



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Dinámica caótica de billares en mesas  
poligonales con colisiones inelásticas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ALONSO ESPINOSA MIRELES DE VILLAFRANCA



DIRECTOR DE TESIS

DR. DAVID PHILIP SANDERS

2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



1. Datos del alumno  
Apellido paterno  
Apellido materno  
Nombre(s)  
Teléfono  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera  
Número de cuenta

2. Datos del tutor  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno

3. Datos del sinodal 1  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

4. Datos del sinodal 2  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

5. Datos del sinodal 3  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

6. Datos del sinodal 4  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

7. Datos del trabajo escrito.  
Título  
Número de páginas  
Año

1. Datos del alumno  
Espinosa Mireles  
de Villafranca  
Alonso  
56 85 30 55  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
407051335

2. Datos del tutor  
Dr  
David Philip  
Sanders

3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Rafael  
Pérez  
Pascual

4. Datos del sinodal 2  
Dr  
Jefferson Edwin  
King  
Dávalos

5. Datos del sinodal 3  
Dr  
Arturo  
Olvera  
Chávez

6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Germán Aubin  
Arroyo  
Camacho

7. Datos del trabajo escrito.  
Dinámica caótica de billares en mesas poligonales  
con colisiones inelásticas  
96 p  
2013



# Agradecimientos

Me da gusto poder agradecer a las personas que hicieron posible la elaboración de esta tesis. Su ayuda directa e indirecta conspiró con las circunstancias y he aquí el resultado.

Quiero agradecerle al Dr. David Philip Sanders su apoyo, dirección y esfuerzo durante la elaboración de la tesis; En especial por las horas invertidas en revisar líneas de código una y otra vez, y su fe en la regla de la cadena.

A mis sinodales por sus valiosas sugerencias y observaciones de como mejorar esta tesis. Ellos son: el Dr. Rafael Pérez Pascual, el Dr. Jefferson King Dávalos, el Dr. Aubin Arroyo Camacho y el Dr. Arturo Olvera Chávez.

A toda mi familia. En especial a mi mamá por todo su trabajo y esfuerzo, por enseñarme a no rendirme. A mis hermanos por su amistad (ya ven cómo sí terminó algún día...). A mis abuelos Nonó y Táti, ya no supe quién ganó la apuesta, pero no fui yo. A mi abuelo Jorge por todo su apoyo y por creer en mi formación académica. A mi papá por transmitirme el gusto por las computadoras.

A Andrea Calderón por su apoyo, comprensión y cariño incondicional, por darme ánimo y echarme porras cuando las cosas no avanzaban bien. No sé cómo hubiera salido adelante sin ti, ¡Muchas gracias!

Finalmente me gustaría agradecer a la Dra. Maria de los Ángeles Ortiz Flores por su excelentes clases y su entusiasmo por la física.



Nous vivons dans un arc-en-ciel  
de chaos.

---

Paul Cezanne



# Resumen

En esta tesis se calculan numéricamente los exponentes de Lyapunov para un billar triangular y equilátero con colisiones inelásticas. El método que se utiliza para hacer el cálculo de los exponentes de Lyapunov es una extensión del método que utilizan Dellago *et al* en ??.

Este método consiste en considerar el billar como un sistema cuyo comportamiento alterna entre un flujo en tiempo continuo y la iteración de un mapeo. El flujo en tiempo continuo describe la dinámica cuando la partícula viaja dentro de la mesa. El mapeo transforma el momento de la partícula cuando ocurre la colisión con la frontera de la mesa.

En éstos casos, donde la dinámica tiene una parte continua y una discreta, los exponentes de Lyapunov dependen de las ecuaciones de movimiento de la partícula (cuando viaja dentro de la mesa) y de la derivada del mapeo de colisión.

El método de Dellago *et al.* contempla casos en los cuales las colisiones son elásticas, sin embargo, es suficientemente general para poder aplicarse a billares con colisiones inelásticas. La diferencia entre el caso elástico y el inelástico es que se introducen términos no-lineales en el mapeo discreto.

La regla de colisión inelástica que se utiliza escala el ángulo de reflexión,  $\varphi$ , por un factor  $\lambda$  de la siguiente manera:  $\varphi = \lambda\eta$ , donde  $\eta$  es el ángulo de incidencia y  $\lambda$  satisface  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Se logra calcular como varían los exponentes de Lyapunov con respecto al parámetro  $\lambda$ , y se calcula la dimensión de Lyapunov del atractor que se presenta en el sistema.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Billares . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	5
1.2.1. Estudio de partículas interactuantes como motivación física . . . . .	7
1.2.2. Estudio de sistemas caóticos como motivación física . . . . .	7
1.3. Plan de la tesis . . . . .	9
<b>I Antecedentes</b>	<b>11</b>
<b>2. Sistemas dinámicos</b>	<b>13</b>
2.1. Conceptos y definición de un sistema dinámico . . . . .	13
2.1.1. El espacio fase y el espacio de configuraciones . . . . .	15
2.1.2. Conjuntos invariantes . . . . .	15
2.2. Un ejemplo . . . . .	16
2.3. Sistemas disipativos . . . . .	18
2.4. Caos en sistemas dinámicos . . . . .	19
2.5. Exponentes de Lyapunov . . . . .	19
2.5.1. Mapeos en tiempo discreto . . . . .	21
2.5.2. Flujos continuos . . . . .	22
2.5.3. Interpretación de los exponentes . . . . .	22
2.6. La dimensión de Lyapunov (o de Kaplan–Yorke) . . . . .	23
<b>3. Billares</b>	<b>27</b>
3.1. Billares elásticos . . . . .	27
3.1.1. Regla de colisión elástica . . . . .	28
3.2. Secciones de Poincaré y el mapeo del billar . . . . .	29

3.2.1. El mapeo del billar . . . . .	30
3.3. Billares disipativos (inelásticos) . . . . .	34
3.3.1. Mapeo <i>slap</i> . . . . .	35
3.3.2. Derivada del mapeo inelástico . . . . .	36
3.4. Billares en polígonos . . . . .	41
3.4.1. Desdoblamiento y ángulos posibles . . . . .	41
3.5. Algoritmo para encontrar colisiones subsecuentes . . . . .	43
<b>4. Exponentes de Lyapunov en billares</b>	<b>45</b>
4.1. La dinámica de un billar y de los vectores del espacio tangente	45
4.1.1. Derivada del mapeo de colisión para el caso elástico . .	50
4.2. Cálculos numéricos de exponentes de Lyapunov . . . . .	57
<b>II Resultados</b>	<b>63</b>
<b>5. Dinámica de los vectores tangentes en billares inelásticos</b>	<b>65</b>
5.1. Mapeo de contracción del ángulo . . . . .	66
5.1.1. Comentarios acerca del desarrollo de la regla . . . . .	73
5.1.2. Cálculo numérico de los exponentes . . . . .	74
<b>6. Resultados</b>	<b>75</b>
6.1. Resultados . . . . .	75
6.1.1. Dinámica y atractor en el espacio de colisiones . . . . .	75
6.1.2. Exponentes del flujo y el mapeo . . . . .	79
6.1.3. Exponentes y el espacio fase . . . . .	84
6.1.4. Dimensión . . . . .	88
<b>7. Conclusiones</b>	<b>91</b>
7.1. Conclusiones Finales . . . . .	91
7.2. Extensiones Posibles . . . . .	92

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se introducen los temas que se van a tocar a lo largo de la tesis. Se hablará de billares con colisiones elásticas e inelásticas, de caos y de los exponentes de Lyapunov. También se darán motivaciones para el estudio de estos sistemas.

### 1.1. Billares

Un *billar*, es un sistema dinámico conceptualmente muy sencillo que toma su nombre debido a su parecido con el juego de billar.

En estos sistemas se estudia la dinámica de una partícula que se mueve en una región acotada. Cuando la partícula llega a la frontera de la región (que también se le llamará mesa), sufre una colisión y continúa nuevamente su trayectoria.

La diferencia con el juego de billar yace en las generalizaciones y simplificaciones que se hacen. La forma de la mesa puede ser arbitraria y tener más de dos dimensiones. Las únicas interacciones que se toman en cuenta son las colisiones de la partícula con la frontera de la mesa. La figura 1.1 muestra distintas *mesas* posibles.

Los factores que determinan las características del movimiento son: la geometría de la mesa y el tipo de colisiones con la frontera.

En el caso más sencillo, el de colisiones elásticas, la colisión de la partícula con la frontera se puede ver como una reflexión. Resulta que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia.

Una manera de hacer las colisiones más realistas, es introducir cierto grado

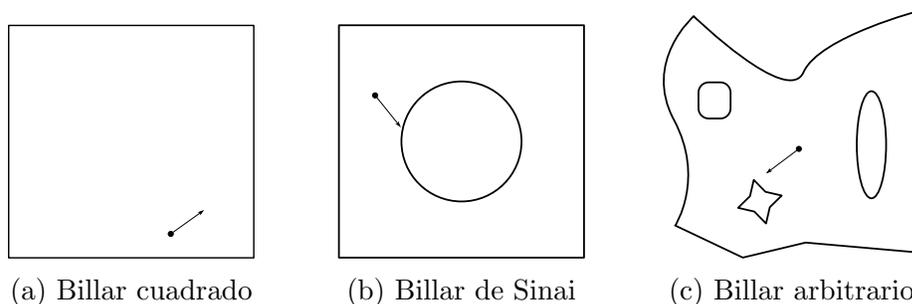


Figura 1.1: Distintas posibles *mesas* de billar

de inelasticidad. Esto es equivalente a que se pueda disipar energía con cada colisión, que es lo que sucede en sistemas reales. Lo que nos proponemos estudiar en este trabajo es el comportamiento de un billar en un triángulo equilátero con colisiones inelásticas.

Cuando hablemos de colisiones inelásticas nos estaremos restringiendo al caso en que el ángulo de incidencia  $\eta$  y el ángulo de reflexión  $\varphi$  satisfacen la siguiente relación:

$$\varphi = \lambda\eta, \quad (1.1)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de inelasticidad y satisface  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

La frontera se piensa como una curva parametrizada y por lo tanto se puede identificar cualquier punto sobre ella mediante la longitud de arco.

A continuación, se explican y dan ejemplos de las trayectorias que siguen las partículas en estos sistemas, tanto para el caso elástico, como el inelástico.

## El círculo

Consideremos lo que ocurre en una mesa circular.

Para colisiones elásticas las órbitas son periódicas o cuasi-periódicas. En ambos casos, el ángulo de incidencia de la partícula con la frontera del círculo es invariante debido a la simetría rotacional del sistema. La condición para que la órbita de la partícula sea periódica es que el ángulo de rotación  $\theta$  de cada segmento de la trayectoria sea conmensurable con  $\pi$ , es decir,

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}, \quad (1.2)$$

donde  $p$  y  $q$  son enteros.

En caso que el ángulo de rotación sea inconmensurable con  $\pi$ , la trayectoria será cuasi-periódica.

En la figura 1.2 se ve como todos los segmentos de la trayectoria son tangentes en algún punto a un círculo concéntrico. Si hacemos una analogía con la óptica, se forma una *cáustica* circular dentro de la mesa de billar.

Si la trayectoria está sobre un diámetro del círculo, la partícula permanecerá sobre éste, por lo que cualquier diámetro es una trayectoria fija.

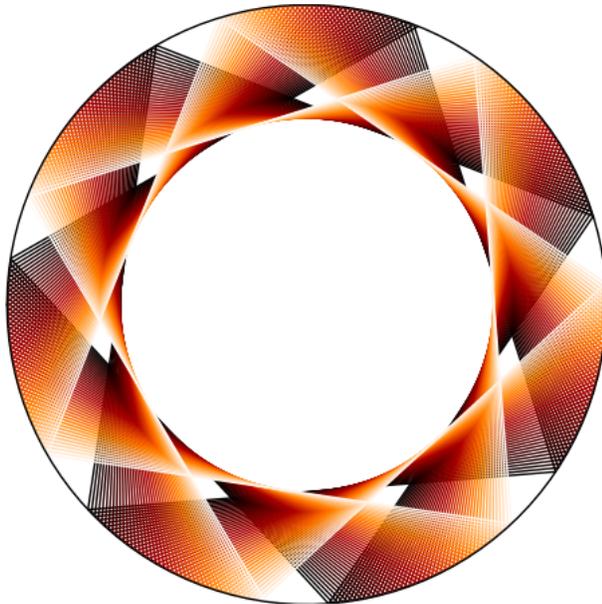


Figura 1.2: Billar elástico en el círculo. El color claro en las líneas representa tiempos más avanzados.

