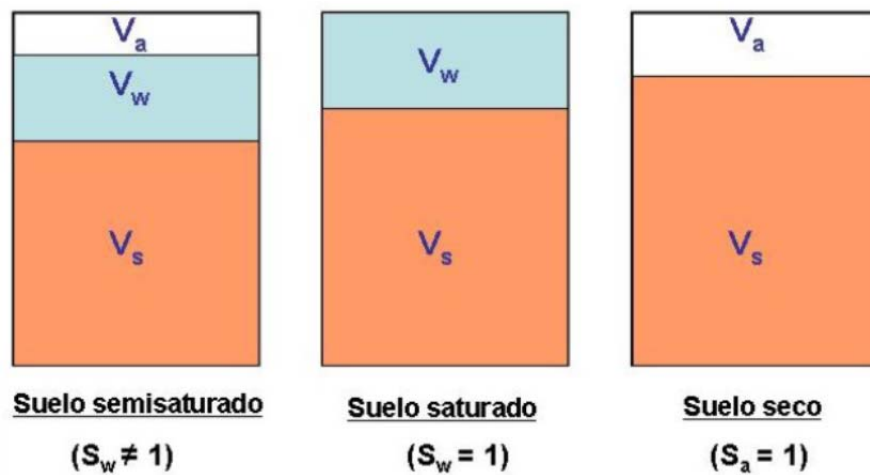


Figura III.8.- Esquema de los distintos estados de saturación del suelo (Adoptado de Montenegro H. & Malagón D., 1997).

### III.7 Conductividad hidráulica.

La facilidad con que el agua fluye a través de un material poroso se le denomina permeabilidad y el parámetro que permite cuantificar este fenómeno se nombra coeficiente de conductividad hidráulica saturada y se encuentra en la literatura con la simbología de la letra  $K_s$ . La conductividad hidráulica también llamado coeficiente de permeabilidad, se refiere a la capacidad de un material poroso, de

transmitir agua y se define como el volumen de agua que se mueve a través de un medio poroso en la unidad de tiempo bajo la unidad de gradiente hidráulico y a través de la unidad de sección transversal perpendicular a la dirección de flujo. Tiene las dimensiones de longitud / tiempo, por ejemplo metros / día.

La conductividad hidráulica depende del tamaño, forma e interconexión de los intersticios, del grado de saturación y de las propiedades físicas del fluido. Si los conductos que comunican los poros son pequeños, el flujo del agua de uno a otro se ve dificultado y la conductividad hidráulica es baja. En suelos finos las fuerzas de superficie específica de los granos determinan principalmente la fuerza de atracción entre las moléculas del fluido y las partículas de suelo, este es uno de los fenómenos que determina la velocidad de humectación de un suelo, la porosidad y la relación de vacíos, que son los principales parámetros con los que se ha relacionado el valor de la permeabilidad en las expresiones existentes para su determinación. Se piensa que la cantidad de vacíos que tenga un suelo determinara en gran parte el valor de su permeabilidad, sin embargo, la tortuosidad de los canales es un elemento importante, ya que un fluido circula con mayor rapidez por un canal uniforme que por uno que presente una alta tortuosidad, a pesar de que su tamaño o vacíos sean los mismos. En un sedimento grueso y bien seleccionado la conexión entre poros es buena y la permeabilidad grande, en la Tabla III.6 se presenta algunos valores de la conductividad hidráulica de acuerdo al tamaño de poro. De tal forma la conductividad hidráulica se ve afectada por diversos factores inherentes tanto al suelo como a características del fluido circulante, los principales son:

- a) Las fuerzas de superficie; interacción del fluido con suelos de distintas superficies específicas
- b) La porosidad.
- c) La tortuosidad de los vacíos del suelo.
- d) La relación de vacíos del suelo.
- e) El bloqueo de algunos poros debido al aire atrapado, la destrucción de los agregados o el depósito de material fino.
- f) La temperatura del fluido y suelo.
- g) La viscosidad del fluido en movimiento.
- h) La estructuración del suelo.
- i) La humedad del suelo.

Las propiedades físicas del agua varían con la temperatura, y la conductividad hidráulica es definida sobre la base de la viscosidad y densidad a una temperatura normalmente de 20° C, la compresibilidad del agua es despreciable

Tabla III.6.- Tamaño de poros y permeabilidad (Adaptada de Lee, 1996).

Material	Tamaño de poro (cm)	Permeabilidad (cm/s)
Arcilla	$< 10^{-4} - 10^{-3}$	$< 10^{-6}$
Limo	$10^{-3} - 10^{-2}$	$10^{-6} - 10^{-4}$
Arena	$10^{-2} - 10^{-1}$	$10^{-4} - 10^{-2}$
Grava	$10^{-1} +$	$10^{-2} - 10^{-1}$

En materiales discontinuos, el coeficiente de conductividad hidráulica no es isotrópico, sino que varía de acuerdo a la orientación de las discontinuidades. La permeabilidad es mayor en la dirección de los planos de depositación o de las discontinuidades que en los planos normales a ellas.

El valor del coeficiente  $K_s$  varía de acuerdo al tipo de roca o suelo, fracturación, espaciamiento, abertura y relleno de las juntas (Figura III.9).

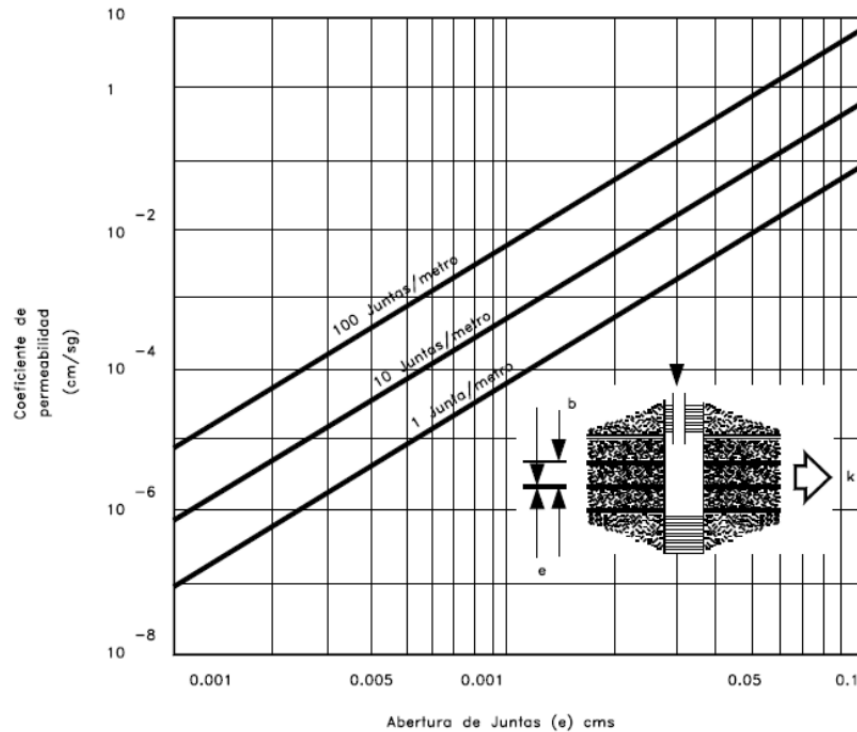


Figura III.9.- Efecto de la abertura y espaciamiento de las juntas en el coeficiente de conductividad hidráulica  $K_s$ . (Hoek y Bray 1977).

La conductividad hidráulica mide una propiedad en términos macroscópicos, como es el flujo de un fluido a través de un medio poroso, que no sólo está condicionado por las características del medio (porosidad, geometría de los granos, etc.), sino también por ciertas características propias del fluido mismo como son su peso específico y su viscosidad. Es esta la razón por la cual se ha desarrollado una expresión para el coeficiente de permeabilidad  $K$  que toma en cuenta esos factores.

La expresión para dicho coeficiente es:

$$K = k \left( \frac{\rho g}{\mu} \right) = k \left( \frac{\gamma}{\mu} \right)$$

Ec.III.19

En donde:

$k$  = Es la llamada permeabilidad intrínseca o geométrica y es un parámetro característico del medio ( $m^2$ ).

$\rho$  = Densidad del fluido ( $kg/m^3$ ).

$g$  = Aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ )

, $\gamma$  = Es el peso específico del fluido ( $\text{kg}_f/\text{m}^3$ ).

, $\mu$  = Es la viscosidad dinámica del mismo ( $\text{Pascal m} = \text{kg}/\text{m}^2 \text{ s}$ )

Si se considera la viscosidad cinemática ( $\nu$ ) del fluido, se tiene que:

$$\nu = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)$$

Ec.III.20

Donde:

, $\nu$  = Viscosidad cinemática ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

En donde  $\rho$  es la densidad del fluido y como  $\gamma = \rho g$ , entonces:

$$\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) = \left(\frac{\rho g}{\nu \rho}\right) = \left(\frac{g}{\nu}\right)$$

Ec.III.21

Por consiguiente el coeficiente de permeabilidad se podrá expresar también en términos de la viscosidad cinemática bajo la forma:

$$K = k \left(\frac{g}{\nu}\right)$$

Ec.III.22

La permeabilidad intrínseca ( $k$ ), es un parámetro que depende de las características del medio poroso, en particular del tamaño, forma y disposición de los granos. En forma experimental se han establecido toda una serie de fórmulas para  $k$ , basadas todas ellas en la porosidad y en el diámetro eficaz de las partículas. Una de las más conocidas es la fórmula de Hazen que establece:

$$k = C d_{10}^2$$

Ec.III.23

En la cual  $C$  es un coeficiente sin dimensiones llamado factor de forma y que tiene en cuenta los efectos de la estratificación, la disposición de los granos, la distribución granulométrica y la porosidad.

Como regla general la permeabilidad debe ser determinada mediante ensayos de laboratorio y no a partir de las propiedades tales como el tamaño de los granos. En general el tipo de suelo y el tamaño de grano pueden usarse sin embargo, como indicadores del rango de permeabilidades a esperarse.

Si se toma  $K$  en ( $\text{cm}/\text{s}$ ) y  $d_{10}$  en ( $\text{cm}$ ), se ha establecido que el coeficiente  $C$  puede tomar los siguientes valores (Castany, 1982):

Arena muy fina mal graduada	40 – 80
Arena fina	40 – 80
Arena media bien graduada	80 – 120
Grava arenosa pobremente graduada	80 – 120
Grava arenosa limpia bien graduada	120 – 150

La expresión de Hazen es una ecuación empírica hallada a partir de estudios hechos para el diseño de filtros de arena para plantas de tratamiento (Heath, 1968).

En general  $C$  varía entre 90 y 120.

Para arenas uniformes  $C = 120$

Es usual tomar  $C = 100$  y en este caso:

$$k = 100 d_{10}^2 \quad \text{Ec.III.24}$$

Esta última expresión tiene dos límites, en términos del coeficiente de uniformidad,  $C_u$ , y el  $d_{10}$ , así:

$$C_u < 5; \quad 0.01 \text{ mm} < d_{10} < 0.3 \text{ mm}$$

Las unidades de  $k$  se pueden determinar de la siguiente manera, a partir de la ley de Darcy:

$$Q = K A i \quad \text{Ec.III.25}$$

Como  $K = k \gamma / \mu$ , entonces:

$$Q = k \left( \frac{\gamma}{\mu} \right) A i \quad \text{Ec.III.26}$$

Esto implicaría que:

$$[k] = \left( \frac{[Q] [\mu]}{[A] [\gamma]} \right) = \left( \frac{[L^3 T^{-1}] [M L^{-1} T^{-1}]}{[L^2] [M L^{-2} T^{-2}]} \right) = [L^2] \quad \text{Ec.III.27}$$

No obstante lo anterior, se han definido otras unidades para  $k$  que son ampliamente utilizadas. Dichas unidades son el Darcy y el milidarcy. El Darcy corresponde a una permeabilidad de un medio que deja pasar  $1 \text{ cm}^3/\text{s}$  de agua a través de una sección de  $1 \text{ cm}^2$  de área cuando la pérdida de carga es de  $1 \text{ atm/cm}$  y con el agua a una temperatura de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . En la Tabla III.7 se presentan valores de  $K$  y  $k$  para diferentes porosidades.

Tabla III.7.- Propiedades hidráulicas de suelos típicos (Adoptado de Fetter C., 1999).

Suelo	$k \text{ (cm}^2\text{)}$	$K \text{ (cm s}^{-1}\text{)}$	$n$
Arcilla	$4 \times 10^{-10}$	$3.4 \times 10^{-5}$	0.45
Barro aluvional	$4 \times 10^{-9}$	$3.4 \times 10^{-4}$	0.35
Barro arenoso	$4 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$	0.25
Arena	$1 \times 10^{-7}$	$8.6 \times 10^{-3}$	0.20

La ecuación de Darcy puede extenderse a tres dimensiones. Orientando cuidadosamente los ejes, de manera tal que éstos sean paralelos a las direcciones preferidas del flujo (normalmente dado por la estratificación del substrato geológico), el flujo en tres direcciones ortogonales viene dado por:

$$q_x = -K_x \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right); \quad q_y = -K_y \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right); \quad q_z = -K_z \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

Ec.III.28

Donde  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_z$  son las conductividades hidráulicas correspondientes. Un medio poroso se denomina isótropo si  $K_x = K_y = K_z$ . Si las conductividades hidráulicas no varían de punto a punto del espacio, entonces se dice que el medio es homogéneo. En general, en los suelos pueden darse cuatro combinaciones de estas dos propiedades, y en cada caso se tienen diferentes requerimientos para describir el flujo (Figura III.10):

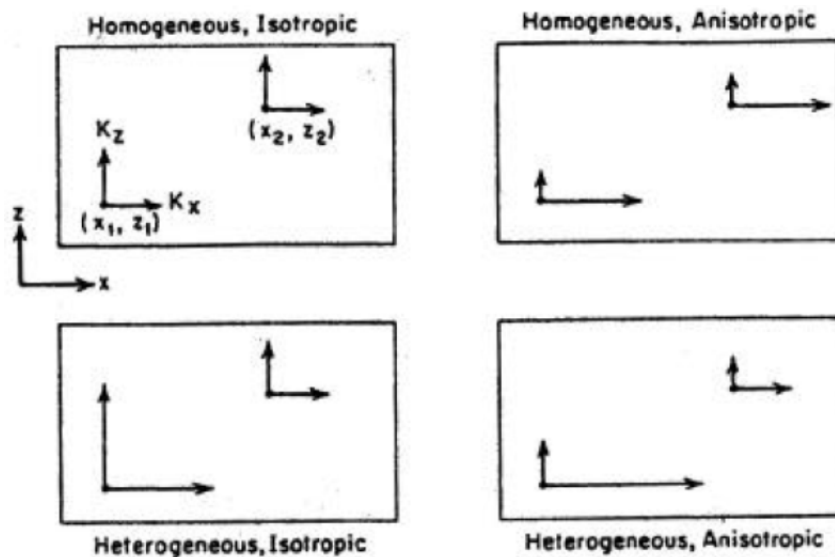


Figura III.10.- Cuatro posibles combinaciones de heterogeneidad y anisotropía (Benítez A., 1972).

Caso 1: El suelo es homogéneo e isótropo. Un solo valor de la constante  $K_s$  es suficiente.

Caso 2: El suelo es homogéneo y anisótropo. Tres diferentes conductividades constantes ( $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ) son necesarias.

Caso 3: El suelo es no homogéneo e isótropo. Una sola función de punto, por ejemplo  $K_x(x,y,z)$ , es suficiente.

Caso 4: El suelo es no homogéneo y anisótropo: Se requieren seis funciones de punto.

En los casos anisótropos, el flujo no es perpendicular a las líneas equipotenciales (líneas de  $h = \text{cte.}$ ). Sin embargo, si el medio es homogéneo (caso 2), es posible hacer una transformación de escala en los ejes cartesianos y convertir el problema en isótropo con un permeabilidad equivalente  $K_0 = \sqrt{K_x K_y K_z}$ .



La principal causa de anisotropía a pequeña escala es la orientación de los minerales arcillosos en rocas sedimentarias y sedimentos no consolidados. Muestras de arcillas y pizarras rara vez poseen una anisotropía (relación entre conductividades horizontal y vertical) mayores que 10, y suele ser generalmente menor que 3.

En escalas mayores, puede demostrarse que hay una relación entre heterogeneidad de estratificación y anisotropía. En efecto, considere la formación estratificada mostrada en la Figura III.11, donde cada estrato es homogéneo e isótropo con conductividades hidráulicas  $K_1, K_2, \dots, K_n$ . Mostraremos que el sistema como un todo actúa como un simple estrato homogéneo y anisótropo.

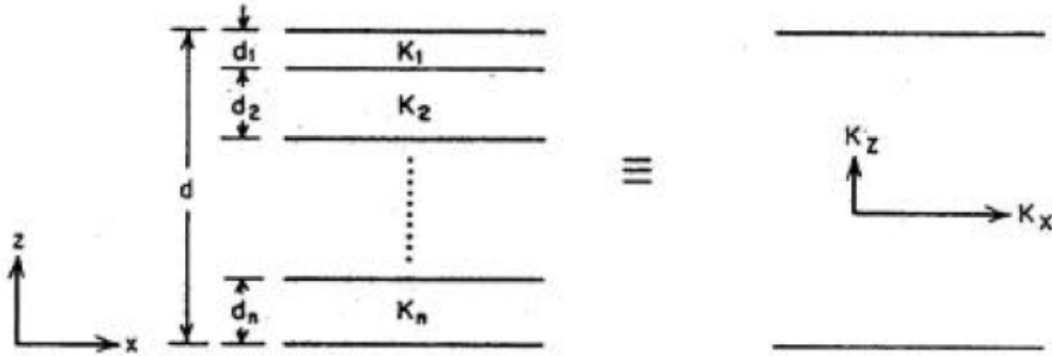


Figura III.11.- Relación entre heterogeneidad y anisotropía, con estratificación horizontal (Benítez A., 1972).

En primer lugar, consideremos el flujo en la dirección perpendicular a la estratificación. La descarga específica  $q_z$  que entra al sistema debe ser la misma que sale (debe ser constante a lo largo de todo el conjunto). Sea  $\Delta h_1$  la pérdida de carga hidráulica a través del primer estrato,  $\Delta h_2$  a través del segundo estrato, etc. La pérdida total de carga es entonces:

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_n \quad \text{Ec.III.29}$$

Y de la ley de Darcy:

$$q_z = \left( \frac{K_1 \Delta h_1}{d_1} \right) = \left( \frac{K_2 \Delta h_2}{d_2} \right) = \dots = \left( \frac{K_n \Delta h_n}{d_n} \right) = \left( \frac{K_z \Delta h}{d} \right) \quad \text{Ec.III.30}$$

Donde  $K_z$  es una conductividad hidráulica vertical equivalente para toda la estratificación. Resolviendo para  $K_z$  y usando la ecuación III.29, tenemos:

$$K_z = \left( \frac{K_z d}{\Delta h} \right) = \left( \frac{q_z d}{\frac{q_z d_1}{K_1} + \frac{q_z d_2}{K_2} + \dots + \frac{q_z d_n}{K_n}} \right) \quad \text{Ec.III.31}$$

Lo que conduce a:

$$K_z = \left( \frac{d}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{d_i}{K_i} \right)} \right)$$

Ec.III.32

Ahora consideremos el flujo en la dirección paralela a la estratificación. Sea  $\Delta h$  la pérdida de carga hidráulica sobre una distancia horizontal  $L$ . La descarga  $Q$  a través de un ancho unitario del sistema es la suma de las descargas a través de cada estrato. La descarga específica es  $q_x = Q/dy$ , entonces, viene dada por:

$$q_x = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n q_{x,i} d_i = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n K_i \left( \frac{\Delta h}{L} \right) d_i = K_x \left( \frac{\Delta h}{L} \right)$$

Ec.III.33

Donde  $K_x$  es una conductividad hidráulica horizontal equivalente, dada por:

$$K_x = \sum_{i=1}^n \left( \frac{K_i d_i}{d} \right)$$

Ec.III.34

Las ecuaciones III.32 y III.34 dan los valores de  $K_x$  y  $K_z$  para una formación hidráulica homogénea y anisótropa que es hidráulicamente equivalente al sistema estratificado constituido por formaciones geológicas homogéneas e isotropas. Asimismo, es posible demostrar que  $K_x > K_z$  para todos los posibles valores de  $K_i$ . Por ejemplo, consideremos un conjunto de dobles cíclicos  $K_1, K_2, K_1, K_2, \dots$ , con  $d_1, d_2, d_1, d_2$  donde  $K_1 = 10^4$  y  $K_2 = 10^2$ , entonces  $K_x / K_z = 25$ . Para  $K_1 = 10^4$  y  $K_2 = 1$ , entonces  $K_x / K_z = 2500$ . En el campo, no es poco común tener para una heterogeneidad estratificada valores de anisotropía regional del orden de  $K_x / K_z = 100$  o aún mayores. En los casos de rocas fracturadas es posible tener  $K_z > K_x$ , debido al comportamiento anisotrópico de las variaciones de apertura y espaciado en las juntas.

En el estudio del movimiento del agua en el suelo, la determinación de la conductividad hidráulica y la capacidad de infiltración es muy importante, existen varios procedimientos para la determinación de la permeabilidad de los suelos, los podemos dividir en dos grupos: los directos, se basan en pruebas cuyo objetivo fundamental es la medición del coeficiente de permeabilidad, y otros indirectos, ya que proporcionan el valor del coeficiente de permeabilidad en forma secundaria, es decir, por medio de pruebas y técnicas diseñadas para otros fines. Los métodos pueden ordenarse de la siguiente forma:

- a) Métodos de laboratorio  $K_s$  (Directo).
  - ❖ Permeámetro de carga constante
  - ❖ Permeámetro de carga variable
- b) Métodos de campo  $K_{fs}$  (Directo).
  - ❖ Con nivel freático presente

- ❖ Sin nivel freático presente
  - Doble anillo
  - Pozo de nivel variable o Porchet
  - Pozo de nivel constante
  - Tensioinfiltrómetro
  - Otros
- c) Métodos indirectos o de correlaciones  $K_g$ .
  - ❖ A partir de la clase textural
  - ❖ A partir de la granulometría
  - ❖ Cálculo a partir de la prueba de consolidación.
  - ❖ Cálculo con la prueba horizontal de capilaridad.

Se debe recordar que para diferenciar los métodos, a la conductividad hidráulica saturada obtenida en el laboratorio se le denominará  $K_s$ , a la obtenida en el terreno o campo se denominará  $K_{fs}$  y a la obtenida a través del método de correlaciones se denominará  $K_g$ .

La diferencia principal entre los métodos de laboratorio y de campo, radica en que en el laboratorio la muestra se satura completamente, en cambio en el campo, esto no es posible y sólo se logra en una pequeña región adyacente a la fuente de infiltración. Además en el campo el agua infiltrada va desplazando el aire que se encuentra entre los poros del suelo provocando una resistencia adicional al flujo de agua (Gupta et al., 1993), mientras que en el laboratorio la muestra se satura desde abajo hacia arriba para eliminar el aire atrapado. Es por ello que varios autores (Gupta et al., 1993; Reynolds y Elrick, 1987) postulan que para utilizar el valor de  $K_s$  en el diseño de obras de infiltración se debe efectuar una corrección de ésta, y utilizar  $K_{fs} = K_s / 2$ .

El uso del permeámetro de carga constante ofrece el método más simple para determinar el coeficiente de permeabilidad de un suelo y se recomienda ser utilizado en suelos poco permeables, como en limo o arena medianamente cementada.

El permeámetro de carga variable puede ser usado para determinar el coeficiente de permeabilidad en suelos finos y gruesos, el principio básico es el mismo en ambos métodos, con la diferencia de la aplicación de las fórmulas para obtener los resultados, ya que en el permeámetro de carga variable se utiliza un volumen determinado de líquido, haciendo intervenir la diferencia de alturas del tubo alimentador.

Las pruebas directas en campo consisten básicamente en la berrenación de pozos sobre el terreno que se desea conocer su permeabilidad; este tipo de pruebas son muy usadas en la hidráulica de captaciones, proporcionando un valor de la permeabilidad media del estrato en estudio. Los métodos existentes para este tipo de pruebas fundamentan su teoría en la observación de los abatimientos del líquido en el pozo en un tiempo determinado, el abatimiento puede ser por bombeo en estratos abajo del nivel freático o por infiltración del líquido en suelos no saturados.

La Tabla III.8 muestra las normas ASTM para pruebas de permeabilidad en campo y en laboratorio.

Tabla III.8.- Métodos estandarizados por ASTM para prueba de permeabilidad en suelos (SCT, 2008).

Clave	Libro	Nombre de la prueba
D4511	04.08	Conductividad hidráulica de turbas saturadas mediante la prueba de carga constante.
D3385	04.08	Tasa de infiltración de suelos (en campo) utilizando la prueba del infiltrómetro de doble anillo.
D2434	04.08	Permeabilidad de suelos granulares mediante la prueba de carga constante.
D5126	04.09	Comparación de métodos de campo para determinar la conductividad hidráulica en la zona vadosa.
D5084	04.09	Conductividad hidráulica de materiales porosos saturados utilizando la prueba del permeámetro de pared flexible

### III.7.1 Permeámetro de Carga Constante.

El permeámetro de carga constante se utiliza en el caso de sedimentos no cohesivos tales como arena y rocas. Un esquema de un permeámetro de carga constante se presenta en la Figura III.12. En este caso una cámara de carga provee una alimentación de agua a una carga constante, con lo que el agua se mueve a través de la muestra hasta alcanzar un régimen de equilibrio o estacionario. Para utilizar este dispositivo se genera un flujo a través de la muestra de suelo y luego que se alcanza una situación de equilibrio se mide el caudal de salida desde el permeámetro, así como la diferencia de carga entre la cámara de nivel constante y el nivel de agua en la salida.

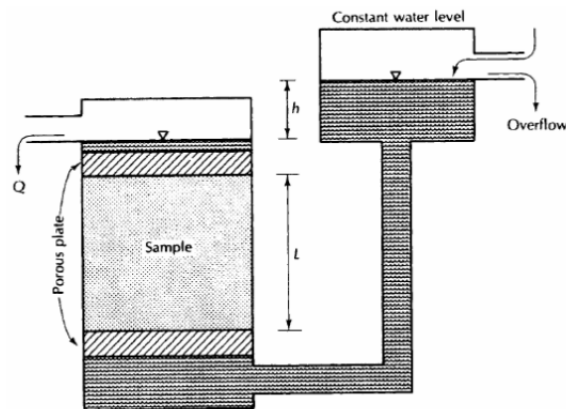


Figura III.12.- Permeámetro de carga constante (Espinoza C., 2004).

Para comenzar el análisis de este permeámetro podemos utilizar la ecuación III.35:

$$Q = K A \left( \frac{h_A - h_B}{L} \right)$$

Ec.III.35

En la cual  $Q$  es el caudal de salida desde el permeámetro,  $h_A$  es el nivel de agua en la cámara de carga,  $h_B$  es el nivel de agua a la salida del permeámetro,  $L$  es la longitud de la muestra y  $A$  es el área perpendicular al escurrimiento. Si multiplicamos ambos lados de la expresión por un tiempo  $t$  durante el cual se realiza el análisis obtenemos:

$$Q t = K A t \left( \frac{h_A - h_B}{L} \right)$$

Ec.III.36

El producto  $Q \cdot t$  en el lado izquierdo de esta última ecuación representa el volumen aforado durante un tiempo  $t$  ( $V$ ), mientras que la diferencia ( $h_A - h_B$ ) es la pérdida de carga total en el permeámetro ( $\Delta h$ ). Si sustituimos estos dos valores en la ecuación III.36 y reordenamos la expresión final obtenemos:

$$K = \left( \frac{V L}{A t \Delta h} \right)$$

Ec.III.37

Donde  $V$  es el volumen de agua descargado durante el tiempo  $t$  ( $L^3$ ),  $L$  es la longitud de la muestra ( $L$ ),  $A$  es el área perpendicular al escurrimiento ( $L^2$ ),  $t$  es el tiempo ( $T$ ),  $\Delta h$  es la pérdida de carga a través del permeámetro, y  $K$  es la conductividad hidráulica de la muestra ( $L/T$ ).

Para la correcta interpretación de los resultados de una prueba en un permeámetro de carga constante se debe utilizar gradientes hidráulicos similares a aquellos observados en terreno. Además, la pérdida de carga total en el permeámetro,  $\Delta h$ , no debe ser mayor a un 50% de la longitud total de la muestra. Esta última condición asegura que el número de Reynolds no supere los límites de validez de la ley de Darcy.

### III.7.2 Permeámetro de Carga Variable.

En el caso de sedimentos cohesivos y con baja permeabilidad se utiliza un permeámetro de carga variable (Figura III.13). En este caso la cámara de carga de nivel constante se reemplaza por un tubo vertical en el cual se produce el descenso del nivel de agua a medida que ésta atraviesa la muestra de suelo. Para la determinación de la conductividad hidráulica se anota el nivel inicial de agua en el tubo,  $h_0$ . Luego de un período de tiempo  $t$  se mide la posición del agua en el tubo vertical,  $h$ . El diámetro interior del tubo vertical,  $d_t$ , la longitud de la muestra,  $L$ , así como su diámetro,  $d_c$ , son también conocidos.

La tasa a la cual el agua desciende por el tubo vertical viene dada por la siguiente expresión:

$$v_m = - \left( \frac{dh}{dt} \right)$$

Ec.III.38

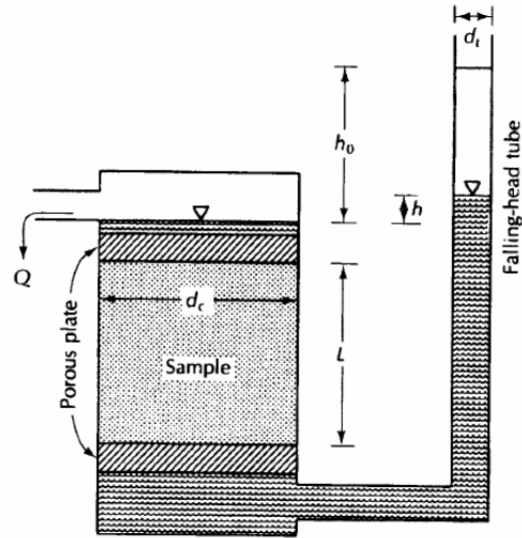


Figura III.13.- Permeámetro de carga variable (Espinoza C., 2004).

Si multiplicamos por el área del tubo vertical,  $A_t$ , obtenemos el caudal pasante a través del tubo:

$$q_m = v_m A_t = -A_t \left( \frac{dh}{dt} \right) \quad \text{Ec.III.39}$$

Si  $A_c$  es el área de la muestra de suelo, podemos utilizar la ley de Darcy para calcular el caudal que drena desde el permeámetro en un tiempo cualquiera:

$$q_{out} = \left( \frac{K A_c h}{L} \right) \quad \text{Ec.III.40}$$

Donde  $h$  es la carga hidráulica al tiempo  $t$ .

Si aplicamos el principio de continuidad podemos utilizar las expresiones dadas en III.39 y III.40 para escribir:

$$-A_t \left( \frac{dh}{dt} \right) = \left( \frac{K A_c h}{L} \right) \quad \text{Ec.III.41}$$

Esta ecuación puede ser reordenada para aislar la permeabilidad  $K$ :

$$K = - \left( \frac{A_t L}{A_c h} \right) \left( \frac{dh}{dt} \right) \quad \text{Ec.III.42}$$

Si integramos esta ecuación desde  $t = 0$  a  $t = t$  con la condición inicial  $h = h_0$  en  $t = 0$  obtenemos la siguiente expresión para la conductividad hidráulica a partir de un permeámetro de carga variable:

$$K = \left( \frac{A_t L}{A_c t} \right) \ln \left( \frac{h_0}{h} \right)$$

Ec.III.43

Si utilizamos los diámetros del tubo vertical y de la muestra obtenemos:

$$K = \left( \frac{d_t^2 L}{d_c^2 t} \right) \ln \left( \frac{h_0}{h} \right)$$

Ec.III.44

Al usar cualquier tipo de permeámetro se debe verificar que la muestra esté completamente saturada y que no existan burbujas de aire dentro de ella. De existir burbujas de aire en la muestra el valor de la conductividad hidráulica disminuye debido a la reducción en el área disponible para el escurrimiento de agua.

Para prevenir flujos preferenciales a través de la zona de contacto entre el suelo y la pared, la muestra debe estar firmemente presionada contra el borde de la cámara. Si estos flujos preferenciales no son evitados este dispositivo (permeámetro de carga variable) genera valores de la conductividad hidráulica bastante mayores que los existentes en el sistema real.

### III.7.3 Estimación de $K_g$ a partir de la textura del suelo.

La textura de un suelo, se determina en laboratorio efectuando una clasificación granulométrica, mediante tamices de distintas mallas dispuestos sucesivamente en un cilindro vertical, de forma que cada uno retenga las partículas de diámetro superior al de la malla, y deje pasar el resto de la muestra. Por lo general, los resultados de este análisis se expresan a través de una curva granulométrica. De ellas se definen algunos parámetros importantes:

$d_{10}$  = Se define como diámetro eficaz y es tal que el 10% del peso de la muestra, tiene un diámetro menor.

$C_u$  = Coeficiente de uniformidad:  $C_u = d_{60} / d_{10}$ , la granulometría se dice que es uniforme cuando  $C_u < 2$ .

Con los resultados obtenidos a partir de la curva granulométrica, los suelos se pueden agrupar en varias texturas (Tabla III.9).

Tabla III.9.- Clasificación de materiales por tamaños según USDA (Fetter C., 1999).

Denominación	Diámetro de los granos (mm)
Grava gruesa	>20
Grava mediana	20 – 10
Grava fina	10 – 2
<b>Continúa</b>	

Denominación	Diámetro de los granos (mm)
Areana gruesa	2 – 0.5
Arena mediana	0.5 – 0.25
Arena fina	0.25 – 0.10
Arena muy fina	0.10 – 0.05
Limo	0.05 – 0.002
Arcilla	< 0.002

También se pueden encontrar en la literatura tablas en donde se relaciona la textura del suelo con varias de sus propiedades. En la Tabla III.10 se presenta además de la conductividad hidráulica saturada, otras propiedades útiles para caracterizar un suelo como porosidad, contenido de humedad residual, porosidad efectiva y conductividad hidráulica saturada.

Tabla III.10.- Valores típicos de algunas propiedades de los suelos (Rawls et al., 1993).

Textura	Tamaño de la muestra	Porosidad ( $\eta$ )	Contenido de humedad residual ( $\theta_r$ )	Porosidad efectiva ( $\eta_e$ )	Conductividad hidráulica saturada ( $K_s$ )
		cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> *	cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup>	m/d
Arena	762	0.437 (.374-.500)	0.02 (.001-.039)	0.417 (.354-.480)	5.04
Arena franca	338	0.437 (.368-.506)	0.035 (.003-.067)	0.401 (.329-.473)	1.47
Franco arenoso	666	0.453 (.351-.555)	0.041 (.024-.106)	0.412 (.283-.541)	0.62
Franco	383	0.463 (.375-.551)	0.027 (.020-.074)	0.434 (.334-.534)	0.32
Franco limoso	1206	0.501 (.420-.582)	0.015 (.028-.058)	0.486 (.394-.578)	0.16
Franco areno arcilloso	498	0.398 (.332-.464)	0.068 (.001-.137)	0.33 (.235-.425)	1.03
Franco arcilloso	366	0.464 (.409-.519)	0.075 (.024-.174)	0.39 (.279-.501)	0.06
Franco limo arcilloso	689	0.471 (.418-.524)	0.04 (.038-.118)	0.432 (.347-.517)	0.04
Arcilla arenosa	45	0.43 (.370-.490)	0.109 (.013-.205)	0.321 (.201-.435)	0.03
Arcilla limosa	127	0.479 (.425-.533)	0.56 (.024-.136)	0.423 (.334-.512)	0.02
Arcilla	291	0.475 (.427-.523)	0.09 (.015-.195)	0.385 (.269-.501)	0.01

\*La primera línea corresponde al valor promedio y la segunda es una desviación estándar alrededor de la media  
FUENTE: Rawls et al. (1993)



Experimentalmente se han establecido fórmulas que relacionan la granulometría del suelo con la conductividad hidráulica saturada de éste. Algunas fórmulas presentadas por Custodio (1976) son las siguientes:

a) Fórmula de Koseny.

$$K_g = 10^5 \left( \frac{C}{S_e^2} \right) \left( \frac{n^3}{(1-n)^2} \right) \left[ \frac{cm}{s} \right]$$

Ec.III.45

Donde  $n$  es la porosidad total y  $S_e$  es la superficie específica. Pero  $C / S_e^2$  se puede expresar como  $A * d_{10}^2$  siendo  $A$  un valor que varía entre 1/150 y 1/175, normalmente alrededor de 1/200, para  $d_{10}$  expresado en (cm).

b) Fórmula de Terzaghi.

$$K_g = \lambda \left( \frac{n - 0.13}{\sqrt[3]{1-n}} \right)^2 d_{10}^2 \left[ \frac{cm}{s} \right]$$

Ec.III.46

Donde  $d_{10}$  se debe expresar en (cm) y  $\lambda = 800$  para partículas redondeadas y 460 para partículas irregulares de superficie áspera.

c) Fórmula de Hazen.

$$K_g = C d_{10}^2 \left[ \frac{cm}{s} \right]$$

Ec.III.47

Donde el valor de  $C$  es 45.8 para arenas arcillosas, 142 para arenas puras, pero es frecuente usar  $C$  igual a 100, siendo el margen de variabilidad más usual entre 90 y 120, para  $d_{10}$  expresado en cm.

d) Fórmula de Slichter.

$$K_g = C d_{10}^2 \left[ \frac{cm}{s} \right]$$

Ec.III.48

Los valores de coeficiente de  $C$  de la fórmula de Slichter, se presentan en la Figura III.14 en función de la porosidad total del suelo y  $d_{10}$  se expresa en (cm).

e) Método de Shepperd.

En otros estudios (Shepperd, 1989) se demostró que la ecuación III.47 puede ser escrita en forma más general como:

$$K = C (d_{50})^j$$

Ec.III.49

Donde  $d_{50}$  es el tamaño medio de los sedimentos (cm) y  $j$  es un exponente cuyo valor depende del tipo de textura de los sedimentos. De esta manera, un sedimento redondeado presenta un valor de  $j$  cercano a 2.0, mientras que para sedimentos naturales este exponente es igual a 1.5. La Figura III.15 muestra la relación entre la conductividad hidráulica y el diámetro medio para sedimentos de distinta textura.

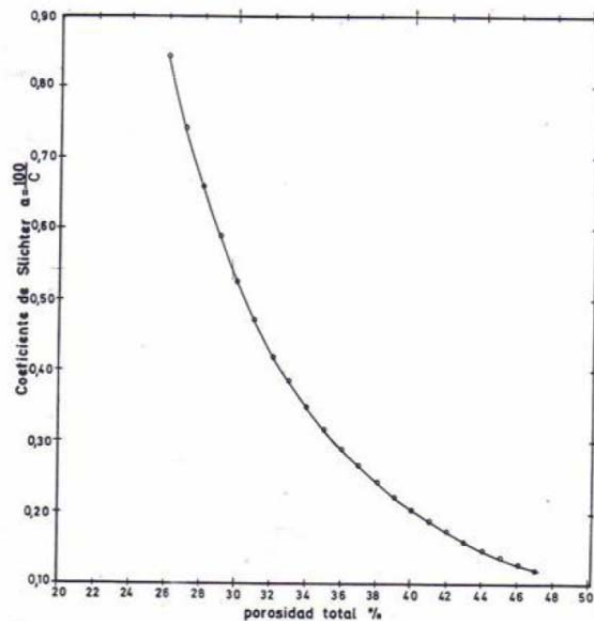


Figura III.14.- Coeficiente C de la fórmula de Slichter (Custodio, 1976).

f) Método de Shepperd

En otros estudios (Shepperd, 1989) se demostró que la ecuación III.47 puede ser escrita en forma más general como:

$$K = C (d_{50})^j$$

Ec.III.50

Donde  $d_{50}$  es el tamaño medio de los sedimentos (cm) y  $j$  es un exponente cuyo valor depende del tipo de textura de los sedimentos. De esta manera, un sedimento redondeado presenta un valor de  $j$  cercano a 2.0, mientras que para sedimentos naturales este exponente es igual a 1.5. La Figura III.15

muestra la relación entre la conductividad hidráulica y el diámetro medio para sedimentos de distinta textura.

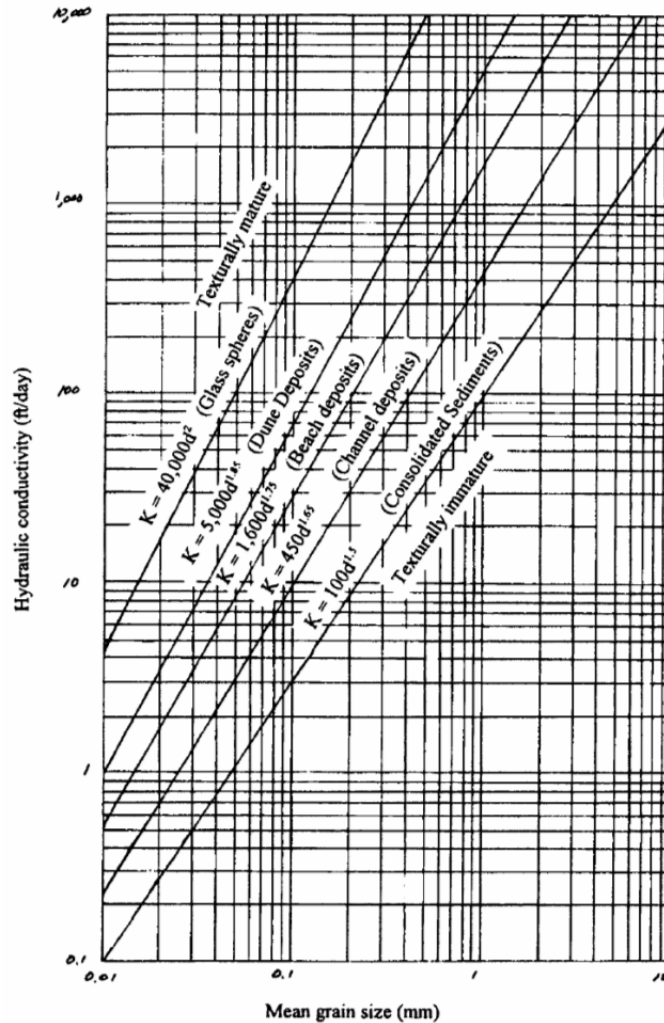


Figura III.15.- Relación entre tamaño medio del grano y la conductividad hidráulica (Benítez A., 1972).

### III.8 Presión de Poro.

Desde el punto de vista mecánico, el agua contenida en los medios porosos interactúa con el esqueleto sólido mediante la presión de poro. En suelos saturados, se distinguen dos fuentes responsables de los cambios en la presión de poro. La primera de ellas está asociada con la generación y la disipación de las presiones de poro, que se deben al reacomodo del esqueleto sólido de los suelos. Bajo las cargas gravitacionales y externas, la deformación por cortante ocurre acompañada por un cambio en volumen (consolidación, Figura III.16). Si los suelos poseen baja permeabilidad, la deformación volumétrica no tiene lugar instantáneamente, por lo cual se genera un exceso en presión de poro. Este fenómeno tiene carácter transitorio, por lo que el exceso en

presión de poro se disipa con el paso del tiempo, tendiendo a desaparecer para dar lugar a la condición del flujo estacionario, siempre y cuando las condiciones de frontera del flujo de agua se mantengan constantes.

Las características esfuerzo – deformación de un suelo dependerá del tipo de suelo, de la forma en que es cargado, donde se ubica en la naturales, etc. Sufriendo en general deformaciones superiores a las que sufre la estructura que transmite la carga por ejemplo. Además estas deformaciones no siempre se producen instantáneamente ante la aplicación de la carga, sino a lo largo del tiempo.

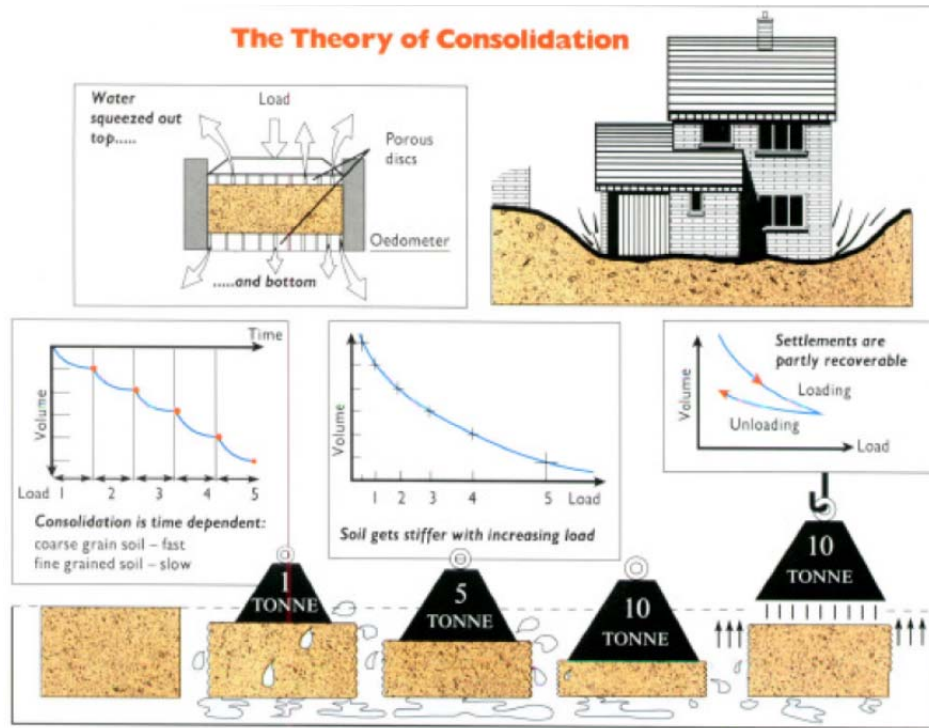


Figura III.16.- Teoría de consolidación (web theory consolidation).

Cuando un depósito se somete a un incremento de esfuerzos totales, como resultado de cargas externas aplicadas, se produce un exceso de presión de poro (producto de la oquedades, intersticios). Puesto que el agua no resiste al corte, la presión de poro (neutra) se disipa mediante un flujo de agua al exterior, cuya velocidad de drenaje depende de la permeabilidad del suelo.

Esta disipación de presión de poro debida al flujo de agua hacia el exterior se denomina consolidación proceso que tiene dos consecuencias:

- ❖ Reducción del volumen de poros, por lo tanto reducción del volumen total (relación de vacíos), produciéndose un asentamiento. Se considera que en el proceso de consolidación unidimensional la posición relativa de las partículas sobre un mismo plano horizontal permanece esencialmente igual, el movimiento de las mismas sólo puede ocurrir verticalmente, reacomodándose en función de las cargas externas.
- ❖ Durante la disipación del exceso de presión poro, la presión efectiva aumenta y se incrementa la resistencia del suelo.

En los suelos granulares la permeabilidad es alta por lo tanto y se disipa rápidamente las presiones neutras. En consecuencia, el asentamiento se termina al final de la construcción. En los suelos finos arcillosos, la permeabilidad es muy baja y se disipa muy lentamente las presiones de poro del agua. En consecuencia puede seguir deformándose varios años después de finalizada la construcción.

Terzaghi realiza una analogía en su modelo mecánico para estudiar el proceso de consolidación unidimensional (Figura III.17).

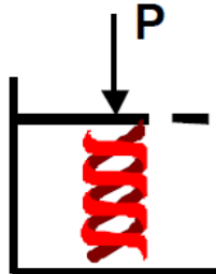


Figura III.17.- Analogía de Terzaghi para la consolidación unidimensional (Espinoza C., 2004).

Donde:  
Cilindro de sección A  
Pistón sin fricción con una perforación  
Fluido incompresible  
Resorte

Se aplica una carga  $P$  con el orificio cerrado  $\Rightarrow$  el resorte no se puede deformar  $\Rightarrow$  la carga  $P$  la soporta completamente el fluido.

Se abre el orificio  $\Rightarrow$  hay un gradiente de presión  $P/A$  que hace que el agua salga al exterior  $\Rightarrow$  por lo cual la carga se transfiere íntegramente al resorte.

La velocidad de transferencia de la carga depende del tamaño del orificio y de la viscosidad del fluido.

En la posición final  $\Rightarrow$  la carga la toma el resorte (Figura III.18).

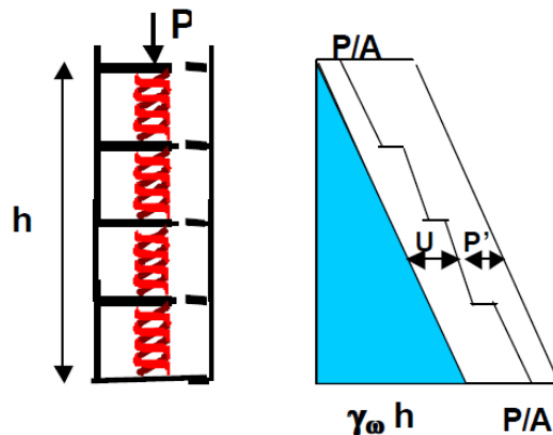


Figura III.18.- Analogía de Terzaghi para la consolidación unidimensional (Espinoza C., 2004).

Donde:

$u$  = Presión en exceso de la hidrostática

$p'$  = Presión en el resorte

En el suelo:

- ❖ Estructura de partículas sólidas => Resorte
- ❖ Agua intersticial => Fluido incompresible
- ❖ Capilares continuos (vacíos) => Orificios (oquedades, intersticios)

El flujo subterráneo representa otra fuente del cambio en la presión de poro en los taludes. Puede ser transitorio o del estado estacionario, teniendo lugar igual en taludes artificiales que naturales. La hidrodinámica del agua subterránea, en combinación con la fluctuación de niveles del espejo de agua, puede observarse durante eventos, tales como lluvias, variación en el nivel de los vasos, o cuando existen manantiales. Durante lluvias intensas, la infiltración de aguas pluviales, a través de las zonas vadosas, satura el talud y eleva el nivel freático (Figura III.19). Este proceso equivale a la aplicación del campo de fuerzas de filtración sobre el esqueleto sólido de los suelos, pudiendo llevar el talud a su condición de seguridad más crítica. Dependiendo de la intensidad y duración de lluvias, se generan diferentes condiciones de estabilidad, de las cuales una de las más estudiadas es aquella en la que todo el talud queda saturado y el flujo sea del tipo estacionario. Como la determinación de esta condición crítica, requiere de pocos parámetros de suelo y flujo de agua, su análisis puede extenderse a grandes extensiones territoriales, produciendo mapas de riesgos geológicos y hidrometeorológicos.

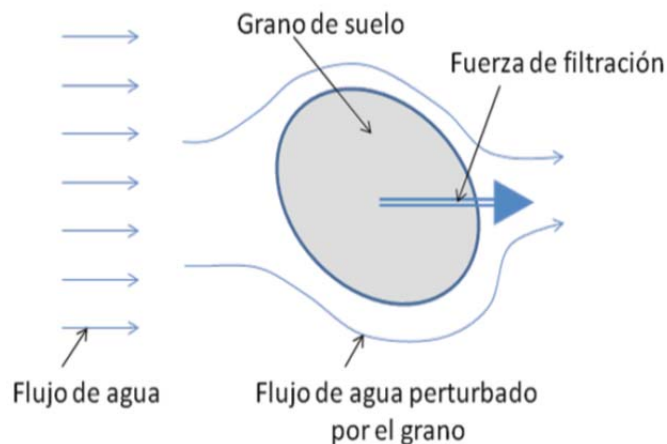


Figura III.19.- Esquema de un grano de suelo sujeto al flujo de agua y fuerzas de filtración (Espinoza C., 2004).

La presión de poros es la presión interna del agua de saturación. El agua subterránea (o agua freática) ejerce presiones de poros sobre las partículas de suelo, disminuye la presión efectiva y la resistencia al cortante. La presión de poros dentro del suelo, depende de la localización de los niveles freáticos, de las presiones internas de los acuíferos y de las características geológicas del sitio. La presión de poros es mayor hacia adentro del talud y menor cerca de la superficie (Figura III.20). Si existen mantos permeables, éstos facilitan el drenaje y se puede disminuir la presión de poros.

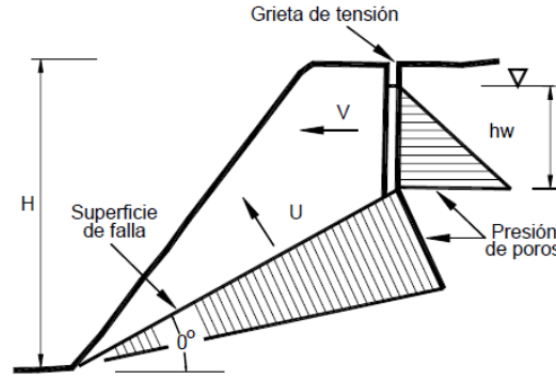


Figura III.20.- Presión de poro sobre una superficie de falla potencial (Lembo Fazio & Ribacchi, 1990).

La presión de poros cambia de acuerdo con las variaciones del régimen de aguas subterráneas. Los incrementos de presión pueden ocurrir rápidamente en el momento de una lluvia, (dependiendo de la intensidad de la lluvia) en función a la tasa de infiltración del área tributaria, etc.

El valor de las presiones de poros se mide utilizando piezómetros. Si no hay flujo de agua, la presión es hidrostática y la medida del piezómetro coincide con el nivel freático pero si existe flujo, las presiones no son hidrostáticas. En este último caso, la presión de poros en cualquier punto dentro de la masa de suelo, puede analizarse por medio de las redes de flujo, las cuales comprenden las líneas de flujo y las líneas de igual presión de poros.

Para el análisis de presiones de poros sobre una superficie de falla, se deben tener en cuenta sus condiciones de drenaje. Cuando existe drenaje, la presión de poros disminuye hacia la superficie del talud pero cuando el drenaje es deficiente, se puede presentar un aumento importante de la presión de poros en el pie del talud (Figura III.21). Debe tenerse en cuenta el efecto que las discontinuidades tienen en los niveles piezométricos determinados por las líneas equipotenciales. Las discontinuidades generan diferencias de conductividad hidráulica (permeabilidad), las cuales controlan el sistema de presiones dentro del talud. La presencia de fracturas permite además, la ocurrencia de presiones muy altas con muy poca infiltración de agua.

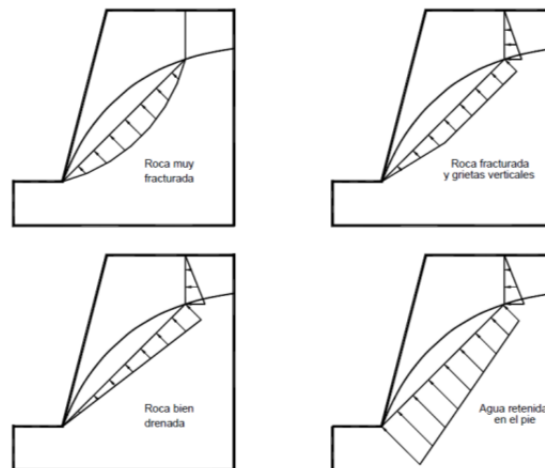


Figura III.21.- Presión de poro sobre una superficie de falla potencial, para diferentes condiciones de drenaje (Lembo Fazio & Ribacchi, 1990).

### III.8.1 Tensiones Capilares.

Las tensiones negativas o de capilaridad en la zona no saturada del perfil del suelo, se manifiestan en un aumento de la resistencia por adherencia de las partículas del suelo. El agua en el suelo no saturado es agua adherida más que agua gravitacional. Esta adherencia aumenta los esfuerzos efectivos. Las tensiones capilares se asimilan a un fenómeno de succión del agua interna (Figura III.22). Al saturarse un suelo, se disminuyen las tensiones capilares o presiones de poro negativas, y en consecuencia, se disminuye la resistencia del suelo.

La resistencia de un suelo puede variar de un máximo al final de la época seca, cuando las tensiones capilares son mayores, a un mínimo durante la época de lluvia, cuando las tensiones capilares disminuyen al saturarse el suelo; y es después de los eventos de lluvia que ocurren comúnmente los deslizamientos, cuando las tensiones capilares disminuyen o desaparecen.

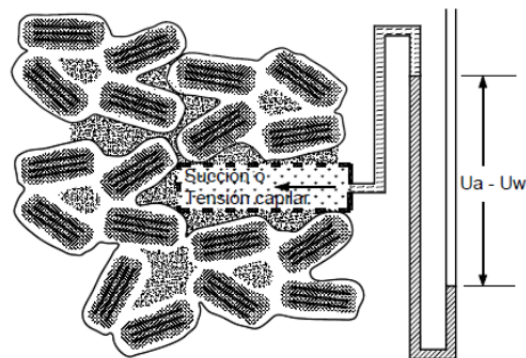


Figura III.22.- En suelos parcialmente saturados se produce una succión en el agua, la cual aumenta los esfuerzos efectivos entre las partículas (Benítez A., 1972).

Las fuerzas resultantes de los efectos de tensión superficial son de tensión en el agua y generan presiones de poros negativas (menores que la presión atmosférica); esa tensión aumenta cuando el grado de saturación disminuye (Figura III.23).

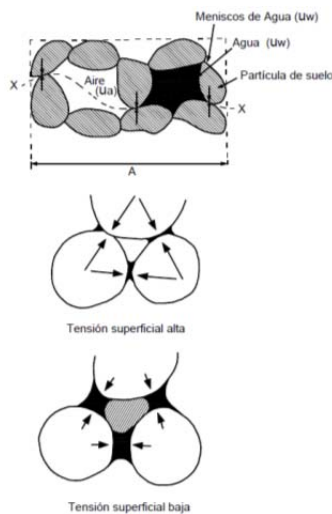


Figura III.23.- Esquema de las tensiones en suelos parcialmente saturados. Al aumentar el porcentaje de saturación, las tensiones capilares tienden a disminuir (Benítez A., 1972).



Al ocurrir un evento lluvioso, los niveles de contenido de agua y porcentaje de saturación, pueden ascender bruscamente al infiltrarse el agua y pasar un frente húmedo. Después de pasar el frente húmedo, las humedades disminuyen nuevamente. Estos ascensos y descensos de humedad modifican los valores de las tensiones negativas (Figura III.24). El aumento del contenido de agua disminuye las tensiones capilares y además, aumenta el peso unitario del suelo, el cual puede producir un aumento de los esfuerzos de cortante (Figura III.25).

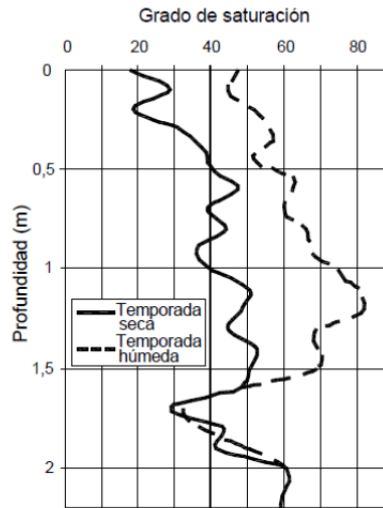


Figura III.24.- Grado de saturación en el perfil de un suelo residual en temporada de estiaje y húmeda (Ahrendt y Zuquette, 2003).

Al iniciarse un proceso de corte se produce una disminución brusca en la tensión capilar que produce una falla rápida progresiva. Esto es típico de los materiales granulares. En los suelos arenos-arcillosos, la tensión capilar se mantiene constante y la falla se hace lenta.

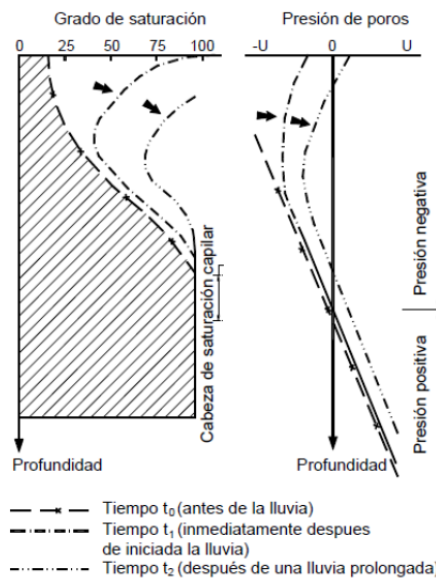


Figura III.25.- Cambio en el grado de saturación y la presión de poros por acción de la lluvia (Geotechnical control office, 1984).

El aumento del contenido de agua disminuye las tensiones capilares y además, aumenta el peso unitario del suelo, el cual puede producir un aumento de los esfuerzos de cortante (Figura III.25). La saturación aumenta a su vez, la presión de poro positiva (Figura III.26).

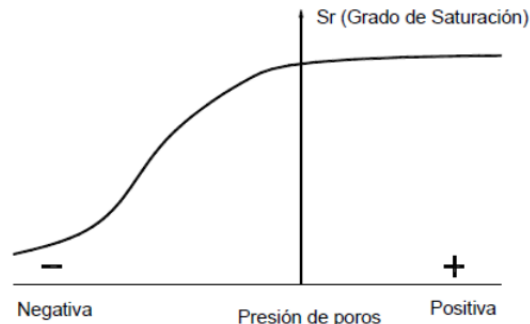


Figura III.26.- Efecto del grado de saturación sobre la presión de poro (Espinoza C., 2004).

Si el suelo se encuentra solamente húmedo, existen dentro del suelo resistencias aparentes debidas a las presiones de poros negativas, las cuales pueden producir un talud estable, pero si se produce saturación por infiltración, desaparecen, produciéndose la falla por disminución de las fuerzas resistentes.

Brand explica que el agua de infiltración en un suelo residual produce una reducción en la tensión capilar en el suelo no saturado, lo cual produce una disminución en la presión efectiva y por ende, en la resistencia al corte. En la mayoría de los casos, no existe nivel freático.

Para el estudio de este fenómeno, se han diseñado ensayos de carga constante, que incrementan la presión de poros desde un valor negativo y se ha encontrado que algunas arcillas fallan, sin necesidad de saturación, a un valor de humedad muy cercano a su límite plástico en ensayos de corte directo con carga constante.

La saturación afecta el componente de cohesión de acuerdo con los criterios actuales de la mecánica de suelos (Morgenstern y Matos, 1975), es decir, que la eliminación de la succión que ocurre a medida que avanza el tiempo de una lluvia, disminuye la cohesión en el volumen del material sujeto a la saturación temporal que produce el deslizamiento.

Este mecanismo explica la aparente contradicción entre la teoría y la práctica, en el sentido de que en la realidad los taludes más altos y verticales generalmente sufren, menos fallas que los taludes de pendiente mediana, debido a que éstos permiten una mayor infiltración del agua de lluvia, disminuyendo la cohesión aparente.

Si tenemos una arcilla que haya soportado, a través de su vida geológica, sobrecargas tales como estratos que luego fueron erosionados, glaciares, estructuras que han sido demolidas, etc. podemos decir que, al presente, se encuentra preconsolidada. Cuando extraemos una muestra de este material, y la protegemos convenientemente de las pérdidas o de los incrementos de humedad, observaremos que una parte importante de las presiones intergranulares a las que fue sometida en su proceso de consolidación, es retenida por efecto de la acción capilar sobre la superficie de la muestra.

Es decir que por acción del fenómeno de capilaridad, actúa sobre las partículas del suelo una tensión superficial que provoca una resistencia adicional al esfuerzo cortante, que se suma a la resistencia friccional y a la que llamaremos cohesión aparente. Este nombre deriva por la circunstancia de que es un valor relativo y no permanente ya que depende del contenido de agua que tenga la muestra de suelo.

Supongamos como ejemplo que intentamos pegar un grano de arena fina con otro grano de arena del mismo tamaño, si los dos granos están secos, de ninguna manera se unirán (Figura III.27). Pero si hay una pequeña capa de agua sobre los mismos, es posible que se unan de tal manera que la tensión superficial que desarrolla el menisco que se forma por el acercamiento de los granos, genere el esfuerzo suficiente para soportar el peso de la partícula y que el mismo se pegue al otro.

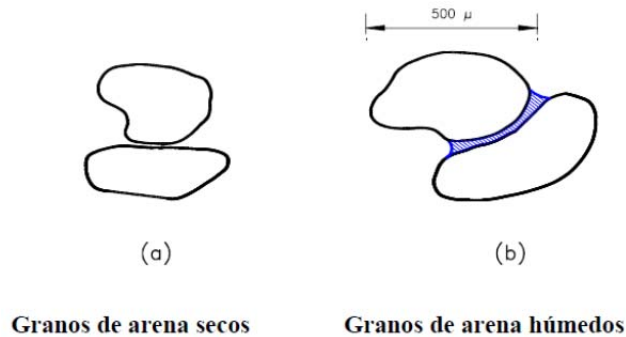


Figura III.27.- Efecto de la tensión superficial sobre granos de arena fina (Vélez M., 1999).

Esta unión entre granos en una arena fina con tamaño de granos del orden de los  $0,5 \text{ mm}$  ( $500 \mu$ ) es muy débil, ya que los esfuerzos de gravedad (peso del grano) son muy importantes comparándolos con los esfuerzos de atracción que genera la tensión superficial.

Este fenómeno sin embargo es de potencial importancia entre las partículas de arcillas que son 500 veces más pequeñas que el grano de arena fina de nuestro ejemplo anterior ( $< 2 \mu$ ) y donde la forma de las mismas dejan de ser redondeadas para pasar a ser laminares (Figura III.28).

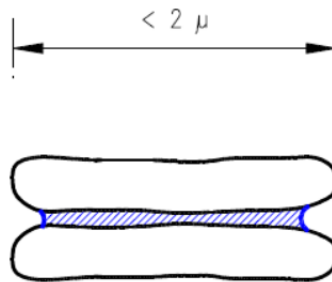


Figura III.28.- Efecto de la tensión superficial sobre granos de arcilla (Vélez M., 1999).

Este fenómeno de atracción entre partículas en los suelos finos, (limos y arcillas) se conoce con el nombre de cohesión aparente.

En muchas arcillas esta atracción entre partículas como consecuencia de la tensión superficial, se pierde rápidamente si la muestra se sumerge en agua, ya que la muestra absorbe agua, los meniscos

umentan de radio con lo cual los esfuerzos que mantienen unidas a las partículas disminuyen, las partículas se separan y la muestra se desgrana totalmente o en trozos perdiendo de esta forma la cohesión aparente debida a la tensión superficial.

En otros tipos de arcilla esta pérdida de cohesión no se manifiesta cuando son sumergidas en agua. Evidentemente en estos casos las partículas son retenidas por fuerzas de otro tipo, que no alcanzan a ser destruidas, por la inmersión en agua. Estas fuerzas pueden ser de carácter electrostático, que son generadas por la película de agua absorbida que se forma sobre cada partícula. O derivar de agentes cementantes naturales o no, como es el caso del cemento Portland cuando lo mezclamos con suelos para hacer suelo-cemento.

A esta forma casi permanente de resistencia al corte, o resistencia al desplazamiento relativo de partículas adyacentes motivada por esta fuerza de origen interno se la denomina cohesión verdadera (las pizarras por ejemplo son arcillas con una elevada cohesión verdadera).

Tanto la cohesión aparente como la verdadera reciben el nombre general de cohesión y se identifica en la mecánica de suelos con la letra  $c$ .

### III.9 Infiltración.

La lluvia ha sido asociada por diversos autores a la falla de taludes como un detonante, porque se ha evidenciado la degradación de algunas propiedades mecánicas y físicas de materiales como suelos y rocas que conforman los taludes. El aumento de humedad en el suelo, inclusive en pequeñas cantidades, puede inducir cambios drásticos en su comportamiento mecánico como la resistencia, deformabilidad, permeabilidad y durabilidad, dependiendo de sus propiedades como textura, porosidad, granulometría, estructura, contenido de agua, densidad, etc.

Al igual que la infiltración, el estudio de las propiedades del suelo sigue evolucionando y mostrando nuevos conceptos que al aplicarlos de forma adecuada pueden explicar y modelar algunos comportamientos observados en la superficie terrestre. Desde el concepto de esfuerzo efectivo hasta el estudio de suelos parcialmente saturados, se han presentado nuevas teorías que permiten aproximar cada vez mejor la modelación de la influencia de factores externos en el comportamiento de taludes. Algunos autores, han centrado sus estudios en la variación de factores de seguridad, profundidades críticas, tiempos máximos y mínimos de respuesta de un talud frente a la lluvia, estudiando y modelando casos particulares o tomando modelos generales para probar nuevos algoritmos y nuevas teorías que permiten involucrar las investigaciones realizadas en el tema de infiltración y cambio de propiedades del suelo en la estabilidad de taludes.

A medida que una matriz de tierra y roca se seca, la interconectividad entre los poros se vuelve irregular y discontinua, ya que el aire sustituye al agua en muchas posiciones. Más aún, en contraste con los flujos saturados donde las fuerzas gravitacionales juegan un rol dominante, las fuerzas moleculares se vuelven aquí extremadamente importantes. En la interface aire – agua se desarrollan fuertes presiones capilares negativas. Estas presiones cambian con el tamaño efectivo de los poros,

y por lo tanto, dependen de la estructura particular del material y de su grado de saturación. Cuanto más seco está el material, tanto más pequeños y discontinuos son los poros que contienen agua, mayores son las fuerzas capilares.

Los cambios en el contenido de agua no sólo afectan las fuerzas, sino también dificultan el camino del agua a través de los poros. Así, la conductividad hidráulica resulta una función del contenido de agua del suelo. El problema se complica aún más por el hecho que, bajo ciertas condiciones, el flujo de agua se realiza no sólo en la fase líquida, sino también como vapor. Este flujo no sólo depende de los potenciales gravitatorios y capilares, sino también de la densidad del vapor y de los gradientes de temperatura en el suelo. Estos complicados efectos están fuera del alcance de esta tesis, y aquí limitaremos nuestra investigación asumiendo algunas hipótesis simplificadoras. No obstante, como veremos, los resultados a los que arribaremos serán lo suficientemente precisos como para describir adecuadamente la mayoría de los problemas prácticos de interés.

Si asumimos condiciones isotérmicas e incompresibilidad para la fase de vapor, podemos establecer que el flujo de agua obedece la siguiente analogía de la ley de Darcy:

$$q_x = -K_x(\theta) \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right); \quad q_y = -K_y(\theta) \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right); \quad q_z = -K_z(\theta) \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

Ec.III.51

Donde las conductividades hidráulicas son ahora funciones explícitas del contenido volumétrico de agua ( $\theta$ ): que se define de la siguiente forma, volumen de agua,  $V_w$ , sobre volumen total de suelo,  $V_T$ , es decir  $\theta = (V_w / V_T)$ . La carga piezométrica o carga hidráulica  $h$ , en términos del potencial capilar, es ahora:

$$h = z + \left( \frac{p_c}{\rho g} \right) = z + \psi(\theta)$$

Ec.III.52

Donde  $z$  se define positiva hacia arriba y a partir de un nivel arbitrario de referencia. El potencial capilar  $\psi(\theta)$  es una función de la humedad  $\theta$ , y tiene unidades de longitud. Como la presión capilar es menor que la presión atmosférica, la presión manométrica  $p_c$  es negativa, y se denomina presión de succión. En consecuencia,  $\psi(\theta)$  es una longitud negativa.

