



---

---

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE QUÍMICA**

**RECUBRIMIENTO DE SUPERFICIES CON FLUIDOS**

**NEWTONIANOS Y NO NEWTONIANOS**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE**

**INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA**

**LEONARDO DAMIÁN SORIA RODRÍGUEZ**



**MÉXICO, D.F.**

**AÑO 2013**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE:** Profesor: I.Q. Manuel Vázquez Islas

**VOCAL:** Profesor: Dr. Rafael Herrera Nájera

**SECRETARIO:** Profesor: Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

**1er. SUPLENTE:** Profesor: Dr. Néstor Noé López Castillo

**2° SUPLENTE:** Profesor: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

## **SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA, FACULTAD DE QUÍMICA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.**

---

**ASESOR DEL TEMA: DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS**

---

**SUSTENTANTE: LEONARDO DAMIÁN SORIA RODRÍGUEZ**

## **Agradecimientos**

En la vida los triunfos logrados no son enteramente nuestros, son producto de experiencia, aprendizaje y esfuerzo; se construyen sobre cimientos firmes en los que reafirmamos quienes somos; y es ahí, en donde ubico mi ser, mi alma, en donde guardo memorias de sentimientos diversos, de reflexiones muchas, en las que cada persona que he conocido ha impregnado su sabiduría, y me ha hecho crecer.

Mi familia a la que amo y respeto, a mi papá y mamá quienes siempre han estado conmigo para apoyarme y protegerme a mi hermano Carlos con quien he pasado momentos extraordinarios de mi vida.

Mis amigos (Karen, Jessica, Tania, Mayela, Alberto, Gerardo, Hugo y Sinaí), que han ido conmigo brindándome su cariño y apoyo incondicional.

A mis profesores, que han compartido conmigo y demás alumnos, la pasión con que hacen suyo el conocimiento, la búsqueda de la verdad. Quiero agradecer especialmente al Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos, quien amplió mi panorama y me supo transmitir el amor que por la ciencia se siente, ese amor que no da cabida al interés sino al más puro cariño por el conocer, consecuencia de una curiosidad inquieta que ha hecho de la Ingeniería Química lo que es; agradecer al docto porque en él no veo sólo un maestro, sino un excelente amigo.

Al Dr. Rafael Herrera Nájera quien con sus comentarios y visión física me ayudo a comprender mejor el proceso, al I.Q. Manuel Vázquez Islas quien me apoyo a que la parte matemática fuera congruente.

## **Dedicatoria**

A mi extraordinaria familia a quienes admiro por su calidad humana e intelectual.

*"La inteligencia es la habilidad de adaptarse a los cambios".*

*Stephen Hawking*

*"Si descubrimos una teoría completa, con el tiempo habrá de ser, en sus líneas maestras, comprensible para todos y no únicamente para unos pocos científicos".*

*Stephen Hawking*

*"Incluso la gente que afirma que no podemos hacer nada para cambiar nuestro destino, mira antes de cruzar la calle".*

*Stephen Hawking*

*"Obra sólo de forma que puedas desear que la máxima de tu acción se convierta en una ley universal".*

*Immanuel Kant*

## Índice

Índice.....	1
Nomenclatura.....	2
Resumen.....	4
Objetivos.....	5
1. Introducción.....	6
2. Antecedentes teóricos.....	8
3. Desarrollo y análisis del problema con fluido newtoniano.....	9
3.1 Recubrimiento con fluido newtoniano.....	9
4. Fluidos viscoelásticos.....	17
4.1 Modelo de Oldroyd-B.....	19
4.2 Flujo cortante.....	21
4.3 Flujo cortante estable.....	22
4.4 Reología lineal.....	24
4.5 Flujo extensional.....	26
5. Desarrollo y análisis del problema con fluidos no newtonianos viscoelásticos.....	28
5.1 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional.....	28
5.2 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva codeformacional.....	43
5.3 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta (configuracional).....	50
6. Comparación de modelos.....	60
7. Conclusiones.....	68
8. Anexos.....	70
Anexo 1 “Teoría de métodos perturbativos”.....	70
Anexo 2 “Datos para elaboración de gráficos”.....	75
Anexo 3 “Adimensionalización de componentes del tensor de esfuerzos”.....	79
Anexo 4 “Cálculo de la norma del tensor adimensional total solo considerando esfuerzos normales”.....	85
9. Referencias.....	86

## Nomenclatura

$\mu$  Viscosidad fluido newtoniano

$p$  Presión

$t$  Tiempo

$u_x$  Velocidad en la dirección x

$\xi$  Coordenada adimensional dirección x

$\eta$  Coordenada adimensional en la dirección y

$u$  Velocidad adimensional en la dirección x

$P$  Presión adimensional

$R$  Radio del rodillo

$H_0$  Distancia característica que separa al rodillo de la superficie a recubrir

$U$  Velocidad característica

$\frac{dP}{d\xi}$  Gradiente de presiones en la dirección de  $\xi$

$\hbar$  Distancia adimensional en función de la posición entre el rodillo y toda la zona a recubrir

$Q$  Flujo volumétrico

$\lambda$  Flujo volumétrico adimensional

$N_1$  Parámetro para modelar la región de separación

$\lambda_0$  Un valor característico en el límite de la desaparición de  $N_1$

$\vartheta$  Tensión superficial

$F$  Fuerza del rodillo

$\underline{\underline{\tau}}$  Tensor de esfuerzos

$\rho$  Densidad

$\eta_0$  Viscosidad fluidos no newtonianos a cero rapidez de deformación

$\underline{\underline{D}}$  Tensor rapidez de deformación o parte simétrica del gradiente de velocidades

$\underline{\underline{\omega}}$  Tensor vorticidad o parte antisimétrica del gradiente de velocidades

$\underline{\underline{I}}$  Tensor identidad

$\underline{u}$  Vector velocidad

$\omega$  Frecuencia

$\eta_{ext}$  Viscosidad extensional

$\dot{\epsilon}$  Velocidad de deformación extensional

$\theta_R$  Factor de lubricación

$\frac{\mathcal{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t}$  Derivada convectiva de Jaumann

$\frac{\mathfrak{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathfrak{D}t}$  Derivada convectiva de Oldroyd

$\frac{\mathbb{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathbb{D}t}$  Derivada convectiva mixta

$\varphi$  Velocidad adimensional

$Ws$  Número de Weissenberg

$\epsilon$  Parámetro perturbativo

$\varepsilon$  Parámetro asociado a efectos de rotación

$N_1'$  Primera diferencia de esfuerzos normales

## Resumen

El estudio de la tesis está centrado en modelar el proceso de recubrimiento; se utilizaron para modelar dicho proceso los siguientes fluidos:

- Fluido newtoniano
- Fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional
- Fluido maxwelliano con derivada convectiva codeformacional
- Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta

Uno de los objetivos es el de analizar y estimar el efecto de la viscoelasticidad (mediante el uso de ecuaciones constitutivas) y de la validez de la aproximación de lubricación en estos sistemas.

En la primera parte de la tesis se muestra el desarrollo del problema con el fluido newtoniano, el cual fue la base para el desarrollo de los demás modelos.

Para el desarrollo del proceso con los fluidos maxwellianos se utilizó la aproximación de lubricación, la cual considera que en el proceso no existen esfuerzos normales, para ello se utilizaron valores del número de Weissenberg en un rango de  $10^{-7}$  a  $10^{-2}$  y se demostró que la aproximación de lubricación se cumple.

En la resolución del problema con los fluidos maxwellianos se utilizó la técnica de “métodos perturbativos”, donde se usaron perturbaciones regulares, que asocian un parámetro pequeño que es el que se va a perturbar en el desarrollo del problema, el parámetro debe ser menor que la unidad; en el problema el parámetro fue el número de Weissenberg elevado al cuadrado.

Finalmente se compararon los comportamientos al utilizar los diferentes tipos de fluidos y se generalizó un modelo para fluidos maxwellianos que permite variar los efectos rotatorios.

## Objetivos

- I. Modelar el proceso de recubrimiento con fluidos newtonianos y no newtonianos viscoelásticos.
- II. Comparar las diferencias que se presentan en la ecuación constitutiva al utilizar diversos tipos de derivadas convectivas.
- III. Evaluar la contribución de la viscoelasticidad durante el proceso de recubrimiento.
- IV. Estimar la validez de la aproximación de lubricación

## 1. Introducción

El proceso de recubrimiento es utilizado principalmente en industrias como la de pigmentos, papel, plásticos, metales y fibras textiles son algunas de las más importantes (Ref.1 y18). Debido a que recubrir es una manera de proteger objetos o superficies que se venden o son de interés para la industria.

Estos son algunos ejemplos en donde se utiliza el recubrimiento:

- Al papel o al cartón se le puede recubrir con un adhesivo.
- Las películas celulósicas, que son utilizadas en el revestimiento de una fotografía
- Películas plásticas (como en el revestimiento de la superficie magnética de la cinta de grabación).
- En fibras textiles se puede recubrir para evitar que al derramarse un líquido sobre ella no se humedezca o se moje.
- En láminas de metal (a la que un polímero puede ser recubierto para producir un papel de aluminio laminado de condensador)

El proceso de recubrimiento es un proceso en el cual un líquido es aplicado de manera continua a una superficie en movimiento a fin de producir una aplicación uniforme del fluido sobre o dentro de la superficie. Existen diversos tipos de recubrimiento tales como:

- Recubrimiento con rodillo aplicador
- Recubrimiento de contacto
- Recubrimiento de placa
- Recubrimiento de retirada
- Recubrimiento de extrusión
- Recubrimiento de cortina

Este trabajo se centra en el “rodillo aplicador” porque el desarrollo de las ecuaciones constitutivas se resuelve de forma analítica y con ello se obtiene la información física del problema.

Este tipo de problemas permiten conocer mejor una de las formas con la cual se procesan los polímeros ya que al conocer la física que los comprende, se pueden conocer las variables que son más importantes en el proceso.

El análisis y desarrollo de este trabajo cuantifica cual es la sensibilidad de modificar parámetros y variables del proceso de recubrimiento para el rodillo aplicador, dicho análisis de sensibilidad se hace mediante la simulación del proceso a diferentes condiciones.

## 2. Antecedentes teóricos

El recubrimiento es un proceso en el cual un líquido es aplicado de manera continua a una superficie en movimiento a fin de producir una aplicación uniforme del fluido sobre o dentro de la hoja.

Como se mencionó en la introducción el desarrollo de la tesis se centra en el rodillo aplicado el cual consiste en:

Rodillo aplicador

Un rodillo inferior recoge líquido y lo lleva hacia un segundo rodillo. El material a recubrir es presionado entre los dos rodillos; la cantidad de recubrimiento depende de las propiedades del fluido y del espacio entre los rodillos.

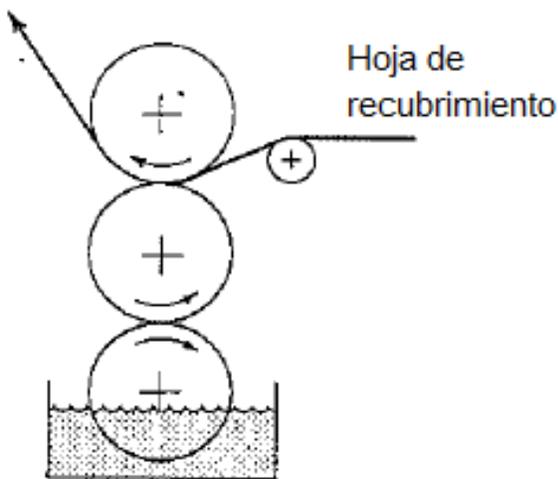


Figura 1. Rodillo Aplicador (Ref.1)

### 3. Desarrollo y análisis del problema con fluido newtoniano

#### 3.1 Recubrimiento con fluido newtoniano

Se tiene un fluido newtoniano que es transportado por una superficie en movimiento, que al llegar a la zona donde se encuentra el rodillo parte de este fluido es recogido por adherencia, el tipo de flujo que se tiene es de corte.

Se realiza el análisis del proceso de recubrimiento, en la figura 1 se muestra cómo es el proceso, que geometría se usará y qué variables caracterizan en particular al sistema:

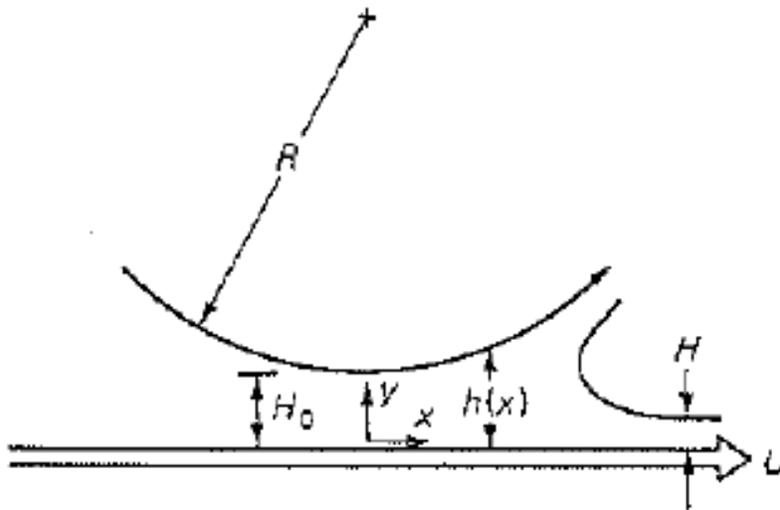


Figura 2. Proceso de Recubrimiento Newtoniano (Ref.1)

La ecuación dinámica a la que se llega, al considerar que el proceso es isotérmico y que existen las fuerzas viscosas, se obtiene:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} \quad (\text{Ec.1})$$

Las variables adimensionales asociadas para este proceso es el siguiente:

$$\xi = \frac{x}{(RH_0)^{\frac{1}{2}}} \quad \eta = \frac{y}{H_0} \quad \varphi = \frac{u_x}{U} \quad P = \frac{\rho H_0^{\frac{3}{2}}}{\mu U R^{\frac{1}{2}}}$$

Se observa que existe una relación entre las escalas de longitud ( $H_0$  y  $R$ ), en la variable adimensional asociada a la coordenada  $x$ , esta variable es la más importante ya que de ella depende el proceso de contracción, recubrimiento y expansión; se observa que la relación entre la longitud del radio del rodillo y el espesor de recubrimiento están precisamente en función de estas dos escalas de longitud.

La variable adimensional para la presión se encuentra en función de la relación entre la presión generada por el rodillo y la fuerza viscosa, además de que tiene asociada un factor de caracterización geométrica  $\left(\frac{H_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; se toma en cuenta que el gradiente de presión está en función de la variable  $x$ , que ya se sabe que es la variable más importante que relaciona lo que ya se mencionó en el párrafo anterior.

Se realiza la adimensionalización de la Ec.1

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dP} \frac{dP}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{\mu UR^{\frac{1}{2}}}{H_0^{\frac{3}{2}}} \frac{dP}{d\xi} \frac{1}{R^{\frac{1}{2}} H_0^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{dy} = \frac{U}{H_0^2} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2}$$

Con lo que la ecuación adimensional queda

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = \frac{dP}{d\xi} \quad (\text{Ec.2})$$

Se resuelve la Ec.1 como se muestra a continuación

$$\mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\int d \left( \frac{du_x}{dy} \right) = \int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} dy$$

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1$$

$$\int du_x = \int \left( \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \right) dy$$

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + c_1 y + c_2$$

Se adimensionaliza

$$\varphi = \frac{u_x}{U} = \frac{\eta^2 H_0 \mu U}{2\mu U H_0} \frac{dP}{d\xi} + C_1 \eta + C_2$$

Con lo que queda la distribución de velocidades adimensional como sigue:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{dP}{d\xi} \right) \eta^2 + c_1 \eta H_0 + c_2 \quad (\text{Ec.3})$$

Se utilizan las condiciones de frontera siguientes

$$\varphi = 1 \quad \eta = 0 \quad y \quad \varphi = 0 \quad \eta = \hbar(\xi)$$

$$\text{Donde } \hbar(\xi) = \frac{h(x)}{H_0} = 1 + \frac{1}{2} \xi^2 \quad \forall \frac{H_0}{R} \ll 1 \quad (\text{Ec.4})$$

Se aplican la condición de frontera  $\varphi = 1 \quad \eta = 0$

$$1 = C_2 + C_1(0)H_0 + \frac{0}{2} \frac{dP}{d\xi}$$

$$\therefore C_2 = 1$$

Ahora se aplica la segunda condición de frontera  $\varphi = 0 \quad \eta = \hbar(\xi)$

$$0 = \frac{\hbar^2(\xi)}{2} \frac{dP}{d\xi} + C_1 \hbar(\xi) H_0 + 1$$

$$C_1 = -\frac{\hbar^2(\xi)}{2H_0 \hbar(\xi)} \frac{dP}{d\xi} - \frac{1}{H_0 \hbar(\xi)}$$

$$\therefore C_1 = -\frac{\hbar(\xi) dP}{2H_0 d\xi} - \frac{1}{H_0 \hbar(\xi)}$$

$$\varphi = \frac{\eta^2 dP}{2 d\xi} - \frac{\hbar(\xi)}{2H_0} \eta H_0 \frac{dP}{d\xi} - \frac{\eta H_0}{H_0 \hbar(\xi)} + 1$$

$$\varphi = \frac{\eta^2 dP}{2 d\xi} - \frac{\hbar(\xi) dp}{2 d\xi} - \frac{\eta}{\hbar(\xi)} + 1$$

Se factoriza y se obtiene que la distribución de velocidades es:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} (\eta^2 - \hbar \eta) - \frac{\eta}{\hbar} + 1 \quad (\text{Ec.5})$$