Para el caso inelástico, el ángulo de incidencia no permanece constante, sino disminuye conforme avanza la dinámica. Disminuye por un factor de  $\lambda$  con cada colisión. Por lo tanto, después de cada colisión, los segmentos de las trayectorias se acercan cada vez más al centro del círculo. Esto ocasiona que conforme  $t \rightarrow \infty$ , los segmentos de la trayectoria se aproximan a algún diámetro.

La figura 1.3 muestra este comportamiento.

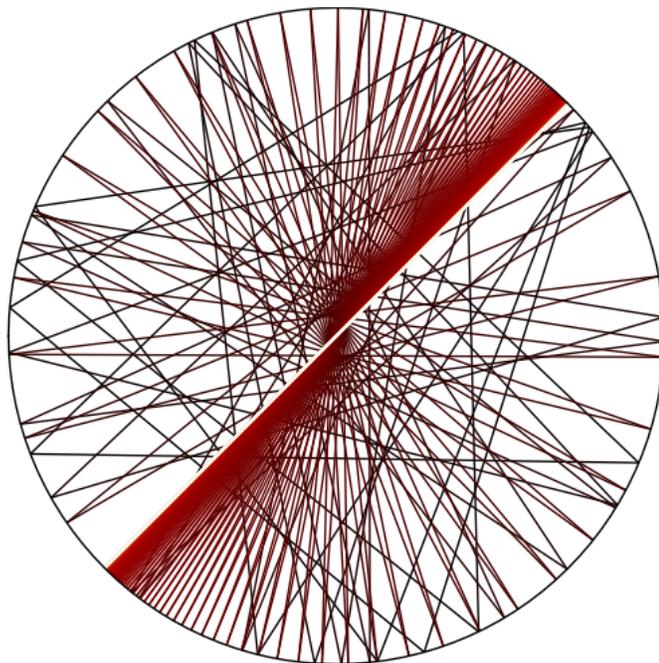


Figura 1.3: Billar inelástico en el círculo. El color claro en las líneas representa tiempos más avanzados.

## El triángulo equilátero

El triángulo equilátero es un caso especial por ser el polígono regular con el menor número de lados que se puede construir. Aunque se podría pensar que por esto mismo la dinámica del billar triangular es muy sencilla, no es el caso.

Dada una condición inicial: un punto dentro de la mesa y una velocidad inicial, conforme  $t \rightarrow \infty$ , la trayectoria es densa en el mesa. Sin embargo, para cada velocidad inicial, sólo hay tres posibles ángulos de reflexión.

La figura 1.4 muestra una trayectoria en el triángulo para el caso elástico.

## Otros polígonos

En polígonos con un mayor número de lados, el comportamiento se vuelve más variado. Al tener polígonos con lados paralelos, aparecen otro tipo de

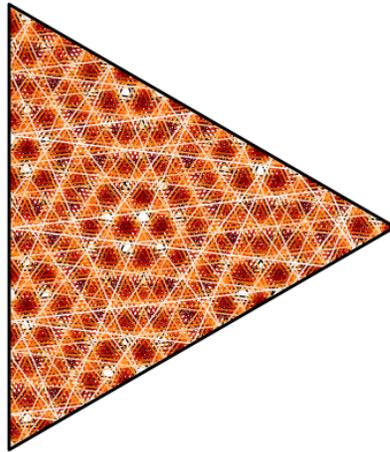


Figura 1.4: Trayectorias dentro del triángulo. El color claro en las líneas representa tiempos más avanzados.

trayectorias.

La figura 1.5 muestra las trayectorias para el caso elástico en el hexágono.

Cuando el polígono tiene lados opuestos paralelos, existen órbitas periódicas de equilibrio donde la partícula rebota entre los dos lados. Cuando se introducen colisiones inelásticas, habrá trayectorias que irán decayendo a estas órbitas. Esto sucede porque el ángulo se vuelve cada más pequeño con cada colisión. La figura 1.6 muestra la convergencia a una órbita de periodo 2.

## 1.2. Motivación

Una motivación física de estudiar los sistemas tipo billar, es la riqueza dinámica que presentan. En ellos se puede estudiar dinámica caótica y también sirven para ilustrar ciertos aspectos de la mecánica estadística.

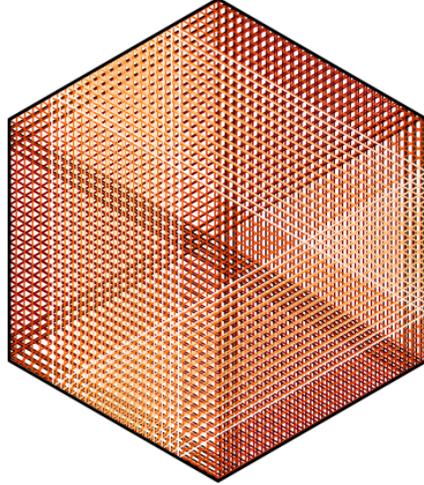


Figura 1.5: Trayectorias dentro del hexágono. El color claro en las líneas representa tiempos más avanzados.

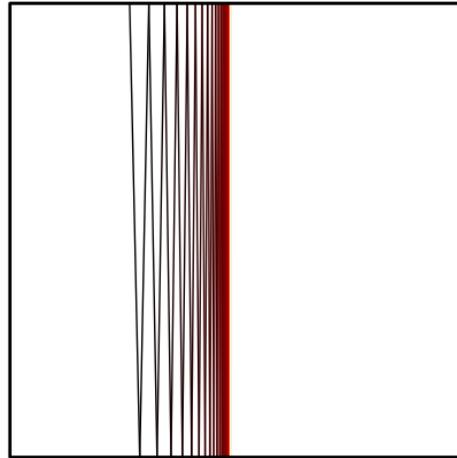


Figura 1.6: Convergencia a una órbita de periodo 2 en el rectángulo. El color claro en las líneas representa tiempos más avanzados.

### 1.2.1. Estudio de partículas interactuantes como motivación física

Los billares son útiles para modelar la interacción de partículas bajo modelos de interacción de núcleo duro y hay varias maneras en que se puede hacer esto.

Una es colocando discos en vez de partículas en la mesa de billar y considerarlos como fronteras que se mueven. En este caso, se puede seguir la trayectoria de uno de los discos, o la de una partícula puntual que interactúa con ellos y la frontera.

El gas de Lorentz modela el comportamiento de un electrón dentro de un conductor como un billar. La mesa consta de obstáculos ordenados de manera periódica y representa el orden cristalino de un metal. El electrón se toma como una partícula puntual que colisiona con estos.

### 1.2.2. Estudio de sistemas caóticos como motivación física

Una de las principales motivaciones físicas de estudiar billares es que, aún siendo sistemas conceptualmente sencillos, llegan a presentar comportamiento caótico [5]. Es sorprendente que basta con mesas muy sencillas para que se observe este comportamiento. El estadio de Bunimovich, presentado en la figura 1.7, es una de estas mesas sencillas en la cual, debido a las secciones de la frontera con curvatura, trayectorias que comienzan siendo paralelas se dispersan.

La virtud de estos sistemas es que se puede ligar el origen del comportamiento caótico con conceptos geométricos cercanos a la física. La manera en que se dispersan las partículas que viajan en líneas paralelas es similar a cómo se dispersan haces de luz paralelos en un espejo con curvatura.

## ¿Qué es el caos?

Una primera definición, tanto histórica como conceptual, se puede tomar del artículo famoso de Lorenz de 1968 [13] cuyo título en inglés es “*Deterministic nonperiodic flow*” que se traduce a **flujo determinista aperiódico**. Esta frase describe un aspecto importante de lo que se entiende por *caos*. En el artículo, Lorenz describe cómo un sistema de ecuaciones determinins-

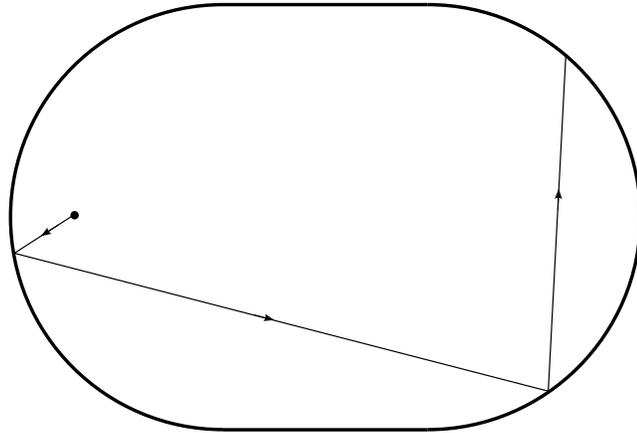


Figura 1.7: Estadio de Bunimovich

tas resultan en una dinámica aparentemente impredecible a la cual se le ha etiquetado caótica.

El autor de [20] describe de manera informal el caos como una dinámica que presenta las siguientes características :

- **Comportamiento aperiodico a largo plazo:** Hay trayectorias que no convergen a puntos fijos, órbitas periódicas o cuasi-periódicas cuando  $t \rightarrow \infty$ , pero están acotadas.
- **Sensibilidad a condiciones iniciales:** Trayectorias que inicialmente son cercanas se separan rápidamente (normalmente, se pide una tasa de separación exponencial).

Posteriormente, en el capítulo 2 se dará una definición formal de un sistema caótico.

El estudio del caos, consiste en caracterizar a los sistemas que presentan las condiciones antes mencionadas.

Una manera de caracterizar la sensibilidad a condiciones iniciales, es por medio de los exponentes de Lyapunov.

Los exponentes de Lyapunov son números que se le asocian a una trayectoria y cuantifican qué tan rápido se separan las trayectorias que comenzaron con condiciones iniciales cercanas. Es decir, cuantifican de cierta manera la sensibilidad del sistema a cambios pequeños en las condiciones iniciales. Por

si solos, los exponentes de Lyapunov no son suficientes para determinar si un sistema es caótico sí pero es necesario que exista por lo menos un exponente positivo para que lo sea.

La manera en la que se calculan estos exponentes, no siempre es sencilla y se dedica gran parte de la tesis a explicar como se pueden calcular en billares. También se dará una definición más precisa en el capítulo 2.

## Otras motivaciones

Un problema interesante que también sirve de motivación, en especial para los billares poligonales, son las preguntas de iluminación que planteó Ernst Straus en los 50's.

Dado un cuarto de forma arbitraria con paredes especulares: ¿Se puede iluminar el cuarto completo con una fuente de iluminación colocada en cualquier punto? y ¿Dada una región, existe al menos un punto desde el cual se pueda iluminar toda la región?

Roger Penrose dio un ejemplo para una región en su mayor parte elíptica [6], en la que la respuesta a estas preguntas son negativas. Para mesas poligonales la primera pregunta fue contestada de manera negativa por G. Tokarsky en 1995 en [21]. La segunda pregunta permanece sin respuesta. La respuesta de Tokarsky contempla que el problema se puede reducir a uno billar en el que se busca una mesa en la que exista algún punto en su interior desde el cual no hay trayectoria alguna que pueda llegar a cualquier otro punto de la región.

Otra posible motivación del estudio de los billares es que algunos sistemas de partículas en interacción se pueden reducir a billares. Por ejemplo en [5], los autores muestran que un sistema de dos partículas confinadas a una región unidimensional que pueden colisionar entre sí se reduce a un billar de una partícula en el triángulo rectángulo.

Finalmente, uno de los objetivos de la tesis es poner en evidencia que los billares son suficientemente interesantes y merecen ser estudiados por sí solos.

## 1.3. Plan de la tesis

El objetivo de la tesis es utilizar el método presentado en [7] para calcular numéricamente los exponentes de Lyapunov para un modelo tipo billar con colisiones inelásticas dentro del triángulo equilátero.

Para poder hacer esto de manera clara, la tesis se separa en dos partes. En la primera parte se formalizarán los conceptos necesarios para el desarrollo del problema. Estos incluyen, los exponentes de Lyapunov, el espacio fase con el que se estará trabajando, el espacio de colisiones del billar y las colisiones inelásticas. También se explicará a detalle el método del cálculo de los exponentes de Lyapunov en billares para el caso elástico.

En la segunda parte de la tesis se extenderá el método de los exponentes para poder abarcar las colisiones inelásticas, y se presentarán los resultados obtenidos. Estos resultados incluyen los exponentes de Lyapunov para el billar triangular y la dimensión de Lyapunov del atractor de la dinámica.

# Parte I

## Antecedentes



# Capítulo 2

## Sistemas dinámicos

En este capítulo, se hablara de sistemas dinámicos. Servirá para introducir los conceptos que se usarán a lo largo de la tesis. Se hablará de sistemas dinámicos en tiempos continuos y también de iteraciones de mapeos para tiempos discretos, pues se verá que los billares son sistemas en los que intervienen tanto mapeos iterados, como dinámica en tiempo continuo.

También se hablará un poco de sistemas disipativos, ya que al utilizar colisiones inelásticas se introduce un mecanismo de disipación al sistema.