Substituyendo, la ecuación III.52 en la ecuación III.51, tenemos:

$$q_x = -K_x(\theta) \left( \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial x} \right); \quad q_y = -K_y(\theta) \left( \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial y} \right); \quad q_z = -K_z(\theta) \left( \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial z} \right)$$

Ec.III.53

Donde el último término de  $q_z$  da cuenta del efecto gravitacional sobre el flujo. Note que valores negativos de  $q_z$  implican que el flujo se dirige hacia abajo.

El empleo de la ecuación III.53 se hace muy difícil debido a que no existe una relación biunívoca entre  $K$  vs.  $\theta$  y  $\psi$  vs.  $\theta$ . En efecto, la relación entre estas variables incluye el efecto de histéresis, tal

como se ilustra en la Figura III.29. La relación entre el potencial matricial y el contenido de agua en el suelo no es la misma durante los ciclos de mojado y de secado.

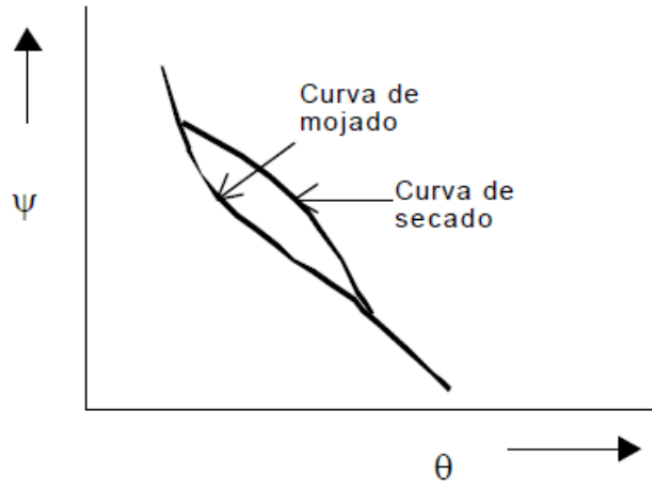


Figura III.29.- Comportamiento histórico de la relación  $\psi(\theta)$  (Benítez A., 1972).

Este comportamiento se explica (en parte) por el hecho que, durante el mojado, el llenado de los poros de pequeño diámetro es ayudado por las fuerzas capilares, mientras que durante el secado las mismas fuerzas tratan de impedir su vaciamiento. Más aún, dada la tortuosidad de los canales formado por los poros interconectados, es de esperar que la localización de las bolsas de aire y las discontinuidades variaran ampliamente de uno a otro tipo de evento.

La cuantificación de la histéresis es muy difícil. Sin embargo, en el caso isotérmico que aquí nos interesa es razonable ignorar este efecto. Numerosas investigaciones bajo este régimen han mostrado que el ciclo de histéresis es muy angosto, y que las variables pueden razonablemente aproximarse mediante leyes de potencias del tipo:

$$\psi(s) = \psi(1) s^{-1/m}; \quad k(s) = k(1) s^c; \quad K(s) = K(1) s^c$$

Ec.III.54

Donde  $s = q / n$  es el grado de saturación ( $n$  es la porosidad),  $m$  es índice de distribución del tamaño de poros en el suelo, y  $c$  es el índice de conectividad de los poros (una medida de la tortuosidad, o de la relación del camino real al camino en línea recta entre dos puntos). Las funciones evaluadas en  $s = 1$  indican su valor en la saturación. Además, estos índices no son independientes sino que están relacionados en la forma:

$$c = \left( \frac{2 + 3m}{m} \right)$$

Ec.III.55

En la Tabla III.11 se dan los valores en la saturación y también los valores típicos de los índices mencionados.

Tabla III.11.- Propiedades hidráulicas de algunos suelos parcialmente saturados (Rawls et al., 1993).

Suelo	$k(l) (cm^2)$	$K(l) (cm s^{-1})$	$\psi(l) (cm)$	$n$	$m$	$c$
Arcilla	$4 \times 10^{-10}$	$3.4 \times 10^{-5}$	90	0.45	0.44	7.5
Barro	$4 \times 10^{-9}$	$3.4 \times 10^{-4}$	45	0.35	1.2	4.7
aluvional						
Barro	$4 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$	25	0.25	3.3	3.6
arenoso						
Arena	$1 \times 10^{-7}$	$8.6 \times 10^{-3}$	15	0.20	5.4	3.4

Debe enfatizarse que estos valores resultan de ajustar las expresiones en la ecuación III.54 a mediciones de propiedades de suelo en condiciones de laboratorio. Un suelo particular, en el laboratorio o en el campo, puede exhibir parámetros que varíen considerablemente de estos valores dados. Por ejemplo, cualquiera de los tipos de suelos en la Tabla III.11 puede exhibir en campo porosidades 10% ó 20% más alta que los preparados de laboratorio. Similarmente, el rango de conductividades hidráulicas puede ampliarse en varios órdenes de magnitud alrededor de los valores mostrados. El índice de distribución de poros  $m$  puede ser considerablemente menor (un orden de magnitud). En resumen, la Tabla III.11 debe usarse sólo como un ejemplo de los parámetros que caracterizan la hidráulica del suelo.

La ecuación de conservación de la masa para el caso no saturado y bajo la hipótesis de incompresibilidad del agua, es:

$$n \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \vec{q} = 0$$

Ec.III.56

Reemplazando aquí la ley de Darcy, y escribiendo en términos del contenido de humedad  $\theta = n s$ , tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x(\theta) \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y(\theta) \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z(\theta) \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Ec.III.57

Empleando la supuesta relación biunívoca  $\psi(\theta)$ , podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_x(\theta) \frac{\partial(\theta)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y(\theta) \frac{\partial(\theta)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z(\theta) \frac{\partial(\theta)}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_z(\theta)}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Ec.III.58

Donde:

$$D_i(\theta) = K_i(\theta) \frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta}; \quad i = x, y, z$$

Ec.III.59

En donde  $D_i$  es la difusividad en la dirección  $i$  – ésimas.

Para un medio isótropo, las difusividades en las tres direcciones son iguales. Incorporando las dependencias como leyes de potencias de la ecuación III.53, tenemos que:

$$D(\theta) = \frac{\psi(1) K(1)}{n m} S^d \quad \text{Ec.III.60}$$

Donde  $d = c - 1 - (1 / m) = (c + 1) / 2$ .

### III.9.1 Infiltración y exfiltración.

La infiltración es el proceso mediante el cual el agua penetra desde la superficie del terreno hacia el suelo. La infiltración a su vez, puede dividirse entre aquella parte que contribuye a aumentar el contenido de agua de la zona no saturada y aquella que recarga el sistema saturado de agua subterránea.

Al inicio de la lluvia la totalidad de la precipitación se infiltra humedeciendo el suelo. La humedad en el suelo, antes de la lluvia, es determinante en la cantidad de infiltración porque al llover, el agua trata de penetrar al suelo humedeciéndolo y creando una capa delgada de saturación; y hasta que ésta capa no haya llegado a un punto de equilibrio, no se forman un escurrimiento superficial o una corriente de infiltración.

El equilibrio se logra cuando todo el perfil está transmitiendo agua a la máxima tasa permitida por la parte menos permeable de los horizontes. Esto puede ocurrir entre diez minutos o varias horas después de iniciada la lluvia (Figura III.30).

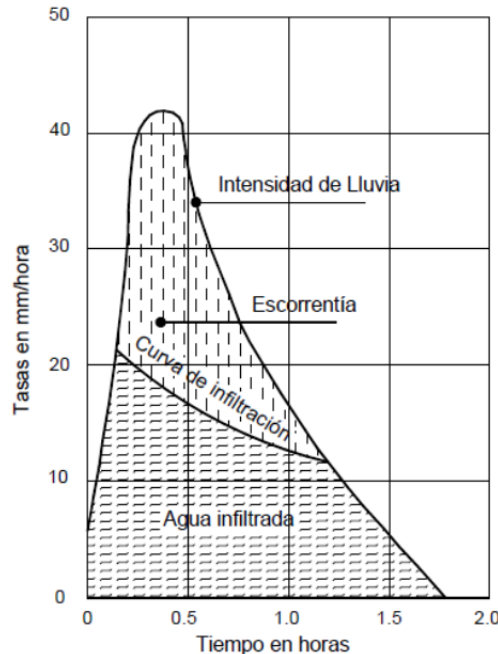


Figura III.30.- Proporción de lluvia, infiltración y escurrimiento superficial durante una tormenta (Espinoza C., 2004).



El agua en exceso que no puede infiltrarse, se queda en la superficie como corriente superficial. De acuerdo con la intensidad de la lluvia, la infiltración y las características físicas del terreno, se produce un escurrimiento superficial, una serie de corrientes subterráneas semiparalelas a la pendiente del terreno y una corriente semivertical de infiltración, hacia el nivel freático (Figura III.31).

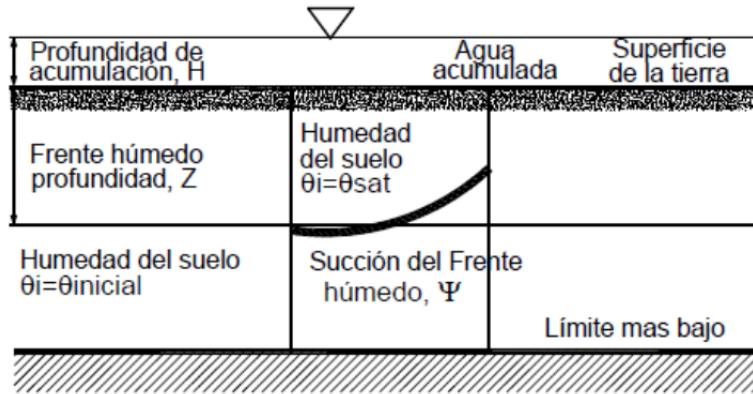


Figura III.31.- Infiltración de agua y frente húmedo en el modelo de Green – Ampt (Green – Ampt, 1911).

Chow et al. (1994), mencionan que observando la distribución de humedad dentro del suelo, cerca de la superficie existe una delgada capa de infiltración o saturación, seguida por una zona parcialmente saturada, vadosa o capilar que hace la transición hacia la zona saturada o freática. El contenido de agua altera la tasa de infiltración, un suelo húmedo tiene una tasa más baja de infiltración que un suelo seco; de esta forma, frente a la lluvia un suelo húmedo tendrá mayor escurrimiento superficial, sin embargo el mismo suelo en condiciones secas tendrá mayor tasa de infiltración.

Una sección típica de un subsuelo con presencia de un acuífero libre se puede dividir en dos secciones o zonas:

- ❖ Zona de aireación o zona vadosa.-Los poros o huecos están parcialmente llenos de agua y se puede dividir en tres franjas, tal como se aprecia en la Figura III.32. El agua infiltra hacia la franja de humedad del suelo, donde es contenida en el suelo mediante atracción molecular y acción capilar y además puede ser utilizada por las plantas o evaporarse. Una vez que se satisface la capacidad de retención de las fuerzas capilares, el agua percola hacia abajo por acción de la gravedad y llega a la franja intermedia, la que también retiene agua. Parte del agua que alcanza la franja capilar es retenida por fuerzas capilares. El resto percola para formar parte del agua subterránea (MINVU, 1996).
- ❖ Zona saturada.-Contiene al agua subterránea en los poros del material y se comporta como una especie de embalse natural en el subsuelo.

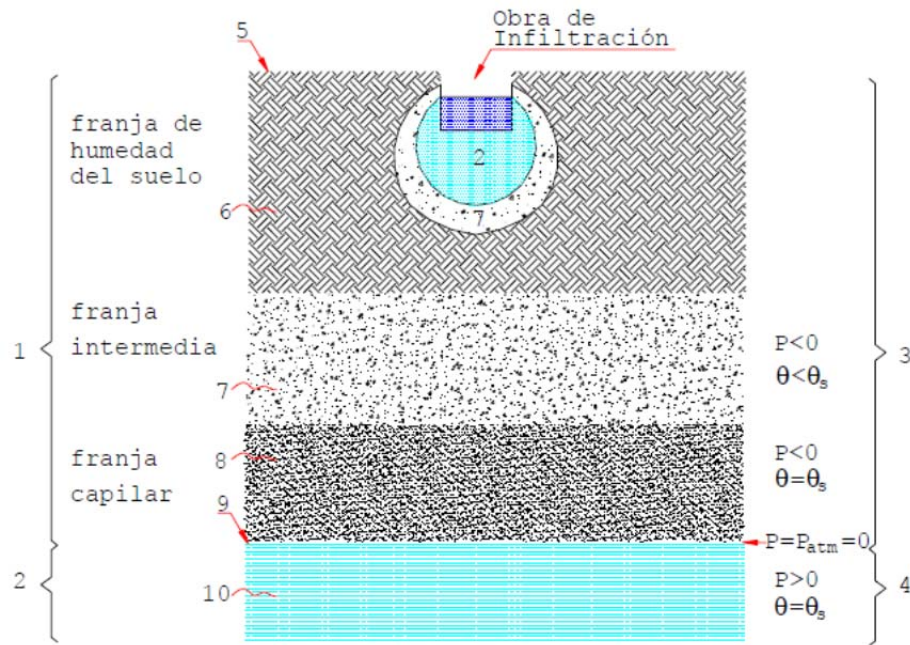


Figura III.32.- Estratos presentes en una sección de medio poroso (MINVU, 1996): 1) Zona de aireación, 2) Zona de saturación, 3) Agua suspendida, 4) Agua bajo presión hidrostática, 5) Superficie del suelo, 6) Humedad del suelo, 7) Poros parcialmente ocupados por agua, 8) Ascensión capilar del nivel freático, 9) Superficie freática, 10) Agua subterránea.

Factores que Afectan la Infiltración:

- ❖ Cantidad, intensidad y tipo de precipitación (granizo, inclinación de la lluvia).
- ❖ Ritmo de precipitación. Cuanto más rápidamente cae la lluvia, menos agua penetra, pues se satura la superficie del terreno y no permite la infiltración rápida. Entre más lenta es la lluvia, habrá más infiltración y menos escurrimiento superficial.
- ❖ Pendiente superficial. La infiltración es mayor en los terrenos más planos a los que corresponden velocidades menores de escurrimiento superficial.
- ❖ La conductividad hidráulica (permeabilidad) de los suelos y las rocas.
- ❖ La estructura de suelos y rocas. Especialmente en lo que se refiere a fracturación, estratigrafía y la secuencia de los estratos permeables e impermeables. El tipo de material o suelo del talud va a determinar la infiltración relacionada con la succión y la conductividad hidráulica (permeabilidad).
- ❖ Densidad y tipo de vegetación.

### III.9.2 Ecuaciones que gobiernan el proceso de infiltración en un medio poroso no saturado.

El proceso de infiltración y el movimiento del agua dentro del suelo, han sido estudiados por medio de principios físicos, relaciones y modelos matemáticos. Algunos autores han aportado avances en este campo y han propuesto diversas formulaciones matemáticas para explicar esta parte del ciclo hidrológico.

Para un escurrimiento no permanente de un fluido a través de un medio poroso no saturado, la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\left(\frac{\partial \rho_w \theta}{\partial t}\right) = - \left(\frac{\partial \rho_w v_x}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \rho_w v_y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \rho_w v_z}{\partial z}\right)$$

Ec.III.61

Donde  $t$  es el tiempo transcurrido [T],  $x, y$  son las coordenadas en el plano horizontal y  $z$  es la profundidad medida en forma positiva hacia abajo desde la superficie [L],  $\rho_w$  es la densidad del agua [M / L<sup>3</sup>],  $\theta$  es el contenido volumétrico de agua del suelo [L<sup>3</sup> / L<sup>3</sup>] y  $v_i$  es el vector del flujo de agua por unidad de área o velocidad de Darcy [L / T].

Si se considera que el agua es incompresible ( $\rho_w = \text{cte.}$ ) la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) = - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\text{div}(\vec{v})$$

Ec.III.62

La ley de Darcy en medios porosos no saturados expresa la proporcionalidad que se establece entre el flujo de agua y el gradiente hidráulico, a través de la conductividad hidráulica como:

$$\vec{v} = -K(\theta) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E$$

Ec.III.63

Donde  $E$  es la energía del agua en el suelo [L],  $\overrightarrow{\text{grad}} E$  es el gradiente de energía del agua [LL<sup>-1</sup>], la que se expresa como  $E = \psi - z$  [L] donde  $\psi$  es la presión capilar del agua en el suelo, que es función del contenido de agua  $\psi(\theta)$  [L] y  $K(\theta)$  es la conductividad hidráulica no saturada [LT<sup>-1</sup>] la que es función del contenido de agua de suelo y se puede expresar en función de la presión capilar  $K(\psi)$ .

Por lo tanto el proceso de infiltración se describe mediante la ecuación III.57. Si bien el flujo real es tridimensional, se asume comúnmente que el flujo unidimensional (vertical) es el que domina. Esto lleva a que la ecuación de gobierno sea de la forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + K_z(\theta) \right]$$

Ec.III.64

Aún bajo estas hipótesis, la solución general de la ecuación III.64 para condiciones dadas de contorno e iniciales está fuera del alcance de esta tesis. Algunas soluciones particulares útiles pueden obtenerse en algunas condiciones particulares.

Si la succión capilar domina el flujo respecto del efecto gravitatorio, o si  $K_z(\theta)$  no varía de manera importante con la profundidad, la ecuación III.64 se simplifica a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]$$

Ec.III.65

Estas aproximaciones tienen mayor validez cuanto más bajo es el nivel de saturación del suelo, como ocurre al comienzo de la infiltración o al final de la exfiltración. Si se asume que la difusividad es constante (digamos, igual a su valor medio en el rango de saturación de trabajo), tenemos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad \text{Ec.III.66}$$

La ecuación III.66 es una ecuación de difusión lineal con amplias aplicaciones en la teoría de conducción del calor en cuerpos sólidos y en el transporte de contaminantes en cuerpos de agua. En consecuencia, ha sido ampliamente estudiada y existe una gran variedad de soluciones para muchas condiciones iniciales y de contorno. Aquí, nos interesaremos en el problema representado por las siguientes condiciones:

$$\theta = \begin{cases} \theta_i & z \leq 0; \quad t = 0 \\ \theta_0 & z = 0; \quad t > 0 \end{cases} \quad \text{Ec.III.67}$$

Donde el suelo está comprendido en el semiespacio  $z \leq 0$ , y tiene una humedad inicial  $\theta_i$ . En  $t = 0$  la superficie del suelo cambia repentinamente su humedad y adopta el valor  $\theta_0$ , el cual se mantiene constante para tiempos mayores. Si  $\theta_0 < \theta_i$ , entonces se tiene un proceso de exfiltración, y si  $\theta_0 > \theta_i$ , se tiene infiltración. Razonando de manera similar a lo hecho para obtener la solución de Theis (medios saturados), vemos que la solución de la ecuación III.66 puede escribirse como:

$$\theta = \theta_0 F(\xi); \quad \text{Ec.III.68}$$

Reemplazando esta solución propuesta en la III.66, y aplicando las condiciones iniciales y de contorno explicitadas en la ecuación III.67, se obtiene:

$$\left( \frac{\theta - \theta_0}{\theta_i - \theta_0} \right) = \text{erf}(\xi); \quad \xi = \frac{z}{\sqrt{4 D t}} \quad \text{Ec.III.69}$$

Donde la función error **erf** ( $\xi$ ) (error function) viene dada por:

$$\text{erf}(\xi) = \sqrt{\left( \frac{4}{\pi} \int_0^\xi e^{-y^2/2} dy \right)} \quad \text{Ec.III.70}$$

Una forma de solución se muestra en la curva de trazo grueso de la Figura III.33. Nótese que  $\theta \approx \theta_i$  para  $\xi \approx 2$  o superior. De modo que la profundidad aproximada del frente de humedad, definida como la posición  $z_f$  donde la humedad es esencialmente la dada por la condición inicial, es:

$$|z_f| = 4 \sqrt{D t} \quad \text{Ec.III.71}$$

Si se hubiese considerado el efecto de la gravedad, entonces habría que corregir este valor adicionando el término  $K_z(\theta) t$ , puesto  $K_z$  es la velocidad de flujo por efecto de la presión hidrostática. Estudios de campo han mostrado que esta profundidad raramente excede los 2m en una amplia variedad de suelos y climas.

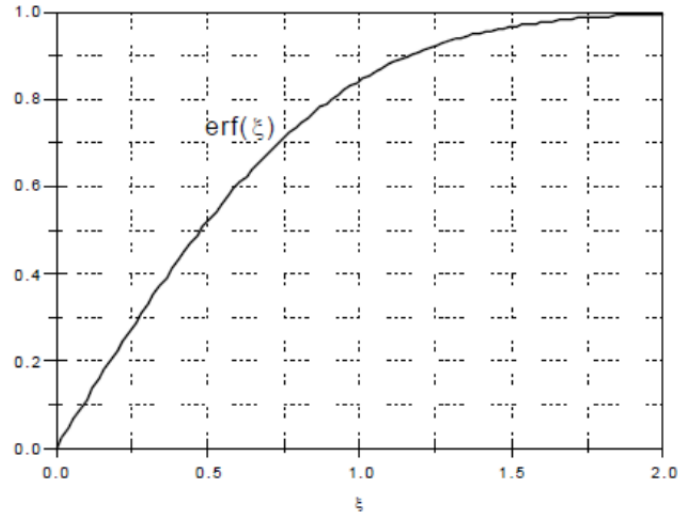


Figura III.33.- Perfil vertical de humedad (Benítez A., 1972).

El flujo vertical de agua viene dado por:

$$q_z = -D \frac{\partial \theta}{\partial z} = \sqrt{\left[ \frac{D}{\pi t} (\theta_i - \theta_0) e^{\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)} \right]}$$

Ec.III.72

Una cantidad de interés es el flujo evaluado en la superficie,  $f = q_z (z = 0)$ , puesto que es la cantidad de agua por unidad de tiempo que está infiltrando ( $f < 0$ ) o exfiltrando ( $f > 0$ ) en el suelo:

$$f = \sqrt{\left[ \frac{D}{\pi t} (\theta_i - \theta_0) \right]}$$

Ec.III.73

Si se considera el efecto de la gravedad, entonces:

$$f = \sqrt{\left[ \frac{D}{\pi t} (\theta_i - \theta_0) \right] - K(\theta_0)}$$

Ec.III.74

La infiltración aumenta ( $f$  se hace más negativa) para menores valores de  $\theta_i$ , mayores valores de  $\theta_0$  y de  $K(\theta_0)$ . A su vez, la infiltración aumenta con la raíz cuadrada de la difusividad, pero disminuye con el tiempo de manera inversamente proporcional con la raíz del tiempo. Todos estos son resultados esperados, y también observados tanto en campo como en laboratorio. Sin embargo, pierden validez para tiempos próximos al comienzo del proceso (por ejemplo  $f$  diverge para  $t = 0$ ).

Es un hecho notable que no sólo  $\theta$  sino también  $q_z$  (definido en la ecuación III.72) obedece la ecuación de difusión III.66 (basta derivar esta ecuación respecto de  $z$  para comprobar esta propiedad). En este caso, una solución general para  $q_z$  puede expresarse en la forma:

$$q_z = (A \cos mz + B \sin mz) e^{-Dl^2 t} + cte., \quad \text{Ec.III.75}$$

Donde  $l$  es una longitud constante. Esta solución permite la imposición de las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} q_z &= f_z & z = 0, t = \infty \\ q_z &= f_0 & z = 0, t = 0 \end{aligned} \quad \text{Ecs.III.76}$$

Donde  $f_0$  ( $> f_c$ ) es la tasa de infiltración inicial, y  $f_c$  su valor asintótico para tiempos muy grandes. Para  $z = 0$ , estas condiciones dan:

$$f = f_c + (f_0 - f_c) e^{-D l^2 t} \quad \text{Ec.III.77}$$

Esta ecuación tiene la forma de la formulación empírica propuesta por Horton, que será discutida más adelante. La ventaja de esta formulación es que da un valor inicial finito para la tasa de infiltración.

Existen también soluciones para el problema de difusividad variable, ecuación III.65. Philip (1960) propuso una solución en forma de expansión en serie para el problema con gravedad. Bajo las condiciones iniciales y de contorno indicadas en la ecuación III.67, pero con  $\theta_0 = n$  (es decir, superficie saturada), los primeros términos de su serie se reducen a:

$$f(t) = 0.5 S t^{-0.5} + A \quad \text{Ec.III.78}$$

Donde:

$$S = 2(\theta_i - \theta_0) \sqrt{\frac{\bar{D}}{\pi}}; \quad A = 0.5 [K(\theta_0) - K(\theta_i)] \quad \text{Ec.III.79}$$

Y  $\bar{D}$  es un cierto valor promedio de la difusividad en el intervalo  $(\theta_0, \theta_i)$ . Una cantidad de interés es la infiltración acumulada,  $F$ , que se define como la profundidad acumulada de agua infiltrada dentro de un período dado:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \text{Ec.III.80}$$

Nótese que todas las soluciones aquí presentadas asumen que el suelo tiene siempre un cierto contenido de humedad, es decir que existe una fuente ilimitada de agua en  $z = 0$  desde el comienzo del proceso hasta tiempo muy grandes.

En la práctica, la infiltración se calcula a partir de una innumerable cantidad de ecuaciones empíricas disponibles. La mayoría de ellas imitan el siguiente comportamiento. Para un dado tipo de suelo y condiciones de humedad previas, se tiene una tasa de infiltración inicial  $f_\theta$ . Esta tasa disminuye a medida que se infiltra más agua, alcanzando finalmente una tasa constante, o capacidad de infiltración final  $f_c$ . Esta tasa ocurre cuando el suelo se ha saturado. Bajo condiciones estacionarias, será igual o menor que la tasa a la que el agua percola y fluye en el sistema de aguas subterráneas (acuíferos). Los parámetros  $f_\theta$ ,  $f_c$  y el decaimiento de la capacidad de infiltración son funciones del suelo, condiciones de humedad, vegetación, intensidad de la lluvia y condiciones superficiales del suelo. Por ejemplo, el comportamiento de un dado suelo puede ser diferente bajo diferentes tormentas debido al sellado superficial causado por el impacto de las gotas de lluvia.

### III.9.3 Método de Green y Ampt.

Chow et al. (1994) citando a Green y Ampt (1911), soportados en la ley de Darcy propusieron un modelo de infiltración basados en una solución analítica exacta. Tomando en cuenta  $\Delta\theta$  como la porosidad humedecible, o la diferencia entre el contenido volumétrico saturado de agua y el inicial ( $\theta_s - \theta_i$ ) en el suelo y  $L_f$  como la distancia desde la superficie hasta el frente húmedo, han definido la infiltración acumulada como:

$$F(t) = \Delta\theta L_f \quad \text{Ec.III.81}$$

En la Figura III.34 se observa la representación del modelo de Green y Ampt. Citando la ley de Darcy, estos autores han encontrado que la tasa de infiltración se expresa de la siguiente forma:

$$f_i = K_{fs} \left( \frac{F + \Delta\theta\psi}{F} \right) \quad \text{Ec.III.82}$$

Donde:

$\psi$  = Carga de presión en el frente húmedo, en este caso será succión.

$K_{fs}$  = Será la mitad del valor de la conductividad hidráulica saturada ( $K_{fs} = K_s/2$ ).

Derivando la ecuación III.82 se tiene una nueva expresión para calcular la profundidad de infiltración  $z_w$  y calcular el tiempo  $t_w$  necesario para saturar el suelo.

$$t_w = \frac{1}{K_{fs}} \left[ F - \Delta\theta\psi \ln \left( \frac{\Delta\theta\psi + F}{\Delta\theta\psi} \right) \right]$$

$$z_w = t_w K_{fs} + \left[ \Delta\theta\psi \ln \left( \frac{\Delta\theta\psi + F}{\Delta\theta\psi} \right) \right] \quad \text{Ecs.III.83}$$

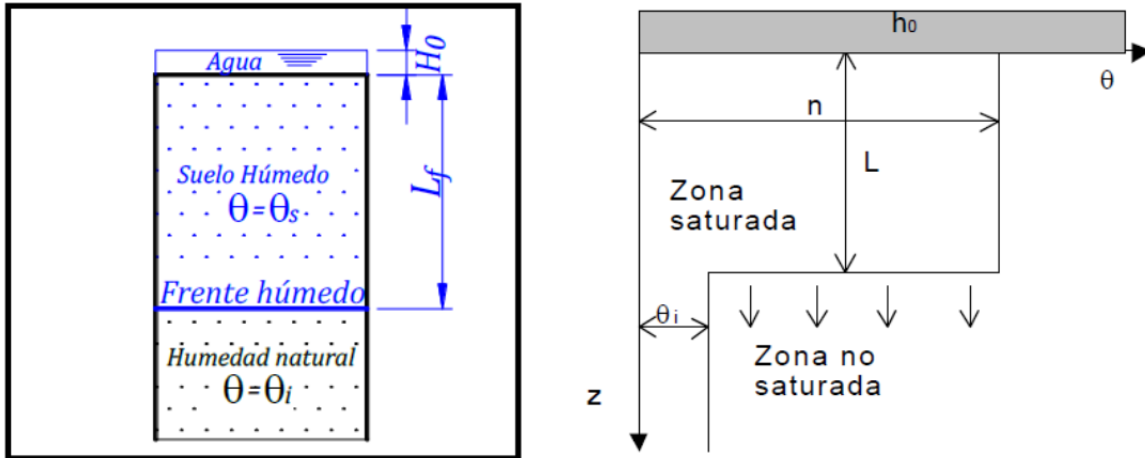


Figura III.34.- Representación del modelo de Green – Ampt (Adaptado de American Society of Civil engineers, Hydrology Handbook, 1994).

Es un tratamiento alternativo del problema, que no proviene de la resolución (exacta o aproximada) de la ecuación general de gobierno ni de buscar una fórmula con propiedades plausibles. Este método es un modelo físico sencillo basado en hipótesis heurísticas que tiene una solución exacta.

Se asume que el frente mojado está determinado por una transición brusca que separa el suelo inferior con un contenido volumétrico de agua inicial  $\theta_i$ , del suelo superior (saturado) con contenido de humedad  $\theta_0 = n$ , donde  $n$  es la porosidad. El frente mojado ha penetrado hasta una profundidad  $L$  ( $t$ ). En la superficie ( $z = 0$ ), el suelo se encuentra encharcado con superficie libre en  $z = h_0$ .

Considérese una columna vertical de suelo de sección transversal con área unitaria, y un volumen de control definido alrededor del suelo mojado entre la superficie y la profundidad  $L$ . Si el suelo tenía un contenido de humedad inicial  $\theta_i$  a través de toda su longitud, el contenido de humedad se incrementará desde  $\theta_i$  hasta  $n$  a medida que pasa el frente mojado. El contenido de humedad  $\theta$  es la relación entre el volumen de agua y el volumen total dentro de la superficie de control, luego el incremento de agua almacenada dentro del volumen de control como resultado de la infiltración es  $L(n - \theta_i)$  para una sección transversal unitaria. Por definición, esta cantidad es igual a  $F$ , la profundidad acumulada de agua infiltrada en el suelo. Por lo cual obtenemos:

$$F(t) = L(n - \theta_i) = L \Delta\theta$$

Ec.III.84

Donde  $\Delta\theta = n - \theta_i$ .

La ley de Darcy puede expresarse como:

$$q = -K \frac{dh}{dz}$$

Ec.III.85



En este caso el campo de flujo de Darcy,  $q$ , es constante a través de toda la profundidad y es igual a  $-f$ , debido a que  $q$  es positivo hacia arriba mientras que  $f$  es positivo hacia abajo. Si los puntos 1 y 2 se localizan, respectivamente, en la superficie del terreno y justo en el lado seco del frente de mojado la ecuación III.85 puede aproximarse por:

$$f = K \left( \frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2} \right) \quad \text{Ec.III.86}$$

La carga  $h_1$  en la superficie es igual a la profundidad de encharcamiento  $h_0$ . La carga  $h_2$ , en el suelo seco por debajo del frente de mojado, es igual a  $-\psi$ ,  $-L$ . Por lo tanto, la ley de Darcy para este sistema se escribe como:

$$f = K \left( \frac{h_0 - (-\psi - L)}{L} \right) \approx K \left( \frac{\psi + L}{L} \right) \quad \text{Ec.III.87}$$

Cuando la profundidad de encharcamiento  $h_0$  es muy pequeña comparada con  $\psi$  y  $L$ . Esta suposición usualmente es apropiada para problemas de hidrología de aguas superficiales, debido a que se supone que el agua encharcada se vuelve escurrimiento superficial. Más adelante se mostrará cómo tener en cuenta  $h_0$  si no es despreciable.

De la ecuación III.84 la profundidad del frente de mojado es  $L = F / \Delta\theta$ , y suponiendo  $h_0 = 0$ , la sustitución en la ecuación III. 86 proporciona:

$$f = K \left( \frac{\psi \Delta\theta + F}{F} \right) \quad \text{Ec.III.88}$$

Como  $f = dF / dt$ , la ecuación III.88 puede expresarse como una ecuación diferencial para la función  $F(t)$ :

$$\frac{dF}{dt} = K \left( \frac{\psi \Delta\theta + F}{F} \right) \quad \text{Ec.III.89}$$

Integrando esta ecuación, se obtiene:

$$F(t) - \psi \Delta\theta \ln \left( 1 + \frac{F(t)}{\psi \Delta\theta} \right) = Kt \quad \text{Ec.III.90}$$

Que es conocida como la ecuación de Green y Ampt para la infiltración acumulada. Una vez que  $F$  ha sido calculada, la tasa de infiltración  $f$  puede obtenerse de la ecuación III.88 como:

$$f = K \left( \frac{\psi \Delta\theta}{F} + 1 \right) \quad \text{Ec.III.91}$$

En el caso que la profundidad de encharcamiento  $h_0$  no es despreciable, el valor  $\psi - h_0$  se sustituye por  $\psi$  en la ecuación III.90 y III.91. La ecuación III.90 es no lineal para  $F$  y puede resolverse mediante el método de sustituciones sucesivas.

Parámetros de Green Ampt.

La aplicación del modelo de Green y Ampt requiere estimaciones de la conductividad hidráulica  $K$ , de la porosidad  $n$  y de la carga de succión de suelo en el frente mojado,  $\psi$ . Experiencias de laboratorio con una amplia variedad de suelos han mostrado que  $\psi$  puede expresarse como una ley de potencias de la saturación efectiva  $s_e$  (ver Figura III.35) definida como:

$$s_e = \left( \frac{\theta - \theta_r}{n - \theta_r} \right) = \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_e} \right)$$

Ec.III.92

Donde  $\theta_r$  es el contenido residual de humedad de suelo después de que se ha drenado completamente. Así,  $\theta - \theta_r$  es la humedad disponible y  $n - \theta_r$  es la porosidad efectiva  $n_e$ .

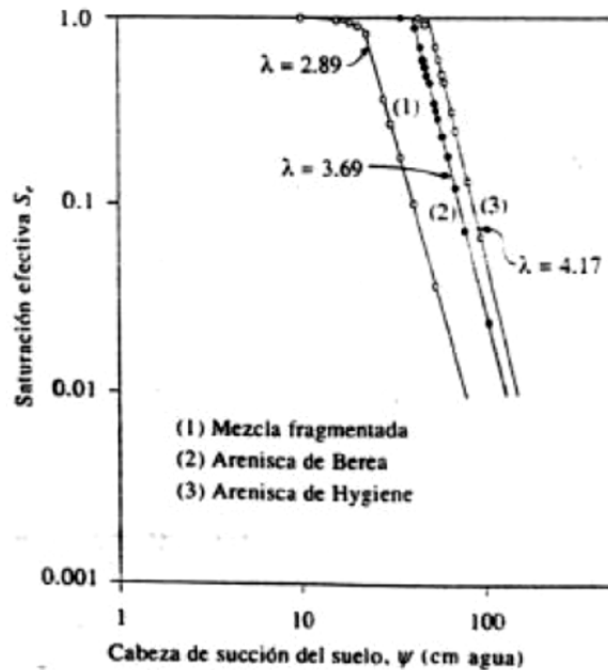


Figura III.35.- Relación de Brooks – Corey entre la carga de succión del suelo  $\psi$  y la saturación efectiva  $S_e$  (Fetter C., 1999).

La saturación efectiva está contenida en el rango  $0 \leq s_e \leq 1$  siempre que  $\theta_r \leq \theta \leq n$ . Entonces, el cambio de contenido de humedad  $\Delta\theta$  cuando pasa el frente mojado es:  $\Delta\theta = n - \theta_i = n - (s_e \theta_e + \theta_r)$ , pues  $\theta = \theta_i$ . Por consiguiente:

$$\Delta\theta = (1 - s_e) v_e$$

Ec.III.93

La ley de potencias que aproxima las mediciones puede expresarse mediante la ecuación de Brooks-Corey:

$$s_e = \left(\frac{\psi_b}{\psi}\right)^\lambda$$

Ec.III.94

En la cual  $\psi_b$  y  $\lambda$  son constantes que se obtienen mediante el secado de suelo por etapas, midiendo los valores de  $s_e$  y  $\psi$  en cada una de estas etapas y ajustando a los resultados encontrados.

La Tabla III.12 muestra los rangos típicos para  $n$ ,  $\theta_e$ ,  $\psi$  y  $K$ . A medida que el suelo se vuelve más fino cuando pasa de arena a arcilla, la carga de succión del frente mojado se incrementa mientras que la conductividad hidráulica decrece. Los rangos típicos de  $n$  y  $\theta_e$  no son muy grandes, pero  $\psi$  puede variar en un amplio rango para un suelo. Dado que  $K$  varía con  $\psi$  sus valores deben considerarse como valores típicos que pueden mostrar un considerable rango de variabilidad en la práctica.

Tabla III.12.- Parámetros de infiltración de Green – Ampt para varias clases de suelos (estos valores se deben tomar como estimativos) (Fetter C., 1999).

Suelo	$n$	$\theta_e$	$\psi$ (cm)	$K$ (cm/h)
Arena	0.437	0.417	4.95	11.78
Arena margosa	0.437	0.401	6.13	2.99
Marga arenosa	0.453	0.412	11.01	1.09
Marga	0.463	0.434	8.89	0.34
Marga limosa	0.501	0.486	16.68	0.65
Marga arenoarcillosa	0.398	0.330	21.85	0.15
Marga arcillosa	0.464	0.309	20.88	0.10
Marga limo-arcillosa	0.471	0.432	27.30	0.10
Marga arenosa	0.430	0.321	23.90	0.06
Arcilla limosa	0.479	0.423	29.22	0.05
Arcilla	0.475	0.385	31.63	0.03

#### III.9.4 Modelo de Green y Ampt para dos capas.

Considérese un suelo con dos capas, tal como se muestra en la Figura III.36. La capa superior tiene un espesor  $H_1$  y parámetros  $K_1$ ,  $\psi_1$  y  $\Delta\theta_1$  de Green y Ampt, y la capa inferior tiene un espesor  $H_2$  y parámetros  $K_2$ ,  $\psi_2$  y  $\Delta\theta_2$ . El agua se encuentra encharcada en la superficie y el frente de mojado ha penetrado a través de la capa superior a lo largo de una distancia  $L_2$  en la capa inferior ( $L_2 < H_2$ ). Se requiere que  $K_1 > K_2$  para que la capa superior permanezca saturada mientras el agua se infiltra en la capa inferior. Utilizando un método similar al descrito previamente para suelos de una sola capa, puede demostrarse que la tasa de infiltración está dada por:

$$f = \left(\frac{K_1 K_2}{H_1 K_2 + L_2 K_1}\right) (\psi_2 + H_1 + L_2)$$

Ec.III.95

Y que la infiltración acumulada es:

$$F = H_1 \Delta\theta_1 + L_2 \Delta\theta_2$$

Ec.III.96

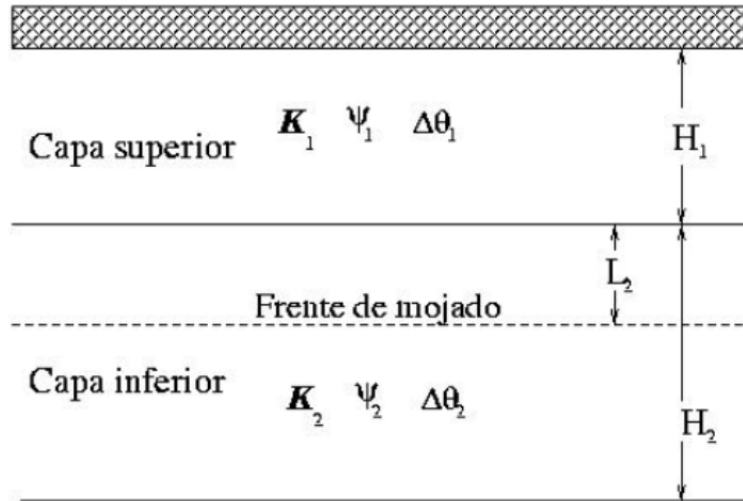


Figura III.36.- Parámetros en un modelo de dos capas de Green – Ampt (Childs E., 1991).

Combinando las ecuaciones III.95 y III.96 en una ecuación diferencial para  $L_2$ , e integrando, se tiene:

$$L_2 \left( \frac{\Delta\theta_2}{K_2} \right) + \left( \frac{1}{K_1 K_2} \right) \left[ \Delta\theta_2 H_1 K_2 - \Delta\theta_2 K_1 (\psi_2 + H_1) \ln \left( 1 + \frac{L_2}{\psi_2 + H_1} \right) \right] = t$$

Ec.III.97

Con la cual la infiltración acumulada y la tasa de infiltración pueden determinarse.

Este análisis se emplea cuando una capa superior de suelo más permeable se superpone a una capa inferior menos permeable. Las ecuaciones normales de Green y Ampt se utilizan mientras el frente mojado está en la capa superior; las ecuaciones III.95, III.96 y III.97 se utilizan una vez que el frente mojado entra en la capa inferior.

### III.9.5 Ecuación de Richards.

Freeze (1969) en su modelo matemático desarrolla la ecuación de Richards de la siguiente forma:

La existencia de flujo continuo entre la zona saturada y parcialmente saturada implica la existencia de un campo potencial, el cual es válido sobre y bajo el nivel de aguas freáticas (NAF). El potencial hidráulico será:

$$H = g z + \left( \frac{p - p_0}{\rho} \right)$$

Ec.III.98

Siendo:

$H$  = Potencial hidráulico

$g$  = Aceleración de la gravedad

$z$  = Carga de elevación

$p$  = Presión

$p_0$  = Presión atmosférica

$\rho$  = Densidad del agua

Si  $p_0 = 0$  y  $p = \rho g \psi$ , siendo  $\psi$  = carga de presión, se obtiene:

$$H = g z + \left( \frac{p - p_0}{\rho} \right)$$

Ec.III.99

Y definiendo carga hidráulica como  $h = H/g$ , se obtiene que la carga hidráulica o total será igual a la suma de la carga de elevación más la carga de presión:

$$h = (z + \psi)$$

Ec.III.100

Conocida como la ecuación de Bernoulli.

Escribiendo la ley de Darcy para flujo en tres direcciones, que es la base para describir el movimiento del agua a través del suelo, de la siguiente forma:

$$v_x = -K(x, y, z, \psi) \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

$$v_y = -K(x, y, z, \psi) \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

$$v_z = -K(x, y, z, \psi) \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

Ecs.III.101

Para flujo inestable de un fluido compresible la ecuación de continuidad será:

$$- \left[ \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = \left( \frac{\partial(\rho \theta)}{\partial t} \right)$$

Ec.III.102

Reemplazando la ecuación III.101 en III.102, se obtendrá la ecuación generalizada de flujo:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \rho K(x, y, z, \psi) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ \rho K(x, y, z, \psi) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \rho K(x, y, z, \psi) \frac{\partial h}{\partial z} \right] = \rho \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ec.III.103

Donde:

$\theta$  = Contenido volumétrico de agua

$t$  = Tiempo

$K$  = Conductividad hidráulica.

A partir de la ecuación III.103 es posible desarrollar ecuaciones en una dimensión (1-D), dos dimensiones (2-D) y en tres dimensiones (3-D) (flujo unidimensional, bidimensional y tridimensional) para flujo estable o inestable de un fluido compresible o incompresible y flujo en medio saturado o parcialmente saturado.

Para suelo homogéneo ( $K(x, y, z, \psi) = K(\psi)$ ), isotrópico, con fluido incompresible ( $\rho = cte.$ ;  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$ ) y flujo en medio parcialmente saturado se obtiene la ecuación de Richards:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ K(\psi) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ K(\psi) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ K(\psi) \frac{\partial h}{\partial z} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad 3D$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ K(\psi) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ K(\psi) \frac{\partial h}{\partial z} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad 2D$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ K(\psi) \frac{\partial h}{\partial z} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad 1D$$

Ecs.III.104

$\theta$  = Contenido volumétrico de agua en función de la carga de presión  $\psi$ .

Tomando la capacidad de almacenamiento de agua o cambio volumétrico del contenido de agua por unidad de cambio en la carga de presión  $C$  como:

$$C(\psi) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\right)$$

Ec.III.105

Que es la pendiente de la curva característica suelo – agua (SWCC), y sustituyendo la ecuación III.100 en III.104, se obtiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right] + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) \right] + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1\right) \right] = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad 3D$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right] + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1\right) \right] = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad 2D$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + 1\right) \right] = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad 1D$$

Ecs.III.106

A partir de la ecuación III.103 para acuífero homogéneo ( $K(x, y, z, \psi) = K(\psi) = \text{constante}$ ), isotrópico, con fluido incompresible ( $\rho = cte.$ ;  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$ ) y  $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) = 0$ , flujo en medio saturado y reemplazando ecuación III.100, se obtiene la ecuación de Laplace:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = 0; \quad 3D$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = 0; \quad 2D$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = 0; \quad 1D$$

Ecs.III.107

La ecuación de Richards es una de las más implementadas en diferentes software, debido a que la ecuación diferencial puede ser resuelta por diferencias finitas y ha demostrado ser bastante exacta a la hora de realizar predicciones, sobre todo en 2-D que es lo común en el software comercial, aunque también se puede trabajar en 3-D en software más reciente.

Algunos autores basados en la ecuación de Richards han desarrollado sus propias expresiones para hallar la tasa o velocidad de infiltración ( $v_i$ ) y la profundidad de agua infiltrada o infiltración acumulada ( $z_w$ ), que se obtiene integrando la tasa de infiltración en el periodo de tiempo estudiado.

### III.9.6 Ecuación de Iverson.

Iverson (2000) reescribe la ecuación de Richards referenciado al sistema de coordenadas de la Figura III.37, de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ K_L(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \text{sen } \alpha \right) \right] + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ K_L(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \left[ K_z(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{cos } \alpha \right) \right] = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

Ec.III.108

Donde:

$\alpha$  = Ángulo del talud variando sólo en  $x$  y  $z$

$K_L$  = Permeabilidad en las direcciones laterales  $x$  y  $y$

$K_z$  = Permeabilidad perpendicular al talud (dirección  $z$  siempre normal al talud).

Adicionalmente define las permeabilidades normalizadas  $K^*$  respecto de la permeabilidad saturada o máxima  $K_s$ :

$$K_L^* = \left(\frac{K_L(\psi)}{K_s}\right); \quad K_z^* = \left(\frac{K_z(\psi)}{K_s}\right)$$

Ec.III.109

Relacionando las permeabilidades con las difusividades  $D$ :

$$D_L = \left(\frac{K_L(\psi)}{C(\psi)}\right); \quad D_z = \left(\frac{K_z(\psi)}{C(\psi)}\right); \quad D_0 = \left(\frac{K_s}{C_0}\right)$$

Ec.III.110

Donde:

$C$  = Definida en la ecuación III.105.

$C_0$  = Mínimo valor de  $C$  (suelo saturado).

$D_0$  = Es la máxima característica de difusividad que gobierna la transmisión de carga de presión y provee un valor de referencia.

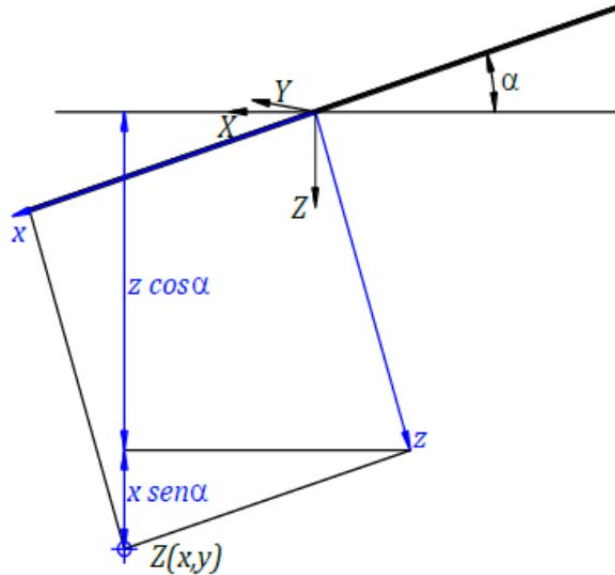


Figura III.37.- Definición del sistema coordinado local usado para analizar las letras minúsculas de la ecuación de Richards (Adaptado de Iverson, 2000).

Iverson (2000) enfatiza que el objetivo de normalizar es el valor que tiene la presión de poros a la profundidad  $z = H$  (normal al talud) y la posición espacial  $(x, y)$  en función del tiempo. La posición espacial determina la extensión en que la infiltración afecta la carga de presión  $(x, y, H)$ . Se maneja la escala en  $z$ , para referenciar la carga de presión  $\psi$  a la profundidad  $H$  y  $A$  será el área de captación de la lluvia que influencia  $\psi(x, y, H, t)$  si la lluvia persiste:

$$\psi^* = \left(\frac{\psi}{H}\right); \quad z^* = \left(\frac{z}{H}\right); \quad x^* = \left(\frac{x}{\sqrt{A}}\right); \quad y^* = \left(\frac{y}{\sqrt{A}}\right)$$

Ec.III.111

Para analizar la respuesta de la carga de presión debido a la lluvia en taludes, introduce la relación de longitud de escala  $\varepsilon$  compuesta por la escala temporal de difusión de presión  $H^2/D_0$  y la escala de tiempo  $A/D_0$ :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{H^2 D_0}{A D_0}} = \frac{H}{\sqrt{A}}$$

Ec.III.112

Para saber si la respuesta del talud debe ser analizada a largo o corto plazo, se deberá saber si  $t > A/D_0$  ó  $t \ll A/D_0$ , respectivamente.



Sustituyendo las ecuaciones III.109, II.110 y III.111 en III.108, tomando  $t^* = tD_0/A$ , multiplicando todo por  $H/K_s$ , se obtiene la siguiente expresión para el comportamiento a largo plazo:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x^*} \left[ K_L^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \frac{1}{\varepsilon} \text{sen } \alpha \right) \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y^*} \left[ K_L^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[ K_z^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} - \cos \alpha \right) \right] = \varepsilon^2 \left( \frac{C(\psi)}{C_0} \right) \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} \right)$$

Ec.III.113

Si se asume que  $\varepsilon \ll 1$ , puede despreciarse y la ecuación para largo plazo será:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left[ K_z^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} - \cos \alpha \right) \right] = 0; \quad \textit{Unidimensional}$$

Ec.III.114

Sustituyendo III.109, II.110 y III.111 en III.108, tomando  $t^* = tD_0/H^2$ , multiplicando todo por  $H/K_s$ , se obtiene la siguiente expresión para el comportamiento a corto plazo:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x^*} \left[ K_L^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \frac{1}{\varepsilon} \text{sen } \alpha \right) \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y^*} \left[ K_L^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[ K_z^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} - \cos \alpha \right) \right] = \left( \frac{C(\psi)}{C_0} \right) \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} \right)$$

Ec.III.115

Si se asume que  $\varepsilon \ll 1$ , puede despreciarse y la ecuación para largo plazo será:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left[ K_z^* \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} - \cos \alpha \right) \right] = \left( \frac{C(\psi)}{C_0} \right) \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} \right)$$

Ec.III.116

### III.10 Succión.

El término succión del suelo fue usado por Schofield, (1935) para representar la deferencia de presión en el agua de poros de algunos suelos (saturados o no saturados) que tenían la capacidad de absorber agua si se le adicionaba agua a la presión atmosférica. El término succión o potencial de agua designa a la integrante del estado de esfuerzo que tiene en cuenta aquellos efectos de superficie capaces de retener agua dentro de la estructura del suelo. Sin su participación resulta imposible definir el estado de esfuerzo y entender la respuesta deformacional de un suelo parcialmente saturado. Para Blight (1965), el efecto de la succión en un suelo no saturado es equivalente al de una presión exterior aplicada. Esta succión está compuesta por varios componentes. La succión total del suelo, cuantifica el potencial termodinámico del agua de los poros, referido al potencial del agua libre. El agua libre se define como aquella que no contiene solutos disueltos, no tiene interacción con las otras fases que definen la curvatura en la interfase aire – agua, y no posee otras fuerzas externas más que la gravedad (Fredlund y Rahardjo, 1993; Lu y Likos, 2004).

### III.10.1 Componentes de succión.

El agua en el suelo está sujeta a un número de campos de fuerza. Estos campos resultan de la atracción que ejerce la matriz sólida sobre el agua, así como la presencia de sales y la acción externa de presión de gas y de gravedad.

Se consideran varios potenciales o combinaciones de potencial según el fenómeno que se estudie. Teóricamente a cada fuerza que obra sobre el agua le corresponde un potencial. Pero en la práctica, por razón de comodidad, algunos de los potenciales se combinan en un solo potencial. El potencial total del agua en el suelo puede expresarse como la suma de la contribución separada de varios factores como son:

$$\psi_T = \psi_M + \psi_g + \psi_p + \psi_o + \psi_\Omega$$

Ec.III.117

Donde:

, $\psi_M$ ,  $\psi_g$ ,  $\psi_p$ ,  $\psi_o$  y  $\psi_\Omega$  = Son respectivamente, los potenciales de la matriz de suelo, de gravedad, de presión, osmótica y de sobrecarga.

La forma en que actúan los diferentes potenciales no es la misma y sus gradientes separados no siempre son igualmente efectivos en la generación de flujo (por ejemplo). La ventaja principal del concepto de potencial total es que presenta una medida unificada por la cual es posible evaluar el estado del agua en cualquier momento y lugar dentro del suelo.

El estado energético del agua en el suelo es de fundamental importancia en los procesos de transporte, recarga, flujo y propiedades mecánicas de los suelos. El flujo de agua en el suelo es un caso especial de un problema mayor de movimientos de líquidos en medios porosos.

#### III.10.1.1 Potencial osmótico ( $\psi_o$ ).

La presencia de sales en el agua del suelo afecta sus propiedades termodinámicas y disminuye su energía potencial. En particular las sales bajan la presión de vapor del agua del suelo. El efecto osmótico es importante en el proceso que involucra la difusión de vapor.

El potencial osmótico resulta de la hidratación de iones en la solución de suelo. Estas fuerzas de atracción orientan el agua en torno a los iones, y el potencial osmótico es el trabajo requerido para separar el agua de estos iones.

La componente osmótica de succión, surge por la presencia de solutos disueltos en el agua de los poros. Al incrementarse la concentración de solutos en solución, se incrementa la presión osmótica (Lu y Likos, 2004). El gradiente de succión osmótica, es la causa del movimiento de agua a través de una membrana semipermeable (Fredlund y Rahardjo, 1993). De esta forma, las moléculas de agua pasan de la zona de baja concentración hacia la de alta concentración de solutos. El solvente fluye hasta que la presión hidrostática equilibre la presión osmótica (Marsal, 1979).

La presencia de fuerzas osmóticas provoca el ascenso del agua en una rama de un tubo en  $U$ , que contiene una solución separada del agua pura contenida en la otra rama por una membrana semipermeable situada en un arco de tubo en  $U$ . La membrana tiene orificios bastante grandes para dejar pasar las moléculas de agua, pero demasiado pequeños para que pasen los iones de la sustancia disuelta.

En virtud de la atracción por los iones, el agua pura pasa a través de la membrana y entra en la solución hasta que la presión hidrostática, por diferencia de altura entre las dos ramas, contrarresta el efecto de aquella atracción. Esta diferencia de presión es la presión osmótica, que se observa en la Figura III.38.

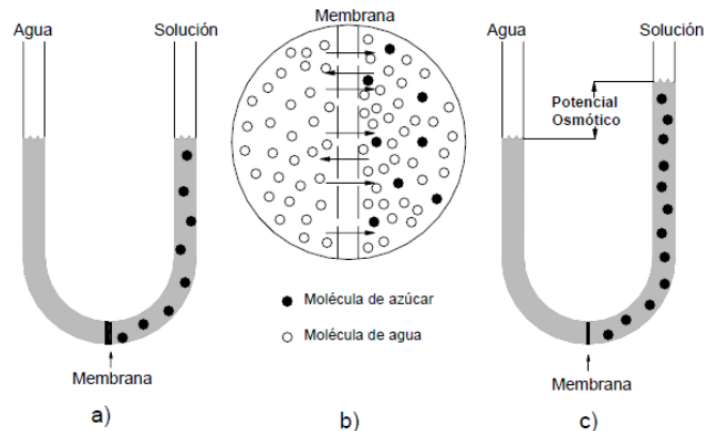


Figura III.38.- Procesos de ósmosis y presión osmótica: a) El tubo contiene agua en el extremo izquierdo y en el derecho agua con azúcar, estos líquidos están separados por una membrana permeable al agua pero no a las moléculas de azúcar; b) A lo largo de la membrana las moléculas de agua tienen movimiento libre de un lado a otro del tubo, y las moléculas de azúcar no pueden penetrar en la membrana, ya que el efecto del azúcar disminuye la energía libre del agua en el lado de la solución, más agua pasa de izquierda a derecha que viceversa; c) Equilibrio de la fuerza de osmosis genera la diferencia de niveles entre los dos extremos del tubo, este es el potencial osmótico (Nyle C. Brandy, 1990).

Las sustancias presentes en el suelo, en su mayoría no son volátiles a temperaturas ordinarias y quedan como residuo al evaporarse el agua. Para eliminar el agua de una solución que contiene solutos es preciso suministrar mayor cantidad de energía que para eliminar el agua pura.

La interfase agua solución obra como una membrana en una solución y la presión de vapor en el aire circundante es reducida proporcionalmente, a semejanza de la diferencia de presión creada a través de una membrana de solución.

Por consiguiente, existen fuerzas osmóticas siempre que un líquido y una fase aérea interactúan, aun en ausencia de la membrana.

Las partículas de arcilla suspendidas en una solución causan el mismo fenómeno en virtud de la atracción que la arcilla ejerce sobre el agua. Podría discutirse si el fenómeno es un efecto osmótico por comportarse la partícula como un ión o si es un efecto matricial porque obedece a las fuerzas superficiales de una partícula sólida.

El flujo neto de agua en respuesta a una diferencia de potencial matricial de un punto a otro puede tener una dirección contraria al flujo de agua producido por un gradiente de potencial osmótico.

### III.10.1.2 Potencial matricio ( $\psi_M$ ).

La succión matricial está asociada con la atracción de agua por superficies sólidas y con la atracción mutua de las moléculas de agua, comprende las fuerzas no equilibradas que ocurren en la interfase aire – agua que da origen a la tensión superficial (Figura III.39).

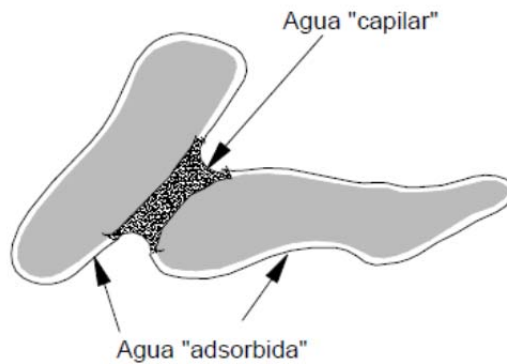


Figura III.39.- Agua en un suelo parcialmente saturado, sujeto a la capilaridad y a la adsorción, que en combinación produce la succión matricial (Benítez A., 1972).

$$\psi_M = (u_a - u_w)$$

Ec.III.118

Donde:

$\psi_M = u_a - u_w$  corresponde a la succión matricial

$u_a$  = Presión de aire de poros

$u_w$  = Presión de agua de poros

La componente matricial combina los efectos de capilaridad y adsorción. Esta componente, se refiere a la succión derivada de la interacción entre el agua de los poros y las partículas sólidas del suelo (matriz). Los efectos de capilaridad corresponden a la presión de poro de agua negativa, generada a partir de la curvatura de meniscos, que se desarrolla en la interface agua – aire de los suelos no saturados. La adsorción, se refiere principalmente a fuerzas eléctricas y de van der Waals que acontecen en la interface sólido – líquido, y las mismas resultan más importantes en suelos de grano fino. Las superficies de las partículas sólidas de suelo producen una fuerte atracción de las moléculas de agua. Como resultado de esta interacción el agua de poro, ubicada a distancias muy próximas de las superficies sólidas, presenta características particulares y se denomina agua adsorbida (Mitchell, 1993).

La importancia relativa de los mecanismos físicos y fisico – químicos responsables de la succión en el suelo dependen del contenido de agua del sistema no saturado suelo – aire – agua. Para contenidos de humedad bajos, y por consecuencia succiones elevadas, el mecanismo de contribución dominante de succión corresponde a la adsorción, la cual se encuentra gobernada por

las propiedades superficiales de las partículas de suelo. Por otro lado, para valores elevados del contenido de humedad y bajo de succión, la capilaridad resulta el mecanismo dominante, la cual resulta principalmente gobernada por la estructura de poros y partículas. La succión osmótica, se conserva constante para todo el rango de variación del contenido de humedad, a menos que se modifique el contenido de solutos disueltos (sales principalmente). La transición entre los estados de alta succión dominados por adsorción y baja succión dominados por capilaridad depende fundamentalmente del tipo de suelo (Lu y Likos, 2004).

En la mayoría de los problemas geotécnicos, donde se involucra la consideración de los suelos no saturados, las modificaciones en la succión total corresponden a modificaciones en la succión matricial y, en general, no resulta necesario considerar la componente osmótica de succión (Fredlund y Rahardjo, 1993).

### III.10.1.3 Potencial gravitacional ( $\psi_g$ ).

El potencial gravitacional del agua del suelo en cualquier punto se determina por la elevación del punto en estudio respecto a un nivel de referencia arbitrario. Por conveniencia es costumbre colocar el nivel de referencia dentro del suelo o bajo el perfil del suelo considerado, de modo que el potencial gravitacional sea siempre positivo o cero.

A la altura  $Z$  arriba de la referencia, la energía potencial gravitacional  $E_g$  de una masa  $M$  de agua, ocupando un volumen  $V$ , es:

$$E_g = M g Z = \rho_w V g Z \quad \text{Ec.III.119}$$

Donde:

$\rho_w$  = Densidad del agua.

$g$  = Aceleración de la gravedad.

Así, el potencial gravitacional, en términos de energía potencial por unidad de masa es:

$$\psi_g = g Z \quad \text{Ec.III.120}$$

Y en términos de energía potencial por unidad de volumen:

$$\psi_g = \rho_w g Z \quad \text{Ec.III.121}$$

El potencial gravitacional es independiente de las condiciones químicas y de presión de agua en el suelo, pues depende únicamente de la elevación relativa.

### III.10.1.4 Potencial de presión ( $\psi_p$ ).

Este potencial que se debe al peso del agua en el punto considerado o a presión de gas distinta de la que existe en la posición de referencia, se denomina potencial de presión. Si el punto está por debajo del agua freática, el potencial es igual y de signo opuesto de gravedad que se mide desde la superficie libre del agua; se llama también potencial de sumergencia y podría denominarse potencial piezométrico, que corresponde a la altura piezométrica.

Los potenciales de presión debido a un gas, se miden con un manómetro ordinario, mientras que los potenciales de presión por presión de un fluido pueden medirse con un manómetro o con piezómetro. El nivel del agua en el tubo, medido desde el punto de referencia apropiado, es la lectura piezométrica, que puede convertirse en unidades de potencial.

### III.10.2 Curva característica suelo – agua.

Consideremos una muestra de suelo que está en contacto con un disco de cerámica que permite el paso de fluido, pero no de suelo. Si se conecta el disco con una bureta flexible llena de agua y el nivel se ajusta de tal forma que sea el mismo que se tiene en la superficie del suelo, entonces el suelo se encuentra en una condición saturada (Figura III.40).

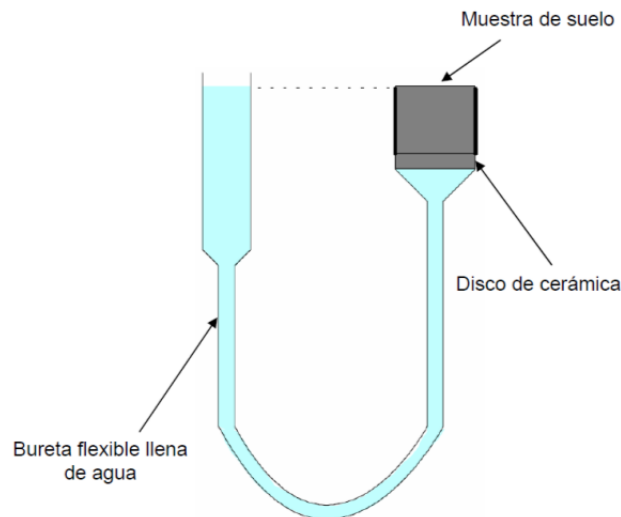


Figura III.40.- Esquema de un suelo saturado conectado a una bureta llena de agua (Adoptado de Montenegro H. & Malagón D., 1997).

Si se cambia la posición de la bureta a una posición más baja, existirá un gradiente entre el nivel del agua en la muestra de suelo y el nivel del agua en la bureta, lo que trae como consecuencia flujo de agua del suelo hacia la bureta, proceso que termina hasta que exista un equilibrio. La cantidad de agua que permanece en la muestra (agua en tensión) para diferentes gradientes, se puede presentar mediante la relación llamada curva característica.

La curva característica es la relación que existe entre el contenido de agua del suelo (grado de saturación, contenido de agua volumétrico) y la succión (tensión del agua) del suelo (Figura III.41).

Esta relación también se llama curva de retención del suelo, curva de succión, etc., dependiendo del área de aplicación. Para cuestiones de ingeniería geotécnica, la mayor parte de la literatura hace referencia a la curva característica del suelo (soil water characteristic curve, SWCC).

La naturaleza de la curva característica está directamente asociada a la composición granulométrica y estructura del suelo (T. J., 1993); por tanto, la relación puede variar para diferentes tipos de suelos (Figura III.41). Nótese que para el caso de suelos finos (arcillas), la pérdida de agua es en forma gradual; mientras que para suelos granulares, la pérdida de agua ocurre en forma muy rápida.

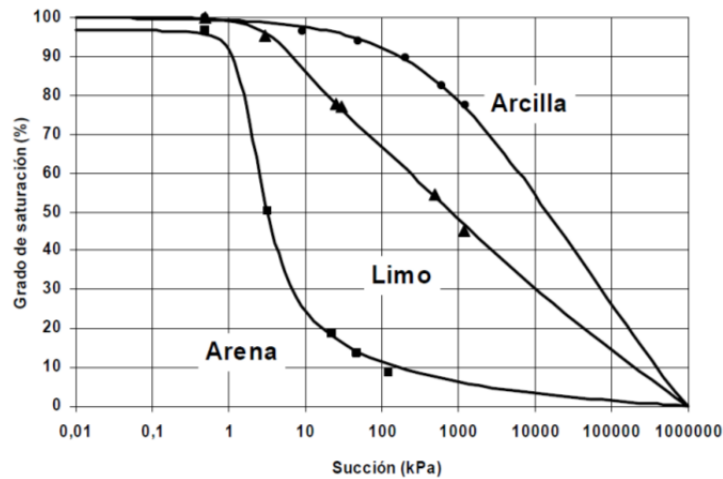


Figura III.41.- Curva característica para suelos con diferentes texturas (Pérez, 2006).

La curva característica no es más que una representación de la capacidad de un suelo para retener agua, bajo cierto valor de succión aplicada. Por ejemplo, refiriéndonos a la Figura III.41, se observa que para arcillas el grado de saturación es cerca de 92 % para una succión de 100 kPa; para limos, el grado de saturación disminuye a 68 % (mismo valor de succión); y el caso extremo es la arena, que para el valor de 100 kPa de succión, sólo presenta un grado de saturación de 10 %, lo cual muestra que a medida que el suelo cambia de un suelo con textura fina a uno con textura gruesa, la capacidad de retención del agua es mucho menor.

Como ya se mencionó, una forma de presentar la curva característica es en términos de contenido de agua gravimétrico; sin embargo, la desventaja es que esta forma no refleja el cambio de volumen que sufre la muestra durante el incremento o reducción de la succión. Por tanto, es deseable que la curva característica se reporte como una relación entre succión y grado de saturación.

La forma de la SWCC refleja la influencia de propiedades del material, tales como distribución de tamaño de poro, granulometría, peso unitario, contenido de arcilla y mineralogía, sobre el comportamiento de retención de agua en los poros. McQueen y Miller (1974) desarrollaron un modelo conceptual, basado en evidencia empírica, que describe la forma general y el comportamiento de la SWCC (Figura III.42).

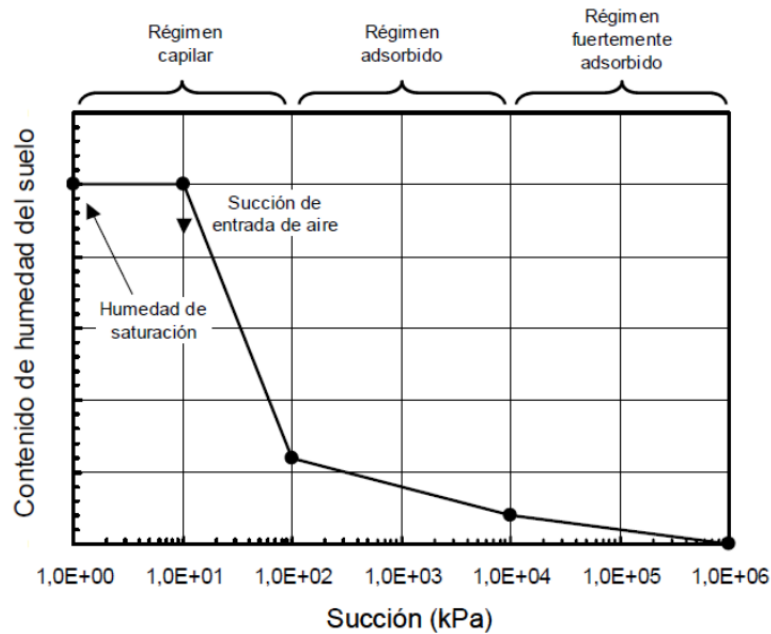


Figura III.42.- Modelo conceptual del comportamiento de la curva característica suelo – agua (SWCC) (McQueen & Miller, 1974).