El flujo volumétrico está definido como (Ref. 1 y 2)

$$Q = W \int_0^{h(x)} u_x du$$

Pero se calcula el flujo volumétrico adimensional en el plano xy porque se está trabajando de forma adimensional por tanto se tiene es:

$$\lambda = \frac{Q}{UWH_0} = \int_0^{\hbar} \varphi d\eta \quad (\text{Ec.6})$$

$$\lambda = \int_0^{\hbar} \left( \frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} (\eta^2 - \hbar(\xi)\eta) - \frac{\eta}{\hbar} + 1 \right) d\eta$$

$$\lambda = \left( \frac{\eta^3}{6} \frac{dP}{d\xi} - \frac{\hbar(\xi)\eta^2}{4} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\eta^2}{2} + \eta \right) \Big|_0^{\hbar}$$

$$\lambda = \frac{\hbar^3}{6} \frac{dP}{d\xi} - \frac{\hbar^3}{4} \frac{dP}{d\xi} - \frac{\hbar^2}{2} + \hbar$$

Finalmente queda que el flujo adimensional es:

$$\lambda = \int_0^{\hbar} \varphi d\eta = \hbar - \frac{1}{12} \left( \frac{dP}{d\xi} \right) \hbar^3 - \frac{\hbar^2}{2} \quad (\text{Ec.7})$$

$$\frac{\hbar^3}{12} \frac{dP}{d\xi} = \hbar - \lambda - \frac{\hbar^2}{2}$$

Se tiene entonces que el gradiente de presiones es:

$$\frac{dP}{d\xi} = 12 \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} - \frac{6}{\hbar} \quad (\text{Ec.8})$$

$$\int dP = \int_{-\xi_0}^{\xi} \left( 12 \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} - \frac{6}{\hbar} \right) d\xi$$

Por lo que la presión es

$$P(\xi) = 12 \int_{-\xi_0}^{\xi} \left( \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} - \frac{1}{2\hbar} \right) d\xi \quad (\text{Ec.9})$$

Se realiza el análisis en el punto de separación, que se muestra en la siguiente figura:

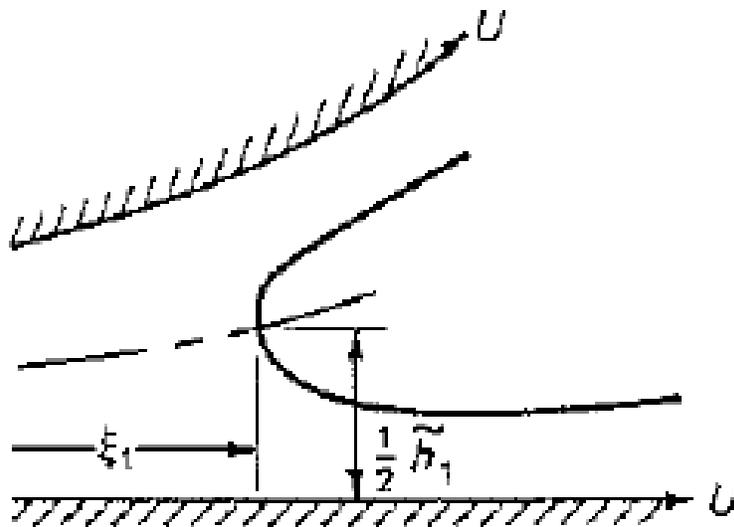


Figura 3. Flujo volumétrico. (Ref.1)

Por lo que el flujo volumétrico queda como:

$$Q = 2UH \quad (\text{Ec.10})$$

El dos proviene de multiplicar la mitad del flujo en el punto de separación, ya que se va a considerar que la mitad se utiliza para recubrir (parte inferior) y el excedente se reutiliza (parte superior que se lleva el rodillo).

Por lo que el flujo volumétrico adimensional queda de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{2H}{H_0} \quad (\text{Ec.11})$$

Se calcula la distribución de velocidades en el punto de separación como sigue

$$\varphi = 6 \left( \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} \right) \left( \frac{1}{4} \hbar^2 - \frac{\hbar \hbar(\xi)}{2} \right) - \frac{\hbar}{2\hbar} + 1 = 0$$

$$\varphi = 6 \left( \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} \right) \left( \frac{1}{4} \hbar^2 - \frac{\hbar^2(\xi)}{2} \right) - \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{6}{4} \hbar^2 \left( \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} \right) - 3 \hbar^2 \left( \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} \right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\hbar - \lambda}{\hbar} \right) - 3 \left( \frac{\hbar - \lambda}{\hbar} \right) + \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{Ec.12})$$

Se obtiene entonces que

$$\varphi = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\hbar - \lambda}{\hbar} \quad (\text{Ec.13})$$

De donde

$$-\frac{3}{2} \frac{\hbar_1}{\hbar_1} + \frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{\hbar_1} = -\frac{1}{2} \quad (\text{Ec.14})$$

$$\frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{\hbar_1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \quad (\text{Ec.15})$$

$$\frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{\hbar_1} = \frac{3}{2} \quad (\text{Ec.16})$$

$$\frac{\lambda_1}{\hbar_1} = 1 \quad (\text{Ec.17})$$

Por tanto:

$$\hbar_1 = 1 + \frac{1}{2} \xi^2 = \lambda \quad (\text{Ec.18})$$

Por lo que la presión en el punto de separación, usando la condición  $-\xi_0 = -\infty$  en el límite inferior es:

$$P(\xi) = \frac{3}{4} \left( -\frac{16\lambda\xi}{(2+\xi^2)^2} + \frac{4(4-3\lambda)\xi}{2+\xi^2} - \sqrt{2}(44+3\lambda) \left( \pi + 2 \tan^{-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \quad (\text{Ec.19})$$

Para obtener la (Ec.19) se utilizó Wolfram Mathematica 9.

Se sabe que en la región de separación (Ref.1), la película de recubrimiento se divide cuando la velocidad  $u=0$  y la presión  $P=0$ . Por lo que en la (Ec.14) se reemplaza  $\xi$  por  $\xi_1(\lambda)$  utilizando la (Ec.13), se iguala  $P(\xi_1)$  y a cero, se obtiene  $\lambda_0$  el cual es:

$$\lambda_0 = 0.43 \quad (\text{Ec.20})$$

Greener y Middleman en 1975 (Ref.1), proponen un parámetro dimensional, para describir la región de separación, el cual contempla los efectos viscosos y la tensión superficial, el cual es:

$$N_1 = \frac{\vartheta}{\mu U} \left( \frac{H_0}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ec.21})$$

Se observa que incluye la relación del efecto causado por la tensión superficial con respecto a los efectos viscosos así como el factor geométrico.

Se sabe que  $\lambda_0$  es un valor característico en el límite de la desaparición de  $N_1$  (Ref.1 y16).

En la mayoría de los sistemas de recubrimiento industrial  $N_1$ , no será mayor que la unidad, por tanto la (Ec.20) propone una estimación útil de  $\lambda$  (Ref.1 y 7).

Una vez que  $\lambda$  se conoce, la distribución de la presión se calcula con la Ec.19. La distribución de velocidades se calcula con la Ec. 5. Con ésta se puede encontrar la fuerza y las fuerzas del rodillo / hoja de separación, (y por tanto la potencia) para girar el rodillo y arrastre la hoja de recubrimiento.

La fuerza del rodillo / hoja de separación se da por:

$$F = W \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx = \frac{\mu URW}{H_0} \int_{-\infty}^{\xi_1} P(\xi) d\xi \quad (\text{Ec.22})$$

Para  $\lambda_0 = 0.43$

$$\frac{FH_0}{\mu URW} = 0.87 \quad (\text{Ec.23})$$

#### 4. Fluidos viscoelásticos

Existe una gran variedad de fluidos cuya estructura presenta alta complejidad, entre los cuales se encuentra las disoluciones poliméricas, algunos fluidos biológicos, suspensiones, pastas, entre otros (Ref.24). En estos, a diferencia de los fluidos newtonianos donde la viscosidad es independiente del gradiente de velocidad; la viscosidad es función de éste y en general los esfuerzos de un instante dado dependerán de la historia de las deformaciones y de los gradientes de velocidad.

Para el estudio de disoluciones poliméricas uno de los modelos más simple que provee una descripción macroscópica de disoluciones poliméricas, lo constituye el modelo de Oldroyd-B lineal (Ref.28). El mismo modelo describe comportamientos viscoelásticos básicos de líquidos incompresibles con viscosidad constante y tiempos de relajación y retardamiento constante.

El flujo de fluidos viscoelásticos a través de contracciones – expansiones es un flujo que ha llamado la atención desde los últimos treinta años, debido a su importancia en la industria de procesamiento de polímeros, como son extrusión, recubrimiento, inyección, entre otros (Ref. 8 y 13).

Las soluciones poliméricas son fluidos viscoelásticos que presentan una variedad de propiedades reológicas, las cuales son responsables de interesantes fenómenos en condiciones de flujo. Estos fluidos exhiben fenómenos como adelgazamiento viscoso, comportamientos no isotrópicos, diferencias en los esfuerzos normales distintas de cero, la presencia de esfuerzo normal en flujos de corte y una resistencia significativa a la deformación extensional (Ref.6 y 14).

Los fluidos viscoelásticos presentan resistencia a fluir a través de secciones transversales reducidas, Szabo atribuyó este fenómeno al incremento en la caída de presión y a la formación de vórtices a la entrada de la contracción (Ref.22).

Rothstein y McKinley (Ref. 4) establecieron que en el proceso de contracción – expansión, el fluido experimenta esfuerzo de corte en las zonas cercanas a las paredes, un alargamiento extensional uniaxial a lo largo de la línea central a la entrada de la contracción, y posteriormente, una relajación biaxial a la salida de la misma. Por lo anterior, en el flujo a través de contracciones – expansiones hay regiones de flujo extensional y de corte.

McKinley y Sridhar (Ref.5) establecieron que los fluidos extensionales son irrotacionales, por lo tanto, en ellos las moléculas se extenderán y se alinearán mientras se encuentren en ese régimen de flujo.

#### 4.1 Modelo de Oldroyd-B

En el modelo de Oldroyd-B la ecuación constitutiva (Ref.25) viene dada por

$$\underline{\underline{\tau}} + \lambda \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial t} = \eta_0 \left( \underline{\underline{D}} + \lambda \frac{\eta_s}{\eta_0} \frac{\partial \underline{\underline{D}}}{\partial t} \right) \quad (\text{Ec.24})$$

Donde  $\underline{\underline{\tau}}$  es el tensor de esfuerzo,  $\lambda$  es una constante con dimensiones de tiempo y tanto  $\eta_0$  como  $\eta_s$  son las viscosidades del polímero y del disolvente. El tensor  $\underline{\underline{D}}$  es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidades

$$D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (\text{Ec.25})$$

De la expresión se infiere que para flujos estacionarios de baja rapidez de deformación tiene un periodo muy grande comparado con  $\lambda$ , la disolución se comporta como un fluido newtoniano cuya viscosidad es la suma de la viscosidad del disolvente  $\eta_s$  y del polímero  $\eta_0$ . Si por otra parte el periodo de los esfuerzos es del orden del tiempo de relajación  $\lambda$  y la viscosidad del polímero es mucho mayor que la del disolvente, el flujo se comporta como un fluido de Maxwell.

Por el contrario, cuando los esfuerzos tienen un período muy pequeño comparado con  $\lambda$ , y si se cumple además  $\frac{\lambda \eta_s}{\tau \eta_0} \ll 1$ , el fluido responderá como un sólido de Hooke, mientras que si este número es mucho mayor que la unidad, el líquido actuará como un newtoniano, de viscosidad igual a la del disolvente. La ecuación (Ec.24) contiene como casos particulares las correspondientes al modelo de Maxwell y de Newton que se obtienen al tomar los límites  $\eta_s \rightarrow 0$  y  $\lambda \rightarrow 0$ , respectivamente.

En los últimos años ha crecido el interés por el estudio del comportamiento de los fluidos con propiedades viscoelásticas. Este interés viene dado porque los modelos viscoelásticos se ajustan a los resultados experimentales obtenidos en muchos fluidos poliméricos. Los fluidos viscoelásticos presentan a la misma vez características de los sólidos elásticos y los fluidos viscosos.

A continuación se desarrolla el modelo de Oldroyd-B

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{Ec.26})$$

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} \right) = \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} \quad (\text{Ec.27})$$

$$\underline{\tau} = -p \underline{I} + \eta \left( \underline{\nabla} \underline{u} + (\underline{\nabla} \underline{u})^T \right) + G \underline{D} \quad (\text{Ec.28})$$

$$\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{D} - \underline{D} \cdot \underline{\nabla} \underline{u} - (\underline{\nabla} \underline{u})^T \cdot \underline{D} = -\frac{1}{\sigma} (\underline{D} - \underline{I}) \quad (\text{Ec.29})$$

Donde  $\underline{D}$  es el tensor simétrico

## 4.2 Flujo cortante

Se supone ahora que el fluido a recubrir va a llevar a cabo un flujo cortante, por tanto, la distribución de velocidades dependerá de:

$$\underline{u} = (\dot{\gamma}(t)y, 0, 0) \quad (\text{Ec.30})$$

Este es el caso general y para el problema que se va a desarrollar la rapidez de deformación es  $\frac{H_0}{L}$ .

Se cumple entonces la ecuación de continuidad.

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} \quad (\text{Ec.31})$$

El tensor  $\underline{\nabla}u$  es

$$\underline{\nabla}u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.32})$$

Entonces

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} -p & \eta\dot{\gamma}(t) & 0 \\ \eta\dot{\gamma}(t) & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + G\underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.33})$$

y por tanto se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \omega_{xx} & D_{xy} & 0 \\ \omega_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\gamma}D_{xy} & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}D_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\gamma}D_{xy} & \dot{\gamma}D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} D_{xx} - 1 & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.34})$$

### 4.3 Flujo cortante estable

En este tipo de flujos se tiene que  $\dot{\gamma}$  es constante. Por lo tanto ya no hay dependencia del tiempo.

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} = 0 \quad (\text{Ec.35})$$

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} -p & \eta\dot{\gamma} & 0 \\ \eta\dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + G\underline{\underline{\omega}} \quad (\text{Ec.36})$$

$$-\begin{pmatrix} \dot{\gamma}D_{xy} & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}D_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\gamma}D_{xy} & \dot{\gamma}D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} D_{xx} - 1 & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.37})$$

En la última parte de la ecuación para los componentes de  $\underline{\underline{D}}$ . Se obtienen tres ecuaciones escalares que son las siguientes:

$$-\dot{\gamma}D_{xy} - \dot{\gamma}D_{xy} = -\frac{1}{\tau}(D_{xx} - 1) \quad (\text{Ec.38})$$

$$-\dot{\gamma}D_{yy} = -\frac{1}{\tau}D_{xy} \quad (\text{Ec.39})$$

$$0 = D_{yy} - 1 \quad (\text{Ec.40})$$

Las soluciones a las ecuaciones son:

$$D_{yy} = 1 \quad D_{xy} = \dot{\gamma}\sigma \quad D_{xx} = 1 + 2\dot{\gamma}^2\sigma^2 \quad (\text{Ec.41})$$

Por tanto el esfuerzo total queda

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} -p + G + 2G\dot{\gamma}^2\sigma^2 & (\eta + G\sigma)\dot{\gamma} & 0 \\ (\eta + G\sigma)\dot{\gamma} & -p + G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.42})$$

La presencia de polímeros produce cambios al tensor de esfuerzos.

Esta diferencia se llama la primera diferencia del tensor de esfuerzos.

$$N_1' = \tau_{xx} - \tau_{yy} = 2G\sigma^2\dot{\gamma}^2 \quad (\text{Ec.43})$$

#### 4.4 Reología lineal

Regresando al flujo cortante con dependencia del tiempo se tiene que nuevamente las siguientes ecuaciones:

$$\underline{u} = (\dot{\gamma}(t)y, 0, 0) \quad (\text{Ec.44})$$

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} \quad (\text{Ec.45})$$

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} -p & \eta\dot{\gamma}(t) & 0 \\ \eta\dot{\gamma}(t) & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + G \underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.46})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\gamma}D_{xy} & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}D_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\gamma}D_{xy} & \dot{\gamma}D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} D_{xx} - 1 & D_{xy} & 0 \\ D_{xy} & D_{yy} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.47})$$

Se establece para el proceso que:

$$\dot{\gamma}(t) = \alpha \omega \cos(\omega t) \quad (\text{Ec.48})$$

Se va a suponer que el movimiento se inicia en  $t = 0$ . Antes de que no hay flujo de modo que el fluido se relajó y  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}}$ .