### 2.1. Conceptos y definición de un sistema dinámico

Empezaremos dando un ejemplo de un sistema dinámico de la mecánica para asentar los conceptos. Posteriormente se dará una definición de un sistema dinámico.

Pensemos en un sistema mecánico que se utiliza frecuentemente como ejemplo, una masa sujeta a un resorte: El oscilador armónico. Se conoce la fuerza que actúa sobre la masa, está dada por la ley de Hooke. También se conoce cómo esa fuerza causa un una aceleración. Por lo tanto se puede deducir cómo se mueve la masa conforme transcurre el tiempo.

El estado en el que se encuentra el sistema está dado por su posición y su velocidad instantánea. La evolución del estado del sistema está dada por las leyes físicas que son relevantes al problema y por el tiempo que ha transcurrido.

El estado  $\mathbf{x}(t)$  en el que se encuentra el sistema se puede encontrar resolviendo una ecuación diferencial que indica como evoluciona el sistema en el tiempo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{v}$  es un campo vectorial suave. Para determinar el estado del oscilador armónico, es necesario conocer la posición de la masa y su velocidad. Su espacio fase esta formado por todos los posibles estados del sistema. Se puede expresar como un vector  $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , donde  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$  el vector que representa la posición de la masa y  $\dot{\mathbf{r}} = (v_1, v_2, v_3)$  representa la velocidad. Para el caso del oscilador armónico unidimensional la ecuación (2.1) se reduce a

$$\dot{\mathbf{y}} = (y_2, -ky_1), \quad (2.2)$$

donde  $k$  es la constante elástica del resorte y el vector  $\mathbf{y} = (y_1, y_2) = (x, \dot{x})$ , en este caso  $x$  es la posición de la masa.

En un sistema dinámico general, para cualquier estado  $\mathbf{x}$  del sistema, el campo  $\mathbf{v}$  da un vector de “velocidad” que indica cómo evoluciona. Para los sistemas físicos, el conjunto de todos los estados posibles forma lo que se conoce como el *espacio fase* del sistema. Este espacio fase esta compuesto por las posiciones y velocidades que puede tener la masa. Las leyes físicas que rigen el comportamiento del sistema determinan el campo  $\mathbf{v}$ .

Se puede generalizar el concepto de un sistema mecánico al de un sistema dinámico en general. Para hacer esto se necesita un espacio  $X$  al que se llamará el *espacio fase* del sistema. Para los sistemas físicos, el espacio fase es el conjunto de posibles estados del sistema. También se necesita un dominio temporal  $T$  que en un sistema físico representa los tiempos para los cuales esta definido el sistema. Los sistemas dinámicos en tiempo continuo tienen  $T = \mathbb{R}$ , para los sistemas en tiempo discreto  $T = \mathbb{Z}$ . De esta manera, se puede definir un sistema dinámico (??):

**Definición 1.** *Un sistema dinámico sobre el espacio  $X$  es una función diferenciable  $\phi : T \times X \rightarrow X$  donde  $\phi(t, x) = \phi^t(x)$ , con  $t \in T$ ,  $x \in X$  satisface,*

- $\phi^0 : X \rightarrow X$  es la identidad.  $\phi^0(x) = x$ .
- $\phi^t \circ \phi^s = \phi^{t+s}$  para todo  $t, s \in T$ .

$T$  es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{Z}$  para sistemas continuos o discretos, respectivamente.

Las función  $\phi^t$  se puede pensar como el operador de evolución temporal del sistema y a la familia de operadores  $\{\phi^t\}_{t \in T}$  se le conoce como un flujo. Con frecuencia se utiliza la siguiente notación,

$$x(t) = \phi^t x_0 \quad (2.3)$$

para describir el comportamiento en el tiempo del sistema para la condición inicial  $x_0$ .

Este operador temporal no siempre se conoce explícitamente, y frecuentemente se requieren aproximaciones numéricas para determinar las soluciones del sistema.

Cuando el dominio temporal es  $\mathbb{R}$ , se dice que se tiene un sistema dinámico en tiempo continuo. Sin embargo, el conjunto  $T$  puede también ser discreto, se puede tener  $T = \mathbb{Z}$  y en este caso la evolución temporal del sistema se reduce a la iteración de un mapeo. Si se tiene  $T = \mathbb{Z}$  y se define  $M = \phi^1$ , por las propiedades de  $\phi$  tenemos que:

$$\phi^2 x = M(M(x)). \quad (2.4)$$

De esta manera, la dinámica que sigue un punto inicial  $x_0$  esta dada por la iteración del mapeo  $M$ . La  $n$ -ésima iteración se denotará como  $M^n(x_0)$ .

### 2.1.1. El espacio fase y el espacio de configuraciones

En los sistemas mecánicos frecuentemente se hace la distinción entre el espacio fase del sistema y el espacio al que se le llama *espacio de configuraciones*. El espacio de configuraciones es un subespacio del espacio fase que consta únicamente de las variables de posición del sistema.

### 2.1.2. Conjuntos invariantes

En el estudio de sistemas dinámicos frecuentemente aparecen subconjuntos del espacio fase que son importantes para entender el comportamiento del sistema. Para clasificar estos conjuntos, resulta útil identificar los conjuntos que no cambian al aplicarles la acción del sistema dinámico. A estos conjuntos se les llama conjuntos invariantes y se definen de la siguiente manera.

**Definición 2.** *Un conjunto invariante de un sistema dinámico  $\phi : T \times X \rightarrow X$ , es un subconjunto  $S \subset X$  tal que si  $x \in S$ , entonces  $\phi^t x_0 \in S$  para todo  $t \in T$*

Para nuestros propósitos los conjuntos invariantes son importantes porque en muchos sistemas aparecen este tipo de conjuntos hacia los que tienden ciertas trayectorias conforme  $t \rightarrow \infty$ . A estos conjuntos se les llama conjuntos atractores y se definen de la siguiente manera.

**Definición 3.** *A un conjunto invariante cerrado  $S_0 \subset X$  se le llama conjunto atractor si existe alguna vecindad  $U$  de  $A$  tal que para todo  $t > 0$  se tiene que  $\phi^t(U) \subset U$  y además,  $\bigcap_{t>0} \phi^t(U) = S_0$ .*

Esta definición no nos dice gran cosa acerca de la estructura del conjunto. Para capturar el comportamiento a largo plazo de los puntos que bajo  $\phi^t$  van a dar al conjunto atractor y poder distinguir si se tiene un conjunto atractor que no está compuesto por otros dos subconjuntos de cierta manera independientes, se define un *atractor* de la siguiente manera.

**Definición 4.** *A un conjunto atractor  $S$  se le llama atractor si para cualesquiera conjuntos abiertos  $U, V \subset S$  existe algún  $t \in T$  tal que  $\phi^t(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

A esta propiedad se le llama *transitividad topológica*.

## 2.2. Un ejemplo

Para ejemplificar algunas de las ideas que se han planteado daremos como ejemplo el péndulo simple.

La ecuación de movimiento del péndulo es

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \tag{2.5}$$

donde  $l$  es la longitud del péndulo,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $\theta$  es la coordenada angular del péndulo. Por lo tanto,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

El retrato del espacio fase se muestra en la figura 2.1. Las órbitas resultantes son tres conjuntos separados por dos separatrices. Un conjunto corresponde a las órbitas que surgen cuando el péndulo oscila entre dos puntos de retorno. Estas órbitas son las elipses en el centro de la figura. Los otros dos conjuntos corresponden al péndulo cuando tiene una rapidez angular mayor y entonces se mueve en trayectorias circulares. Estas órbitas son las de la parte superior e inferior de la figura. Lo único que cambia entre estos dos conjuntos de órbitas es la dirección en la que dan la vuelta.

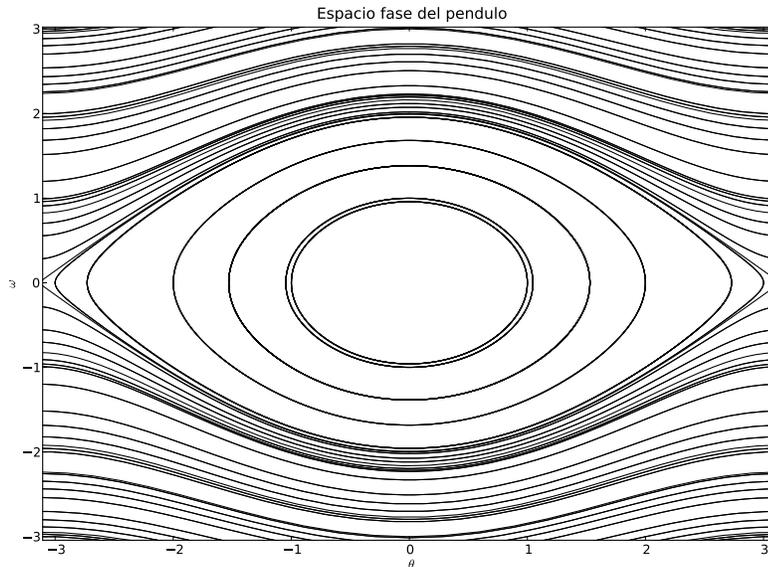


Figura 2.1: Espacio fase del péndulo (tomando  $\frac{g}{l} = 1$ ).

Si se sigue el estado del péndulo en el tiempo cuando se mueve en las trayectorias circulares, cuando el ángulo llega  $2\pi$  parecería que el punto salta de nuevo al inicio de la curva y repite su recorrido. Esto podría parecer una discontinuidad, hasta que se recuerda que la coordenada angular representa la posición del péndulo sobre el círculo, es decir al pasar de  $2\pi$  regresa al cero. Entonces, la coordenada angular representa un punto del círculo  $\mathcal{S}^1$ .

Hablemos ahora de la velocidad angular. En principio, nada limita la velocidad angular y puede tomar el valor que sea entre  $-\infty$  y  $\infty$ .

La consecuencia de esto es que el espacio fase aunque es 2-dimensional no es un plano, sino un cilindro y está dado por el producto cartesiano del círculo con la recta:  $\mathcal{S}^1 \times \mathbb{R}$ .

El enfoque geométrico que se le da a los sistemas dinámicos logra extraer mucha información del comportamiento del sistema analizando la forma de las trayectorias y conjuntos invariantes, especialmente de los atractores, pues cuando existen dominan la dinámica en tiempos largos para algunas condiciones iniciales.

### 2.3. Sistemas disipativos

La mayoría de los sistemas reales tienen mecanismos de disipación mediante los cuales pierden energía. Cuando se estudian como sistemas dinámicos, el efecto de la disipación es la contracción del volumen en el espacio fase, a diferencia de sistemas hamiltonianos en donde se cumple el teorema de Liouville [12]. El enunciado del teorema como se presenta en [1] se da a continuación.

**Teorema de Liouville.** *Para cualquier sistema dinámico determinado por  $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ , que admite una función hamiltoniana, dado cualquier subconjunto  $V \in X$ , el flujo  $\phi^t$  preserva su volumen. Es decir:*

$$\text{Vol}(V) = \text{Vol}(\phi^t(V)), \quad (2.6)$$

para todo  $t \in T$ .

En esta tesis, se les llamara sistemas disipativos a los sistemas dinámicos cuyos flujos no preserven el volumen en el espacio fase.

En general para un sistema dinámico continuo se puede elegir una superficie cerrada en el espacio fase con volumen  $V$ . Utilizando el teorema de la divergencia, se puede demostrar, como se hace en [20], que

$$\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV. \quad (2.7)$$

El sistema es disipativo cuando esta cantidad es distinta de cero.

Para mapeos diferenciables discretos se tiene que

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_i), \quad (2.8)$$

con  $\mathbf{M} : X \rightarrow X$  diferenciable y  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Un resultado del cálculo vectorial es que, localmente, la acción del mapeo  $\mathbf{M}$  sobre un punto del espacio, es equivalente a hacer la transformación lineal dada por  $D\mathbf{M}(\mathbf{x})$ . Es decir, si se toma un punto  $\mathbf{y}$  cercano a  $\mathbf{x}$ , el mapeo se puede aproximar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{M}(\mathbf{y}) \\ &\simeq D\mathbf{M}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

De esta manera, el factor de contracción del area del espacio fase, debido al mapeo está dado por el determinante  $\text{Det}(DM(\mathbf{x}))$ .

Entonces un mapeo se dice que es disipativo si,

$$\text{Det}(DM(\mathbf{x})) \neq 1. \quad (2.10)$$

En algunos casos, la introducción de mecanismos de contracción a un sistema no-lineal hace que se presenten atractores extraños. Éstos son conjuntos atractores con estructura a escalas arbitrarias y características fractales.

## 2.4. Caos en sistemas dinámicos

Para decir que un sistema dinámico es caótico, tiene que cumplir las siguientes condiciones ([22]):

1. El sistema tiene que ser sensible a condiciones iniciales.
2. Tiene que existir un conjunto denso de órbitas periódicas.
3. El sistema tiene que ser topologicamente transitivo para algún subconjunto  $S \subset X$  del espacio fase.