La Figura III.42 indica que la SWCC, representada en un gráfico semilogarítmico de succión y humedad comprendida entre cero y la saturación, puede aproximarse mediante una función lineal en tramos. Estos segmentos lineales incluyen; un primer tramo comprendido entre  $1 \times 10^6$  y  $1 \times 10^4$  kPa denominado fuertemente adsorbido, otro entre  $1 \times 10^4$  y 100 kPa designado como adsorbido, y un tercer tramo que se extiende de 100 a 0 kPa que corresponde al segmento capilar. Cada segmento se caracteriza por medio de cambios en la pendiente y puntos de transición. La cantidad de agua adsorbida entre los dos primeros regímenes, es función del área superficial de las partículas de suelo y la densidad de carga superficial de los minerales. Cuando el espesor de la capa de agua adsorbida es lo suficientemente gruesa como para reducir la influencia de interacción sólido – líquido, los mecanismos de retención de agua de poros ingresan al dominio capilar. En este caso, la cantidad de agua retenida es función de las partículas y tamaño de poros, terminando en la presión de entrada de aire donde el efecto de la capilaridad tiende a desaparecer debido a la proximidad a la zona de saturación.

El comportamiento general de la SWCC depende del tipo de suelo (Figura III.43). En arenas, la adsorción para succiones elevadas resulta muy limitada debido a que, tanto la superficie específica como la carga superficial, son relativamente pequeñas. En estos suelos, la capilaridad resulta el mecanismo dominante, y la presión de entrada de aire es relativamente baja debido al gran tamaño de poros formado por las partículas de arena. Los suelos limosos pueden adsorber mayores cantidades de agua en rangos elevados de succión y, en general, presentan mayores presiones de entrada de aire dependiendo de la granulometría y estructura que posean. Los suelos con granulometrías uniformes, se caracterizan por SWCC marcadas y planas en la zona de régimen capilar, debido a que la mayoría de los poros se drenan dentro de un rango estrecho de succiones, presentando así presiones de entrada de aire definidas. Los suelos arcillosos y limo arcillosos presentan la mayor capacidad de adsorción de agua en succiones elevadas debido a su elevada



superficie específica y carga superficial. Adicionalmente, presentan presiones de entrada de aire mayores que en el caso de suelos limosos o arenosos (Fredlund y Xing, 1994; Vanapalli et al., 1998).

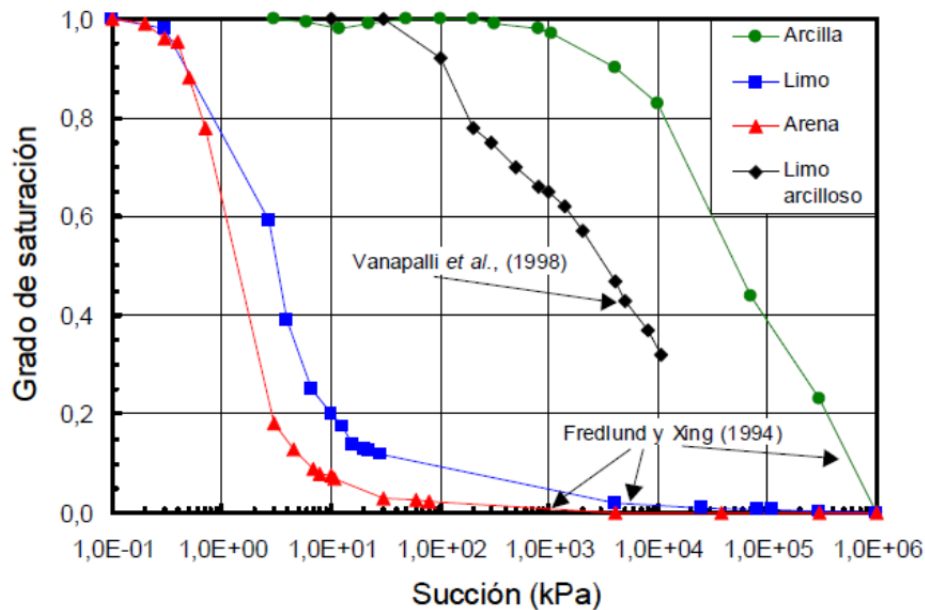


Figura III.43.- Resultados experimentales de relaciones succión – humedad en diferentes tipos de suelos inalterados (Aiassa G., 2008).

### III.10.2.1 Regiones de la curva característica.

La curva característica se compone de tres zonas: la capilar, no saturación, y residual.

En la zona de no saturación, el agua es desplazada por aire; por tanto, la fuerza con la que el agua se encuentra adherida a las partículas del suelo se incrementa a medida que el suelo pierde más agua. Al finalizar esta zona, el agua se encuentra en un estado discontinuo y el coeficiente de permeabilidad se reduce en forma importante (Figura III.44).

La zona capilar es aquella en la cual el suelo se mantiene en un estado de saturación, y termina en el valor de entrada de aire (Fredlund, 1999), el cual está definido como el valor que debe de exceder la succión mátrica, antes de que el aire empiece a entrar en los macro poros del suelo (Figura III.44).

Para la zona residual, un incremento de succión no produce un cambio importante en el contenido de agua, la cual es tan escasa que no fluye entre los poros y la remoción puede ser sólo por evaporación (Hosagasi, 2006). En esta región la succión es muy alta, el agua está adsorbida a las partículas (Figura III.44).

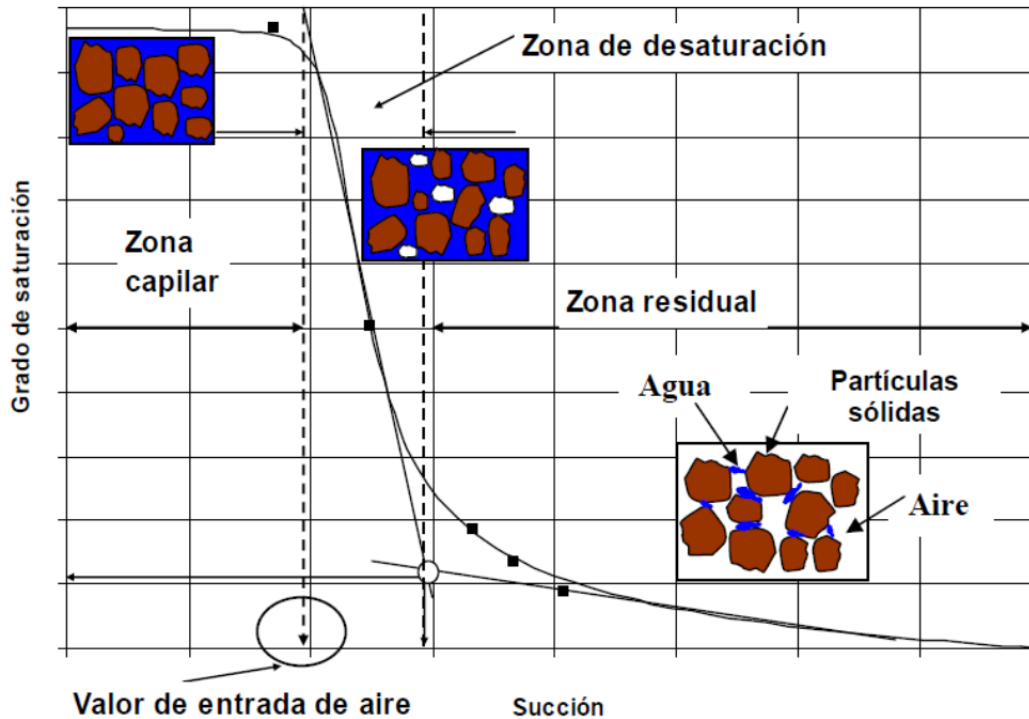


Figura III.44.- Regiones típicas de la curva característica (Adoptado de Montenegro H. & Malagón D., 1997).

### III.10.2.2 Factores de influencia en las relaciones succión – humedad.

La forma general que presentan las curvas características suelo – agua se encuentra influenciada por numerosos factores. Entre los principales factores que intervienen se destacan; tipo de suelo (Miller et al., 2002), textura, composición mineralógica (Williams et al., 1983), la estructura e historia de tensiones (Vanapalli et al., 1999a), estado tensional (Ng y Pang, 2000; Miao et al., 2002) y, en particular para suelos compactados, las diferentes condiciones de compactación (Tinjum et al., 1997; Vanapalli et al., 1999b; Miller et al., 2002).

Las variables que intervienen en la SWCC pueden expresarse de diferentes formas. El contenido de agua, definido como la cantidad de agua en los poros del suelo, puede indicarse mediante la humedad gravimétrica  $w$ , el grado de saturación  $S$ , o el contenido de agua volumétrica  $\theta$ . Por otro lado, la succión puede corresponder a la succión matricial o a la succión total. La Figura III.45 identifica las principales características que presenta una típica SWCC de un suelo limoso, y se identifican los parámetros correspondientes a succión o presión de entrada de aire,  $\psi_a$ , contenido de agua volumétrica residual,  $\theta_r$ , y contenido de agua volumétrica de saturación,  $\theta_s$ .

Por otro lado, la Figura III.45 muestra la relación entre succión y contenido de agua en caminos de secado y humedecimiento, y se observa que la SWCC presenta histéresis. La histéresis se caracteriza con el contenido de humedad, debido a que para una succión dada, este resulta menor sobre el camino de humedecimiento que sobre el camino de secado. Esta diferencia de comportamiento se atribuye a causas, tales como, irregularidades en los vacíos, diferentes ángulos de contacto de meniscos en avance o retroceso del agua, aire atrapado y efecto de tixotropía debido

a ciclos de secado y humedecimiento en la historia del suelo (Freeze y Cherry, 1979; Fredlund y Xing, 1994; Miao et al., 2002; Yang et al., 2004; Pham et al., 2005).

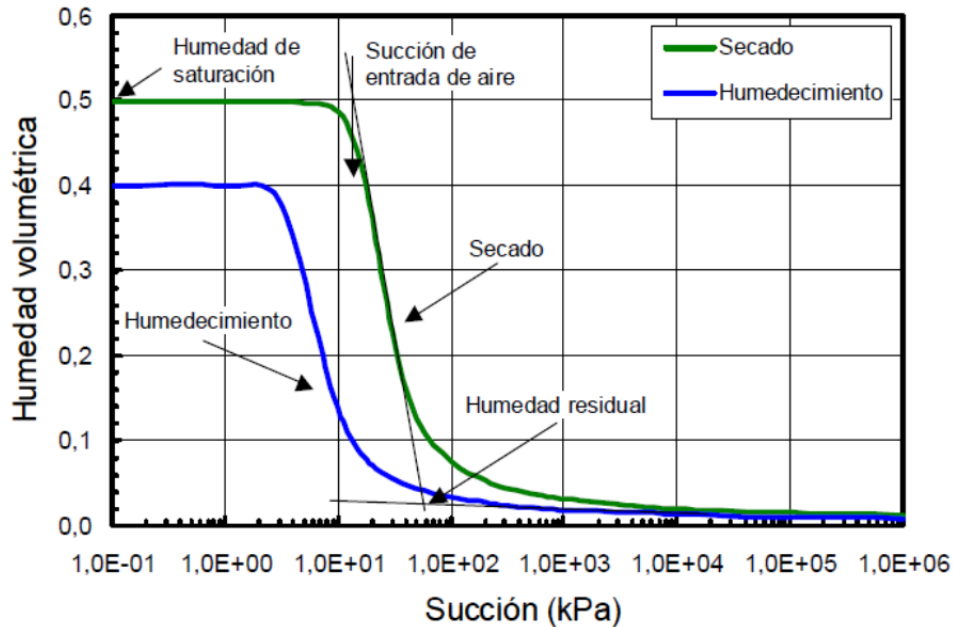


Figura III.45.- Curva característica típica de un suelo limoso (Aiassa G., 2008).

Otra característica que interesa en la SWCC corresponde a la pendiente del tramo central de la curva, la cual en general, resulta más pronunciada (o vertical) en suelos con distribución de tamaños de poros uniformes. Los suelos con rangos amplios de distribución de tamaños de poros presentan pendientes más suaves (u horizontales).

En relación con la pendiente del tramo central, se encuentra el índice de distribución de tamaños de poros,  $\lambda$ . Esta variable, hace referencia a la distribución y variedad de los vacíos dentro de la masa de suelo. Fredlund y Rahardjo (1993), definen el índice de distribución de poros ( $\lambda$ ) como el negativo de pendiente de la curva característica suelo – agua. Su valor tiende a aumentar a medida en que los vacíos de la estructura alcanzan distribución uniforme, y disminuye en suelos con amplio rango de tamaños de poros. De esta forma, incrementos de  $\lambda$  se asocia con incrementos de la pendiente en el tramo central de la SWCC, mientras que reducciones  $\lambda$  se asocia con pendientes menores o más suaves.

La succión de entrada de aire, frecuentemente designada como presión de entrada de aire, corresponde al valor de succión matricial para la cual comienzan a ingresar gases en los poros de mayor tamaño del suelo. El contenido de agua residual, es el contenido de agua para el cual se requieren grandes cambios en la succión para provocar una disminución adicional de contenido de agua. El valor de succión total correspondiente al contenido de agua nulo, puede considerarse igual para todos los tipos de suelo y próximo a un valor de  $10^6$  kPa (Croney y Coleman, 1961). Vanapalli et al. (1998) presentaron una metodología gráfica y numérica para evaluar el contenido de agua residual. El contenido de agua volumétrica de saturación representa el punto en donde todos los espacios disponibles en los poros de la matriz del suelo fueron llenados con agua.

### III.10.3 Tipo de suelo y arreglo estructural.

La plasticidad del suelo, o su mineralogía, ejerce influencia en la forma de la curva característica (Sillers y Fredlund, 2001; Miller et al., 2002; Yang et al., 2004; Marinho, 2005). En la Figura III.46 se muestra la variación de la presión de entrada de aire con el tipo de suelo, a partir de resultados experimentales particulares y valores medios provenientes de bases de datos. Se observa que la tendencia muestra un incremento en la presión de entrada de aire al pasar de suelos de grano grueso, como las gravas arenosas, hacia suelos de grano fino, como la arcilla. En general, los suelos más plásticos presentan mayores valores de presión de entrada de aire y humedad volumétrica de saturación, mientras que la pendiente del tramo central resulta menor.

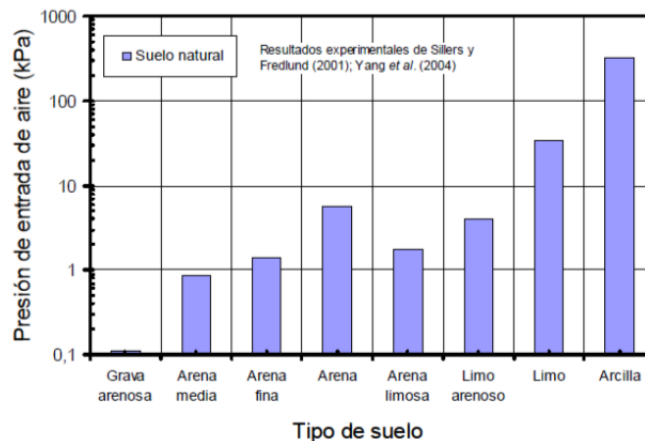


Figura III.46.- Presión de entrada de aire para diferentes tipos de suelos (Aiassa G., 2008).

Miller et al. (2002) estudiaron la influencia sobre la SWCC del tipo de suelo y las condiciones de compactación. Este comportamiento fue estudiado mediante la caracterización de los parámetros típicos de la SWCC, en tres suelos con diferentes porcentajes de arena, limo y arcilla, y diferentes valores en los límites de consistencia. Los resultados obtenidos sobre la variación de presión de entrada de aire en función del índice de plasticidad se resumen en la Figura III.47. En este caso, para las diferentes condiciones de humedad y energía de compactación, se observa una tendencia de crecimiento en la presión de entrada de aire con los incrementos del índice de plasticidad.

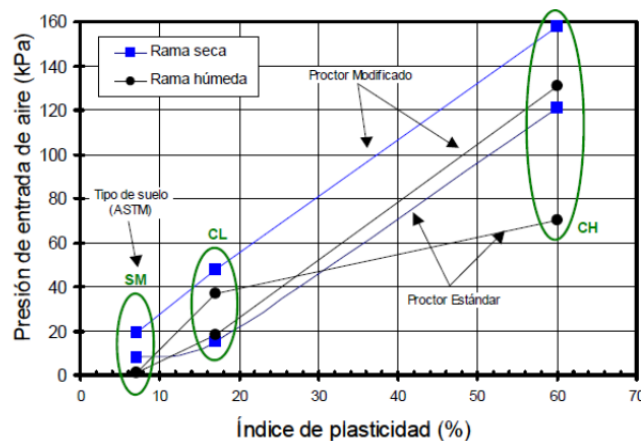


Figura III.47.- Influencia del índice de plasticidad en la presión de entrada de aire en suelos compactados (Miller et al., 2002).

El ordenamiento estructural del suelo influye en la forma de la SWCC. Fredlund y Xing (1994) y Zeballos y Goio (1997) evaluaron la influencia del tamaño medio de los vacíos del suelo, mediante el empleo de modelos de distribución. Los análisis numéricos de funciones de distribución de vacíos en suelos, permitieron concluir que con incrementos en el tamaño medio de los vacíos, conservando constante el coeficiente de variación, se disminuye la presión de entrada de aire y la pendiente del tramo central se conserva constante. Por otro lado, la pendiente se incrementa cuando disminuye el coeficiente de variación, debido a que esta condición determina una distribución más uniforme en el tamaño de poros.

#### III.10.4 Modelo matemático de curva característica.

Las mediciones directas de la curva característica, por medio de técnicas experimentales, permiten obtener puntos discretos que definen la relación entre succión y humedad. No obstante, las aplicaciones de la SWCC en modelos de infiltración o modelos tenso – deformacionales, requiere que las relaciones entre succión y contenido de agua sean descritas mediante funciones matemáticas continuas. Debido a esto, se han propuesto numerosos modelos matemáticos para describir la SWCC, algunos de estos fueron reportados por varios autores (Leong y Rahardjo, 1997; Sillers et al., 2001; Fredlund, 2006).

A continuación se describen los principales modelos, de base teórica y empírica, utilizados para ajustar resultados experimentales, y se presenta un análisis de los parámetros involucrados. Los parámetros involucrados en los modelos matemáticos de curvas características incluyen puntos fijos y constantes empíricas. Los puntos fijos se establecen como un contenido de humedad o succión para una condición específica, tales como saturación, humedad residual y presión de entrada de aire. Por otro lado, los modelos incluyen dos o más constantes empíricas de ajuste, las cuales se seleccionan para capturar la forma general de la curva característica entre los puntos fijos establecidos. Los modelos que presentan más de dos constantes resignan simplicidad matemática respecto a los de dos constantes, pero resultan de mayor flexibilidad para ajustar resultados experimentales en un amplio rango de succiones.

En muchos modelos, se emplea el contenido de agua volumétrica normalizada, ( $\Theta$ ), como variable de referencia, debido a que la misma resulta adimensional y cubre con una variación entre 0 y 1, todo el rango significativo de succión. En este caso, se relaciona el contenido de agua volumétrica con el contenido de agua saturada y residual como:

$$\Theta = \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)$$

Ec.III.122

Donde:

, $\Theta$  = Humedad volumétrica normalizada.

### III.10.4.1 Modelo de distribución de tamaños de poros.

Este modelo considera que el suelo es una serie de poros interconectados y distribuidos de forma aleatoria (Fredlund y Xing, 1994). A los fines de simplificar las formulaciones matemáticas, estos poros pueden caracterizarse mediante una esfera equivalente de radio  $r$ . Luego, la distribución estadística que describe la función densidad de radios de poros,  $f(r)$ , junto con la teoría de capilaridad, pueden emplearse para derivar modelos que describan la curva característica suelo – agua (Sillers et al., 2001).

El volumen de poros que presenta variación en sus radios de  $r$  a  $r + dr$  es igual a  $f(r) dr$  por unidad de volumen del medio. Luego, la función  $f(r)$  es igual a  $d\theta / dr$  y la suma de los volúmenes elementales es igual al volumen total de poros llenos con agua:

$$\theta(R) = \int_{R_{\min}}^R f(r) dr + C_r$$

Ec.III.123

Donde:

$R$  = Valor específico de  $r$ .

$R_{\min}$  = Mínimo tamaño de poro disponible para almacenar agua.

$C_r$  = Constante relativa a la humedad residual.

El mayor tamaño de poros que puede llenarse con agua es  $R_{\max}$ , y corresponde a una humedad volumétrica  $\theta(R_{\max})$ , la cual es igual a la humedad volumétrica saturada,  $\theta_s$ . El menor tamaño de poros es  $R_{\min}$ , y corresponde a una humedad volumétrica  $\theta(R_{\min})$ , que es igual a la humedad volumétrica residual,  $\theta_r$ . En el caso en que  $\theta(R_{\min})$  sea igual a cero y  $C_r = 0$ :

$$\theta_s = \int_{R_{\min}}^R f(r) dr$$

Ec.III.124

El radio de curvatura de la superficie de agua, o radio de poro equivalente, se relaciona con la succión del suelo según la teoría de capilaridad (Fredlund y Rahardjo, 1993; Lu y Likos, 2004):

$$r = \left( \frac{C}{\psi} \right)$$

Ec.III.125

Donde:

$C_s = 2T_s \cos \alpha$  una constante.

$T_s$  = Tensión superficial del agua.

$\alpha$  = Ángulo de contacto entre suelo y agua.

$\psi_c = \rho g h_c$  succión matricial.

$g$  = Aceleración de la gravedad.

$\rho$  = Densidad del agua.

$h_c$  = Altura capilar.

La función densidad de radios de poros,  $f(r)$ , puede transformarse en la distribución de tamaños de poros, la cual resulta función de la succión. Pueden definirse dos condiciones particulares de succión:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{m\acute{a}x} = \left( \frac{C}{R_{m\acute{i}n}} \right) \\ \psi_b = \left( \frac{C}{R_{m\acute{a}x}} \right) \end{array} \right\}$$

Ec.III.126

Donde:

$\psi_{m\acute{a}x}$  = Succión correspondiente al radio mínimo de poros y corresponde a un valor de  $1 \times 10^6$  kPa para el suelo seco

$\psi_b$  = Succión de entrada de aire.

Utilizando la teoría de capilaridad, y considerando a  $h_c$  como variable de integración representativa de la succión matricial, el volumen de poros llenos de agua puede representarse por (Sillers et al., 2001):

$$\theta(\psi) = \int_{\psi_{m\acute{a}x}}^{\psi} f\left(\frac{C}{h}\right) d\left(\frac{C}{h}\right) dh = \int_{\psi}^{\psi_{m\acute{a}x}} f\left(\frac{C}{h}\right) \frac{C}{h^2} dh$$

Ec.III.127

La ecuación III.127 constituye la base física y matemática para la descripción de la curva característica suelo – agua. Si se conoce la función de distribución de tamaños de poros,  $f(r)$ , para un suelo determinado, la SWCC queda definida a partir de la ecuación III.127. Considerando diferentes tipos de distribución de tamaños de poros (constante, inversa al radio de poro equivalente, normal, gama, beta), se obtienen diferentes relaciones entre humedad volumétrica y succión (Fredlund y Xing, 1994). Para describir la curva característica a lo largo de todo el rango de succión, comprendido entre 0 y  $10^6$  kPa, la humedad volumétrica se referencia a un valor de cero. En este caso, la humedad volumétrica normalizada,  $\Theta$ , es igual a  $\theta / \theta_s$ . A partir de la ecuación III.127, puede sugerirse la siguiente forma integral como aproximación a la curva característica suelo – agua.

$$\theta(\psi) = \theta_s \int_{\psi}^{\infty} f(h) dh$$

Ec.III.128

Donde:

$f(h)$  = Distribución de tamaños de poros en función de la succión.

Considerando una función de distribución,  $f(h)$ , tipo normal:

$$f(h) = \left( \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \right) e^{\left( \frac{-(h-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)}$$

Ec.III.129

Donde:

, $\mu$  = Media.

, $\sigma_s$  = Desviación estándar.

Reemplazando III.129 en III.128 y operando:

$$\theta(\psi) = \theta_s \int_{\psi}^{\infty} \left( \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \right) e^{\left( \frac{-(h-\mu)^2}{2\sigma_s^2} \right)} dh$$

$$y = \left( \frac{h-\mu}{\sigma_s \sqrt{2}} \right); \quad dy = \left( \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2}} \right) dh$$

$$\theta(\psi) = \theta_s \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Ecs.III.130

Considerando la función de error complementario:

$$erfc(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Ec.III.131

Por lo que:

$$\theta(\psi) = \frac{\theta_s}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$\theta(\psi) = \frac{\theta_s}{2} erfc \left[ \frac{\psi - \mu}{\sigma_s \sqrt{2}} \right]$$

Ecs.III.132

Los parámetros de ajuste de la ecuación III.132 corresponden al valor medio,  $\mu$ , y la desviación estándar,  $\sigma_s$ , y se relacionan con la presión de entrada de aire y la pendiente del tramo central de la SWCC. En las Figuras III.48 y III.49 se muestran resultados de simulaciones numéricas, para valores constantes del tamaño medio de poros con variación en el coeficiente de variación ( $COV = \sigma_s / \mu$ ) y viceversa. Las Figuras III.48 y III.49 presentan las curvas características suelo – agua, junto con las curvas de distribución de tamaños de poros.



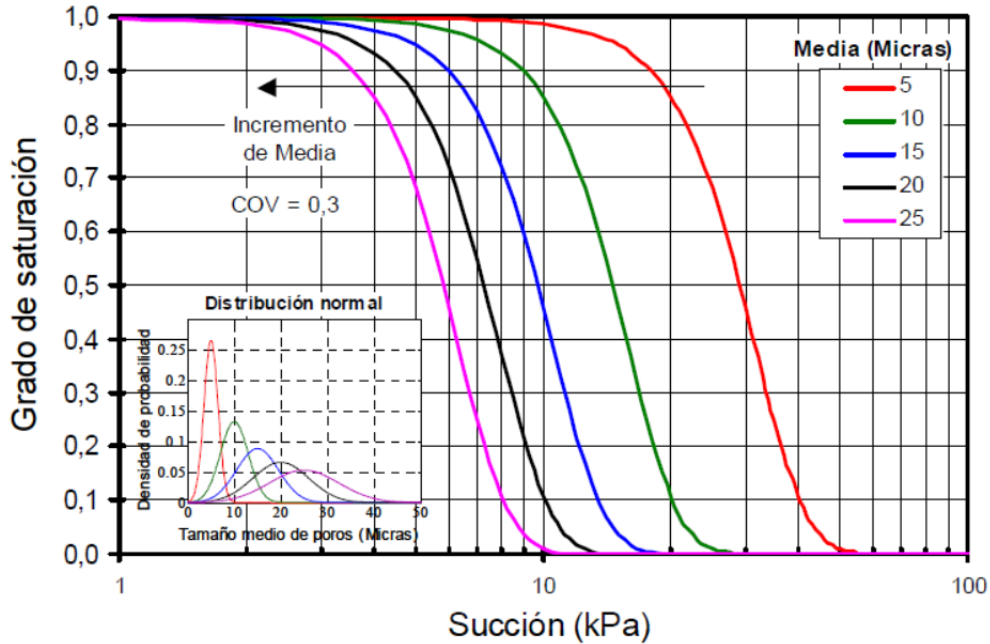


Figura III.48.- Modelo de curva característica suelo – agua, para diferentes tamaños de medios porosos (Fredlund & Xing, 1994).

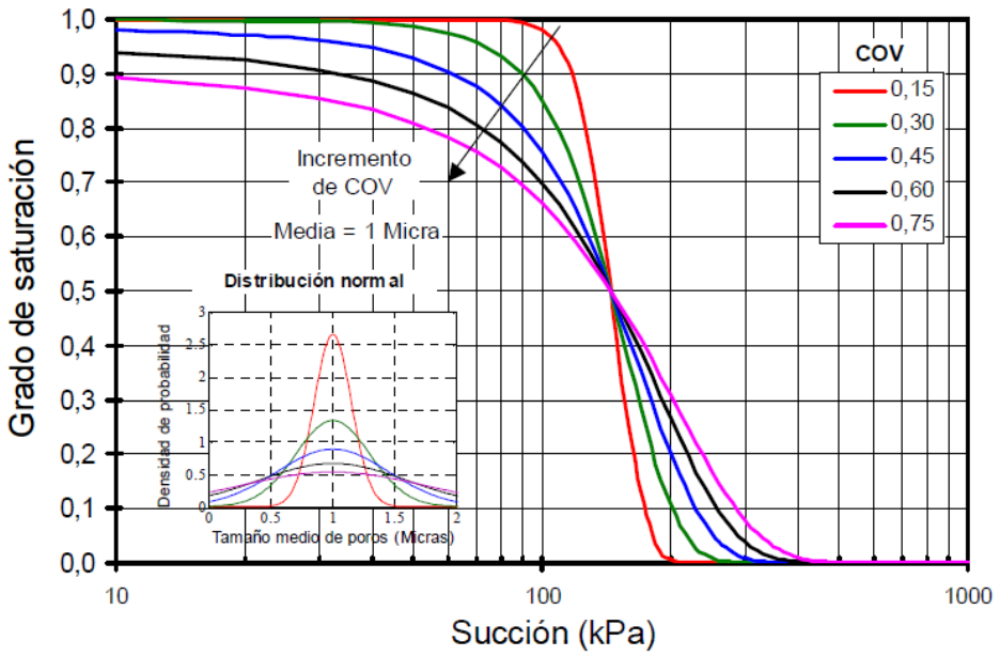


Figura III.49.- Modelo de curva característica suelo – agua, para diferentes coeficientes de distribución de tamaño de poro (Fredlund & Xing, 1994).

Los resultados muestran que el tamaño medio de poro afecta principalmente a la presión de entrada de aire, mientras que la pendiente del tramo central resulta constante (Figura III.48). Los incrementos en el tamaño medio de poro, producen una disminución en la presión de entrada de aire. Por otro lado, el coeficiente de variación (*COV*), afecta fuertemente la pendiente del tramo

central, mientras que produce una ligera influencia en la presión de entrada de aire. Los incrementos del **COV** reducen de forma significativa la pendiente del tramo central y producen pequeñas reducciones en la presión de entrada de aire (Figura III.49).

### III.10.4.2 Modelo de Gardner (1958).

El modelo de Gardner (1958) corresponde a uno de los primeros modelos empleados para representar la curva característica suelo – agua. El mismo corresponde a una función continua, la cual fue desarrollada originalmente para representar el coeficiente de permeabilidad de suelos no saturados, y posteriormente adaptada para modelar la SWCC. Este modelo resulta ampliamente utilizado en aplicaciones geotécnicas, debido a la simple formulación que el mismo presenta. La ecuación contiene dos parámetros de ajuste, designados como **a** y **n**. El parámetro **a** se relaciona con la inversa de la presión de entrada de aire, y el parámetro **n** con la distribución de tamaños de poros (Figuras III.50 y III.51). Con incrementos en el valor de **a**, se reduce la presión de entrada de aire, mientras que la pendiente del tramo central permanece constante. Por otro lado, los incrementos de **n**, provocan en la SWCC una pendiente mayor o más abrupta para el tramo central, con ligeros incrementos en la presión de entrada de aire:

$$\theta = \left( \frac{1}{1 + a \psi^n} \right)$$

Ec.III.133

Donde:

a = Parámetro de ajuste de la curva que se encuentra relacionado con la presión de entrada de aire.

n = Parámetro de ajuste relacionado con la pendiente en el punto de inflexión de la curva característica.

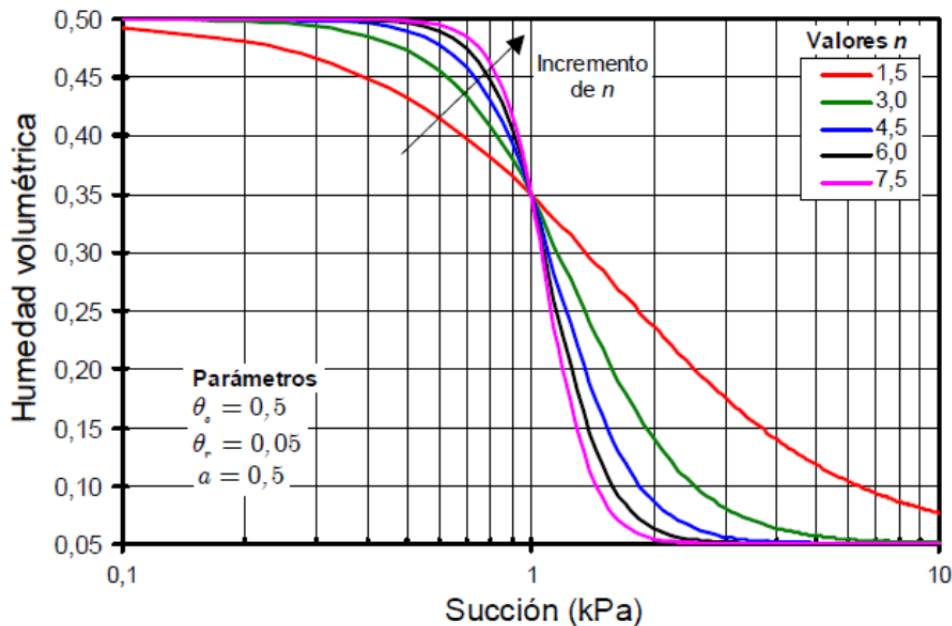


Figura III.50.- Influencia del parámetro **n** en el modelo de Gardner 1958 (Gardner, 1958).

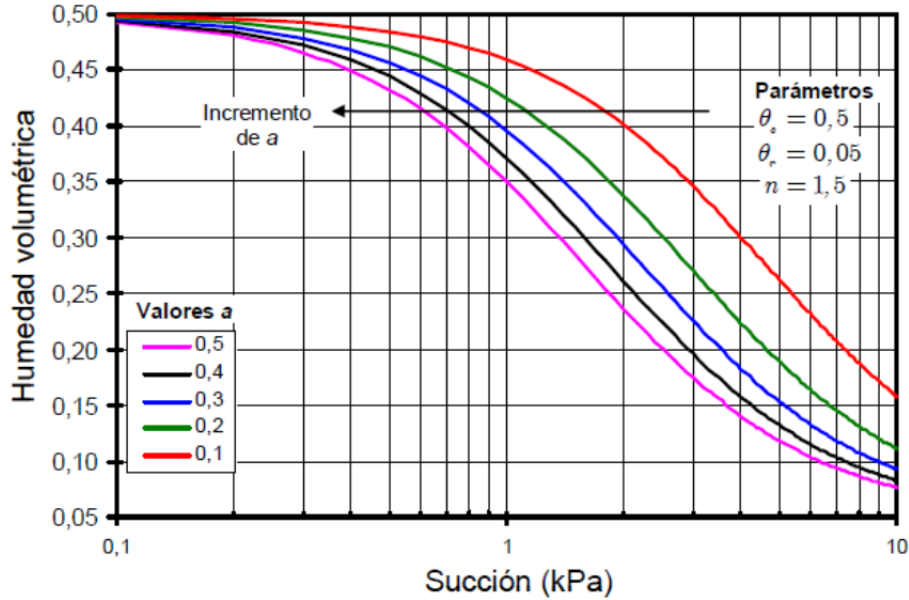


Figura III.51.- Influencia del parámetro **a** en el modelo de Gardner 1958 (Gardner, 1958).

### III.10.4.3 Modelo de van Genuchten (1980).

El modelo de van Genuchten (1980) corresponde a una función continua, y el mismo ajusta la relación succión – humedad para el rango completo de succión en el suelo. El modelo utiliza tres parámetros de calibración, designados como **a**, **m** y **n**. El parámetro **a** se relaciona con la inversa de la presión de entrada de aire, el parámetro **n** se relaciona con la distribución de tamaños de poro del suelo y el parámetro **m** con la simetría del modelo. La ecuación del modelo corresponde a:

$$S_e = \left( \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) = \theta = \left( \frac{1}{1 + (\alpha \psi)^n} \right)^m \quad \text{Ec.III.134}$$

Donde:

$\psi$  = Carga de presión, que en este caso será la succión matricial ( $u_a - u_w$ ) para cada contenido volumétrico de agua (se toma en valor absoluto)

$\alpha$  = Parámetro del suelo que es función del valor de entrada de aire del suelo

**n** = Parámetro del suelo que es función de la tasa de extracción de agua una vez el valor de entrada de aire se ha excedido

**m** = Parámetro del suelo que es función del contenido residual de agua.

La Figura III.52 muestra la forma de la ecuación del modelo, donde **n** y **m** permanecen constantes y el parámetro **a** varía. La inversa del valor de **a** es mayor que la presión de entrada de aire, y se ubica sobre el punto de inflexión de la curva, correspondiente al 50% de saturación. No obstante, se observa que **a** no afecta la forma de la curva característica, pero modifica la posición en la presión de entrada de aire.

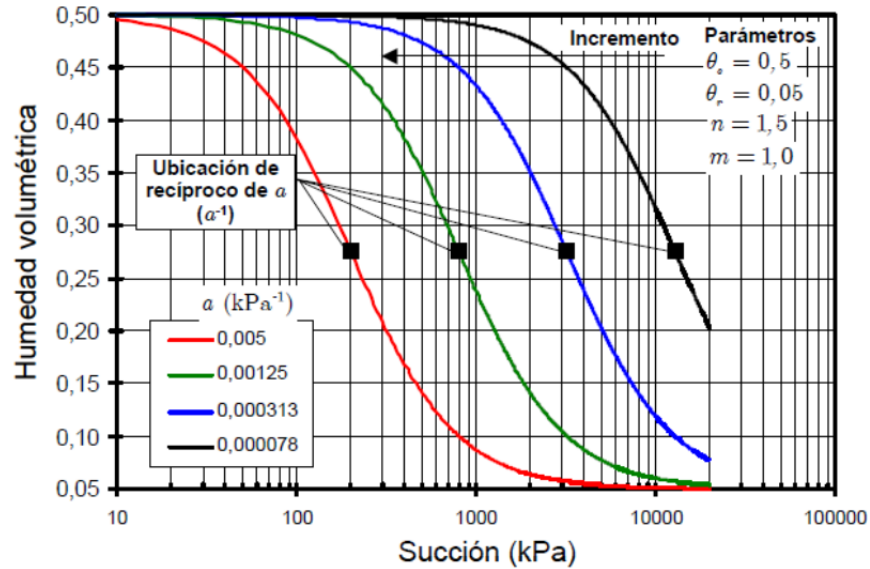


Figura III.52.- Influencia del parámetro  $a$  en el modelo de van Genuchten 1980 (van Genuchten, 1980).

La Figura III.53 muestra la variación de  $n$ , considerando constante a los parámetros  $a$  y  $m$ . El parámetro  $n$  se corresponde con la distribución de tamaños de poros, y su valor es mayor cuanto más uniformes son los poros del suelo. De esta forma, mayores valores de  $n$  determinan una curva con pendiente más pronunciada referida al punto de inflexión de la misma.

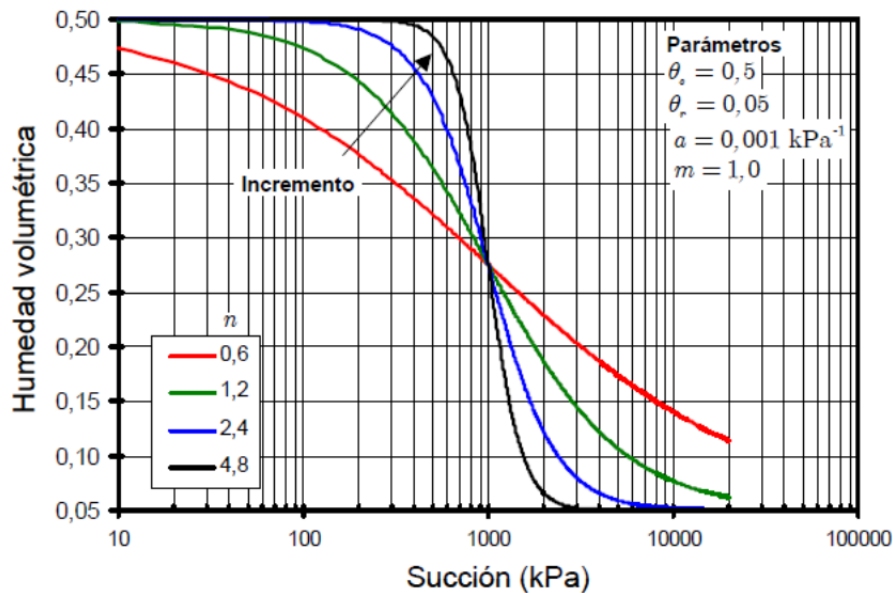


Figura III.53.- Influencia del parámetro  $n$  en el modelo de van Genuchten 1980 (van Genuchten, 1980).

La Figura III.54 muestra la variación de  $m$ , considerando constante a los parámetros  $a$  y  $n$ . El parámetro  $m$  está relacionado con la simetría de la curva. Los valores de  $m$  pequeños están relacionados con pendientes moderadas en el rango succiones bajas, y pendientes pronunciadas dentro del rango de succiones elevadas.

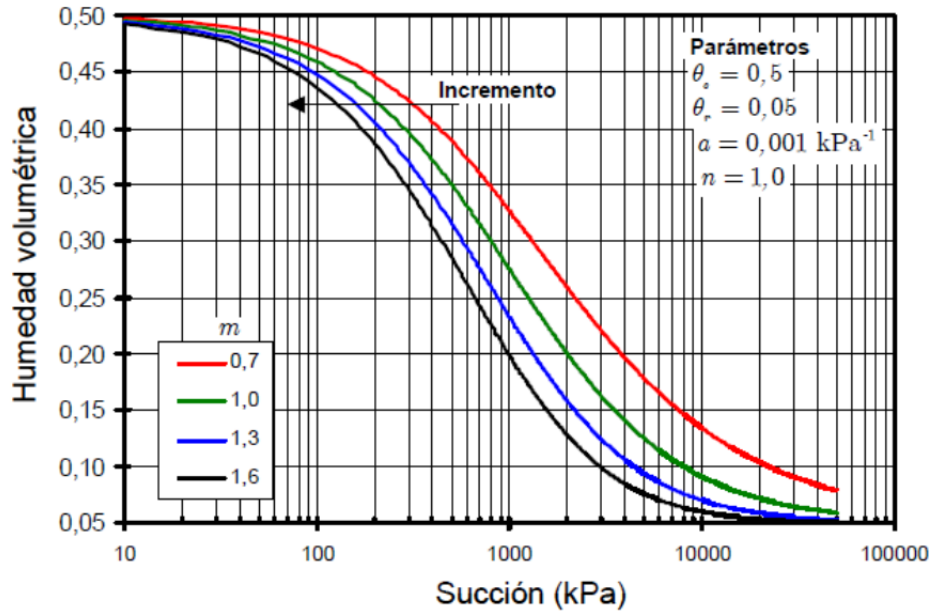


Figura III.54.- Influencia del parámetro  $m$  en el modelo de van Genuchten 1980 (van Genuchten, 1980).

El modelo de van Genuchten (1980) presenta la ventaja de poseer mayor flexibilidad respecto de las propuestas anteriormente, con lo que permite ajustar con mayor precisión resultados experimentales de diferentes tipos de suelo. Esta mayor flexibilidad, es proporcional al número de parámetros de ajuste.

Este modelo puede combinarse con el propuesto por Burdine (1953), donde se plantea una relación entre los parámetros  $m$  y  $n$ , reduciendo la cantidad de parámetros de tres a dos. La ecuación de relación propuesta corresponde a:

$$m = 1 - \left(\frac{2}{n}\right) \tag{Ec.III.135}$$

Por otro lado, el modelo de van Genuchten (1980) puede combinarse con el modelo propuesto por Mualem (1976). En este caso, la ecuación propuesta para la relación entre parámetros corresponde:

$$m = 1 - \left(\frac{1}{n}\right) \tag{Ec.III.136}$$

El modelo combinado de van Genuchten (1980) y Mualem (1976), es el referenciado con mayor frecuencia en la literatura geotécnica (Sillers et al., 2001). No obstante, debe destacarse que el empleo de cualquier relación entre los parámetros  $m$  y  $n$ , reduce la flexibilidad de ajuste del modelo planteada originalmente. Diversos autores han empleado este modelo para ajustar resultados experimentales sobre distintos tipos de suelo (Tinjum et al., 1997; Miller et al., 2002; Singh y Kuriyan, 2003; Yang et al., 2004; Wang y Benson, 2004; Ebrahimi-B et al., 2004; Thakur et al., 2005), y en modelaciones de problemas de infiltración (Fayer, 2000; Inoue et al., 2000; Dong et al., 2003).

### III.10.4.4 Modelo de Fredlund y Xing (1994).

Fredlund y Xing (1994) propusieron un modelo de tres parámetros, continuo para todo el dominio de succión. Los parámetros del modelo se relacionan con la presión de entrada de aire,  $a$ , la distribución de tamaños de poros,  $n$ , y la simetría de la curva,  $m$ . Las Figuras III.55, III.56 y III.57 presentan un análisis de los parámetros del modelo. El modelo se basa en la posibilidad de describir la distribución de los tamaños de poros del suelo a partir de funciones estadísticas. La ecuación propuesta, obtenida a partir de integrar una ley de distribución de frecuencia en el dominio de succión, corresponde a:

$$S_e = \left( \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) = \theta = \left( \frac{1}{\ln \left( e + \left( \frac{\psi}{\alpha} \right)^n \right)} \right)^m$$

Ec.III.137

Donde:

$\psi$  = Carga de presión, que en este caso será la succión matricial ( $u_a - u_w$ ) para cada contenido volumétrico de agua (se toma en valor absoluto)

$\alpha$  = Parámetro del suelo que es función del valor de entrada de aire del suelo

$n$  = Parámetro del suelo que es función de la tasa de extracción de agua una vez el valor de entrada de aire se ha excedido que controla la pendiente de la SWCC

$m$  = Parámetro del suelo que es función del contenido residual de agua.

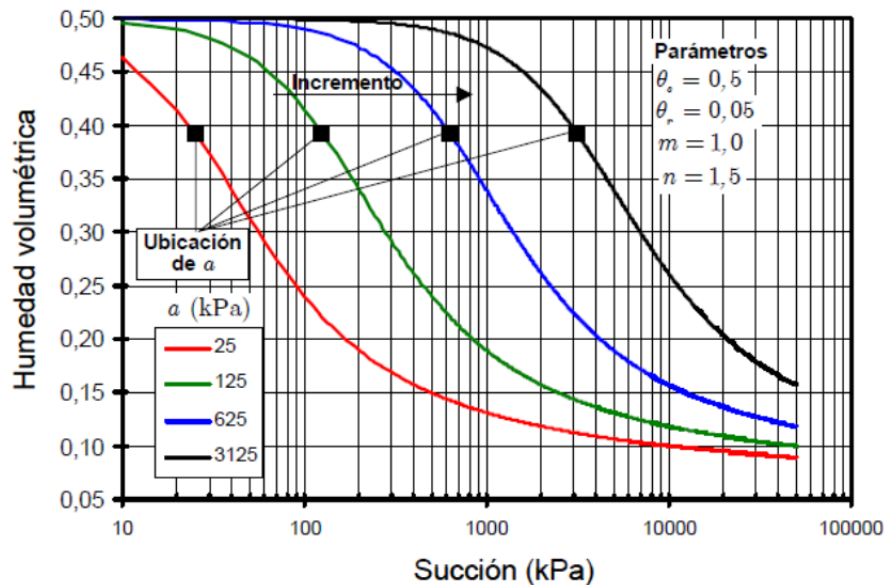


Figura III.55.- Influencia del parámetro  $a$  en el modelo de Fredlund & Xing 1994 (Fredlund & Xing 1994).

La Figura III.55 muestra la influencia de variar  $a$ , conservando constante  $m$  y  $n$ . El parámetro  $a$ , tiene unidad de succión, y se relaciona con la presión de entrada de aire, no obstante su valor es superior a la misma. En la curva,  $a$  corresponde al punto de inflexión. La variación de  $a$  no afecta la forma general de la curva característica, pero modifica la posición de la presión de entrada de aire. A mayores valores de  $a$ , mayor es la presión de entrada de aire.

La Figura III.56 muestra la influencia de variar  $n$ , conservando constante  $a$  y  $m$ . El parámetro  $n$  se relaciona con la distribución de tamaños de poros. Cuanto más uniformes sean los poros del suelo, mayor es el valor de  $n$ .

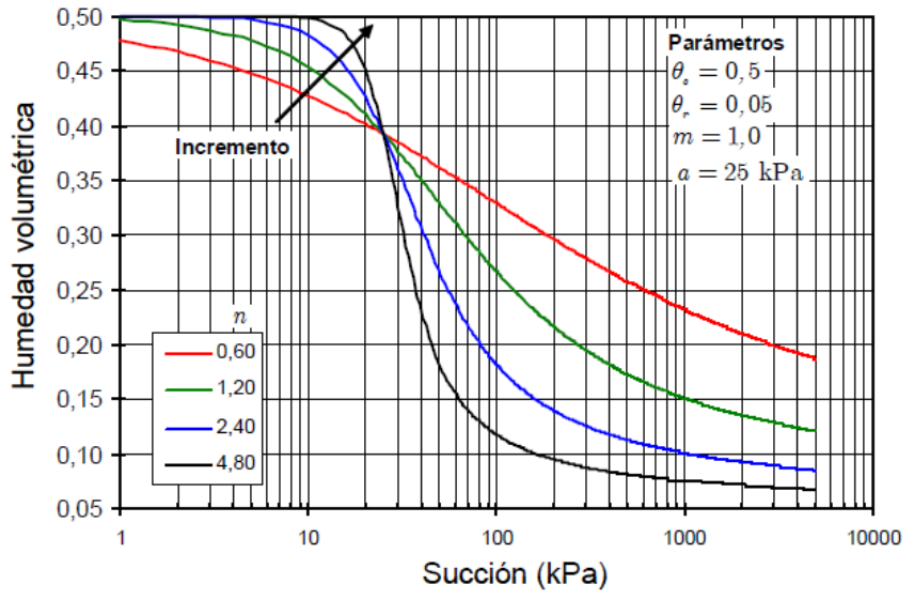


Figura III.56.- Influencia del parámetro  $n$  en el modelo de Fredlund & Xing 1994 (Fredlund & Xing 1994).

Finalmente, la Figura III.57 presenta la influencia del parámetro  $m$ , conservando constante  $a$  y  $n$ . Este parámetro se relaciona con la simetría de la curva. Los valores de  $m$  pequeños se corresponden con pendientes moderadas en el rango de succiones bajas y pendientes más pronunciadas en el rango de succiones altas.

El modelo de Fredlund y Xing (1994) resulta flexible, y sus parámetros producen efectos independientes sobre la curva característica. Adicionalmente, el modelo contempla un factor de corrección, para garantizar que la función tenga un límite en el dominio de succión igual  $10^6$  kPa. Este límite, posibilita una mejor reproducción del comportamiento en los sectores de altos valores de succión, o zona próxima a la humedad nula. En este caso, la ecuación resulta:

$$\theta = C(\psi) \frac{\theta_s}{\left\{ \ln \left[ e + \left( \frac{\psi}{a} \right)^n \right] \right\}^m} \tag{Ec.III.138}$$

$$C(\psi) = 1 - \frac{\ln \left( \frac{\psi}{\psi_r} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{10^6}{\psi_r} \right)} \tag{Ec.III.139}$$

Donde:

$\psi_r$  = Succión residual o succión correspondiente al contenido de humedad residual del suelo (puede asumirse igual a 3000 kPa).

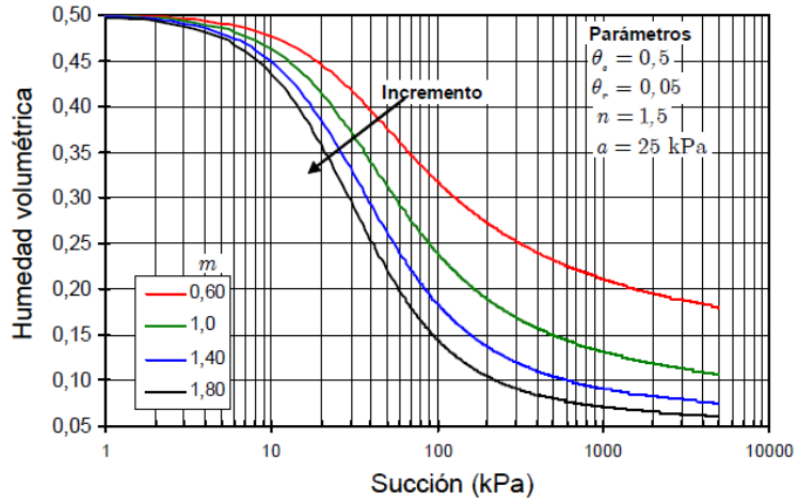


Figura III.57.- Influencia del parámetro  $m$  en el modelo de Fredlund & Xing 1994 (Fredlund & Xing 1994).

Este modelo ha sido empleado por diversos autores para la representación de resultados experimentales (Agus et al., 2001; Miller et al., 2002; Singh y Kuriyan, 2003; Yang et al., 2004; Ebrahimi-B et al., 2004; Thakur et al., 2005), y en la modelación de problemas geotécnicos de estabilidad de taludes (Ng y Pang, 2000), y barreras de cubierta de depósitos sanitarios (Yanful et al., 2003).

#### III.10.4.5 Comparación de la SWCC a partir de las ecuaciones de Van Genuchten y Fredlund y Xing.

En Tabla III.16 y Figura III.58 se observan 12 diferentes texturas de suelos tomando en cuenta el triángulo textural de suelos de la USDA (EEUU), apreciando 5 parámetros que caracterizan cada textura de suelo. Como un ejercicio de comparación de las ecuaciones descritas en los dos numerales anteriores, se tomará el suelo denominado franco arcilloso para graficar la curva resultante de cada ecuación.

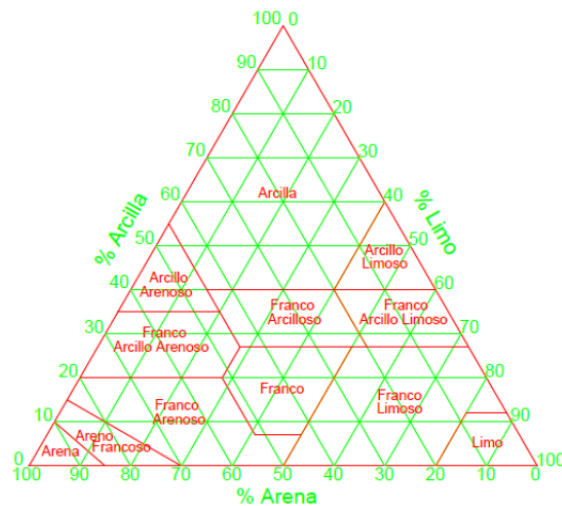


Figura III.58.- Triángulo de suelos de la USDA (EEUU) (Adoptado de Simünek & USDA, 2007).



Tabla III.16.- Parámetros hidráulicos de 12 texturas para trabajar con Van Genuchten (1980). (Adoptado de Simunek, 2007).

<b>Textura</b>	<b><math>\theta_r</math></b> [cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> ]	<b><math>\theta_s</math></b> [cm <sup>3</sup> /cm <sup>3</sup> ]	<b><math>\alpha</math></b> [1/cm]	<b>n</b>	<b>Ks</b> [cm/día]
Arena	0,045	0,430	0,145	2,68	712,80
Areno francoso	0,057	0,410	0,124	2,28	350,20
Franco arenoso	0,065	0,410	0,075	1,89	106,10
Franco	0,078	0,430	0,036	1,56	24,96
Limo	0,034	0,460	0,016	1,37	6,00
Franco limoso	0,067	0,450	0,020	1,41	10,80
Franco areno-arcilloso	0,100	0,390	0,059	1,48	31,44
Franco arcilloso	0,095	0,410	0,019	1,31	6,24
Franco limo-arcilloso	0,089	0,430	0,010	1,23	1,68
Arcilla arenosa	0,100	0,380	0,027	1,23	2,88
Arcilla limosa	0,070	0,360	0,005	1,09	0,48
Arcilla	0,068	0,380	0,008	1,09	4,80

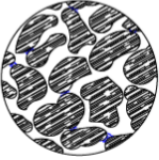
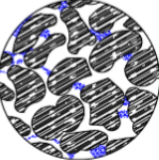
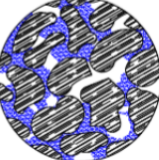
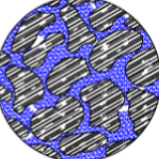
Los parámetros usados para construir la curva con la ecuación de Van Genuchten corresponden con la Tabla III.16 y se realizó el procedimiento descrito por Van Genuchten (1980), mientras que los parámetros para construir la curva con la ecuación de Fredlund y Xing se hallaron con el procedimiento consignado por Fredlund y Xing (1994). La Tabla III.17 muestra los parámetros para cada ecuación y la Figura III.76 muestra las curvas halladas.

Tabla III.17.- Parámetros hidráulicos para la construcción de SWCC (Adoptado de Simunek, 2007).

<b>VAN GENUCHTEN</b>					<b>FREDLUND Y XING</b>				
$\theta_s$	$\theta_r$	n	$\alpha$	m	$\theta_s$	$\theta_r$	n	$\alpha$	m
0,410	0,095	1,31	0,019	0,237	0,410	0,095	1,05	110,0	1,026

Chenggang (2006) realizando observaciones en el microscopio, describe 4 fases o etapas del suelo con base en la ocupación del aire en los poros. En la Tabla III.18 se muestran las 4 etapas mencionadas, según lo reportado por Chenggang (2006), procurando explicar cómo actúa el aire a medida que el suelo se satura con agua. En la Figura III.59 se ubican de forma aproximada estas fases en la SWCC.

Tabla III.18.- Diferentes patrones de la fase de aire en suelos parcialmente saturados (Adoptado de Chenggang, 2006).

Fase o etapa	Descripción
A 	<b>Fase completamente continua.</b> El agua sólo existe en pequeños vacíos. El agua contenida no está necesariamente interconectada. Las fases de aire son continuas en el suelo y se encuentran conectadas con la atmósfera.
B 	<b>Fase parcialmente continua.</b> El agua ocupa gradualmente todos los pequeños poros y espacios, con relaciones hidráulicas establecidas en algunos sitios. El aire se acumula en los grandes vacíos y todavía se conecta con la atmósfera.
C 	<b>Fase internamente continua.</b> El agua ha comenzado a acumularse en grandes volúmenes y sella los espacios de la frontera del suelo. El aire atrapado no se encuentra conectado con la atmósfera, pero dentro de la masa de suelo todavía hay sitios donde se encuentra interconectado.
D 	<b>Fase completamente sellada.</b> El agua contiene burbujas de aire ocluidas, en toda la masa de suelo. El aire sólo aparece en forma de burbujas ocluidas en el agua y se mueven con ella.

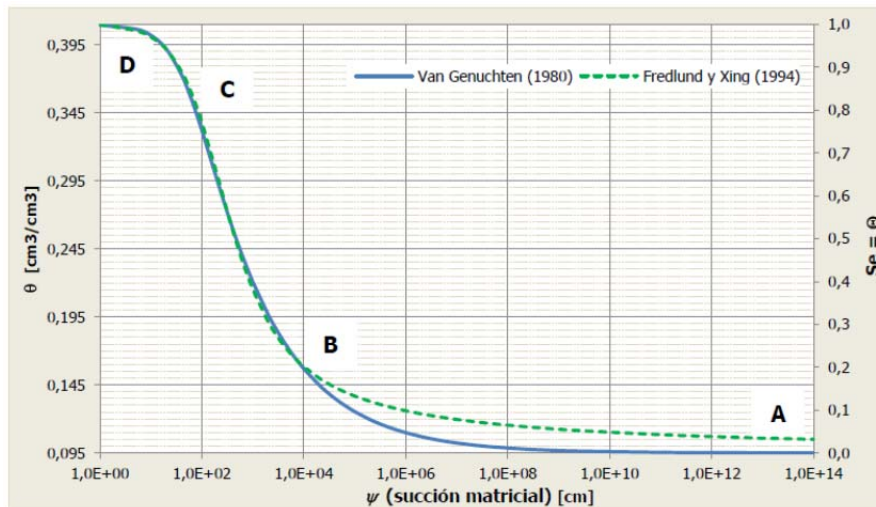


Figura III.59.- Curva característica suelo – agua (SWCC) para un suelo de textura Franco arcillosa, según los parámetros de la Tabla III.17, comparando las curvas halladas con las expresiones de van Genuchten (1980) y Fredlund & Xing (1994) (Fredlund & Xing, 1994).

En la Figura III.59 se puede observar diferencia entre las dos curvas en la parte inferior, pero en general las dos concuerdan en todo su desarrollo. En la Figura III.60 se observan las curvas SWCC para las texturas: Franco limoso y Arena francosa, según la Tabla III.16, las cuales muestran rangos

diferentes. La ecuación que se usará en esta tesis es la ecuación de Van Genuchten, puesto que es la que desarrolla el software SPH ® y resulta ser la más próxima para la construcción de la curva.

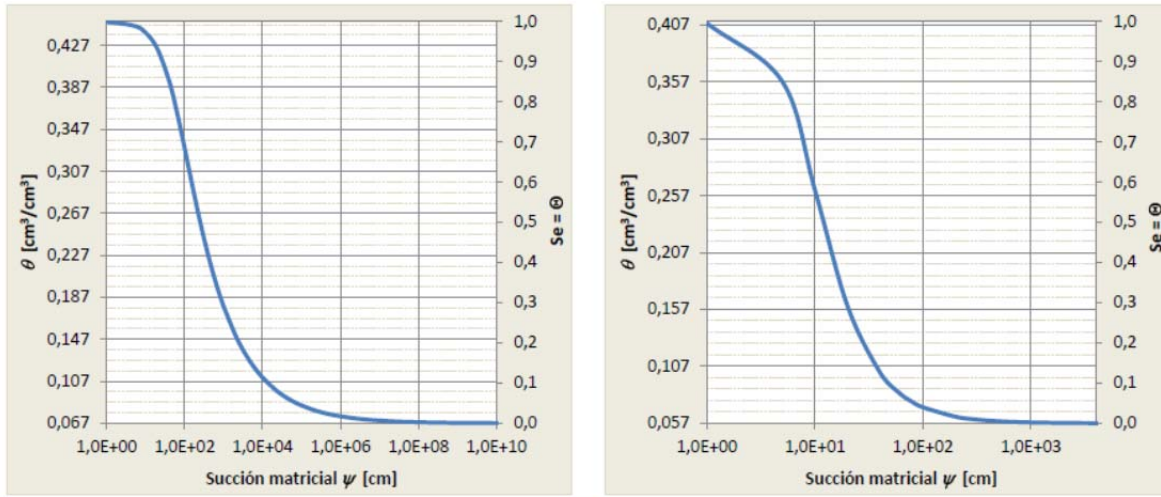


Figura III.60.- Curva característica suelo – agua (SWCC) para un suelo de textura Franco limosa (izquierda) y Arena francosa (derecha), según los parámetros de la Tabla III.17 (Fredlund & Xing, 1994).

### III.11 Ley de Darcy.

El francés Henry Darcy en el siglo XIX estudió en forma experimental el flujo del agua a través de un medio poroso, y estableció la ley que se conoce con el nombre de Ley de Darcy. Dicha ley se basa en las siguientes hipótesis que condicionan la validez de su ley.

- ❖ Medio continuo, es decir que los poros vacíos estén intercomunicados. En este sentido, los medios kársticos no se pueden considerar como continuos.
- ❖ Medio isotrópico.
- ❖ Medio homogéneo.
- ❖ Flujo del agua en régimen laminar.

Darcy realizó su experiencia en cilindros verticales de 2.5 m de altura por 0.35 m de diámetro interior, llenos de arena con una porosidad total del 38%, Figura III.61. Demostró que el caudal  $Q$  es proporcional a la pérdida de carga e inversamente proporcional a la longitud del lecho de arena y proporcional al área de la sección y a un coeficiente que depende de las características del material.

De esta manera estableció que:

$$Q = \left( \frac{K A (h_1 - h_2)}{l} \right)$$

Ec.III.140

Donde:

$Q$  = Caudal constante en  $m^3/s$ .  
 $h_1$  y  $h_2$  = Carga hidráulica en m de agua.  
 $A$  = Área de la sección en  $m^2$ .  
 $K$  = Coeficiente de conductividad hidráulica o de permeabilidad (L/T).  
 $l$  = Longitud del lecho de arena en metros.

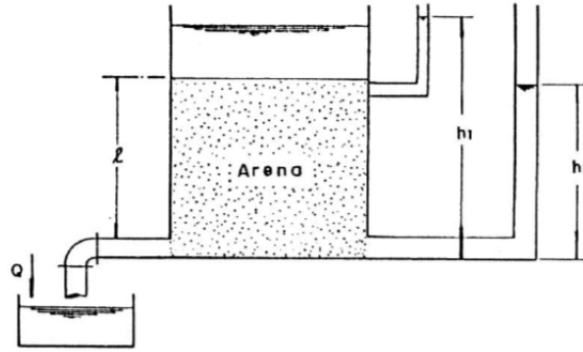


Figura III.61.- Experimento de Darcy (Espinoza C., 2004).

Si en lugar de considerar el tubo vertical, se le da una cierta inclinación, se tiene (Figura III.62):

$$h_1 = Z_1 + \left(\frac{P_1}{\gamma}\right); \quad h_2 = Z_2 + \left(\frac{P_2}{\gamma}\right); \quad \Delta h = h_1 - h_2$$

Ec.III.141

Para este caso se continúa cumpliendo la ley de Darcy, de tal forma que puede escribirse:

$$Q = -K A \left(\frac{\Delta h}{l}\right)$$

Ec.III.142

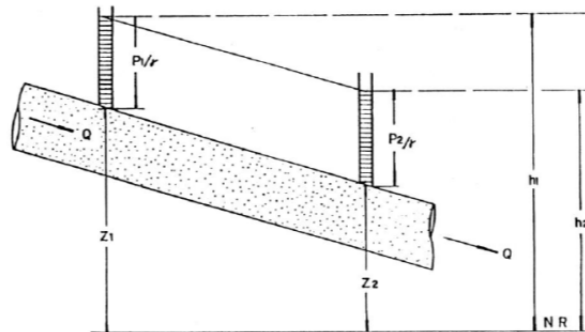


Figura III.62.- Flujo de un líquido a través de un medio poroso en un tubo inclinado (Espinoza C., 2004).

Ahora  $\Delta h / l$  no es otra cosa que la pendiente de la línea de carga, o sea la pérdida de carga por unidad de longitud del lecho filtrante, la cual se llama gradiente hidráulico. Este gradiente se puede simbolizar mediante la letra  $i$ , por lo tanto tenemos:

$$i = \left(\frac{\Delta h}{l}\right)$$

Ec.III.143

En este caso la expresión  $Q$  queda así:

$$Q = -K A \left( \frac{\Delta h}{l} \right) = -K A i$$

Ec.III.144

De la ecuación III.144 puede escribirse:

$$V = \left( \frac{Q}{A} \right) = K i$$

Ec.III.145

La expresión  $Q / A$  recibe el nombre de velocidad de flujo o velocidad de Darcy, simbolizada por  $V$ .

Si se tiene en cuenta que el agua en un medio poroso se mueve a velocidades variables según el tamaño y orientación de los poros, es claro que esta velocidad de flujo no coincide, a una escala microscópica, con la velocidad real del agua a través de los poros del mismo. No obstante lo anterior, para el estudio de las características hidráulicas del flujo a través de un medio poroso se utiliza la velocidad de Darcy.

Puede concluirse entonces, que el movimiento del agua en un medio poroso se produce cuando hay diferencias de carga.

Analizando la ley de Darcy se ve que ella se compone de tres parámetros principales:

- ❖ La permeabilidad,  $K$ .
- ❖ El gradiente hidráulico,  $i$ .
- ❖ La velocidad del flujo,  $V$ .

### III.11.1 El gradiente hidráulico.

El gradiente hidráulico es la pendiente de la curva que representa la superficie piezométrica. Es otro parámetro que aparece en la Ley de Darcy y fue definido como la pérdida de carga por unidad de longitud, medida esta longitud en la dirección del flujo. Si se considera un acuífero y dos piezómetros, Figura III.63:

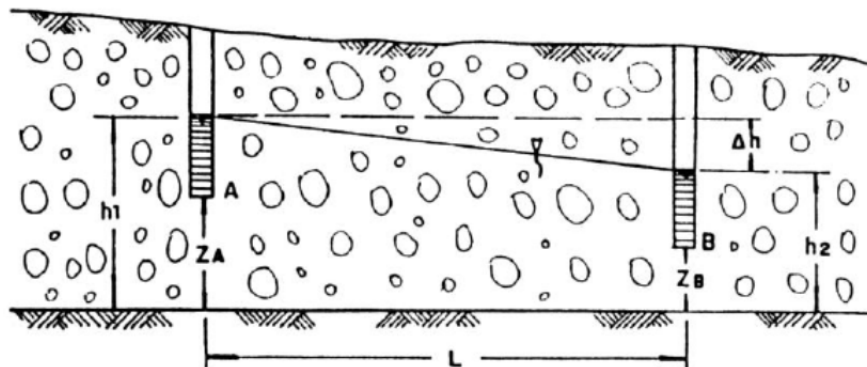


Figura III.63.- Gradiente hidráulico en un acuífero:  $(\Delta h/L)$  (Espinoza C., 2004).

$$h_1 = Z_A + \left(\frac{P_A}{\gamma}\right); \quad h_2 = Z_B + \left(\frac{P_B}{\gamma}\right); \quad \Delta h = h_1 - h_2$$

Ec.III.146

En donde  $P_A$  es la presión hidrostática en  $A$  y  $Z_A$  la altura del punto  $A$  con respecto al nivel de referencia, e idem en el punto  $B$ .

Al nivel de  $h$  en cada punto se le denomina nivel piezométrico. Al tubo que permite determinar la altura de la columna de fluido se le denomina piezómetro y al lugar geométrico de todos los niveles piezométricos se le llama superficie piezométrica.

El gradiente hidráulico  $i$  será entonces:

$$i = - \left(\frac{\Delta h}{l}\right) = \left(\frac{h_1 - h_2}{l}\right)$$

Ec.III.147

El signo negativo se debe a que la carga hidráulica disminuye con  $L$  en la dirección del flujo. Expresando el gradiente hidráulico en forma diferencial se tiene:

$$i = - \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta h}{l}\right) = - \left(\frac{\partial h}{\partial l}\right)$$

Ec.III.148

El fluido se mueve entonces de los puntos de mayor nivel piezométrico hacia los de más bajo nivel.

Para el caso de un acuífero libre la superficie piezométrica coincide prácticamente con el límite de la zona saturada y se le denomina superficie freática. El agua en estos puntos está sometida a la presión atmosférica.