Para realizar el análisis de la ecuación constitutiva se tomaran las ecuaciones de  $D_{xy}$  y  $D_{yy}$ .

$$\frac{\partial D_{xy}}{\partial t} - \dot{\gamma}D_{yy} = -\frac{1}{\sigma} \quad (\text{Ec.49})$$

$$\frac{\partial D_{xy}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma}D_{xy} = \alpha \omega \cos(\omega t) \quad (\text{Ec.50})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ D_{xy} e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)} \right] = \alpha \omega \cos(\omega t) e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)} \quad (\text{Ec.51})$$

Se resuelve la integral por el método integración por partes, entonces queda:

$$I = \int_0^t \alpha \omega \cos(\omega t') e^{\left(\frac{t'}{\sigma}\right)} dt' \quad (\text{Ec.52})$$

$$= [\alpha \omega \sigma \cos(\omega t') e^{\left(\frac{t'}{\sigma}\right)}]_0^t + \int_0^t \alpha \omega^2 \sigma \cos(\omega t') e^{\left(\frac{t'}{\sigma}\right)} dt' \quad (\text{Ec.53})$$

$$= [\alpha \omega \sigma \cos(\omega t') e^{\left(\frac{t'}{\sigma}\right)}]_0^t + [\alpha \omega^2 \sigma^2 \sin(\omega t') e^{\left(\frac{t'}{\sigma}\right)}]_0^t - \int_0^t \alpha \omega^3 \sigma^2 \cos(\omega t') e^{\left(\frac{t'}{\sigma}\right)} dt' \quad (\text{Ec.54})$$

$$= \alpha \omega \sigma \cos(\omega t) e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)} + \alpha \omega^2 \sigma^2 \sin(\omega t) e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)} - \alpha \omega \sigma - \alpha \omega^2 I \quad (\text{Ec.55})$$

Finalmente la expresión de  $\tau_{xy}$  es:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{1+\omega^2\sigma^2} \left( \alpha \omega \sigma \cos(\omega t) e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)} + \sin(\omega t) - \alpha \omega \sigma e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)} \right) \quad (\text{Ec.56})$$

Para tiempos largos, el término  $e^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)}$  se hace un término muy pequeño, así que lo vamos a despreciar. El esfuerzo cortante total de  $\tau_{xy}$  queda:

$$\tau_{xy} = \left[ \eta + \frac{G\sigma}{1+\omega^2\sigma^2} \right] \dot{\gamma}(t) + \frac{G\omega^2\sigma^2}{1+\omega^2\sigma^2} \gamma(t) \quad (\text{Ec.57})$$

Así, las funciones lineales para el fluido de Oldroyd-B son:

$$G' = \frac{G\omega^2\sigma^2}{1+\omega^2\sigma^2} \quad G'' = \eta\omega + \frac{G\omega\sigma}{1+\omega^2\sigma^2} \quad (\text{Ec.58})$$

#### 4.5 Flujo extensional

Por último, se tiene un flujo de extensión del tipo:

$$\underline{u} = (\dot{\epsilon}x, -\dot{\epsilon}y, 0) \quad (\text{Ec.59})$$

Una vez más, esto satisface conservación de la masa. Esta vez se tiene:

$$\underline{\nabla u} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.60})$$

Y el tensor  $\underline{\underline{\omega}}$  que es independiente de la posición y del tiempo queda

$$-\begin{pmatrix} \dot{\epsilon}D_{xx} & -\dot{\epsilon}D_{xy} & 0 \\ \dot{\epsilon}D_{xy} & -\dot{\epsilon}D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}D_{xx} & \dot{\epsilon}D_{xy} & 0 \\ \dot{\epsilon}D_{xy} & -\dot{\epsilon}D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sigma}(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{I}}) \quad (\text{Ec.61})$$

Entonces

$$D_{xx} = \frac{1}{1-2\dot{\epsilon}\sigma} \quad D_{xy} = 0 \quad D_{yy} = \frac{1}{1+2\dot{\epsilon}\sigma} \quad (\text{Ec.62})$$

Por tanto el tensor total es

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\dot{\epsilon} + \frac{E}{1-2\dot{\epsilon}\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -p - 2\eta\dot{\epsilon} + \frac{E}{1+2\dot{\epsilon}\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.63})$$

Puesto que es un fluido newtoniano

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -p - 2\eta\dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.64})$$

Se puede definir una viscosidad extensional como

$$\eta_{ext} = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{4\dot{\epsilon}} \quad (\text{Ec.65})$$

El fluido Oldroyd-B tiene una viscosidad extensional

$$\eta_{ext} = \eta + \frac{E\sigma}{(1-4\dot{\epsilon}^2\sigma^2)} \quad (\text{Ec.66})$$

## 5. Desarrollo y análisis del problema con fluidos no newtonianos viscoelásticos

### 5.1 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional

$$\frac{d}{dx}(p - \tau_{yy}) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (\text{Ec.67})$$

Se considera que en el proceso de lubricación se cumple la siguiente condición:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \gg \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad (\text{Ec.68})$$

La solución de la ecuación es:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau_{xy}}{dy} \quad (\text{Ec.69})$$

Esta ecuación es muy parecida al caso del fluido puramente viscoso con un fluido no newtoniano. Se incluye un término de lubricación con lo que la (Ec.67) queda:

$$\underline{\underline{\tau}} + \theta_R \frac{\mathcal{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t} = \eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.71})$$

Se define la derivada convectiva de Jaumann (Ref.1), la cual se usará por ser un flujo con efectos rotacionales:

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \omega_{jm} \tau_{mi} - \frac{1}{2} \omega_{im} \tau_{mj} \quad (\text{Ec.72})$$

Se define el tensor rapidez de deformación ( $\underline{\underline{D}}$ ) y el tensor vorticidad ( $\underline{\underline{\omega}}$ )

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.73})$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.74})$$

Ahora se sustituyen las (Ec.72), (Ec.73) y (Ec.74) en la (Ec.71)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \theta_R \left( \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial z} - \right. \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} \\ \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} \\ \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} - \\
 & \left. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} \\ \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} \\ \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} \right) = \\
 & \eta_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{Ec.75}
 \end{aligned}$$

Se simplifican la (Ec.75) de acuerdo a las condiciones del problema y se sustituyen los términos del tensor de esfuerzos así como los del tensor antisimétrico

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \\
 & \frac{1}{2} \theta_R \left( \begin{pmatrix} 0\tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} + 0\tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tau_{yx} + 0\tau_{zx} \\ 0\tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} + 0\tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tau_{yy} + 0\tau_{zy} \\ 0\tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tau_{zz} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xz} + 0\tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tau_{zz} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tau_{yz} + 0\tau_{zz} \end{pmatrix} + \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} 0\tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tau_{zx} & 0\tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tau_{zy} & 0\tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tau_{zz} \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} + 0\tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} + 0\tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xz} + 0\tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \tau_{zz} \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tau_{yx} + 0\tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tau_{yy} + 0\tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \tau_{yz} + 0\tau_{zz} \end{pmatrix} \right) = \\
 & \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{Ec.76}
 \end{aligned}$$

Se simplifica la (Ec.76) quedando

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \left( \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & 0 \\ \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{Ec.77}
 \end{aligned}$$

Se suman las matrices de la (Ec.77)

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \begin{pmatrix} 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} & \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & 0 \\ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & -2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.78})$$

Se calculan los esfuerzos de la (Ec.77), mismos que ya incluyen el término de lubricación:

$$\tau_{xx} - \frac{1}{2} \theta_R 2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec.79})$$

$$\tau_{xx} = \theta_R \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec.80})$$

$$\tau_{xx} = -\tau_{yy} \quad (\text{Ec.81})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2} \theta_R \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.82})$$

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \theta_R \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{xx} - \tau_{yy}) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.83})$$

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \theta_R \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \left( \theta_R \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} + \theta_R \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} \right) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.84})$$

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \theta_R^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 (2\tau_{yx}) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.85})$$

$$\tau_{xy} \left( 1 + \theta_R^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.86})$$

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y}}{\left( 1 + \theta_R^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right)} \quad (\text{Ec.87})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (\text{Ec.88})$$

Se sustituye la (Ec.87) en la (Ec.80)

$$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2}{\left(1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right)} \quad (\text{Ec.89})$$

Se sustituye la (Ec.89) en la (Ec.81)

$$\tau_{yy} = -\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2}{\left(1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right)} \quad (\text{Ec.90})$$

Con la aproximación de lubricación tenemos que la ecuación dinámica se reduce a la forma:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

Que es precisamente la (Ec.69), ahora integrando se tiene que:

$$\int \tau_{xy} dy = \int \frac{dp}{dx} dy \quad (\text{Ec.91})$$

$$\tau_{xy} = y \frac{dp}{dx} + c_1 \quad (\text{Ec.92})$$

Sustituyendo en la (Ec.87)

$$y \frac{dp}{dx} + c_1 = \frac{\eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{Ec.93})$$

Se tiene la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$\frac{1}{\eta_0} \left( y \frac{dp}{dx} + c_1 \right) = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{Ec.94})$$

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso es el siguiente:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi \quad \frac{y}{H_0} = \eta \quad \frac{x}{L} = \xi \quad \frac{H_0^2 p}{\eta_0 UL} = P \quad W_S = \frac{\theta_R U}{H_0} \quad \kappa = \frac{H_1}{H_0}$$

El número de Weissenberg cuantifica los efectos viscoelásticos.

Se realiza la adimensionalización de la (Ec.94)

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{du_x}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = U \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dP} \frac{dP}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{\eta_0 UL}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi} \frac{1}{L} = \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi}$$

Sustituyendo en la (Ec.94)

$$\frac{1}{\eta_0} \left( \eta H_0 \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi} + c_1 \right) = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.95})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \left( \theta_R \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.96})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + W_S^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.97})$$

$$\eta \frac{dP}{d\xi} + \frac{H_0}{U \eta_0} c_1 = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + W_S^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.98})$$

Se va remplazar  $W_S^2$  por el parámetro  $\epsilon$  y se utilizará  $P' = \frac{dP}{d\xi}$  y  $C = \frac{H_0 c_1}{U \eta_0}$  es la constante de integración que proviene de la (Ec.93), a la que más adelante se dará solución a través de métodos perturbativos.

Con lo que la ecuación adimensional queda

$$\eta P' + C = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \epsilon \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.99})$$

Para resolver la (Ec.99) se utilizará la teoría de métodos perturbativos, que tiene como base las siguientes ideas:

1. Se debe restringir la solución para valores pequeños de  $\epsilon$ , ya que se sabe que (Ec.87) tiene validez limitada.
2. Cuando el parámetro  $\epsilon \rightarrow 0$  se obtiene la solución del fluido newtoniano.
3. Por pequeño que sea  $\epsilon$  se puede esperar que las funciones  $\varphi(\xi, \eta, \epsilon)$  y  $P(\xi, \epsilon)$  puedan apartarse de su límite (newtoniano) dando así que el comportamiento dependa de la  $\epsilon$  (Ref.1).

Se utiliza el siguiente polinomio con una pequeña dependencia de  $\epsilon$  para dar solución a la (Ec.99), donde  $\varphi_0$  es la solución del fluido newtoniano.

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \varphi_k \quad (\text{Ec.100})$$

La solución de perturbación es

$$\varphi = \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 + \epsilon^2 \varphi_2 + \dots \quad (\text{Ec.101})$$

$$P = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \dots \quad (\text{Ec.102})$$

$$C = C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots \quad (\text{Ec.103})$$

De la (Ec.99) se despeja  $\frac{d\varphi}{d\eta}$  y se sustituye las (Ec. 101, Ec.102y Ec.103)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = (\eta P' + C) \cdot \left(1 + \epsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right) \quad (\text{Ec.104})$$

$$\frac{d\varphi_0}{d\eta} + \epsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \epsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots = \left[1 + \epsilon \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta} + \epsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \epsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots\right)^2\right] \cdot [\eta P'_0 + \epsilon \eta P'_1 + \epsilon^2 \eta P'_2 + C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots] \quad (\text{Ec.105})$$

Se igualan los términos con factores comunes de  $\epsilon$

Potencia cero  $\frac{d\varphi_0}{d\eta} = \eta P'_0 + C_0 \quad (\text{Ec.106})$

Primer potencia  $\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^2 (\eta P'_0 + C_0) \quad (\text{Ec.107})$

Y así sucesivamente. Las condiciones de frontera que se requieren son las siguientes:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{en } \eta = \kappa + (1 - \kappa)\xi = \hbar(\xi) \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases}$$

Estas condiciones son válidas para cualquier  $\epsilon$ . De tal forma que

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{en } \eta = \kappa + (1 - \kappa)\xi \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases}$$

Y todo  $\varphi_k = 0$  en ambas condiciones de frontera para  $k > 0$ . Ahora se resuelve la (Ec. 106)

$$\int d\varphi_0 = \int (\eta P'_0 + C_0) d\eta \quad (\text{Ec.108})$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\eta^2 P'_0 + \eta C_0 + C_{01} \quad (\text{Ec.109})$$

En  $\varphi_0 = 1$   $\eta = 0$

$$1 = \frac{1}{2}0^2 P'_0 + 0C_0 + C_{01} \quad (\text{Ec.110})$$

$$C_{01} = 1 \quad (\text{Ec.111})$$

Se evalúan las condiciones de frontera

$$\varphi_0 = 0 \quad \eta = \kappa + (1 - \kappa)\xi = \hbar$$

$$0 = \frac{1}{2}\hbar^2 P'_0 + C_0 \hbar + 1 \quad (\text{Ec.112})$$

$$C_0 \hbar = -\frac{1}{2}\hbar^2 P'_0 - 1 \quad (\text{Ec.113})$$

$$C_0 = -\frac{1}{2}\hbar P'_0 - \frac{1}{\hbar} \quad (\text{Ec.114})$$

Con lo que  $\varphi_0$  es

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\eta^2 P'_0 + \eta \left( -\frac{1}{2}\hbar P'_0 - \frac{1}{\hbar} \right) + 1 \quad (\text{Ec.115})$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}P'_0(\eta^2 - \hbar\eta) - \frac{\eta}{\hbar} + 1 \quad (\text{Ec.116})$$

Para encontrar el gradiente de presión se debe establecer la condición de conservación de masa, el cual tiene la siguiente forma

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{h(x)} u_x dy \quad \text{o} \quad \frac{H}{H_0} = \lambda = \int_0^{\hbar(\xi)} \varphi(\xi, \eta) d\eta \quad (\text{Ec.117})$$

Se considera que  $\lambda$  es el flujo volumétrico y el espesor de recubrimiento. Con lo que se puede expresar en la forma de la (Ec.100).

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon\lambda_1 + \epsilon^2\lambda_2 + \dots \quad (\text{Ec.118})$$

Y se deduce que

$$\lambda_k = \int_0^{\hbar} \varphi_k d\eta \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{Ec.119})$$

Se calcula  $\lambda_0$  para la ecuación de orden cero (newtoniano) y se obtiene también el valor de  $P'_0$

$$\lambda_0 = \int_0^{\hbar} \varphi_0 d\eta = \int_0^{\hbar} \left[ \frac{1}{2}P'_0(\eta^2 - \hbar\eta) - \frac{\eta}{\hbar} + 1 \right] d\eta \quad (\text{Ec.120})$$

$$\lambda_0 = \left[ \frac{1}{6}\eta^3 P'_0 - \frac{1}{4}\eta^2 \hbar P'_0 + \eta - \frac{\eta^2}{2\hbar} \right]_0^{\hbar} \quad (\text{Ec.121})$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{6}\hbar^3 P'_0 - \frac{1}{4}\hbar^3 P'_0 + \hbar - \frac{\hbar}{2} \quad (\text{Ec.122})$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{12}\hbar^3 P'_0 \quad (\text{Ec.123})$$

Se despeja de la (Ec.123)  $P'_0$

$$\lambda_0 - \frac{1}{2}\hbar = -\frac{1}{12}\hbar^3 P'_0 \quad (\text{Ec.124})$$

$$P'_0 = \frac{6}{\hbar^2} - \frac{12\lambda_0}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.125})$$

Al sustituir la (Ec. 116) por la condición  $\eta = \kappa + (1 - \kappa)\xi = \hbar$ , y al integrar la (Ec.116) como lo establece la (Ec.120), se tiene que para  $P_0(0) = P_0(1) = 0$ , se tiene que

$$\lambda_0 = \frac{\kappa}{1+\kappa} \quad (\text{Ec.126})$$

Para obtener una mejor aproximación se repite el método pero ahora para calcular el valor de  $\varphi_1$ , para ello se tiene que resolver la (Ec.107), se reescribe de la siguiente manera:

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right)^3 \quad (\text{Ec.127})$$

Se calcula  $\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \left(\eta P'_0 - \frac{1}{2}\hbar P'_0 - \frac{1}{\hbar}\right)^3 \quad (\text{Ec.128})$$

Se establece la siguiente constante para facilitar el algebra  $\psi = \frac{P'_0}{2}$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \left(\eta P'_0 - \frac{\hbar^2\psi+1}{\hbar}\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - 3(\eta^2 P_0'^2) \left(\frac{\hbar^2\psi+1}{\hbar}\right) + 3(\eta P_0') \left(\frac{\hbar^2\psi+1}{\hbar}\right)^2 - \left(\frac{\hbar^2\psi+1}{\hbar}\right)^3 \quad (\text{Ec.129})$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - 3\eta^2 P_0'^2 \hbar\psi - \frac{3\eta^2 P_0'^2}{\hbar} + 3(\eta P_0') \left(\hbar^2\psi^2 + 2\psi + \frac{1}{\hbar^2}\right) - \hbar^3\psi^3 - 3\hbar\psi^2 - \frac{3\psi}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.130})$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - 3\eta^2 P_0'^2 \hbar\psi - \frac{3\eta^2 P_0'^2}{\hbar} + 3\eta P_0' \hbar^2\psi^2 + 6\eta P_0'\psi + \frac{3\eta P_0'}{\hbar^2} - \hbar^3\psi^3 - 3\hbar\psi^2 - \frac{3\psi}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.131})$$

Sustituyendo la (Ec.131) en la (Ec.127) se obtiene

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \eta^3 P_0'^3 - 3\eta^2 P_0'^2 \hbar \psi - \frac{3\eta^2 P_0'^2}{\hbar} + 3\eta P_0' \hbar^2 \psi^2 + 6\eta P_0' \psi + \frac{3\eta P_0'}{\hbar^2} - \hbar^3 \psi^3 - 3\hbar \psi^2 - \frac{3\psi}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.132})$$