Debido a que el propósito de esta tesis es el cálculo de exponentes de Lyapunov, nos enfocaremos principalmente en la condición de sensibilidad a condiciones iniciales.

## 2.5. Exponentes de Lyapunov

Para que se cumpla la condición de sensibilidad a condiciones iniciales, normalmente se pide que puntos inicialmente cercanos se separen exponencialmente rápido bajo la acción del flujo. Para un sistema dinámico con un espacio fase  $n$ -dimensional, existen  $n$  direcciones principales en las que se pueden separar dos trayectorias. Los exponentes de Lyapunov caracterizan si trayectorias inicialmente cercanas convergen o divergen a lo largo de esas direcciones principales.

Una definición cualitativa de los exponentes de Lyapunov es: El exponente de Lyapunov en una dirección dada la tasa promedio de separación exponencial de dos trayectorias arbitrariamente cercanas.

La definición de los exponentes de Lyapunov es la que sigue:

**Definición 5.** Dado un sistema dinámico con espacio fase  $n$ -dimensional y flujo  $\phi^t$ .

Si se toma una condición inicial  $x_0$  y un punto  $y_0 = x_0 + \delta x_0$  en donde el vector tangente  $\delta x_0$  es un desplazamiento infinitesimal.

Dada una condición inicial  $x_0$  y un vector tangente  $v$  de norma 1.

El exponente de Lyapunov asociado  $x_0$  y a la orientación de  $v$  está definido como

$$\lambda(x_0, \delta x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D\phi^t(x_0) \cdot v\| \quad (2.11)$$

El teorema multiplicativo de Oseledec (ver [8] y [15]) garantiza que para casi todos los puntos (salvo un conjunto de medida 0) existe el límite (2.11). Además garantiza la existencia de  $n$  exponentes, donde  $n$  es la dimensionalidad del espacio fase. Al conjunto de éstos  $n$  exponentes de Lyapunov se le conoce como el *espectro de Lyapunov*. Como las direcciones características de cada exponente son linealmente independientes, se puede elegir un conjunto ortogonal de vectores tangentes  $v$  para los cuales exista el límite (2.11).

La definición 5 es una definición local en el sentido de que aplica sólo para una trayectoria dada por  $x_t = \phi^t x_0$ . Sin embargo, para sistemas ergódicos la dependencia local desaparece y los exponentes de Lyapunov dan la tasa promedio global de separación de las trayectorias. El vector tangente  $v$  se aproxima con desplazamientos en el espacio fase  $\delta x_0$ , y cuando esto es el caso, se requiere que se tome un límite adicional  $\delta x_0 \rightarrow 0$ . Al introducir el factor  $1/t$  en el límite, el efecto es promediar el exponente a lo largo de la trayectoria.

A continuación daremos un ejemplo que ayudará a aclarar el significado de los exponentes.

Supongamos que dado un sistema dinámico tenemos dos condiciones iniciales separadas por una distancia  $|\delta_t|$  al tiempo  $t$ . Más aún, supongamos que para este sistema dinámico se sabe que la separación de esas dos trayectorias bajo la acción del flujo es exponencial:

$$|\delta_t| \sim |\delta| e^{\chi t}, \quad (2.12)$$

donde  $\delta_t$  es la separación de los puntos al tiempo  $t$ .

Entonces, la tasa de separación exponencial  $\chi$  determina si las trayectorias cercanas convergen o divergen conforme avanza la dinámica. Para  $\chi < 0$ , las trayectorias convergen y para  $\chi > 0$  las trayectorias divergen exponencialmente con el tiempo.

Despejando la ecuación y tomando el logaritmo se obtiene la siguiente expresión para el exponente  $\chi$ ,

$$\chi \sim \frac{1}{t} \log \frac{|\delta_t|}{|\delta|}, \quad (2.13)$$

que claramente tiene un parecido con el límite (2.11). La diferencia es que en el límite de la definición 5 aparece la derivada del flujo y aquí aparece un cociente de magnitudes de vectores.

### 2.5.1. Mapeos en tiempo discreto

Tomemos un mapeo diferenciable y unidimensional determinado por la ecuación

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.14)$$

y tomemos dos puntos iniciales cercanos  $x_0$  y  $x_0 + \delta x_0$ .

Después de una iteración, la separación de los puntos está dada por

$$\delta x_1 = f(x_0 + \delta x_0) - f(x_0) = \delta x_0 \left( \frac{f(x_0 + \delta x_0) - f(x_0)}{\delta x_0} \right). \quad (2.15)$$

Para saber el factor por el cual se modificó la distancia de separación después de aplicar el mapeo, simplemente hay que dividir por la separación original, que da:

$$\frac{\delta x_1}{\delta x_0} = \frac{f(x_0 + \delta x_0) - f(x_0)}{\delta x_0}. \quad (2.16)$$

Como nos interesa ésta cantidad de separación como propiedad local del punto inicial, si tomamos el límite cuando  $\delta x_0 \rightarrow 0$ , se obtiene la derivada de la función del mapeo  $\frac{\delta x_1}{\delta x_0} \approx f'(x_0)$  y a lo que se llama el *exponente local de Lyapunov* ([19]) es:

$$\chi = \log |f'(x_0)|. \quad (2.17)$$

Si ahora se busca el factor de expansión promedio debido a aplicar el mapeo dos veces, se tendría

$$\begin{aligned}\chi^{(2)} &= \frac{1}{2} \log |f'(x_0)| \cdot |f'(x_1)| \\ &= \frac{1}{2} [\log |f'(x_0)| + \log |f'(x_1)|],\end{aligned}\tag{2.18}$$

El exponente de Lyapunov *global* está dado por:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log |f'(x_n)|.\tag{2.19}$$

Para el caso de mapeos iterados aparece la suma del logaritmo pues la derivada de aplicar el mapeo  $n$  veces es un producto de  $n$  derivadas.

Para mapeos en dimensiones más altas, el equivalente al exponente de Lyapunov global es el máximo exponente de Lyapunov va a ser para casi todo vector tangente inicial  $\delta \mathbf{x}$ ,

$$\lambda_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \frac{\|\delta \mathbf{x}_n\|}{\|\delta \mathbf{x}_{n-1}\|}.\tag{2.20}$$

### 2.5.2. Flujos continuos

Para flujos continuos, también se pueden expresar los exponentes de Lyapunov pasando de la derivada del flujo a un cociente de magnitudes de vectores

$$\lambda_1(\mathbf{x}_0, \delta \mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta \mathbf{x}_t\|}{\|\delta \mathbf{x}_0\|},\tag{2.21}$$

donde  $\delta \mathbf{x}_0$  es el desplazamiento inicial en alguna dirección arbitraria. Y se requiere también que  $\|\delta \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$ .

### 2.5.3. Interpretación de los exponentes

Los exponentes de Lyapunov están íntimamente relacionados con la evolución del volumen en el espacio fase. En realidad su significado es más profundo que la tasa exponencial a la que se separan las trayectorias. Se está hablando de vectores y mapeos tangentes.

Para ejemplificar el significado de los exponentes de Lyapunov, el siguiente ejemplo presentado de manera similar por E. Ott [15] resulta útil.

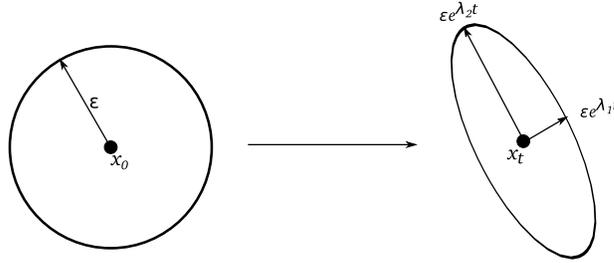


Figura 2.2: Transformación de una bola infinitesimal bajo la dinámica

Pensemos en una bola de radio infinitesimal  $\epsilon$  centrada en el punto inicial  $\mathbf{x}_0$ . Queremos analizar lo que ocurre con la bola de puntos iniciales conforme avanza la dinámica. Si las direcciones características de los exponentes de Lyapunov son ortogonales, bajo la acción del flujo la frontera de la bola se deforma en un elipsoide. La figura 2.2 muestra esta transformación.

## 2.6. La dimensión de Lyapunov (o de Kaplan–Yorke)

En esta sección se dará la definición de la dimensión de Kaplan–Yorke, que sirve para caracterizar los atractores que se presentan en sistemas caóticos. La dimensión de Lyapunov puede ser un número no-entero por lo que tiene parecido con las dimensiones fractales.

En un sistema dinámico en el que se presenta un atractor, si el exponente de Lyapunov más grande de una trayectoria sobre el atractor es negativo o cero, la dimensión del atractor es igual al número de exponentes que son iguales a cero. Cada exponente igual a cero representa una dimensión en la cual el espacio de estados no se colapsa cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En un flujo continuo y caótico tiene que haber por lo menos una dirección de contracción, a la cual le corresponde un exponente menor a cero además de los exponentes positivos.

Supongamos que se tiene un sistema caótico en donde se presenta un atractor.

La suma de los exponentes de Lyapunov representa la expansión del volumen conforme avanza la dinámica. Supongamos que la suma de los primeros  $D$  exponentes (en orden descendiente) es igual a cero:  $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_D = 0$ ,

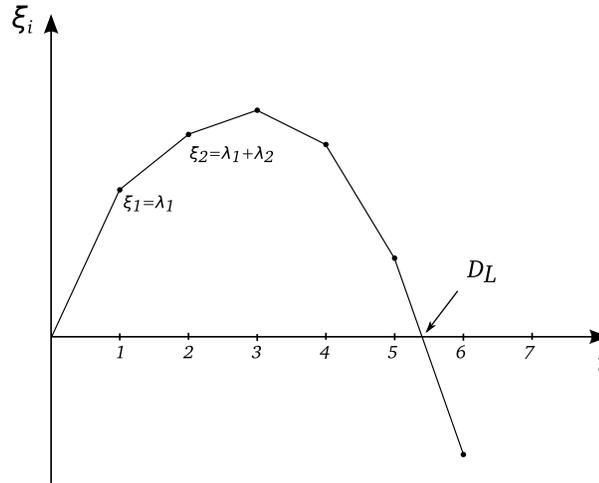


Figura 2.3: Esquema para calcular la dimensión de Lyapunov,  $D_L$ .

con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_D$ . Sin importar los valores que tengan los otros exponentes se tiene un volumen  $D$ -dimensional en el espacio fase del sistema que se va a preservar conforme avanza la dinámica.

En general no siempre se tienen  $D$  exponentes que sumen a cero, pero si se toma la  $D$  más grande tal que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_D \geq 0$ ,  $D$  representa la mínima dimensión topológica que puede tener el sistema. La siguiente dimensión ( $D + 1$ ) ya presenta una contracción, por lo que ( $D + 1$ ) es la primera dimensión entera en la que el atractor puede existir. Esto implica que la dimensión del atractor,  $D_L$  satisface la siguiente relación:  $D < D_L < D + 1$ .

En un sistema dinámico arbitrario, si llamamos  $\xi_i = \sum_1^i \lambda_i$  a la suma de los exponentes, ver la figura 2.3, podemos dar un método de interpolación para calcular la “dimensionalidad” no-entera de un conjunto en donde la suma de los exponentes daría cero. En el caso del diagrama  $D = 5$  y por lo tanto,  $5 < D_L < 6$ .

La dimensión de Lyapunov es el valor que tendría  $i$ , si se interpola linealmente para cuando  $\xi_i = 0$ .

El valor de  $i$  cuando  $\xi_i = 0$  se puede encontrar fácilmente con la pendiente del segmento recto que conecta  $\xi_D$  con  $\xi_{D+1}$ . Si llamamos  $m$  a la pendiente tenemos:

$$m = -\frac{|\lambda_{D+1}|}{1}. \quad (2.22)$$

Por otro lado si tomamos el punto donde el segmento cruza el eje  $i$ , se obtiene la siguiente expresión para la pendiente,

$$m = -\frac{\xi_D}{D_L - D}. \quad (2.23)$$

Igualando las dos expresiones obtenemos una expresión para  $D_L$ :

$$\begin{aligned} D_L &= D + \frac{\xi_D}{|\lambda_{D+1}|} \\ &= D + \frac{1}{|\lambda_{D+1}|} \sum_{j=1}^D \lambda_j. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por lo tanto, la dimensión de Lyapunov se define como:

$$D_L = D + \frac{1}{|\lambda_{D+1}|} \sum_{j=1}^D \lambda_j. \quad (2.25)$$

La dimensión de Lyapunov es una cota superior de la dimensión de información y se ha demostrado que para mapeos 2-dimensionales es igual a la dimensión de información [11]. Para un sistema caótico 2-dimensional (i.e. un mapeo discreto caótico), la ecuación 2.25 se reduce a

$$D_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \quad (2.26)$$



# Capítulo 3

## Billares

En este capítulo se analizarán los sistemas que constan de una partícula en una mesa de billar. Se hará para colisiones elásticas e inelásticas. La regla de colisión inelástica introduce un mecanismo de disipación al sistema. Nuestra regla inelástica modifica el ángulo de reflexión, haciéndolo menor que el ángulo de incidencia.