### III.11.2 Velocidad de flujo.

La velocidad dada por la Ley de Darcy no es la velocidad real a la cual se desplaza el agua en un medio poroso. En efecto, dicha velocidad considera que el flujo se hace a través de toda la sección y se define como  $Q / A$ , mientras que realmente el fluido se desplaza únicamente a través de los poros, siendo por lo tanto el área menor que el área de toda la sección. Esta es la razón por la cual a la velocidad de Darcy se le denomina también velocidad aparente o velocidad de flujo para diferenciarla de la velocidad real que viene a ser la velocidad de desplazamiento de las moléculas de agua a través de los poros y que puede determinarse mediante el uso de trazadores. A esta velocidad real de flujo se le denomina también velocidad de filtración o velocidad eficaz o efectiva.

De esta forma, si la sección que se considera tiene un área  $A$ , puede definirse a partir de la porosidad eficaz  $n_e$ , una sección eficaz, que será la sección a través de la cual circula realmente el fluido. Esa sección eficaz será entonces:

$$S = A n_e$$

Ec.III.149

Ahora, si se considera el flujo a través de una sección  $A$ , se tiene que por la ley de Darcy:

$$Q = A K i$$

Ec.III.150

Pero considerando que el agua se desplaza únicamente a través de los poros y definiendo como  $V_r$  la velocidad real de desplazamiento, se tendrá que:

$$Q = V_r S$$

Ec.III.151

Igualando las ecuaciones III.150 y III.151 y teniendo en cuenta que  $V = Ki$ :

$$V = V_r n_e$$

Ec.III.152

Que es la relación existente entre la velocidad de Darcy y la velocidad real.

De lo anterior se desprende que la ley de Darcy es válida únicamente cuando se trata de estudiar el desplazamiento de una masa de fluido, pero no lo es cuando se estudia el desplazamiento de las partículas, lo cual constituye un fenómeno mucho más complejo.

Valores de la velocidad aparente y de la velocidad real: Castany cita los valores dados en la Tabla III.23 en que las velocidades aparente y real, son determinadas todas para un gradiente hidráulico  $i = 1$ . Para este valor de  $i$  se tiene que  $V = K$ .

Tabla III.23.- Velocidades aparentes y reales para varios materiales (Adaptada de Gens & Romero, 2000).

Material	Diámetro de granos (mm)	Velocidad aparente (cm/s)	Velocidad real (cm/s)
Limos	0.01	0.0000183	0.000058
	0.04	0.0002930	0.000922
	0.06	0.0006600	0.00208

Tabla III.23.- Velocidades aparentes y reales para varios materiales (Adaptada de Gens & Romero, 2000).

Material	Diámetro de granos (mm)	Velocidad aparente (cm/s)	Velocidad real (cm/s)
Arenas finas	0.1	0.00183	0.00576
	0.2	0.00732	0.02310

Continua

Material	Diámetro de granos (mm)	Velocidad aparente (cm/s)	Velocidad real (cm/s)
Arenas medianas	0.4	0.0293	0.0922
	0.5	0.0438	0.1441
Arenas gruesas	0.6	0.0659	0.208
	0.8	0.1170	0.369
Arenas muy gruesas	1	0.183	0.576
	2	0.732	2.307
Gravas	5	4.58	14.41

### III.11.3 Límite de validez de la ley de Darcy.

La ley de Darcy establece una relación lineal entre la velocidad y el gradiente hidráulico del tipo  $v = Ki$  y es válida para un régimen de flujo laminar y en un medio isotrópico y homogéneo. Puede decirse que en la generalidad de los casos, el flujo del agua subterránea cumple con esta ley, aun cuando a veces se presentan ciertas condiciones, particularmente referidas al número de Reynolds que originan separaciones con respecto a ella.

La ley de Darcy deja de ser válida para condiciones extremas de flujo: para valores altos del gradiente hidráulico y por consiguiente de la velocidad de flujo y para valores bajos del mismo gradiente hidráulico.

En el estudio hidrodinámico del flujo en un medio poroso se ha definido, por analogía con el flujo en tuberías, un número de Reynolds ( $R_e$ ) que expresa, como en aquel caso, una relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de viscosidad que actúan en el flujo. Dicho número de Reynolds se define en función de la velocidad de flujo  $v$ , de un diámetro característico del material y de la viscosidad cinemática ( $\mu$ ) del fluido, así:

$$R_e = \left( \frac{V d}{\mu} \right)$$

Ec.III.153

El diámetro  $d$  puede ser, o bien el diámetro eficaz  $d_{10}$  del material, o bien el diámetro promedio.

Se ha definido también un coeficiente de fricción de la siguiente manera (Schnneebeli, 1966):

$$C_f = \left( \frac{i g d}{V^2} \right)$$

Ec.III.154

Las características del flujo quedan completamente definidas por estos dos parámetros que tienen en cuenta el gradiente hidráulico  $i$  y la velocidad de flujo  $v$  y que se relacionan entre sí mediante una expresión del tipo:



$$\left(\frac{i g d}{V^2}\right) = f \left(\frac{V d}{\mu}\right)$$

Ec.III.155

Experimentalmente se ha estudiado esta relación para diferentes tipos de material y distintos fluidos y se ha encontrado que gráficamente el comportamiento es de la siguiente manera: en coordenadas logarítmicas se tiene que la relación es lineal hasta un cierto rango de valores de  $R_e$  ( $1 \leq R_e \leq 10$ ), rango que corresponde a las condiciones de un flujo laminar; a partir de estos valores se presenta una zona de transición aproximadamente hasta  $R_e = 10$ , y para valores mayores de  $R_e$  el régimen es ya turbulento. La ley de Darcy se cumple entonces hasta el rango de valores de  $R_e$  entre 1 y 10, valores para los cuales el efecto de las fuerzas de inercia es prácticamente despreciable, hipótesis asumida en la ley de Darcy. Para valores más altos de  $R_e$  el papel de dichas fuerzas es cada vez más importante y por consiguiente la ley de Darcy no puede aplicarse para estos casos.

Estrictamente hablando no se puede determinar un valor crítico de  $R_e$  a partir del cual la ley de Darcy deja de ser válida ya que el cambio es gradual, razón por la cual se habla más bien de un rango de valores para  $R_e$  ( $1 \leq R_e \leq 10$ ) en el cual se ubica el punto de desviación de la ley de Darcy.

Pero como se decía anteriormente, la mayor parte de los problemas de aguas subterráneas cumplen la ley de Darcy. Las condiciones de flujo que se apartan de ella debido a las altas velocidades se presentan en la práctica en terrenos kársticos y en formaciones rocosas fracturadas en donde el flujo del agua presenta altas velocidades e igualmente en las cercanías de los pozos de bombeo.

#### III.11.4 Generalización de la ley de Darcy.

La ley de Darcy establece que para un medio isotrópico se cumple:

$$V = K i$$

Ec.III.156

Ya se mostró como en una dirección cualquiera del flujo el gradiente puede expresarse como:

$$i = - \left(\frac{dh}{dL}\right)$$

Ec.III.157

Donde  $h$  es la carga total y  $dh$  es la pérdida de carga en la dirección del flujo. Se tiene por consiguiente que en una dirección dada:

$$v = -K \left(\frac{dh}{dL}\right)$$

Ec.III.158

Si se considera el problema del flujo subterráneo en tres dimensiones y se acepta que la ley de Darcy es válida en cualquier punto del terreno en todas las direcciones, se tiene que con respecto a un sistema de ejes de coordenadas, las velocidades de flujo en cada una de las tres direcciones estarán dadas de la siguiente manera:

$$V_x = -K \left( \frac{\partial h}{\partial L} \right) i; \quad V_y = -K \left( \frac{\partial h}{\partial L} \right) j; \quad V_z = -K \left( \frac{\partial h}{\partial L} \right) k$$

Ec.III.159

Es decir que la velocidad en una dirección cualquiera será:

$$V = -K \left( \frac{\partial h}{\partial L} i + \frac{\partial h}{\partial L} j + \frac{\partial h}{\partial L} k \right)$$

Ec.III.160

Lo cual es equivalente a decir que:

$$V = -K \Delta h$$

Ec.III.161

Siendo el vector  $\mathbf{v}$  y el vector gradiente paralelos.

Esta expresión se cumple para un medio isotrópico en el cual la permeabilidad no varía en ninguna dirección.

También puede escribirse de la siguiente forma:

$$V = - \left( \frac{\partial(Kh)}{\partial x} i + \frac{\partial(Kh)}{\partial y} j + \frac{\partial(Kh)}{\partial z} k \right)$$

Ec.III.162

Si definimos un potencial de velocidades  $\Phi = Kh$ , la ecuación que describe el campo de velocidades toma la forma:

$$V = -\nabla\Phi$$

Ec.III.163

El flujo darcyano se llama por esto pseudopotencial.

Para flujo tridimensional, en un medio anisótropo, es necesario generalizar la forma unidimensional de la ley de Darcy que se presentó anteriormente. En tres dimensiones, la velocidad es un vector con componentes  $v_x$ ,  $v_y$ , y  $v_z$ , y la generalización más simple sería:

$$v_x = -K_x \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

$$v_y = -K_y \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

$$v_z = -K_z \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

Ecs.III.164

Donde  $K_x$ ,  $K_y$ , y  $K_z$  son los valores de la conductividad hidráulica en la direcciones  $x$ ,  $y$ , y  $z$ , respectivamente. En este caso se supone que  $x$ ,  $y$ , y  $z$  son las direcciones principales de anisotropía

y no existen componentes de la conductividad en las direcciones  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ . Una generalización más completa para el caso tridimensional puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}v_x &= -K_{xx} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) - K_{xy} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) - K_{xz} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\v_y &= -K_{yx} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) - K_{yy} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) - K_{yz} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\v_z &= -K_{zx} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) - K_{zy} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) - K_{zz} \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Ecs.III.165

Este conjunto de ecuaciones pone de manifiesto que existen nueve componentes para la conductividad hidráulica. Si estas componentes son puestas en forma de matriz ellas forman un tensor simétrico de segundo rango. En su forma más reducida, la ley de Darcy se escribe como:

$$\vec{v} = [\vec{k}_{ij}] \cdot \nabla h$$

Ec.III.166

Donde  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad,  $\mathbf{K}$  es un tensor de segundo rango, y  $\nabla \mathbf{h}$  es el gradiente de la cota piezométrica  $h$ .

Lo anterior implica que la permeabilidad es una propiedad tensorial, resultando entonces un tensor de 9 componentes, así:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

Ec.III.167

Este es un tensor simétrico con:

$$K_{xy} = K_{yx}; \quad K_{xz} = K_{zx}; \quad K_{yz} = K_{zy}$$

Ec.III.168

Sin embargo, físicamente solo hay escurrimiento en aquellas direcciones donde el gradiente es paralelo a la permeabilidad. Matemáticamente  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ , son las direcciones de los vectores propios de la matriz, estas direcciones son llamadas direcciones principales de anisotropía del medio. En este caso el tensor se reduce a tres componentes diagonales:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{bmatrix}$$

Ec.III.169

En un medio estratificado es evidente que las direcciones paralelas y perpendiculares a la estratificación son direcciones privilegiadas de escurrimiento, en las cuales el gradiente de carga y

las velocidades se confunden, es decir que las componentes del tensor se reducen a las componentes diagonales.

En la práctica, en los medios estratificados horizontalmente se distinguirán dos permeabilidades: una permeabilidad vertical  $K_{zz}$  y una permeabilidad horizontal  $K_{xx} = K_{yy}$ , la relación de anisotropía  $K_{zz} / K_{xx}$  está comprendida entre 1 y 100.

# CAPÍTULO IV

---

Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

## MODELOS REOLÓGICOS

# CAPÍTULO IV

## MODELOS REOLÓGICOS

El modelo matemático descrito en el capítulo anterior debe ser completado mediante una ecuación adicional, que relacione los tensores de tensiones o sus incrementos con las deformaciones o sus velocidades. Se trata de las ecuaciones constitutivas que en mecánica de fluidos suelen ser denominadas modelos reológicos.

En el caso del análisis de la iniciación del deslizamiento, se ha dedicado un gran esfuerzo a desarrollar modelos constitutivos precisos capaces de describir los aspectos más relevantes de su comportamiento. Hoy en día, hay todo un abanico de modelos y como ejemplos se pueden citar:

1. Modelos elastoplásticos.
2. Modelos viscoplásticos.
3. Modelos hipoplásticos.
4. Modelos de plasticidad generalizada, etc.

No obstante, no existe ningún modelo capaz de reproducir el comportamiento de las mezclas de suelo bajo todos los estados de esfuerzo que se generan en un deslizamiento rápido (desde su iniciación hasta su finalización, pasando por su propagación). Además, una vez que se haya producido la fluidificación del suelo los modelos a utilizar son distintos a aquellos utilizados para reproducir la fase de iniciación del movimiento.

Básicamente, existen dos líneas de investigación dedicadas al estudio del comportamiento de los geomateriales fluidificados. La primera fue iniciada por Takahashi (1978). Este autor considera que el material que forma los flujos de derrubios está constituido por partículas dispersas en un fluido viscoso. Bajo esta premisa, Takahashi asume la aplicabilidad de la teoría de Bagnold (1954) referente a flujos rápidos de partículas esféricas uniformes. El modelo de Bagnold es válido para describir el comportamiento de los flujos extremadamente rápidos de masas secas formadas por partículas sin cohesión, ya que en este escenario prevalecen los efectos de las colisiones. Sin embargo, su uso no es aconsejable en el caso de mezclas de agua y suelo, tal y como los flujos de derrubios (Coussot & Meunier, 1996). Igualmente, la teoría inicial de Bagnold es incapaz de predecir o proporcionar información respecto a la tensión de fluencia de los flujos de derrubios que, por otro lado, según las observaciones de campo es una de las características principales de estos eventos. La tensión de fluencia está asociada a la red de interacciones entre las partículas arcillosas que se forma a través del material (Michaels & Bolger, 1962; Firth & Hunter, 1976; Van Olphen, 1977; Coussot et al., 1993).

Esta red debe romperse para que el flujo tenga lugar. Por lo tanto, la tensión de fluencia corresponde a la tensión mínima que hay que superar para que haya flujo. Este hecho, explica los grandes espesores de los depósitos de flujos de derrubios que pueden llegar a observarse incluso en altas pendientes. Sobre la base de este comportamiento, se ha iniciado una segunda línea de investigación que considera estos flujos como fluidos viscoplásticos. A este respecto, se han propuesto varios modelos que han sido desarrollados a partir de:

- ❖ Los datos experimentales obtenidos con los reómetros (Locat & Demers, 1988; O'Brien & Julien, 1988; Coussot & Piau, 1994a, 1995) para la fracción fina de los flujos de derrubios o con reómetros de gran escala.
- ❖ La información resultante de las consideraciones teóricas (Julien & Lan, 1991).
- ❖ Las observaciones de campo (Johnson & Rodine, 1984; Pierson, 1986).

El modelo viscoplástico más utilizado es el modelo de Bingham (Bingham & Green, 1919). Sin embargo, trabajos recientes (Nguyen & Boger, 1983; Coussot & Piau, 1994; Atapattu et al., 1995) han propuesto utilizar el modelo de Herschel – Bulkley (Herschel & Bulkley, 1926), que es más sofisticado que el anterior.

En este capítulo presentamos los modelos reológicos más relevantes capaces de describir el comportamiento de los suelos fluidificados. En este contexto, en una primera fase se describen los mecanismos de licuación o fluidificación, que causan la transformación del suelo de un material con comportamiento sólido a un material con comportamiento fluido. En paralelo, se describen algunos aparatos y procedimientos de laboratorio que permiten determinar las propiedades de los materiales fluidificados, así como algunos aspectos básicos del comportamiento de estos materiales. Seguidamente, se introduce un marco general dentro del cual se pueden describir leyes reológicas como la de los fluidos Newtonianos, los fluidos de Bagnold y los fluidos tipo Bingham. Finalmente, se integran estos modelos en profundidad al objeto de determinar los términos de tensiones integradas en profundidad y fuerzas de fricción con el fondo.

#### **IV.1 Mecanismos de fluidificación.**

En términos generales, durante la fase de iniciación del movimiento se pueden distinguir dos tipologías principales de rotura: los deslizamientos sensu stricto, (*s.s*) y los flujos. En los deslizamientos *s.s*, la masa de suelo se comporta como un cuerpo rígido que se mueve a lo largo de una superficie de rotura definida donde se localizan los esfuerzos. Esta superficie de rotura es la que se analiza de forma habitual en los estudios geotécnicos, y corresponde al fenómeno de localización de la deformación plástica. Mientras que en los flujos, la rotura tiene lugar de forma difusa en un espesor más amplio de suelo. En este contexto, cabe destacar el trabajo realizado por Darve y sus colaboradores de Grenoble, quienes han propuesto e investigado este mecanismo (Darve & Laouafa, 2001). Igualmente, son destacables los trabajos del grupo de investigación de Manuel Pastor (Pastor et al., 2002; Fernández – Merodo et al., 2004).

Evidentemente se pueden dar situaciones mucho más complejas, tales como procesos mixtos donde la licuación se ha desarrollado en una zona limitada, o deslizamientos que al recibir aportes de agua durante su propagación presentan un comportamiento similar al de una rotura difusa. En general, los deslizamientos más catastróficos suelen estar relacionados con la licuación de material poroso. Por lo tanto, es de suma importancia relacionar los mecanismos de rotura localizada y difusa con las propiedades constitutivas del geomaterial.

Los deslizamientos rápidos se caracterizan por una aceleración de la masa del suelo supuestamente causada por una pérdida de resistencia. A su vez, esta pérdida de resistencia a menudo se relaciona con el reblandecimiento (softening) del material. Para analizar este fenómeno se han considerado tres ensayos triaxiales (ver figura IV.1):

- (i) Ensayo triaxial con consolidación previa y con drenaje (CD) de arena densa
- (ii) Ensayo triaxial con consolidación previa y sin drenaje (CU) de arena muy suelta
- (iii) Ensayo triaxial con consolidación previa y sin drenaje (CU) de arcilla sobreconsolidada.

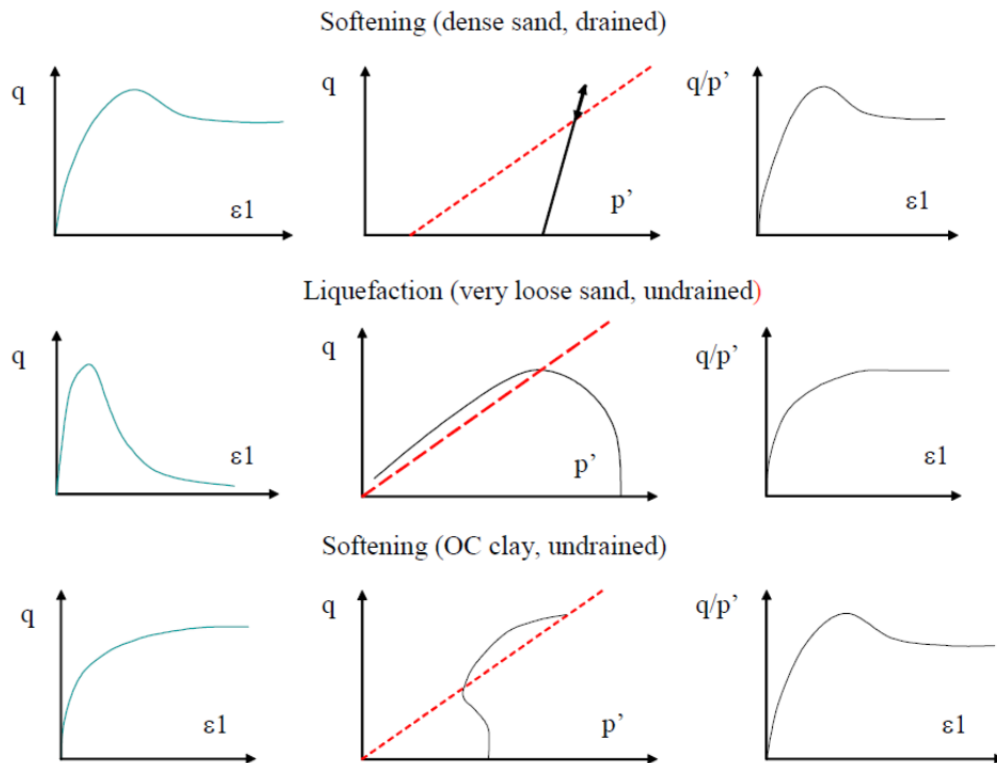


Figura IV.1.- Reblandecimiento y licuación de los geomateriales (Pastor et al., 2005)

En la Figura IV.1 se representan:

- a. Las tensiones desviadoras en función de la deformación axial
- b. El recorrido de esfuerzos en el espacio  $p' - q$ .
- c. La resistencia movilizada ( $q/p'$ ) versus la deformación axial.



La resistencia movilizada ( $q/p'$ ) representa el parámetro más significativo a la hora de analizar la respuesta del suelo. Si se compara ( $q/p'$ ) en los tres casos de la Figura IV.1, se constata que la pérdida de resistencia (reblandecimiento) se da en los ensayos CD de arena densa, y CU de la arcilla ligeramente sobreconsolidada, mientras que el ensayo CU de arena muy floja muestra un aumento continuo de la resistencia movilizada ( $q/p'$ ). Además, el pico de la deformación desviadora es mucho más acentuado en este último caso. Como resultado, se puede concluir que la mayoría de los deslizamientos rápidos están causados por la licuación en lugar de por el reblandecimiento del material.

En efecto, la licuación es a menudo responsable de los mecanismos de rotura difusa y de los deslizamientos rápidos, mientras que el reblandecimiento está más bien asociado a los mecanismos de rotura localizada, tales como los deslizamientos traslacionales o rotacionales. Por lo tanto, a la hora de modelar estos eventos es de suma importancia tener en cuenta el incremento de presiones intersticiales que causa la licuación de los depósitos flojos estables.

## IV.2 Modelos reológicos.

Una vez desencadenado el movimiento el comportamiento del material se asemeja al de un fluido. La modelación es una tarea compleja que depende del tipo de la mezcla considerada. Por ejemplo, el escenario simple definido por un flujo de material granular con presiones intersticiales nulas, se puede considerar como una mezcla monofásica. Sin embargo, en este mismo flujo puede presentarse el fenómeno de segregación inversa según el cual la fracción más gruesa se mueve hacia la parte superior del cuerpo en movimiento quedando inutilizada la hipótesis de fase única.

Como primera aproximación, los investigadores trataron de caracterizar el comportamiento de la mezcla en su conjunto formulando modelos específicos. Para ello, se desprecia el movimiento relativo del fluido intersticial con respecto al esqueleto sólido. Como mejora de esta primera aproximación se considera que la mezcla está formada por dos fases: un esqueleto sólido y un espacio intersticial ocupado por el agua o el barro. Además, cuando la resistencia al corte es despreciable el tensor de tensiones de la mezcla puede descomponerse en presión intersticial y tensión efectiva.

En esta sección se presentan algunos modelos reológicos relevantes (Newtoniano, Bagnold, Bingham). La mayoría de estos modelos se formulan en términos de tensiones totales para una sola fase, pudiéndose generalizar para incluir las tensiones del fluido. En este contexto, parece razonable considerar el material como monofásico en el caso de las coladas de barro, y bifásico en el caso de los flujos de derrubios. La diferencia entre ambos consiste en la capacidad de la fase fluida de infiltrarse a través del sólido.

La elección de un modelo reológico u otro no es una tarea trivial. De hecho, distintos modelos pueden proporcionar resultados similares. Un ejemplo de ello es el flujo deslizante de Aberfan donde las presiones intersticiales existentes en la parte basal de la masa deslizada desempeñaron un papel primordial. Dicho flujo puede modelarse, tanto con un modelo de Bingham como con un

modelo de fluido friccional con disipación de presión de poros. Sin embargo, la última aproximación representa mejor lo ocurrido.

#### IV.2.1 Marco general.

Suponiendo que el fluido es isótropo y empleando el teorema de representación, el tensor de tensiones ( $\sigma$ ) puede expresarse según Malvern (1969) en función del tensor velocidad de deformación ( $d$ ) de la siguiente forma:

$$\sigma = -pl - \Phi_0 I + \Phi_1 d + \Phi_2 d^2 \quad \text{Ec.IV.3}$$

Donde  $p$  es la presión termodinámica,  $I$  es el tensor identidad,  $d$  es la velocidad de deformación, y  $\Phi_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  son funciones escalares de los invariantes de  $d$ :

$$\Phi_k = \Phi_k(I_{1d}, I_{2d}, I_{3d}) \quad \text{Ec.IV.4}$$

Los invariantes de  $d$  se definen como:

$$I_{kd} = \frac{1}{k} \text{tr}(d^k) \quad \text{Ec.IV.5}$$

Es decir:

$$I_{1d} = \text{tr}(d); \quad I_{2d} = \frac{1}{2} \text{tr}(d^2); \quad I_{3d} = \frac{1}{3} \text{tr}(d^3) \quad \text{Ec.IV.6}$$

En la mayoría de los modelos se asume que el flujo es incompresible, es decir:

$$\sum \varepsilon_i = 0 \quad \text{Ec.IV.7}$$

Sabiendo que:

$$I_{1d} = \text{tr}(d) = \sum \varepsilon_i \quad \text{Ec.IV.8}$$

Como resultado, en el caso de un material incompresible se tiene que:  $I_{1d} = 0$ . Esto es consistente, tanto con la descomposición del deslizamiento en propagación y consolidación vertical como con el hecho de que el suelo experimenta una rotura a volumen constante. Sin embargo, hay que tener presente que se trata de una hipótesis que precisa de ciertas suposiciones para cumplirse. En resumen, suponiendo que el flujo es incompresible y despreciando  $I_{3d}$  se puede escribir:

$$\Phi_k = \Phi_k(I_{2d}) \quad \text{Ec.IV.9}$$

Cabe señalar que la expresión anterior no es válida para la fase de iniciación del deslizamiento y su aplicación a este caso puede llevar a errores considerables.

El tensor de tensiones ( $\sigma$ ) puede descomponerse en su componente hidrostática ( $\hat{p}$ ) y desviadora ( $s$ ) de la siguiente manera:

$$\sigma = -\hat{p}I + s \quad \text{Ec.IV.10}$$

Siendo:

$$\hat{p} = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = -\frac{1}{3}(-3p - 3\Phi_0 + \Phi_2 \text{tr}(d^2)) = p + \Phi_0 - \frac{2}{3}\Phi_2 I_{2d} \quad \text{Ec.IV.11}$$

Por su parte, la componente desviadora puede obtenerse como:

$$s = -\frac{2}{3}\Phi_2 I_{2d}I + \Phi_1 d + \Phi_2 d^2 \quad \text{Ec.IV.12}$$

Siendo el flujo isocórico, la componente hidrostática del tensor velocidad de deformación es nula. Es decir que  $d$  sólo posee una parte desviadora.

$$d = dev(d) \quad \text{Ec.IV.13}$$

De modo que se puede escribir:

$$s = -\frac{2}{3}\Phi_2 I_{2d}I + \Phi_1 dev(d) + \Phi_2 \{dev(d)\}^2 \quad \text{Ec.IV.14}$$

Por lo tanto, el tensor ( $\sigma$ ) puede expresarse como:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 dev(d) + \Phi_2 d^2 \quad \text{Ec.IV.15}$$

O de forma alternativa:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 dev(d) + \Phi_2 \{dev(d)\}^2 \quad \text{Ec.IV.16}$$

A continuación se consideran dos casos particulares de movimiento:

- a. El flujo tangencial simple
- b. El flujo bidimensional en condiciones de deformación plana.

**a) Flujo tangencial simple.**

Se considera un flujo tangencial simple que tiene lugar en el plano  $x_1, x_3$ , siendo el campo de velocidades del tipo:

$$\begin{aligned}v_1 &= v_1(x_3) \\v_2 &= v_3 = 0\end{aligned}$$

Ecs.IV.17

En este caso,  $d$  y  $d^2$  vienen dados por:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ec.IV.18

$$d^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Ec.IV.19

Como resultado, se obtiene:

$$I_{2d} = \frac{1}{2} \text{tr} (d^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2$$

Ec.IV.20

Por lo tanto, el tensor de tensiones resulta:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \Phi_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Ec.IV.21

De este modo, se establecen los componentes del tensor de tensiones para un flujo tangencial simple:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = -p - \Phi_0 + \frac{1}{4} \Phi_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2$$

$$\sigma_{22} = -p - \Phi_0$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{1}{2} \Phi_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$$

Ecs.IV.22

Donde:  $\Phi_k = \Phi_k(I_{2d})$ ,  $k = 0, 1, 2$

Observando las expresiones recogidas en (IV.22) se puede concluir que la velocidad de deformación  $\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)$  influye tanto en las tensiones de corte  $\sigma_{13}$  y  $\sigma_{31}$  como en las tensiones normales  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{33}$ . Esta contribución se denomina tensión dispersiva.

La expresión de los componentes de la tensión (IV.22) se utiliza para extender a condiciones de tensión más generales los resultados obtenidos en los reómetros de flujo tangencial simple.

### b) Flujo bidimensional.

Asumiendo que el flujo tiene lugar en el plano  $x_1, x_3$ , se obtiene:

$$d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & 0 & 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Ec.IV.23

Con  $d_{11} + d_{33} = 0$ ,  $d_{13} = d_{31}$ .

De este modo se puede deducir:

$$d^2 = \begin{bmatrix} d_{11}^2 + d_{13}^2 & 0 & d_{13}(d_{11} + d_{33}) \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31}(d_{11} + d_{33}) & 0 & d_{33}^2 + d_{13}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 + d_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^2 + d_{13}^2 \end{bmatrix}$$

Ec.IV.24

Como consecuencia, el tensor de tensiones viene dado por:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{bmatrix} + \Phi_2 \begin{bmatrix} d_{11}^2 + d_{13}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^2 + d_{13}^2 \end{bmatrix}$$

Ec.IV.25

Y los componentes del tensor  $\sigma$  se expresan como:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p - \Phi_0 + \Phi_1 d_{11} + \Phi_2 (d_{11}^2 + d_{13}^2) \\ \sigma_{33} &= -p - \Phi_0 + \Phi_1 d_{33} + \Phi_2 (d_{33}^2 + d_{13}^2) = -p - \Phi_0 + \Phi_1 d_{11} + \Phi_2 (d_{11}^2 + d_{13}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= -p - \Phi_0 \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \Phi_1 d_{13} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{23} = 0\end{aligned}$$

Ecs.IV.26

De nuevo se puede comprobar que:

- (i) La tensión de corte depende sólo de  $d_{13}$ .
- (ii) Los términos de tensión dispersiva dependen de  $\Phi_2 = (d_{11}^2 + d_{13}^2)$ .

#### IV.2.2 Fluidos Newtonianos.

El fluido Newtoniano corresponde al modelo reológico más simple, caracterizándose por un sólo parámetro constitutivo: la viscosidad del fluido ( $\mu$ ).

De este modo, en el caso de un flujo tangencial simple la resistencia al corte ( $\sigma_{13}$ ) viene dada por:

$$\sigma_{13} = \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$$

Ec.IV.27

Los valores típicos de la viscosidad con unidades Pa\*s en el sistema MKS son los mostrados en la Tabla IV.1:

Tabla IV.1.- Valores de la viscosidad (Adaptada de Johnson A., 1984).

Material	$\mu$ (Pa s)
Aire	1 E -6
Agua	1 E -3
Barro	1 E -2

Los valores anunciados en la Tabla IV.1 pueden variar con la temperatura.

Al comparar (IV.27) y (IV.22), se puede deducir la siguiente relación:

$$\mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \Phi_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$$

Ec.IV.28

Por lo tanto se obtiene:

$$\Phi_1 = 2\mu$$

Ec.IV.29

En consecuencia, la expresión general del modelo newtoniano resulta:

$$\sigma = -pI + 2\mu \operatorname{dev}(d)$$

Ec.IV.30

### IV.2.3 Fluidos de Bagnold.

Bagnold (1954) propuso un modelo que explica el comportamiento observado en su reómetro. Dicho modelo es válido para condiciones de flujo tangencial simple. El ensayo de Bagnold se lleva a cabo con volumen constante e identifica dos regímenes diferentes de flujo dependiendo de si predomina el efecto de la viscosidad o el de las colisiones. Estos regímenes se denominan: régimen macro – viscoso; y régimen inercial.

Para el régimen inercial, Bagnold definió las siguientes expresiones de las tensiones tangencial y normal donde las compresiones se consideran negativas:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= a_i \sin \left[ \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\ \sigma_{33} &= p + a_i \cos \left[ \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Ecs.IV.31

Donde:  $p$  es la presión termodinámica introducida en la ecuación IV.3.

$a_i = 0.042$ ,  $\tan \alpha_i = 0.4$ , estas expresiones son válidas para  $\lambda \geq 12$ .

La ecuación IV.31 demuestra que la tensión normal,  $\sigma_{33}$ , depende de la velocidad de deformación,  $\left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$ . Esta componente se denomina presión dispersiva, pudiendo observarse bajo condiciones isocóricas (volumen constante).

Al comparar las expresiones precedentes con la ecuación IV.22, se obtienen los componentes del tensor  $\sigma$  para un fluido de Bagnold.

$$\begin{aligned}\sigma_{13} = \sigma_{31} &= \frac{1}{2} \phi_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \sigma_{13}^{turb} + a_i \sin \left[ \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] \\ \sigma_{33} &= -p - \phi_0 + \frac{1}{4} \phi_2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 = -p - a_i \cos \left[ \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Ecs.IV.32

Como resultado se llega a:

$$\begin{aligned}\phi_0 &= 0 \\ \phi_1 &= 2a_i \sin \left[ \alpha_i \rho \lambda^2 c^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \right] = 4a_i \sin[\alpha_i \rho \lambda^2 c^2 (I_{2d})^{0.5}]\end{aligned}$$

$$\phi_2 = -4a_i \cos[\alpha_i \rho \lambda^2 c^2]$$

Ecs.IV.33

Y utilizando los valores de  $I_{2d}$  para flujos tangenciales simples definidos en la ecuación IV.20, se puede obtener el modelo reológico general del fluido de Bagnold:

$$\begin{aligned} \sigma &= -pI + \phi_1 dev(d) + \phi_2 d^2 \\ \sigma &= -pI + \{4a_i \sin[\alpha_i \rho \lambda^2 c^2 (I_{2d})^{0.5}]\} dev(d) - \{4a_i \cos[\alpha_i \rho \lambda^2 c^2]\} d^2 \end{aligned}$$

Ecs.IV.34

De nuevo, conviene subrayar que el modelo de Bagnold ha sido obtenido para un fluido granular, bajo condiciones de volumen constante, por lo que su generalización debe hacerse con cautela.

#### IV.2.4 Fluidos de Bingham.

Mientras los fluidos Newtoniano y Bagnold se deforman en cuando estén sujetos al esfuerzo de corte. El modelo de Bingham introduce un umbral de tensión tangencial que es preciso superar para que el flujo tenga lugar. Esto corresponde al concepto de tensión de fluencia ( $\tau_y$ ) y explica algunos fenómenos que se manifiestan en eventos tipo **FD** tales como son la parada repentina del flujo o la formación de tapones.

En condiciones de flujo tangencial simple la ley de Bingham se escribe como:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) &= \frac{1}{\mu} (\sigma_{13} - \tau_y); & \sigma_{13} > \tau_y \\ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) &= 0 & ; \quad \sigma_{13} \leq \tau_y \end{aligned}$$

Ec.IV.35

O bien:

$$\sigma_{13} = \tau_y + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)$$

Ec.IV.36

Sobre la base de la metodología seguida en los casos anteriores, se identifican los componentes de la ley reológica general de Bingham. De modo que partiendo de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \sigma_{31} &= \frac{1}{2} \phi_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = \tau_y + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \\ \sigma_{33} &= -p - \phi_0 + \frac{1}{4} \phi_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)^2 = -p \end{aligned}$$

Ec.IV.37



Se llega a:

$$\phi_0 = \phi_2 = 0$$

$$\phi_1 = 2 \frac{1}{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)} \left( \tau_y + \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \right)$$

Ecs.IV.38

Obteniendo:

$$\phi_1 = \left( \frac{2 \tau_y}{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)} \right) + 2\mu$$

Ec.IV.39

Reemplazando en la expresión anterior el valor de  $I_{2d}$  para flujos tangenciales simples dado en la ecuación IV.20:

$$\phi_1 = \left( \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} \right) + 2\mu$$

Ec.IV.40

Por lo tanto, El modelo de Bingham para condiciones generales de flujo se expresa como:

$$\sigma = -pI + \left[ \left( \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} \right) + 2\mu \right] dev(d)$$

Ec.IV.41

En el marco de los deslizamientos rápidos, la reología de Bingham se ha utilizado para modelar mezclas de suelos granulares finos con alto contenido de agua. De este modo, se puede encontrar en la bibliografía rangos de valores típicos para los parámetros de este modelo (tensión de fluencia ( $\tau_y$ ) y viscosidad ( $\mu$ )). En este sentido, Rickenmann & Koch (1997) simularon los flujos de derrubios que tuvieron lugar en los valles de Kamikamihori (Japón) y Saas (Suiza), utilizando valores de  $\tau_y$  y  $\mu$  en los rangos 100 – 800 Pa y 400 – 800 Pas respectivamente. Además, estos autores demostraron que las velocidades de propagación obtenidas con el modelo de Bingham son ligeramente más altas que las previstas por otros modelos.

En la misma línea, cabe mencionar los valores presentados en el trabajo de Jan (1997) (Tabla IV.2):

Tabla IV.2.- Valores de la viscosidad, densidad y tensión de fluencia, propuesta por algunos autores (Johnson A., 1984).

Autor	$\rho$ ((kg/m <sup>3</sup> ))	$\tau_y$ (Pa)	$\mu$ (Pa s)
Jan		100 – 160	40 – 60
Johnson	2000 – 2400	60-170 – 500	45
Sharp & Nobles	2400		20 - 60
Pierson	2090	130 – 240	210 – 810

Jin & Fread (1997) por su parte presentaron los siguientes valores para distintos eventos (Tabla IV.3):

Tabla IV.3.- Valores de la viscosidad, densidad y tensión de fluencia, propuesta para distintos eventos (Johnson A., 1984).

Emplazamiento	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\tau_y$ (Pa)	$\mu$ (Pa s)
Anhui	1570	58	2.1
Aberfan	1764	4794	958
Rudd Creek	1575	956	958

En las últimas décadas, el modelo original de Bingham ha sido mejorado para considerar efectos, tales como los componentes de la viscosidad no lineal. Esta generalización se basa en la siguiente ley de tensión tangencial simple:

$$\sigma_{13} = \tau_y + \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^\eta \tag{Ec.IV.42}$$

Donde:

, $\eta$  = Representa el tipo de modelo reológico elegido tomando el valor,  $\eta = 1$  en el caso de que este sea el modelo de Bingham.

Cuando se trata de problemas tridimensionales la ley anterior toma la forma:

$$\sigma = -pI + \left[ \left( \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} \right) + 2\mu (4I_{2d})^{\frac{\eta-2}{2}} \right] dev (d) \tag{Ec.IV.43}$$

Un caso particular de (IV.42) corresponde a la ley de Herschel – Bulkley descrita por Laigle & Coussot (1994) con  $\eta = 1/3$ . Estos autores utilizaron esta ley para simular el comportamiento de coladas de barro y flujos de derrubios.

Por su parte, la ley propuesta por Julien y Lan (1991) supone una mejora para las condiciones de flujos tangenciales simples:

$$\sigma_{13} = \tau_y + \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + v \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^2$$

Ec.IV.44

Donde:

$$v = \rho l_m^2 + \hat{\alpha}_i \rho_s \lambda^2 d_s^2$$

Ec.IV.45

Siendo:

$l_m$  = Es la longitud de la mezcla. Este parámetro puede aproximarse como  $0.4h$  donde  $h$  es la profundidad del flujo.

$\hat{\alpha}_i$  = Es un parámetro del material. Su valor se toma como 0.01 en la mayoría de los casos y corresponde  **$\alpha_i$  sin  $\alpha_i$**  en el modelo de Bagnold.

A su vez, el modelo (IV.44) puede generalizarse a situaciones tridimensionales de la siguiente manera:

$$\sigma = -pI + \left[ \left( \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2d}}} \right) + 2\mu + 4v \sqrt{I_{2d}} \right] dev(d)$$

Ec.IV.46

#### IV.2.5 El modelo viscoplástico generalizado de Chen & Ling.

Chen & Ling (1996) proponen un modelo capaz de englobar a muchos modelos reológicos como casos particulares. La idea de partida de este modelo es generalizar las siguientes relaciones válidas para condiciones de flujos tangenciales simples:

$$\sigma_{13} = s + \mu_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^{\eta_1}$$

$$\sigma_{33} = -p + \frac{1}{3} \mu_2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^{\eta_2}$$

Ec.IV.47

En la expresión anterior  $s$  representa la tensión de fluencia de Mohr – Coulomb:

$$s = c \cos \phi + p \sin \phi$$

Ec.IV.48

Donde:

$c$  = Corresponde a la cohesión

$\phi$  = Es el ángulo de fricción.

Los autores propusieron expresiones específicas para los parámetros del modelo  $\mu_1, \mu_2, \eta_1$  y  $\eta_2$ .

Empleando la misma metodología utilizada en los modelos precedentes se puede escribir:

$$\phi_1 = \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{\eta_1-1}{2}}$$

$$\phi_2 = \frac{4}{3} \mu_2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)^{\eta_2-2} = \frac{4}{3} \mu_2 (I_{2d})^{\frac{\eta_2-2}{2}}$$

Ecs.IV.49

De modo que la ley general resulta:

$$\sigma = -pI \left\{ \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{\eta_1-1}{2}} \right\} d + \left\{ \frac{4}{3} \mu_2 (I_{2d})^{\frac{\eta_2-2}{2}} \right\} d^2$$

Ec.IV.50

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{d} = \mathbf{dev}(\mathbf{d})$  para flujos tangenciales simples se obtiene:

$$\sigma = -pI \left\{ \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{\eta_1-1}{2}} \right\} \mathbf{dev}(d) + \left\{ \frac{4}{3} \mu_2 (I_{2d})^{\frac{\eta_2-2}{2}} \right\} d^2$$

Ec.IV.51

Los reómetros disponibles simulan flujos tangenciales simples en cuyo caso el tercer invariante del tensor velocidad de deformación es nulo. Esto justifica que la ley establecida en la ecuación IV.51 no dependa de este invariante.

Es primordial comprobar la consistencia de las condiciones cuando la velocidad de deformación es muy pequeña ( $d \rightarrow 0$ ). En este caso los términos de la ecuación IV.51 se anulan excepto  $\left( \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} \right)$  y el término de presión. Obteniéndose en el límite:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = -pI + \left( \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} \right) d$$

Ec.IV.52

Puesto que  $\left( \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} \right)$  es un escalar, la tensión depende de la dirección del tensor velocidad de deformación. Para un flujo tangencial simple se tiene:

$$\sqrt{I_{2d}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$$

Ec.IV.53

Los componentes del tensor de tensiones vienen dados por:

$$\sigma_{11} = \sigma_{33} = -p$$

$$\sigma_{13} = s = c \cos \phi + p \sin \phi$$

Ec.IV.54

La expresión IV.54 sólo satisface el criterio de Mohr – Coulomb si  $\phi = 0$ . Asimismo, es preciso eliminar ciertas inconsistencias del modelo para relacionar los resultados obtenidos con las aproximaciones clásicas de la mecánica de sólidos o de suelos. En este sentido, Chen y Ling proponen relajar las condiciones de flujo tangencial simple, en el que  $d_{11} = 0$ ,  $d_{33} = 0$ .

En condiciones de deformación plana la expresión IV.25 se escribe como:

$$\sigma = -pI + \phi_1 \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Ec.IV.55}$$

Con:

$$\phi_1 = \frac{s}{\sqrt{I_{2d}}} + 2\mu_1 (4I_{2d})^{\frac{\eta_1-1}{2}} \quad \text{Ec.IV.56}$$

Donde:

$$\sqrt{I_{2d}} = \sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2} \quad \text{Ec.IV.57}$$

Y con la condición de incompresibilidad  $d_{11} + d_{33} = 0$

Los componentes del tensor de la tensión en estas condiciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p - (c \cos \phi + p \sin \phi) \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} \\ \sigma_{33} &= -p + (c \cos \phi + p \sin \phi) \frac{d_{33}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} \\ \sigma_{13} &= (c \cos \phi + p \sin \phi) \frac{d_{13}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} \end{aligned} \quad \text{Ecs.IV.58}$$

Teniendo en cuenta el ángulo  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} &= \cos \beta \\ \lim_{d \rightarrow 0} \frac{d_{13}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{13}^2}} &= \sin \beta \end{aligned} \quad \text{Ecs.IV.59}$$

La expresión (IV.58) se expresa como:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -p - (c \cos \phi + p \sin \phi) \cos \beta \\ \sigma_{33} &= -p + (c \cos \phi + p \sin \phi) \cos \beta \\ \sigma_{13} &= (c \cos \phi + p \sin \phi) \sin \beta\end{aligned}$$

Ecs.IV.60

Tal y como se contempla en la Figura IV.7, los componentes de las ecuaciones IV.60 cumplen el criterio de Mohr – Coulomb:

$$(\sigma_{11} + p)^2 + \sigma_{13}^2 = (c \cos \phi + p \sin \phi)^2 = s^2$$

Ec.IV.61

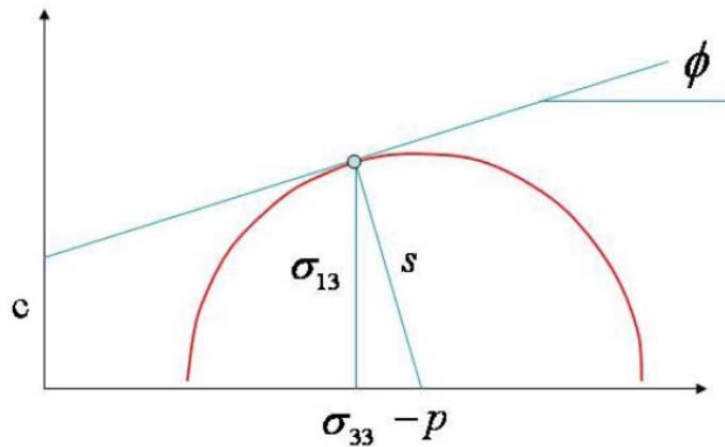


Figura IV.7.- Criterio de Mohr – Coulomb para flujos incompresibles de Chen & Ling en condiciones de deformación plana para el caso  $d \rightarrow 0$  (MIDI, 2004).

Cabe destacar que el llamado estado activo ( $|\sigma_{11}| < |\sigma_{33}|$ ) corresponde a  $\cos \beta > 0$  o lo que es lo mismo  $d_{11} > 0$ , mientras que el estado pasivo ( $|\sigma_{11}| > |\sigma_{33}|$ ) viene dado por  $\cos \beta < 0$  y  $d_{11} < 0$ .

De forma más general estos resultados pueden interpretarse mediante el proceso de fluidificación o licuación. Así, la rotura del suelo se produce en el estado crítico sin cambios de volumen. Por su parte, la velocidad de deformación cumple la condición de incompresibilidad estando cerca del límite  $d \rightarrow 0$ . Cuando la velocidad y la velocidad de deformación se incrementan la tensión abandona la superficie de fluencia, y el comportamiento del material se rige por las ecuaciones generales (IV.51).

Dentro de este marco general se pueden emplazar otros modelos como por ejemplo el modelo propuesto por Johnson (1996). También cabe mencionar el modelo general propuesto por Hutter y colaboradores (Hutter et al., 1996) quienes propusieron la descomposición del tensor de la tensión de la fase granular en sus componentes estática y dinámica:

$$\begin{aligned}\sigma^{static} &= -p^{static} I + 2 \mu^{static} d \\ \sigma^{dynamic} &= -p^{dynamic} I + 2 \mu^{dynamic} d + 4\eta d^2\end{aligned}$$

Ec.IV.62

#### IV.2.5.1 El modelo friccional.

La mayoría de los códigos integrados en profundidad disponibles utilizan leyes reológicas simples debido a la dificultad que supone implementar modelos, tal y como el viscoplástico generalizado de Cheng & Ling. A este respecto, un modelo simple de particular interés que se obtiene a partir del modelo de Cheng & Ling es el modelo friccional en el cual se desprecian la cohesión y los términos viscosos.

En este caso, la distribución vertical de la tensión tangencial y resistencia tangencial vienen dadas por:

$$\tau(z) = \rho g (h - z) \sin \theta \quad \text{Ec.IV.63}$$

Y:

$$s(z) = \rho'_d g (h - z) \cos \theta \quad \text{Ec.IV.64}$$

Puesto que ambas distribuciones son lineales si las magnitudes representadas en las ecuaciones IV.63 y IV.64 son iguales en el fondo también lo serán a lo largo de la profundidad del deslizamiento. De modo que se cumple:

$$\tan \theta = \left( \frac{\rho'_d}{\rho} \right) \quad \text{Ec.IV.65}$$

En este caso no es posible obtener la distribución de la velocidad sin información adicional. Por ello, los modelos puramente friccionales integrados en profundidad no pueden incluir un factor de corrección del momento lineal.

Por otro lado, tampoco es posible obtener la distribución vertical de la tensión tangencial puesto que la ley de fricción con el fondo se aproxima mediante:

$$\tau_b = -\rho'_d g h \tan \phi \left( \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} \right) \quad \text{Ec.IV.66}$$

En algunos casos, el suelo fluidificado fluye sobre un fondo constituido de otro material. En este caso, si el ángulo de fricción entre ambos materiales  $\delta$  es menor que el ángulo de fricción del suelo fluidificado, se tiene que la ley de fricción con el fondo resulta:

$$\tau_b = -\rho'_d g h \tan \phi_b \left( \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} \right) \quad \text{Ec.IV.67}$$

Donde el ángulo de fricción con el fondo  $\phi_b$  corresponde a:

$$\phi_b = \min(\delta, \phi) \quad \text{Ec.IV.68}$$

En este modelo simplificado se puede incluir el efecto de la presión intersticial en el fondo:

$$\tau_b = -(\rho'_d g h \tan \phi_b - p_w^b) \left( \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} \right) \quad \text{Ec.IV.69}$$

De la ecuación anterior se puede concluir que la presión intersticial tiene un efecto similar al de una disminución del ángulo de fricción.

Los modelos friccionales pueden complementarse mediante información tomada en los canales del flujo acerca de la fricción con el fondo. En este sentido, cabe mencionar la ecuación de Chezy – Manning:

$$\tau_i^b = -\rho \left( \frac{g n^2 |\bar{v}|}{h^{\frac{7}{3}}} \right) \bar{v}_i \quad \text{Ec.IV.70}$$

Donde  $n$  corresponde al número de Manning y  $g$  a la gravedad.

Otro modelo interesante que ha demostrado ser idóneo para simular el comportamiento de las avalanchas de rocas es el fluido Voellmy (Hungar, 1995 y Evans et al., 2001). En este caso, la ley de fricción con el fondo se escribe de la siguiente manera:

$$\tau_b = - \left\{ (\rho'_d g h \tan \phi_b - p_w^b) \left( \frac{\bar{v}_i}{|\bar{v}|} \right) + \rho g \frac{|\bar{v}|}{\xi} \bar{v}_i \right\} \quad \text{Ec.IV.71}$$

Este modelo introduce un término de fricción debido a la disipación de la turbulencia. Por su lado, el coeficiente de turbulencia  $\zeta$  tiene en cuenta el espesor de la capa del fondo donde tiene lugar la mayor parte de la deformación tangencial en los materiales granulares.

En el caso de los fluidos friccionales, se consideran un parámetro  $K_\theta$  que relaciona las tensiones verticales y horizontales. Estimar el valor de este parámetro no es una tarea sencilla puesto que puede cambiar con el aumento de la velocidad de corte.

### IV.3 Modelos reológicos integrados en profundidad.

Un modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema físico, y en particular el sistema de un flujo, sólo se puede definir después de considerar el nivel de aproximación requerido, para alcanzar un nivel de precisión aceptable para un número de variables, tanto dependientes como independientes, que en su conjunto describen el sistema y su comportamiento. De este modo, para describir adecuadamente la evolución del sistema pueden ser imprescindibles las tres variables del espacio (aproximación tridimensional). No obstante, podría ser suficiente una aproximación unidimensional, si predomina la influencia de una variable espacial. Asimismo, el nivel espacial de la aproximación podría ser: unidimensional, bidimensional o tridimensional.



Como resultado, los modelos matemáticos para la fase de propagación de los movimientos rápidos de ladera, se pueden clasificar en:

1. Formulaciones en tres dimensiones completas (3D), donde las ecuaciones de balance de masa y balance de momento lineal están resueltas en un dominio que cambia con el tiempo.
2. Modelos integrados en profundidad: en los que se aplica una simplificación en la estructura vertical del flujo, integrando las ecuaciones de balance en profundidad. De ahí surgen las ecuaciones llamadas integradas en profundidad o ecuaciones de aguas someras.

El modelo integrado en profundidad, se puede simplificar aún más, integrando las ecuaciones en las secciones transversales. De modo que se consiguen modelos unidimensionales (1D) simplificados.

Los modelos tridimensionales son completos, pero muy caros en lo que a tiempo de cálculo se refiere. Mientras que los modelos integrados en profundidad son más eficientes, ya que nos proporcionan una buena relación costo – fiabilidad de resultados, que justifica su idoneidad para simular gran parte de los problemas de movimientos rápidos de ladera.

Para obtener dicho modelo, se parte de las ecuaciones obtenidas para materiales saturados con densidad constante, sin influencia térmica:

$$\rho \left( \frac{D v_0}{Dt} \right) = \rho b + \text{div } \sigma \quad \text{Ec.IV.72}$$

$$\text{div } v_0^{(s)} = 0 \quad \text{Ec.IV.73}$$

$$\frac{1}{K_T} \left( \frac{D p_w}{Dt} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left( k_w \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right) \quad \text{Ec.IV.74}$$

A continuación, para simplificar la notación, no se escribirán en las ecuaciones los subíndices  $\theta$  del campo de velocidades y  $I$  en el campo de presiones.

Si se tiene en cuenta la condición de incompresibilidad del material, la ecuación IV.72 puede ser escrita en forma conservativa como:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho b_i \quad \text{Ec.IV.75}$$

Estas ecuaciones se integran en la dirección normal al terreno, haciendo uso de la regla de Leibnitz y de la descomposición de Reynolds.

La regla de Leibnitz que se aplicara para integrar las ecuaciones en profundidad establece que:

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s} F(r, s) dr = \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b F(r, s) dr - F(b, s) \frac{\partial b}{\partial s} + F(a, s) \frac{\partial a}{\partial s}$$

Ec.IV.76

Donde  $a$  y  $b$  son funciones diferenciables de  $s$ , y  $F(r, s)$ , y  $\left(\frac{\partial F(r, s)}{\partial s}\right)$  son continuas en  $r$  y en  $s$ .

Por otro lado, según la descomposición de Reynolds una variable se descompone en su valor medio y su fluctuación en altura:

$$a = \bar{a} + a'$$

Ec.IV.77

Donde el valor promedio es:

$$\bar{a} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} a(x_3) dx$$

Ec.IV.78

En algunos casos, como ocurre con los flujos de derrubios, existen variaciones de tipo turbulento que se superponen a un estado promediado en el tiempo. Si se integran las ecuaciones del modelo en un tiempo representativo  $T$ , se obtiene un término adicional, equivalente a las tensiones de Reynolds, denominado  $\sigma_{ij}^R$ , que viene dado por la expresión:

$$\sigma_{ij}^R = -\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\rho v_i' v_j') dt$$

Ec.IV.79

Y que, a su vez, se añade a las tensiones promediadas en el tiempo.

En la expresión anterior,  $v_i'$  representa las fluctuaciones de la velocidad  $v_i$ , alrededor de su media temporal  $\bar{v}_i$ .

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = \bar{v}_i(x_1, x_2) + v_i'(x_1, x_2, x_3)$$

Ec.IV.80

Por tanto, el tensor de tensiones  $\bar{\sigma}_i$  con la contribución de las tensiones de Reynolds es:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \sigma_{ij} dx_3 - \frac{\rho}{h} \int_z^{z+h} v_i' v_j' dx_3$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{h} \left( \int_z^{z+h} \sigma_{ij} dx_3 - \rho \int_z^{z+h} v_i' v_j' dx_3 \right)$$

Ec.IV.81

A partir de ahora, se supondrá que el tensor de tensiones  $\bar{\sigma}_i$ , incluye las tensiones de Reynolds, y por sencillez se simplificará la notación, asumiendo que las tensiones son valores promediados.

Se empleará aquí el sistema de referencia dado en la Figura IV.8, donde se han representado algunas magnitudes relevantes de este problema.

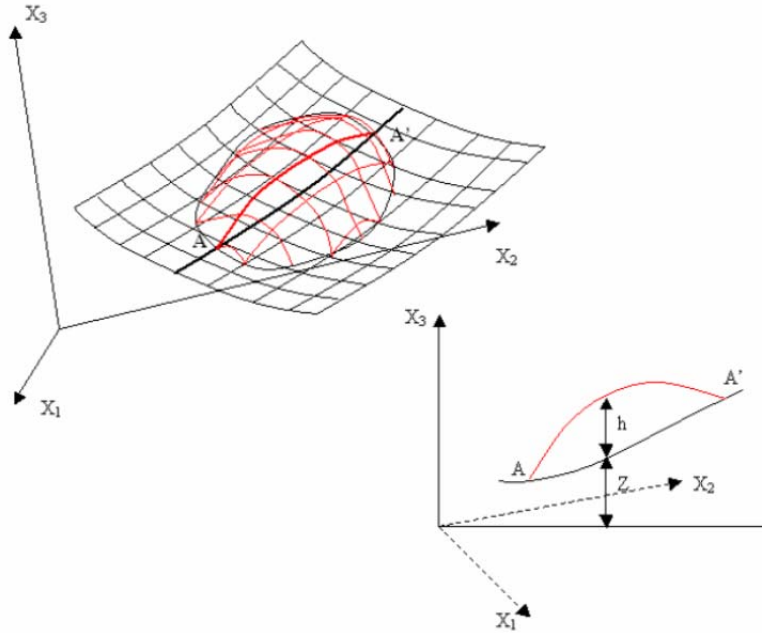


Figura IV.8.- Sistema de referencia empleado en el modelo (Coussot & Piau, 1995).

### Propagación.

Al aplicar la regla de Leibnitz a la ecuación de balance de masa del modelo de propagación:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} v_j = 0$$

Ec.IV.82

Se obtiene:

$$\int_z^{z+h} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_z^{z+h} v_j dx_3 - \left[ v_j \frac{\partial(z+h)}{\partial x_j} - v_3|_{z+h} \right] + \left[ v_j \frac{\partial z}{\partial x_j} - v_3|_z \right] = 0$$

Ec.IV.83

Desarrollando esta ecuación y teniendo en cuenta el valor promedio de la velocidad, así como la impermeabilidad del fondo ( $v_3|_{z=0}$ ) y que  $\frac{D}{Dt}(h+z) = v_3$ , se llega a:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial t} (h+z) - \frac{\partial}{\partial t} (z) = 0$$

Ec.IV.84

Y, por lo tanto, la ecuación de balance de masa integrada en profundidad resulta:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \bar{v}_j) = 0; \quad \text{con } j = 1, 2$$

Ec.IV.85

Donde  $\bar{v}_j$  es la componente según  $X_j$  de la velocidad promediada en profundidad. Por otro lado, integrando la ecuación de balance de momento lineal a lo largo de  $X_3$ :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) + \rho b_i$$

Ec.IV.86

Se obtiene:

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{z+h} v_i dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_z^{z+h} v_i v_j dx_3 \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_z^{z+h} \sigma_{ij} dx_3 + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h$$

Ec.IV.87

Donde  $t_i^A$  y  $t_i^B$  son las tensiones, que actúan en la superficie y en la base del deslizamiento respectivamente, y que están dadas por:

$$t_i^A = - \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial (z+h)}{\partial t} - \sigma_{3j} \right]_{z+h} = - \sigma_{ij} \cdot n_j|_{z+h}$$

$$t_i^B = \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial (z)}{\partial t} - \sigma_{3j} \right]_z = \sigma_{ij} \cdot n_j|_z$$

Ecs.IV.88

Siendo  $\sigma_{ij}$  tensor de tensiones promediado en profundidad, el cual puede escribirse como:

$$\bar{\sigma} = -\bar{p}I + \bar{s}$$

Ec.IV.89

Donde  $\bar{s}$  y  $-\bar{p}I$  representan respectivamente las partes desviadora y la presión isotrópica del tensor de tensiones promediado en profundidad.

Por su parte, la presión isotrópica integrada en profundidad viene dada por:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho g h$$

Ec.IV.90

Teniendo en cuenta, la descomposición de la velocidad, el tensor de tensiones de Reynolds presentado en la ecuación IV.81 y la relación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_z^{z+h} v_i dx_3 = \frac{\partial}{\partial t} (h \bar{v}_i)$$

Ec.IV.91

La relación IV.87 se puede expresar como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(h \bar{v}_i \bar{v}_j) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}(h \bar{\sigma}_{ij}) + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(h \bar{v}_i \bar{v}_j) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}(h - \bar{p} \delta_{ij} + \bar{s}_{ij}) + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right]$$

Ecs.IV.92

Teniendo en cuenta las expresiones IV.89 y IV.90, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h \bar{v}_i \bar{v}_j + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{ij} \right) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}(h \bar{s}_{ij}) + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right]$$

Ec.IV.93

Según el eje  $X_3$ , la ecuación IV.92 da lugar a:

$$t_3^B = - \frac{\partial}{\partial x_3} (h \bar{\sigma}_{3j}) - t_3^A - \rho b_3 h$$

Ec.IV.94

En resumen, el submodelo de propagación integrado según  $X_3$  se expresa con notación inicial como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(h \bar{v}_j) = 0; \quad \text{con } j = 1, 2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h \bar{v}_i \bar{v}_j + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{ij} \right) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}(h \bar{s}_{ij}) + t_i^A + t_i^B + \rho b_i h \right]; \quad \text{con } j = 1, 2$$

$$t_3^B = - \frac{\partial}{\partial x_3} (h \bar{\sigma}_{3j}) - t_3^A - \rho b_3 h$$

Ecs.IV.95

Estas ecuaciones pueden expresarse en forma conservativa:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = S$$

Ec.IV.96

Donde:

$$U^T = (h, h \bar{v}_1, h \bar{v}_2)$$

$$F_1^T = \left[ h \bar{v}_1, \left( h \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{11} \right), \left( h \bar{v}_1 \bar{v}_2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{21} \right) \right]$$

$$F_2^T = \left[ h \bar{v}_1, \left( h_1 \bar{v}_1 \bar{v}_2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{12} \right), \left( h \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{22} \right) \right]$$

Ecs.IV.97

Finalmente, el término de fuente es:

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ b_1 h \\ b_2 h \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ h \bar{s}_{11} \\ h \bar{s}_{12} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ h \bar{s}_{12} \\ h \bar{s}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ t_{1A} + t_{1B} \\ t_{2A} + t_{2B} \end{pmatrix} \right]$$

Ec.IV.98

### Consolidación.

Se ha considerado la existencia de una capa saturada de altura  $h_s$  en el fondo del flujo del material (Hung, 1995). Por tanto, la disminución de la presión intersticial estará causada por la consolidación vertical de esta capa.

La ecuación en derivadas parciales de la consolidación es:

$$\frac{1}{K_T} \left( \frac{D p_w}{Dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( k_w \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right)$$

Ec.IV.99

Siendo el coeficiente de consolidación:

$$C_v = \left( \frac{k_w}{\gamma_w c} \right) = K_T k_w$$

Ec.IV.100

Donde:

$C_v$  = Coeficiente de consolidación.

$k_w$  = Permeabilidad intrínseca.

$\gamma_w$  = Peso específico del fluido.

$c$  = Compresibilidad del material.

$K_T$  = Rigidez volumétrica del esqueleto sólido.

Introduciendo el coeficiente de consolidación, la ecuación de la consolidación es:

$$\frac{\partial p_w}{\partial t} + v_i \frac{\partial p_w}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( C_v \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right)$$

Ec.IV.101

Que coincide con la obtenida en la teoría de Terzaghi – Fröhlich.

Dicha ecuación puede ser integrada en profundidad, obteniéndose:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_w h) + v_i \frac{\partial p_w}{\partial x_i} (\bar{v}_i \bar{p}_w h) = c_v \left[ \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right]_{z+h} - c_v \left[ \frac{\partial p_w}{\partial x_3} \right]_z$$

Ec.IV.102

La presión intersticial puede aproximarse mediante la expresión:

$$p_w(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=1}^{nf} N_j^3(x_3) p_{wj}(x_1, x_2, t)$$

Ec.IV.103

En la que  $N_j^3(x_3)$  son funciones de forma, que se han empleado para aproximar la variación de la presión según  $x_3$ . Entre las distintas alternativas existentes, se han elegido en este trabajo funciones de tipo armónico que satisfagan las condiciones de contorno. En el caso de que sea presión nula en superficie y flujo nulo en la base del deslizamiento, la aproximación que se construye es:

$$N_j^3(x_3) = \cos\left(\frac{2j-1}{2h} \pi (x_3 - z)\right); \quad j = 1 \dots nf$$

Ec.IV.104

Por sencillez, se tomará una única componente, llegando así a:

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_{w1} h) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k P_{w1} h) = - \frac{\pi^2}{4 h^2} c_v P_{w1}$$

Ec.IV.105

Donde  $P_{wj}$  depende de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $t$ . Esta ecuación de disipación de presiones intersticiales se incorpora al modelo general dado en la ecuación IV.96, que consta ahora de una ecuación adicional y una incógnita más. De este modo, el sistema queda como sigue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = S$$

Ec.IV.106

Donde:

$$U^T = (h, h \bar{v}_1, h \bar{v}_2, h P_{w1})$$

$$F_1^T = \left[ h \bar{v}_1, \left( h \bar{v}_1^2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{11} \right), \left( h \bar{v}_1 \bar{v}_2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{21} \right), h P_{w1} \bar{v}_1 \right]$$

$$F_2^T = \left[ h \bar{v}_1, \left( h_1 \bar{v}_1 \bar{v}_2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{12} \right), \left( h \bar{v}_2^2 + \frac{1}{2} g h^2 \delta_{22} \right), h P_{w1} \bar{v}_2 \right]$$

Ecs.IV.107

Y:

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 h \\ b_2 h \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ h \bar{s}_{11} \\ h \bar{s}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ h \bar{s}_{12} \\ h \bar{s}_{22} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t_{1A} + t_{1B} \\ t_{2A} + t_{2B} \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\pi^2}{4 h^2} c_v P_{w1} \end{pmatrix} \right]$$

Ec.IV.108

Es importante destacar que ahora aparece un término de fuente adicional debido a la disipación de presiones intersticiales.

Asumiendo que las tensiones en la superficie son nulas y que las tensiones en el fondo vienen dadas por:

$$t^B = -\rho g h \text{grad } Z - \tau_b$$

Ec.IV.109

El modelo dado en IV.95 se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div} (h \bar{v}) = 0; \quad \text{Ec. de Cont.}$$

$$\rho \frac{\partial (h \bar{v})}{\partial t} + \rho \text{div} (h \bar{v} \otimes \bar{v}) + \text{grad} \left( \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) = \rho b h + \text{div} (h \bar{s}) - \rho g h \text{grad } Z - \tau_b$$

*Ec. de Momento Lineal*

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_{w1} h) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k P_{w1} h) = -\frac{\pi^2}{4 h^2} c_v P_{w1}; \quad \text{Ec. de Consolidación}$$

Ecs.IV.110

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales al que se ha llegado representa una formulación euleriana obtenida integrando en profundidad las ecuaciones de balance de masa, las del momento lineal, además de la ecuación unidimensional de la consolidación.

Es fácil ver, que, suponiendo un volumen ficticio que corresponda a la columna integrada en profundidad, y que se mueva con su velocidad promediada  $\bar{v}$ , las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$\frac{Dh}{Dt} + h \text{div} (\bar{v}) = 0$$

$$\rho \frac{D(h \bar{v})}{Dt} + \text{grad} \left( \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) = \rho b h + \text{div} (h \bar{s}) - \rho g h \text{grad } Z - \tau_b - \rho h \bar{v} \text{div} (\bar{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_{w1} h) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k P_{w1} h) = -\frac{\pi^2}{4 h^2} c_v P_{w1}$$

Ec.IV.111



Estos sistemas de ecuaciones se pueden resolver mediante los distintos métodos numéricos disponibles (diferencias finitas, elementos finitos, volumen finito o métodos sin malla como el SPH).

Los deslizamientos rápidos son fenómenos tridimensionales complejos, que pueden describirse mediante modelos alternativos con diferente grado de precisión. En general, las ecuaciones de balance del momento lineal de los componentes de la mezcla incluyen las tensiones parciales que hay que especificar. En este sentido, se han presentado en la sección anterior varios modelos reológicos que permiten determinar el tensor de tensiones en función del tensor velocidad de deformación. No obstante, como ya ha sido explicado con anterioridad las aproximaciones en tres dimensiones (3D) son complejas y caras en lo que a tiempo de cálculo se refiere. Como alternativa, se han propuesto los modelos integrados en profundidad en los que las velocidades y las tensiones están integradas a lo largo del eje vertical. Las ecuaciones obtenidas están formuladas en términos de profundidad del flujo, velocidades y tensiones promediadas, incluyendo además las tensiones en la superficie y en el fondo. De este modo, la ecuación de balance del momento lineal integrada en profundidad, se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h\bar{v}_i) + (1 + \alpha) \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{v}_i\bar{v}_j) = b_i h + \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{\sigma}_{ij}) + |N^A| t_i^A + |N^B| t_i^B$$

Ec.IV.112

O en su forma alternativa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h\bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( h\bar{v}_i\bar{v}_j - \frac{1}{2} \rho b_3 h^2 \delta_{ij} \right) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{v}_i\bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h\bar{\sigma}_{ij}^*) + b_i h + |N^A| t_i^A + |N^B| t_i^B$$

Ec.IV.113

Donde:

- i.  $t_i^B$  = Corresponde a las tracciones en el fondo.
- ii.  $\alpha$  = Es el factor de corrección definido como:

$$\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3 = \alpha \bar{v}_i \bar{v}_j$$

Ec.IV.114

Cumpléndose la siguiente relación entre  $v_i^*$  y la velocidad integrada en profundidad:

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = \bar{v}_i(x_1, x_2) + v_i^*(x_1, x_2, x_3)$$

Ec.IV.115

- iii. Los tensores de tensiones integrados en profundidad  $\bar{\sigma}_{ij}$  y  $\bar{\sigma}_{ij}^*$  se obtienen según la descomposición:

$$\sigma_{ij} = -p^* \delta_{ij} + \sigma_{ij}^*$$

Ec.IV.116

Siendo:

$$p^* = \rho b_3 (h - x_3) \quad \text{Ec.IV.117}$$

Una vez realizada la integración en profundidad se obtiene:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}^* \quad \text{Ec.IV.118}$$

Con:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho b_3 h \quad \text{Ec.IV.119}$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = \int_z^{z+h} \sigma_{ij}^* dx_3 \quad \text{Ec.IV.120}$$

Al transformar las ecuaciones tridimensionales en el modelo bidimensional simplificado, mediante el proceso de integración en profundidad, se pierde la información sobre la estructura vertical del flujo. Por ello, resulta difícil determinar el factor  $\alpha$  definido en la ecuación IV.114, las tracciones en el fondo  $t_i^B$  y las tensiones integradas en profundidad (ecuación IV.118).