Se resuelve la (Ec.132)

$$\int d\varphi_1 = \int \left[ \eta P'_1 + C_1 + \eta^3 P_0'^3 - 3\eta^2 P_0'^2 \hbar \psi - \frac{3\eta^2 P_0'^2}{\hbar} + 3\eta P_0' \hbar^2 \psi^2 + 6\eta P_0' \psi + \frac{3\eta P_0'}{\hbar^2} - \hbar^3 \psi^3 - 3\hbar \psi^2 - \frac{3\psi}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^3} \right] d\eta \quad (\text{Ec.133})$$

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P_1'}{2} + C_1 \eta + \frac{\eta^4 P_0'^3}{4} - \eta^3 P_0'^2 \hbar \psi - \frac{\eta^3 P_0'^2}{\hbar} + \frac{3\eta^2 P_0' \hbar^2 \psi^2}{2} + 3\eta^2 P_0' \psi + \frac{3\eta^2 P_0'}{2\hbar^2} - \eta \hbar^3 \psi^3 - 3\eta \hbar \psi^2 - \frac{3\eta \psi}{\hbar} - \frac{\eta}{\hbar^3} + C_{02} \quad (\text{Ec.134})$$

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P_1'}{2} + C_1 \eta + 2\eta^4 \psi^3 - 4\eta^3 \hbar \psi^3 - \frac{4\eta^3 \psi^2}{\hbar} + 3\eta^2 \hbar^2 \psi^3 + 6\eta^2 \psi^2 + \frac{3\eta^2 \psi}{\hbar^2} - \eta \hbar^3 \psi^3 - 3\eta \hbar \psi^2 - \frac{3\eta \psi}{\hbar} - \frac{\eta}{\hbar^3} + C_{02} \quad (\text{Ec.135})$$

Utilizando las siguientes condiciones de frontera  $\varphi_1 = 0$  cuando  $\eta = 0$  y  $\eta = \hbar$

Se encuentra el valor de las constantes cuando  $\varphi_1 = 0$   $\eta = 0$

$$0 = \frac{0^2 P_1'}{2} + C_1 0 + \frac{0^4 P_0'^3}{4} - 0^3 P_0'^2 \hbar \psi - \frac{0^3 P_0'^2}{\hbar} + \frac{3 \cdot 0^2 P_0' \hbar^2 \psi^2}{2} + 3 \cdot 0^2 P_0' \psi + \frac{3 \cdot 0^2 P_0'}{2\hbar^2} - 0 \hbar^3 \psi^3 - 3 \cdot 0 \hbar \psi^2 - \frac{3 \cdot 0 \psi}{\hbar} - \frac{0}{\hbar^3} + C_{02} \quad (\text{Ec.136})$$

$$C_{02} = 0 \quad (\text{Ec.137})$$

Cuando  $\varphi_1 = 0$   $\eta = \hbar$

$$0 = \frac{\hbar^2 P'_1}{2} + C_1 \hbar + \frac{\hbar^4 P_0'^3}{4} - \hbar^3 P_0'^2 \hbar \psi - \frac{\hbar^3 P_0'^2}{\hbar} + \frac{3\hbar^2 P_0' \hbar^2 \psi^2}{2} + 3\hbar^2 P_0' \psi + \frac{3\hbar^2 P_0'}{2\hbar^2} - \hbar \hbar^3 \psi^3 - 3\hbar \hbar \psi^2 - \frac{3\hbar \psi}{\hbar} - \frac{\hbar}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.138})$$

$$0 = \frac{\hbar^2 P'_1}{2} + C_1 \hbar + \frac{\hbar^4 P_0'^3}{4} - \hbar^4 P_0'^2 \psi - \hbar^2 P_0'^2 + \frac{3\hbar^4 P_0' \psi^2}{2} + 3\hbar^2 P_0' \psi + \frac{3P_0'}{2} - \hbar^4 \psi^3 - 3\hbar^2 \psi^2 - 3\psi - \frac{1}{\hbar^2} \quad (\text{Ec.139})$$

$$C_1 \hbar = -\frac{\hbar^2 P'_1}{2} - \frac{\hbar^4 P_0'^3}{4} + \hbar^4 P_0'^2 \psi + \hbar^2 P_0'^2 - \frac{3\hbar^4 P_0' \psi^2}{2} - 3\hbar^2 P_0' \psi - \frac{3P_0'}{2} + \hbar^4 \psi^3 + 3\hbar^2 \psi^2 + 3\psi + \frac{1}{\hbar^2} \quad (\text{Ec.140})$$

$$C_1 = -\frac{\hbar P'_1}{2} - \frac{\hbar^3 P_0'^3}{4} + \hbar^3 P_0'^2 \psi + \hbar P_0'^2 - \frac{3\hbar^3 P_0' \psi^2}{2} - 3\hbar P_0' \psi - \frac{3P_0'}{2\hbar} + \hbar^3 \psi^3 + 3\hbar \psi^2 + \frac{3\psi}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \quad (\text{Ec.141})$$

$$C_1 = -\frac{\hbar P'_1}{2} - 2\hbar^3 \psi^3 + 4\hbar^3 \psi^3 + 4\hbar \psi^2 - 3\hbar^3 \psi^3 - 6\hbar \psi^2 - \frac{3\psi}{\hbar} + \hbar^3 \psi^3 + 3\hbar \psi^2 + \frac{3\psi}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} \quad (\text{Ec.142})$$

$$C_1 = -\frac{\hbar P'_1}{2} + \hbar \psi^2 + \frac{3\psi+1}{\hbar} \quad (\text{Ec.143})$$

Se sustituye en la (Ec.135) las constantes (Ec.137 y Ec.143)

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P'_1}{2} + \left( -\frac{\hbar P'_1}{2} + \hbar \psi^2 + \frac{3\psi+1}{\hbar} \right) \eta + 2\eta^4 \psi^3 - 4\eta^3 \hbar \psi^3 - \frac{4\eta^3 \psi^2}{\hbar} + 3\eta^2 \hbar^2 \psi^3 + 6\eta^2 \psi^2 + \frac{3\eta^2 \psi}{\hbar^2} - \eta \hbar^3 \psi^3 - 3\eta \hbar \psi^2 - \frac{3\eta \psi}{\hbar} - \frac{\eta}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.144})$$

Se distribuyen los términos

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P'_1}{2} - \frac{\eta \hbar P'_1}{2} + \eta \hbar \psi^2 + \frac{3\eta \psi}{\hbar} + \frac{\eta}{\hbar} + 2\eta^4 \psi^3 - 4\eta^3 \hbar \psi^3 - \frac{4\eta^3 \psi^2}{\hbar} + 3\eta^2 \hbar^2 \psi^3 + 6\eta^2 \psi^2 + \frac{3\eta^2 \psi}{\hbar^2} - \eta \hbar^3 \psi^3 - 3\eta \hbar \psi^2 - \frac{3\eta \psi}{\hbar} - \frac{\eta}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.145})$$

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P'_1}{2} - \frac{\eta \hbar P'_1}{2} + \eta \hbar \psi^2 + \frac{\eta}{\hbar} + 2\eta^4 \psi^3 - 4\eta^3 \hbar \psi^3 - \frac{4\eta^3 \psi^2}{\hbar} + 3\eta^2 \hbar^2 \psi^3 + 6\eta^2 \psi^2 + \frac{3\eta^2 \psi}{\hbar^2} - \eta \hbar^3 \psi^3 - 3\eta \hbar \psi^2 - \frac{\eta}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.146})$$

Se calcula el valor de  $\lambda_1$

$$\lambda_1 = \int_0^{\hbar} \varphi_1 d\eta = \int_0^{\hbar} \left[ \frac{\eta^2 P'_1}{2} - \frac{\eta \hbar P'_1}{2} + \eta \hbar \psi^2 + \frac{\eta}{\hbar} + 2\eta^4 \psi^3 - 4\eta^3 \hbar \psi^3 - \frac{4\eta^3 \psi^2}{\hbar} + 3\eta^2 \hbar^2 \psi^3 + 6\eta^2 \psi^2 + \frac{3\eta^2 \psi}{\hbar^2} - \eta \hbar^3 \psi^3 - 3\eta \hbar \psi^2 - \frac{\eta}{\hbar^3} \right] d\eta \quad (\text{Ec.147})$$

$$\lambda_1 = \left[ \frac{\eta^3 P'_1}{6} - \frac{\eta^2 \hbar P'_1}{4} + \frac{\eta^2 \hbar \psi^2}{2} + \frac{\eta^2}{2\hbar} + \frac{2\eta^5 \psi^3}{5} - \eta^4 \hbar \psi^3 - \frac{\eta^4 \psi^2}{\hbar} + \eta^3 \hbar^2 \psi^3 + 2\eta^3 \psi^2 + \frac{\eta^3 \psi}{\hbar^2} - \frac{\eta^2 \hbar^3 \psi^3}{2} - \frac{3\eta^2 \hbar \psi^2}{2} - \frac{\eta^2}{2\hbar^3} \right]_0^{\hbar} \quad (\text{Ec.148})$$

$$\lambda_1 = \frac{\hbar^3 P'_1}{6} - \frac{\hbar^2 \hbar P'_1}{4} + \frac{\hbar^2 \hbar \psi^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2\hbar} + \frac{2\hbar^5 \psi^3}{5} - \hbar^4 \hbar \psi^3 - \frac{\hbar^4 \psi^2}{\hbar} + \hbar^3 \hbar^2 \psi^3 + 2\hbar^3 \psi^2 + \frac{\hbar^3 \psi}{\hbar^2} - \frac{\hbar^2 \hbar^3 \psi^3}{2} - \frac{3\hbar^2 \hbar \psi^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2\hbar^3} \quad (\text{Ec.149})$$

$$\lambda_1 = \frac{\hbar^3 P'_1}{6} - \frac{\hbar^3 P'_1}{4} + \frac{\hbar^3 \psi^2}{2} + \frac{\hbar}{2} + \frac{2\hbar^5 \psi^3}{5} - \hbar^5 \psi^3 - \hbar^3 \psi^2 + \hbar^5 \psi^3 + 2\hbar^3 \psi^2 + \hbar \psi - \frac{\hbar^5 \psi^3}{2} - \frac{3\hbar^3 \psi^2}{2} - \frac{1}{2\hbar} \quad (\text{Ec.150})$$

$$\lambda_1 = -\frac{\hbar^3 P'_1}{12} + \frac{\hbar}{2} + \hbar \psi - \frac{\hbar^5 \psi^3}{10} - \frac{1}{2\hbar} \quad (\text{Ec.151})$$

Se calcula el valor de  $P_1$ , utilizando la (Ec.151)

$$\lambda_1 = -\frac{\hbar^3}{12} \frac{dP_1}{d\xi} + \frac{\hbar}{2} + \hbar \psi - \frac{\hbar^5 \psi^3}{10} - \frac{1}{2\hbar} \quad (\text{Ec.152})$$

$$\frac{dP_1}{d\xi} = -\frac{12\hbar}{2\hbar^3} - \frac{12\hbar \psi}{\hbar^3} + \frac{12\hbar^5 \psi^3}{10\hbar^3} + \frac{12}{2\hbar \hbar^3} + 12 \frac{\lambda_1}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.153})$$

$$\frac{dP_1}{d\xi} = -\frac{6}{\hbar^2} - \frac{12\psi}{\hbar^2} + \frac{6\hbar^2 \psi^3}{5} + \frac{6}{\hbar^4} + 12 \frac{\lambda_1}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.154})$$

$$\frac{dP_1}{d\xi} = -\frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{6P_0'}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} + \frac{6(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2 \frac{P_0'^3}{2}}{5} + \frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} + 12 \frac{\lambda_1}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} \quad (\text{Ec.155})$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{d\xi} = & -\frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{\left(\frac{36}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{72\lambda_0}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3}\right)}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} + \frac{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2 \left(\frac{18}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{36\lambda_0}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3}\right)^3}{5} + \\ & \frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} + 12 \frac{\lambda_1}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} \end{aligned} \quad (\text{Ec.156})$$

$$\int dP_1 = \int \left[ -\frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{\left(\frac{36}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{72\lambda_0}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3}\right)}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} + \frac{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2 \left(\frac{18}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{36\lambda_0}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3}\right)^3}{5} + \right. \\ \left. \frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} + 12 \frac{\lambda_1}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} \right] d\xi \quad (\text{Ec.157})$$

$$\begin{aligned} P_1 = & \frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)} + \frac{24}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} - \frac{36\lambda_0}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} - \frac{1296}{15(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} + \frac{7776}{20(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} - \\ & \frac{15552\lambda_0^2}{20(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} + \frac{10368\lambda_0^3}{30(\kappa+(1-\kappa)\xi)^6} - \frac{2}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} - 6 \frac{\lambda_1}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} + C_{03} \end{aligned} \quad (\text{Ec.158})$$

Se evalúan las condiciones de frontera de  $P_1 = 0 \quad \xi = 0$

$$0 = \frac{6}{(\kappa)} + \frac{24}{(\kappa)^3} - \frac{36\lambda_0}{(\kappa)^4} - \frac{1296}{15(\kappa)^3} + \frac{7776}{20(\kappa)^4} - \frac{15552\lambda_0^2}{20(\kappa)^4} + \frac{10368\lambda_0^3}{30(\kappa)^6} - \frac{2}{(\kappa)^3} - 6 \frac{\lambda_1}{(\kappa)^2} + C_{03} \quad (\text{Ec.159})$$

$$C_{03} = -\frac{6}{(\kappa)} + \frac{64.4}{(\kappa)^3} + \frac{36\lambda_0}{(\kappa)^4} + \frac{7776}{20(\kappa)^4} + \frac{15552\lambda_0^2}{20(\kappa)^4} - \frac{10368\lambda_0^3}{30(\kappa)^6} + 6 \frac{\lambda_1}{(\kappa)^2} \quad (\text{Ec.160})$$

$$\begin{aligned} P_1 = & \frac{6}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)} + \frac{24}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} - \frac{36\lambda_0}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} - \frac{1296}{15(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} + \frac{7776}{20(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} - \\ & \frac{15552\lambda_0^2}{20(\kappa+(1-\kappa)\xi)^4} + \frac{10368\lambda_0^3}{30(\kappa+(1-\kappa)\xi)^6} - \frac{2}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^3} - 6 \frac{\lambda_1}{(\kappa+(1-\kappa)\xi)^2} - \frac{6}{(\kappa)} + \frac{64.4}{(\kappa)^3} + \frac{36\lambda_0}{(\kappa)^4} + \frac{7776}{20(\kappa)^4} + \\ & \frac{15552\lambda_0^2}{20(\kappa)^4} - \frac{10368\lambda_0^3}{30(\kappa)^6} + 6 \frac{\lambda_1}{(\kappa)^2} \end{aligned} \quad (\text{Ec.161})$$

Se simplifica la (Ec.161) con lo que queda

$$P_1 = \frac{6\lambda_1 \zeta (\hbar^{-2} - \kappa^{-2})}{(1-\kappa)} - \frac{43.2\lambda_0^3 \zeta (\hbar^{-6} - \kappa^{-6})}{(1-\kappa)} + \frac{77.76\lambda_0^2 \zeta (\hbar^{-5} - \kappa^{-5})}{(1-\kappa)} - \frac{57.6\lambda_0 \zeta (\hbar^{-4} - \kappa^{-4})}{(1-\kappa)} + \frac{16.8\zeta (\hbar^{-3} - \kappa^{-3})}{(1-\kappa)}$$

Se sustituye  $\hbar = \kappa + (1 - \kappa)\xi$  y se obtiene el valor de  $\lambda_1$

$$\lambda_1 = \frac{7.2\lambda_0^3(1-\kappa^{-6})}{(1-\kappa^{-2})} - \frac{12.96\lambda_0^2(1-\kappa^{-5})}{(1-\kappa^{-2})} + \frac{9.6\lambda_0(1-\kappa^{-4})}{(1-\kappa^{-2})} - \frac{2.8(1-\kappa^{-3})}{(1-\kappa^{-2})} \quad (\text{Ec.162})$$

Se calcula la primera diferencia de esfuerzos normales

$$N_1' = \tau_{xx} - \tau_{yy} = 2\theta_R\eta_0 \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2}{\left(1+\theta_R^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right)} \quad (\text{Ec.163})$$

## 5.2 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva codeformacional

Para el estudio de este tipo de recubrimiento no se van a considerar los efectos causados por la rotación, que es el caso opuesto presentado anteriormente.

Para describir el recubrimiento de una superficie con un flujo codeformacional se utiliza la misma estructura de la ecuación constitutiva del fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional (Ec.71), pero en vez de utilizar la derivada de Jaumann, se utilizará la derivada de Oldroyd, que adelante se definirá, quedando la ecuación constitutiva

$$\underline{\underline{\tau}} + \theta_R \frac{\mathfrak{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathfrak{D}t} = \eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.164})$$

Se define la derivada de Oldroyd (Ref.1), la se usará por ser un flujo con efectos codeformacionales:

$$\frac{\mathfrak{D}\tau_{ij}}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (\text{Ec.165})$$

Y se utilizan las mismas definiciones de las (Ec.73) y (Ec.74).