Se abordarán los billares desde distintas perspectivas, desde la mecánica hasta los mapeos iterados, resaltando los resultados importantes que serán de utilidad en lo que resta de esta tesis. Se definirá lo que es el mapeo del billar y se obtendrán expresiones explícitas para su derivada.

### 3.1. Billares elásticos

Los billares con colisiones elásticas en la frontera son sistemas Hamiltonianos donde se preserva la medida de Liouville en el espacio fase [10].

El hecho de que varios modelos de partículas interactuantes se puedan representar como billares tal como el billar de Sinai, o el que presentan T. Gilbert y D. Sanders en [9], hace que el estudio de sistemas tipo billar sea importante más allá del estudio de sistemas caóticos por sí solos o de la teoría ergódica en un sentido abstracto. Además los sistemas de esferas duras (que se pueden reducir a billares) siguen siendo de los pocos sistemas en los cuales se puede demostrar que se cumple la hipótesis ergódica de Boltzmann (ver [18]).

### 3.1.1. Regla de colisión elástica

En los billares más sencillos se consideran colisiones elásticas de una partícula (puntual) con la pared. Las únicas fuerzas involucradas en la colisión son las fuerzas normales de contacto. Si además la pared es completamente rígida, la interacción es instantánea y se vuelve necesario pensar en la fuerza como una delta de Dirac en el tiempo.

En el desarrollo que sigue, nos basamos en la exposición escrita de billares de D. Sanders [?].

La ecuación de movimiento de la partícula es:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t), \quad (3.1)$$

donde la fuerza se puede escribir como  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}\delta(t - \tau_c)$ , con  $\tau_c$  el tiempo de colisión. Dado que no hay fricción,  $\mathbf{F}$  es normal a la superficie. Al integrar obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{p} &= \mathbf{F} \int_{\tau_c - \epsilon}^{\tau_c + \epsilon} \delta(t - \tau_c) dt \\ m(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^i) &= \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\Delta\mathbf{p}$  es el impulso, y los vectores,  $\mathbf{v}^i$  y  $\mathbf{v}^f$ , son la velocidad antes y después de la colisión respectivamente.

Este resultado junto con el hecho de que la fuerza actúa únicamente en la dirección normal, indican que el único cambio en la velocidad es en la dirección normal a la superficie. Expresando el vector de velocidad mediante sus componentes normal y paralela a la superficie,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$  respectivamente (donde  $\mathbf{v}_\perp = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$ ) se llega a

$$\mathbf{v}_\parallel^i = \mathbf{v}_\parallel^f, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{v}_\parallel^i$  es la componente paralela a la superficie antes de la colisión y  $\mathbf{v}_\parallel^f$  es la misma componente después de la colisión.

La resta indicada en la ecuación (3.2) se puede expresar en términos de las componentes normales:

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_\perp^f - m\mathbf{v}_\perp^i &= \mathbf{F} \\ m\mathbf{v}_\perp^f &= m\mathbf{v}_\perp^i + \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para encontrar la regla de colisión especular hay que utilizar el hecho de que la colisión es elástica (i.e.  $\frac{1}{2}(\mathbf{v}^f)^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^i)^2$ ).

La conservación de la energía se puede reducir a la expresión:

$$\|\mathbf{v}^f\| = \|\mathbf{v}^i\|, \quad (3.5)$$

y dado que sabemos que las componentes paralelas son iguales tenemos

$$\|\mathbf{v}_{\perp}^f\| = \|\mathbf{v}_{\perp}^i\|. \quad (3.6)$$

Sabemos que la fuerza no es nula y por lo tanto,

$$\mathbf{v}_{\perp}^f = -\mathbf{v}_{\perp}^i. \quad (3.7)$$

Intuitivamente este resultado tiene mucho sentido. Para que exista la colisión, la velocidad de la partícula necesita estar dirigida hacia la frontera de la mesa (que la componente perpendicular sea en dirección de la frontera) y en el impacto necesita “rebotar” de la pared en la dirección opuesta.

Sustituyendo la ecuación (3.7) en la expresión  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}$  y simplificando, se obtiene la regla de transformación de la velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^f &= \mathbf{v}^i - 2\mathbf{v}_{\perp}^i \\ &= \mathbf{v}^i - 2(\mathbf{v}^i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

## 3.2. Secciones de Poincaré y el mapeo del billar

Dado un billar en una mesa de dos dimensiones, le corresponde un espacio fase de cuatro dimensiones. Una manera de simplificar el estudio del sistema es reduciendo la dimensionalidad del espacio por medio de *secciones de Poincaré*.

Esto consiste en estudiar un subespacio del espacio fase. La manera más sencilla de hacer esto es tomando un plano del espacio fase que sea transversal a las trayectorias y estudiando las intersecciones de las trayectorias con el plano. Esto reduce el flujo del sistema en el espacio fase completo a un mapeo discreto en el plano.

La elección del subespacio que se utiliza depende del sistema que se esté estudiando. Para el caso de los billares, cuya dinámica dentro de la

región es rectilínea y uniforme, la parte interesante de la dinámica es lo que ocurre en las colisiones.

La manera en la que ocurre la colisión queda completamente determinada si se especifica el punto en la frontera donde ocurrió y el ángulo de reflexión. Por esto, una sección de Poincaré natural es la obtenida con el conjunto

$$\Pi = \partial\mathcal{Q} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.9)$$

donde  $\partial\mathcal{Q}$  es la frontera de la mesa. Cualquier punto sobre la frontera de la mesa queda determinado por la longitud de arco, pues se piensa en la frontera como una curva parametrizada. El intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  representa los posibles ángulos de reflexión después de la colisión.

Este espacio también es conocido en la literatura como el *espacio de colisiones* (ver [5]) pues representa el estado del sistema en los momentos de colisión.

**Definición 6.** *Dado un billar con espacio fase  $X$ . Se le llama espacio de colisiones a la sección de Poincaré  $\Pi \subset X$ , donde  $\Pi = \partial\mathcal{Q} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .*

### 3.2.1. El mapeo del billar

Al utilizar la secciones de Poincaré se reduce la dinámica del billar a un mapeo que lleva un punto  $(s, \theta)$  del espacio de colisiones a la pareja coordenada  $(s', \theta')$  que corresponde a la siguiente colisión.

Llamemos  $\mathcal{T}$  al mapeo. Éste está definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{T} : \Pi \rightarrow \Pi. \quad (3.10)$$

dado por:

$$\mathcal{T}(s, \theta) = (s', \theta'). \quad (3.11)$$

El mapeo  $\mathcal{T}$  depende tanto de la regla de colisión como de la frontera del billar, por lo que puede variar mucho de sistema a sistema.

La forma de la mesa es de suma importancia, pues determina la distancia que tendrá que viajar la partícula antes de llegar al siguiente punto de colisión y a qué parte de la mesa se va a llegar.

En general no se puede reconstruir el mapeo  $\mathcal{T}$  explícitamente. Sin embargo sí se puede obtener una expresión para la derivada.

### Derivada del mapeo

A continuación se obtendrá la derivada del mapeo para un billar. Para hacer esto, es conveniente representar el flujo en términos de coordenadas en el espacio cartesiano. En esta sección estaremos siguiendo a [5].

Denotemos por  $(\bar{x}, \bar{y})$  un punto de colisión (ver la figura 3.1), por  $\hat{\mathbf{t}}$  al vector tangente a la frontera en el punto de colisión y por  $\gamma$  al ángulo entre  $\hat{\mathbf{t}}$  y el eje  $x$ . También denotaremos por  $\psi$  al ángulo entre  $\mathbf{v}$ , la velocidad después de la colisión, y  $\hat{\mathbf{t}}$ .  $\varphi$  es el ángulo formado por la velocidad y el vector normal a la frontera en  $(\bar{x}, \bar{y})$ :

$$\psi = \pi/2 - \varphi. \quad (3.12)$$

Con esta notación podemos expresar a  $\hat{\mathbf{t}}$  como  $\hat{\mathbf{t}} = (\cos \gamma, \sin \gamma)$ . Tomando diferenciales del punto de colisión sobre la frontera de la mesa obtenemos

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \cos \gamma ds, \\ d\bar{y} &= \sin \gamma ds, \\ d\gamma &= -\kappa ds, \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura de la frontera en el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  y se toma con signo negativo por convención.

También denotaremos al ángulo entre  $\mathbf{v}$  y el eje  $x$  por  $\omega$ . El vector  $\mathbf{v}$  lo podemos expresar ahora como  $\mathbf{v} = (\cos \omega, \sin \omega)$ . En la figura 3.1 se puede ver que  $\omega = \gamma + \psi$ .

Además de las diferenciales (3.13) también tenemos la diferencial de  $\omega$ ,

$$d\omega = -\kappa ds + d\psi. \quad (3.14)$$

Lo que buscamos es la derivada del mapeo del billar. Si en el espacio de colisiones tomamos dos puntos de colisión consecutivos queremos ver qué le sucede al segundo punto cuando se varía infinitesimalmente el primero.

Denotemos por  $\mathbf{P} = (s, \varphi)$  al primer punto de colisión. En el espacio cartesiano tiene coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  y la velocidad de la partícula en el momento de la colisión es  $\mathbf{v} = (\cos \omega, \sin \omega)$ . Denotemos al segundo punto de colisión como  $\mathbf{P}_1 = \mathcal{T}(\mathbf{P})$ . En el espacio de colisiones lo podemos expresar como  $\mathbf{P}_1 = (s_1, \varphi_1)$ .

Las diferencias entre las coordenadas de los puntos de colisión están dadas por

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{x}_1 &= t \cos \omega \\ \bar{y} - \bar{y}_1 &= t \sin \omega, \end{aligned} \quad (3.15)$$

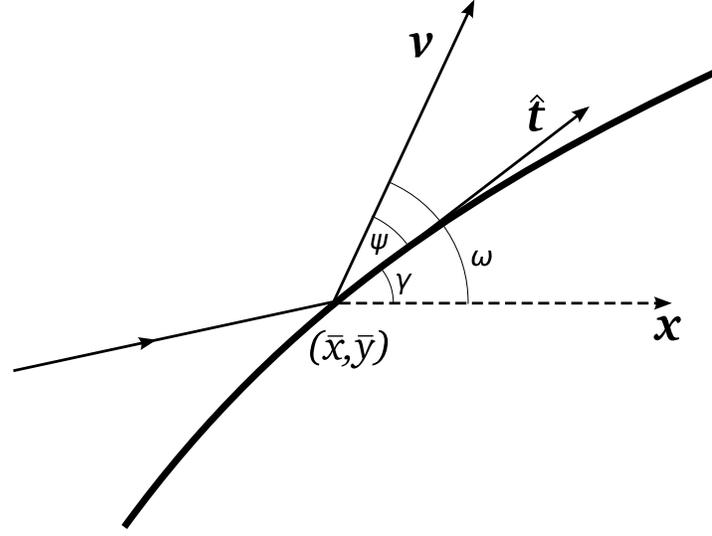


Figura 3.1: Coordenadas en la colisión.

donde  $t$  es el tiempo transcurrido entre las colisiones. Se está tomando  $\mathbf{v}$  como unitario. Estas ecuaciones son más claras si se observa la figura 3.2.