A este respecto, una solución posible frecuentemente utilizada consiste en asumir que el flujo en un punto y tiempo dado, con profundidad y velocidades promediadas dadas, tiene la misma estructura vertical que un flujo uniforme. Esto corresponde al modelo de deslizamiento infinito puesto que éste asume que la masa en movimiento tiene una profundidad constante y se mueve a velocidad constante a lo largo de una pendiente uniforme. En este sentido, el modelo de deslizamiento infinito puede utilizarse para:

1. Determinar las condiciones de desencadenamiento del deslizamiento
2. Proporcionar una estimación preliminar de la trayectoria y de las velocidades del movimiento.

A continuación, se explican los conceptos asociados al modelo de deslizamiento infinito, así como la metodología utilizada para obtener la fricción con el fondo y las tensiones integradas en profundidad.

### IV.3.1 El modelo de deslizamiento infinito.

En la Figura IV.9 se representa un deslizamiento infinito y se introducen la notación y las variables principales que se utilizarán en el análisis. Además, se considera una columna de material de longitud unitaria y profundidad  $h$  con la estructura de un flujo tangencial simple.

Puesto que la aceleración a lo largo del eje  $x$  es nula puede expresarse el equilibrio de la columna de la Figura IV.9 de la siguiente manera:

$$\rho g h \sin \theta = \tau_B \quad \text{Ec.IV.121}$$

Donde  $\rho$  es la densidad de la mezcla,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\theta$  es la pendiente y  $\tau_B$  es la fricción con el fondo.

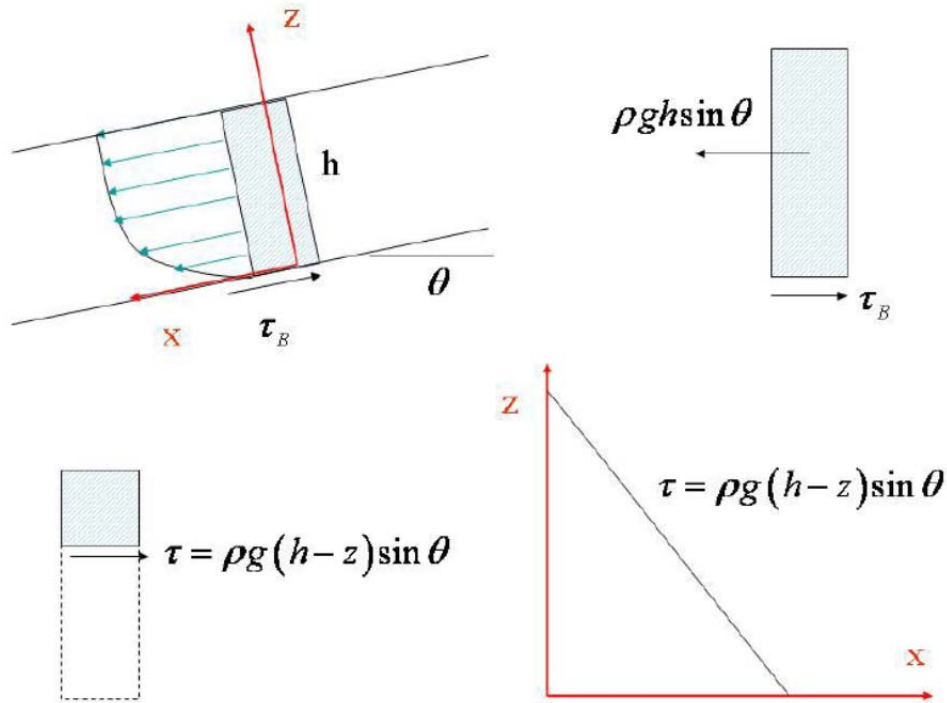


Figura IV.9.- Deslizamiento infinito (Adaptado de Johnson & Rodine, 1984).

A partir de la ecuación de equilibrio de la parte de la columna que se extiende entre la superficie y la profundidad  $(h - z)$ , se obtiene la tensión tangencial en función de  $z$ :

$$\tau = \rho g (h - z) \sin \theta = \tau_B \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad \text{Ec.IV.122}$$

De este modo, la tensión tangencial se distribuye de forma lineal siendo su valor equivalente a cero en la superficie y tomando un valor máximo en el fondo que viene dado por la ecuación IV.121. Por otro lado, la tensión tangencial se relaciona con la velocidad de deformación mediante los modelos reológicos descritos con anterioridad. Asimismo, la integración de dicha relación permite obtener el perfil de velocidades que, a su vez, proporciona la velocidad integrada en profundidad. Por último, la tensión tangencial en el fondo se obtiene una vez eliminado el ángulo de la pendiente. A continuación, se aplica esta metodología a los modelos reológicos de la sección precedente.

De este modo, una vez obtenida la velocidad  $v(\xi)$  siendo  $\xi = z/h$ , se puede expresar la velocidad en función de la velocidad promediada:

$$v(\xi) = \bar{v} f(\xi) \quad \text{Ec.IV.123}$$

Donde  $f(\xi)$  es una función que depende del modelo reológico utilizado.

Obteniendo:

$$v(\xi) = \bar{v} + v^*(\xi) \quad \text{Ec.IV.124}$$

Y:

$$v^*(\xi) = \bar{v} (f(\xi) - 1) \quad \text{Ec.IV.125}$$

A partir de la ecuación anterior IV.125 se pueden expresar los componentes de la velocidad como:

$$v_i^* = \bar{v}_i (f(\xi) - 1); \quad v_j^* = \bar{v}_j (f(\xi) - 1) \quad \text{Ec.IV.126}$$

Como consecuencia, se puede obtener el factor de corrección  $\alpha$  de la ecuación IV.114:

$$\alpha = \frac{\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3}{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \int_0^1 (f(\xi) - 1)^2 d(\xi) \quad \text{Ec.IV.127}$$

De este modo, el factor  $\alpha$  se obtiene a partir de la información proporcionada por el modelo de deslizamiento infinito.

Por otro lado, para relacionar el tensor velocidad de deformación con las tensiones integradas en profundidad se parte de la ley reológica general presentada en la ecuación IV.128:

$$\sigma = -pI - \Phi_0 I + \Phi_1 dev(d) + \Phi_2 d^2 \quad \text{Ec.IV.128}$$

Donde:

$$\Phi_k = \Phi_k(I_{2d}) \quad \text{Ec.IV.129}$$

Si la ecuación IV.128 se integra en profundidad se llega a:

$$\bar{\sigma} \neq -\bar{p}I + \bar{\Phi}_0 I + \bar{\Phi}_1 dev(\bar{d}) + \bar{\Phi}_2 \bar{d}^2 \quad \text{Ec.IV.130}$$

Es decir, la ecuación integrada en profundidad no se cumple salvo que se tratase de una ecuación lineal. Para que así sea,  $\phi_2$  tiene que anularse y  $\phi_1$  tiene que ser constante. En estas condiciones se puede escribir:

$$\bar{\sigma} = -\bar{p}I + \phi_1 \text{dev}(\bar{d})$$

Ec.IV.131

Los componentes del tensor velocidad de deformación  $d_{ij}$  promediados se obtienen de la siguiente manera:

En primer lugar, se considera el caso  $i, j = 1, 2$ , donde:

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{2h} \left( \int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_3 + \int_z^{z+h} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx_3 \right)$$

Ec.IV.132

En el marco del flujo tangencial simple (o deslizamiento infinito) considerado se utiliza un sistema de referencia donde la integral  $\frac{1}{h} \int_z^{z+h} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx_3$  viene dada por:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial v}{\partial x} dz = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h v dz - v \frac{\partial h}{\partial x} \right\}$$

Ec.IV.133

De manera que:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial v}{\partial x} dz = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$

Ec.IV.134

La expresión IV.134 puede generalizarse como:

$$\frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_3 = \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right); \quad \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx_3 = \left( \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

Ec.IV.135

Sustituyendo en la ecuación IV.132 se tiene:

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j, = 1, 2,$$

Ec.IV.136

Por otro lado, el componente  $\bar{d}_{33}$  se obtiene como sigue:

$$\bar{d}_{33} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_3 = \frac{1}{h} (v_3|_{z+h} - v_3|_z) \approx \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Ec.IV.137

Por último, suponiendo que el flujo corresponde a un deslizamiento infinito los componentes  $\bar{d}_{i3}$  con  $i = 1, 2$ , se calculan como:

$$\bar{d}_{13} = \frac{1}{h} \left( \int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3 + \int_z^{z+h} \frac{\partial v_3}{\partial x_i} dx_3 \right)$$

Ec.IV.138

El segundo término de la expresión anterior es equivalente a cero ya que  $v_3$  no depende de  $x_i$ . Por lo tanto:

$$\bar{d}_{13} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3$$

Ec.IV.139

A partir de la expresión IV.139 se calculara el término  $d_{13}$  para cada modelo reológico.

#### IV.3.2 Fluidos Newtonianos.

El punto de partida es la ecuación de tensión tangencial para fluidos Newtonianos IV.140:

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Ec.IV.140

Reemplazando IV.122 en IV.140 se obtiene:

$$\tau_B \left( 1 - \frac{z}{h} \right) = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Ec.IV.141

Integrando la ecuación IV.141 se llega a la expresión de la velocidad:

$$v = \frac{\tau_B}{\mu} \left( z - \frac{z^2}{2h} \right) = \frac{\tau_B h}{\mu} \left( 1 - \frac{z}{2h} \right) \frac{z}{h}$$

Ec.IV.142

Teniendo en cuenta que la velocidad es nula en el fondo, la velocidad integrada en profundidad resulta:

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \int_0^h v(z) dz = \frac{\tau_B h}{3\mu}$$

Ec.IV.143

Como consecuencia, la tensión tangencial en el fondo viene dada por:

$$\tau_B = \left( \frac{3\mu\bar{v}}{h} \right)$$

Ec.IV.144

Sobre la base de estos resultados puede deducirse que el deslizamiento infinito de un fluido Newtoniano:

- i. Se desencadena con una pendiente distinta de cero.
- ii. No se detiene hasta que dicha pendiente se anula.

En este caso, el factor de corrección  $\alpha$  dado por la expresión IV.127 puede escribirse como:

$$\alpha = \frac{\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3}{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \int_z^{z+h} (f(\xi) - 1)^2 dx_3$$

Ec.IV.145

La función  $f(\xi)$  se determina del siguiente modo:

$$v = \frac{\tau_B h}{\mu} \left( 1 - \frac{z}{2h} \right) \frac{z}{h} = 3\bar{v} \left( \xi - \frac{\xi^2}{2} \right)$$

$$v^* = \bar{v} \left( -1 + \xi - \frac{\xi^2}{2} \right)$$

Ecs.IV.146

Desarrollando se obtiene:

$$\alpha = \frac{\int_z^{z+h} v_i^* v_j^* dx_3}{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \int_z^{z+h} \left( -1 + \xi - \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = 0.2$$

Ec.IV.147

A su vez, el término  $\bar{d}_{13}$  viene dado por IV.139:

$$\bar{d}_{13} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \frac{\partial v_i}{\partial x_3} dx_3$$

Ec.IV.139

Utilizando la ley reológica y la linealidad del perfil de la tensión tangencial se llega a:

$$\bar{d}_{13} = \left( \frac{3\bar{v}_i}{2h} \right)$$

Ec.IV.148

### IV.3.3 Fluidos de Bingham.

#### IV.3.3.1 Reología y estructura del flujo.

La ley reológica que rige el comportamiento del fluido de Bingham viene dada por IV.149:

$$\tau = \tau_y + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Ec.IV.149

En la Figura IV.10 se presenta la estructura del flujo de Bingham. En ésta se pueden contemplar dos zonas. Así, la parte superior también denominada tapón queda delimitada por los puntos **S** y **P** siendo la tensión tangencial movilizada más pequeña que  $\tau_y$ . Por lo tanto,  $\left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$ , es decir, la velocidad es constante en esta región. En la parte inferior delimitada por los puntos **P** y **B**, la tensión movilizada es mayor que  $\tau_y$ . Se trata de la zona de corte, cumpliéndose en ella:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{\mu} (\tau - \tau_y)$$

Ec.IV.150

Para una pendiente dada puede averiguarse que la altura del tapón depende de la tensión de fluencia  $\tau_y$ . Asimismo, el momento de cese del movimiento de un fluido de Bingham corresponde a cuando la altura sea menor que una altura límite equivalente a,  $h_p = \left( \frac{\tau_y}{\rho g \sin \theta} \right)$ . El flujo se reanudara cuando se produzca un aporte de material, de tal forma que la altura sea más grande que este valor crítico.

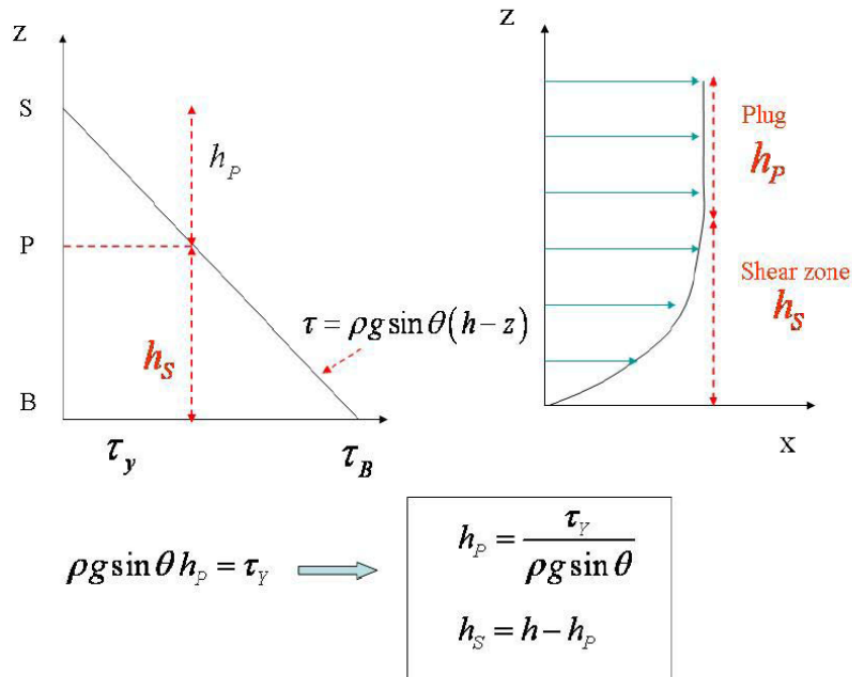


Figura IV.10.- Estructura de flujo en un fluido de Bingham con condiciones tangenciales simples (Adaptado de Johnson & Rodine, 1984).



De acuerdo con la figura IV.10 se obtienen las siguientes relaciones para un fluido de Bingham:

$$h_p = \frac{\tau_y}{\rho g h \sin \theta} = h \left( \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)$$

$$h_s = h \left( 1 - \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)$$

Ecs.IV.151

A continuación, se define la altura relativa del tapón (plug) como:

$$\eta = \frac{h_p}{h} = \left( 1 - \frac{h_s}{h} \right) = \left( 1 - \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)$$

Ec.IV.152

Por otro lado, considerando las relaciones geométricas entre los triángulos  $P, B_1, B_2$  y  $P, S_1, S_2$  de la Figura IV.11 se puede escribir:

$$\frac{h_s - z}{h_s} = \frac{\tau - \tau_y}{\tau_B - \tau_y}$$

Ec.IV.153

De manera que:

$$\tau - \tau_y = (\tau_B - \tau_y) (1 - \xi)$$

Ec.IV.154

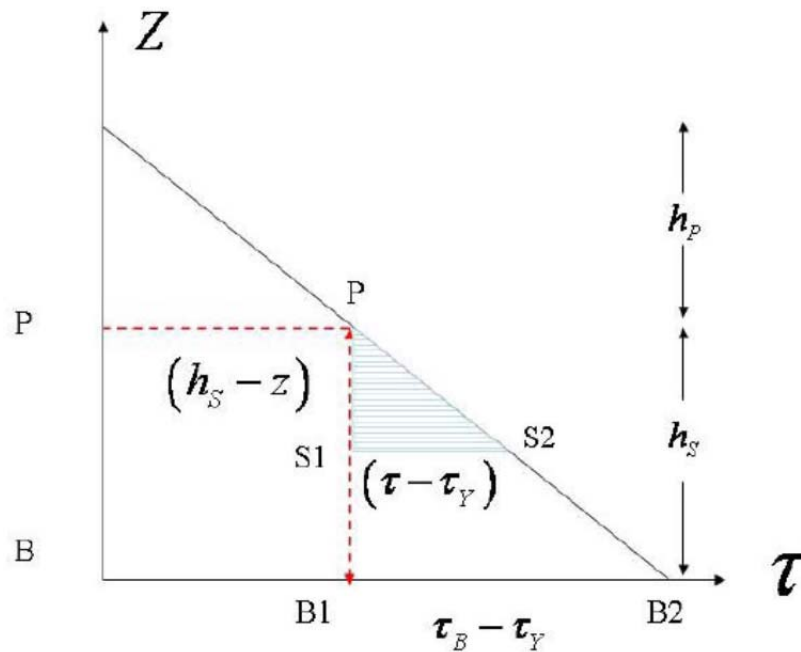


Figura IV.11.- Perfil de tensión tangencial (Adaptado de Johnson & Rodine, 1984).

Teniendo en cuenta la relación anterior se llega a:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = \tau - \tau_y = (\tau_B - \tau_y) (1 - \xi)$$

Ec.IV.155

Integrando la ecuación IV.155 con respecto a  $z$  se obtiene:

$$v = \frac{\tau_B - \tau_y}{\mu} h_s \left( \xi - \frac{\xi^2}{2} \right)$$

Ec.IV.156

Por su parte, la velocidad del tapón corresponde a  $\xi = 1$  es decir:

$$v_p = \frac{\tau_B - \tau_y}{\mu} h_s$$

Ec.IV.157

De este modo, la velocidad puede expresarse como:

$$v = 2v_p \left( \xi - \frac{\xi^2}{2} \right)$$

Ec.IV.158

Para obtener la velocidad integrada en profundidad, se considera el perfil de velocidad dibujado en la Figura IV.12.

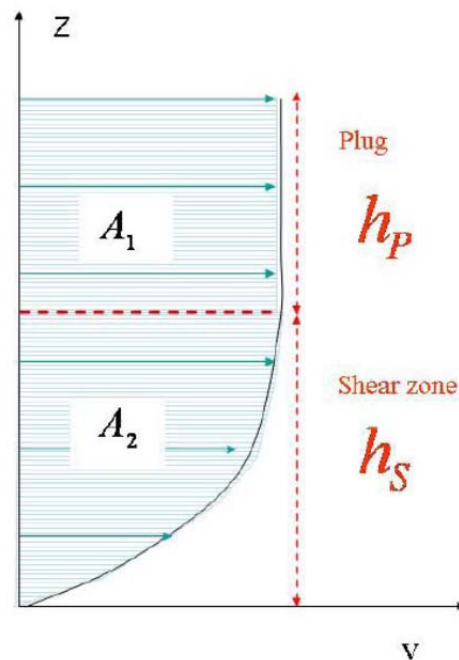


Figura IV.12.- Perfil de velocidad (Adaptado de Johnson & Rodine, 1984).

De este modo, partiendo de una simple consideración geométrica puede calcularse la velocidad integrada como:

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \left\{ \int_0^{h_s} v \, dz + \int_{h_s}^{h_p} v \, dz \right\} = \frac{1}{h} (A_1 + A_2)$$

Ec.IV.159

Donde las áreas  $A_1$  y  $A_2$  corresponden a un rectángulo y una parábola de segundo orden. De este modo, se tiene que:

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \left( \eta h v_p + \frac{2}{3} (1 - \eta) h v_p \right) = \frac{v_p}{3} (\eta + 2)$$

Ec.IV.160

#### IV.3.3.2 Fricción de fondo.

Reemplazando IV.152 y IV.157 en IV.160 se llega a una forma más adecuada de expresar la velocidad integrada en profundidad:

$$\bar{v} = \frac{\tau_B h}{6 \mu} \left( 1 - \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)^2 \left( 2 + \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)$$

Ec.IV.161

La ecuación IV.161 puede reescribirse como:

$$\frac{6 \mu \bar{v}}{h \tau_y} \eta = (1 - \eta)^2 (2 + \eta)$$

Ec.IV.162

Por otro lado, se considera el número adimensional  $a$ , definido como:

$$a = \left( \frac{6 \mu \bar{v}}{h \tau_y} \right)$$

Ec.IV.163

Dicho número está relacionado con el número de Bingham mediante la siguiente expresión:

$$B = \frac{4 h \tau_y}{\mu \bar{v}} = \frac{24}{a}$$

Ec.IV.164

Introduciendo el número adimensional  $a$  a la expresión de velocidad integrada en profundidad puede reescribirse en forma de polinomio de tercer grado:

$$P_3(\eta) := \eta^3 - (3 + a)\eta + 2 = 0$$

Ec.IV.165

Por lo tanto, para obtener la fricción con el fondo hay que calcular la raíz de  $P_3(\eta)$ , donde  $\eta = h_p/h$ , que pertenece al intervalo  $[0,1]$ . Seguidamente, el término de la fricción con el fondo se obtiene mediante la relación:

$$\tau_B = \tau_y \frac{h}{h_p} = \left( \frac{\tau_y}{\eta} \right)$$

Ec.IV.166

Utilizando la fórmula de Cardano se llega a las siguientes expresiones de las raíces del polinomio  $P_3(\eta)$ :

$$\eta_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

$$\eta_{2,3} = -\frac{\eta_1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{\eta_1}}$$

Ecs.IV.167

Con:

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{a}{3}\right)^3 < 0$$

Ecs.IV.168

Por lo tanto, la solución define tres valores complejos. Esto justifica que el término de la fricción se obtenga buscando la raíz que pertenece al intervalo  $[0,1]$ , mediante un método iterativo como el de Newton – Raphson. La Figura IV.13 compara la precisión de estas aproximaciones representando la altura relativa del tapón en función del número adimensional  $a$ .

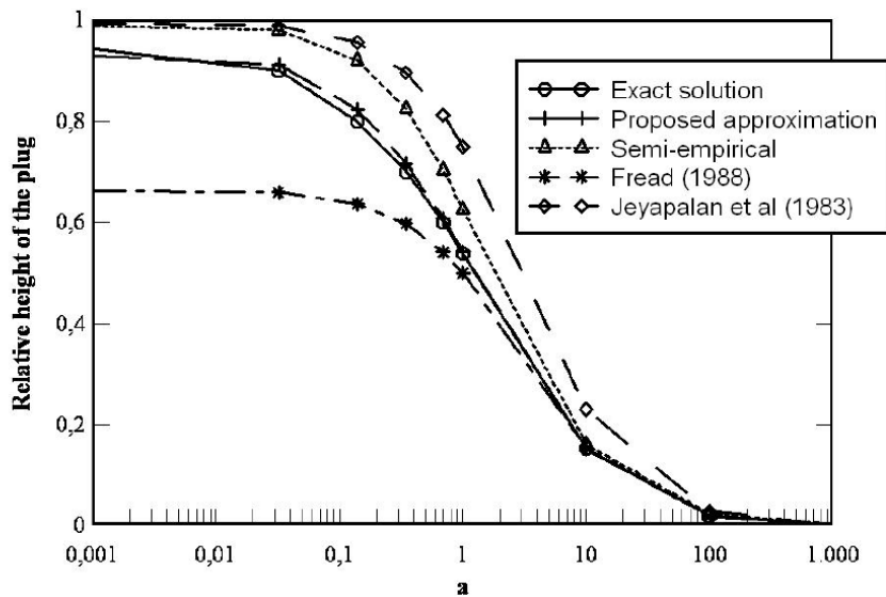


Figura IV.13.- Aproximaciones alternativas del término de fricción con el fondo para un fluido de Bingham (Pastor et al., 2004).

En este sentido, Pastor et al. (2004) propusieron una aproximación simple y precisa basada en utilizar la técnica de economización de polinomios. Dicha técnica consiste en obtener el polinomio de segundo orden  $P_2(\eta)$ , correspondiendo este a la mejor aproximación a  $P_3(\xi)$  en el intervalo  $[0,1]$ . En este caso el error  $E = P_3(\eta) - P_2(\eta)$  viene dado por:

$$E = \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 P_3(\eta)}{d\eta^3} \right) II(\eta)$$

Ec.IV.169

Donde:

$$II(\eta) = (\eta_0 - \eta)(\eta_1 - \eta)(\eta_2 - \eta)$$

Ec.IV.170

Siendo  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  los puntos utilizados para la interpolación es decir los puntos donde ambos polinomios coinciden. El error máximo se minimiza haciendo coincidir  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  con las raíces del polinomio de Tchebichef  $T_3$ :

$$T_3(t) = 4t^3 - t^2; \quad \text{con } t \in [-1, 1]$$

Ec.IV.171

O bien:

$$T_3(t) = 32\eta^3 - 48\eta^2 + 18\eta - 1; \quad \eta \in [0, 1]$$

Ec.IV.172

De este modo, la expresión IV.169 resulta:

$$E = \eta^3 - \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{9}{16}\eta - \frac{1}{16}$$

Ec.IV.173

Obteniéndose:

$$P_2(\eta) = P_3(\eta) - E = \frac{3}{2}\eta^2 - \left(\frac{57}{16} + a\right)\eta + \frac{65}{32}$$

Ec.IV.174

El error máximo en el intervalo  $[0,1]$  es equivalente a  $1/32$ .

Por lo tanto, la aproximación propuesta consiste en resolver la ecuación de segundo orden:

$$\frac{3}{2}\eta^2 - \left(\frac{57}{16} + a\right)\eta + \frac{65}{32} = 0$$

Ec.IV.175

Observando la figura IV.13 se puede concluir que la aproximación propuesta por Pastor, et al., 2004 proporciona una excelente precisión en todo el rango de valores de  $a$ .

### IV.3.3.3 El factor de corrección.

Partiendo de la definición original del factor de corrección:

$$\alpha \bar{v}^2 = \frac{1}{h} \int_0^h (v - \bar{v})^2 dz$$

Ec.IV.176

Se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{h} \left( \frac{\int_0^h v^2 dz}{\bar{v}^2} \right) - 1$$

Ec.IV.177

Al sustituir en la expresión anterior IV.177 las definiciones de velocidad y velocidad promediada IV.158 y IV.160 y desarrollando la relación obtenida se llega a:

$$\alpha = \frac{3}{5} \left\{ \frac{(7\eta + 8)}{(\eta + 2)^2} \right\} - 1$$

Ec.IV.178

En la Figura IV.14 se pueden contemplar los valores del factor de corrección en función de la altura relativa del tapón.

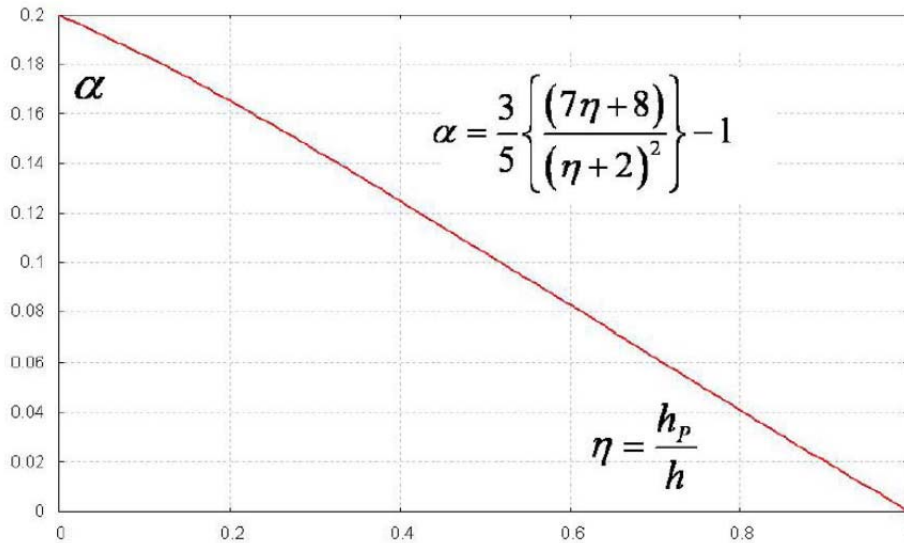


Figura IV.14.- Factor de corrección para un fluido de Bingham (Adaptado de Johnson & Rodine, 1984).

Finalmente, se puede concluir que la variación del factor de corrección según la altura relativa es lineal tomando un valor máximo de 0.2 para el caso  $\tau_y = 0$  es decir cuando el fluido es newtoniano y siendo su valor equivalente a cero cuando  $h_p = h$ .

#### IV.3.3.4 Tensiones integradas en profundidad.

El tensor de tensiones integrado en profundidad viene dado por:

$$\bar{\sigma} = -pI + \left( \frac{\tau_y}{\sqrt{I_{2D}}} + 2\mu \right) dev(\bar{d})$$

Ec.IV.179

Con la presión promediada:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \rho b_3 (Z + h - x_3)$$

Ec.IV.180

Por su parte, el tensor velocidad de deformación integrado en profundidad viene dado por las expresiones IV.136, IV.137 y IV.139:

$$\bar{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2$$

$$\bar{d}_{33} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dx_3 = \frac{1}{h} (v_3|_{z+h} - v_3|_z) \approx \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)$$

$$\bar{d}_{13} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right) dx_3$$

Ecs.IV.181

Utilizando la siguiente relación:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\tau_B - \tau_y}{\mu} (1 - \xi); \quad z \leq h_s$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0; \quad h_s < z \leq h$$

Ecs.IV.182

Se determina el último término de la expresión IV.181:

$$\bar{d}_{13} = \frac{\tau_B}{2\mu} (1 - \eta)$$

Ec.IV.183

#### IV.4 Resistencia al corte.

Al igual que en los suelos saturados, en los cuales tradicionalmente se han relacionado esfuerzos normales y cortantes en la falla a través de la ecuación matemática de Mohr – Coulomb, en los suelos parcialmente saturados esta expresión ha sido extendida adicionando el aporte correspondiente a la resistencia al corte por succión matricial, como se observa en la siguiente expresión:

$$\tau = C' + (\sigma - u_a) \tan \phi' + \tau_{us} \quad \text{Ec.IV.184}$$

Donde:

$\tau$  = Resistencia al corte.

$C'$  = Cohesión efectiva.

$\sigma$  = Esfuerzo normal total.

$u_a$  = Presión del aire en los poros.

$\phi'$  = Ángulo efectivo de fricción interna.

$\tau_{us}$  = Resistencia al corte por succión matricial.

Diversos autores han definido la resistencia al corte por succión ( $\tau_{us}$ ) dependiendo de su investigación; algunos han estudiado la curva de retención suelo – agua (SWRC), también conocida como curva característica suelo – agua (SWCC) y a partir de ésta han formulado expresiones para predecir la resistencia al corte por succión, mientras que otros acudiendo al razonamiento matemático han encontrado expresiones empíricas que permiten estimar la resistencia al corte debida a la succión en los suelos parcialmente saturados.

Si el suelo se encuentra saturado totalmente, la presión del agua en los poros ( $u_w$ ), desplazará la presión de aire en los poros ( $u_a$ ) y la ecuación IV.184 será la misma de Mohr – Coulomb conocida tradicionalmente:

$$\tau = C' + (\sigma - u_w) \tan \phi' \quad \text{Ec.IV.185}$$

##### IV.4.1 Ecuación de Fredlund

Según lo citado por Garven y Vanapalli (2006) y otros autores, mencionan que Fredlund et al. (1978) desarrollaron una expresión para evaluar la resistencia al corte en suelos parcialmente saturados, como se muestra a continuación:

$$\tau = C' + (\sigma - u_a) \tan \phi' + (u_a - u_w) \tan \phi^b \quad \text{Ec.IV.190}$$

Pero también:

$$\tau_{us} = (u_a - u_w) \tan \phi^b \quad \text{Ec.IV.191}$$



Donde:

$\tau$  = Resistencia al corte.

$C'$  = Cohesión efectiva.

$\sigma$  = Esfuerzo normal total.

$u_a$  = Presión del aire en los poros.

$\phi'$  = Ángulo efectivo de fricción interna.

$u_w$  = Presión del agua en los poros.

$\phi^b$  = Ángulo de resistencia por fricción debido a la contribución de la succión matricial.

$(u_a - u_w)$  = Succión matricial.

La Figura IV.15 representa la envolvente de falla de Mohr – Coulomb para suelos parcialmente saturados, presentada por Fredlund y Rahardjo (1993).

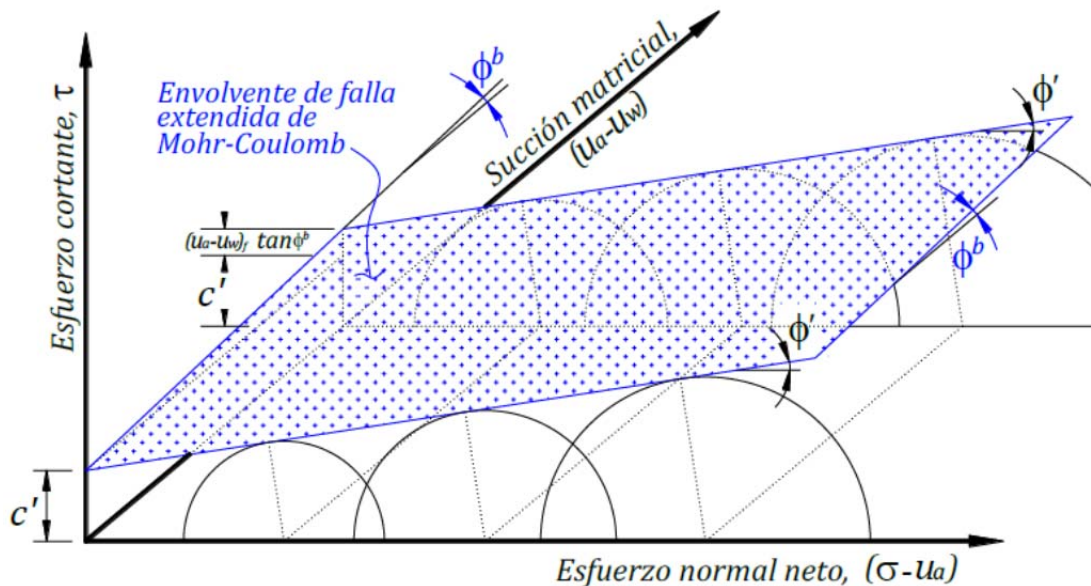


Figura IV.15.- Envolvente de falla extendida de Mohr – Coulomb para suelos parcialmente saturados  
Adaptado de Fredlund y Rahardjo, 1993).

#### IV.4.2 Ecuación de Vanapalli

Según lo citado por Garven y Vanapalli (2006) y otros autores, Vanapalli (1996) desarrolló una expresión para evaluar la resistencia al corte en suelos parcialmente saturados, como se muestra a continuación:

$$\tau = C' + (\sigma - u_a) \tan \phi' + (u_a - u_w) \left( \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \tan \phi' \quad \text{Ec.IV.192}$$

Pero también:

$$\tau_{us} = (u_a - u_w) \left( \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \tan \phi' \quad \text{Ec.IV.193}$$

Donde:

$\tau$  = Resistencia al corte

$C'$  = Cohesión efectiva

$\sigma$  = Esfuerzo normal total

$u_a$  = Presión del aire en los poros

$\phi'$  = Ángulo efectivo de fricción interna

$u_w$  = Presión del agua en los poros

$\phi_s, \phi_r, \phi_i$  = Contenido de agua saturado, residual e inicial del suelo.

$(u_a - u_w)$  = Succión matricial

Algunos autores al encontrar dificultad para hallar el valor de  $\phi^b$  con la ecuación de Fredlund, han optado por hallar este parámetro trabajando igualmente con la ecuación de Vanapalli de la siguiente forma:

$$\tau_{us} = (u_a - u_w) \left( \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \tan \phi' = (u_a - u_w) \tan \phi^b; \quad \left( \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) \tan \phi' = \tan \phi^b$$

Ec.IV.194

Garven y Vanapalli (2006) relacionan un total de 21 ecuaciones para evaluar la resistencia cortante en suelos parcialmente saturados, en las que se destacan la ecuación de Fredlund; evaluando algunas de las ecuaciones y comparando los resultados con datos reales, Garven y Vanapalli (2006) encontraron diferentes porcentajes de éxito, obteniendo mejores resultados con las ecuaciones que utilizan la SWCC como herramienta para la predicción del esfuerzo cortante en suelos parcialmente saturados.

Fredlund (2006) al igual que Garven y Vanapalli (2006), también relaciona 4 ecuaciones para evaluar la resistencia cortante en suelos parcialmente saturados, pero en este caso todas las ecuaciones utilizan datos de la SWCC como insumo.

Garven y Vanapalli (2006) comentan que las ecuaciones para evaluar la resistencia al corte que utilizan la SWCC como insumo o herramienta, han mostrado ser las de mayor éxito a la hora de predecir el aporte de la succión en diferentes suelos; además estas ecuaciones trabajan directamente con datos medidos u obtenidos en ensayos y no es necesario conocer previamente la envolvente de falla del suelo para calcular parámetros y acomodarlos a las expresiones, tal como sucede en varias de las ecuaciones que no utilizan la SWCC.

La expresión de Fredlund, gráficamente es la que explica de mejor forma el concepto de la envolvente de falla extendida de Mohr – Coulomb para suelos parcialmente saturados; además combinando de la ecuación de Vanapalli se puede aproximar el valor de  $\phi^b$ , subsanando lo que para algunos investigadores resultaba un obstáculo para aplicar la ecuación de Fredlund. De esta forma, en la presente tesis se adoptará la ecuación de Fredlund para evaluar la resistencia al corte en suelos parcialmente saturados.

# CAPÍTULO

# V

---

Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

## DESLIZAMIENTO ANÁLISIS Y ESTUDIO

# CAPÍTULO V

## DESLIZAMIENTO ANÁLISIS Y ESTUDIO

Los deslizamientos son procesos gravitacionales que representan una reacción del terreno ante un cambio de condiciones producido por procesos naturales, o por la acción antrópica.

La combinación de estos procesos con situaciones y objetos vulnerables, convierten a este fenómeno en un riesgo natural que se ha manifestado en forma de catástrofes naturales a lo largo de la historia de la humanidad. A este respecto, cabe destacar el incremento de las pérdidas debidas a estos movimientos, como consecuencia del aumento continuo de la población mundial que obliga a poblar zonas susceptibles a la ocurrencia de deslizamientos.

Según Cruden & Varnes (1996), los deslizamientos más catastróficos corresponden a las clases clasificadas como rápidas o extremadamente rápidas. Su peligrosidad radica en la capacidad que tienen de recorrer largas distancias en un tiempo muy pequeño y alcanzar zonas inicialmente consideradas fuera de peligro.

El único modo para reducir dichas pérdidas es tener un mejor conocimiento sobre este fenómeno, así como desarrollar técnicas más fiables de predicción de sus efectos potenciales en combinación con el diseño de medidas de protección adecuadas.

En los últimos años, la modelación numérica ha consolidado su papel como herramienta de estudio y análisis de este tipo de fenómenos, gracias a la evolución rápida en potencia de los ordenadores, así como a la mejora de los métodos numéricos y la innovación y creación de nuevas metodologías.

Dicha modelación se tiene que hacer en dos fases; en la primera, se estudia la iniciación del deslizamiento mediante un modelo de elementos finitos no lineales, con acoplamiento de presiones intersticiales, obteniéndose la superficie de rotura, la masa movilizada y las condiciones en el momento de la rotura. Estos resultados se emplean como input para el estudio de la segunda fase que consiste en analizar la propagación del movimiento, obteniéndose como resultado el trayecto de la propagación, las distancias recorridas, la velocidad, la altura del material, etc.

La observación a escala microscópica de los suelos y rocas permite entender ciertos fenómenos, pero sobre todo muestra una geometría muy variada y, por tanto, demuestra la dificultad de su análisis. Esta dificultad pone en evidencia las limitaciones de un estudio puramente microscópico, y justifica la necesidad de introducir una aproximación de medio continuo, para poder estudiar el comportamiento macroscópico de los medios porosos. Asimismo, durante la propagación de los deslizamientos, el geomaterial se mueve y se deforma de manera continua. Por tanto, su comportamiento se asemeja al de un fluido y el problema puede ser descrito en el marco de la dinámica de fluidos.

Las ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos están basadas en las leyes de conservación, puesto que éstas junto con las ecuaciones constitutivas (llamadas reológicas en el caso de los fluidos), determinan de forma completa el comportamiento de un sistema físico. De este modo, se obtiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que puede formularse tanto dentro de un marco euleriano como lagrangiano.

Los modelos obtenidos pueden ser aplicados a un gran número de situaciones generales usuales en geotecnia. En el caso de los deslizamientos de laderas, debido a su geometría y condiciones del flujo, pueden realizarse algunas aproximaciones adicionales interesantes. Un aspecto importante a tener en cuenta es que durante los deslizamientos rápidos de ladera aparecen dos fenómenos: La consolidación, o disipación de presiones intersticiales, y propagación del deslizamiento (Iverson & Denlinger, 2001; Pastor et al., 2002).

Asimismo, para describir adecuadamente la evolución del sistema pueden ser imprescindibles las tres variables del espacio (aproximación tridimensional). No obstante, podría ser suficiente una aproximación unidimensional, si predomina la influencia de una variable espacial. Como resultado, los modelos matemáticos para la fase de propagación de los movimientos rápidos de ladera, pueden consistir en: formulaciones en tres dimensiones (3D) completas, modelos integrados en profundidad: en los que se aplica una simplificación en la estructura vertical del flujo, integrando las ecuaciones de balance en profundidad; y modelos en una dimensión (1D) simplificados.

Los modelos tridimensionales son completos, pero muy caros en lo que a tiempo de cálculo se refiere. Por otro lado, los modelos integrados en profundidad son más eficientes, ya que nos proporcionan una buena relación costo – fiabilidad de resultados, que justifica su idoneidad para simular gran parte de los problemas de movimientos rápidos de ladera.

Los deslizamientos rápidos ocurren en terrenos con curvaturas importantes, o grandes pendientes, presentándose en la mayoría de los casos velocidades paralelas a la base del deslizamiento. Por lo tanto, es de suma importancia que el modelo integrado en profundidad tenga en cuenta los efectos de la curvatura del terreno.

Para determinar de forma completa el comportamiento del suelo, además de las ecuaciones de balance, el modelo matemático debe ser completado mediante una ecuación adicional, que relacione los tensores de tensiones, o sus incrementos, con los relativos a las deformaciones o sus velocidades. Se trata de las ecuaciones constitutivas que en mecánica de fluidos suelen ser denominadas modelos reológicos, siendo los más empleados el fluido Newtoniano, el de Bingham y el friccional.

Las ecuaciones del modelo integrado en profundidad que describe la propagación de un deslizamiento rápido se pueden resolver mediante los métodos numéricos disponibles, siendo el método de los elementos finitos más adecuado para las formulaciones eulerianas, mientras que el método hidrodinámica de partículas arcillosas (smoothed particle hydrodynamics, SPH) es más adecuado para la formulación cuasi – lagrangiana.

Los deslizamientos han sido reconocidos y estudiados por parte de muchos autores (Takahashi, 1981; Li et al., 1983 Costa, 1984; costa & Williams, 1984; Jonson & Rodino, 1984; Davies, 1986; Pierson, 1986; Qian & Wan, 1986; O'Brien & Julián, 1988; Van Steijn, 1988; Meunier, 1991;

Whipple & Dunne, 1992 entre otros) desde diferentes puntos de vista: observaciones de campo, características de los flujos, comportamiento de los materiales, etc.

Los avances realizados durante la primera mitad del siglo XX fueron limitados en lo que a estudios de deslizamientos se refiere. Más adelante, se crearon programas que han fomentado la elaboración de una mejor evaluación e interpretación del riesgo de deslizamientos (como por ejemplo Flood Insurance Programs, Disaster Assistance programs). Nuevos factores clasificatorios han sido implementados en el reconocimiento de los deslizamientos. En este sentido, cabe mencionar las propiedades morfológicas presentadas por Crozier y Blong (1973). Muy relevante ha sido el trabajo de Varnes (1978) y más adelante el de Campbell et al. (1985). De los trabajos recientes es de destacar libros como Landslides recognition de Dikau y Brundsen (1996), así como el informe sobre Investigación y evaluación de los deslizamientos de Turner & Shuster (1996). La evaluación de deslizamientos ha sido sobre todo cualitativa utilizando las observaciones de campo o medidas cuantitativas básicas.

## V.1 Definición de deslizamiento.

En términos generales como movimientos en masa, movimientos de ladera o deslizamientos, en el sentido amplio de la palabra, abarcan una gama de movimientos, que van desde los extremadamente lentos, como son los denominados reptaciones cuyas velocidades son del orden de centímetros por año, hasta movimientos muy rápidos, con velocidades que pueden alcanzar 60 (km/h), como ocurre en los flujos de derrubios, coladas de barro, flujos deslizantes y avalanchas granulares.

Los deslizamientos rápidos causan múltiples destrozos, entre los que pueden mencionarse:

- ❖ Pérdidas de vidas humanas, casas, comercios y en general asentamientos humanos próximos a cañones, quebradas y valles activos.
- ❖ Destrucción de tierras de labor y cultivos.
- ❖ Destrucción parcial de líneas de comunicación, carreteras, ferrocarriles, canales, etc. (Figura V.1).

En términos geológicos estrictos, estos movimientos constituyen una parte del proceso de denudación, que a su vez forma parte del ciclo de relieve (Denudación, sedimentación, petrogénesis y exposición). La literatura especializada se refiere a ellos utilizando términos como: rotura de ladera (Slope failure, Ward, 1945); deslizamientos (Landslides, Varnes, 1958); pérdida de masa (Mass wasting, Yatsu, 1966); movimientos en masa (mass movement, Hutchinson, 1968); movimientos de ladera (slope movements, Varnes, 1978) y procesos gravitacionales (Pedraza et al., 1996). A continuación, se presenta las definiciones correspondientes a éstos términos.



Figura V.1.- Corte de línea ferroviaria debido a un flujo de derrubios en la provincia de Yunnan, China (Cortesía Zhang & Sucheng, 2000).

Como ejemplo, de movimientos rápidos catastróficos pueden citarse los flujos de derrubios acontecidos en Venezuela en diciembre de 1999 que causaron 19 000 pérdidas humanas, donde los bloques de gran tamaño arrastrados por dichos flujos dañaron la estructura de edificios al chocar con ellos causando la destrucción total o parcial de éstos (Figura V.2).



Figura V.2.- Daños a edificios por impacto de bloques en pilares (Cortesía Zhang & Sucheng, 2000).

Denudación (denudation): es un término antiguo que se refiere al desgaste de la masa de terreno a través del tiempo geológico. Engloba tanto la erosión como la meteorización.

Movimiento en masa (Mass movement): son movimientos gravitacionales ladera abajo de suelo o roca sin la intervención del escurrimiento superficial como agente de transporte.

Pérdida de masa (Mass wasting): suele aparecer como un sinónimo del movimiento en masa. Sin embargo, se trata de un concepto geomorfológico, a menudo utilizado en combinación con el ciclo de erosión. Se emplea para referirse a la reducción de masa de los interfluvios y diferenciar dicha pérdida de masa de la erosión fluvial. En definitiva, incluye la acción de todos los procesos erosivos no lineales actuando en las vertientes encañonadas entre dos cuñas.

Inestabilidad de Vertiente o de ladera (Slope Instability): se refiere a la predisposición de las laderas a experimentar movimientos en masa. Se puede determinar por el análisis de equilibrio de la ladera o por el análisis del registro histórico de su evolución.

Deslizamientos (Landslide): se trata del término más universal y más difundido como término que engloba la mayor parte de los movimientos en masa. Se ha utilizado, en general, para designar una categoría de movimiento en masa que excluye las reptaciones (creep) y las subsidencias. Según, Skempton y Hutchinson (1969), el término genérico landslide, abarca los movimientos ladera abajo, de masas de rocas y/o suelos, resultantes de la rotura en los límites de la masa en movimiento. No obstante, este término puede incluir muchos movimientos donde casi todos los desplazamientos ocurren más bien por flujo que por deslizamiento propiamente dicho.

Movimientos de ladera (Slope Movements): este término ha sido utilizado por Varnes (1978) para denominar a los movimientos en masa en las vertientes considerándole aparentemente genérico y neutral.

Rotura de ladera (Slope failure). Es otro término genérico muy utilizado. Está libre de connotaciones sobre el mecanismo de rotura, y más preciso para los movimientos de ladera en taludes artificiales (Terzaghi, 1950). Sin embargo, se utiliza más bien para referirse al proceso de rotura del material, que a un rasgo particular del terreno.

Procesos gravitacionales (Pedraza et al., 1996): desplazamiento de materiales en las vertientes, sin intervenir ningún soporte activo o medio para movilizarlos, es decir, impulsados por su propio peso; corresponde, por tanto, a una autotraslación bajo la acción directa de la gravedad que, en estas circunstancias, deberá considerarse un agente específico más.

Cada uno de los términos arriba mencionados presenta alguna limitación terminológica. En este sentido, algunos autores (Crozier, 1973; Varnes, 1978) consideran inadecuado el uso de la denominación deslizamientos como término genérico, porque evoca un tipo específico de movimiento que se produce a lo largo de una superficie de rotura bien definida. Por otro lado, Pedraza et al. (1996) considera que las denominaciones movimientos de ladera (procesos de vertiente) y movimientos en masa (procesos o fenómenos en masa), conllevan problemas conceptuales que, lejos de facilitar la terminología, frecuentemente la complican.

Con todo, el término deslizamientos es el más universal y difundido, para designar a la mayor parte de los movimientos en masa. Por ello, en esta tesis se ha optado por utilizarlo como denominación genérica a éste fenómeno.



Las definiciones del término deslizamiento (landslide) más destacadas que se han presentado son las siguientes:

Movimiento ladera abajo perceptible de una masa relativamente seca de tierra, roca o una mezcla de ambos. (Sharpe, 1938).

Un desplazamiento rápido, de una masa de roca, suelo residual o sedimentos que cubren la ladera, sobre dicha ladera el centro de gravedad de la masa avanza hacia abajo y hacia el exterior (outward o downward). (Terzaghi, 1950).

Significa el movimiento ladera abajo y hacia el exterior de los materiales que forman la vertiente compuestos de roca, suelos, rellenos artificiales, o la combinación de éstos materiales. (Varnes, 1958).

Movimientos rápidos de rocas deslizando, estando separadas de la parte estacionaria subyacente de la ladera por un plano de separación definido. (Záruba & Mencl, 1969).

De éstas definiciones podemos concluir que el término deslizamientos puede ser equivalente al de movimientos en masa, excluyendo de éstos los movimientos a gran escala de origen tectónico, los que involucran la subsidencia u otras formas de hundimiento de la superficie de la tierra, además de todos los fenómenos de transporte en masa y avalanchas de nieve.

### V.1.1 Clasificación de los deslizamientos.

La clasificación es una herramienta potente por su capacidad de transmitir ideas. Las clasificaciones establecen conceptos, y de ahí proviene su validez y su peligro. El objetivo de una clasificación es ofrecer una terminología no ambigua. Sin embargo, su proliferación en los últimos años en casos ha llevado a un resultado contrario al esperado (Crozier, 1986).

Los movimientos en masa presentan infinidad de modalidades, lo cual dificulta una clasificación unitaria de los mismos. En este contexto, y aunque en todos los casos haya unos principios comunes, puede decirse que hay tantas clasificaciones como grupos u objetivos (investigación, aplicación, riesgos, etc.); así puede citarse los de autores como: Sharpe, 1938; Ward, 1945; Campbell, 1951; Varnes, 1958; Beverage & Culbertson, 1964; Yatsu, 1966; Hutchinson, 1968; Skempton & Hutchinson, 1969; Zaruma & Menci, 1969; Crozier, 1973; Varnes, 1978; Hansen, 1984; Bradley & McCutcheon, 1985; Pierson & Costa, 1987.

Los criterios más utilizados para llevar a cabo dichas clasificaciones son:

- a) El mecanismo desencadenante
- b) El tipo de material y / o el tipo de movimiento
- c) La composición de los sedimentos
- d) La proporción de la fracción sólida
- e) La velocidad
- f) La duración
- g) La pendiente

- h) El comportamiento del material
- i) Los procesos físicos durante el flujo
- j) Las características de la cuenca
- k) La morfología del material desplazado o la de la superficie del movimiento
- l) Las propiedades geotécnicas.

A partir de esos criterios, muchos autores han generado clasificaciones generales: es el caso de Sharpe (1938) que se basa en el tipo de movimiento y el agente de transporte. Clasificaciones con nomenclaturas similares a la de Sharpe han sido formuladas por Ladd (1935) y Ward (1945). Hansen (1984) proporcionó una buena clasificación y descripción de los deslizamientos basada en factores como el clima, el tamaño del material, y la geología; estos factores han sido utilizados como principales por otros muchos autores.

En resumen, puede decirse que no existe una universal, y todas las clasificaciones disponibles pueden dar lugar a dudas tanto en la terminología como en las características atribuidas a cada tipo de movimiento. Las clasificaciones más aceptadas hoy en día es de Varnes (1958, 1978) y la de Hutchinson (1968, 1988). Hungr, et al., (2001), intenta correlacionar la terminología utilizada por ambos autores (Tabla V.1), haciendo el esfuerzo de dar definiciones más precisas.

Tabla V.1.- Correlaciones entre clasificación de deslizamientos de tipo flujo (Hungr, 2001).

VARNES (1987)	HUTCHINSON (1988)	HUNGR et al. (2001)
Flujos de arena húmeda y de limos ( <i>wet sand, silt flow</i> )	Flujo deslizante ( <i>flow slide</i> )	Flujos deslizantes de arenas y limos ( <i>sand, silt flow slide</i> )
Flujos de tierra ( <i>rapid earth flow</i> )	Flujo deslizante (arcilla) ( <i>flow slide "clay"</i> )	Flujos deslizantes de arcillas ( <i>clay flow slide</i> )
Flujo de loess ( <i>Loess flow</i> )	Flujo deslizante (loess) ( <i>flow slide "loess"</i> )	Flujo deslizante de loess ( <i>loess flow slide</i> )
Flujo de arena seca ( <i>dry sand flow</i> )	-----	Deslizamiento de arena seca ( <i>dry sand slide</i> )
Flujo de tierra ( <i>earth flow</i> )	Deslizamiento de barro ( <i>mudslide</i> )	Flujo de tierra ( <i>earth flow</i> )
-----	Flujo de barro ( <i>mud flow</i> )	Flujo de barro ( <i>mud flow</i> )
Avalancha de derrubios ( <i>debris avalcnche</i> )	Flujo de derrubios de laderas ( <i>Hillslope debris flow</i> )	Avalancha de derrubios ( <i>debris avalcnche</i> )
Flujo de derrubios ( <i>debris flow</i> )	Flujo de derrubios ( <i>debris flow</i> )	Flujo de derrubios ( <i>debris flow</i> )
-----	Flujos hiperconcentrados (Hyperconcentrated flow)	Inundación de derrubios ( <i>debris flood</i> )
Avalancha de rocas ( <i>Rock avalcnche</i> )	sturzstorm	Avalancha de rocas ( <i>Rock avalcnche</i> )

Las clasificaciones generales, por su parte, son idóneas para las fases iniciales del análisis, así como en estudios multiobjetivo. En este sentido, destaca la de (Varnes, 1978; Cruden & Varnes, 1996), que ha sido adoptada por las sociedades internacionales de Geotecnia (International Geotechnical Societies, UNESCO, Working party on World Landslide Inventory (WP/WLI), 1993).

Esta clasificación, cataloga los movimientos de ladera según el mecanismo y tipo de rotura en (Tabla V.2):

Tabla V.2.- Clasificación abreviada de movimientos de laderas (Varnes, 1978).

TIPO DE MOVIMIENTO			TIPO DE MATERIAL		
			ROCA	SUELO	
				Gruesos predominantes	Finos predominantes
DESPRENDIMIENTOS			Desprendimiento de rocas	Caída de derrubios	Caída de tierra
VUELCOS			Vuelco de rocas	Desplome de derrubios	Desplome de tierra
DESIZAMIENTOS	ROTACIONALES	Pocas unidades	Hundimiento de rocas	Derrumbe de derrubios	Derrumbe de tierra
	TRASLACIONALES		Deslizamiento de bloque rocoso	Deslizamiento de bloque de derrubios	Deslizamiento de bloque de tierra
		Muchas unidades	Deslizamiento rocoso	Deslizamiento de derrubios	Deslizamiento de tierra
EXTENSIONES LATERALES			Extensión lateral en rocas	Extensión lateral en derrubios	Extensión lateral en tierra
FLUJOS			Flujos de roca (reptación profunda)	Flujos de derrubios	Flujos de tierra
				(replación de suelo)	
COMPLEJOS			Combinación de por lo menos dos tipos principales de movimiento		

1. Desprendimiento: se define por el movimiento de una porción de suelo o roca, en forma de bloques aislados o bien masivamente, que en gran parte de su trayectoria descende en caída libre, volviendo a entrar en contacto con el terreno (Corominas, 1989a) (Figura V.3).
2. Los vuelcos son movimientos de rotación hacia el exterior de una unidad o de un conjunto de bloques. El movimiento de rotación se produce alrededor de un eje pivotante situado por debajo del centro de gravedad de la masa movilizada (Figura V.3)
3. Los deslizamientos (sensu stricto, s.s) son movimientos descendentes relativamente rápidos de una masa de suelo o de roca: Estos movimientos tienen lugar a lo largo de una o varias superficies definidas, que son visibles o que pueden ser inferidas razonablemente o bien

corresponder a una franja relativamente estrecha, considerándose que la masa movilizada se desplaza como un bloque único. Según la trayectoria descrita, los deslizamientos pueden ser rotacionales o traslacionales (Figura V.3).

4. El movimiento dominante en las expansiones laterales es la extrusión plástica lateral, acomodada por fracturas de cizalla, o de tracción, que en ocasiones pueden ser de difícil localización (Figura V.3)
5. Los flujos o coladas son movimientos de una masa desorganizada con abundante presencia de agua, y donde no todas las partículas se desplazan a la misma velocidad, ni sus trayectorias tienen que ser paralelas. El material se comporta como un fluido, sufriendo una deformación continua, sin presentar superficies de rotura definidas (deformación difusa). Como resultado, la masa movilizada no conserva su forma en su movimiento descendente, adoptando a menudo morfologías lobuladas (Figura V.3).
6. Los movimientos complejos: ésta terminología ha sido utilizada para describir la combinación de distintos tipos de movimientos en masa; es decir cuando determinado movimiento evoluciona hacia otro tipo a medida que la masa se mueve ladera abajo. De este modo, se distinguen de los movimientos compuestos ya que éstos indican que distintos movimientos ocurren simultáneamente en distintas partes de la masa movilizada. Según Dikau et al., (1996) las avalanchas rocosas y los flujos deslizantes se inscriben dentro de los movimientos complejos.

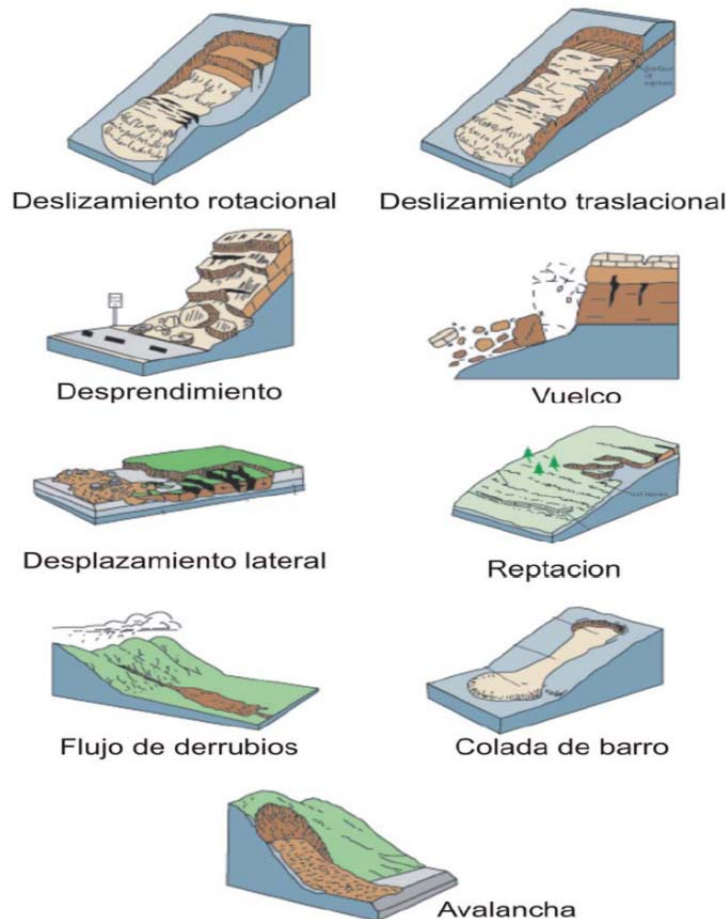


Figura V.3.- Tipos principales de movimiento de ladera (URL, 2007).

### V.1.2 Causas y mecanismos desencadenantes.

La susceptibilidad de que se produzcan deslizamientos está condicionada por la estructura geológica, la litología, las propiedades geomecánicas del material (resistencia al corte, deformabilidad, grado de alteración y fracturación, etc.), las condiciones hidrogeológicas y el relieve de un área determinada. En este contexto, las regiones montañosas son las zonas más propensas a los movimientos en masa, ya que hace falta cierta pendiente para que se produzcan estos procesos gravitacionales. Sin embargo, es suficiente una pendiente bastante baja para que algunos tipos de movimientos tengan lugar como es el caso de las coladas de barro.

Los factores desencadenantes, naturales o por la acción antrópica, someten al terreno a un cambio de condiciones. Dichos cambios pueden afectar a las propiedades del material (degradación, alteración, etc.), a la geometría, por erosión o por la actividad humana (por ejemplo excavación), etc. Asimismo, los cambios en las tensiones efectivas, inducidos por variación de las tensiones totales o de las presiones intersticiales juegan un papel determinante.

Dentro de los factores desencadenantes destaca el papel destabilizador del agua, en sus distintas manifestaciones (lluvias, granizo, nieve, deshielos, inundaciones, cambios del nivel de agua por llenado de embalses, etc.), somete a los geomateriales a altas presiones intersticiales, y en consecuencia reduce sus resistencias al corte. Por otro lado, el agua aumenta el peso del terreno que se ve sujeto a mayores esfuerzos de corte. Además, tiene un efecto erosivo que provoca el debilitamiento químico o físico del terreno. En éste sentido, cabe mencionar la meteorización y fracturación del material causada por los procesos de hielo – deshielo estacional.

La manifestación más relevante del agua, en lo que a estabilidad de laderas se refiere, es sin duda las fuertes lluvias capaces de desencadenar movimientos superficiales, desprendimientos de bloques rocosos, reactivaciones de antiguos deslizamientos, así como el desencadenamiento de nuevos deslizamientos o de movimientos de gran magnitud.

El tipo y magnitud de los movimientos desencadenados por las lluvias dependen de las características de éstas (volumen, intensidad, distribución), así como del régimen climático del área afectada.

Diversos autores han establecido relaciones causa – efecto entre los factores lluvia antecedente e intensidad – duración de un chubasco. Así, Corominas & Moya (1999) determinaron para la cuenca alta del río Llobregat (Pirineos Orientales), que de no existir lluvia antecedente al evento en cuestión, se requieren chubascos de 190 mm en 24 horas para que se formen superficies de rotura, siendo necesarias precipitaciones superiores a 300 mm en un periodo de 24 a 48 horas, para que tengan lugar deslizamientos generalizados de carácter superficial. Por el contrario, el desencadenamiento de deslizamientos por lluvia antecedente, requiere de una precipitación acumulada de 200 mm durante varias semanas. Si se da esta circunstancia, un chubasco de intensidad moderada (por ejemplo una precipitación total en 24 horas igual a 40 mm) puede dar lugar a coladas de barro, así como a deslizamientos de tipo rotacional y traslacional, afectando a formaciones geológicas de litología arcillosa y limo – arcillosa.

En España por ejemplo Ferrer & Ayala (1996), realizaron el mapa de susceptibilidad a la ocurrencia de movimientos en masa inducidos por lluvia. Los criterios empleados fueron la máxima

precipitación en 24 horas (para flujos y deslizamientos superficiales) y la infiltración neta anual (para nuevos deslizamientos y reactivaciones de antiguos movimientos profundos). Además, Ferrer & Ayala (1997), mediante el análisis de los datos de precipitación para las fechas anteriores a los movimientos (días, semanas y meses previos), establecieron a nivel español los umbrales generales de precipitación, que dan lugar al desencadenamiento de las inestabilidades naturales de nueva generación, así como los relativos a las reactivaciones de deslizamientos acontecidos en el pasado.

Por otro lado, en las regiones sísmicamente activas los terremotos suelen representar el factor desencadenante principal de los distintos tipos de deslizamientos (desprendimientos, deslizamientos, flujos, avalanchas rocosas, etc.). Las ondas sísmicas pueden producir movimientos en una gama muy amplia de condiciones. De hecho, son capaces de desestabilizar tanto a terrenos con pendientes pronunciadas como áreas con laderas suaves o incluso prácticamente planas.

Asimismo, cuando las sacudidas sísmicas afectan a materiales sueltos éstos experimentan procesos de licuación. Las áreas volcánicas, por su parte, son propensas a los deslizamientos provocados, entre otras causas, por la fusión de nieve y de hielo debida a la actividad volcánica, y por los eventos extremos de lluvia. Los movimientos que tienen lugar en éstas áreas suelen ser de gran magnitud y alcanzan altas velocidades. Esto se explica por la predisposición de los materiales vulcano clásticos (cenizas, piroclastos) a ser movilizados y por su estado meta estable.

La actividad humana constituye uno de los factores desencadenantes que aunque actuando de forma puntual (taludes, presas, edificios, etc.), sus consecuencias suelen ser bastante espectaculares. La manipulación del equilibrio natural por parte del hombre tanto por los cambios de la geometría y pendiente del terreno (desmontes y terraplenes), como por los cambios de las condiciones hidrogeológicas (presas, irrigación, etc.) o por cambios en las fuerzas estáticas (excavación y sobrecargas), pueden provocar distintas tipologías de inestabilidades induciendo nuevos deslizamientos y acelerando y/o activando antiguos movimientos.

## V.2 Deslizamientos Rápidos.

En el diagrama representativo de Sharpe (1938), este autor aplicó una escala de medida de la velocidad del movimiento, según la cual éste podía ser imperceptible o perceptible. En este último caso, hablaba de movimiento lento, rápido o muy rápido. Varnes (1978), propuso una escala de movimiento explícita, en la que, la velocidad oscila de muy lenta a muy rápida (Tabla V.3). Dicha escala, la modificó posteriormente con la colaboración de Cruden (1996). Además de cambiar las velocidades típicas de los movimientos (por ejemplo, la velocidad típica de los movimientos muy rápidos pasó de 3 m/s a 5 m/s), Cruden & Varnes (1996) definieron para cada clase de movimiento los daños potenciales correspondientes (Tabla V.3).

Dentro de los deslizamientos rápidos y específicamente los flujos en masa, la literatura especializada presenta todo un abanico de términos (flujos, transporte sólido, flujos hiperconcentrados, flujos o coladas de barro (mudflows), flujos de derrubios (Debris flows), lahares, flujos granulares, deslizamientos, avalanchas rocosas, avalanchas de derrubios, etc.). De

modo que a veces es difícil distinguir un fenómeno de otro, por causa de sus características peculiares, debido a la falta de consenso sobre una clasificación específica.

Tabla V.3.- Velocidad de los movimientos de ladera (Cruden & Varnes, 1996).

clase	Descripción	Velocidad (mm/seg)	Valores típicos	Daños probables
7	Extremadamente rápidos	$5 \times 10^3$	5 m/s	Violento y catastrófico. Destrucción de edificios por impacto de la masa deslizada. Número elevado de muertos.
6	Muy rápidos	$5 \times 10^1$	3 m/min	Es difícil escapar. Algunos muertos. Destrucción de edificios y estructuras.
5	Rápidos	$5 \times 10^{-1}$	1,8 m/h	Es posible escapar. Destrucción de edificios y estructuras.
4	Moderado	$5 \times 10^{-3}$	13 m/mes	Algunas estructuras pueden mantenerse temporalmente.
3	Lento	$5 \times 10^{-5}$	1,6 m/año	Pueden aplicarse medidas correctoras. Las estructuras y edificios pueden mantenerse.
2	Muy lento	$5 \times 10^{-7}$	16 mm/año	Las estructuras permanentes no resultan dañadas en general.
1	Extremadamente lento			Imperceptible si no es con instrumentación. Es posible la construcción con precauciones

Puesto que el objetivo de esta tesis es la modelación numérica de los deslizamientos rápidos, la clasificación con la que se va a trabajar se basa en criterios mecánicos, los cuales nos permiten agrupar estos movimientos en:

- ❖ Flujos de derrubios y coladas de barro (Debris – flow & Mudflow).
- ❖ Avalanchas granulares.
- ❖ Flujos deslizantes.

A continuación, se definen y se presentan éstas tres tipologías:

### V.2.1 Flujos De Derrubios y Coladas De Barro (Debris – flow & Mudflow).

Se trata de un fenómeno intermedio entre los flujos hiperconcentrados y los deslizamientos sensu stricto (*s.s*), diferenciándose claramente de ambos por: a) la velocidad; b) el tipo de depósitos; c) el tipo de flujo (Coussot, 1996).

Estos flujos se diferencian de los flujos hiperconcentrados y las avalanchas por:

1. Su naturaleza transitoria, ya que se presentan en forma de oleadas periódicas. Esta peculiaridad ha sido explicada en la bibliografía de distintos modos (Engelund & Wan,

1984; Davies, 1986; Trowbridge, 1987; Coussot, 1992; Wang et al., 1993): Inestabilidad hidráulica típica de flujos suficientemente rápidos en laderas abruptas, comportamiento peculiar del material que da lugar a flujos inestables, oleadas originadas por una secuencia de procesos de erosión – transporte.