Ahora se sustituyen las (Ec.73), (Ec.74) y (Ec.165) en la (Ec.164)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \theta_R \left( \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial z} - \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{xz} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \tau_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{xz} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \tau_{xx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \tau_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} - \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{xx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{yx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{yx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{zx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{zx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right) = \\
 & \eta_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(Ec.166)

Se simplifican la (Ec.166) de acuerdo a las condiciones del problema

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \theta_R \left( \begin{pmatrix} \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} & \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.167})$$

Se suman las matrices y se simplifica la (Ec.167)

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \theta_R \left( \begin{pmatrix} 2\tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} & \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.168})$$

Se calculan de la (Ec.168) los esfuerzos, mismos que ya incluyen el término de lubricación:

$$\tau_{xx} - 2\theta_R \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{Ec.169})$$

$$\tau_{xx} = 2\theta_R \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.170})$$

$$\tau_{yy} = 0 \quad (\text{Ec.171})$$

$$\tau_{xy} - \theta_R \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.172})$$

Se sustituye la (Ec.171) en la (Ec.172) quedando

$$\tau_{xy} = \eta_0 \frac{du_x}{dy} \quad (\text{Ec.173})$$

Se tiene que la ecuación dinámica se reduce a la forma:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau_{xy}}{dy}$$

Que es precisamente la (Ec.69), ahora integrando tenemos que:

$$\int \tau_{xy} dy = \int \frac{dp}{dx} dy \quad (\text{Ec.174})$$

$$\tau_{xy} = y \frac{dp}{dx} + c_1 \quad (\text{Ec.175})$$

Se sustituye en la (Ec.175)

$$y \frac{dp}{dx} + c_1 = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.176})$$

Se tiene la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$\frac{1}{\eta_0} \left( y \frac{dp}{dx} + c_1 \right) = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.177})$$

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las siguientes:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi \quad \frac{y}{H_0} = \eta \quad \frac{x}{L} = \xi \quad \frac{H_0^2 p}{\eta_0 UL} = P \quad \kappa = \frac{H_1}{H_0}$$

Se puede observar que son las mismas utilizadas anteriormente para el caso del flujo corrotacional pero ahora para el flujo codeformacional no se tiene el  $W_s$ , ya que para este régimen de flujo no existen contribuciones viscoelásticas.

La adimensionalización de la (Ec.177) es la misma que se utilizó para la ecuación 94. Por tanto al sustituirla en la (Ec.177) se obtiene

$$\frac{1}{\eta_0} \left( \eta H_0 \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi} + c_1 \right) = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec.178})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec.179})$$

$$\eta \frac{dP}{d\xi} + \frac{H_0}{U\eta_0} c_1 = \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec.180})$$

Se utilizará  $P' = \frac{dP}{d\xi}$  y  $C = \frac{H_0 c_1}{U\eta_0}$  es la constante de integración adimensional que proviene de la (Ec.180).

$$\eta P' + C = \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec.181})$$

Las condiciones de frontera que se requieren son las siguientes:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{en } \eta = \kappa + (1 - \kappa)\xi = \hbar(\xi) \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases}$$

Ahora se resuelven la (Ec.180)

$$\int d\varphi = \int (\eta P' + C) d\eta \quad (\text{Ec.182})$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \eta^2 P' + \eta C + C_1 \quad (\text{Ec.183})$$

En  $\varphi = 1$   $\eta = 0$

$$1 = \frac{1}{2} 0^2 P' + 0C + C_1 \quad (\text{Ec.184})$$

$$C_1 = 1 \quad (\text{Ec.185})$$

En  $\varphi = 0$   $\eta = \kappa + (1 - \kappa)\xi = \hbar$

$$0 = \frac{1}{2} \hbar^2 P' + C\hbar + 1 \quad (\text{Ec.186})$$

$$C_1 \hbar = -\frac{1}{2} \hbar^2 P' - 1 \quad (\text{Ec.187})$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}\hbar P' - \frac{1}{\hbar} \quad (\text{Ec.188})$$

Con lo que  $\varphi$  queda

$$\varphi = \frac{1}{2}\eta^2 P' - \eta \left( \frac{1}{2}\hbar P' + \frac{1}{\hbar} \right) + 1 \quad (\text{Ec.189})$$

$$\varphi = \frac{1}{2}P'(\eta^2 - \hbar\eta) - \frac{\eta}{\hbar} + 1 \quad (\text{Ec.190})$$

Para encontrar el gradiente de presión se debe establecer una condición de conservación de masa, el cual tiene la siguiente forma

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{h(x)} u_x dy \quad \text{o} \quad \frac{H}{H_0} = \lambda = \int_0^{\hbar(\xi)} \varphi(\xi, \eta) d\eta \quad (\text{Ec.191})$$

Se calcula  $\lambda$  que es el flujo volumétrico y el espesor de recubrimiento.

$$\lambda = \int_0^{\hbar} \varphi d\eta = \int_0^{\hbar} \left[ \frac{1}{2}P'(\eta^2 - \hbar\eta) - \frac{\eta}{\hbar} + 1 \right] d\eta \quad (\text{Ec.192})$$

$$\lambda = \left[ \frac{1}{6}\eta^3 P' - \frac{1}{4}\eta^2 \hbar P' + \eta - \frac{\eta^2}{2\hbar} \right]_0^{\hbar} \quad (\text{Ec.193})$$

$$\lambda = \frac{1}{6}\hbar^3 P' - \frac{1}{4}\hbar^3 P' + \hbar - \frac{\hbar}{2} \quad (\text{Ec.194})$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{12}\hbar^3 P' \quad (\text{Ec.195})$$

Se despeja de la (Ec.195)  $P'$

$$\lambda - \frac{1}{2}\hbar = -\frac{1}{12}\hbar^3 P' \quad (\text{Ec.196})$$

$$6\hbar - 12\lambda = \hbar^3 P' \quad (\text{Ec.197})$$

$$P' = \frac{6}{\hbar^2} - \frac{12\lambda}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.198})$$

Al sustituir la (Ec. 190) por la condición  $\eta = \kappa + (1 - \kappa)\xi = \hbar$ , y al integrar la Ec.190 como lo establece la (Ec.192), se tiene que para  $P(0) = P(1) = 0$ , se tiene que

$$\lambda = \frac{\kappa}{1 + \kappa}$$

Finalmente se calcula la primera diferencia de esfuerzos normales

$$N_1' = \tau_{xx} - \tau_{yy} = 2\theta_R\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2$$

5.3 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta (configuracional)

Se considera nuevamente la aproximación de lubricación expresada en las (Ec. 67,68 y 69).

Esta ecuación es muy parecida al caso del fluido puramente viscoso con un fluido no newtoniano. Se incluye un término de lubricación con lo que la (Ec.67) queda:

$$\underline{\underline{\tau}} + \theta_R \frac{\mathbb{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathbb{D}t} = \eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.202})$$

Se define la derivada convectiva de mixta (Ref.12), la cual se usará para modelar cualquier flujo con propiedades rotacionales y deformacionales al variar el parámetro de rotación  $\varepsilon$  en un intervalo de 0 a 1.

$$\frac{\mathbb{D}\tau_{ij}}{\mathbb{D}t} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\omega_{jm}\tau_{mi} - \frac{1}{2}\omega_{im}\tau_{mj} - (1 - \varepsilon) \left( \frac{1}{2}D_{im}\tau_{mj} + \frac{1}{2}\tau_{im}D_{mj} \right) \quad (\text{Ec.203})$$

Y nuevamente se utilizan las mismas definiciones de las (Ec.73) y (Ec.74).

Ahora se sustituyen las (Ec.73), (Ec.74) y (Ec.203) en la (Ec.202)

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \theta_R \left( \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial z} - \right. \\
& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} \\ \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} \\ \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} - \\
& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} \\ \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} \\ \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} - (1 - \\
& \varepsilon) \left( \frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_{xx}\tau_{xx} + D_{xy}\tau_{yx} + D_{xz}\tau_{zx} & D_{xx}\tau_{xy} + D_{xy}\tau_{yy} + D_{xz}\tau_{zy} & D_{xx}\tau_{xz} + D_{xy}\tau_{yz} + D_{xz}\tau_{zz} \\ D_{yx}\tau_{xx} + D_{yy}\tau_{yx} + D_{yz}\tau_{zx} & D_{yx}\tau_{xy} + D_{yy}\tau_{yy} + D_{yz}\tau_{zy} & D_{yx}\tau_{xz} + D_{yy}\tau_{yz} + D_{yz}\tau_{zz} \\ D_{zx}\tau_{xx} + D_{zy}\tau_{yx} + D_{zz}\tau_{zx} & D_{zx}\tau_{xy} + D_{zy}\tau_{yy} + D_{zz}\tau_{zy} & D_{zx}\tau_{xz} + D_{zy}\tau_{yz} + D_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_{xx}D_{xx} + \tau_{xy}D_{yx} + \tau_{xz}D_{zx} & \tau_{xx}D_{xy} + \tau_{xy}D_{yy} + \tau_{xz}D_{zy} & \tau_{xx}D_{xz} + \tau_{xy}D_{yz} + \tau_{xz}D_{zz} \\ \tau_{yx}D_{xx} + \tau_{yy}D_{yx} + \tau_{yz}D_{zx} & \tau_{yx}D_{xy} + \tau_{yy}D_{yy} + \tau_{yz}D_{zy} & \tau_{yx}D_{xz} + \tau_{yy}D_{yz} + \tau_{yz}D_{zz} \\ \tau_{zx}D_{xx} + \tau_{zy}D_{yx} + \tau_{zz}D_{zx} & \tau_{zx}D_{xy} + \tau_{zy}D_{yy} + \tau_{zz}D_{zy} & \tau_{zx}D_{xz} + \tau_{zy}D_{yz} + \tau_{zz}D_{zz} \end{pmatrix} \right) = \\
& \eta_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{Ec.204}
\end{aligned}$$



Se simplifica la (Ec.205) quedando

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \left( \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & 0 \\ \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \varepsilon) \left[ \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \tau_{xx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \\ \tau_{yy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \tau_{yx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ec.206)

Se suman las matrices de la (Ec.77)

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \left( \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & -2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 2\tau_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} + \tau_{xx}) & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{xx} + \tau_{yy}) & 2\tau_{yx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ec.207)

Se calculan los esfuerzos de la (Ec.207) de forma simultánea, mismos que ya incluyen el término de lubricación y el parámetro asociado a la rotación:

$$\tau_{xx} - \frac{1}{2}\theta_R 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{yx} - \frac{1}{2}\theta_R(1-\varepsilon)2\tau_{yx}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0 \quad (\text{Ec.208})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2}\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)(\tau_{yy} - \tau_{xx}) - \frac{1}{2}\theta_R(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)(\tau_{yy} + \tau_{xx}) = \eta_0\frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.209})$$

$$\tau_{yy} - \frac{1}{2}\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)(-2)\tau_{xy} - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)2\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec.210})$$

$$\tau_{xx} - \theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy} - \theta_R(1-\varepsilon)\tau_{yx}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0 \quad (\text{Ec.211})$$

$$\tau_{xx} - \theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}(1 + (1-\varepsilon)) = 0 \quad (\text{Ec.212})$$

$$\tau_{xx} = \theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}(1 + (1-\varepsilon)) \quad (\text{Ec.213})$$

$$\tau_{yy} + \theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy} - \theta_R(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec.214})$$

$$\tau_{yy} + \theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}(1 - (1-\varepsilon)) = 0 \quad (\text{Ec.215})$$

$$\tau_{yy} = -\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}(1 - (1-\varepsilon)) \quad (\text{Ec.216})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2}\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\left(-\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\varepsilon\tau_{xy} - \theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}(2-\varepsilon)\right) - \frac{1}{2}\theta_R(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\left(-\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\varepsilon\tau_{xy} + \theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}(2-\varepsilon)\right) = \eta_0\frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.218})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2}\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\left(-2\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}\right) - \frac{1}{2}\theta_R(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy}(2-2\varepsilon)\theta_R\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \eta_0\frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.219})$$

$$\tau_{xy} + \theta_R^2\tau_{xy}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\theta_R^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\tau_{xy}(2-2\varepsilon)(1-\varepsilon) = \eta_0\frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.220})$$

$$\tau_{xy} + \theta_R^2\tau_{xy}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\theta_R^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\tau_{xy}(2-2\varepsilon)(1-\varepsilon) = \eta_0\frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.221})$$

$$\tau_{xy}\left[1 + \theta_R^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}(2-3\varepsilon+\varepsilon^2)\right)\right] = \eta_0\frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.222})$$

$$\tau_{xy} \left[ 1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right] = \eta_0 \frac{du_x}{dy} \quad (\text{Ec.223})$$

Se tiene entonces que componentes del tensor de esfuerzos son:

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[ 1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.224})$$

Se sustituye la (Ec.224) en la (Ec.213)

$$\tau_{xx} = \theta_R \left( \frac{du_x}{dy} \right) (2 - \varepsilon) \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[ 1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.225})$$

$$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \theta_R (2 - \varepsilon)}{\left[ 1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.226})$$

Se sustituye la (Ec. 224) en a (Ec.216)

$$\tau_{yy} = -\theta_R \left( \frac{du_x}{dy} \right) \varepsilon \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[ 1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.227})$$

$$\tau_{yy} = -\frac{\eta_0 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \theta_R \varepsilon}{\left[ 1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.228})$$

Con la aproximación de lubricación se tiene que la ecuación dinámica se reduce a la forma:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau_{xy}}{dy}$$

Que es precisamente la (Ec.69), ahora integrando tenemos que:

$$\int \tau_{xy} dy = \int \frac{dp}{dx} dy \quad (\text{Ec.229})$$

$$\tau_{xy} = y \frac{dp}{dx} + c_1 \quad (\text{Ec.230})$$

Se sustituye la (Ec.224)

$$y \frac{dp}{dx} + c_1 = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[ 1 + \theta_R^2 \tau_{xy} \left( \frac{3}{2} \varepsilon \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.231})$$

Se tiene la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$\frac{1}{\eta_0} \left( y \frac{dp}{dx} + c_1 \right) = \frac{\frac{du_x}{dy}}{\left[ 1 + \theta_R^2 \tau_{xy} \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.232})$$

$$\frac{1}{\eta_0} \left( y \frac{dp}{dx} + c_1 \right) = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{\left[ 1 + \theta_R^2 \tau_{xy} \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec.233})$$

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las mismas que se utilizaron para el fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional.

La adimensionalización de las derivadas de la (Ec.232) es la misma que las de las derivadas de la (Ec.94).

Se sustituye en la (Ec.233)

$$\frac{1}{\eta_0} \left( \eta H_0 \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi} + c_1 \right) = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec.234})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \left( \theta_R \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec.235})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + W_S^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec.236})$$

$$\eta \frac{dP}{d\xi} + \frac{H_0}{U\eta_0} C_1 = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec.237})$$

Se reemplaza el  $\zeta Ws^2$  por el parámetro  $\varepsilon$  y se utilizará  $P' = \frac{dP}{d\xi}$  y  $C = \frac{H_0 C_1}{U\eta_0}$  es la constante de integración adimensional que proviene de la (Ec.232), a la que más adelante se dará solución a través de métodos perturbativos y  $\zeta = \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)$ , que es el parámetro asociado al efecto de rotación del fluido. Este nuevo parámetro ya trae incluido el efecto de la rotación del fluido.

Con lo que la ecuación adimensional queda

$$\eta P' + C = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \varepsilon \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.238})$$

Para resolver la (Ec.238) se utilizará la teoría de métodos perturbativos, que ya se mencionó anteriormente en la resolución del problema con derivada convectiva corrotacional.

Se utiliza el mismo polinomio de la (Ec.100)

De la (Ec.99) se despeja  $\frac{d\varphi}{d\eta}$  y se sustituye las (Ec. 101, Ec.102 y Ec.103)

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = (\eta P' + C) \cdot \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \right) \quad (\text{Ec.239})$$

$$\frac{d\varphi_0}{d\eta} + \varepsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \varepsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots = \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{d\varphi_0}{d\eta} + \varepsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \varepsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots \right)^2 \right] \cdot [\eta P'_0 + \varepsilon \eta P'_1 + \varepsilon^2 \eta P'_2 + C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots] \quad (\text{Ec.240})$$

Se igualan los términos con factores comunes de  $\varepsilon$

La potencia cero es la misma que la (Ec.106) ya que es el flujo adimensional de esta potencia es la que corresponde al fluido newtoniano.

$$\text{Primer potencia} \quad \frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left( \frac{d\varphi_0}{d\eta} \right)^2 (\eta P'_0 + C_0) \quad (\text{Ec.241})$$

Y así sucesivamente. Las condiciones de frontera que se requieren son las mismas utilizadas para el fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional.

Se utilizan las mismas definiciones del flujo adimensional expresada en la (Ec.119).

La resolución de  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  y  $P_0$  para este problema se encuentra en las (Ecs. 108 a 126), ya que la primera es la velocidad adimensional, la segunda es el flujo adimensional y la tercera la presión, todas del fluido newtoniano y esas no cambian.