También se puede ver en la figura 3.2 que

$$\omega = \gamma + \psi = \gamma_1 - \psi_1. \quad (3.16)$$

Diferenciando las últimas expresiones se obtiene que  $d\omega$  es

$$d\omega = -\kappa ds + d\psi = -\kappa_1 ds_1 - d\psi_1. \quad (3.17)$$

Diferenciando 3.15 obtenemos que

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 ds_1 - \cos \gamma ds &= \cos \omega dt - t \sin \omega d\omega \\ \sin \gamma_1 ds_1 - \sin \gamma ds &= \sin \omega dt + t \cos \omega d\omega. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ahora podemos multiplicar la primera ecuación de (3.18) por  $\sin \omega$  y la segunda por  $\cos \omega$ . Las restamos para eliminar  $dt$ ,

$$\begin{aligned} \sin \omega (\cos \gamma_1 ds_1 - \cos \gamma ds) - \cos \omega (\sin \gamma_1 ds_1 - \sin \gamma ds) \\ = \sin \omega (\cos \omega dt - t \sin \omega d\omega) - \cos \omega (\sin \omega dt + t \cos \omega d\omega). \end{aligned} \quad (3.19)$$

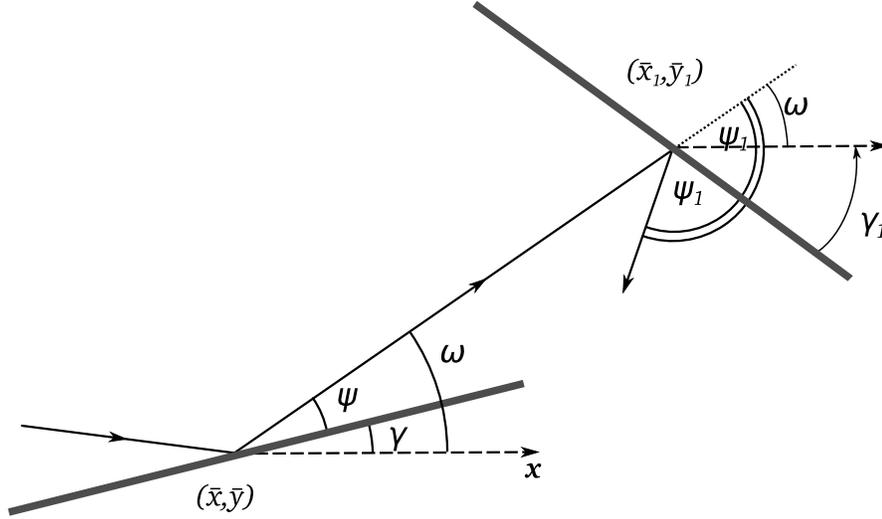


Figura 3.2: Esquema de los puntos de colisión consecutivos.

y obtenemos,

$$\begin{aligned} & \sin \omega (\cos \gamma_1 ds_1 - \cos \gamma ds) - \cos \omega (\sin \gamma_1 ds_1 - \sin \gamma ds) \\ &= -t \sin^2 \omega d\omega - t \cos^2 \omega d\omega. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Los productos de las funciones trigonométricas de  $\gamma$  y  $d\gamma$  se pueden reducir a senos del ángulo  $\psi$  utilizando identidades trigonométricas. Haciendo estas operaciones llegamos a:

$$\sin \psi_1 ds_1 + \sin \psi ds = t d\omega, \quad (3.21)$$

que también es,

$$\cos \varphi_1 ds_1 + \cos \varphi ds = t d\omega. \quad (3.22)$$

Si tomamos en cuenta que  $d\varphi = -d\psi$ , despejamos el primer término de (3.22) y los sustituimos en (3.14) obtenemos,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 dr_1 &= -\kappa t dr - \cos \varphi dr - t d\varphi \\ dr_1 &= \frac{-1}{\cos \varphi_1} [(\kappa t + \cos \varphi) dr + t d\varphi]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para obtener una expresión similar para  $d\varphi$  hay que utilizar el hecho que  $dr_1 = -(d\omega + d\psi_1)/\kappa$ . Esto se obtiene de la expresión para  $d\omega$ . Despejando el primer término como ya se hizo previamente y sustituyendo las expresiones tanto para  $dr_1$  como para  $d\omega$  tenemos:

$$\begin{aligned} -\cos\varphi_1[d\omega - d\varphi_1]/\kappa_1 &= td\omega - \cos\varphi dr \\ -\cos\varphi_1 d\varphi_1 &= (\kappa\kappa_1 t + \kappa \cos\varphi_1 + \kappa_1 \cos\varphi)dr + (\kappa_1 t + \cos\varphi_1)d\varphi \end{aligned} \quad (3.24)$$

de donde se obtiene la expresión para  $d\varphi_1$ :

$$d\varphi_1 = \frac{-1}{\cos\varphi_1} [(\kappa\kappa_1 t + \kappa \cos\varphi_1 + \kappa_1 \cos\varphi)dr + (\kappa_1 t + \cos\varphi_1)d\varphi]. \quad (3.25)$$

De las ecuaciones (3.23) y (3.25) ya es posible obtener una expresión matricial para la derivada del mapeo  $\mathcal{T}$ , que es

$$\mathcal{D}_p \mathcal{T} = \frac{-1}{\cos\varphi_1} \begin{pmatrix} \kappa t + \cos\varphi & t \\ \kappa\kappa_1 t + \kappa \cos\varphi_1 + \kappa_1 \cos\varphi & \kappa t + \cos\varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Los billares que se estudian en esta tesis son poligonales y por lo tanto la curvatura es cero en todos los puntos de la frontera ( $\kappa = \kappa_1 = 0$ ), por lo que la derivada del mapeo se simplifica aún más: a la matriz triangular superior,

$$\mathcal{D}_p \mathcal{T} = \frac{-1}{\cos\varphi_1} \begin{pmatrix} \cos\varphi & t \\ 0 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

La expresión es algo extraña porque aparecen tanto el ángulo de la colisión anterior como el de la colisión actual, así como el tiempo entre las colisiones. El tiempo y los ángulos están determinados por la forma de la frontera de la mesa.

### 3.3. Billares disipativos (inelásticos)

La regla de reflexión especular es una consecuencia de la conservación de la energía, de que se conserva la componente de  $\mathbf{p}$  tangencial a la frontera y que la frontera del billar se considera infinitamente rígida y masiva.

Si estas suposiciones cambian o se introduce un mecanismo de disipación de energía, o incluso otro tipo de fuerza de interacción de la partícula con la

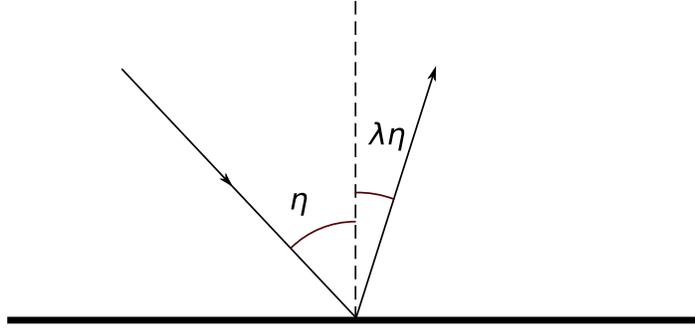


Figura 3.3: Regla de colisión inelástica de contracción del ángulo.

frontera, el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión no tienen por qué ser iguales.

Motivados por el hecho de que las colisiones no tienen que ser elásticas y que esta inelasticidad se puede deber a interacciones físicas entre la partícula y la frontera de la mesa, nos adentramos en el estudio de los billares inelásticos.

La regla de colisión inelástica con la que estamos trabajando ha sido utilizada en diversos estudios ([2], [14]).

La regla de colisión consiste en disminuir el ángulo de reflexión, que llamaremos  $\varphi$ , por un factor  $\lambda$  tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$ :

$$\varphi = \lambda\eta, \quad (3.28)$$

donde  $\eta$  es el ángulo de incidencia ( $\eta = \frac{\pi}{2} - \psi$ ).

La figura 3.3 muestra cómo se contrae el ángulo de reflexión. Es claro que en el caso  $\lambda = 1$  se recupera la colisión elástica.

### 3.3.1. Mapeo *slap*

El mapeo *slap* es el caso límite cuando  $\lambda = 0$  del mapeo presentado anteriormente. En este caso el ángulo de reflexión siempre es cero, la velocidad después de la colisión es normal a la frontera.

El mapeo del billar en este caso se reduce a un mapeo unidimensional definido sobre la frontera de la mesa, pues se pierde toda la dependencia en el ángulo de incidencia.

Debido a esta simplificación es fácil encontrar explícitamente el mapeo. Para el caso de un triángulo equilátero, cuyos lados tienen longitud 1, la expresión del mapeo como función de la longitud de arco  $s$  es,

$$\mathcal{T}(s) = -2s + 3 \pmod{3}. \quad (3.29)$$

Queda más claro si se expresa como una función compuesta de la forma,

$$\mathcal{T}(s) = \begin{cases} -2s + 3, & 0 < s \leq 3/2 \\ -2s + 6, & 3/2 < s \leq 3 \end{cases}. \quad (3.30)$$

Es interesante el hecho de que con la regla de colisión inelástica se recuperen el mapeo *slap* ( $\lambda = 0$ ) y el billar elástico ( $\lambda = 1$ ). Pues corresponden a un mapeo unidimensional y bidimensional respectivamente. Como se verá más adelante, para  $0 < \lambda < 1$ , la dinámica converge a un atractor extraño con dimensión fractal entre uno y dos.

### 3.3.2. Derivada del mapeo inelástico

Para encontrar la derivada del mapeo correspondiente al billar inelástico y expresarla como en la ecuación (3.27) hay que hacer un análisis similar al que se hizo para el caso elástico. Hay que tener más cuidado con los ángulos  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\psi$  y  $\psi_1$ . Mientras en el caso elástico se puede abusar un poco de la notación denotar al ángulo de reflexión con el mismo símbolo que el de incidencia, para las colisiones inelásticas, como no son iguales, hay que tener cuidado con las relaciones entre todos los ángulos involucrados.

Para hacer el análisis hay que renombrar los ángulos y precisar cuáles son. Se van a tomar, como se hizo anteriormente, dos colisiones sucesivas. El ángulo de incidencia con respecto a la normal se va a denotar por  $\eta$ , el ángulo razante de incidencia (entre la trayectoria incidente y la frontera) será  $\sigma$ . El ángulo de reflexión con respecto a la normal será  $\varphi$  y el ángulo razante de reflexión con respecto a la frontera por  $\psi$ .

Los ángulos en la segunda colisión se distinguirán por el subíndice 1 como se hizo anteriormente.

La figura 3.4 muestra el diagrama equivalente a la figura 3.2 para el caso inelástico.

La identidad importante que cambia en el caso inelástico es la expresión para  $\omega$  (3.16), para el caso inelástico se tiene,

$$\omega = \gamma + \psi = \gamma_1 - \sigma_1. \quad (3.31)$$

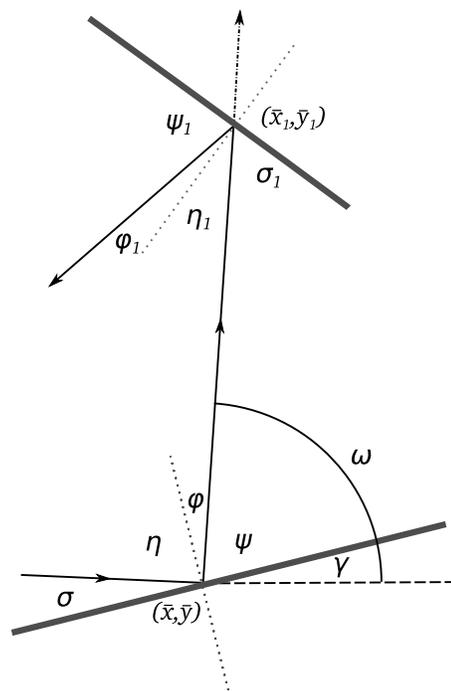


Figura 3.4: Esquema de las colisiones para un caso general (inelástico).

Por lo tanto, la diferencial de  $\omega$  es,

$$d\omega = -\kappa ds + d\psi = -\kappa_1 ds_1 - d\sigma_1. \quad (3.32)$$

Sustituyendo los ángulos adecuados en las otras expresiones, obtenemos que la ecuación equivalente a (3.22) ya no está dada en términos de  $\varphi_1$ , sino de  $\eta_1$  debido a que los ángulos  $\eta$  y  $\varphi$  ya no son iguales. La ecuación que se obtiene es:

$$\cos \eta_1 ds_1 + \cos \varphi ds = td\omega. \quad (3.33)$$

Hay que proceder de manera análoga al caso elástico para obtener las expresiones de  $ds_1$  y  $d\varphi_1$ .

Para encontrar  $ds_1$ , partimos de

$$\cos \eta_1 ds_1 = td\omega - \cos \varphi ds. \quad (3.34)$$

Sustituyendo  $d\omega$  por  $(-\kappa ds - d\varphi)$  y despejando  $ds_1$ , obtenemos

$$ds_1 = \frac{-1}{\cos \eta_1} [(\kappa t + \cos \varphi) ds + td\varphi]. \quad (3.35)$$

Para encontrar la expresión correspondiente para  $d\varphi_1$ , se parte de la misma ecuación, pero se sustituye  $ds_1$  por su expresión dada en términos de  $d\omega$  y  $d\sigma$  (tomando en cuenta que  $d\omega = -\kappa_1 ds_1 - d\sigma_1$ ). La expresión resultante es

$$\cos \eta_1 \frac{d\omega + d\sigma_1}{-\kappa_1} = td\omega - \cos \varphi ds. \quad (3.36)$$

Sustituyendo  $d\omega$  nuevamente del lado derecho y recolectando términos obtenemos la expresión final para  $d\sigma_1$ ,

$$d\sigma_1 = \frac{1}{\cos \eta_1} \{[\kappa_1 \kappa t + \kappa_1 \cos \varphi + \kappa \cos \eta_1] ds [\cos \eta_1 + \kappa_1 t] d\varphi\}. \quad (3.37)$$

Hasta el momento, todo el desarrollo ha sido general para cualquier regla de colisión. Pero para obtener la derivada del mapeo hay que necesitamos encontrar la diferencial  $d\varphi_1$ .