2. El número de fases desde el punto de vista mecánico: la velocidad relativa entre dos elementos próximos (agua y sólido) dentro de la masa fluyente es pequeña en el caso de los flujos de derrubios y de barro (Pierson, 1986), por lo que toda la masa experimenta grandes deformaciones casi continuas. Por lo tanto estos flujos involucran una mezcla de agua – derrubios, que se podría aproximar a una fase única. Éste no es el caso de los flujos hiperconcentrados y las avalanchas normales, donde el perfil de velocidad de las partículas gruesas es muy distinto al del agua circundante. A pesar de que en algunas ocasiones, éste caso se puede encontrar en los flujos de derrubios, sin embargo la fracción sólida transportada de este modo es despreciable. En efecto, bloques de unos metros pueden ser transportados en la masa en la cual parecen flotar.
3. La estructura del depósito: los depósitos resultantes no presentan una segregación significativa, ya que los materiales de los flujos de derrubios poseen altas densidades, son muy viscosos, y durante el movimiento se ven sometidos a altos esfuerzos de corte quedando mezclados los distintos grupos texturales (Costa, 1984; Coussot, 1992). No obstante, en muchos casos la concentración de los bloques grandes es más importante en el frente de dichas oleadas. Por otro lado, los depósitos contienen una distribución de tamaño de granos que abarca desde las arcillas hasta los grandes bloques (Johnson, 1970; Takahashi, 1981; Pierson, 1986; Phillips & Davies, 1991; Coussot, 1992).
4. La proporción de la fracción sólida: La proporción de la fracción sólida en los flujos hiperconcentrados oscila entre 1 y 25 %, mientras que en los flujos de derrubios y de barro representa el 50% al 90%. La diferencia es menos acentuada, cuando se comparan el frente y cuerpo de un flujo de derrubios monofásico con su cola representada por un flujo hiperconcentrado bifásico (Coussot & Meunier, 1996).

Por otro lado, estos flujos se diferencian de los deslizamientos *sensu stricto* (s.s) y las avalanchas granulares por:

1. Velocidad: hay una clara diferencia entre la velocidad media de los flujos de derrubios que oscila entre 0.5 y 10 m/s (Sharp & Nobles, 1953; Johnson, 1970; Morton & Campbell, 1974; Khang, 1980; Pierson, 1980; Takahashi, 1981; Ishikawa, 1982; Hong et al., 1985; Pierson, 1986), la velocidad de los deslizamientos *sensu stricto* (s. s), (inferior a unos centímetros por día) y la de las avalanchas de derrubios que superan los 10 m/s (Kobayashi, 1992; Evans, 1993). Además los flujos de derrubios están saturados en agua por lo que el papel que desempeña ésta es primordial. Mientras que en el caso de las avalanchas la proporción de agua (si existe) con respecto al aire es pequeña.
2. Tipo de movimiento: los deslizamientos *sensu stricto*, tienen lugar principalmente a favor de superficies o planos de rotura. La masa experimenta pequeñas deformaciones y la estructura inicial del material puede ser parcialmente observada en el depósito final. Éste se presenta en forma de un aglomerado de piezas más o menos grandes de material no deformado. Mientras que la estructura inicial de los depósitos resultantes de los flujos de



derrubios y de barro ha sido borrada y cambiada durante el movimiento. La masa inicial de éstos experimenta grandes deformaciones durante su largo recorrido.

3. Aspecto del depósito: los rasgos morfológicos de los flujos de derrubios han sido estudiados por Johnson & Rodine (1984). Entre otras observaciones, estos autores subrayaron que por causa de la tensión de fluencia, las partes laterales del flujo tenderán a detenerse cuando la fuerza a la cual están sometidos disminuye. Esta observación ha sido utilizada por Johnson & Rodine (1984) para demostrar que la aproximación cuasi – estática (es decir el uso del modelo de coulomb para reproducirlos) es inapropiada para estudiarlos y debe de ser reemplazada por una aproximación de la mecánica de fluidos.

Dentro de éste grupo podemos diferenciar dos tipos de movimientos según la granulometría del material: las coladas de barro o tierra y los flujos de derrubios.

#### V.2.1.1 Coladas de barro o tierra

Se trata de flujos constituidos por un material relativamente cohesivo, que contiene un mínimo de 50% de partículas del tamaño de arenas, limos y arcillas (Varnes, 1978; Campbell et al., 1989). La densidad del material movilizado oscila entre 0,5 y 1,5 ( $t/m^3$ ). Puesto que este tipo de movimiento en masa se produce en materiales finos fácilmente movilizables, las velocidades alcanzadas pueden ser bastante altas (varios metros por segundo), recorriendo de éste modo varios kilómetros a favor de la red de drenaje, incluso cuando las pendientes son bajas (Figura V.4).



Figura V.4.- Flujo de barro ocurrido en Julio del 2003 en Timosea Peak west of Owens Lake, California. (URL, 2007).

Las condiciones óptimas para el desencadenamiento de éste tipo de deslizamiento son: la disponibilidad de materiales adecuados, pendientes abruptas, y factores desencadenantes (eventos extremos de lluvia o sismicidad). Las áreas fuente típicas son (Dikau et al., 1996):

- ❖ Laderas abruptas ( $25^\circ - 40^\circ$ ) formadas por materiales en los que predominan las fracciones más finas (arcillas) no consolidadas o poco consolidadas.
- ❖ Laderas volcánicas afectadas o no por erupciones volcánicas.
- ❖ Permafrost en áreas alpinas.
- ❖ Cabeceras en torrentes de montaña.
- ❖ Las zonas de contacto con farallones de roca o canchales.

El comportamiento de estos flujos es normalmente visco – plástico (Dikau et al., 1996) y el umbral para el cese del movimiento es función de la viscosidad y resistencia al corte del material. Además, Las coladas de barro o flujos cohesivos, se caracterizan por su tendencia a fluir a impulsos, concentrando la rotura en los límites de la masa movilizada y formando taponés rígidos alrededor de su centro.

En síntesis, el patrón que siguen se divide en tres fases:

1. Colapso en zona de la cabecera.
2. Flujo rápido a favor de la red de drenaje.
3. Depósito del material en forma de lóbulos de acumulación (Figura V.5).

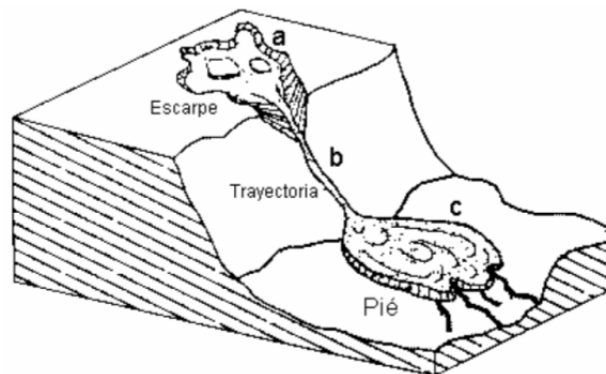


Figura V.5.- Esquema de una colada de barro (Dikau, et al., 1996).

#### V.2.1.2 Flujos de derrubios.

Se trata de coladas formadas por material fino (arena, limos y arcillas), y material grueso (gravas y cantos rodados) con un contenido variable de agua (Figura V.6). Dichas coladas se mueven ladera abajo, normalmente en forma de oleadas inducidas por la gravedad y el colapso instantáneo.



Figura V.6.- Flujo de derrubios ocurrido en Enero de 1997 en Sierra Nevada, California (URL, 2007).

Se desencadenan, por la ocurrencia de eventos extremos de lluvia, o por la fusión repentina con el nivel de aguas freáticas, pudiendo llegar a movilizar un volumen importante de material (Hutchinson, 1988). La frecuencia de ocurrencia de estos eventos está controlada por la tasa de acumulación de material en los canales, así como la recurrencia de los eventos climáticos desencadenantes. La duración e intensidad de las lluvias, junto con la cantidad de lluvia antecedente al evento desencadenante, son los factores principales que controlan el desencadenamiento de éstos flujos. Caine (1980), utilizando datos correspondientes a 73 deslizamientos superficiales y flujos de derrubios, encontró un umbral de intensidad de lluvia (I) – duración de lluvia (D) expresado por:

$$I = 14.82 D^{-0.39}$$

Ec.V.1

Donde:

I = En mm

h = En horas

D = En horas

Este umbral es válido para duraciones de eventos comprendidos entre diez minutos y diez días. Sidle et al. (1985) añadieron el efecto de la lluvia antecedente por medio de nuevas líneas críticas, mostrando la humedad necesaria para la saturación del suelo. Bajo condiciones antecedentes relativamente secas, estiman que se necesitan 125 mm de lluvia para llegar a la saturación y el desencadenamiento del flujo.

Muchos flujos de derrubios comienzan como deslizamientos traslacionales o rotacionales (Johnson & Rodine, 1984). Las roturas tienen lugar en las caras escarpadas de laderas (superiores a 15°, 20°) por afluencias relativamente rápidas de grandes cantidades de agua (Costa, 1984). En la Figura V.7, se puede contemplar un ejemplo de la contribución de los deslizamientos s.s al flujo de derrubios, aportando una cantidad importante de material.



Figura V.7.- Contribución de los deslizamientos de laderas a los flujos de derrubios (Du et al., 1987).

El mecanismo exacto que provoca que la rotura de una ladera evolucione a un flujo de derrubios no está muy claro. No obstante, puede explicarse por la dilatancia, y la incorporación de agua adicional a través de las grietas de tracción que aparecen con el deslizamiento, causando la pérdida de estructura y la licuefacción (Costa, 1984).

Los depósitos resultantes están bien graduados, presentando un pequeño contenido en arcilla, por lo general inferior al 5%. La concentración de sólido por volumen está en el rango de 25% a 86% aproximadamente, y la proporción de sólidos por peso es de 35% a 90% (Costa, 1984). Los flujos de derrubios pueden tener viscosidades que superan las 100 Pa s y densidades que van de 2.0 a 2.4 ( $\text{g/cm}^3$ ) (Sharp & nobles, 1953; costa, 1984).

Parte de los derrubios gruesos forman crestas laterales (levees) a ambos lados del trayecto. Cuando se produce una ruptura de pendiente, los flujos de derrubios de baja viscosidad pierden su capacidad portante dando lugar a la formación de abanicos aluviales (Costa, 1984). Por el contrario, los flujos de derrubios muy viscosos pueden transportar grandes cantos rodados, árboles e incluso coches.

### V.2.1.3 Lahares.

Cuando se originan en laderas volcánicas, los flujos de derrubios y coladas de barro contienen materiales volcanoclásticos y se denominan lahares. La comunidad científica define a éstos como flujos rápidos de una mezcla de agua y derrubios altamente concentrados, que tienen lugar en laderas volcánicas (Thouret & Lavigne, 2000). Estos autores presentaron una clasificación de los lahares basada en el mecanismo desencadenante así como en el tiempo que ha transcurrido entre la erupción volcánica y el evento desencadenado (Figura V.8).



Figura V.8.- Clasificación de lahares según Thouret & Lavigne (2000) (Thouret & Lavigne, 2000).

Los mecanismos desencadenantes de los lahares se pueden clasificar en dos grupos: Por un lado, un aporte repentino de grandes volúmenes de agua. Dicha agua puede provenir de:

1. La fusión con el nivel de agua freáticas o de un glaciar
2. Drenaje de lagos volcánicos debido a la rotura de los cráteres
3. Las erupciones subglaciales a su vez pueden formar lagos subglaciales
4. Las fuertes lluvias que tienen lugar después de la erupción.

Y por otro lado los lahares pueden estar inducidos por avalanchas de rocas o por deslizamientos s.s además del mecanismo desencadenante la iniciación de los lahares requiere de una adecuada fuente de agua, material fácilmente movilizable, y laderas abruptas en el área fuente. Cabe mencionar, que en la bibliografía se hace uso de éste término no solo para designar los flujos de derrubios y de lodos originados en laderas volcánicas, sino también para referirse a flujos hiperconcentrados siendo la diferencia principal entre ambos la proporción de agua que contienen. En este sentido, se propone que el límite entre estos flujos sea del orden de 50% a 60% de proporción de la fracción sólida en la mezcla.

Los lahares se caracterizan por ser flujos rápidos, se han registrado velocidades de hasta 30 m/s para los ocurridos en el Mount St. Helens en 1980 (Pierson, 1986). Los lahares se desplazan en oleadas (Thouret y Lavigne, 2000) y sus propiedades hidráulicas, de acuerdo con su tipo, son las siguientes:

**a) Flujos hiperconcentrados:** En este tipo, los mecanismos que soportan el material son la turbulencia, las fuerzas dispersivas y la flotabilidad (Figura V.9), que permiten el movimiento de las partículas dentro del agua por tracción, suspensión, flotación y solución. Cuando la velocidad disminuye, la deposición de las partículas se realiza en función de sus pesos. La velocidad que pueden alcanzar los flujos hiperconcentrados es mayor a la que alcanzan los no saturados, como el de arroyada. Tienen una alta capacidad de incorporar o perder agua y/o material; por lo tanto, se pueden transformar fácilmente en un flujo de arroyada.

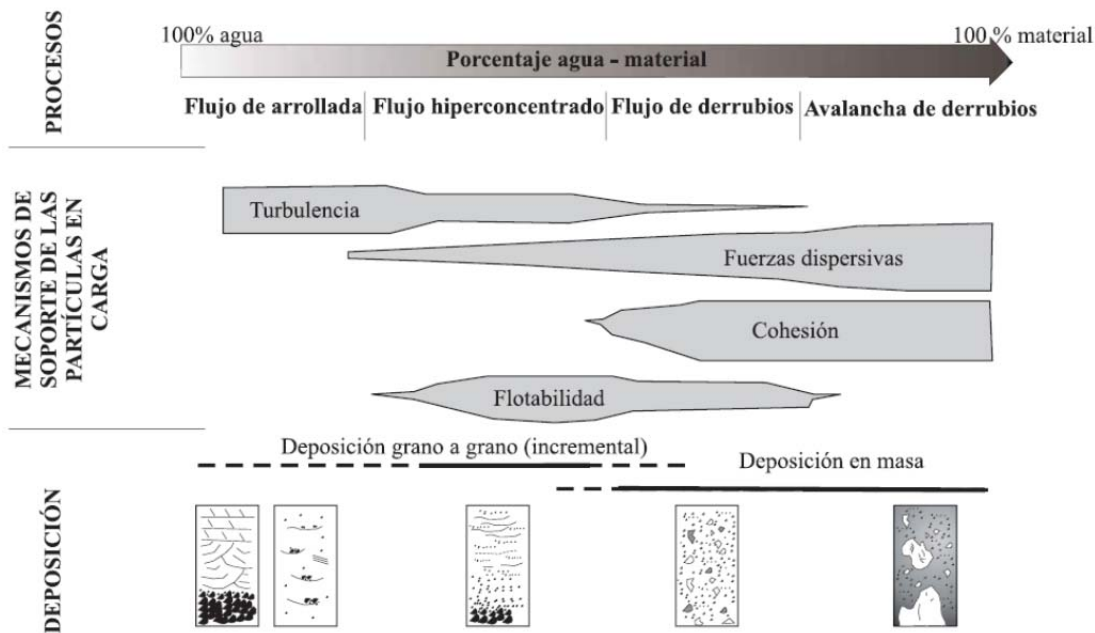


Figura V.9.- Procesos, mecanismos de transporte y depósito de los flujos hiperconcentrados y de derrubios (Smith & Lowe, 1991).

**b) Flujos de derrubios:** Los mecanismos que permiten el traslado de los materiales dentro del flujo de derrubios son, en mayor medida, la cohesión y las fuerzas dispersivas, y en menor grado, la flotabilidad y la turbulencia (Figura V.10), lo que genera que éstos sean mayoritariamente laminares. La velocidad que alcanza este tipo de flujo es superior a la que puede alcanzar uno hiperconcentrado.

Si los flujos de derrubios son cohesivos, la fase líquida mantiene a la fase sólida en su interior, ya que todo se encuentra unido. Las partículas se mueven a la misma velocidad que la matriz y rara vez colisionan entre ellas; la flotación y cohesión, como mecanismos de transporte, dominan el desplazamiento del material dentro de este tipo de mezclas.

En un corte transversal del canal, el material localizado en el centro avanza en conjunto y se denomina flujo rígido (rigid plug) (Thouret y Lavigne, 2000; Vallance, 2000), mientras que el material que está en contacto con el canal se deforma por la resistencia al movimiento. En una vista aérea, el flujo rígido avanza en el frente mientras el material en contacto con el canal se frena (Figura V.10). El flujo cohesivo, difícilmente adquiere agua o material; por tanto, es rara su transformación en otro tipo de flujo (Vallance, 2000). La arcilla incrementa la presión de los poros

y esto genera una gran movilidad; por ello, son capaces de alcanzar mayores distancias que los no cohesivos (Scott et al., 1995).

Si los flujos de derrubios son no cohesivos, las fuerzas dispersivas son el mecanismo que domina el transporte de material dentro del flujo. Vallance (2000) explica el movimiento de las partículas dentro de éste por la acción conjunta de lo que se denomina proceso de percolación (percolation) y expulsión rotacional o exprimidora (squeeze – expulsión process) que da lugar al fenómeno conocido como criba cinética (kinetic sieving).

El proceso de percolación consiste en la apertura de vacíos debajo de las partículas. Cuando ésta es igual o superior a la partícula, cae dentro por acción de la gravedad. Si en el flujo existe una variedad de tamaños de partículas, las de menor tamaño caerán antes, pues es más probable que se abran vacíos pequeños que grandes. La expulsión rotacional o exprimidora es el efecto que produce la elevación o rotación de las partículas más grandes hacia arriba, ya que tiene que mantenerse la misma masa en la base y en el techo del flujo (Vallance, 2000).

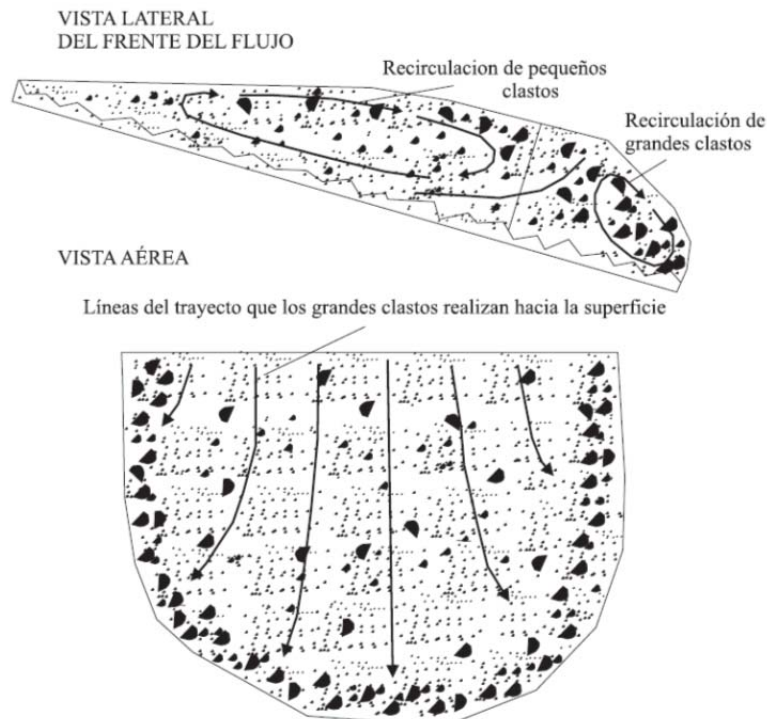


Figura V.10.- Vista aérea y transversal de un flujo de derrubio cohesivo (Thouret & Lavigne, 2000).

La criba cinética es el proceso de migración de las partículas pequeñas a las partes inferiores y de las grandes a la superficie del flujo, aunque estas últimas, una vez que alcanzan la superficie, son desplazadas a los laterales, ya que en la superficie las velocidades son más altas que en los extremos debido al rozamiento con el canal (Figura V.11). Si las partículas se amontonan en el frente del flujo, éste puede llegar a frenar el movimiento, hasta que la fuerza del lahar las vuelve a incorporar.

La incorporación de agua y material en los flujos de derrubios tanto cohesivos como los no cohesivos es posible, aunque de forma más lenta que en los flujos hiperconcentrados (Vallance, 2000).

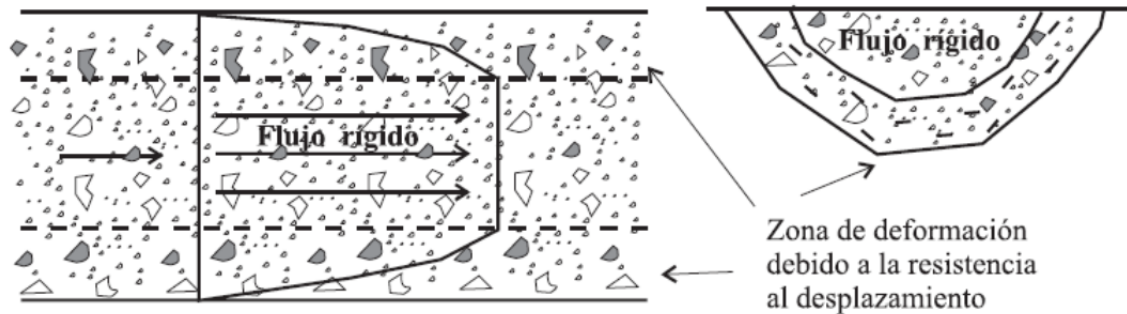


Figura V.11.- Vista lateral y aérea de un flujo de derrubio no cohesivo (Vallance, 2000).

Cuando un lahar incorpora o pierde material y agua, sus depósitos presentan un proceso que Vallance (2000) denomina acreción incremental (incremental deposition). Si se analiza este proceso, se observa como el tamaño de los sedimentos de un lahar y su descarga de agua y material varían en función del tiempo, para un mismo sitio. Un ejemplo de acreción incremental se muestra en la Figura V.12, donde se aprecia que cuando comienza el lahar, en el tiempo 1, éste se comporta como un flujo hiperconcentrado que porta diminutas partículas. En el tiempo 2, el lahar incorpora más agua y es capaz de acarrear partículas de mayor tamaño. En el tiempo 3, el flujo se comporta como un flujo de derrubios, y aunque pierde agua, mantiene en su interior a las partículas de gran tamaño. En el tiempo 4, el flujo de derrubios aumenta su capacidad de incorporar grandes partículas, aunque pierde gran cantidad de agua. Así, hacia el techo del depósito, la fracción gruesa es cada vez mayor.

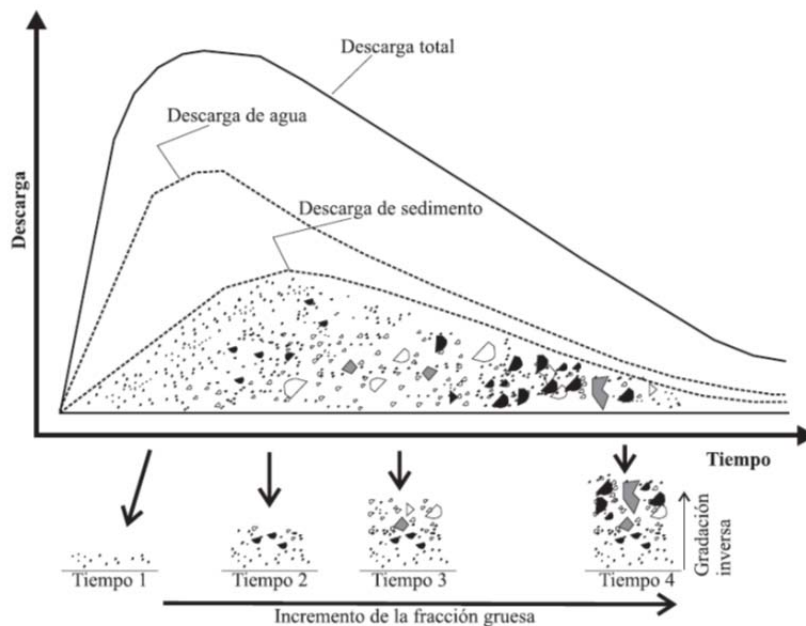


Figura V.12.- Proceso de depósito incremental (Vallance, 2000).



### V.2.2 Avalanchas Granulares.

Se trata de una oleada extremadamente rápida, de grandes masas de rocas o derrubios que tiene su génesis en el colapso de laderas o acantilados. Los aludes de roca, se pueden producir como consecuencia de un deslizamiento rocoso de gran envergadura (gran escala) o del desprendimiento del cuerpo rocoso, que como resultado de las tensiones generadas durante el movimiento se convierte en una masa de derrubios, que continúa avanzando a modo de avalancha. Otra forma de desencadenarse éste fenómeno es por la movilización repentina de los depósitos de derrubios, debido a la caída de una masa rocosa en equilibrio precario o por actividad sísmica (Figura V.13).



Figura V.13.- Avalancha de Valtellina, Italia 1987 (URL, 2007).

La velocidad de estas avalanchas supera los 10 (m/s) (Kobayashi, 1992; Evans, 1993). La distancia recorrida es del orden de Kilómetros y el volumen depositado puede exceder de  $1 \times 10^6 \text{ m}^3$ , cubriendo una superficie total de más de  $0.1 \text{ km}^2$ . La masa total depende de cada caso, pero puede llegar a ser del orden de varios millones de metros cúbicos. Como consecuencia, este tipo de movimiento puede llegar a ser extremadamente costoso en lo que a vidas humanas se refiere. Ejemplos de este tipo de movimiento son las avalanchas de rocas que tuvieron lugar en Valtellina (Italia, 1987) y en Randa (Suiza, 1991) (Figuras V.13 y V.14).



Figura V.14.- Avalancha de rocas ocurrida en Randa el Valle Matter, Suiza (URL, 2007).

Según Davies (1982) las características principales de los aludes de roca son:

- ❖ La altura de caída y/o la distancia recorrida por la masa de rocas, derrubios que permite al material en movimiento alcanzar altas velocidades.
- ❖ Una vez desencadenado el movimiento y cuando la velocidad es lo suficientemente alta, tiene lugar la rotura en la base de la masa, produciéndose como resultado la dilatación y reducción de la fricción interna; de este modo, la masa de derrubios puede fluir y recorrer distancias considerables, incluso a favor de pendientes suaves.
- ❖ Cuando la velocidad disminuye y la rotura en la base no es la suficiente, como para mantener la dilatación, la fricción interna se incrementa y la masa se detiene.
- ❖ Generalmente, la masa de derrubios atraviesa grandes distancias debido a un coeficiente de fricción efectiva particularmente bajo, entre la ladera y la masa rocosa en caída.

Estas avalanchas se diferencian de los flujos de derrubios y coladas de barro tanto por el papel que desempeña el agua como por las velocidades que llegan a alcanzar. Por otro lado, cabe mencionar que el término desprendimientos queda reservado a los movimientos de caídas y/o de vuelcos de bloques o masas rocosas. Estos movimientos se diferencian claramente de las avalanchas por:

- a) Los volúmenes involucrados, puesto que los desprendimientos involucran volúmenes relativamente pequeños
- b) El mecanismo de rotura, ya que los desprendimientos resultan de roturas graduales a favor de planos de discontinuidad preexistentes.

El recorrido de las avalanchas se divide en tres partes:

1. Una zona de iniciación: es la parte más escarpada con unas pendientes del orden de  $30^\circ$  a  $45^\circ$  o incluso más. En esta zona se produce la rotura y la avalancha acelera moviéndose ladera abajo e incorporando material adicional a su paso
2. El trayecto: durante el cual la velocidad permanece más o menos constante, la pendiente media es menos acentuada y la incorporación de material es menos importante

3. La zona de acumulación: se caracteriza por el cese del movimiento de forma brusca o gradual. La pendiente de esta zona es inferior a  $20^\circ$ .

Por otro lado, el volumen inicial puede incrementarse por sucesivas caídas, por el desmoronamiento de la masa rocosa, así como por la incorporación de materiales a lo largo del trayecto del movimiento. Esta incorporación es debida a la desestabilización y erosión del fondo.

Cuando tiene lugar la rotura de una ladera formada por rocas, los bloques de mayor tamaño pueden romperse, formándose bloques más pequeños. Se evoluciona así hacia un material tipo fluido friccional. Cuando el material está en reposo, su estado puede considerarse sólido, y las tensiones en su seno pueden obtenerse empleando ecuaciones constitutivas adecuadas a materiales granulares así como técnicas numéricas por ejemplo elementos finitos. En este estado, dos partículas vecinas seguirán siéndolo cuando varíen las tensiones. Una vez que el material empieza a fluir, en la avalancha las trayectorias de estas partículas vecinas pueden llegar a divergir, siendo su comportamiento similar al de un fluido clásico.

El análisis del mecanismo de este movimiento incluye dos etapas: el estudio de la rotura inicial, la cual puede ocurrir, tanto por deslizamiento como por caída; y el análisis de la fluidización posterior.

Hoy en día, a pesar de los estudios llevados a cabo hasta la fecha, no hay una explicación universalmente aceptada, que permita explicar la excesiva movilidad de las avalanchas granulares. La bibliografía especializada recoge varias explicaciones en relación con el mecanismo de las avalanchas. Así, Kent (1965) habla de la fluidización de las partículas causado por la incorporación de aire; Shreve (1968a, 1968b) plantea la existencia de una banda de aire atrapado, en la cual ocurre el deslizamiento; Hsü (1975) señala que la baja resistencia a fricción puede ser reducida por el efecto flotante del polvo en suspensión, que actúa como un medio que separa los bloques en movimiento. Melosh (1980) propone la hipótesis de fluidización acústica. Estas hipótesis han sido discutidas en varias publicaciones (Hsü, 1975; Hungr & Morgenstern 1984b; Hungr, 1990; Legros, 2002) contrastándolas con la realidad del campo.

### V.2.3 Flujos Deslizantes.

El término flujo deslizante fue introducido a mediados de la década de los sesenta del siglo pasado, con el fin de describir una categoría de flujos procedentes de escombreras potencialmente inestables, al ser en general, depósitos poco compactados. De este modo, los expertos británicos utilizaron el término flujo deslizante (flow slide) para describir el movimiento en masa que se desencadenó en Aberfan el 21 de Octubre de 1966, Figura V.15. El deslizamiento se produjo en un talud formado por el vertido de residuos de una mina de carbón. En su propagación alcanzó el pueblo de Aberfan, causando 144 muertos. Los residuos del talud no habían sido compactados, habiéndose construido mediante simple volteo. En el momento de producirse la rotura, la altura del talud era de 67 m, y estaba asentado sobre un terreno cuya pendiente media era del 12%. El mecanismo de rotura ha sido descrito por Bishop, Hutchinsón, Penman y Evans (1969), encontrándose asimismo una descripción muy completa en los trabajos *The stability of tips and spoil heaps*, de Bishop (1973) y *A sliding – consolidation model for flow slides*, de Hutchinson (1986).



Figura V.15.- Vista del flujo deslizando de Aberfan (URL, 2007).

En estos trabajos los autores coinciden en que la rotura fue causada por un aumento de la presión intersticial en el pie del talud, que probablemente llegó a estar saturada, a diferencia de la zona superior del mismo. Bishop comenta que “...los trabajos de rescate se complicaron por el flujo de agua que apareció tras el deslizamiento en la base del deslizamiento...” Una vez que se produjo la rotura, el flujo deslizando se propagó ladera abajo 275 m, dividiéndose a continuación en dos lóbulos que se denominaron norte y sur. Este último fue el mayor de los dos, y alcanzó el pueblo, mientras que el lóbulo norte se detuvo tras llegar a un terraplén. El flujo deslizando de Aberfan se propagó una distancia de unos 600 m, y se cree que esta cifra hubiera podido ser mayor si no hubiera encontrado al pueblo en su camino. La velocidad estimada es de unos 4.5 a 9 m/s.

Estos flujos representan un tipo de deslizamientos rápidos en los que el material es un suelo con una tendencia importante a compactar. En general, se trata de suelos de baja densidad, con una estructura meta estable, como ocurre con residuos mineros depositados en balsas, suelos de origen volcánico, rellenos hidráulicos, etc. La tendencia de estos materiales a compactar bajo tensiones cortantes genera presiones intersticiales en el fluido intersticial (agua o aire), que hacen que la trayectoria de tensiones efectivas se curve hacia el origen, disminuya la presión hidrostática efectiva de confinamiento  $p'$  y aumente el ángulo de rozamiento efectivo movilizado. En casos límite,  $p'$  puede llegar a valores próximos a cero y el suelo se comporta entonces como un fluido viscoso, fenómeno conocido como licuación. En caso de que esto ocurra, los edificios cimentados en estos materiales, se hunden en ellos, como ocurrió en Niigata (Japón) durante el terremoto de 1966.

La licuación puede producirse también en materiales parcialmente saturados, como por ejemplo ocurrió en los suelos de origen volcánico de Las Colinas (El Salvador), durante el terremoto de Enero de 2001. En este caso, una hipótesis razonable que puede explicar el flujo deslizando que se produjo, es que el terremoto causó el colapso del material, cuya tendencia a compactar hizo que aparecieran presiones de aire intersticial elevadas. Estas llevaron al material a un estado de

licuación, y al ser el tiempo de propagación menor que el de disipación de estas presiones, las mismas se mantuvieron el tiempo suficiente para que el deslizamiento se propagara ladera abajo unos 600 m. Este caso de licuación seca o sin agua es similar a otro mencionado por Bishop, quien describe un caso publicado por Calembert y Dantinne que ocurrió en Jupille (Bélgica) en 1964. El deslizamiento se produjo en este caso en cenizas volcánicas. La Figura V.16 muestra una vista aérea del flujo deslizante seco que se produjo en Santa Tecla, localidad de Las Colinas en El Salvador, como consecuencia del terremoto de Enero de 2001.



Figura V.16.- Flujo deslizante en Santa Tecla, El Salvador 2001 (URL, 2007).

Las diferentes causas de los flujos deslizantes son la rotura inicial rotacional en la cabecera, las vibraciones o choques, las lluvias intensas, los depósitos flojos de las escombreras, la desaparición de un soporte lateral y la carga rápida. Se puede dar el caso de que tenga lugar un deslizamiento en la cabecera del flujo deslizante pero, en general, hay pocos indicadores de rotura en las etapas posteriores del movimiento. Estos flujos no solo fluyen muy rápido, sino que también consolidan en poco tiempo. Asimismo, solidifican al dejar de moverse, creando de este modo un riesgo adicional en el área de deposición. Estos movimientos son extremadamente difíciles de distinguir, puesto que algunos rasgos, tanto los referentes a la pendiente como a la forma, se asemejan a los que se dan en coladas de barro, o flujos de derrubios. Los flujos deslizantes generalmente duran unos minutos aunque pueden continuar mostrando una actividad remanente varios días después de que el evento haya tenido lugar.

En definitiva, se trata de un colapso estructural del material que forma la ladera, con una fluidización momentánea. En la literatura especializada, este proceso suele venir referido como un evento de alta magnitud en términos de velocidad y de destrucción.

La diferencia fundamental que existe entre los tipos de deslizamientos rápidos objeto de esta tesis desde el punto de vista mecánico radica en el acoplamiento entre el fluido intersticial (agua y aire) y

el esqueleto sólido, y más concretamente en la relación de dos escalas de tiempo: consolidación o disipación de presiones intersticiales y propagación del deslizamiento (Pastor et al., 2005).

En el caso de las avalanchas de materiales granulares, existe un acoplamiento con el aire intersticial, pero la escala de tiempo de disipación de las presiones generadas es mucho más pequeña que la de propagación del deslizamiento. Esto corresponde a un tipo que podríamos denominar drenado, y se estudia sin tener en cuenta el acoplamiento entre fluido y esqueleto sólido.

En el otro extremo se encuentran los deslizamientos para los que el tiempo de propagación es mucho más pequeño que el de disipación de presiones intersticiales. Se trata de un caso no drenado, y se suele estudiar considerando un único material con unas propiedades reológicas especiales. Este es el caso de las coladas de barro.

Finalmente, está el caso donde el acoplamiento es importante, con escalas de tiempos similares en propagación y consolidación. Este es el caso, en general, de los flujos de derrubios, de algunos lahares y de los flujos deslizantes. Aquí es fundamental tener en cuenta el acoplamiento entre los fluidos intersticiales y el esqueleto sólido.

Desde un punto de vista ingenieril, es muy importante:

- ❖ Predecir las condiciones que darán lugar a movimientos de ladera, de forma que se puedan evitar mediante técnicas apropiadas (refuerzo y mejora de suelos, etc.)
- ❖ Predecir las características de los movimientos que se propagan, como masa de material, velocidad, distancia alcanzada, recorrido, etc., de forma que se puedan proyectar medidas de protección como diques, presas o canales.

En la actualidad, existen modelos matemáticos, constitutivos y numéricos fiables, aunque su uso no se ha difundido suficientemente. Se siguen empleando herramientas clásicas, como los círculos o superficies de deslizamiento, modelos de elementos finitos basados en criterios de rotura como el de Mohr Coulomb, etc. En todos estos casos, no se pueden predecir de forma fiable ni la rotura ni la propagación.

Los tres tipos de movimientos rápidos antes mencionados, tienen en común el hecho de que en todos ellos el material en movimiento se comporta como un fluido. Una vez iniciada la propagación, la masa de material movilizado se mueve con una velocidad que depende del tipo de problema.

En muchos casos, haciendo hipótesis adicionales sobre la estructura del flujo, es posible llevar a cabo una integración de las ecuaciones que describen el movimiento según un eje vertical. De esta manera se llega a modelos denominados integrados en profundidad, similares a los de onda en profundidades reducidas empleados en ingeniería de costas. Estos modelos bidimensionales pueden integrarse en secciones transversales al movimiento en casos en que el flujo esté encauzado en canales, cañones, o valles estrechos. Se llega así a modelos unidimensionales.

Respecto de las ecuaciones integradas en profundidad, existen dos formulaciones alternativas, lagrangiana y euleriana, que presentan ventajas e inconvenientes. Las formulaciones lagrangianas han sido empleadas en casos unidimensionales, aunque en estos momentos y debido al desarrollo de

los denominados métodos sin malla (meshless), como el SPH (smoothed particle hydrodynamics), están empezando a utilizarse más. Los primeros modelos son los debidos a Savage & Hutter (1991), Hutter & Koch (1991), Hungr (1995), Rickenmann & Koch (1997). Estos modelos incorporaban, de una forma relativamente sencilla, aspectos como la existencia de un coeficiente  $K_\theta$  activo o pasivo, definido de forma análoga a como se hace en mecánica del suelo. A esto hay que añadir que al ser unidimensionales, no es complicado formularlos en sistemas de coordenadas curvilíneas que se ajustan al terreno. Sin embargo, estas formulaciones lagrangianas presentan inconvenientes serios en casos bidimensionales, como la separación en ramales del flujo al llegar a un obstáculo, o la unión de corrientes para formar una única masa. Por ello, muchos investigadores han empleado formulaciones eulerianas, donde el fluido se mueve en una malla fija. Este es el caso de los trabajos presentados por Laigle & Coussot (1994) y Pastor et al., (2002).

En situaciones reales, es necesario saber cuál es la masa que forma el deslizamiento, así como las condiciones iniciales del mismo una vez que la rotura se ha producido, especialmente la distribución de la presión intersticial en la base. Más aún, hay que poder predecir si el deslizamiento evolucionará hacia un deslizamiento rápido tipo flujo deslizante, o su velocidad se reducirá hasta estabilizarse.

Hoy en día, es difícil contestar con precisión a estas preguntas. La dificultad fundamental que aparece es el cambio de fase de sólido a líquido, y viceversa. Para ello es necesario un modelo consistente, que englobe como casos particulares el sólido y el fluido, y en la actualidad este problema no está resuelto aún. De hecho, la mayoría de los casos que se presentan en la literatura científica describen modelos de flujos deslizantes que han tenido lugar en el pasado, con lo cual no se predice si el deslizamiento inicial se acelerará o tenderá a estabilizarse. En estos casos, se conoce la masa movilizada, y pueden obtenerse los datos necesarios relativos a las propiedades del material, presiones intersticiales, tensiones iniciales, etc.

Una de las conclusiones de Pastor et al., 2002 respecto a la modelización numérica de los deslizamientos es la necesidad de resolver el problema en dos fases sucesivas. En la primera, se emplea un modelo de elementos finitos no lineales, con acoplamiento de presiones intersticiales, y se obtiene la superficie de rotura, la masa movilizada, y las condiciones en el momento de la rotura. Estos datos se emplean en un segundo modelo con el que se estudia la propagación del deslizamiento.

### **V.3 Evaluación de estabilidad de taludes.**

En los últimos años, un creciente número de autores han publicado sus trabajos de investigación sobre estabilidad de taludes en diversos medios escritos, en especial involucrando suelos parcialmente saturados, análisis probabilísticos, análisis de deformaciones y aplicaciones de envolventes de falla curvas. A continuación se enumeran algunos trabajos desarrollados en las últimas dos décadas sobre la influencia de las lluvias en la estabilidad de taludes.

### V.3.1 Estudio de Freeze (1969).

El autor cita modelos que examinan la infiltración de la lluvia con diversas restricciones y condiciones de frontera elaborados por autores desde Klute (1952), hasta Ibrahim & Brutsaert (1968), entre otros; adicionalmente se presenta el modelo matemático aportado por Freeze, el cual trabaja con varios parámetros que representan la carga y descarga del suelo producida por la infiltración y evaporación del agua, abordando desde ese entonces el tema de suelos parcialmente saturados. El modelo de Freeze trabaja en una dimensión (1D), simplificando la ecuación de Richards en tres dimensiones (3D), tomando parámetros de 3 texturas de suelo trabajando manualmente carga total, carga de presión y contenido de agua estudiando el efecto de: tipo de suelo (Figura V.17), la intensidad y duración de la lluvia, el contenido inicial de agua en el suelo, la tasa de carga y descarga de humedad y la profundidad del nivel freático de agua.

El autor concluye que es engañoso estimar la infiltración a partir de la conductividad hidráulica saturada y la textura del suelo, es más exacto conocer las funciones que relacionan carga de presión  $\psi$ , permeabilidad, capacidad específica de almacenamiento de agua y contenido volumétrico de agua  $\theta$ .

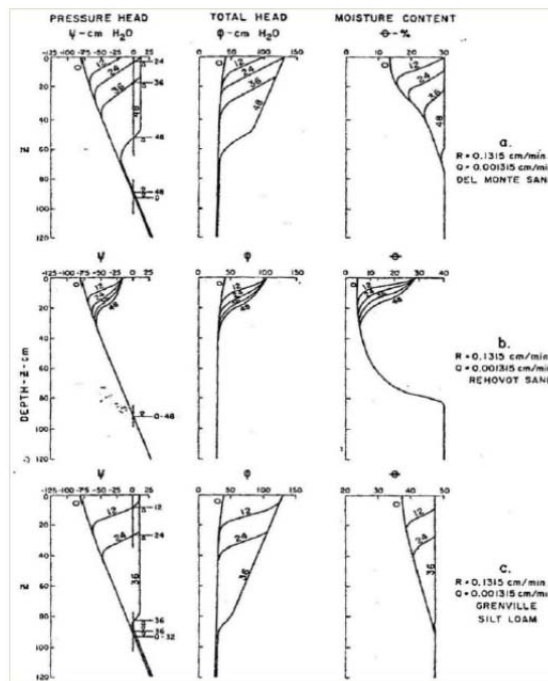


Figura V.17.- Efecto del tipo de suelo, para tres texturas de suelo (Adoptado de Freeze, 1969).

### V.3.2 Estudio de Pradel y Raad (1993).

Estos autores, investigando el efecto de la permeabilidad en la estabilidad superficial en los taludes homogéneos han encontrado que la cohesión del suelo juega un papel preponderante en la estabilidad de taludes, inclusive más importante que el ángulo de fricción. En sus estudios han encontrado que los suelos con permeabilidades bajas son más propensos a desarrollar inestabilidad superficial que aquellos que presentan mayores permeabilidades, es decir suelos arcillosos y



limosos son más propensos a desarrollar inestabilidad superficial que los suelos arenosos o gravosos. Estudiando el modelo de Talud Infinito y la ecuación de Green Ampt (1911) encontraron que los suelos con permeabilidades más grandes que la permeabilidad límite  $K_{lim}$ , dependiente de la profundidad del frente húmedo y la correspondiente succión, nunca serán saturados.

### V.3.3 Estudio de Anderson y Sitar (1995).

Anderson y Sitar (1995) estudiando la relación entre lluvia y flujo de detritos, encontraron que los flujos se producen principalmente en suelos residuales y coluviales. Los deslizamientos superficiales ocurren en profundidades menores a 3,0 m y la superficie de falla es sub – paralela a la superficie del talud. Las lluvias intensas producen aumentos temporales de presiones de poros que a su vez ocasionan reducción en los esfuerzos efectivos y aumento de la conductividad hidráulica. Con las lluvias intensas, en la superficie se produce un aumento en la presión de poros que a su vez mueve la trayectoria de esfuerzos en forma horizontal e intercepta la envolvente de falla, generando que el suelo colapse (Figura V.18).

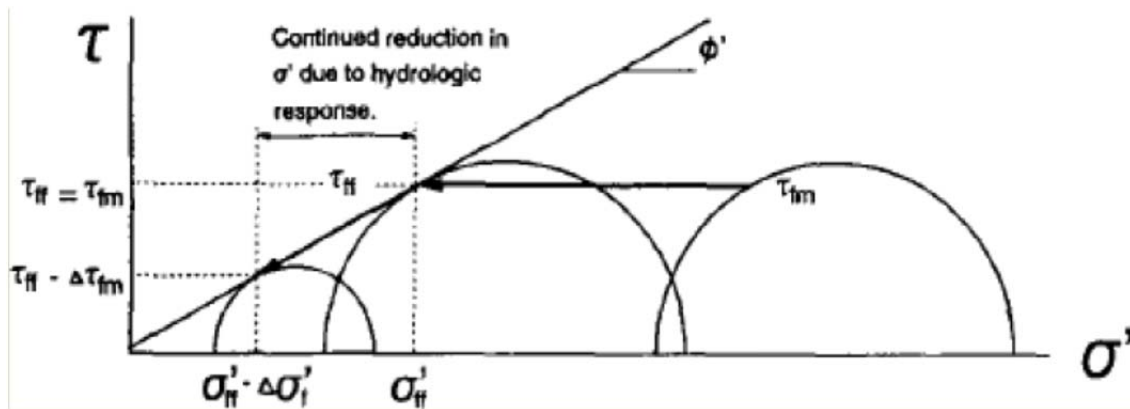


Figura V.18.- Esquema de la reducción de esfuerzos debido a la respuesta hídrica del suelo (Adoptado de Anderson & Sitar, 1995).

### V.3.4 Estudio de Ng y Shi (1998).

Estos autores analizan la estabilidad de taludes en Hong Kong, involucrando la investigación de Pradel y Raad (1993) y la ecuación de Lumb (1962), trabajando con flujo en dos dimensiones (2D) con saturación del suelo al 100%; realizando un estudio paramétrico construyeron curvas de presión de poros contra nivel del terreno, analizando la influencia de la duración de las lluvias en la estabilidad de los taludes (Figura V.19). Estos autores encontraron que el Factor de Seguridad no solo depende de la intensidad de la lluvia, también depende de las condiciones iniciales del nivel freático, la relación de permeabilidad anisotrópica, pero en especial de la lluvia antecedente.

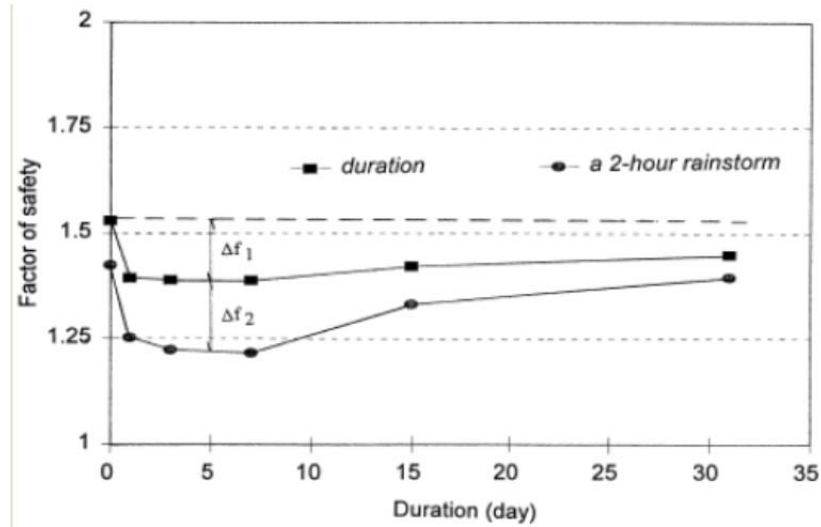


Figura V.19.- Factor de seguridad Vs. Duración de la lluvia para un talud de referencia (Línea superior) lluvia normal, (Línea inferior) Lluvia intensa de corta duración. También se muestra  $\Delta f$  respecto del factor de seguridad en condiciones secas (Línea discontinua) (Adoptado de Ng & Shi, 1998).

### V.3.5 Estudio de Gasmó, Rahardjo y Leong (2000).

Los autores estudian el efecto de la infiltración en la estabilidad de un suelo residual, usando el criterio de falla extendida de Mohr – Coulomb propuesto por Fredlund y Rahardjo (1993); encontraron limitaciones en su trabajo, pero finalmente fueron capaces de ilustrar el efecto de la infiltración en la estabilidad del talud combinando la modelación y análisis de infiltración y estabilidad de taludes. Presentaron una gráfica de factor de seguridad para diferentes días del año y diferentes intensidades de lluvia, según el caso particular estudiado por ellos (Figura V.20). Los autores realizan una comparación gráfica de las presiones de poros modeladas con el software y las medidas en campo.

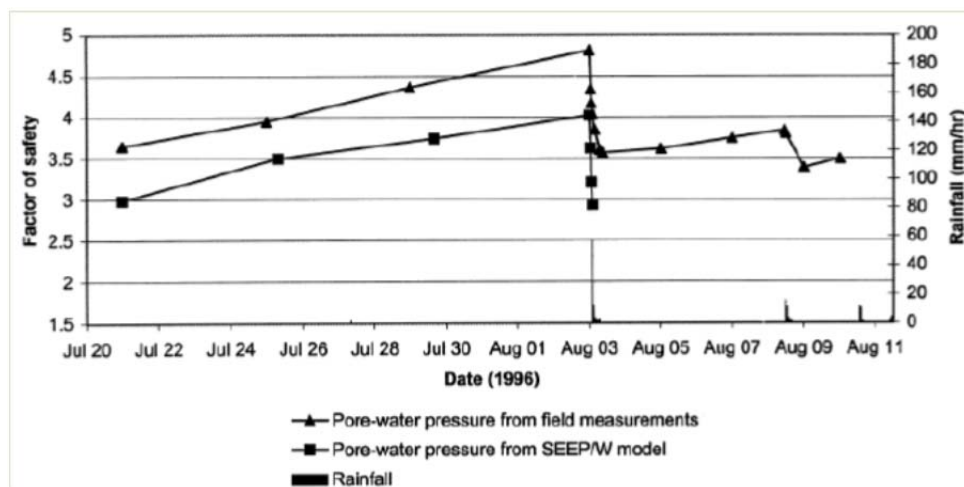


Figura V.20.- Factor de seguridad a lo largo de Julio y Agosto de 1996, para el caso particular estudiado por Gasmó, Rahardjo y Leong (Adoptado de Gasmó et al., 2000).

### V.3.6 Estudio de Cho y Lee (2002).

Estos investigadores evalúan la estabilidad superficial de taludes homogéneos bajo la acción de la lluvia, los autores citan el modelo de infiltración de Mein y Larson (1973), el cual soluciona explícitamente la infiltración por encharcamiento, llevando a cabo varios análisis numéricos por medio de elementos finitos, concluyendo que el mencionado método de Mein y Larson (1973) arroja buenos resultados, comparables con las simulaciones con software (Figura V.21).

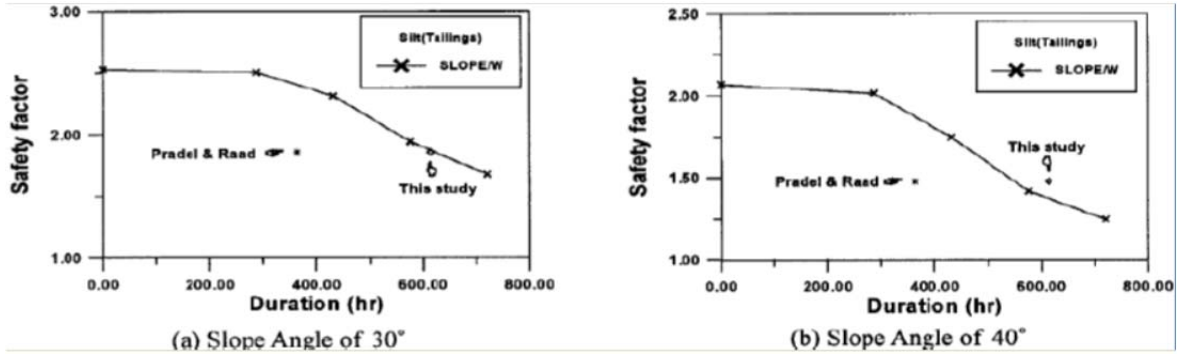


Figura V.21.- Comparación de factor de seguridad en la estabilidad modelada con software Geo Studio (Seep/W para infiltración y Slope/W para estabilidad), infiltración con el método de Pradel y Raad y finalmente la metodología de Mein y Larson (Adoptado de Cho & Lee, 2002).

### V.3.7 Estudio de Kim J., Jeong S., Park S., y Sharma J. (2004).

Realizando procedimientos de laboratorio con papel filtro para hallar la SWCC en suelos meteorizados estudiando la influencia de la infiltración causada por la lluvia, estos autores trabajan y comparan las expresiones de Fredlund y Xing (1994) y Van Genuchten (1980). Adicionalmente utilizan las expresiones de Pradel y Raad (1993) con el objeto de calcular la profundidad del frente húmedo y la succión, para luego apoyarse en el criterio de falla extendida de Mohr – Coulomb propuesto por Fredlund y Rahardjo (1993) analizando la estabilidad de taludes por medio del talud infinito (Figura V.22). Así mismo se modeló la infiltración por medio de software, encontrando diferencias entre los dos análisis de infiltración. El estudio demuestra que la profundidad del frente húmedo juega un papel preponderante en la estabilidad de los suelos meteorizados y que las expresiones de Pradel y Raad (1993) deben usarse con precaución en los suelos meteorizados, debido a que el factor de seguridad de un talud infinito compuesto de estos suelos se reduce drásticamente cuando la profundidad del frente húmedo es mayor a 120 cm, profundidad asociada con la cohesión efectiva de estos suelos, que es de 10 kPa aproximadamente.

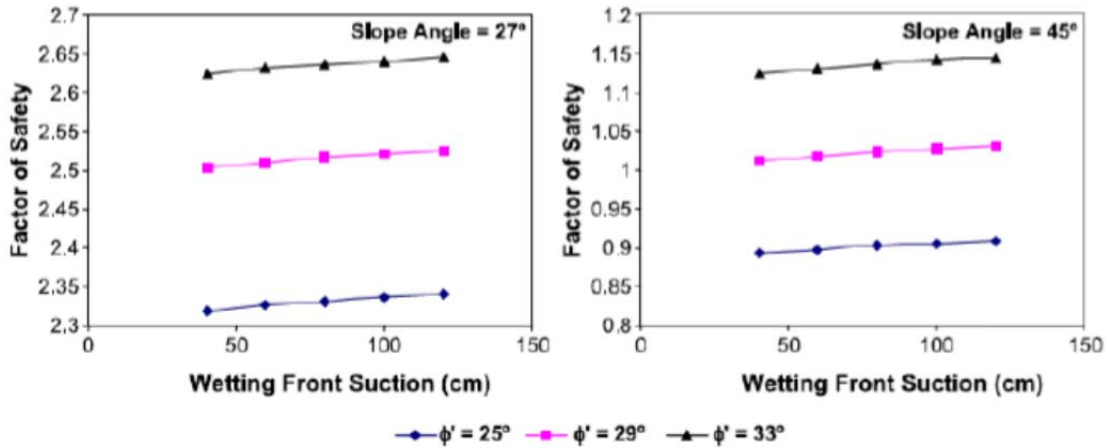


Figura V.22.- Relación entre el factor de seguridad y la succión en el frente húmedo para tres valores de ángulo de fricción y dos inclinaciones de taludes (Adoptado de Kim et al., 2004).

### V.3.8 Estudio de Cho (2009).

El autor evalúa la estabilidad superficial de dos texturas de suelos considerando el efecto de la lluvia con el modelo de talud infinito y trabajando con en el criterio de falla extendido de Mohr – Coulomb propuesto por Fredlund y Rahardjo (1993). En este caso, el autor modela por separado el flujo en condiciones parcialmente saturadas y el flujo en condiciones saturadas, tomando una textura y luego dos texturas de suelo, encontrado que la modelación de estabilidad con flujo parcialmente saturado incrementa el factor de seguridad, comparándola con la modelación de estabilidad para flujo saturado. El salto que se observa en la Figura V.23, corresponde al cambio de suelo.

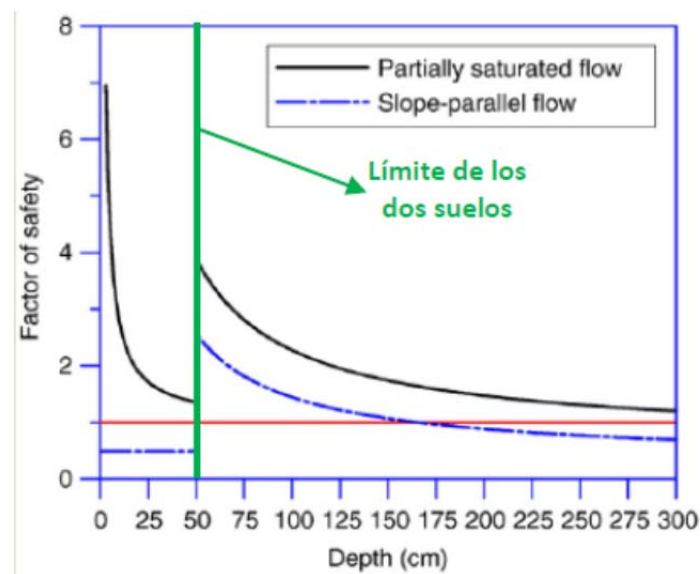


Figura V.23.- Variación del factor de seguridad con la profundidad del frente húmedo para dos texturas de suelo con flujo parcialmente saturado y flujo paralelo (Adoptado de Cho, 2009).

### V.3.9 Estudio de Lee L., Gofar N., Rahardjo H. (2009).

En 2009, estos autores desarrollaron la metodología denominada PERISI (Evaluación Preliminar de Inestabilidad de Taludes Inducida por Lluvia) que involucra un análisis estadístico de lluvia y las propiedades intrínsecas de suelos parcialmente saturados. La mencionada metodología es comparada con modelaciones realizadas con software de infiltración y estabilidad de taludes, involucrando los mismos parámetros del suelo y las mismas condiciones de lluvia (Figura V.24). Los resultados obtenidos demostraron que la metodología PERISI produce resultados tan buenos y confiables como los obtenidos con el software que modela infiltración y estabilidad de taludes.

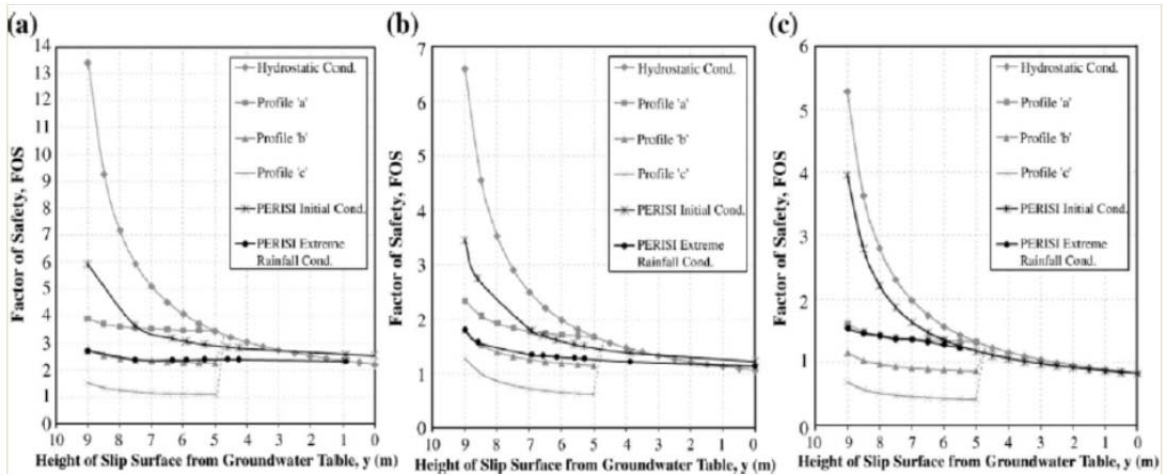


Figura V.24.- Variación del factor de seguridad, hallado con la metodología PERISI y el modelo de Rahardjo (1995) para: a) Grava limosa, b) Arena limosa, c) Limo, para diferentes profundidades del nivel freático (Adoptado de Lee et al., 2009).

### V.3.10 Estudio de Lade (2010).

Según el documento que presenta Lade (2010), no es seguro usar el criterio de Mohr – Coulomb para evaluar la estabilidad en el modelo de talud infinito, puesto que gran parte del factor de seguridad se debe a la cohesión y esta no existe en el suelo a no ser que este se encuentre cementado. En los deslizamientos superficiales, el rango de esfuerzos normales efectivos no se usan en laboratorio puesto que los valores de cohesión y el ángulo de fricción que se trabajarían no serían los correctos. Lade (2010) propone trabajar una envolvente curva en vez de trabajar con la envolvente lineal del criterio de falla de Mohr – Coulomb, Figura V.25.

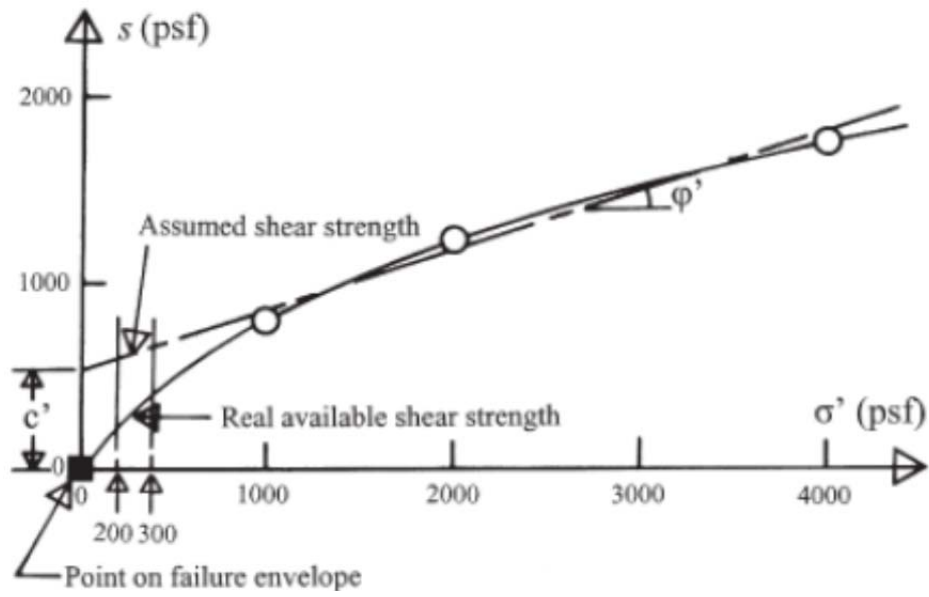


Figura V.25.- Comparación con la envolvente de falla de Mohr – Coulomb, con la envolvente real de falla para un suelo analizado (Adoptado de Lade, 2010).

# CAPÍTULO VI

---

Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

## APLICACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

CAPÍTULO  
VI

APLICACIÓN DEL MODELO  
NUMÉRICO

---

**APLICACIÓN DEL MODELADO NUMÉRICO A DESLIZAMIENTOS EN EL  
VOLCAN POPOCATÉPETL**

**VI.1 Deslizamiento de los lahares del Popocatépetl.**

La comunidad científica define los lahares como flujos rápidos de una mezcla de agua y derrubios altamente concentrados que tienen lugar en laderas volcánicas (Thouret & Lavigne, 2000). Este tipo de procesos son altamente destructivos debido al enorme volumen de material movilizado y a su capacidad para recorrer grandes distancias. Además, el riesgo asociado a la ocurrencia de este tipo de procesos puede verse incrementado debido a la presencia de zonas habitacionales cerca de áreas de riesgo.

Una región que cumple con las características citadas es el entorno del volcán Popocatépetl (Figura VI.1). El volcán Popocatépetl (19° 03'N, 98° 35'O, 5450 m) se encuentra en México y se localiza sobre el Cinturón Volcánico Transmexicano, cadena montañosa que se distribuye de E a O sobre el paralelo 19° N, y se sitúa a tan sólo 70 km de la Ciudad de México (Macías, 2005). Al N de la zona culminante del edificio, se localiza un glaciar que actualmente se extiende desde los 5500 msnm a los 5000 msnm. Desde 1994, el volcán se encuentra en una fase de actividad eruptiva que continúa hasta la actualidad. La región está amenazada por tres tipos de peligros volcánicos asociada a la actividad eruptiva del Popocatépetl:

- a. Flujos calientes de material volcánico.
- b. Lahares.
- c. Lluvia de material volcánico (Macías et al., 1995). En diciembre de 2000 más de 40 000 personas fueron evacuadas debido a la actividad volcánica.





Figura VI.1.- El volcán Popocatépetl (Palacios D., 2001).

El piedemonte del Popocatépetl está formado por potentes capas de material piroclástico, como cenizas y pómez, además de materiales de acarreo como son depósitos laháricos, fluviales y fluvio-glaciares. Los más abundantes se localizan en la ladera NE del volcán y se distribuyen mayoritariamente por las barrancas Tenenepanco y Huiloac. Sobre estos depósitos se emplazan hoy en día varias poblaciones, como Santiago Xalitzintla. Esta localidad es la más cercana al cráter del volcán, se encuentra a tan sólo 17 km y por tanto, se sitúa en un área de alto riesgo ante el desencadenamiento de un lahar. La población de San Nicolás de los Ranchos se sitúa a unos 21 km del cráter y la ciudad de Cholula a unos 50 km del mismo. En definitiva, estas poblaciones están expuestas a un constante e inminente peligro ante la posibilidad de que un lahar pudiera afectarlas.

Los estudios realizados previamente sobre lahares en el volcán Popocatépetl están orientados principalmente a conocer su origen y sus características (Palacios, 1995; Palacios et al., 1998; 2001; Capra et al., 2004; Andrés et al., en prensa). Los trabajos sobre el riesgo son pocos y de carácter general (Macías Vázquez y Capra Pedol, 2005; Sheridan et al., 2001; Miranda y Delgado, 2003). En 1994 se inició un nuevo periodo de actividad volcánica. El Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED) realiza un monitoreo detallado de la actividad del volcán que incluye control visual, sísmico y mediante geófonos. Sus trabajos se han centrado fundamentalmente en detectar el riesgo eruptivo y no el lahárico.

El Popocatépetl, junto con los volcanes Pico de Orizaba y Nevado de Colima, es uno de los más activos en el CVTM, por este motivo es un sitio de interés científico, ya que en éste se conjugan tanto los procesos endógenos como exógenos de manera intensa y frecuente. Ejemplo de lo anterior, es la generación de lahares a consecuencia de la actividad eruptiva iniciada en 1994, la cual se ha

podido registrar en parte, gracias a la instrumentación y monitoreo realizado por el Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED) en colaboración con el Servicio Geológico de los Estados Unidos de Norteamérica (United States Geological Survey, USGS).

La ladera N – NE del volcán Popocatepetl es la zona de mayor dinamismo en cuanto a la actividad lahárica. Esto se debe, en gran medida, a la existencia de un glaciar en la parte culminante, así como a la presencia de barrancas, cuyas cabeceras se sitúan en su base, hecho que favorece la rápida evacuación de agua de deshielo y material no consolidado. Las barrancas más activas hoy en día son: Tenenepanco, La Espinera y Tepeteloncocone; la primera de ellas es la que recibe la mayor cantidad del drenaje fluvio-glacial, ya que una gran parte de la masa del hielo se encuentra a unas decenas de metros por encima de su cabecera. Las tres barrancas citadas confluyen en una más grande que recibe el nombre de Huiloac; su desembocadura, al localizarse en las cercanías del poblado de Santiago Xalitzintla, hace de este territorio una zona de riesgo inminente a procesos laháricos y torrenciales y pone en peligro a más de dos mil personas (Marcos et al., 2006) (Figura VI.4).

La actividad reciente del Popocatepetl ha causado varios eventos laháricos, de los cuales los más destacados han sido el lahar que tuvo lugar horas después de la erupción de Julio de 1997 y el acontecido en Enero de 2001. Recorrieron una distancia aproximada de 12 Km, llegando a las puertas del pueblo de Santiago Xalitzintla. En este punto, el lahar de 1997 se había convertido en una arroyada cargada de sedimentos, mientras que el del 2001 mantuvo sus características de flujo de derrubios, incrementándose como consecuencia su poder destructivo (Capra et al., 2004).

Con el objeto de prevenir las consecuencias potencialmente catastróficas de este fenómeno, se necesita de estructuras adecuadas de protección y canalización, o al menos, de la implementación de planes de respuesta eficientes en caso de emergencia. En este contexto, la modelación numérica se presenta como una buena herramienta a la hora de predecir el trayecto más probable, así como las áreas de inundación resultantes.

En este capítulo, se presenta los resultados obtenidos mediante el método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) el cual utiliza en su arquitectura de software el método de elementos finitos. La arquitectura del software SPH, es capaz de evaluar las características del flujo, definidas por:

- a. El trayecto de propagación del flujo.
- b. La velocidad.
- c. La distancia recorrida en tiempo real.
- d. La altura del flujo.

## VI.2 Área de Estudio.

El Popocatepetl (19.02° N, 98.62° W) se encuentra en el límite de los estados mexicanos de Morelos, México, y Puebla. Cuenta con una altitud de 5452 msnm y ha quedado clasificado dentro de la tipología de los Stratovolcanes. El volcán pertenece a la cordillera volcánica trans – mexicana, que atraviesa México de Este a Oeste entre los paralelos 19° y 20°N (Figura VI.2). En el sector central de dicha cordillera se levanta el macizo montañoso de Sierra Nevada, formado por el Popocatepetl en su extremo sur, y continuado hacia el norte por los volcanes de Iztaccíhuatl, Telarón y Tláloc (Figura VI.2).

El cono del Popocatepetl se formó sobre la cicatriz de un antiguo volcán que colapsó hacia el Sur formando avalanchas de derrubios. Su formación tuvo lugar gracias al emplazamiento de flujos de lavas andesíticas y dacíticas y al menos ocho erupciones plinianas. Las dos últimas tuvieron lugar en el siglo I (después de cristo) y entre los años 700 y 850, respectivamente (Plunkett & Uruñuela, 1998). En los últimos 500 años se han producido 13 episodios eruptivos menores, comenzando el último en diciembre de 1994. El episodio anterior a éste tuvo lugar entre 1919 y 1927 y fue muy similar al acontecido en diciembre de 1994. La actividad eruptiva se concretó en el crecimiento de domos y su posterior destrucción, acompañados con explosiones moderadas y exhalaciones frecuentes.