Se obtiene  $\varphi_1$ , para ello se tiene que resolver la (Ec.241), la reescribimos de la siguiente manera:

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 \quad (\text{Ec.242})$$

El cálculo  $\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3$  se encuentra desarrollo anteriormente en las (Ecs.128 a 131) por lo que solo se reescribe la solución

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - 3\eta^2 P_0'^2 \hbar \psi - \frac{3\eta^2 P_0'^2}{\hbar} + 3\eta P_0' \hbar^2 \psi^2 + 6\eta P_0' \psi + \frac{3\eta P_0'}{\hbar^2} - \hbar^3 \psi^3 - 3\hbar \psi^2 - \frac{3\psi}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^3}$$

Y para el cálculo de  $\frac{d\varphi_1}{d\eta}$  se encuentran en las (Ec. 132) y solo se reescribe

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \zeta \eta^3 P_0'^3 - 3\eta^2 P_0'^2 \hbar \psi - \frac{3\eta^2 P_0'^2}{\hbar} + 3\eta P_0' \hbar^2 \psi^2 + 6\eta P_0' \psi + \frac{3\eta P_0'}{\hbar^2} - \hbar^3 \psi^3 - 3\hbar \psi^2 - \frac{3\psi}{\hbar} - \frac{1}{\hbar^3}$$

El cálculo  $\varphi_1$  es el mismo que se encuentras en las (Ecs.133 a 146) y solo se reescribe

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P_1'}{2} - \frac{\eta \hbar P_1'}{2} + \eta \hbar \psi^2 + \frac{\eta}{\hbar} + 2\eta^4 \psi^3 - 4\eta^3 \hbar \psi^3 - \frac{4\eta^3 \psi^2}{\hbar} + 3\eta^2 \hbar^2 \psi^3 + 6\eta^2 \psi^2 + \frac{3\eta^2 \psi}{\hbar^2} - \eta \hbar^3 \psi^3 - 3\eta \hbar \psi^2 - \frac{\eta}{\hbar^3}$$

El valor de  $\lambda_1$  es el mismo por tanto se encuentra en las (Ecs.147 a 151) y solo se reescribe

$$\lambda_1 = \frac{7.2\lambda_0^3(1 - \kappa^{-6})}{(1 - \kappa^{-2})} - \frac{12.96\lambda_0^2(1 - \kappa^{-5})}{(1 - \kappa^{-2})} + \frac{9.6\lambda_0(1 - \kappa^{-4})}{(1 - \kappa^{-2})} - \frac{2.8(1 - \kappa^{-3})}{(1 - \kappa^{-2})}$$

El cálculo de  $P_1$  se encuentra en las (Ecs. 143 a 161)

$$P_1 = \frac{6\lambda_1\zeta(\hbar^{-2} - \kappa^{-2})}{(1 - \kappa)} - \frac{43.2\lambda_0^3\zeta(\hbar^{-6} - \kappa^{-6})}{(1 - \kappa)} + \frac{77.76\lambda_0^2\zeta(\hbar^{-5} - \kappa^{-5})}{(1 - \kappa)} - \frac{57.6\lambda_0\zeta(\hbar^{-4} - \kappa^{-4})}{(1 - \kappa)} + \frac{16.8\zeta(\hbar^{-3} - \kappa^{-3})}{(1 - \kappa)} \quad (\text{Ec.300})$$

La diferencia con el modelo del fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional se encuentra en el parámetro perturbativo ya que para el este modelo  $\epsilon = \zeta Ws^2$  mientras que para el modelo con derivada corrotacional  $\epsilon = Ws^2$ .

Por último se calcula la primera diferencia de esfuerzos normales

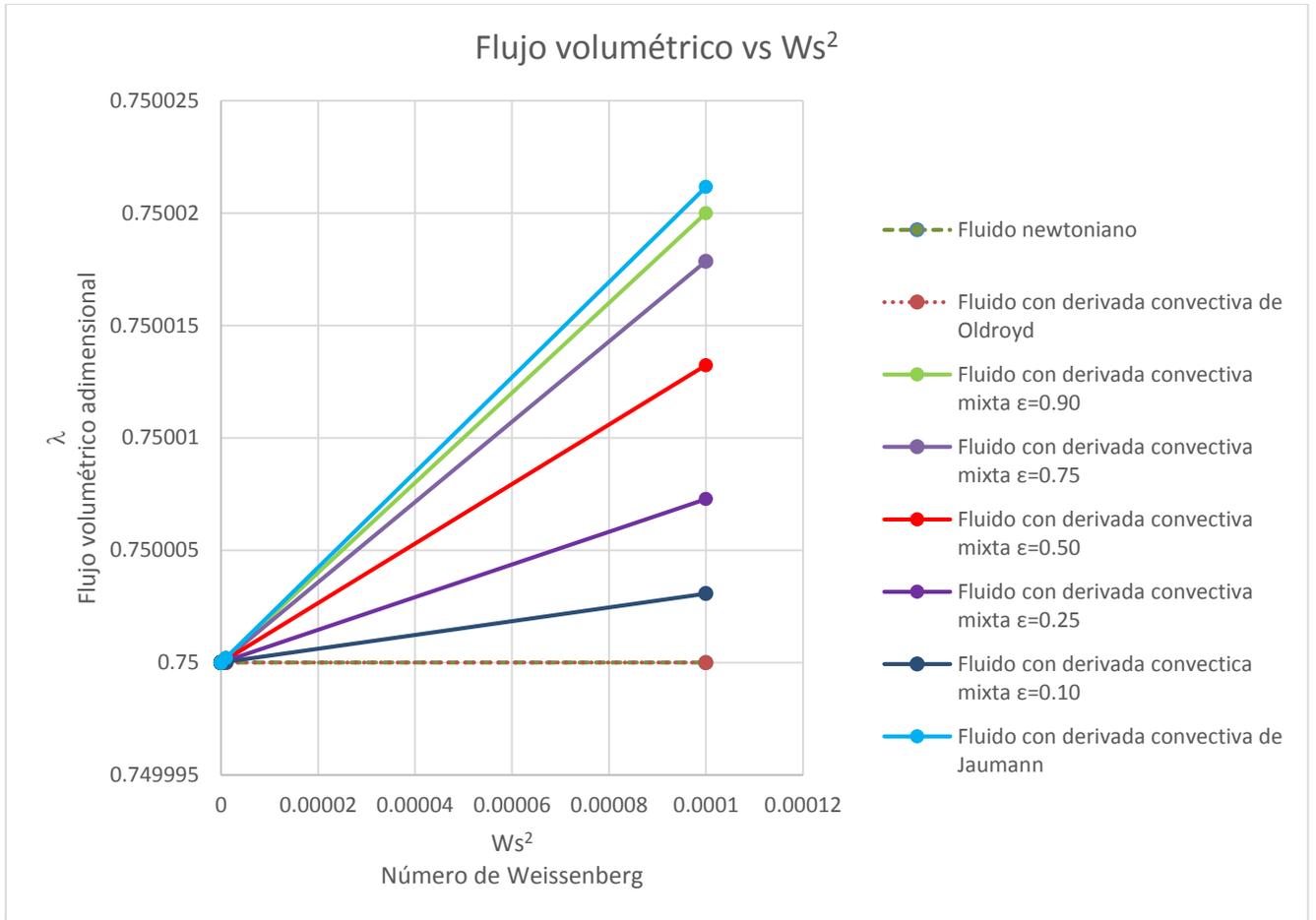
$$N_1' = \tau_{xx} - \tau_{yy} = \frac{2\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2\right)\right]}$$

## 6. Comparación de modelos

Tensor	Modelo		
	Maxwell corrotacional	Maxwell codeformacional	Maxwell mixto (configuracional)
Componente $\tau_{xy}$ del tensor de esfuerzos	$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$\tau_{xy} = \eta_0 \frac{du_x}{dy}$	$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$
Componente $\tau_{xx}$ del tensor de esfuerzos	$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$\tau_{xx} = 2\theta_R \eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2$	$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R (2 - \varepsilon)}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$
Componente $\tau_{yy}$ del tensor de esfuerzos	$\tau_{yy} = -\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$\tau_{yy} = 0$	$\tau_{yy} = -\frac{\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R \varepsilon}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$
Primera diferencia de esfuerzos normales	$N_1' = 2\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$N_1' = 2\theta_R \eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2$	$N_1' = \frac{2\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$

	Modelo		
Componente del tensor adimensional de esfuerzos	Forma adimensional de Maxwell corrotacional	Forma adimensional de Maxwell codeformacional	Forma adimensional de Maxwell mixto (configuracional)
Componente $\sigma_{\xi\eta}$ del tensor de esfuerzos	$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$\sigma_{\xi\eta} = \frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta}$	$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta}}{\left[1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$
Componente $\sigma_{\xi\xi}$ del tensor de esfuerzos	$\sigma_{\xi\xi} = W_s \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$\sigma_{\xi\xi} = 2W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2$	$\sigma_{\xi\xi} = \frac{W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2 - \varepsilon)}{\left[1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$
Componente $\sigma_{\eta\eta}$ del tensor de esfuerzos	$\sigma_{\eta\eta} = -W_s \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$\sigma_{\eta\eta} = 0$	$\sigma_{\eta\eta} = -\frac{W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 \varepsilon}{\left[1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$
Primera diferencia de esfuerzos normales $N'_1 = \sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}$	$N'_1 = 2W_s \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$N'_1 = 2W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2$	$N'_1 = \frac{2W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{\left[1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)\right]}$

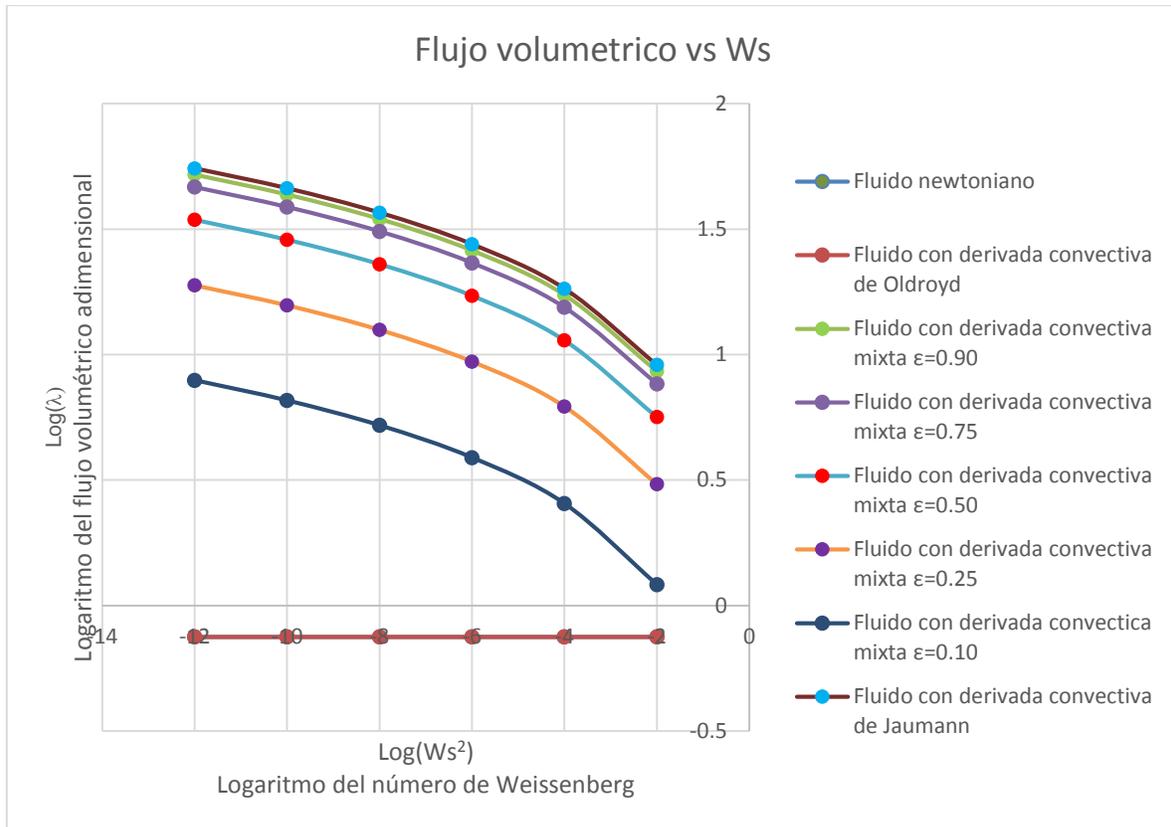
La adimensionalización de los tensores se encuentra en el anexo 5



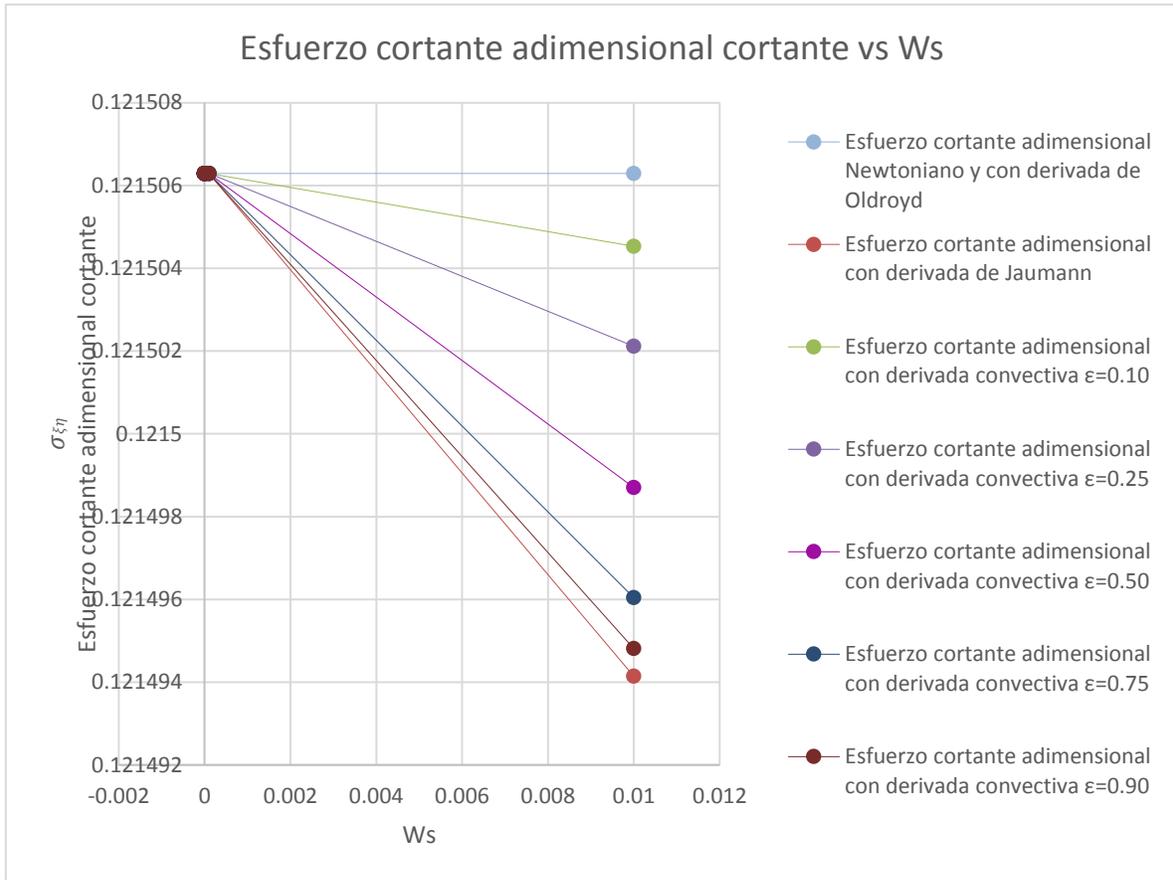
Gráfica 1. Flujo volumétrico adimensional vs número de Weissenberg

En la gráfica 1 se observa que conforme aumenta la viscoelasticidad aumenta el flujo. Esto se explica de acuerdo al comportamiento de la gráfica 2.

Para visualizar mejor los puntos cercanos en el origen se presenta la gráfica 1 pero ahora aplicando logaritmo.



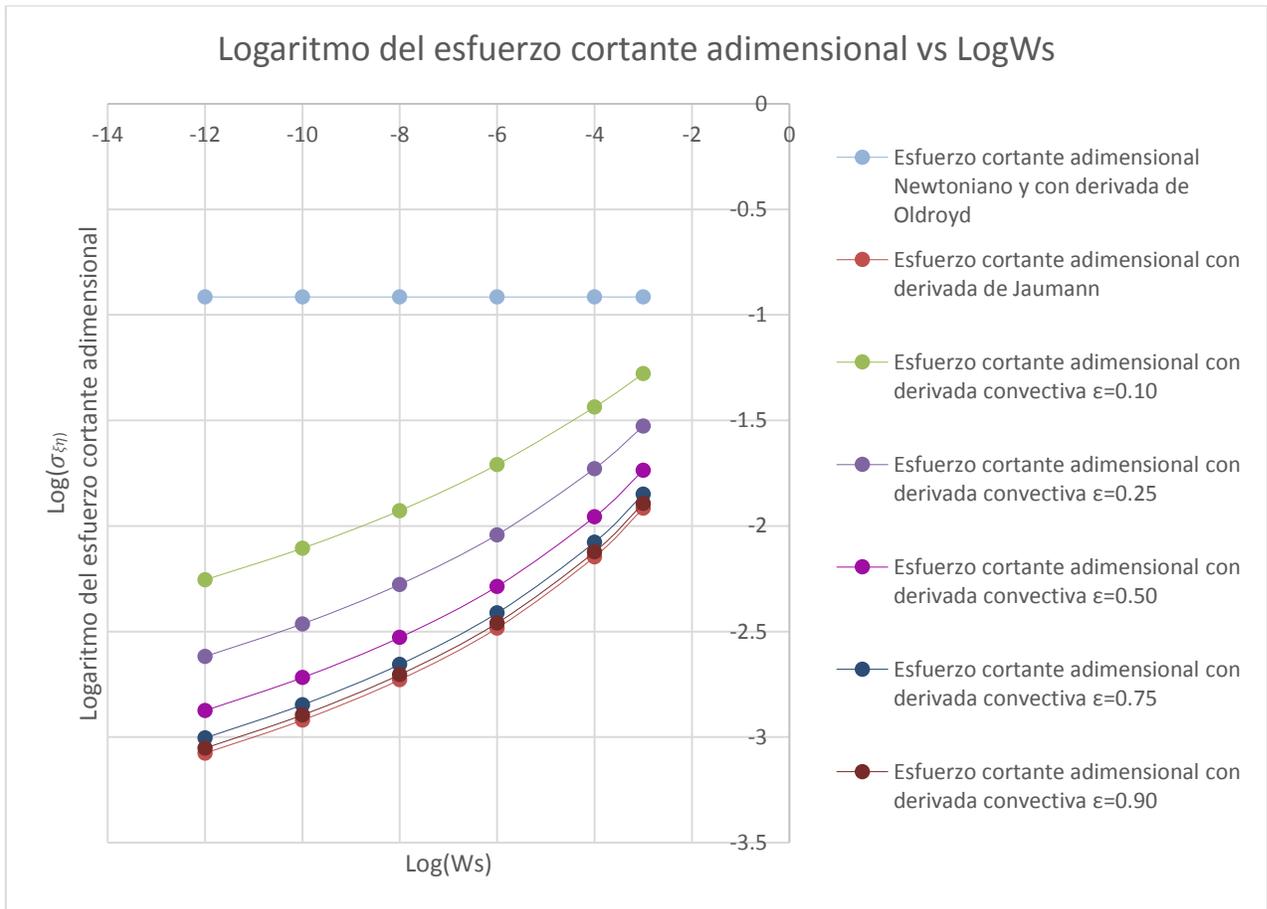
Gráfica 2. Logaritmo del flujo adimensional vs logaritmo del número de  $Ws$