Para el caso en que  $\kappa_1 = 0$ , no se puede hacer el desarrollo de la ecuación 3.36. En esta situación se parte del hecho que:

$$\cos \eta_1 \kappa ds_1 = 0, \quad (3.38)$$

y dado que  $-\kappa ds_1 = d\omega + d\sigma_1$  se obtiene que,

$$\cos \eta_1 d\sigma_1 = -\cos \eta_1 d\omega. \quad (3.39)$$

Si se hace el desarrollo, se encuentra que el resultado es igual que si en la ecuación (3.37) se sustituyera  $\kappa_1 = 0$ .

Esto es importante, pues el presente trabajo trata billares en mesas poligonales, cuyas fronteras están compuestas por segmentos rectos entonces  $\kappa = 0$  para cualquier punto en la frontera.

### Regla inelástica con fronteras planas

Para encontrar la derivada del mapeo inelástico es necesario pasar de la ecuación (3.37) en términos de  $d\sigma_1$  a una ecuación en términos de  $d\varphi_1$ . La manera de hacer esto es expresar la regla de colisión en términos diferenciales.

Partimos de

$$d\varphi_1 = \lambda d\eta_1, \quad (3.40)$$

y de que el ángulo  $\psi_1$  se puede expresar en términos de  $\sigma_1$  y  $\eta_1$ ,

$$\psi_1 = \sigma_1 + (1 - \lambda)\eta_1. \quad (3.41)$$

Entonces tenemos que

$$d\psi_1 = d\sigma_1 + (1 - \lambda)d\eta_1. \quad (3.42)$$

Recordando además que  $d\psi_1 = -d\varphi_1$  y sustituyendo  $d\eta_1 = d\varphi_1/\lambda$ , obtenemos

$$-d\varphi_1 = d\sigma_1 + \frac{1 - \lambda}{\lambda}d\varphi_1. \quad (3.43)$$

De aquí obtenemos que la regla de transformación de  $d\varphi_1$  está dada por

$$d\varphi_1 = \frac{-\lambda}{\cos \eta_1} \{ [t\kappa_1\kappa + \kappa_1 \cos \varphi + \kappa \cos \eta_1] ds + [\cos \eta_1 + t\kappa_1] d\varphi \}. \quad (3.44)$$

Para billares con esta regla de colisión en una mesa poligonal ( $\kappa = \kappa_1 = 0$ ), se obtiene la siguiente matriz para la derivada del mapeo:

$$D_p \mathcal{T} = - \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{\cos \eta_1} & \frac{t}{\cos \eta_1} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

### Caso más general

Un caso más general de las reglas de colisión inelásticas de este tipo contempla que el ángulo de salida puede depender tanto del ángulo de entrada como del punto de colisión. Los autores de [14] expresan este tipo de reglas como una perturbación del caso elástico de la siguiente manera (salvo por una diferencia de signo):

$$\varphi_1 = \eta_1 + f(s_1, \eta_1), \quad (3.46)$$

donde la función  $f$  es la perturbación. Esta ecuación implica que

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= d\eta_1 + f_s(s_1, \eta_1)ds_1 + f_\eta(s_1, \eta_1)d\eta_1 \\ &= [1 + f_\eta(s_1, \eta_1)]d\eta_1 + f_s(s_1, \eta_1)ds_1. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ahora utilizamos que  $\eta_1 = \pi/2 - \sigma_1$  para obtener  $d\varphi$  en términos del diferencial de  $\sigma$  en lugar de  $\eta_1$ ,

$$d\varphi_1 = -[1 + f_{\eta_1}(s_1, \eta_1)]d\sigma_1 + f_s(s_1, \eta_1)ds_1. \quad (3.48)$$

Para obtener la matriz para la derivada del mapeo, falta sustituir  $d\sigma_1$  y  $ds_1$  por sus expresiones en términos de  $d\varphi$  y  $ds$  que son las ecuaciones (3.37) y (3.35) respectivamente.

Haciendo la sustitución y recolectando términos, se obtiene

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{-1}{\cos \eta_1} \{ ([t\kappa\kappa_1 + \kappa_1 \cos \varphi + \kappa \cos \eta_1](1 + f_\eta) - [t\kappa + \cos \varphi_1]f_s)ds \\ &\quad + ([\cos \eta_1 + t\kappa_1](1 + f_\eta) - tf_s)d\varphi \}; \end{aligned} \quad (3.49)$$

las derivadas parciales  $f_s$  y  $f_\eta$  están siendo evaluadas en el punto  $(s_1, \eta_1)$ .

Ahora ya se puede expresar la matriz correspondiente a la derivada del mapeo para una regla de colisión general:

$$D_p \mathcal{T} = \frac{-1}{\cos \eta_1} \cdot \begin{pmatrix} \kappa t + \cos \varphi & t \\ [t\kappa_1\kappa + \kappa_1 \cos \varphi + \kappa \cos \eta_1](1 + f_\eta) - [t\kappa + \cos \varphi_1]f_r & [\cos \eta_1 + t\kappa_1](1 + f_\eta) - tf_s \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

### Regla inelástica general con fronteras planas

Para dar explícitamente la derivada de un mapeo inelástico cuando el billar es en una mesa poligonal, tomamos la versión simplificada de (3.50) cuando  $\kappa = \kappa_1 = 0$ . También se anula la derivada  $f_r$ , pues la regla no depende del punto de colisión. Por lo tanto obtenemos

$$D_p \mathcal{T} = - \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{\cos \eta_1} & \frac{t}{\cos \eta_1} \\ 0 & 1 + f_\eta(s_1, \eta_1) \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Si tenemos una regla que transforma el ángulo de salida mediante una función que únicamente depende del ángulo de incidencia,  $\varphi = g(\eta)$ , entonces podemos escribir la perturbación del mapeo como

$$f(\eta) = g(\eta) - \eta, \quad (3.52)$$

para que se cumpla la relación  $\varphi = \eta + f(\eta)$ . Por lo tanto,

$$f_\eta(\eta_1) = g_\eta(\eta_1) - 1. \quad (3.53)$$

Entonces, la derivada explícita de un mapeo inelástico es

$$D_p \mathcal{T} = - \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{\cos \eta_1} & \frac{t}{\cos \eta_1} \\ 0 & g_\eta(\eta_1) \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

## 3.4. Billares en polígonos

Los billares en los que se ha observado caos son billares con fronteras focalizantes o desfocalizantes como lo son el estadio de Bunimovich y el billar de Sinai. Sin embargo, los billares en mesas poligonales también tienen su atractivo.

### 3.4.1. Desdoblamiento y ángulos posibles

Para un billar en una mesa poligonal con  $n$  lados y una condición inicial dada, sólo hay  $n$  posibles ángulos de salida que puede adquirir la partícula

cuando se tienen colisiones elásticas. Una manera de ver esto es entendiendo los billares en un polígono por medio de transformaciones que se les llama desdoblamientos.

Para entender cómo funcionan los desdoblamientos, se puede imaginar la partícula viajando hacia un lado del polígono, y en vez de que se refleje la trayectoria de la partícula como un rayo de luz en un espejo, se puede trazar la imagen de la trayectoria afuera del polígono. Al hacer esto, en realidad se está reflejando el polígono sobre el lado donde ocurrió la colisión; se está desdoblado el polígono en vez de reflejar la trayectoria de acuerdo a la regla de colisión.

La figura 3.5 muestra cómo una trayectoria se puede ver por medio de desdoblamientos. Los vértices del triángulo se etiquetan 1, 2 y 3 para visualizar mejor las colisiones y la posición de la partícula.

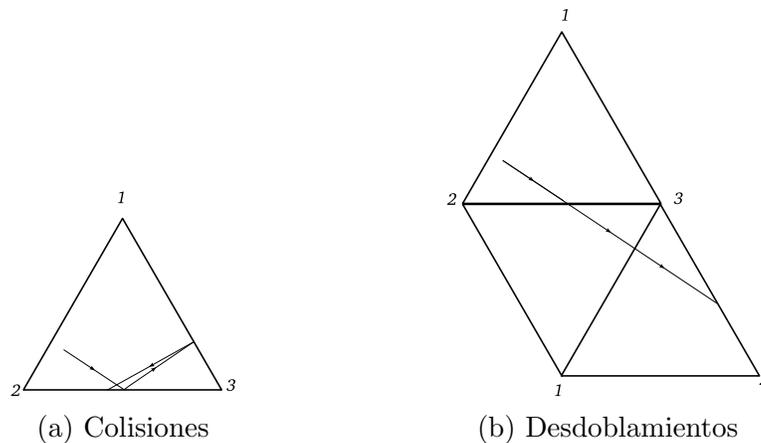


Figura 3.5: Una trayectoria desde el punto de vista de las colisiones y de desdoblamientos.

Cuando se utiliza el espacio desdoblado, la partícula sigue una trayectoria recta en todo momento y al llegar a la frontera, en vez de reflejarse de manera especular, se puede reflejar el polígono sobre el lado de colisión. La posición de la partícula en el polígono está dada por su posición en el nuevo polígono reflejado. En cada desdoblamiento se invierte la orientación, pero debido a la regla de colisión elástica esto no es un problema pues una inversión de orientación simplemente representa la inversión del vector velocidad.

Cada dos colisiones, el polígono regresa a su orientación inicial y el nuevo

triángulo por el cual continúa la trayectoria de la partícula se obtiene mediante una rotación. El ángulo de rotación depende de los ángulos internos del polígono. Como sólo hay  $n$  lados, sólo hay  $n$  desdoblamientos distintos posibles (se están ignorando los que cambian la orientación pues las inversiones no introducen ángulos nuevos).

Se puede concluir que para colisiones elásticas con la frontera, las órbitas no exploran todo el espacio fase, pues el vector de velocidad solo toma  $n$  posibles direcciones.

Debido a que en los polígonos las fronteras son planas, la dinámica en un billar poligonal elástico no es ergódica.

Sin embargo, se sabe que en otros sistemas dinámicos, una manera de introducir un comportamiento caótico a algún sistema es por medio de algún mecanismo de disipación energética [20].

### 3.5. Algoritmo para encontrar colisiones subsecuentes

El algoritmo que da los puntos de colisión se basa en seguir una línea recta (con velocidad unitaria) que sale del punto de colisión en la dirección dada por el ángulo de reflexión hasta encontrar la siguiente frontera.

Para fronteras compuestas por elementos planos, el algoritmo se reduce a encontrar los puntos de intersección de las rectas que forman la frontera y de esa manera determinar el tiempo en el que ocurre la colisión.

Lo que se hace es lo siguiente:

1. Dado el punto y la velocidad inicial, se expresa la trayectoria como una recta parametrizada por el tiempo.
2. Se calculan los puntos de intersección de la trayectoria con las rectas que forman la frontera del polígono.
3. Se determina cuanto vale el parámetro (el tiempo) en esos puntos.

Vectorialmente, esto se obtiene sustituyendo la ecuación de la trayectoria,  $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t$ , en la ecuación de cada uno de los planos que forman la frontera,  $\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{c}) = 0$ , y encontrando el tiempo de intersección  $t^*$  que resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x}_{t^*} - \mathbf{c}) = 0, \quad (3.55)$$

así que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t^* - \mathbf{c}) = 0, \quad (3.56)$$

y entonces

$$t^* = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{p}_0 - \mathbf{c})}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}}, \quad (3.57)$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad de la partícula,  $\mathbf{x}_0$  es el punto de la colisión anterior,  $\mathbf{x}_t$  es el punto de la nueva colisión,  $\mathbf{c}$  es un punto arbitrario sobre el plano y  $t^*$  es el tiempo de intersección para el que hay que resolver la ecuación. El término de la izquierda de la última expresión es simplemente la distancia ortogonal al plano dividida entre la velocidad en la dirección ortogonal al plano.

La virtud de este tratamiento vectorial es que funciona para fronteras de cualquier dimensión y el tiempo de intersección que se encuentra es exacto. No se utilizan intervalos de tiempo  $\delta t$  para aproximar los tiempos de intersección.

# Capítulo 4

## Exponentes de Lyapunov en billares

En este capítulo se calcula la dinámica que siguen los vectores del espacio tangente al espacio fase con los cuales se calculan los exponentes de Lyapunov. También se explica el método numérico de Benettin que se usa junto con el método de Dellago *et al.* ([7]) que hace posible realizar este cálculo.