Tras varias décadas de tranquilidad relativa, el Popocatepetl incrementó su actividad sísmica y volcánica hasta desencadenar la erupción del 21 de diciembre de 1994. Después de febrero de 1995, la emisión de cenizas se hizo más esporádica, finalizando en abril del mismo año. El 5 de marzo de 1996 el volcán entró de nuevo en erupción. Desde entonces, se han registrado de forma intermitente, tanto la formación de domos en el cráter y su posterior destrucción por eventos explosivos como erupciones de cenizas de intensidad pequeña a moderada. Sin embargo, la intensa actividad registrada en diciembre del 2000, dio lugar el 22 de enero de 2001 a la erupción reciente más grande del Popocatepetl.

Debido a la altitud a la que se encuentra, existe un glaciar en la cara Norte del volcán, que se ha visto alterado, tanto por los cambios climáticos como por la actividad volcánica (Figura VI.3). El deshielo repentino causado por actividad del volcán, ha generado volúmenes importantes de agua, que históricamente han desencadenado lahares que recorren los flancos del volcán.

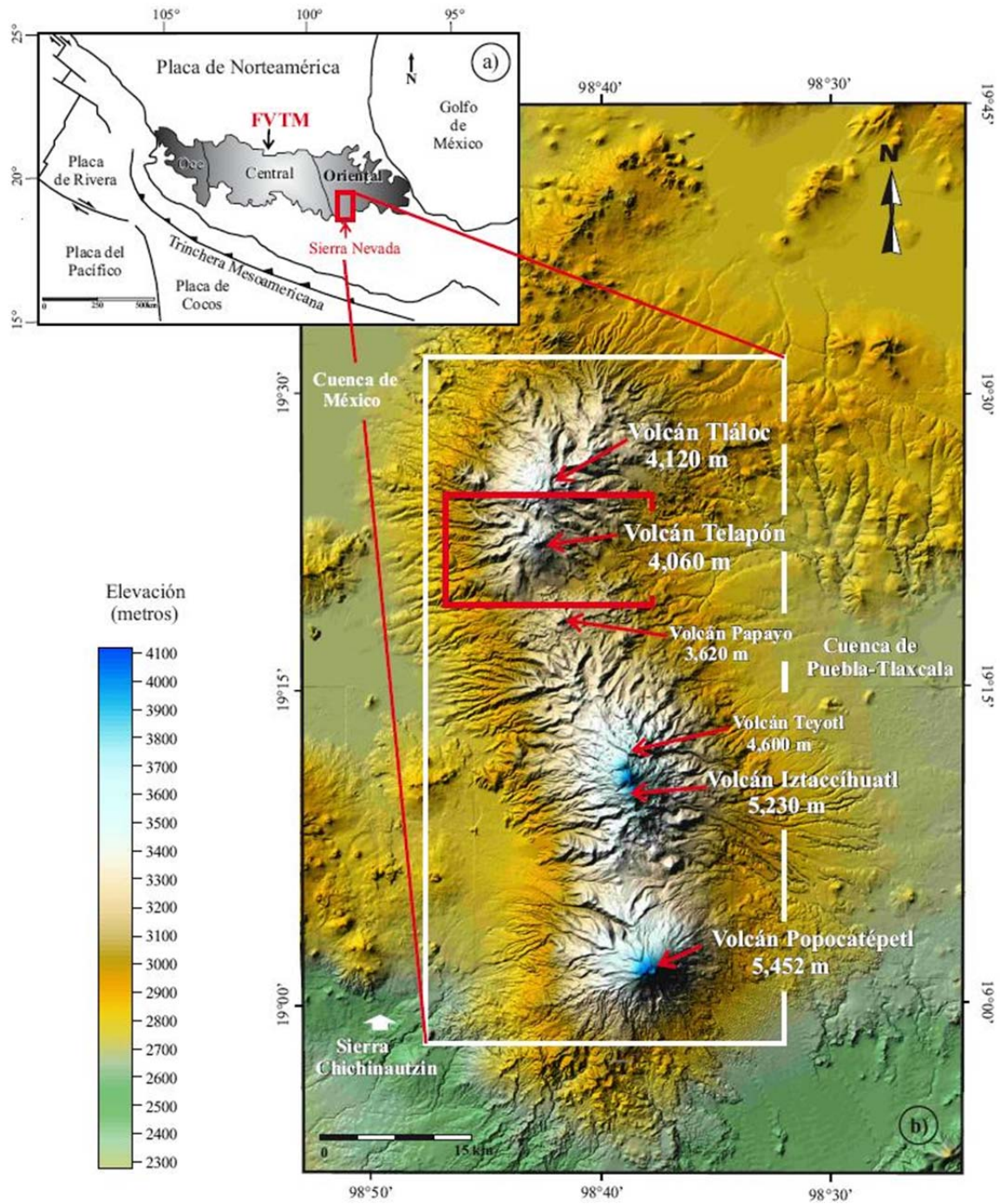


Figura VI.2.- a) Localización de la faja volcánica trans – mexicana (FVTM), b) Localización del estratovolcán Telapón y Tláloc, en la porción norte de la Sierra Nevada (Gómez Tuena, et al, 2005).



Figura VI.3.- Glaciar del volcán Popocatépetl situado en la cara norte (R. Quaas, 1997).

### **VI.3 Lahares del Popocatépetl y datos de partida.**

#### **VI.3.1 El lahar del 1 de Julio de 1997.**

El 30 de Junio de 1997 se registró el evento eruptivo más grande desde el inicio de la actividad volcánica en 1994. La erupción del 30 de Junio de 1997 fue precedida por una serie de sismos volcano – tectónicos que iniciaron a las 22:56 h de ese día. Varios sismos con magnitud en el rango de 2 a 2.7 fueron detectados a lo largo de un intervalo de 13 minutos. La erupción comenzó a las 23:11 h y tuvo dos pulsos principales; el primero duró 2:15 h, mientras que el segundo comenzó a las 01:26 h del día 1 de Julio y duró alrededor de 1:30 h. Esta erupción generó una enorme pluma que alcanzó 8 km de altura. Durante las 2 – 3 horas siguientes se informó acerca de la caída de cenizas en muchas poblaciones alrededor del volcán, incluyendo Ciudad de México. En los días siguientes a la erupción, inspecciones aéreas sobre el volcán mostraron una significativa subsidencia en la parte central del domo de lava que comenzó a crecer en el fondo del cráter del Popocatépetl antes del 30 de Junio (CENAPRED, 2001).

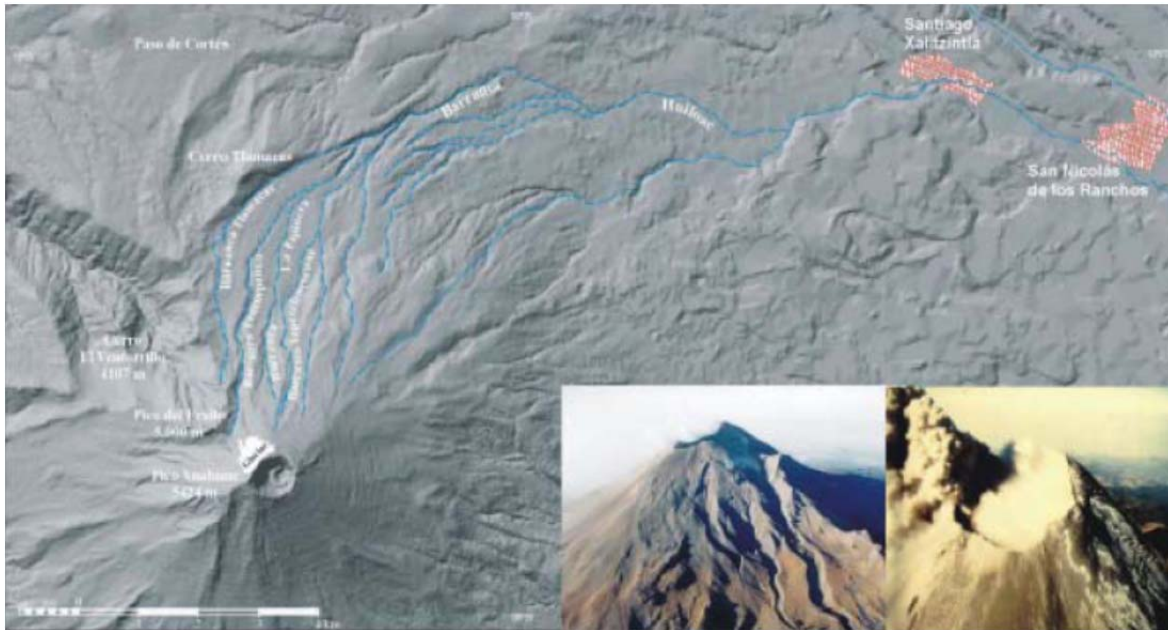


Figura VI.4.- Gráfico de localización de la barranca de Tenenpanco – Huiloac (Muñoz, 2004).

Debido a la explosión del 30 de Junio de 1997 una capa de cenizas cubrió gran parte del glaciar, lo cual provocó, según Palacios et al., 2001 y Sheridan et al., 2001 su deshielo parcial. El escurrimiento superficial resultante ( $1 \times 10^7 \text{ m}^3$  de agua liberada), saturó los materiales de la cabecera de las tres barrancas de la ladera norte del Popocatepetl: Tenenpanco, La Espinera y Tepeteloncocone (Figura VI.4) y como resultado se desencadenaron los flujos laháricos del día 1 de Julio de 1997. Éstos se movilizaron a favor de la ladera norte del volcán, canalizándose inmediatamente por las barrancas Tenenpanco, la Espinera y Tepeteloncocone (Figura VI.5). Finalmente, todos ellos confluyeron en el canal Huiloac, movilizandolos materiales no consolidados del canal y propagándose el flujo hasta llegar al pueblo de Santiago de Xalizintla donde finalizó el movimiento (Figura VI.6).

El lahar de 1997 se comportó como un flujo de arroyada hiperconcentrada con régimen turbulento desde el área de cabecera de la barranca Tenenpanco hasta prácticamente su confluencia con Huiloac. Durante este tramo el flujo incrementó su carga sólida, convirtiéndose en la parte central del recorrido en un flujo de derrubios con una elevada carga de sedimentos. En el tramo final, donde la pendiente es menor de  $6.5^\circ$ , el flujo fue depositando materiales al perder capacidad portante. Como resultado, el lahar se transformó en un flujo de arroyada hiperconcentrada. A la altura de Santiago de Xalizintla, según Espíndola (1999), el flujo era principalmente una corriente de aguas claras. Según este mismo autor, el tiempo transcurrido desde la erupción hasta que se produjo el lahar fue de dos días. Sin embargo Sheridan (2001) estima que este proceso se desarrolló en 24 h, siendo el volumen del depósito estimado por este último del orden de  $3.3 \times 10^5 \text{ m}^3$ .



Figura VI.5.- Barrancas del Popocatépetl; Tenenepanco, La Espinera y Tepeteltonconcone (R. Quas, 1997).

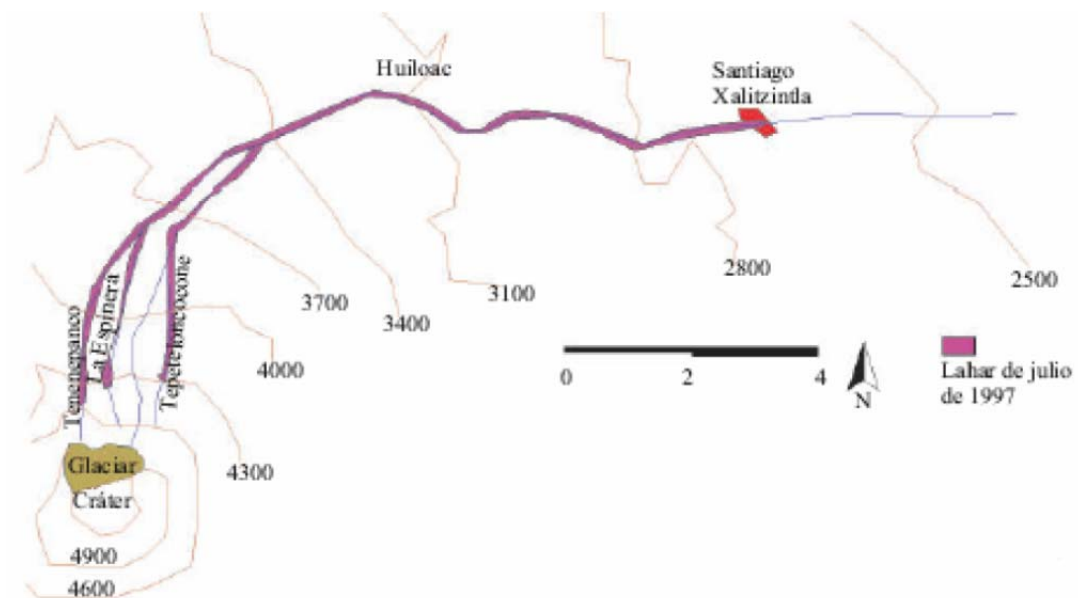


Figura VI.6.- Trayectoria del lahar de 1997 (Muñoz, 2004).

### VI.3.2 El lahar del 22 de Enero del 2001.

El 22 de Enero, a las 14:58 h, tuvo lugar un sismo de origen volcánico – tectónico de magnitud 2.8 localizado al este del cráter. A las 15:15 h, el volcán inicio una exhalación de vapor de agua, que alcanzó 1 km de altura. Una hora después 16:15 h, comenzó una exhalación grande de pómez y cenizas y a las 16:23 h se incrementó la explosividad de esta emisión generando flujos piroclásticos que descendieron por las barrancas del volcán hasta distancias estimadas de 4 a 6 km (Sheridan et al., 2001) (Figura VI.7).



Figura VI.7.- Parte de La trayectoria del lahar de 2001 (Muñoz, 2004).

Aproximadamente 4 h después de que aconteciera la erupción, se generó el lahar del 2001 en la barranca Tenenepanco, continuando por Huiloac (Sheridan et al., 2001) (Figura VI.8). El movimiento en masa recorrió un total de 12 Km, interrumpiéndose el deslizamiento a 2 Km del pueblo de Santiago Xalitlintla. En este lugar el lahar acarreó bloques de hasta 0.5 m de diámetro (CENAPRED, 2001).

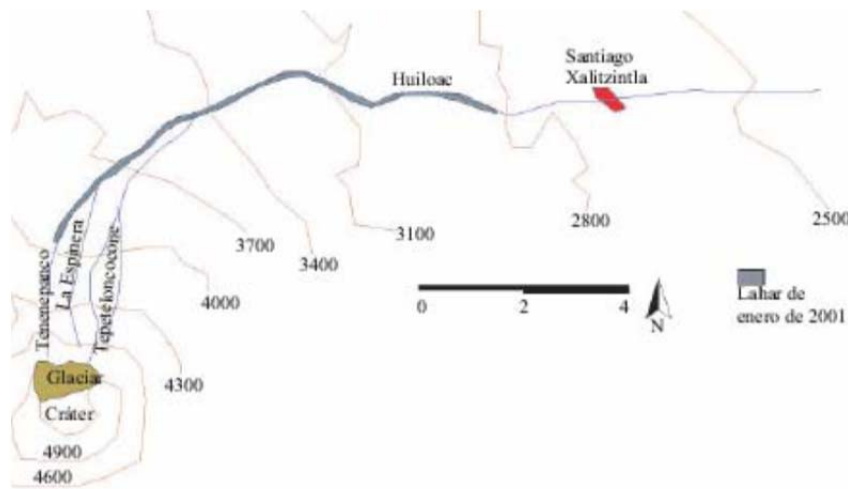


Figura VI.8.- Trayectoria del lahar de 2001 (Muñoz, 2004).



A diferencia del lahar de 1997, la principal fuente suministradora de agua en la formación del lahar del 2001 provino de la condensación del vapor de agua durante el flujo piroclástico acontecido unas horas antes (proceso de condensación post deposicional, Sheridan et al., 2001). Asimismo, el volumen de agua en la mezcla que componía el flujo lahárico de 1997 fue mucho mayor que el volumen correspondiente a la mezcla del 2001.

Este lahar se ha caracterizado como un flujo de derrubios que se mantuvo como tal durante la totalidad del trayecto no evolucionando, por tanto, a un flujo hiperconcentrado, o arroyada simple (Capra et al., 2004). Dicho flujo no tuvo riesgo para la población al no alcanzar ningún área habitada. Aunque es conveniente destacar que sus características hidrológicas y reológicas fueron más destructivas que las del lahar de 1997 (Figura VI.9). Por lo tanto, el lahar de 2001 habría provocado más daños de haber llegado a alcanzar la población de Santiago Xalitzi.



Figura VI.9.- Tronco arrastrado por el lahar del 2001 (Palacios D. 2004).

En la Tabla VI.1 y VI.2, se presentan los datos recopilados de los flujos del 1 de Julio de 1997 y el 22 de Enero del 2001, respectivamente:

Tabla VI.1.- Datos del deslizamiento del lahar del 1 de Julio de 1997 (Capra & Sheridan, 2004).

<b>Lahar del 1 de Julio de 1997</b>	
Clasificación	Flujo de derrubios; Flujo hiperconcentrado (Capra et al., 2004)
Material	Aporte del agua: Agua liberada por el glaciar. Abundancia de material piroclástico no consolidado. Pendiente: Superior a 11° (5:1). Mecanismo desencadenante: Deshielo parcial del glaciar. Volumen de agua: $1 \times 10^7 \text{ m}^3$ . Porcentaje de agua en la mezcla: 75% (Sheridan et al., 2001). Porcentaje de finos: 20% (Capra et al., 2004).
Características del evento	Volumen del depósito: $3.3 \times 10^5 \text{ m}^3$ (Sheridan, 2001). Distancia recorrida: Aproximadamente 21 km. Tiempo de propagación: 1 – 2 días.

**Continúa**

**Lahar del 1 de Julio de 1997**

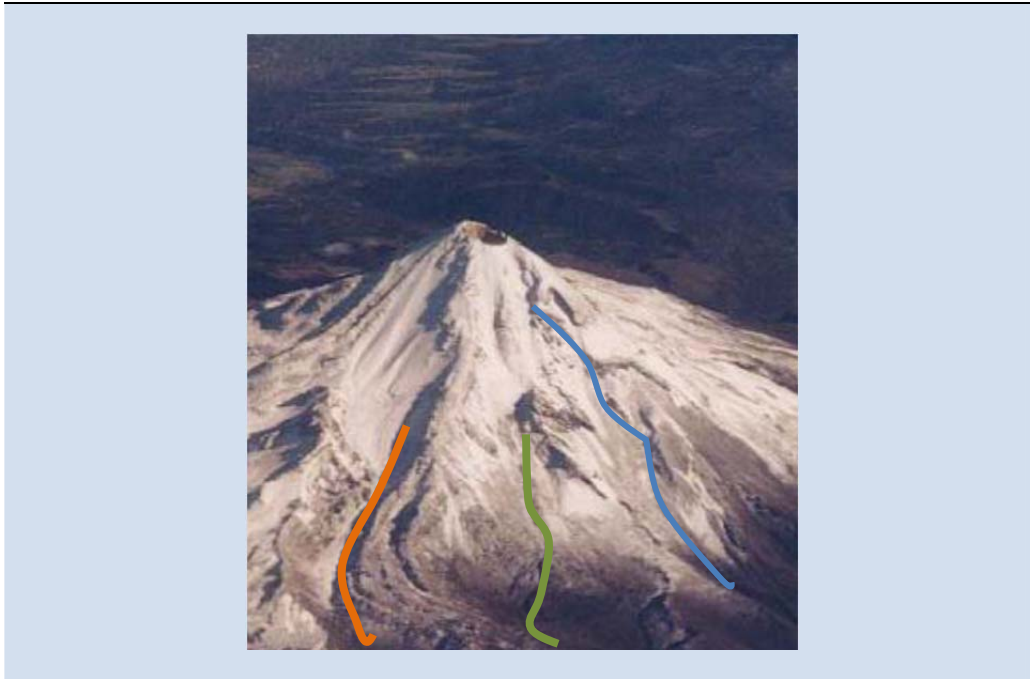
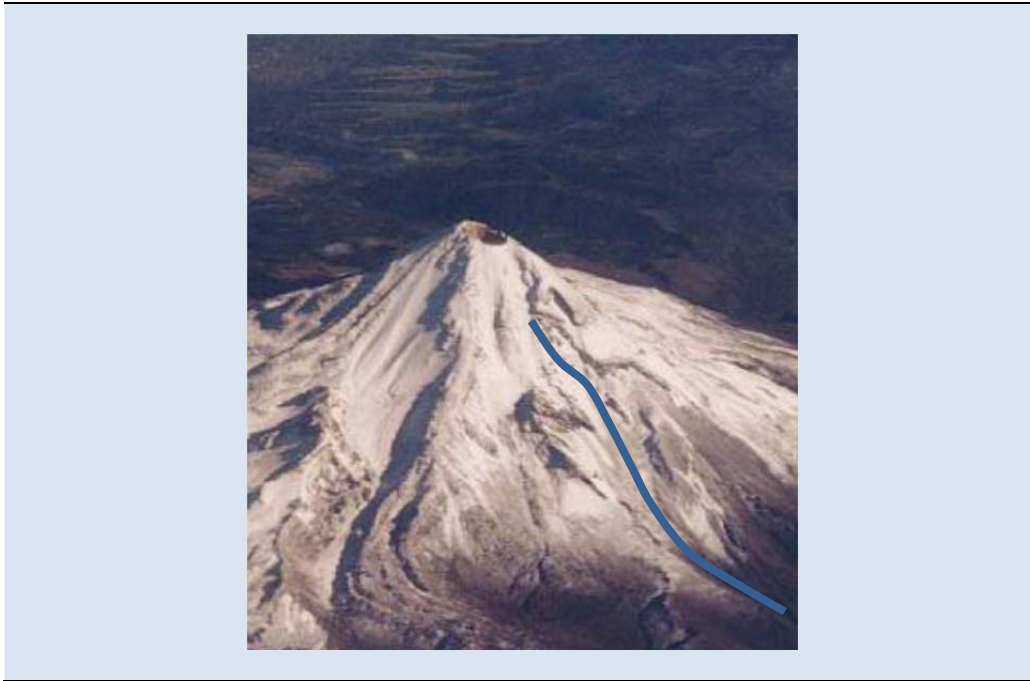


Tabla VI.2.- Datos del deslizamiento de lahar del 22 de enero del 2001 (Capra & Sheridan, 2004).

<b>Lahar del 22 de Enero del 2001</b>	
Clasificación	Flujo de derrubios (Capra et al., 2004)
Iniciación	<p>Aporte del agua: Principalmente por la condensación de vapor de agua a partir del flujo piroclástico acontecido unas horas antes. Abundancia de material no consolidado. Pendiente: Superior a 11° (5:1). Mecanismo desencadenante: Flujo piroclástico generado por la erupción volcánica. Coordenadas de iniciación: X=539 200, Y=2 106 600, Z=3940.</p>
Material	<p>Volumen de agua: <math>0.5 \times 10^5 \text{ m}^3</math> (Iverson et al., 1998; Macias et al., 2003; Capra et al., 2004). Porcentaje de agua en la mezcla: 25% (Capra et al., 2004). Porcentaje de finos: 5% (Capra et al., 2004).</p>
Características del evento	<p>Volumen del depósito: <math>2.08 \times 10^5 \text{ m}^3</math> (Sheridan, 2001). Distancia recorrida: Aproximadamente 14.7 km. Tiempo de propagación: Aproximadamente 4 h. Velocidad estimada: 8.8 m/s (altitud 3940m), 1.5 m/s (altitud 2972m), 1.4 m/s (altitud 2950m)</p>
<b>Continúa</b>	

### Lahar del 22 de Enero del 2001



#### VI.4 Elaboración de la malla y condición inicial.

A partir de los datos de topografía se generó una malla tridimensional en el software Surfer 9 (Figura VI.10), para facilitar la importación a la base de datos del software SPH (background mesh) (Figura VI.11). La malla está constituida por 87737 elementos.

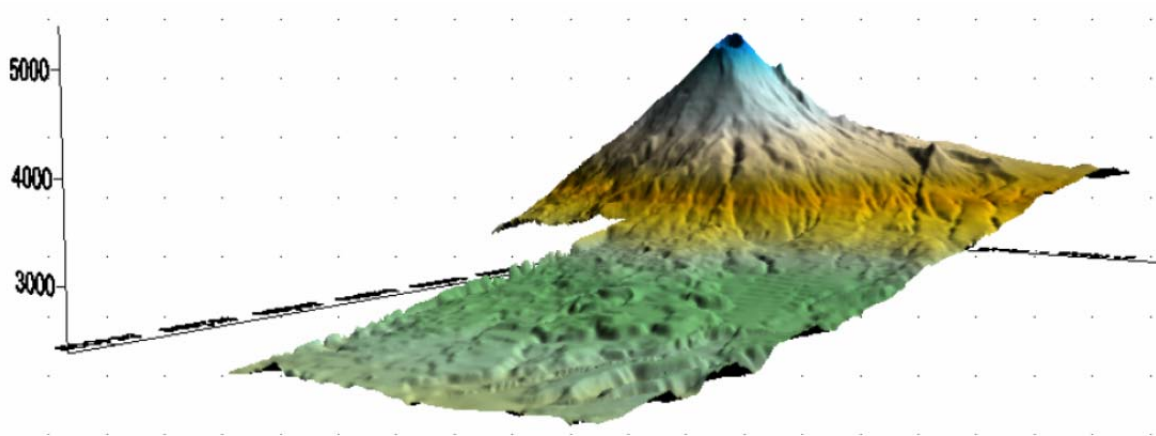


Figura VI.10.- Modelo digital de la topografía del Popocatépetl, elaborado con software Surfer9 (Surfer9).

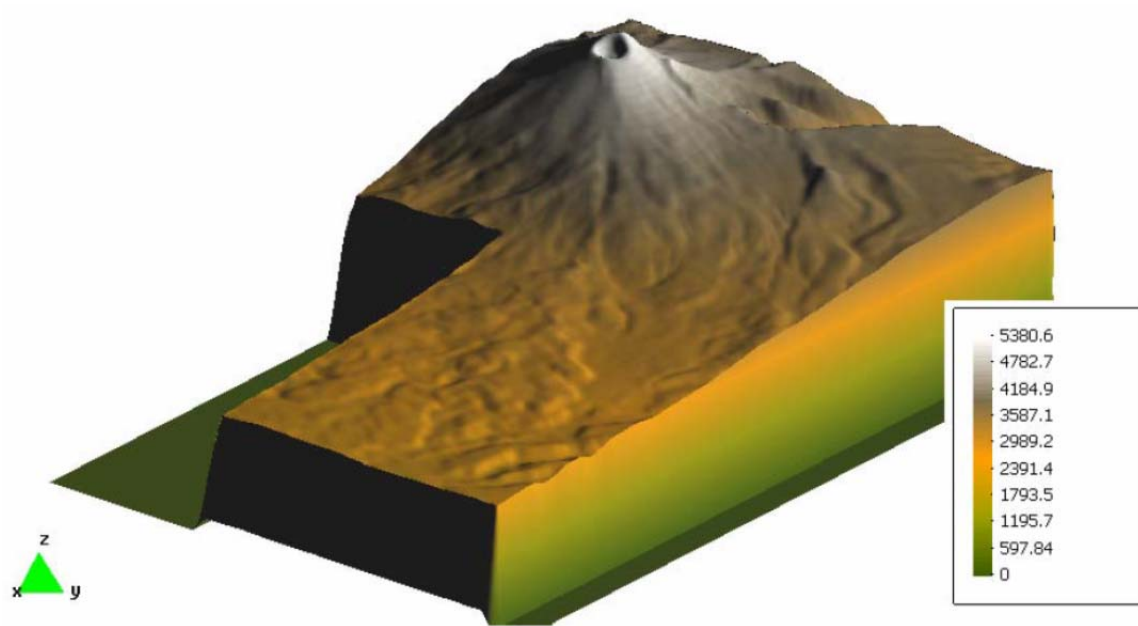


Figura VI.11.- Modelo digital de la topografía del Popocatépetl, elaborado con software SPH (SPH, 2001).

Asimismo, la condición inicial empleada en SPH para simular los lahares del Popocatépetl está definida por 1468 partículas (Figura VI.12).

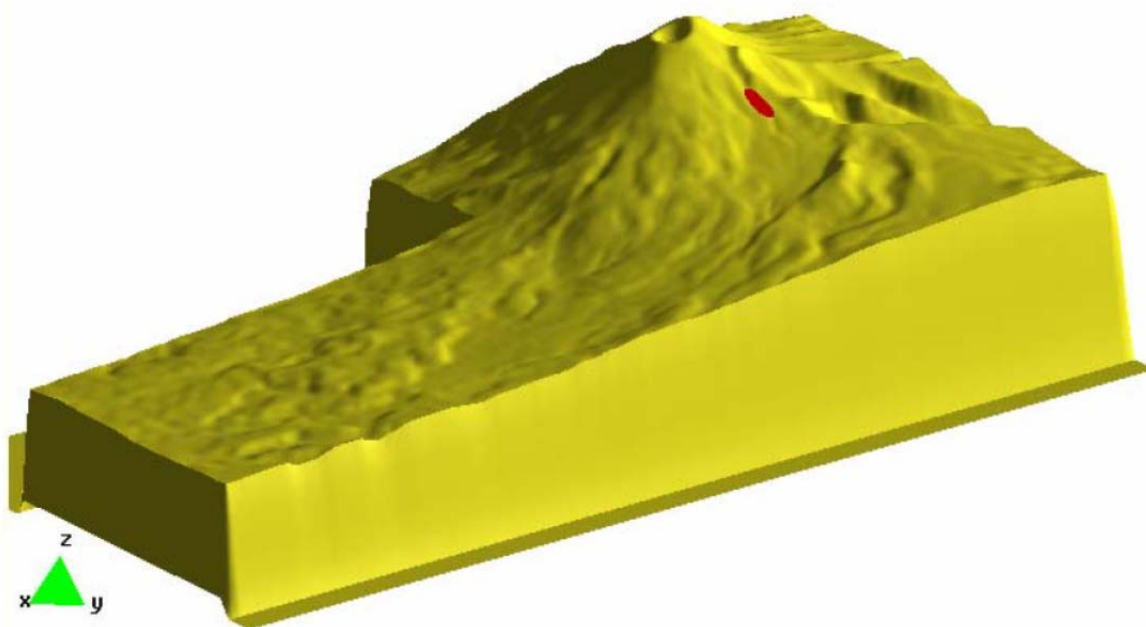


Figura VI.12.- Modelo simulando la situación inicial de propagación del lahar en el Popocatépetl, elaborado con software SPH (SPH, 2001).

## VI.5 Resultados.

Para la simulación se ha considerado un material tipo Bingham, con una densidad de  $1740 \text{ kg/m}^3$ . Por falta de datos sobre la viscosidad y tensión de fluencia del material se han empleado los valores encontrados en la literatura sobre este tipo de material (Tablas VI.3 y VI.4).

De acuerdo a lo visto en el punto IV.3.4, el modelo de Bingham introduce un umbral de tensión tangencial que es preciso superar para que el flujo tenga lugar. Esto corresponde al concepto de tensión de fluencia ( $\tau_y$ ).

En condiciones de flujo tangencial simple la ley de Bingham se escribe como:

$$\sigma_{13} = \tau_y + \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \tau$$

Ec.IV.36

Completando el análisis con lo visto en el punto IV.4.3 del cual se toma la Figura IV.10 en la que se presenta la estructura del flujo de Bingham:

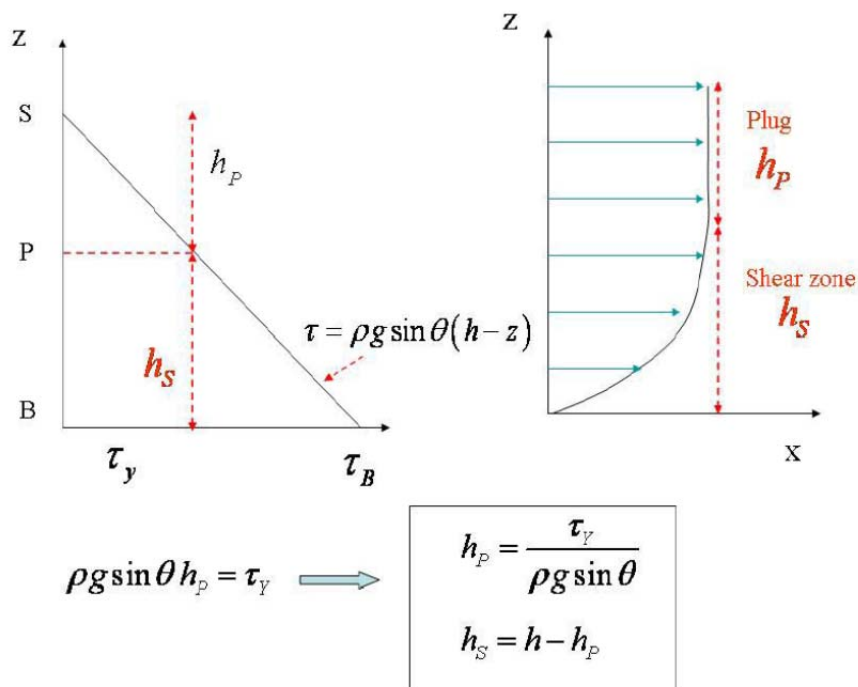


Figura IV.10.- Estructura de flujo en un fluido de Bingham con condiciones tangenciales simples (Adaptado de Johnson & Rodine, 1984).

El momento de cese del movimiento en un fluido de Bingham corresponde, cuando la altura sea menor que una altura límite, equivalente a,  $h_p = \left( \frac{\tau_y}{\rho g \sin \theta} \right)$ . El flujo se reanudara cuando se produzca un aporte de material, de tal forma que la altura sea más grande que este valor crítico.

De acuerdo con la figura IV.10 se obtienen las siguientes relaciones para la altura en un fluido de Bingham:

$$h_p = \frac{\tau_y}{\rho g h \sin \theta} = h \left( \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)$$

$$h_s = h \left( 1 - \frac{\tau_y}{\tau_B} \right)$$

Ecs.IV.151

La viscosidad estará dada por la ecuación IV.155.

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = \tau - \tau_y = (\tau_B - \tau_y) (1 - \xi)$$

Ec.IV.155

Y por último, la velocidad para un fluido Bingham lo proporciona la ecuación IV.160.

$$\bar{v} = \frac{1}{h} \left( \eta h v_p + \frac{2}{3} (1 - \eta) h v_p \right) = \frac{v_p}{3} (\eta + 2)$$

Ec.IV.160

En el marco de los deslizamientos rápidos, la reología de Bingham se ha utilizado para modelar mezclas de suelos granulares finos con alto contenido de agua. De este modo, se puede encontrar en la bibliografía rangos de valores típicos para los parámetros de este modelo (tensión de fluencia ( $\tau_y$ ) y viscosidad ( $\mu$ )). En este sentido, Rickenmann & Koch (1997) simularon los flujos de derrubios que tuvieron lugar en los valles de Kamikamihori (Japón) y Saas (Suiza), utilizando valores de  $\tau_y$  y  $\mu$  en los rangos 100 – 800 Pa y 400 – 800 Pas respectivamente. Además, estos autores demostraron que las velocidades de propagación obtenidas con el modelo de Bingham son ligeramente más altas que las previstas por otros modelos.

Tabla VI.3.- Valores de densidad, tensión de fluencia y viscosidad según autores (Adaptada de Jan, 1997).

Autor	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\tau_y$ (Pa)	$\mu$ (Pa s)
Jan		100 – 160	40 – 60
Johnson	2000 – 2400	60-170 – 500	45
Sharp & Nobles	2400		20 - 60
Pierson	2090	130 – 240	210 – 810

Tabla VI.4.- Valores de densidad, tensión de fluencia y viscosidad en distintos emplazamientos (Adaptada de Jin & Fread, 1997).

Emplazamiento	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\tau_y$ (Pa)	$\mu$ (Pa s)
Anhui	1570	58	2.1
Aberfan	1764	4794	958
Rudd Creek	1575	956	958

De acuerdo a los datos de las tablas VI.3 y VI.4 se han estudiado los siguientes casos (Tabla VI.5):

Tabla VI.5.- Casos de análisis y estudio.

	<b>Tensión de fluencia <math>\tau_v</math> (Pa)</b>	<b>Viscosidad <math>\mu</math> (Pa s)</b>
Caso 1 (Johnson)	60	45
Caso 2 (Johnson)	500	45
Caso 3 (Pierson)	130	210
Caso 4 (Pierson)	130	810
Caso 5 (Aberfan)	4794	958
Caso 6 (Anhui)	38	2.1

En el presente trabajo de tesis se estudiará el lahar ocurrido el 22 de Enero del 2001, debido a la dirección que presentó el deslizamiento, al ocurrir en la barranca Tenenepanco y seguir por Huiloac, abarcando así una sola barranca de las tres que se encuentran en la zona. Deteniendo su flujo aproximadamente 2 km antes de Santiago Xalitizintla. De esta forma los 6 casos de la Tabla VI.5 están analizados para éste evento.

CASO 1:

La Figura VI.13 muestran las alturas en función del tiempo para el caso 1 ( $\tau_y = 60 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 45 \text{ Pa s}$ ):

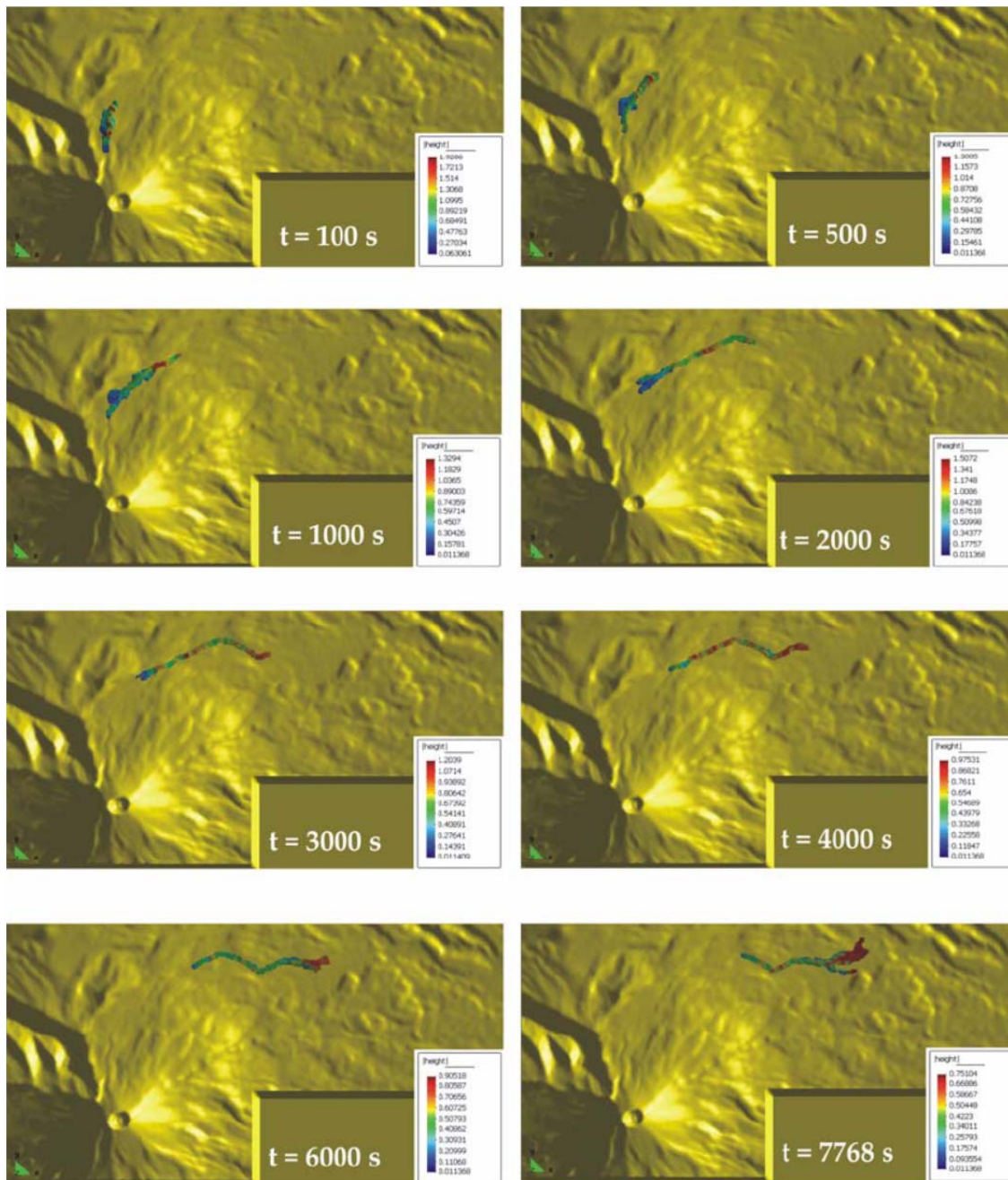


Figura VI.13.- Altura del material simulando el deslizamiento en función del tiempo (SPH, 2001).

Las Figuras VI.14 y VI.15 presentan la distancia recorrida, altura y velocidad de la masa deslizante.



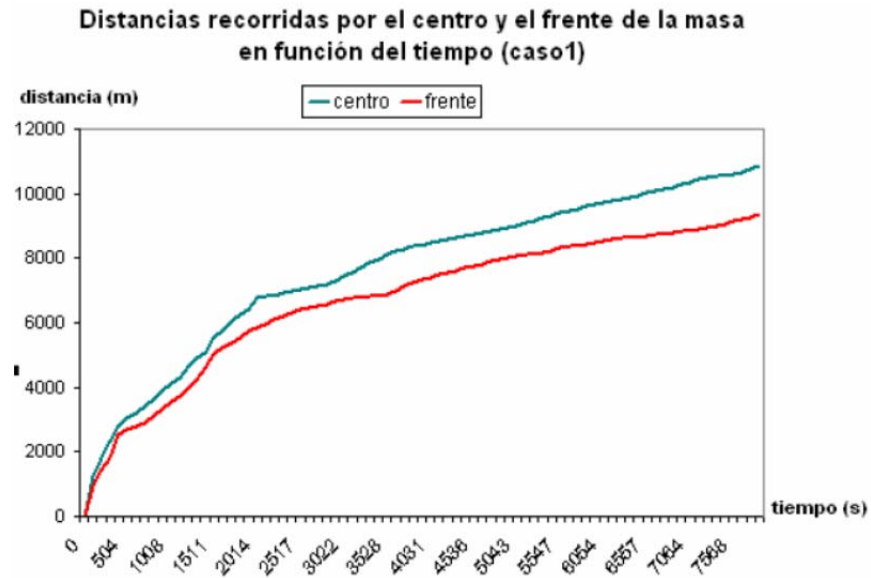


Figura VI.14.- Evolución de la distancia recorrida por el centro y el frente de la masa en función del tiempo (SPH, 2001).

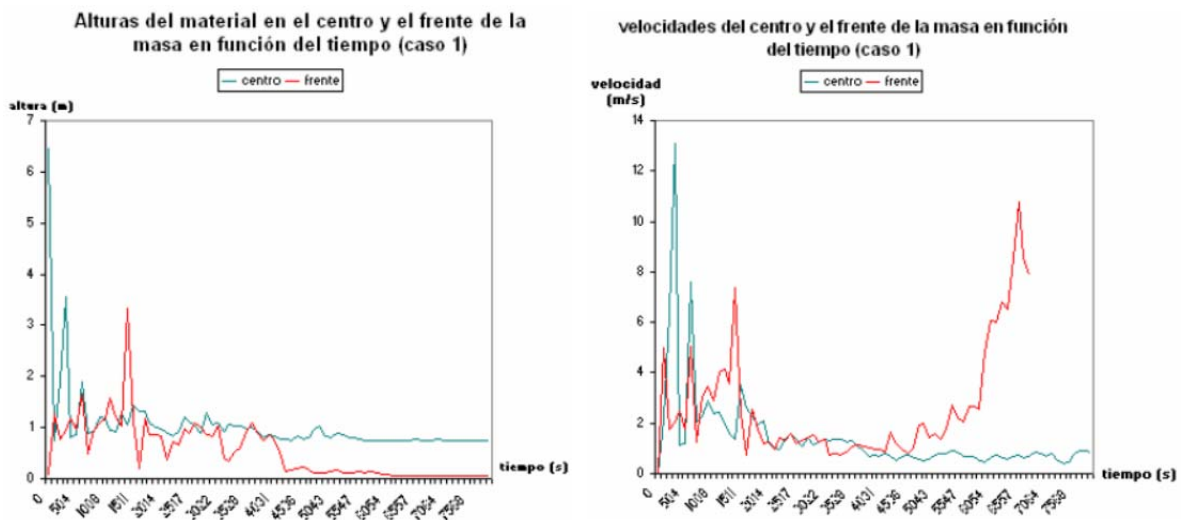


Figura VI.15.- Evolución de la altura y velocidad del material deslizante en función del tiempo (SPH, 2001).

CASO 2:

La Figura VI.16 muestra la altura en función del tiempo para el caso 2 ( $\tau_y = 500 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 45 \text{ Pa s}$ ):

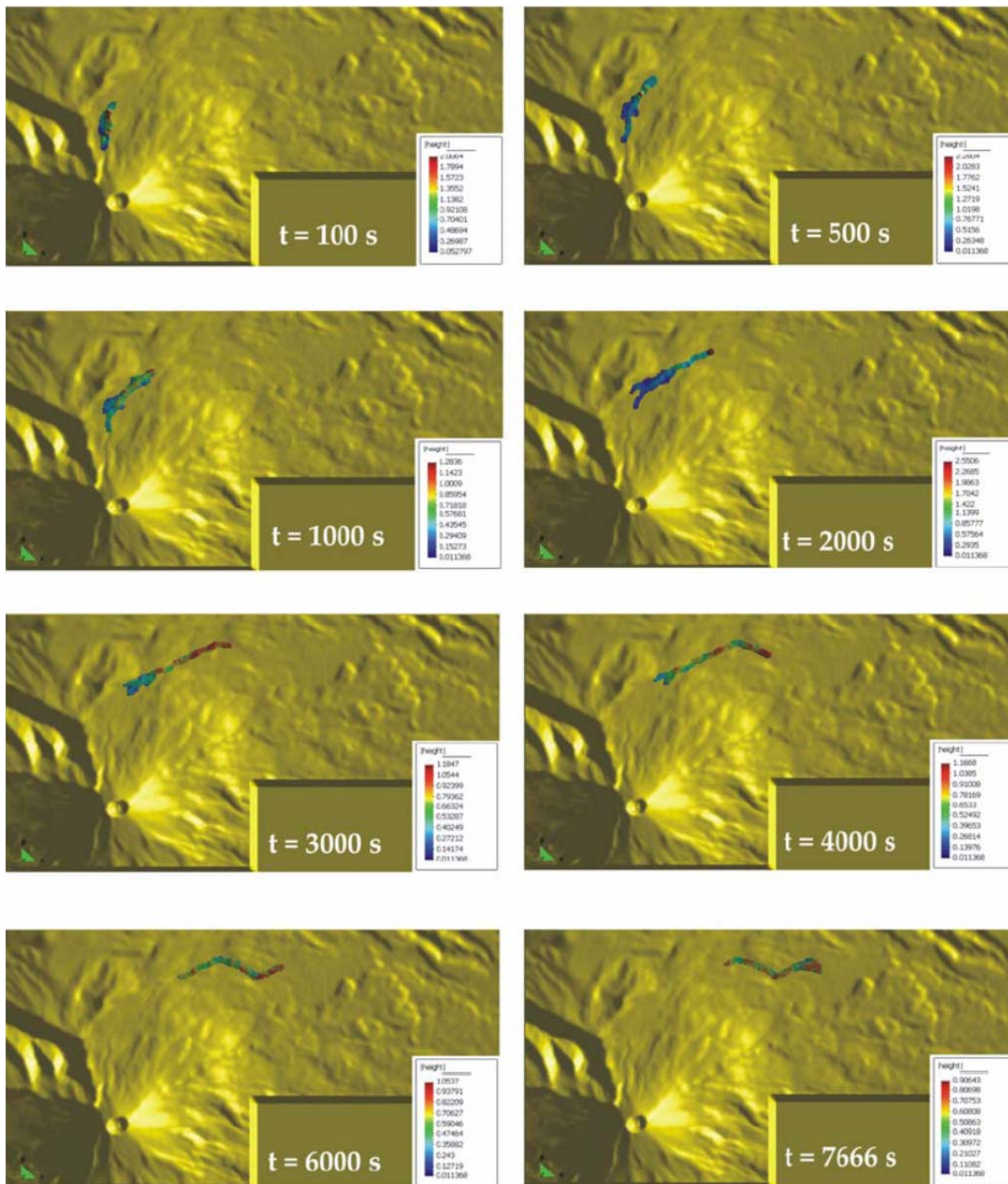


Figura VI.16.- Altura del material simulando el deslizamiento en función del tiempo (SPH, 2001).

Las Figuras VI.17 y VI.18 presentan el efecto de la tensión de fluencia sobre la distancia recorrida, velocidad y altura del centro de la masa.

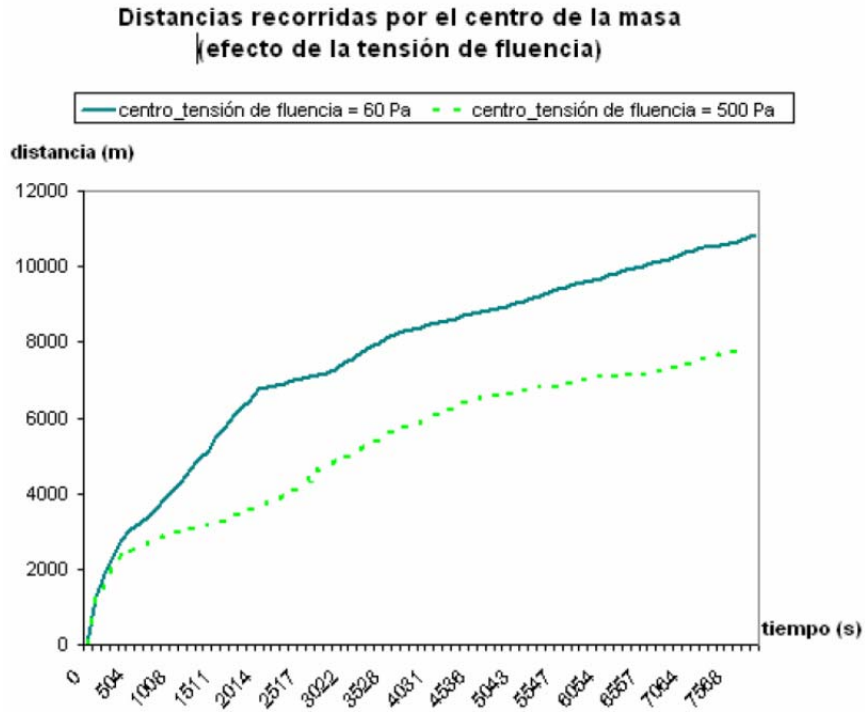


Figura VI.17.- Evolución de la distancia recorrida por el centro de la masa deslizante en función de la tensión de fluencia, para el caso 1 y 2 (SPH, 2001).

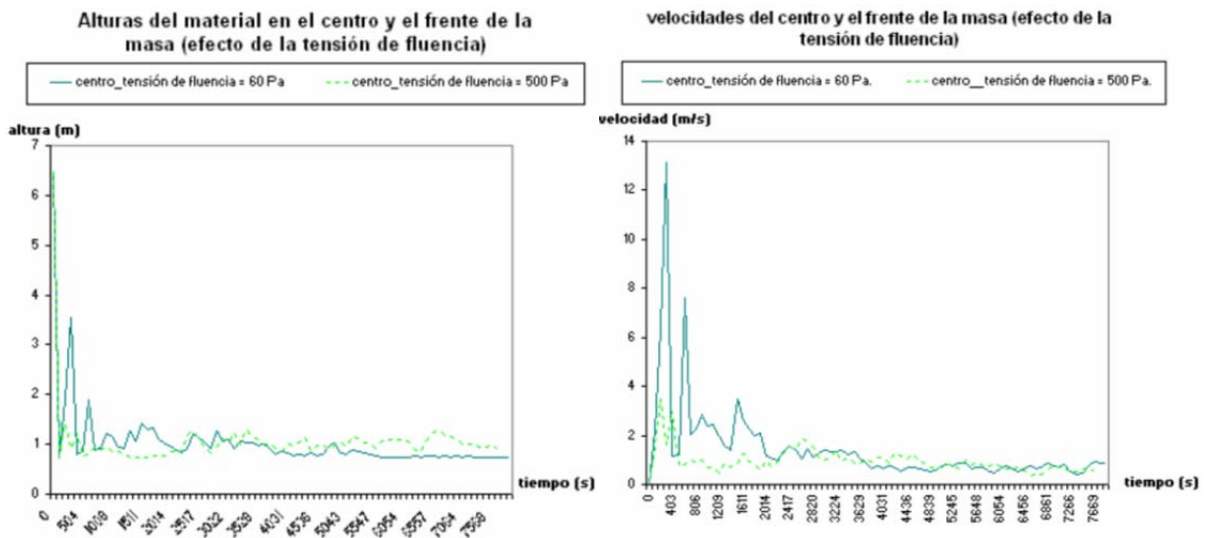


Figura VI.18.- Evolución de la altura y velocidad del material deslizante en función de la tensión de fluencia del material, para el caso 1 y 2 (SPH, 2001).

CASO 3:

La Figura VI.19 muestra la altura en función del tiempo para el caso 3 ( $\tau_y = 130 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 210 \text{ Pa s}$ ):

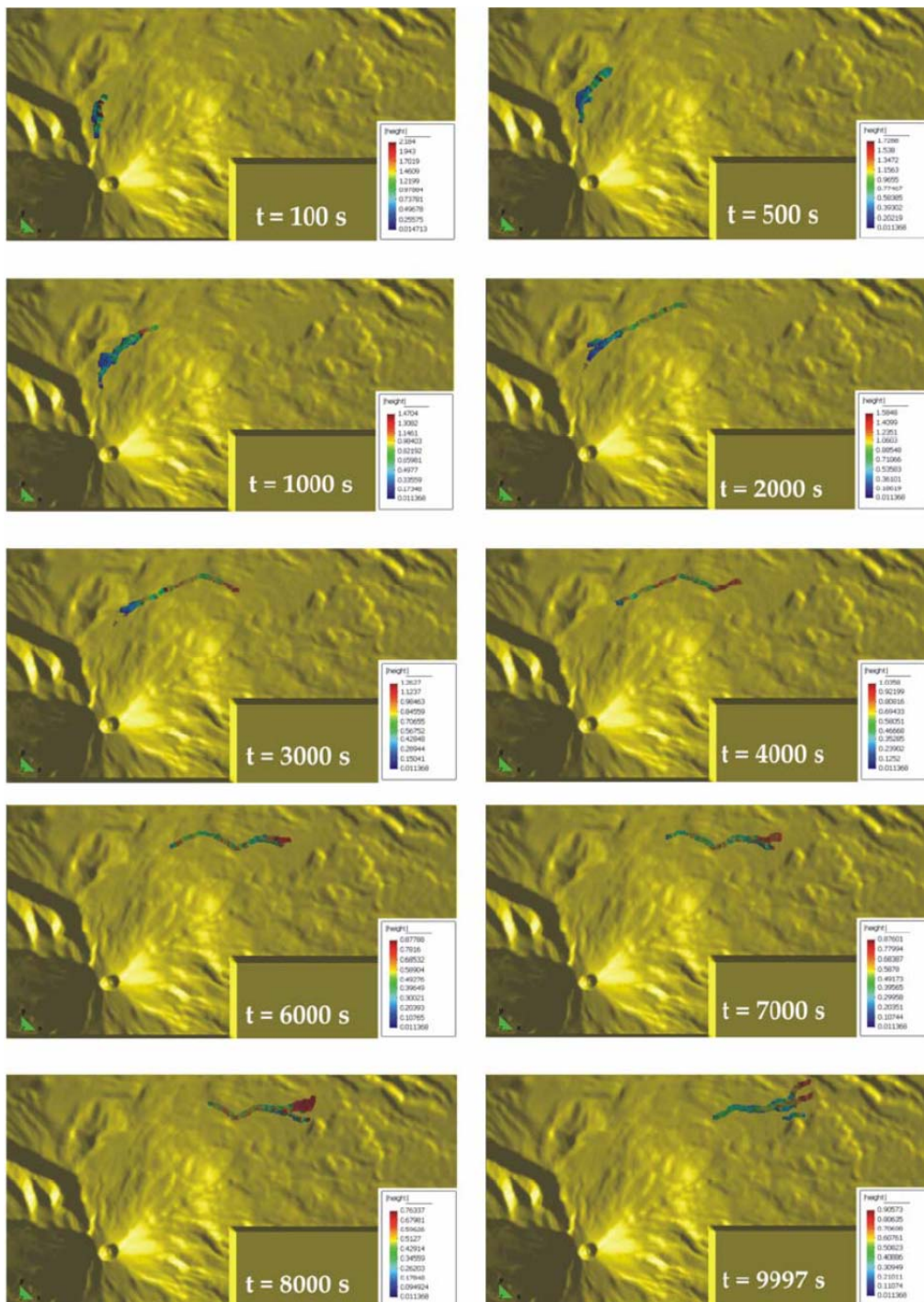


Figura VI.19.- Altura del material simulando el deslizamiento en función del tiempo (SPH, 2001).

Las Figuras VI.20 y VI.21 presentan las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa en el caso 3.

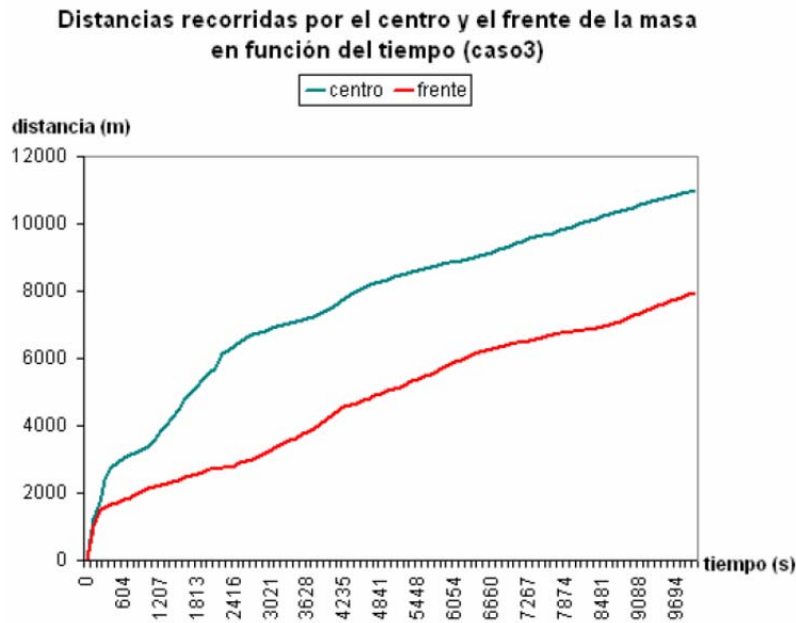


Figura VI.20.- Evolución de la distancia recorrida por el centro de la masa deslizando en función del tiempo (SPH, 2001).

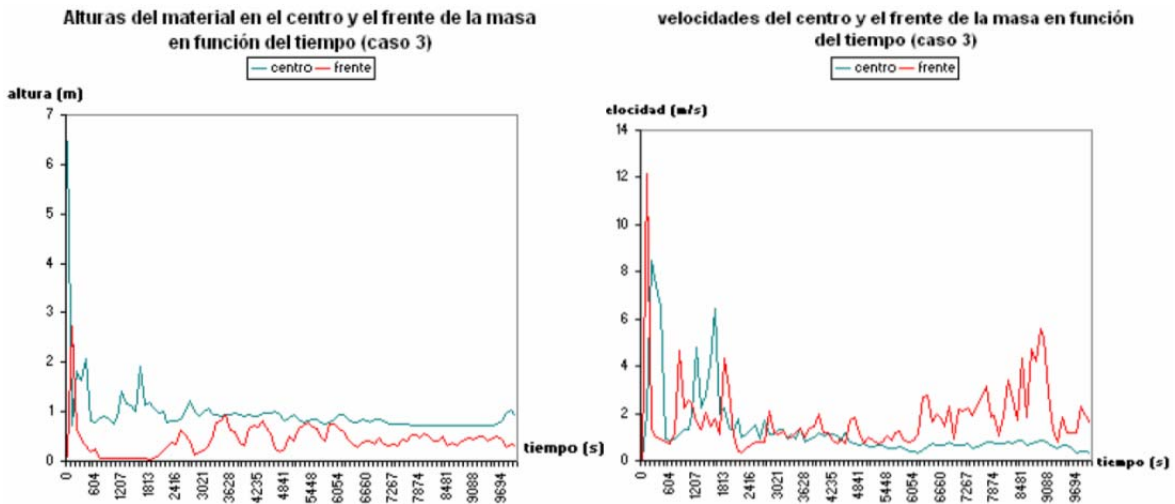


Figura VI.21.- Evolución de la altura y velocidad del material deslizando en función del tiempo (SPH, 2001).

CASO 4:

La Figura VI.22 muestra la altura en función del tiempo para el caso 4 ( $\tau_y = 240 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 810 \text{ Pa s}$ ):

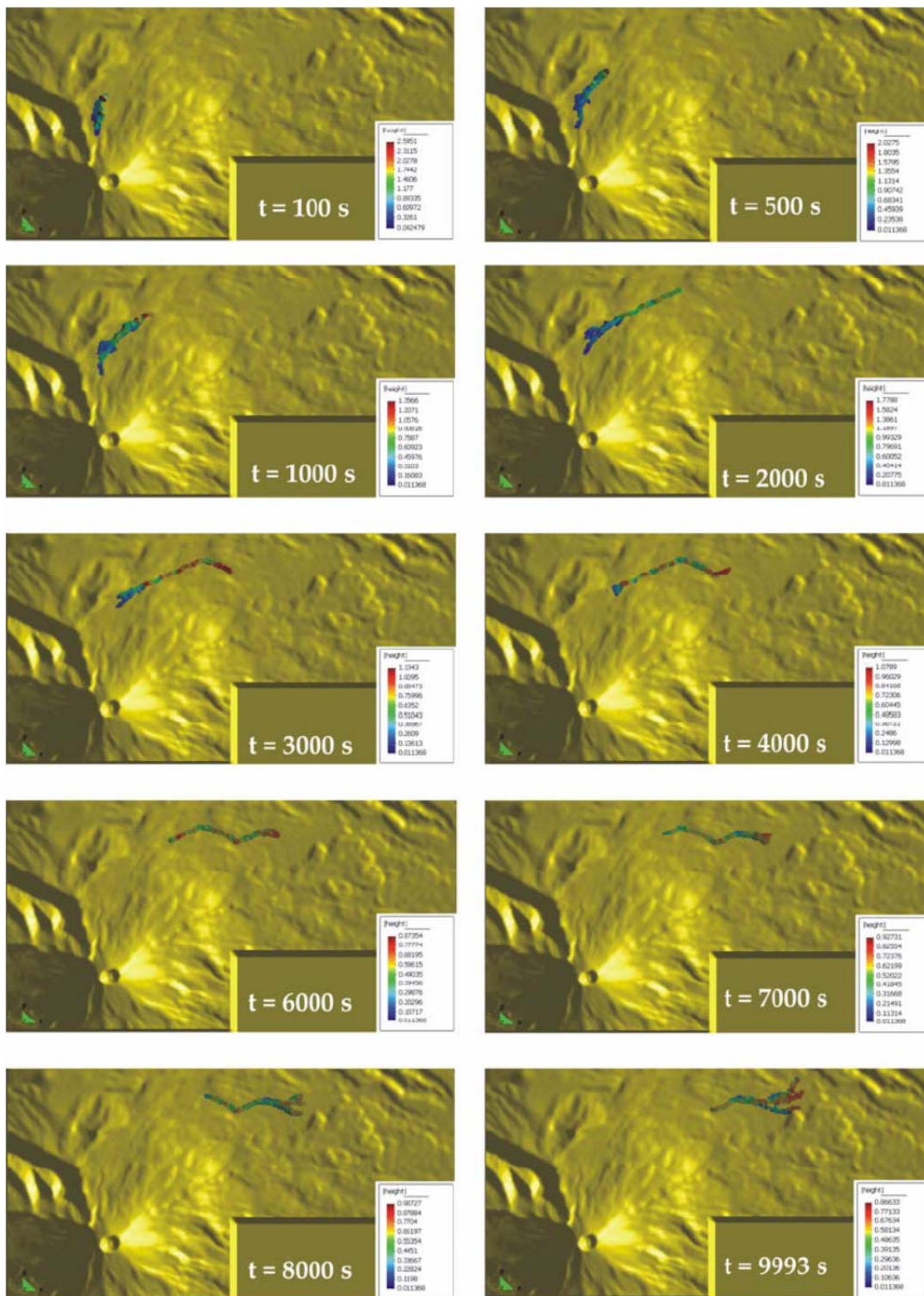


Figura VI.22.- Altura del material simulando el deslizamiento en función del tiempo (SPH, 2001).

Las Figuras VI.23 y VI.24 comparan las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa deslizando en los caso 3 y 4.

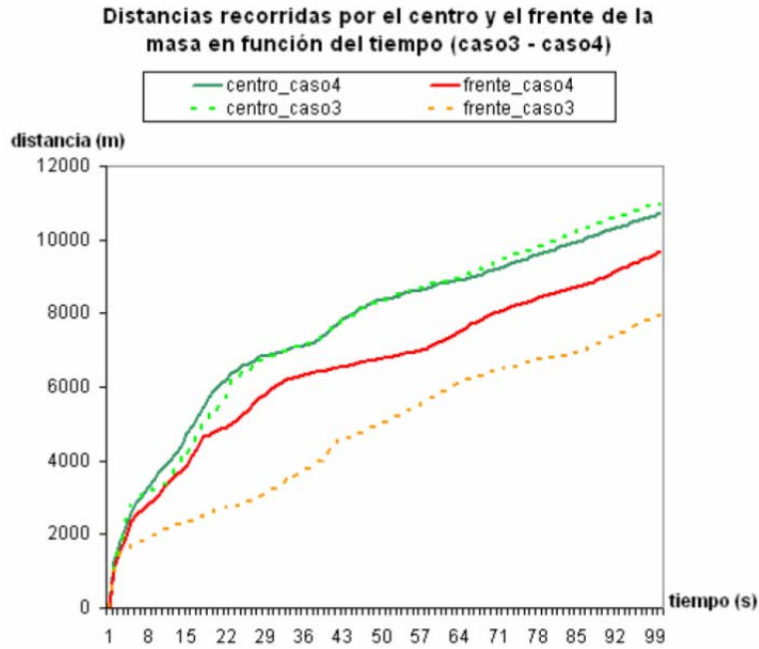


Figura VI.23.- Evolución de la distancia recorrida por el centro de la masa deslizando en función del tiempo (SPH, 2001).

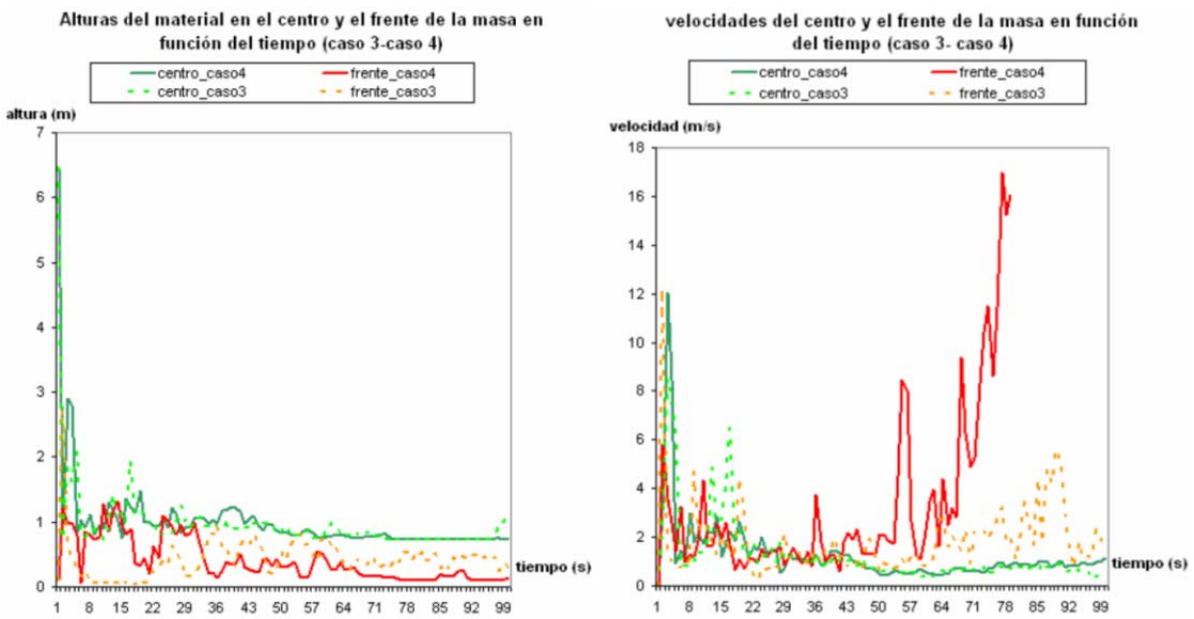


Figura VI.24.- Evolución de la altura y velocidad del material deslizando en función del tiempo (SPH, 2001).

CASO 5:

La Figura VI.25 muestra las alturas en función del tiempo para el caso 5 ( $\tau_y = 4794 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 958 \text{ Pa s}$ ):

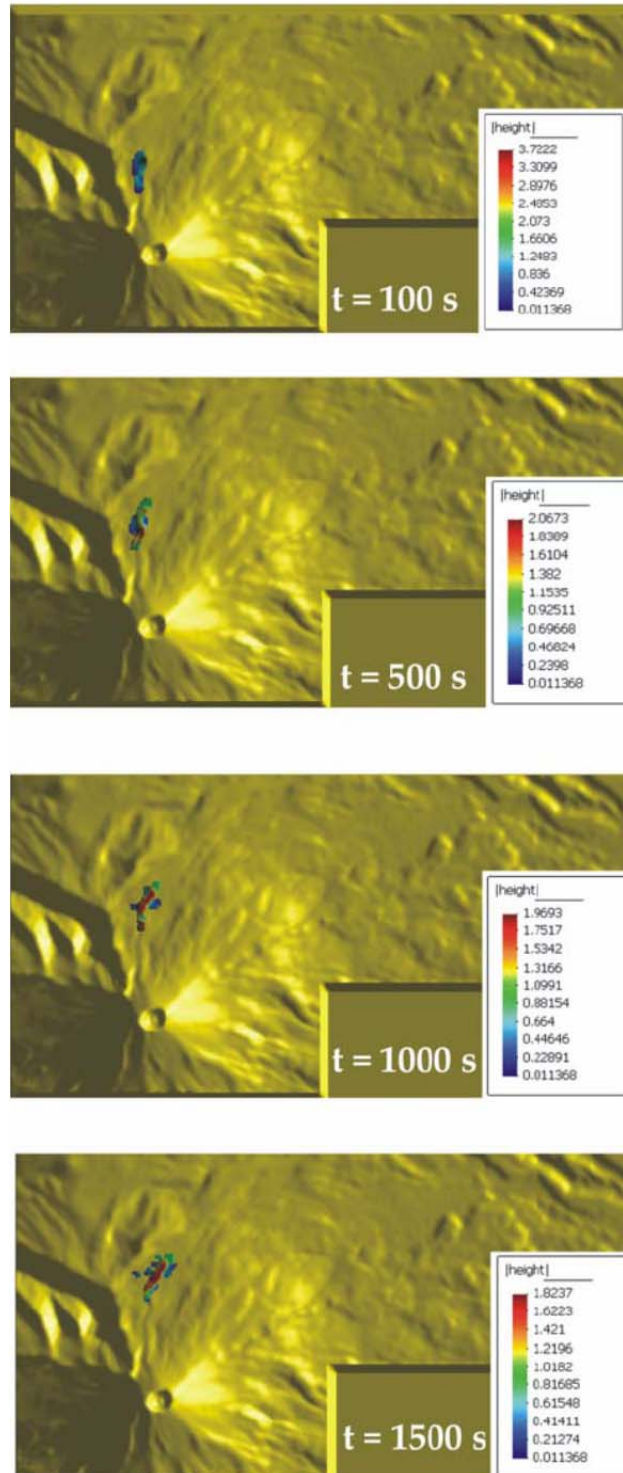


Figura VI.25.- Altura del material simulando el deslizamiento en función del tiempo (SPH, 2001).