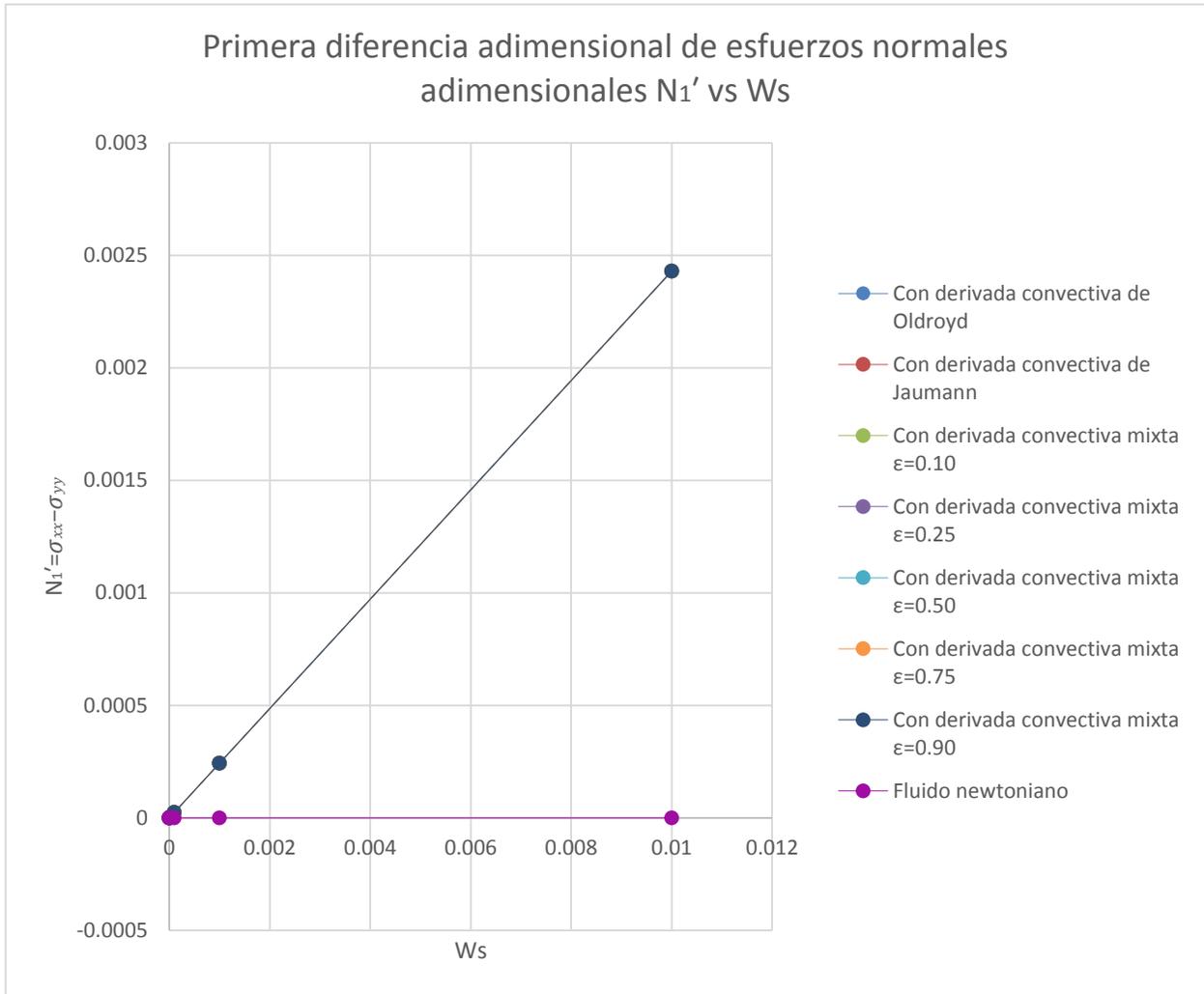
Gráfica 3. Tensor adimensional de esfuerzos vs número de Weissenberg

La gráfica dos muestra como las fuerzas viscosas disminuyen al aumentar los efectos viscoelásticos lo cual explica el comportamiento de la gráfica 1, por tanto se puede concluir que al aumentar los efectos viscoelásticos, principalmente el efecto de rotación favorece que el flujo aumente.

Para observar mejor el comportamiento cerca del origen.



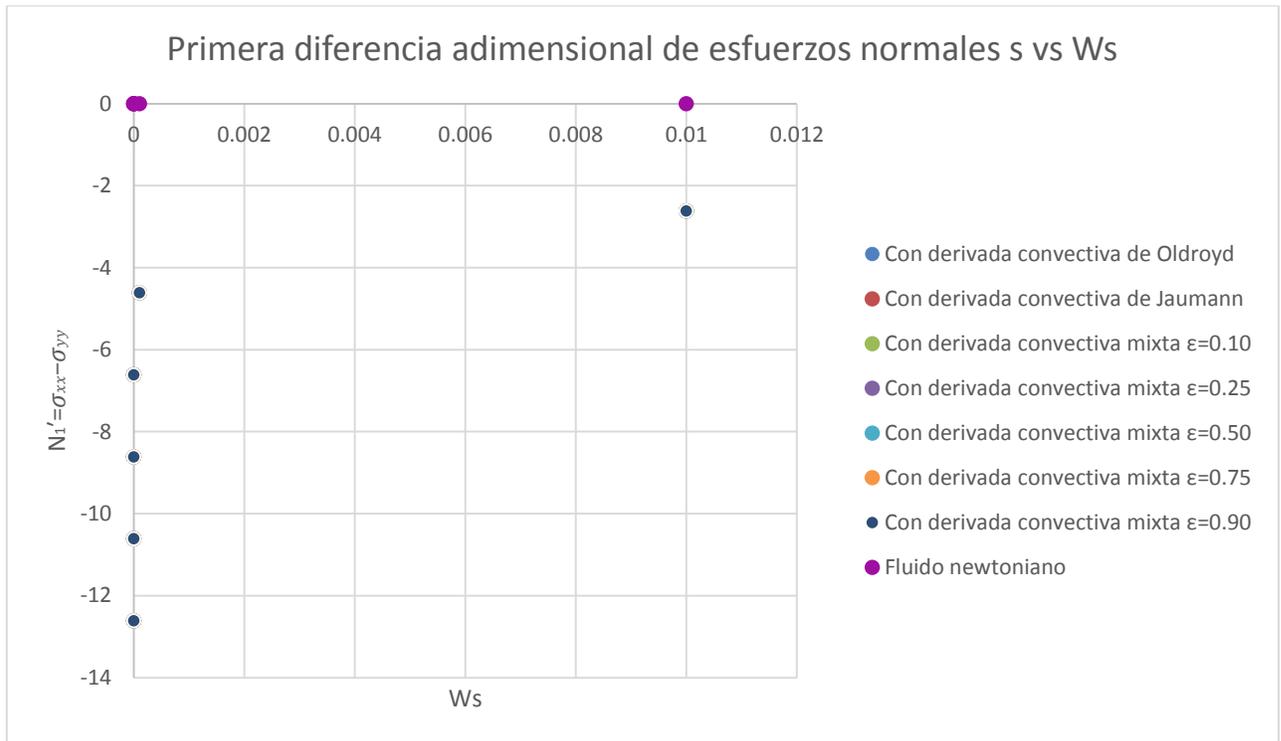
Gráfica 4. Logaritmo del esfuerzo cortante adimensional vs Logaritmo del Ws.



Gráfica 5. Primera diferencia de esfuerzos adimensionales vs número de Weissenberg

Se demuestra entonces que los efectos normales con respecto a los efectos cortantes tienen un efecto del 2% en comparación con el efecto cortante, lo cual cumple la suposición que establece “la aproximación de lubricación”, la cual supone la no existencia de los esfuerzos normales, lo cual se observa en este gráfico.

Para observar el comportamiento en el origen se realiza una gráfica semilogarítmica.



Gráfica 6. Logaritmo de la primera diferencia de esfuerzos normales vs  $Ws$

## 7. Conclusiones

En este trabajo se analizó, mediante métodos perturbativos, el proceso de recubrimiento de superficies en fluidos newtonianos y viscoelásticos (tres versiones del fluido de Maxwell).

Del modelo newtoniano se obtuvo que los parámetros más importantes para llevar a cabo un recubrimiento son el parámetro para modelar la región de separación  $N_1$  el cual contempla los efectos viscosos y la tensión superficial, esto para el caso del fluido newtoniano y  $\lambda$  que es el flujo volumétrico adimensional, ya que el primero incluye la relación del efecto causado por la tensión superficial con respecto a los efectos viscosos así como la caracterización geométrica y el segundo parámetro es un valor característico en el límite de la desaparición de  $N_1$ , y es el que se utiliza en la industria del recubrimiento, el cual debe ser siempre menor a la unidad o ligeramente mayor a ésta.

De la parte no newtoniana se estudiaron algunos efectos no newtonianos en flujos no estacionarios de disoluciones viscoelásticas para realizar recubrimiento; fueron modeladas por la ecuación constitutiva de Oldroyd-B, en su aproximación lineal. Se observó que dos contribuciones fundamentales deben ser consideradas: una newtoniana dada por el disolvente y la contribución viscoelástica por el polímero con el que se va a recubrir.

Se demostró que los efectos puramente viscosos en estas disoluciones dependen de la frecuencia, la posición y el tiempo  $\omega\lambda\eta$ , obteniéndose dos casos límite importantes, los cuales son:

- $\omega\lambda\eta \rightarrow 0$  la disolución para recubrir se convierte en un fluido de Maxwell.
- $\omega\lambda\eta \gg 1$  la disolución de recubrimiento se comporta como un fluido viscoso cuya viscosidad es igual a la del disolvente.

Se demostró que la derivada mixta es un tipo de derivada convectiva general, ya que se encontró que en los casos límites cuando se varía el parámetro  $\varepsilon$  (parámetro asociado a la rotación) se obtiene lo siguiente:

- Cuando  $\varepsilon = 0$  se tiene el fluido maxwelliano con derivada convectiva codeformacional
- Cuando  $\varepsilon = 1$  se tiene el fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional.

Con éste último modelo se pueden modelar fluidos maxwellianos con efectos codeformacionales y corrotacionales tan sólo variando el parámetro  $\varepsilon$ .

También se demostró que a  $Ws$  muy pequeños, la aproximación de lubricación se cumple ya que los efectos causados por los esfuerzos normales son de aproximadamente 2% comparados con los efectos causados por los esfuerzos cortantes.

Se calculó el esfuerzo total sin considerar el esfuerzo cortante, para ver la magnitud del esfuerzo por contribución de esfuerzos normales y se puede observar en el anexo 4, que el orden en el cual contribuye se encuentra entre  $10^{-13}$  y  $10^{-2}$  dependiendo el valor de  $Ws$  que se tome, mientras que tan sólo el esfuerzo cortante es del orden de  $10^{-1}$  lo cual sustenta el uso de la aproximación de lubricación.

## 8. Anexos

Anexo 1 “Teoría de métodos perturbativos”

### *Perturbaciones regulares*

Los científicos Bender y OrSzag<sup>10</sup> definen a las perturbaciones regulares como:

“Una serie de perturbación cuya serie de potencias toma un parámetro  $\epsilon$  con un radio de no anulación de la convergencia”.

Una característica básica de todos los problemas de perturbación regulares, es que la solución exacta para  $\epsilon$  pequeño, pero distinto de cero, se acerca suavemente a la imperturbable o una solución de orden cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Como ejemplo se tiene el siguiente problema (Ref.11)

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\epsilon \frac{dy}{d\tau} - 1$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = 0$$

El parámetro  $\epsilon$  está definido como  $\epsilon = \frac{kv_0}{mg}$

Se asume que la solución se puede expresar como una expansión de Taylor, de tal forma que

$$y(\tau) = y_0(\tau) + \epsilon y_1(\tau) + \epsilon^2 y_2(\tau) + \dots$$

Se sustituye en la ecuación diferencial y las condiciones iniciales, se hace una expansión hasta el tercer término.

$$\frac{d^2y_0}{d\tau^2} + 1 + \epsilon \left( \frac{d^2y_1}{d\tau^2} + \frac{dy_0}{d\tau} \right) + \epsilon^2 \left( \frac{d^2y_2}{d\tau^2} + \frac{dy_1}{d\tau} \right) + O(\epsilon^3) = 0$$

$$y(\tau) = y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + O(\epsilon^3) = 0$$

$$\frac{dy_0}{d\tau}(0) + 1 + \epsilon \frac{dy_1}{d\tau}(0) + \epsilon^2 \frac{dy_2}{d\tau}(0) + O(\epsilon^3) = 0$$

Se resuelven las ecuaciones para cada orden

$$O(1): \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} + 1 = 0 \quad \text{cuando} \quad y_0(0) = 0 \quad \frac{dy_0}{d\tau}(0) - 1 = 0$$

$$\frac{d^2 y_0}{d\tau^2} + 1 = 0$$

$$\frac{d^2 y_0}{d\tau^2} = -1$$

$$\int d\left(\frac{dy_0}{d\tau}\right) = - \int d\tau$$

$$\frac{dy_0}{d\tau} = -\tau + c_1$$

$$\int dy_0 = \int (-\tau + c_1) d\tau$$

$$y_0 = -\frac{\tau^2}{2} + c_1\tau + c_2$$

Evaluando las condiciones de frontera

$$\frac{dy_0}{d\tau}(0) = c_1$$

$$c_1 - 1 = 0$$

$$c_1 = 1$$

$$y_0(0) = \frac{0^2}{2} + 0 + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Queda entonces

$$y_0 = -\frac{\tau^2}{2} + \tau$$

Ahora se calcula para orden uno

$$O(\epsilon): \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + \frac{dy_0}{d\tau} = 0 \quad \text{cuando} \quad y_1(0) = 0 \quad \frac{dy_1}{d\tau}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + \frac{dy_0}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} = -\frac{dy_0}{d\tau}$$

$$\int d\left(\frac{dy_1}{d\tau}\right) = -\int \frac{dy_0}{d\tau} d\tau$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -y_0 + c_3$$

$$\int dy_1 = \int (-y_0 + c_3) d\tau$$

$$\int dy_1 = -\int \left(-\frac{\tau^2}{2} + \tau\right) d\tau + \int c_3 d\tau$$

$$y_1 = \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2} + c_3\tau + c_4$$

Evaluando las condiciones de frontera

$$\frac{dy_1}{d\tau}(0) = \frac{0^2}{2} + 0 + c_3 = 0$$

$$c_3 = 0$$

$$y_1(0) = \frac{0^3}{6} - \frac{0^2}{2} + 0 + c_4$$

$$c_4 = 0$$

De donde queda

$$y_1 = \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2}$$

Ahora se calcula para orden dos

$$O(\epsilon): \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + \frac{dy_1}{d\tau} = 0 \quad \text{cuando} \quad y_2(0) = 0 \quad \frac{dy_2}{d\tau}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + \frac{dy_1}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} = -\frac{dy_1}{d\tau}$$

$$\int d\left(\frac{dy_2}{d\tau}\right) = -\int \frac{dy_1}{d\tau} d\tau$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -y_1 + c_5$$

$$\int dy_1 = \int (-y_1 + c_5) d\tau$$

$$\int dy_1 = -\int \left(\frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2}\right) d\tau + \int c_5 d\tau$$

$$y_1 = -\frac{\tau^4}{24} + \frac{\tau^3}{6} + c_5\tau + c_6$$

Evaluando las condiciones de frontera

$$\frac{dy_2}{d\tau}(0) = -\frac{0^2}{6} + \frac{0}{2} + c_5 = 0$$

$$c_5 = 0$$

$$y_2(0) = -\frac{0^4}{24} + \frac{0^3}{6} + 0 + c_6 = 0$$

$$c_6 = 0$$

De donde se obtiene

$$y_1 = -\frac{\tau^4}{24} + \frac{\tau^3}{6}$$

Quedando el polinomio de solución aproximado

$$y(\tau) \approx \left( \tau - \frac{\tau^2}{2} \right) + \epsilon \left( \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2} \right) + \epsilon^2 \left( \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^4}{24} \right)$$

Se generaliza el polinomio anterior y se obtiene un polinomio de Taylor

$$y(\tau) \approx \left( \tau - \frac{\tau^2}{2!} \right) + \epsilon \left( \frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^2}{2!} \right) + \epsilon^2 \left( \frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^4}{4!} \right) + O(\epsilon^3)$$

## Anexo 2 “Datos para elaboración de gráficos”

Se utilizaron datos comunes de la literatura referidos al óxido de polietileno al 0.75% (Ref.1).

### Propiedades

$H_o$ (m)	0.0015
$R$ (m)	0.1016
$L=(RHo)^{(1/2)}$ (m)	0.01234504
$dP/d\xi$	0.33333333
$(dp/d\xi)/2$	0.16666667
$H1$ (m)	0.0045
$\kappa$	3

Gráfico 1

	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Jaumann ( $\epsilon=1.0$ )	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.1$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.25$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.50$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.75$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.90$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Oldroyd ( $\epsilon=0.0$ )	Fluido newtoniano
<b>Ws<sup>2</sup></b>	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$
<b>1x10<sup>-7</sup></b>	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
<b>1x10<sup>-6</sup></b>	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
<b>1x10<sup>-5</sup></b>	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
<b>1x10<sup>-4</sup></b>	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
<b>1x10<sup>-3</sup></b>	0.75000021	0.75000003	0.75000007	0.75000013	0.75000018	0.7500002	0.75	0.75
<b>1x10<sup>-2</sup></b>	0.75002117	0.75000307	0.75000728	0.75001323	0.75001786	0.7500200	0.75	0.75

Gráfico 2

	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Jaumann ( $\epsilon=1.0$ )	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.1$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.25$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.50$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.75$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.90$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Oldroyd ( $\epsilon=0.0$ )	Fluido newtoniano
<b>Ws<sup>2</sup></b>	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$	$\lambda_{total}$
<b>-14</b>	1.741753017	0.897283315	1.276114262	1.537042596	1.667784655	1.717127587	-0.124938737	-0.124938737
<b>-12</b>	1.662375048	0.816725125	1.196357994	1.457546121	1.588370147	1.637738138	-0.124938737	-0.124938737
<b>-10</b>	1.565169782	0.717741475	1.098584018	1.360162835	1.491110006	1.540515632	-0.124938737	-0.124938737
<b>-8</b>	1.439738511	0.589324522	0.972201512	1.234434161	1.365587096	1.415055575	-0.124938737	-0.124938737
<b>-6</b>	1.262660504	0.406192127	0.793208235	1.056758705	1.188325126	1.237919793	-0.124938737	-0.124938737
<b>-4</b>	0.958656741	0.083326726	0.483353988	0.750941149	0.883763944	0.93374107	-0.124938737	-0.124938737

Gráfico 3

	Fluido newtoniano	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Oldroyd	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Jaumann	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.10$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.25$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.50$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.75$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.90$
<b>Ws</b>	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$
<b>1x10<sup>-7</sup></b>	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294
<b>1x10<sup>-6</sup></b>	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294
<b>1x10<sup>-5</sup></b>	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294	0.121506294
<b>1x10<sup>-4</sup></b>	0.121506294	0.121506294	0.121506293	0.121506294	0.121506294	0.121506293	0.121506293	0.121506293
<b>1x10<sup>-3</sup></b>	0.121506294	0.121506294	0.121506173	0.121506277	0.121506252	0.121506218	0.121506192	0.121506179
<b>1x10<sup>-2</sup></b>	0.121506294	0.121506294	0.121494145	0.121504532	0.121502118	0.121498701	0.121496043	0.121494813

Gráfico 4

	Fluido newtoniano	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Oldroyd	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Jaumann	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.10$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.25$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.50$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.75$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.90$
<b>Ws</b>	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta}$
<b>-7</b>	-0.915401224	-0.915401224	-3.076769227	-2.255448542	-2.618692603	-2.874442617	-3.003537313	-3.05237532
<b>-6</b>	-0.915401224	-0.915401224	-2.919722598	-2.105732923	-2.464097673	-2.71817495	-2.846731941	-2.895404596
<b>-5</b>	-0.915401224	-0.915401224	-2.728314581	-1.927394339	-2.27712906	-2.528185081	-2.655763914	-2.704135083
<b>-4</b>	-0.915401224	-0.915401224	-2.483602949	-1.709191609	-2.041695015	-2.286469087	-2.411984959	-2.459717366
<b>-3</b>	-0.915401224	-0.915401224	-2.145850146	-1.436539308	-1.728314581	-1.95679391	-2.076769227	-2.122766262
<b>-2</b>	-0.915401224	-0.915401224	-1.915401224	-1.278072154	-1.527522542	-1.736587107	-1.84958394	-1.893353346

Gráfico 5

	Fluido newtoniano	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Oldroyd	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Jaumann	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.10$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.25$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.50$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.75$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.90$
<b>Ws</b>	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$
<b><math>1 \times 10^{-7}</math></b>	0	2.43013E-08	2.43013E-08	2.43013E-08	2.43013E-08	2.43013E-08	2.43013E-08	2.43013E-08
<b><math>1 \times 10^{-6}</math></b>	0	2.43013E-07	2.43013E-07	2.43013E-07	2.43013E-07	2.43013E-07	2.43013E-07	2.43013E-07
<b><math>1 \times 10^{-5}</math></b>	0	2.43013E-06	2.43013E-06	2.43013E-06	2.43013E-06	2.43013E-06	2.43013E-06	2.43013E-06
<b><math>1 \times 10^{-4}</math></b>	0	2.43013E-05	2.43013E-05	2.43013E-05	2.43013E-05	2.43013E-05	2.43013E-05	2.43013E-05
<b><math>1 \times 10^{-3}</math></b>	0	0.000243013	0.000243012	0.000243013	0.000243013	0.000243012	0.000243012	0.000243012
<b><math>1 \times 10^{-2}</math></b>	0	0.002430126	0.002429883	0.002430091	0.002430042	0.002429974	0.002429921	0.002429896

Gráfico 6

	Fluido newtoniano	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Oldroyd	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Jaumann	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.10$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.25$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.50$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.75$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.90$
<b>Ws</b>	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}-\sigma_{\eta\eta}$
<b>1x10<sup>-7</sup></b>	0	-12.61437123	-12.61437123	-12.6143712	-12.6143712	-12.6143712	-12.6143712	-12.6143712
<b>1x10<sup>-6</sup></b>	0	-10.61437123	-10.61437123	-10.6143712	-10.6143712	-10.6143712	-10.6143712	-10.6143712
<b>1x10<sup>-5</sup></b>	0	-8.614371229	-8.614371229	-8.61437123	-8.61437123	-8.61437123	-8.61437123	-8.61437123
<b>1x10<sup>-4</sup></b>	0	-6.614371229	-6.614371229	-6.61437123	-6.61437123	-6.61437123	-6.61437123	-6.61437123
<b>1x10<sup>-3</sup></b>	0	-4.614371229	-4.614371233	-4.61437123	-4.61437123	-4.61437123	-4.61437123	-4.61437123
<b>1x10<sup>-2</sup></b>	0	-2.614371229	-2.614414656	-2.61437753	-2.61438616	-2.61439837	-2.61440787	-2.61441227

### Anexo 3 “Adimensionalización de componentes del tensor de esfuerzos”

Se utilizó para adimensionalizar los tensores las siguientes variables adimensionales

$$\frac{u_x}{U} = \varphi \quad \frac{y}{H_0} = \eta \quad \frac{x}{L} = \xi \quad \frac{H_0^2 \tau_{ij}}{\eta_0 UL} = \sigma_{ij} \quad Ws = \frac{\theta_R U}{H_0}$$

A continuación se desarrolla la adimensionalización

Componentes del tensor con modelo asociado a una derivada convectiva corrotacional

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{du_x}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = U \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.1})$$

Se despeja  $\tau_{xy}$  de la variable adimensional

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.2})$$

Se sustituye en (Ec. A 5.1)

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.3})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.4})$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.5})$$

Para  $\tau_{xx}$  se tiene que

$$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left( \frac{du_x}{dy} \right)^2}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.6})$$

Se despeja  $\tau_{xx}$  de la variable adimensional

$$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.7})$$

Se sustituye en (Ec. A 5.6)

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{\theta_R \eta_0 \left( \frac{H_0 d\varphi}{L d\eta} \right)^2}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.8})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{W_S \eta_0 \frac{U}{H_0} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.9})$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{W_S \frac{H_0}{L} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.10})$$

Se demostró anteriormente que para está derivada el  $\tau_{yy}$  es

$$\tau_{yy} = -\tau_{xx} \quad (\text{Ec. A 5.11})$$

Por lo que  $\sigma_{yy} = -\sigma_{xx}$ , quedando entonces que

$$\sigma_{\eta\eta} = -\frac{W_S \frac{H_0}{L} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.12})$$

Finalmente la diferencia de esfuerzos normales adimensionales es

$$N'_1 = 2W_S \frac{H_0}{L} \frac{\left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.13})$$

Componentes del tensor de esfuerzos con modelo asociado a una derivada convectiva codeformacional

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{du_x}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{dy} = U \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\tau_{xy} = \eta_0 \frac{du_x}{dy} \quad (\text{Ec. A 5.14})$$

Se despeja  $\tau_{xy}$  de la variable adimensional

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 U L \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.15})$$

Se sustituye en (Ec. A 5.14)

$$\frac{\eta_0 U L \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec. A 5.16})$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec. A 5.17})$$

Para  $\tau_{xx}$  se tiene que

$$\tau_{xx} = 2\theta_R \eta_0 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.18})$$

Se despeja  $\tau_{xx}$  de la variable adimensional

$$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 U L \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.19})$$

Se sustituye en (Ec. A 5.18)

$$\frac{\eta_0 U L \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = 2\theta_R \eta_0 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.20})$$

$$\frac{\eta_0 U L \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = 2W_S \eta_0 \frac{U}{H_0} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.21})$$

$$\sigma_{\xi\xi} = 2W_S \frac{U}{H_0} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.22})$$

El  $\tau_{yy}$  se sabe que es para éste modelo

$$\tau_{yy} = 0 \quad (\text{Ec. A 5.23})$$

Por lo que  $\sigma_{\eta\eta} = 0$ , quedando entonces que

$$\sigma_{\eta\eta} = 0 \quad (\text{Ec. A 5.24})$$

Finalmente la diferencia de esfuerzos normales adimensionales es

$$N'_1 = 2WS \frac{U}{H_0} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.25})$$

Se utilizó para adimensionalizar los tensores las siguientes variables adimensionales

$$\frac{u_x}{U} = \varphi \quad \frac{y}{H_0} = \eta \quad \frac{x}{L} = \xi \quad \frac{H_0^2 \tau_{ij}}{\eta_0 UL} = \sigma_{ij} \quad WS = \frac{\theta_R U}{H_0}$$

A continuación se desarrolla la adimensionalización

Componentes del tensor de esfuerzos con modelo asociado a una derivada convectiva mixta

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{du_x}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = U \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y}}{\left[ 1 + \theta_R^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \right]} \quad (\text{Ec. A 5.26})$$

Se despeja  $\tau_{xy}$  de la variable adimensional

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.27})$$

Se sustituye en (Ec. A 5.26)

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.28})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.29})$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0 d\varphi}{L d\eta}}{1 + Ws^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.30})$$

Para  $\tau_{xx}$  se tiene que

$$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.31})$$

Se despeja  $\tau_{xx}$  de la variable adimensional

$$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.32})$$

Se sustituye en (Ec. A 5.31)

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{\theta_R \eta_0 \left( \frac{H_0 \partial \varphi}{L \partial \eta} \right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.33})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{Ws \eta_0 \frac{U}{H_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + Ws^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.34})$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{Ws \frac{H_0}{L} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + Ws^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.35})$$

Para el  $\tau_{yy}$  es

$$\tau_{yy} = -\theta_R \eta_0 \frac{\left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \varepsilon}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{du_x}{dy} \right)^2 \left( \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.36})$$

Se despeja  $\tau_{yy}$  de la variable adimensional

$$\tau_{yy} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\eta\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.37})$$

Se sustituye en (Ec. A 5.31)

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\eta\eta}}{H_0^2} = - \frac{\theta_R \eta_0 \left( \frac{H_0 d\varphi}{L d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + \theta_R^2 \left( \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.38})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\eta\eta}}{H_0^2} = - \frac{W_s \eta_0 \frac{U}{H_0} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + W_s^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.39})$$

$$\sigma_{\eta\eta} = - \frac{W_s \frac{H_0}{L} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + W_s^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.40})$$

Finalmente la diferencia de esfuerzos normales adimensionales es

$$N'_1 = \frac{2W_s \frac{H_0}{L} \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + W_s^2 \left( \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)} \quad (\text{Ec. A 5.41})$$

Anexo 4 “Cálculo de la norma del tensor adimensional total solo considerando esfuerzos normales”

	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Oldroyd	Fluido maxwelliano con derivada convectiva de Jaumann	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.1$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.25$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.50$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.75$	Fluido maxwelliano con derivada convectiva mixta y $\epsilon=0.90$
<b>Ws</b>	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$
<b>1x10<sup>-7</sup></b>	2.43013E-13	1.71836E-13	2.30862E-13	2.1264E-13	1.8226E-13	1.5188E-13	1.3366E-13
<b>1x10<sup>-6</sup></b>	2.43013E-11	1.71836E-11	2.30862E-11	2.1264E-11	1.8226E-11	1.5188E-11	1.3366E-11
<b>1x10<sup>-5</sup></b>	2.43013E-09	1.71836E-09	2.30862E-09	2.1264E-09	1.8226E-09	1.5188E-09	1.3366E-09
<b>1x10<sup>-4</sup></b>	2.43013E-07	1.71836E-07	2.30862E-07	2.1264E-07	1.8226E-07	1.5188E-07	1.3366E-07
<b>1x10<sup>-3</sup></b>	2.43013E-05	1.71836E-05	2.30862E-05	2.1264E-05	1.8226E-05	1.5188E-05	1.3366E-05
<b>1x10<sup>-2</sup></b>	0.002430126	0.001718187	0.002308586	0.00212629	0.00182248	0.0015187	0.00133644

## 9. Referencias

1. Middleman, S., "Fundamentals of Polymer Processing", McGraw-Hill, U.S.A., 1997.
2. Tadmor, Z., Gogos, G.C., "Principles of Polymer Processing", 2<sup>nd</sup> edition, Wiley-Interscience, U.S.A., 2006.
3. Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., "Dynamics of Polymeric Liquids", Vol. 1, Fluid Mechanics, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, U.S.A., 1987.
4. McKinley, G.H., "Dimensionless Groups for Understanding Free Surface Flows of Complex Fluids", M.I.T., U.S.A., 2005.
5. Ashmore, J., Shen, A.Q., Kavhpour, H.P., Stone, H.A., McKinley, G.H., "Coating Flows of Non-Newtonian Fluids: Weakly and Strongly Elastic Limits", 2007.
6. Washo, B.D., "Rheology and Modeling of the Spin Coating Process", U.S.A., 1976.
7. Dutta, A., Mashelkar, A., "On slip effect in free coating of non-Newtonian fluids, India, 1982.
8. Dae, H.C., "Rheology and Processing of Polymeric Materials", Vol. 1, Polymer Rheology, Oxford University Press, U.S.A., 2007.
9. Blank, W., Berndlmaier R., Miller, D., "Coating Rheology", King Industries, 2008.
10. Bender, C., Orszag, S., "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, U.S.A., 1987.
11. Alistair Harper, Notas Asymptotic Methods, sin pie de página
12. Manero, Octavio, Notas de Reología, sin pie de página
13. Rice, R.G., Do, D.D., "Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers", John Wiley & Sons, U.S.A., 1995.
14. Pekka, P.J., Karvinen, T., Karvinen R., "Methods to Analyze Problems in Coating Flows by Non-Newtonian Fluid Dynamics", Annual Transactions of the Nordic Rheology Society, 2009.

15. Janssen, P.B.M.L., "Reactive Extrusion Systems", Marcel Dekker, U.S.A., 2004.
16. Coyle, D.J., Macosko, C.W., Scriven, L.E., "Film Splitting Flows of Shear Thinning Liquids in Forward Roll Coating", AIChE Journal, 1987.
17. Kwon, H.S., Myeong, S.D., Yeon, P.H., Wook, J.H., Chun, H.J., "Effect of viscoelasticity on dynamics and stability in roll coatings", Francia, 2007.
18. Carreau, P.J., Lavoie, P-A., "Rheology of Coating Colours: a Rheologist Point of view", TAPPI Notes, Advanced Coating Fundamentals, 1993.
19. Walker, P.H., Thompson, J.G., "Proc. Am. Soc. Testing Materials (Part 2)", 1994.
20. Wylie, E.B., Streeter, V.L., "Fluid Transients in Systems", Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1993.
21. Karvinen, T. (2009), "Effect of Feed Pump Pulsation on Coating Paste Flow", Proceedings of Papermaking Research Symposium 2009, 1-4 June, 2009, Kuopio, Finland.
22. Gaskell, P.H., Savage, M.D., "Meniscus Roll Coating. Liquid Film Coating", Edited by Stephan F. Kistler and Peter M. Schweizer. Chapman & Hall, London, 1997, pp. 573-597.
23. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, "Fluid Mechanics", (Pergamon Press, Second Edition, 1987)
24. R.G.. Larson "The Structure and Rheology of Complex Fluids", (Oxford University Press, 1999).
25. R. Metzler and T.F. Nonnenmacher, "Fractional relaxation processes and fractional rheological models for the description of a class of viscoelastic materials", (International Journal of Plasticity, 19 (2003) 941–959)
26. D.F. James, "Boger Fluids", Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 41: 129-142 (January 2009).
27. H. Schlichting, "Boundary Layer Theory", (McGraw-Hill, Seventh Edition, 1979).
28. J.G. Oldroyd, "Non Newtonian effects in steady motion of some idealized elastico-viscous liquids", (Proc. R. Soc. A 245 (1958))

29. M. Torralba, J.R. Castrejón–Pita, A.A. Castrejón–Pita, G. Huelsz, J.A. del Río, and J. Ortín “Measurements of the bulk and the interfacial velocity profiles in oscillating Newtonian and Maxwellian fluids”.
30. J. P. Rothstein y G. H. McKinley. Extensional flow of a polystyrene Boger fluid through a 4:1:4 axisymmetric contraction/expansion. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 86, 61-88 (1999)