Las Figuras VI.26 y VI.27 presentan las distancias recorridas, las velocidades y las alturas del centro y frente de la masa para el caso 5.

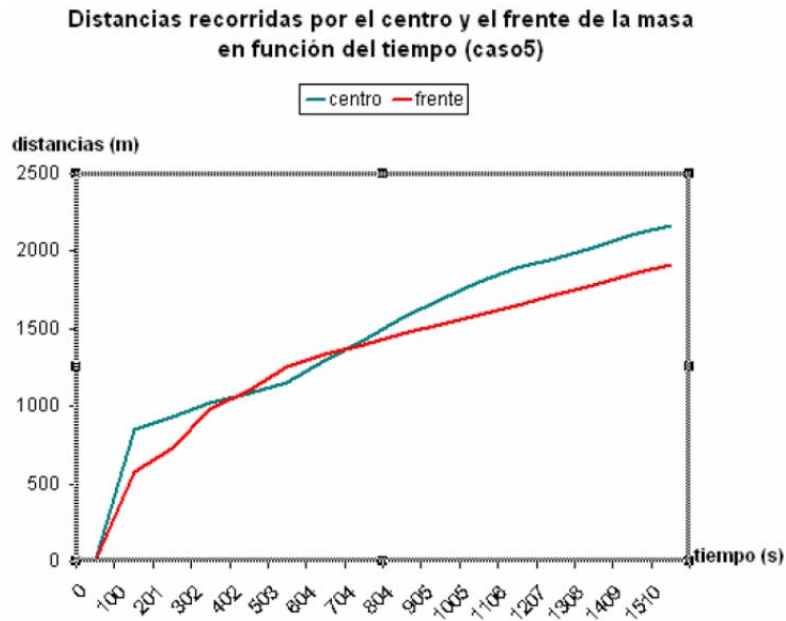


Figura VI.26.- Evolución de la distancia recorrida por el centro de la masa deslizante en función del tiempo (SPH, 2001).

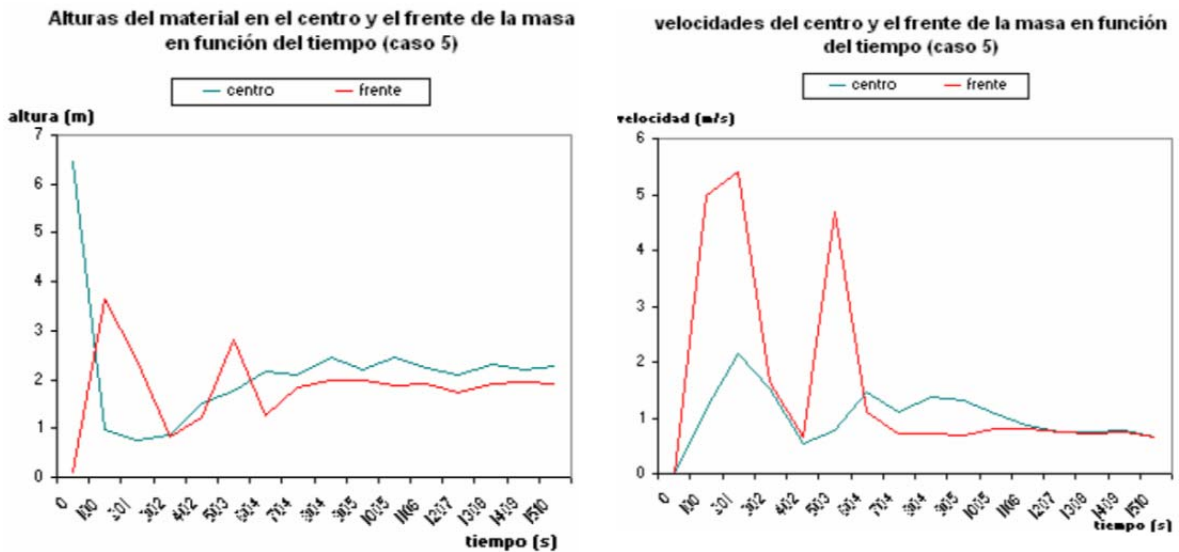


Figura VI.27.- Evolución de la altura y velocidad del material deslizante en función del tiempo (SPH, 2001).

CASO 6:

La Figura VI.28 muestra la altura en función del tiempo para el caso 6 ( $\tau_y = 38 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 2.1 \text{ Pa s}$ ):

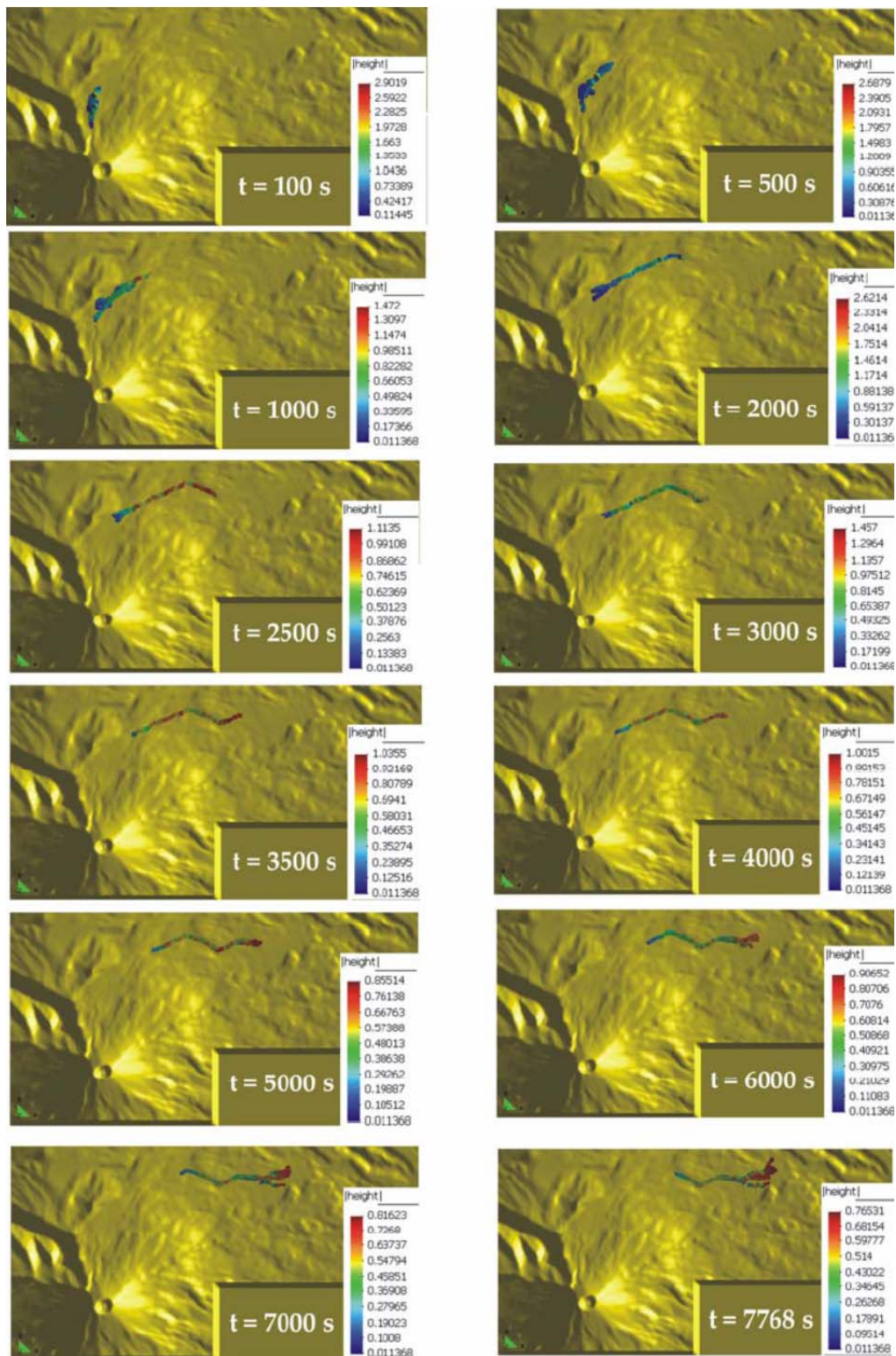


Figura VI.28.- Altura del material simulando el deslizamiento en función del tiempo (SPH, 2001).

Las figuras VI.29 y VI.30 presentan la distancia recorrida, velocidad y altura del centro y frente de la masa deslizante.

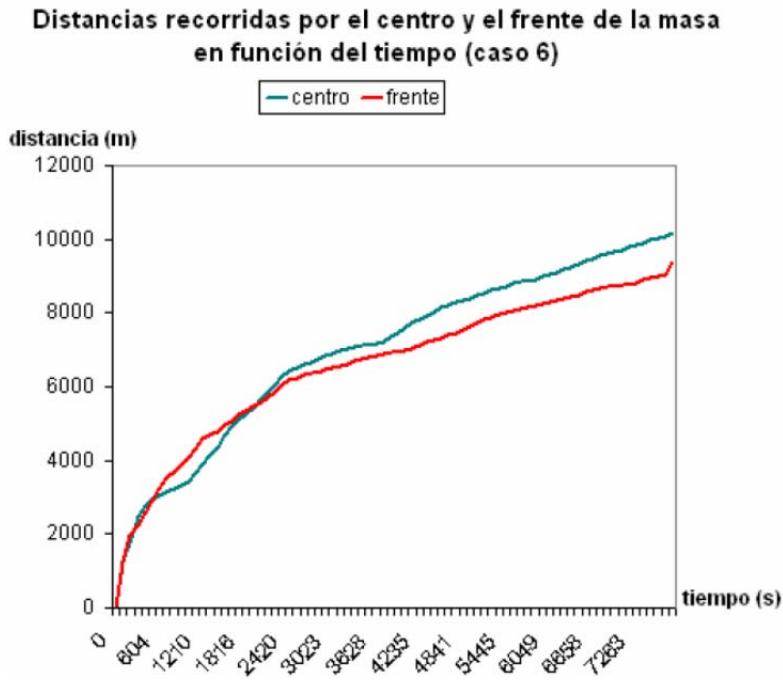


Figura VI.29.- Evolución de la distancia recorrida por el centro de la masa deslizante en función del tiempo (SPH, 2001).

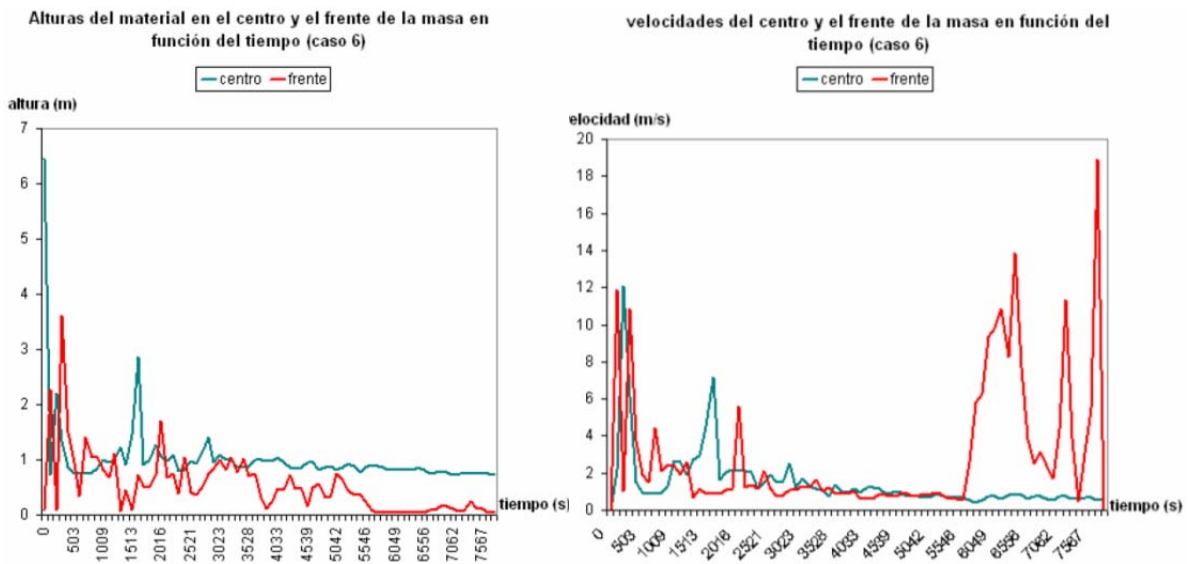


Figura VI.30.- Evolución de la altura y velocidad del material deslizante en función del tiempo (SPH, 2001).

En las Figuras VI.31, VI.32 y VI.33, se comparan las distancias recorridas, las alturas y las velocidades alcanzadas para los distintos casos estudiados:

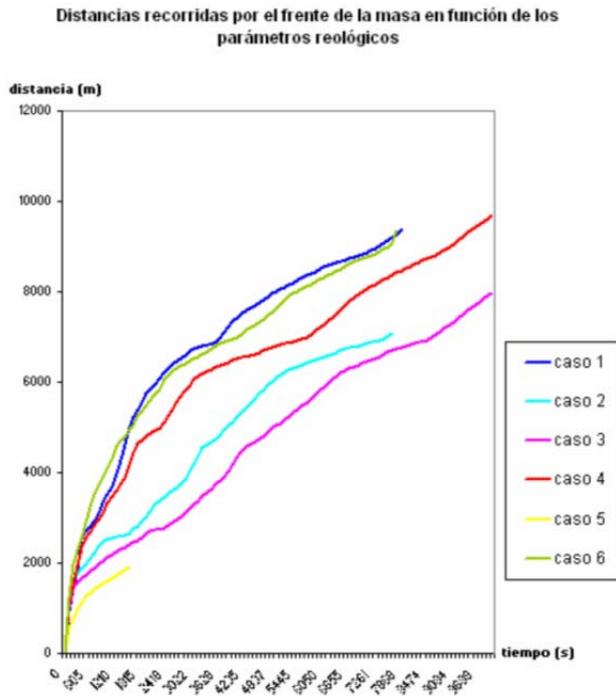


Figura VI.31.- Comparación de la evolución de la distancia recorrida por el frente de la masa deslizante en función del tiempo (SPH, 2001).

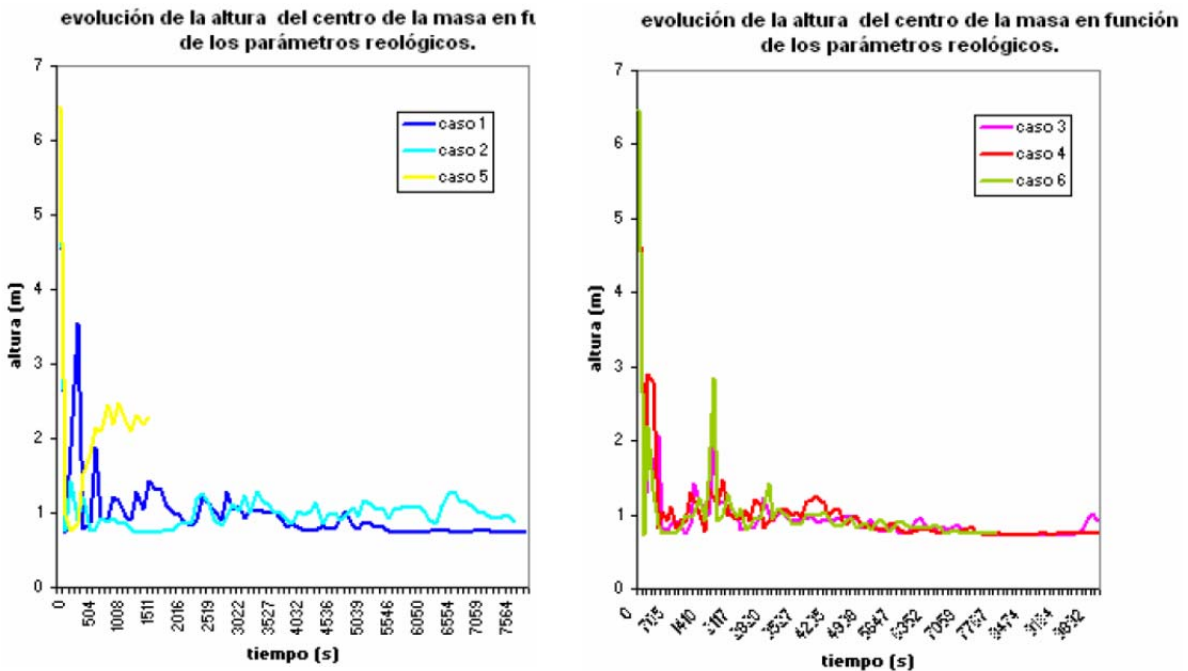


Figura VI.32.- Comparación de la evolución de la altura del material deslizante en función del tiempo para los distintos casos estudiados (SPH, 2001).

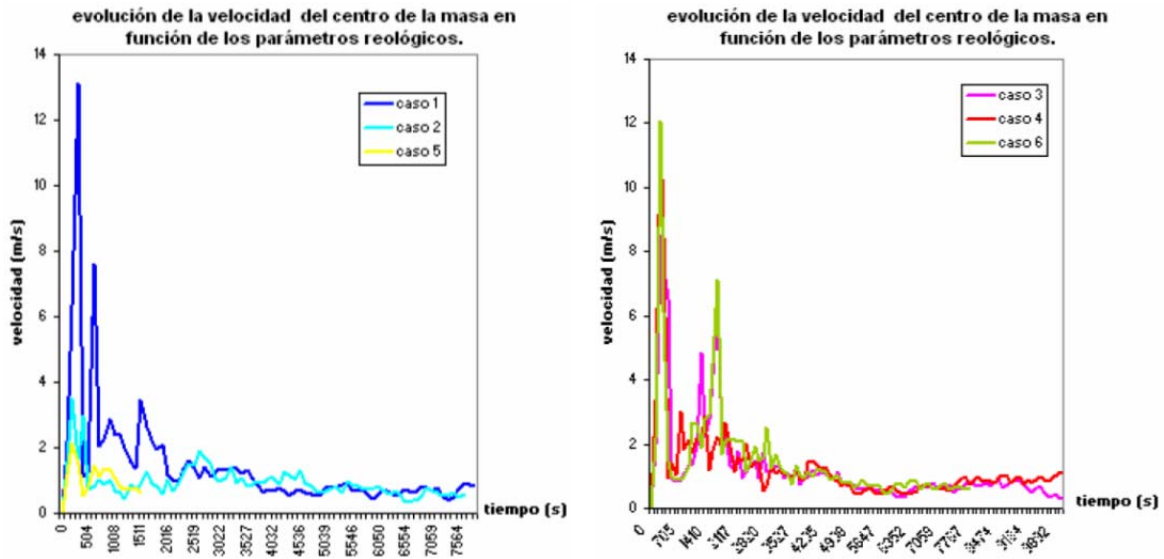


Figura VI.33.- Comparación de la evolución de la velocidad del material deslizante en función del tiempo para los distintos casos estudiados (SPH, 2001).

La tabla VI.6, comparan las velocidades teóricas estimadas con las velocidades alcanzadas por el frente de propagación en los distintos casos estudiados, para tres altitudes instrumentadas por CENAPRED.

Tabla VI.6.- Comparación de las velocidades obtenidas con el software SPH con las velocidades teóricas estimadas (SPH, 2001).

Altitudes (m)	Vel. Teórica Estimada* (m/s)	Vel. Media Caso 1 (m/s)	Vel. Media Caso 2 (m/s)	Vel. Media Caso 3 (m/s)	Vel. Media Caso 4 (m/s)	Vel. Media Caso 5 (m/s)	Vel. Media Caso 6 (m/s)
3940	8.84	6.400	8.8023	12.1488	5.8013	4.6858	11.9076
2972	1.569	1.650	0.5768	1.8105	4.4170		0.8259
2951	1.457	1.481		2.2698	9.3841		0.9468

\*(CENAPRED, 2001)

Al comparar los resultados obtenidos con los datos teóricos presentes en la bibliografía, derivamos a la conclusión de que los resultados obtenidos en el caso 1 se ajustan satisfactoriamente a lo ocurrido en el Popocatepetl el 22 de Enero del 2001. De la Figura VI.14 obtenemos las velocidades promedios para cada una de las altitudes, de acuerdo a las distancias recorridas.

Las distancias recorridas para cada una de las altitudes son:

1. Altitud de 3940 (m): 1 600 m.
2. Altitud de 2972 (m): 9 600 m.

3. Altitud de 2951 (m): 9 800 m.

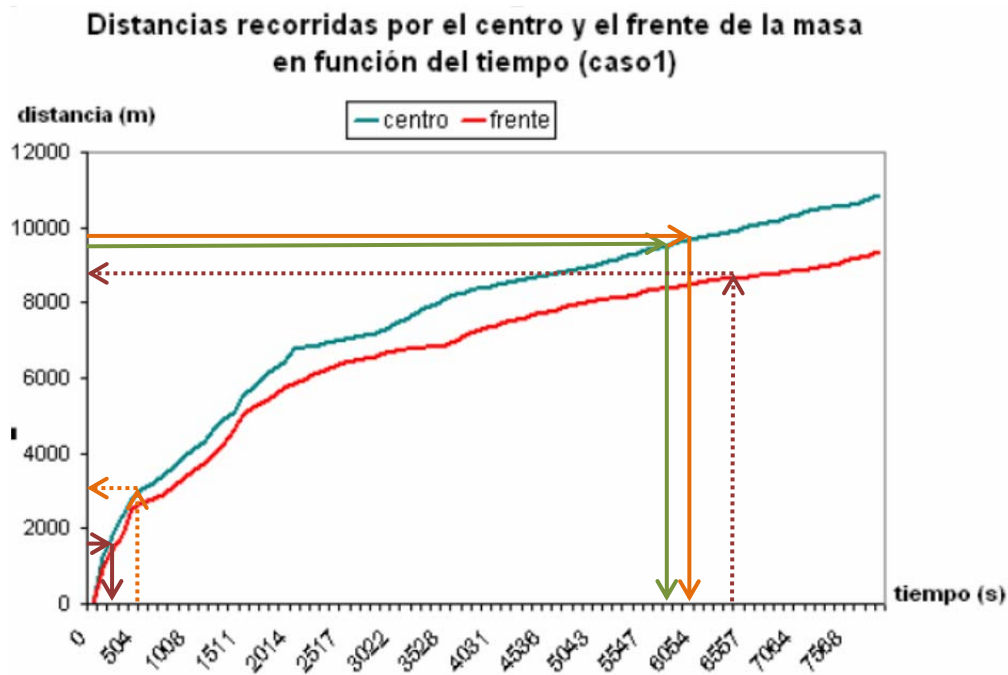


Figura VI.14.- Evolución de la distancia recorrida por el centro y el frente de la masa en función del tiempo, CASO 1 (SPH, 2001).

Velocidades promedio obtenidas de las pendientes de la Figura VI.14:

$$\text{Altitud 1: } \bar{v} = \left( \frac{1600 \text{ m}}{250 \text{ s}} \right) = 6.40 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$\text{Altitud 2: } \bar{v} = \left( \frac{9600 \text{ m}}{6000 \text{ s}} \right) = 1.60 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$\text{Altitud 3: } \bar{v} = \left( \frac{9800 \text{ m}}{6450 \text{ s}} \right) = 1.48 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Para el volcán Popocatépetl se observó que el lahar del 2001 tuvo su velocidad máxima de **13.8 m/s**, presentándose a los **7.6 km** de recorrido. Datos que CENAPRED presenta tomados en campo. Comparando estos resultados con los obtenidos para el caso 1 de la Figura VI.15, tenemos las siguientes velocidades de centro y frente obtenidas por el modelo SPH.

Velocidad máxima:

$$\text{Centro: } v_{\text{máx}} = 13.2 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$\text{Frente: } v_{\text{máx}} = 11.3 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Con estas velocidades y retomando la gráfica VI.14, obtenemos las distancias a las cuales se presentan relacionando los tiempos.

Distancia a la que se presenta la velocidad máxima:

**Centro:**  $Distancia (v_{m\acute{a}x}) = 3000 \text{ m}$ ;  $Altitud = 3700 \text{ msnm}$

**Frente:**  $Distancia (v_{m\acute{a}x}) = 8200 \text{ m}$ ;  $Altitud = 2950 \text{ msnm}$

Los datos CENAPRED no señalan si es del centro o del frente del deslizamiento, tomaremos el frente por ser a una distancia mayor donde se presenta la velocidad máxima, por lo cual el modelo presenta una diferencia de 600 m; CENAPRED obtiene una distancia 7.6 km donde se presenta la velocidad máxima y el software SPH a 8.2 km, con velocidad máxima de 11.3 m/s un poco más baja a los 13.8 de CENAPRED, pero con valores muy cercanos podemos decir que el programa cumple con el objetivo planteado.



Figura VI.15.- Evolución de la altura y velocidad del material deslizante en función del tiempo CASO 1 (SPH, 2001).

La Figura VI.34 presenta la evolución del frente de propagación del lahar del 22 de Enero del 2001 obtenida por SPH (caso1).

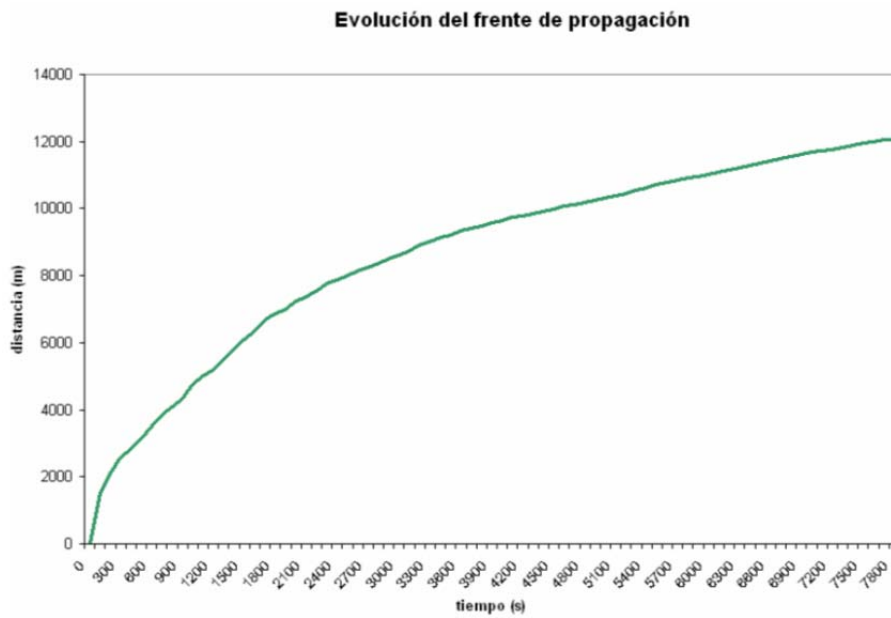


Figura VI.34.- Evolución del frente de propagación del lahar mediante SPH (SPH, 2001).

Las Figuras VI.35 presenta la evolución de las altura máxima del material correspondiente a la altitudes 3940 m.

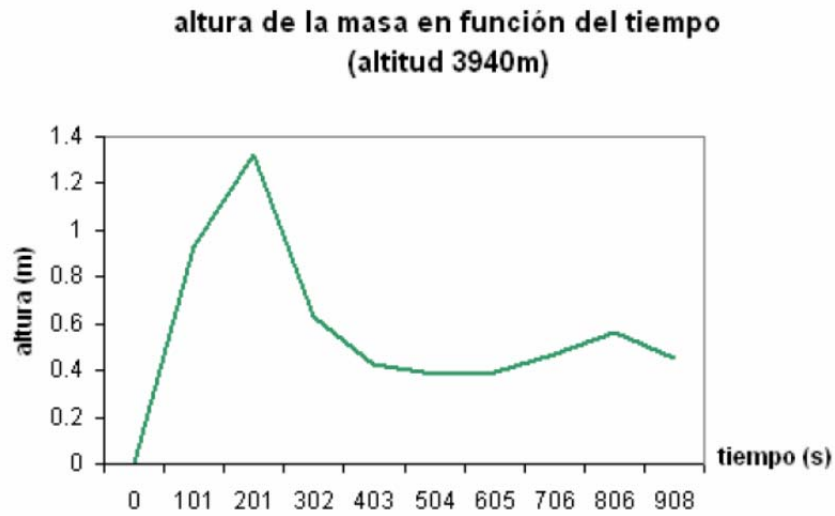


Figura VI.35.- Evolución de la altura del material deslizante en función del tiempo en la altitud 3940 m (SPH, 2001).



La figura VI.36 muestra las zonas de inundación obtenidas en el caso 1 ( $\tau_y = 60 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 45 \text{ Pa s}$ ) para distintos pasos de tiempo.

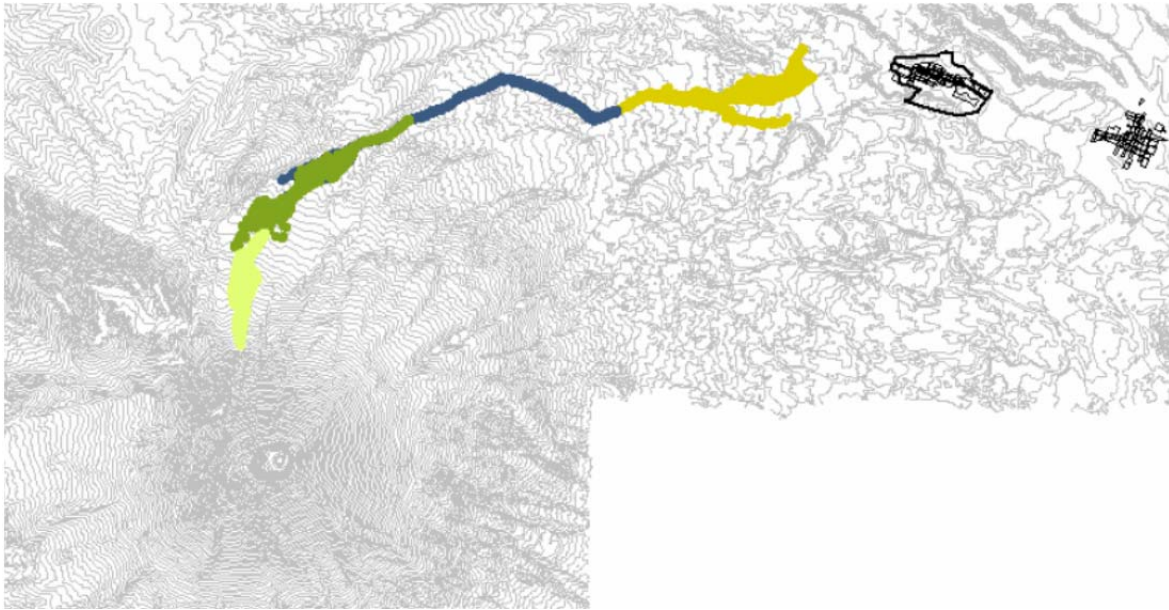


Figura VI.36.- Zona de inundación del lahar, obtenidas mediante el software SPH (SPH, 2001).

Las simulaciones realizadas mediante SPH, para el lahar del 22 de Enero del 2001 muestran que el flujo recorre la barranca de Tenenepanco y continua por Huiloac, tal y como presenta la información CENAPRED in situ durante el evento del 22 de Enero de 2001, confirmando la buena aproximación que se obtiene con el software SPH. En lo que a esfuerzo computacional se refiere, el costo de los cálculos realizados con SPH para el caso 1 es de tan solo 342 s (5.7 min) (Tabla VI.7), comparado con un software comercial como Geo – flow, que reporta para el mismo deslizamiento y bajo las mismas condiciones un tiempo de 9583 s (2.66 h).

Tabla VI.7.- Comparación de los tiempos de ejecución para un mismo caso con dos software diferentes.

	Geoflow 2D (s)	SPH (s)
<b>Caso 1</b>	9683.41	342.96

Reiteramos que para la simulación se ha considerado un material tipo Bingham con una densidad de  $1740 \text{ kg/m}^3$  y con los valores de la viscosidad y tensión de fluencia correspondientes al caso 1 ( $\tau_y = 60 \text{ Pa}$ ,  $\mu = 45 \text{ Pa s}$ ). Finalmente los resultados obtenidos de está simulación para el lahar presentado el 22 de Enero del 2001, vienen reflejados en la Figura VI.37.

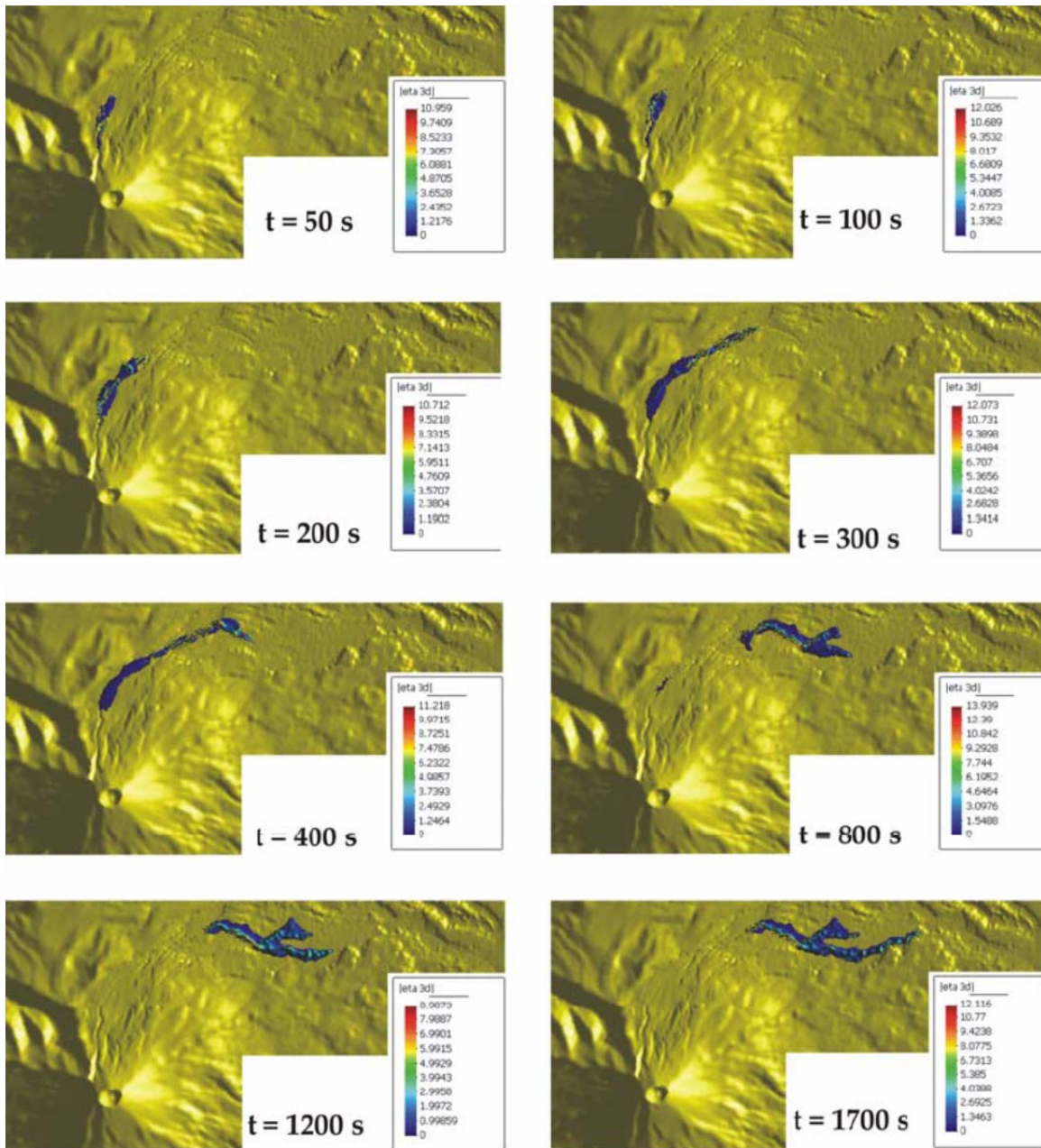


Figura VI.37.- Altura del material simulando el deslizamiento en función del tiempo (SPH, 2001).

# CAPÍTULO VII

---

Influencia de la infiltración de agua en la estabilidad de taludes

CONCLUSIÓN

# CAPÍTULO VII

## CONCLUSIÓN

1. Teniendo en cuenta la incidencia socioeconómica de los deslizamientos se pone en evidencia la necesidad de una visión multidisciplinaria (geodesia, geología, física, matemáticas, teledetección, sociología, etc), a nivel federal y estatal que tome en cuenta los deslizamientos de lahares, debido a que el riesgo asociado a la ocurrencia de deslizamientos sobre todo en costo humano es muy alto.

2. En lo que a las clasificaciones de deslizamientos se refiere, en este trabajo de tesis se han repasado las clasificaciones más relevantes. Asimismo, se han clasificado los deslizamientos rápidos en base a criterios mecánicos, considerando el comportamiento del geomaterial una vez que se ha desencadenado el movimiento, es precisamente esta clasificación la que nos permite llevar a cabo la modelización numérica de este fenómeno.

3. En los capítulos II, III, IV y V de este trabajo de tesis, se ha presentado un conjunto de herramientas de simulación para los geomateriales fluidificados en general, y para el análisis de la propagación de los deslizamientos rápidos en particular. La metodología presentada con este fin consiste en:

- a. Elaboración de un modelo matemático capaz de describir el fenómeno.
- b. Elaboración de un modelo reológico que permita describir el comportamiento del geomaterial sometido al deslizamiento.
- c. Resolver las ecuaciones en derivadas parciales a las que se ha llegado mediante métodos numéricos adecuados (Elementos Finitos, SPH).

4. Se ha analizado el fenómeno de disipación de presión de poros. Seguidamente, se ha integrado el sistema de ecuaciones obtenido según la normal al flujo, obteniéndose de este modo un modelo integrado en profundidad acoplado. Asimismo, se ha presentado tanto la formulación euleriana de dicho modelo como su formulación cuasilagrangiana. A continuación, se han presentado los modelos reológicos integrados en profundidad que permiten obtener los términos de tensiones integradas en profundidad y fuerzas de fricción con el fondo y con todo ello aún estamos a disposición de las fuerzas de la naturaleza, pero sin lugar a duda estamos más próximos a comprender este tipo de fenómenos. Con este estudio podemos simular las áreas con mayor riesgo y prevenir pérdidas económicas pero sobre todo humanas.

5. En la simulación de los lahares acontecidos en el Popocatepetl, se han empleado valores encontrados en la literatura sobre este tipo de materiales, debido a la falta de datos sobre la viscosidad y tensión de fluencia del material. Mediante SPH se ha estudiado la influencia de la tensión de fluencia y de la viscosidad del material en el comportamiento de los fluidos tipo

Bingham. A continuación, se han utilizado los valores que más se ajustaban a los eventos descritos en la bibliografía para reproducir mediante la técnica de los elementos finitos estos procesos. De ambos métodos se derivan resultados similares, no obstante, con el método SPH se obtiene una mejor canalización del flujo. Esto puede explicarse por el hecho de que con el SPH la topografía se aproxima mediante una malla mucho más fina, sin que este ejercicio produzca un costo adicional en el tiempo de ejecución matemática.

6. La ventaja principal del método SPH, frente a los elementos finitos tradicionales, para el tipo de problema que se está estudiando es sin la menor duda el costo de los cálculos. En este sentido SPH, al separar la malla topográfica de la malla de cálculo permite reducir treinta veces el tiempo de ejecución.

7. La calidad de los resultados de las simulaciones está sujeta a la disponibilidad, calidad y precisión de los datos de partida: Modelo Digital de Elevaciones (MDE, Surfer 9); información sobre la condición inicial (coordenadas, morfología volumen del material, etc.); información sobre los geomateriales involucrados en el movimiento (granulometría, propiedades resistentes, etc.). Además, para comprobar dicha calidad hace falta una serie de información cuantitativa que se debe obtener en base a un trabajo exhaustivo de campo.

### **Líneas de investigación:**

1. Nuevos modelos reológicos: no existe ningún modelo capaz de reproducir el comportamiento de las mezclas de suelo bajo todos los estados de esfuerzo que se generan en un deslizamiento rápido (desde su iniciación hasta su finalización, pasando por su propagación). Además, durante la fase de propagación del movimiento el comportamiento del geomaterial puede evolucionar a un tipo distinto al inicial. Por ejemplo, los flujos de derrubios pueden evolucionar en flujos hiperconcentrados o en arroyadas y viceversa. Por lo que una línea abierta muy interesante para futuras investigaciones es, la formulación de modelos reológicos más precisos capaces de reflejar de forma más completa el complejo comportamiento de los geomateriales.

2. Integración en un SIG: los deslizamientos ocurren en terrenos naturales la simulación de los mismos obliga a trabajar con datos geo referenciados. Teniendo en cuenta el papel que juegan los sistemas de información geográfica en la adquisición, gestión y análisis de los datos espaciales se propone integrar los modelos de simulación numérica presentados en esta tesis en el entorno de un SIG lo suficientemente abierto como para permitir: 1) adquirir y gestionar los datos geo referenciados; 2) obtener modelos digitales del terreno; 3) proporcionar una interfase sencilla de emplear para el usuario; 4) facilitar el uso de los resultados de la simulación para generar mapas de peligrosidad así como para la gestión de catástrofes.

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Aiassa Gonzalo M., Caracterización de procesos de infiltración en estado no saturado sobre suelos limosos compactados, Ed. UNC Argentina, 2008.

Álvarez Manilla A. A., Barrera Bucio M., Flores F., Garnica A., Mecánica de suelos no saturados, Ed. SMMS A.C., 2004.

Anderson S.A. & Sitar N, Analysis of rainfall – induced debris flow, Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 121 N° 7, Julio 1995.

Averjanov S.F., About permeability of subsurface soils in case of incomplete saturation, Ed. English Collection 7, de Leong y Rahardjo, 1997.

Bear, J., Dynamics of fluids in porous media, Ed. Dover Publications, Inc. New York, USA, 1972.

Benítez, A., Captación de Aguas Subterráneas. Ed. Dossat, 1972.

Benz W., Smooth particle hydrodynamics: a review, in The Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsations, Ed. J.R. Buchler, Kluwer Academic Publishers, 1990.

Buckingham E., Studies of the movement of soil moisture, U.S.D.A. Bur. of Soils, Bulletin 38 (of Fredlund y Rahardjo, 1993).

Breña Puyol A. & Jacobo Villa M., Principios y fundamentos de la hidrología superficial, Ed. UAM, México, 2006.

Capra, L., Poblete M.A., & Alvarado, R., (2004) The 1997 and 2001 lahars of Popocatépetl Volcano (Central México): textural and sedimentological constraint on their origin and hazards, Jour. Volc. And Geother. Research. Vol. 131, pp. 351-369.

CENAPRED, (2001) Las cenizas volcánicas del Popocatépetl y sus efectos para la aeronavegación e infraestructura aeroportuaria. URL:<http://www.cenapred.unam.mx>.

Cervantes Albarrán J.R., Modelación del flujo de agua en suelos expansivos, Tesis (Maestría en ciencias), mecánica de suelos, Universidad Autónoma de Querétaro, 2001.

Childs E.C., An introduction to the physical basis of soil water phenomena. Ed. London Wiley-Interscience, of Fredlund y Rahardjo, 1993.

Cho S.E., Infiltration analysis to evaluate the surficial stability of two-layered slopes considering rainfall characteristics, Engineering Geology, Enero 2009.

Cho S.E. & Lee S.R., Evaluation of surficial stability for homogeneous slopes considering rainfall characteristics, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol.; 42 2001.

Chow V.T., Maidment D.R., Mays L.W., Hidrología Aplicada, Bogotá, Ed. McGraw Hill, 1994.

Coddington E. A. Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, Ed. McGraw Hill, 1955.

Collins B.D., Znidarcis D., Stability analyses of rainfall induced landslides, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Vol.; 130, Abril 2004.

Costa J. E., Physical geomorphology of debris flows, in developments and applications of geomorphology, Ed. Springer – Verlag, 1981.

Coussot P. & Piau J. M., The effects of an addition of force – free particles on the rheological properties of fine suspensions, Can. Geotechnical, 1995.

Coussy O., Mechanics of porous media, Ed. John Wiley & Sons, 1995.

Crosta G. & Frattini P., Distributed modelling of shallow landslides triggered by intense rainfall, Ed. Natural Hazards, 2003.

Cruden D. M. & Varnes D. J., Landslide Types and Processes, Ed. by Turner, K. A. and Schuster R. L., Transportation Research Board, National Research Council, 1996.

Custodio E & Llamas M., Hidrología Subterránea, Ed. Omega S.A., Barcelona, 1976.

Daily J. W., Harleman D., Dinámica de fluidos, Ed. Trillas, 1975.

Darve F. & Laouafa F., Modelling of slope failure by a material instability mechanism, Ed. Computers and Geotechnics, 2001.

Demeneghi Colina A., Apuntes de mecánica del medio continuo, F.I UNAM, México, 2009.

Dirksen C., Unsaturated hydraulic conductivity in Soil and environmental analysis, Ed. by K. A. Smith & C. E. Mullins, Marcel Dekker, Inc. New York, USA, 2001.

Echávez Aldape G., Apuntes de mecánica de fluidos, F.I UNAM, México, 2007.

Espíndola, J.M., (1999). La actividad volcánica. Cuadernos del Instituto de Geofísica. UNAM.

Espinoza C., Hidráulica de aguas subterráneas y su aprovechamiento, Ed. UNC, Chile, 2004.

Evans S.G., Hungr O. & Clague J.J., Dynamics of the 1984 rock avalanche and associated distal debris flow on Mount Cayley BC, Canada, Implications for the landslide hazard assessment on dissected volcanoes, Engineering Geology, 2001.

Flores Berrones Raúl, Flujo de Agua a Través de Suelos, Ed. IMTA, AMH, Mexico 2000.

Flores Berrones R., Alva García F. & Li Liu X. Efecto del flujo de agua en la estabilidad de taludes, Ed. Ingeniería hidráulica en México. 2003.

Fredlund D.G. & Rahardjo H., Soil mechanics for unsaturated soils, Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

Fredlund D.G. & Vanapalli S.K., Shear strength of unsaturated soils, Agronomy Soil Testing Manual. Agronomy Society of America, 2002,

Fredlund D.G. & Xing A., Equations for the soil – water characteristic curve, Canadian Geotechnical Journal, 1994.

Freeze R.A. & Cherry J.A., Groundwater, Ed. Prentice – Hall, Englewood Cliffs, 1979.

Fetter C.W, Contaminant hydrogeology, Ed. Prentice Hall Inc., 1999.

Gingold R. A. & Monaghan J.J., Smoothed particle hydrodynamics, Mon. Not. R. Astronomy Soc., 1977.

Godunov S. K., Ecuaciones de la Física Matemática, Ed.Mir, 1978.

Gratton J., Introducción a la mecánica de fluidos, Ed. UNC Buenos Aires, 2002.

Guzman, M., Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ed. Alhambra, 1975.

Guzzetti F., Peruccacci S., Rossi M., Risk aware – advanced weather forecast system to advice on risk events and management, Action 1.16. IRPI CNR, Perugia, Italia. 2005.

Hanes D.M. & Inman D.L., Observations of rapidly flowing granular fluid materials, J.Fluid Mech, 1985.

Harr M. E., Groundwater and seepage, Ed. Dover, New York, 1991.

Hirsch C., Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol II, Ed. John Wiley and Sons, 1988.

Hungr O., A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows and avalanches, Can. Geotech, 1995.

Jan, C.D., (1997) A study on the numerical modelling of debris flows, in Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment, Proc.1st Int.Conference, ASCE 1997, Cl. Chen (Ed.), pp.717-726.

Jin, M. & Fread, D.L. (1997) One-dimensional routing of mud/debris flows using NWS FLDWAV model, in C.L.Chen (Ed.), Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment, ASCE, pp. 687-696.

Johnson A. M. & Rodine J. R., Slope Instability debris flow, Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

Juárez Badillo Eulalio & Rico Rodríguez Alfonso, Mecánica de Suelos, Flujo de agua en los suelos, Tomo III, Ed. Limusa, 1976.

Lambe T. W., Whitman R. V. Mecánica de Suelos, Ed. Limusa, México 1994.



Lee T.S., Groundwater conditions, Slope stability and stabilization methods, Ed. Wiley interscience, 1996.

Legorreta J., Agua. La Jornada, Ed. MBM Impresora, México 2005.

Li J., Yuan J., Bi C., Luo D., The main features of the mudflow in Jiang-Jia Ravine, Z. Geomorphol, Vol. 27, 2005.

Li S. & Liu W.K., Meshfree particle method, Ed. Springer Verlag, 2004. ISBN 3-540-22256-1.

Liu G.R. & Liu M.B., Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method, World Scientific, 2003. ISBN 981-238-456-1.

Macías, J. L., Carrasco, G., Delgado, H., Del Pozzo, A. L., siebe, C., Hoblitt, R., Sheridan M.F., & Tilling, R. I., (1995) Mapa de peligros volcánicos del Popocatépetl, Publicación especial del Instituto de Geofísica, UNAM.

Malvern L.E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Ed., Prentice Hall, 1969.

Martín D. A., Apuntes de mecánica de fluidos, Ed. UPM, 2011.

Mata A., Metodología para la identificación, clasificación y cuantificación de los impactos ambientales de los desastres naturales, Ed. UCR San José, Costa rica, 2000.

Marsal R.J. & Resendiz N.D., Presas de tierra y enrocamiento. Ed. Limusa, México. 1975.

Mijailov, V. P., Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, Ed. MIR, Moscú, 1978.

Mitchell J.K., Fundamentals of soil behavior, Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

Monge C., Naturaleza del agua como recurso. Perspectiva social, económica e institucional, Congreso ibérico sobre gestión y planificación del agua, Tortosa, 2004.

Montenegro H., Malagón D., Propiedades físicas de los suelos. Subdirección de Agrología, Instituto Geográfico "Agustín Codazzi". Ed. IGAC Bogotá, Colombia, 1990.

Pacheco Montes M., Avances en la gestión integral del agua de lluvia: contribución al consumo sostenible, Revista internacional de sustentabilidad tecnología y humanismo, N° 3, 2008.

PNUD, Informe sobre desarrollo humano 2006: más allá de la escasez: poder pobreza y la crisis mundial del agua, Ed. Grupo mundi prensa, México 2006.

Quintana Crespo E., Relación entre las propiedades geotécnicas y los componentes puzolánicos de los sedimentos pampeanos, UNC, Argentina, Tesis Doctoral, 2005.

Rodríguez G., Agua y metrópoli: logrando la sustentabilidad, PUEC, UNAM, 2003.

SCT Instituto Mexicano del Transporte, Determinación de curva características en suelos no saturados con celda de presión, Publicación Técnica N° 313, Ed. IMT, 2008.

SCT Instituto Mexicano del Transporte, Introducción a la mecánica de suelos no saturados en vías terrestres, Publicación Técnica N° 198, Ed. IMT, 2002.

Sharma T. & Nakagawa M. O., Mechanical model of shear deformation of a steep Sandy slope due to rainfall, Landslides in research, Vol. 94, 2005.

Sheridan M.F., Hubbard B., Bursik M.I., Siebe C., Abrams M., Macias J.L., & Delgado H., Short-term potential volcanic hazards at volcán Popocatepetl, Mexico, Earth Observing System, Amer Geophy, Vol. 82, 2001.

Smith G.A., Lowe D.R., Lahars: volcano – hydrologic events and deposition in the debris flow hiperconcentrated flow continuum, Sedimentation in Volcanic Settings, Special Publication SEPM 1991.

Suarez J., Análisis geotécnico deslizamientos, Ed. UNC, Chile, 1985.

Takeda H.T., Miyama S.M. & Sekiya M., Numerical simulation of viscous flow by smooth particle hydrodynamics, Progress of Theoretical Physics, Vol 92, 1994.

Terzaghi K., & Peck R.B., Soil mechanics in engineering practice, Ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.

Thouret J.C., & Lavigne, F., Lahars: occurrence, deposits and behaviour of volcanohydrologic flows. Volcaniclastic rocks from magmas to sediments, Ed. Hervé Leyrit and Christian Montenat Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

Tijonov, A. Samarsky, A., Ecuaciones de la Física Matemática, Ed. Mir, 1983.

Vallance J. W., Sigurdsson H., Houghton B., McNutt S.R., Rymer H., Stix J., Lahars, Ed. Encyclopedia of volcanoes, Academic Press, San Diego, 2000.

Van Asch T., Van Beek L. & Bogaard T., The diversity in hydrological triggering systems of landslides, Ed. First Italian Workshop on Landslides Napoli, 2004.

Vázquez J. L., Fundamentos matemáticos de la mecánica de fluidos, Ed. UAM, 2003.

Vélez M., Hidráulica de aguas subterráneas, Ed. UNC Facultad de minas, 1999.

Xie M., Esaki T., & Cai M., A time – space based approach for mapping rainfall – induced shallow landslide hazard, Environmental Geology, 2004.

Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L., The Finite Element Method, Ed. Butterworth – Heinmann, 2000.

## ANEXO

### ANEXO N°1.

#### A.1) Determinación de $K_{fs}$ con el método del tensioinfiltrómetro.

Los métodos de cálculo se basan en la aproximación propuesta por Wooding (1968), que analiza la infiltración tridimensional en régimen permanente a partir de una fuente circular de radio  $r$ , asumiendo como válida la ecuación de Darcy, el medio poroso isotrópico, homogéneo y uniforme. Con ello el caudal infiltrado está dado por:

$$Q(\psi) = \pi \cdot r^2 \cdot \alpha^* \cdot \phi + 4\phi$$

Ec. A.1

Donde  $Q(\psi)$  [ $L^3T^{-1}$ ] es el flujo de agua en régimen permanente,  $r$  es el radio de la fuente de infiltración [ $L$ ] y  $\phi$  es la variable de transformación propuesta por Gardner.

Utilizando la relación para la conductividad hidráulica no saturada  $K(\psi)$  propuesta por Gardner se obtiene que:

$$\left(\frac{dK(\psi)}{d(\psi)}\right) = \alpha^* \cdot K(\psi)$$

Ec. A.2

Integrando la ecuación entre la tensión del agua en el suelo  $\psi$  y la tensión inicial  $\psi_i$  se obtiene:

$$\phi = \left(\frac{1}{\alpha^*}\right) \cdot (K(\psi) - K(\psi_i))$$

Ec. A.3

Y si se asume que  $\psi_i$  es muy bajo, se tiene que  $K(\psi) \gg K(\psi_i)$  luego:

$$\phi = \left(\frac{K(\psi)}{\alpha^*}\right)$$

Ec. A.4

Por lo tanto, el caudal infiltrado en el disco infiltrómetro se expresa como:

$$Q(\psi) = \pi \cdot r^2 \cdot K(\psi) + 4r \left(\frac{K(\psi)}{\alpha^*}\right)$$

Ec. A.5

Donde el primer término de la derecha representa la contribución del flujo gravitacional y el segundo la influencia del flujo debido al gradiente de presión considerando las condiciones de la zona no saturada que rodea a la fuente.

Además del modelo de Soil Measurement Systems (SMS) existen otros modelos para determinar  $K_{fs}$ .

#### A.1.1) Modelo de Ankeny.

A partir de la ecuación (56) y utilizando dos tensiones diferentes  $\psi_1$  y  $\psi_2$  se expresan los caudales de infiltración por unidad de área  $q_1$  y  $q_2$  [ $LT^{-1}$ ] como:

$$q_1 = K(\psi_1) + \left( \frac{4 \phi_1}{\pi r} \right)$$

$$q_2 = K(\psi_2) + \left( \frac{4 \phi_2}{\pi r} \right)$$

Ecs. A.6

Ecuaciones que poseen cuatro incógnitas  $K(\psi_1)$ ,  $\phi_1$ ,  $K(\psi_2)$ ,  $\phi_2$ . Ankeny et al. (1991) asumieron constante la relación  $K/\phi$  entre  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , es decir,

$$\left( \frac{K(\psi_1)}{\phi_1} \right) = \alpha^* \Rightarrow \phi_1 = \left( \frac{K(\psi_1)}{\alpha^*} \right)$$

$$\left( \frac{K(\psi_2)}{\phi_2} \right) = \alpha^* \Rightarrow \phi_2 = \left( \frac{K(\psi_2)}{\alpha^*} \right)$$

Ecs. A.7

Y sustituyendo las ecuaciones A.7 en las ecuaciones A.6, resulta un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas,  $K(\psi_1)$ ,  $K(\psi_2)$  y  $\alpha^*$ :

$$q_1 = K(\psi_1) + \left( \frac{4 K(\psi_1)}{\pi r \alpha^*} \right)$$

$$q_2 = K(\psi_2) + \left( \frac{4 K(\psi_2)}{\pi r \alpha^*} \right)$$

Ecs. A.8

Si se calcula la diferencia  $(\phi_1 - \phi_2)$  (Figura A.1), se obtiene:

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{\psi_i}^{\psi_1} K(\psi) d\psi - \int_{\psi_i}^{\psi_2} K(\psi) d\psi$$

Ec. A.9

Es decir:

$$\phi_1 - \phi_2 = \left( \frac{K_1 - K_2}{2} \right) \Delta \psi$$

Ec. A.10

Pero la diferencia  $(\phi_1 - \phi_2)$  también se puede obtener de las ecuaciones A.7 como:

$$\phi_1 - \phi_2 = \left( \frac{K(\psi_1) - K(\psi_2)}{\alpha^*} \right)$$

Ec. A.11

Luego igualando A.10 con A.11 se obtiene:

$$\left( \frac{K(\psi_1) - K(\psi_2)}{\alpha^*} \right) = \left( \frac{K(\psi_1) + K(\psi_2)}{2} \right) \Delta \psi$$

Ec. A.12

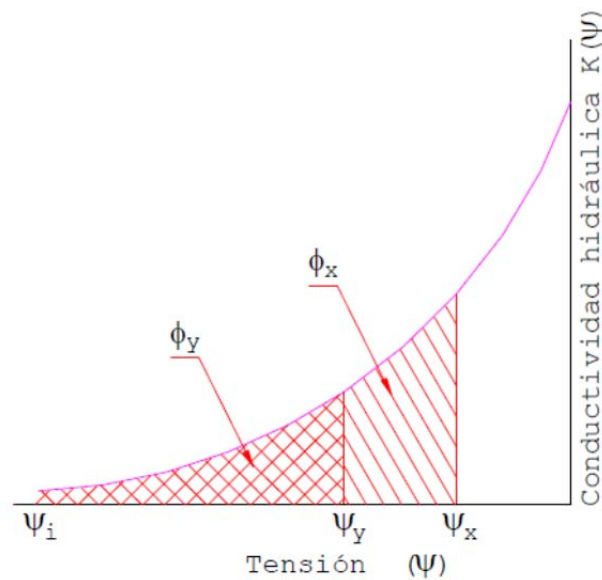


Figura A.1.- Conductividad hidráulica ( $k$ ) Vs. ( $\psi$ ) (Adaptado de Lee T., 1996).

Y despejando  $K(\psi_1)$  de A.8 se obtiene:

$$K(\psi_1) = \left( \frac{q_1}{1 + \frac{4}{\pi r \alpha^*}} \right)$$

Ec. A.13

Y despejando  $K(\psi_2)$  de A.8 se obtiene:

$$K(\psi_2) = \left( \frac{q_2}{1 + \frac{4}{\pi r \alpha^*}} \right)$$

Ec. A.14

Y finalmente despejando  $\alpha^*$  de A.12 se obtiene:

$$\alpha^* = \left( \frac{2 [K(\psi_1) - K(\psi_2)]}{\Delta\psi [K(\psi_1) + K(\psi_2)]} \right)$$

Ec. A.15

Y reemplazando A.13 y A.14 en A.15 se obtiene que:

$$\alpha^* = \left( \frac{2 [q_1 - q_2]}{\Delta\psi [q_1 + q_2]} \right)$$

Ec. A.16

Al reemplazar el valor de  $\alpha^*$  en las ecuaciones A.13 y A.14 respectivamente, se obtiene  $K(\psi_1)$  y  $K(\psi_2)$ .

Si en terreno se obtienen más puntos  $Q(\psi_i)$  Vs.  $\psi_i$ , Ankeny et al.(1991) proponen obtener  $K(\psi_i)$  a partir del promedio aritmético. Por ejemplo, si se tienen tres tensiones  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  y  $\psi_3$ , el valor de  $K(\psi_1)$  será el que se obtiene a partir de  $\psi_1$  y  $\psi_2$ . Lo mismo sucede en el caso de  $K(\psi_3)$  que se obtiene a partir de  $\psi_2$  y  $\psi_3$ . Pero en el caso de  $K(\psi_2)$  se obtiene un valor a partir de  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , y otro a partir de  $\psi_2$  y  $\psi_3$ , de esta forma ambos valores se promedian y se obtiene el valor de  $K(\psi_2)$ . Para obtener  $K_{fs}$  el procedimiento es análogo para obtener  $K(\psi_3)$ .

#### A.1.2) Modelo de Reynolds y Elrick.

Expresando el logaritmo natural del caudal infiltrado se obtiene una relación lineal entre  $\ln Q$  y  $\psi$  como:

$$\ln Q(\psi_0) = \alpha^* \psi_0 + \ln \left[ \left( \frac{4r}{\alpha^*} + \pi r^2 \right) K_{fs} \right]$$

Ec. A.17

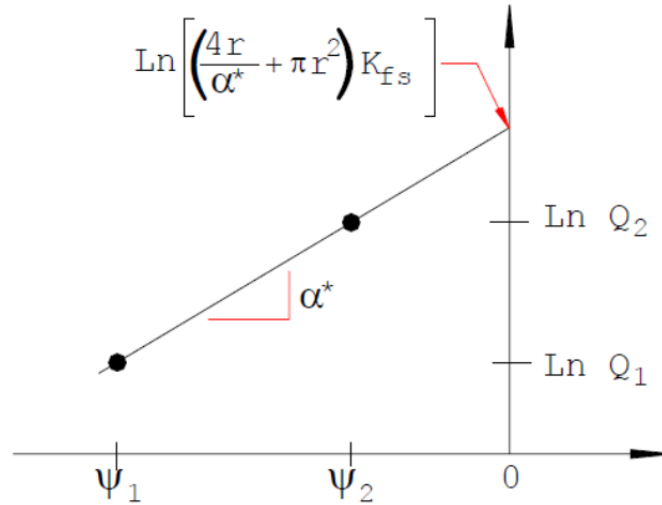


Figura A.2.- Logaritmo natural (Ln) Q Vs. ( $\psi$ ) (Adaptado de Lee T., 1996).

En la Figura A.2 se aprecia que  $\alpha^*$ , ecuación (24), representa la pendiente de esta recta y su intercepto con el eje de las ordenadas representa a  $K_{fs}$ , dado por la siguiente ecuación (Reynolds y Elrick, 1991):

$$K_{fs} = \frac{0.25 \alpha^* Q(\psi_1)}{r (1 + 0.25 \alpha^* \pi r) \left( \frac{Q(\psi_1)}{Q(\psi_2)} \right)^P \pi r^2}; \quad \text{con: } P = \frac{\psi_1}{(\psi_1 - \psi_2)}$$

Ec. A.18

Sin embargo, esta deducción, al igual que las anteriores asume que  $\alpha^*$  es constante en todo el dominio, lo cual es válido sólo en un intervalo pequeño de  $\Delta\psi$ , por ello, Reynolds y Elrick (1991) proponen realizar la siguiente modificación al considerar que  $\alpha^*$  depende de  $\psi$  ( $\alpha^*(\psi)$ ), con lo cual la expresión queda como:

$$K(\psi) = K_{xy} e^{(\alpha^*_{xy} \psi)}$$

Ec. A.19

Donde  $K_{xy}$  corresponde a  $K_{fs}$  obtenido a partir de las tensiones  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  y  $\alpha^*_{xy}$  corresponde a la pendiente de la recta  $\text{Ln } Q$  que pasa por  $\psi_x$  y  $\psi_y$ , tal como se muestra en la Figura A.3. Por lo tanto, para obtener una mejor estimación de  $K_{fs}$ , ésta se debe realizar a partir de tensiones próximas a  $\psi = 0$ .

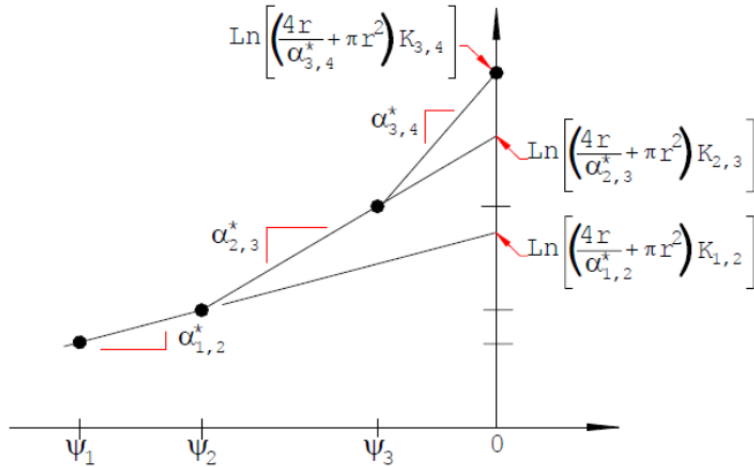


Figura A.3.- Logaritmo natural (Ln) Q Vs. ( $\psi$ ) con  $\alpha^*$  variable (Adaptado de Lee T., 1996).

De esta manera, realizando el mismo procedimiento anterior, se llega a que el logaritmo natural del caudal se expresa como:

$$\ln Q(\psi_0) = \alpha_{xy}^* \psi_0 + \ln \left[ \left( \frac{4r}{\alpha_{xy}^*} + \pi r^2 \right) K_{xy} \right]; \quad \text{con}; \quad \alpha_{xy}^* = \frac{\ln \left( \frac{Q(\psi_x)}{Q(\psi_y)} \right)}{(\psi_x - \psi_y)}$$

Ec. A.20

Lo que finalmente permite obtener  $K_{xy}$  como:

$$K_{xy} = \frac{4 \alpha_{xy}^* Q(\psi_x)}{r (1 + 4 \alpha_{xy}^* \pi r) \left( \frac{Q(\psi_x)}{Q(\psi_y)} \right)^P \pi r^2}; \quad \text{con: } P = \frac{\psi_x}{(\psi_x - \psi_y)}$$

Ec. A.21

Y:

$$0 < \alpha^* < \infty; \quad -\infty < \psi \leq 0$$

Ec. A.22



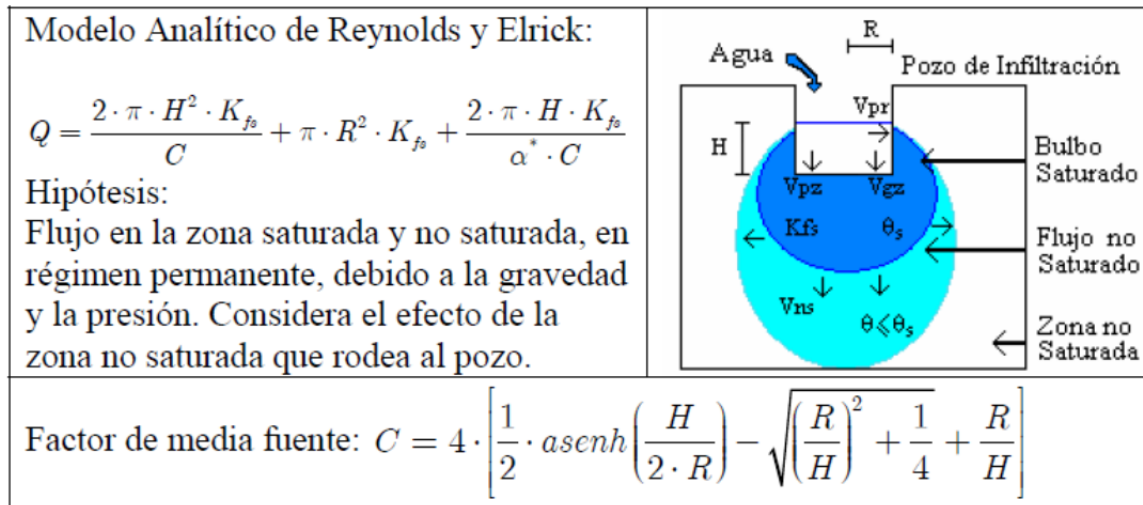


Figura A.4.- Modelos para predecir el flujo a través de un pozo de infiltración (Adaptado de Lee T., 1996).

Donde  $Q$  [ $L^3/T$ ] es el caudal infiltrado a través de un pozo de infiltración,  $K_{fs}$  [ $L/T$ ] es la conductividad hidráulica saturada de campo,  $\alpha^*$  [ $1/L$ ] es un parámetro que caracteriza el efecto de la zona no saturada del suelo que rodea al pozo (Figura A.4). En su forma original, Reynolds y Elrick (1985) proponen solucionar un sistema de ecuaciones, a partir de los datos de un ensayo de infiltración ya que se tienen dos incógnitas  $K_{fs}$  y  $\alpha^*$ . Sin embargo, en muchos casos el valor obtenido de  $\alpha^*$  es negativo (Elrick y Reynolds, 1992), lo que es físicamente imposible. Por lo tanto, para evitar este problema, Elrick y Reynolds (1992) sugieren algunos valores típicos de este parámetro para distintas categorías de suelos, los que se muestran en la Tabla A.1.

Tabla A.1.- Valores de  $\alpha^*$  según el tipo de suelo, propuestos por Elrick y Reynolds (Elrick & Reynolds, 1992).

Categoría del Medio Poroso	$\alpha^*$ [1/m]
Materiales arcillosos, poco estructurado, compactos	1
Suelos que tienen estructura fina y desestructurada	4
Suelos estructurados, desde arcillas pasando por francos. Incluye arenas desestructuradas.	12
Arenas gruesas y gravas. Se incluyen algunos suelos con gran estructura como grandes fisuras y macroporos.	36