### 4.1. La dinámica de un billar y de los vectores del espacio tangente

Una manera de ver un billar es como un sistema en el que la dinámica alterna entre un flujo continuo y colisiones en tiempos discretos. Mientras la partícula viaja dentro de la mesa, esta sigue una dinámica sencilla que se interrumpe cuando la partícula alcanza la frontera. En ese momento se refleja de acuerdo a alguna regla de colisión.

La alternancia entre un flujo continuo y un mapeo discreto hace que el cálculo de exponentes de Lyapunov se complique. A continuación se describirá la dinámica de los billares desde este nuevo punto de vista en que se alterna un flujo continuo con un mapeo discreto. A este tipo de sistemas se les llamará *híbridos* a lo largo de la tesis. El propósito de exponer los billares de esta manera es permitir que se encuentre un método para calcular los exponentes de Lyapunov de las trayectorias.

El tratamiento a continuación se apoya fuertemente en [7]. Éste es un tratamiento general para sistemas híbridos pero lo ejemplificaremos para bi-

llares.

En el interior de la mesa la partícula sigue una dinámica de tiempo continuo. Por lo tanto, para un punto  $\Gamma$  del espacio fase:

$$\dot{\Gamma} = \mathbf{F}(\Gamma). \quad (4.1)$$

Una trayectoria en el espacio fase con punto inicial  $\Gamma_0$  está dada por la acción del flujo,

$$\Gamma(t) = \phi^t \Gamma_0, \quad (4.2)$$

siempre y cuando  $\Gamma(t)$  permanezca en el interior de la mesa.

Cuando la partícula entra en contacto con la frontera, se aplica un mapeo  $M$ , que lleva un punto  $\Gamma$  del espacio fase a uno nuevo  $\Gamma'$  dado por:

$$\Gamma' := M(\Gamma). \quad (4.3)$$

Para describir lo que sucede en el sistema a cualquier tiempo, se identifican los tiempos cuando ocurren las colisiones. El conjunto de estos tiempos es  $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots\}$ . Bajo la acción del mapeo la trayectoria se vuelve discontinua en el espacio fase.

Tomando en cuenta estos factores, una órbita en el espacio fase está dada por una composición de funciones de la forma siguiente,

$$\Gamma(t) = (\Phi^{t-\tau_n} \circ M \circ \Phi^{\tau_n-\tau_{n-1}} \circ \dots \circ M \circ \Phi^{\tau_2-\tau_1} \circ M \circ \Phi^{\tau_1})(\Gamma_0). \quad (4.4)$$

Dada una condición inicial  $\Gamma_0$  en el espacio fase y un vector de desplazamiento inicial  $\delta\Gamma_0$  en el espacio tangente, el exponente de Lyapunov está dado por:

$$\lambda(\Gamma_0, \delta\Gamma_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta\Gamma(t)\|}{\|\delta\Gamma_0\|}. \quad (4.5)$$

Los vectores  $\delta\Gamma$  se construyen tomando dos puntos unidos por alguna curva parametrizada por  $s$  y tomando el límite conforme el parámetro tiende a cero:

$$\delta\Gamma := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma_s(t) - \Gamma(t)}{s}, \quad (4.6)$$

donde  $\Gamma_s$  es el punto desplazado sobre la curva.

Como se está tomando el límite,  $\delta\Gamma$  en realidad es un vector que representa un desplazamiento infinitesimal que corresponde a una aproximación de un vector en el espacio tangente.

#### 4.1. LA DINÁMICA DE UN BILLAR Y DE LOS VECTORES DEL ESPACIO TANGENTE 47

Para poder calcular los exponentes de Lyapunov se necesita conocer cómo evolucionan en el tiempo los vectores  $\delta\mathbf{\Gamma}$ . La evolución depende tanto del flujo como del mapeo.

Para ver cómo evoluciona  $\delta\mathbf{\Gamma}$  en el interior de la mesa, veamos la trayectoria que sigue el punto  $\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma})^\cdot &= \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma}), \\ \dot{\mathbf{\Gamma}} + \delta\dot{\mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) + D\mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma} + \mathcal{O}(\mathbf{\Gamma}^2), \\ &= \dot{\mathbf{\Gamma}} + D\mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma} + \mathcal{O}(\mathbf{\Gamma}^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por lo tanto,

$$\delta\dot{\mathbf{\Gamma}} \simeq D\mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma}. \quad (4.8)$$

La dinámica que sigue el vector  $\delta\mathbf{\Gamma}$ , se obtiene aplicando la regla de la cadena a la expresión (4.4):

$$\delta\mathbf{\Gamma}(t) = (L^{t-\tau_n} \cdot S \cdot L^{\tau_n-\tau_{n-1}} \dots S \cdot L^{\tau_2-\tau_1} \cdot S \cdot L^{\tau_1})(\delta\mathbf{\Gamma}_0), \quad (4.9)$$

donde  $L^t$  es la derivada del flujo con respecto a las variables del espacio fase y  $S = DM(\mathbf{\Gamma})$ .

Para tener una idea intuitiva de lo que sucede, podemos pensar en una órbita que se sigue y en su órbita *satélite* que va desfasada de la original por el vector  $\delta\mathbf{\Gamma}$ . Cabe mencionar que nos interesa el comportamiento cercano a la trayectoria, por lo que después de cada iteración del mapeo, es conveniente elegir otro  $\delta\mathbf{\Gamma}$ . Entonces el vector  $\delta\dot{\mathbf{\Gamma}}$  mide la tasa a la que se separa la trayectoria satélite de la trayectoria original. La figura 4.1 muestra la dinámica de una posible trayectoria en el espacio fase y su órbita satélite.

Analicemos lo que sucede con la trayectoria de referencia y la trayectoria satélite cuando ocurre una colisión.

Consideremos primero el efecto de una colisión sobre los vectores tangentes. Denotemos por  $\mathbf{\Gamma}_c$  al punto en el espacio fase donde al tiempo  $\tau_c$  ocurre la colisión. Este punto, bajo el  $\mathbf{M}$ , va a dar a  $\mathbf{\Gamma}'$ .

La trayectoria satélite, al estar desplazada, sufre la colisión en otro punto, dado por  $\mathbf{\Gamma}_c + \delta\mathbf{\Gamma}_c$ . Que bajo la acción del mapeo, va a dar a  $\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}_c + \delta\mathbf{\Gamma}_c)$ .

En general, cómo las trayectorias van desfasadas, las colisiones no ocurren al mismo tiempo: Entre las colisiones de la trayectoria satélite y la de referencia transcurre un tiempo,  $\delta\tau_c$ . A  $\delta\tau_c$ , lo llamaremos el tiempo de desfase. Durante este intervalo de tiempo, la trayectoria de referencia se sigue

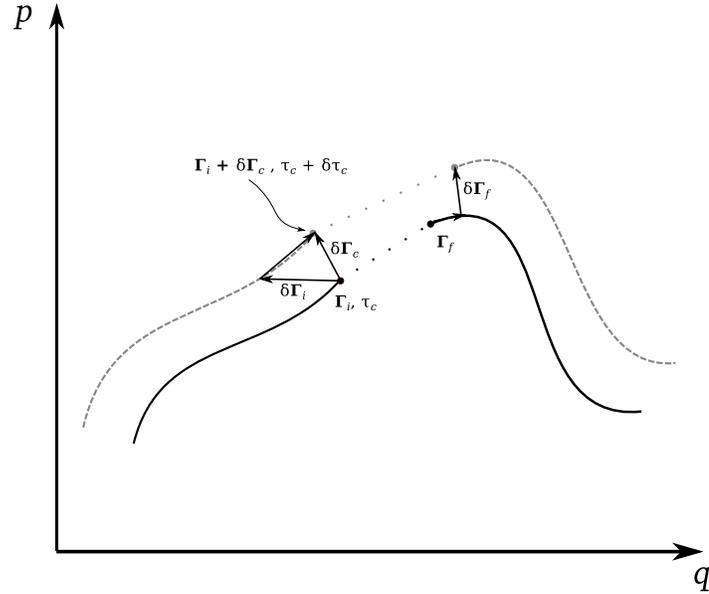


Figura 4.1: Trayectoria en una dinámica híbrida con un mapeo discreto.

desplazando. Tomando la aproximación de tiempo pequeño el punto al que llega la trayectoria de referencia durante este tiempo es

$$\phi^{\tau_c}(\mathbf{\Gamma}') \simeq \mathbf{\Gamma}' + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}') \cdot \tau_c. \quad (4.10)$$

Por lo tanto, el nuevo vector de separación después de la colisión,  $\delta\mathbf{\Gamma}'$ , dado por:

$$\delta\mathbf{\Gamma}' = \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma}_c) - [\mathbf{\Gamma}' + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}') \cdot \delta\tau_c]. \quad (4.11)$$

Es la diferencia entre los puntos después de las dos colisiones.

Se está buscando expresar el vector tangente nuevo en términos de  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{F}$ , el punto de colisión  $\mathbf{\Gamma}'$  y  $\tau_c$ .

Comencemos por  $\delta\mathbf{\Gamma}_c$ , que es el vector que va del punto de colisión de referencia, al punto de colisión satélite. En su aproximación lineal está dado por:

$$\delta\mathbf{\Gamma}_c = \delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c. \quad (4.12)$$

El término  $\mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c$  representa la aproximación lineal del desplazamiento que hubiera seguido la trayectoria de referencia durante el tiempo de desfase de colisión y se está sumando al vector de desplazamiento entre las trayectorias al momento de la primera colisión.

Sustituyendo (4.12) en la expresión (4.11) para  $\delta\mathbf{\Gamma}'$  se obtiene:

$$\delta\mathbf{\Gamma}' \simeq \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma} + [\delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c]) - [\mathbf{\Gamma}' + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}') \cdot \delta\tau_c]. \quad (4.13)$$

Ahora utilizamos la aproximación lineal para  $\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma})$ ,

$$\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma} + \delta\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}) + DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma}, \quad (4.14)$$

y la aplicamos al primer término de la ecuación (4.13), para obtener:

$$\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma} + [\delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c]) = \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}) + DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot (\delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c). \quad (4.15)$$

Sustituir esto en la ecuación original, permite hacer las siguientes simplificaciones:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{\Gamma}' &= \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}) + DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot [\delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c] - [\mathbf{\Gamma}' + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}') \cdot \delta\tau_c] \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{\Gamma}' + DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot [\delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c] - \mathbf{F}(\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma})) \cdot \delta\tau_c \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}) + DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot [\delta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\tau_c] - \mathbf{F}(\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma})) \cdot \delta\tau_c \\ &= DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma} + [DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{F}(\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}))] \cdot \delta\tau_c. \end{aligned} \quad (4.16)$$

El primer término de la expresión final de la derivación (4.16) es la transformación lineal aplicada al vector tangente en el momento de la primera colisión.

En el segundo término,  $DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{F}(\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}))$ , es una diferencia de vectores en donde el vector *final*, es la transformación de la velocidad al momento de la colisión debido al mapeo. El vector *inicial* es la velocidad que tendría  $\mathbf{\Gamma}$  si comenzara su dinámica desde el punto  $\mathbf{\Gamma}'$ . Esta diferencia de vectores se multiplica por el tiempo de desfase.

Es segundo término proviene del comportamiento del flujo debido al cambio repentino en la posición del sistema y del efecto de desfase temporal. Es la diferencia entre los casos en el que se aplica primero el mapeo y luego se sigue el flujo o si se comienza el flujo a partir del punto final de la colisión.

La ecuación obtenida al final de la derivación (4.16),

$$\delta\mathbf{\Gamma}' = DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma} + [DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{F}(\mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}))] \delta\tau_c, \quad (4.17)$$

es la que rige como evoluciona el vector tangente en una colisión.

Para poder calcular los exponentes de Lyapunov, se necesita conocer explícitamente  $DM$ .

### 4.1.1. Derivada del mapeo de colisión para el caso elástico

En esta sección se obtendrán la matriz correspondientes a la derivada totales para la reflexión elástica.

Tomaremos un espacio fase 4-dimensional que le corresponde a un billar en una mesa plana, con dos variables correspondientes a las dos componentes de la posición y dos variables correspondientes a las componentes del momento.

Los vectores en el espacio fase son de la forma:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Cuando la partícula se mueve en el interior de la mesa, no hay fuerzas que actúan sobre ella y se mueve con velocidad constante, por lo que  $\dot{\Gamma}$  se reduce a

$$\dot{\Gamma} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}/m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Para el vector tangente, la dinámica se rige por (4.8), por lo tanto

$$\delta\Gamma_i(t) = \delta\Gamma_i + t D\mathbf{F}(\Gamma_i) \cdot \delta\Gamma_i, \quad (4.20)$$

donde los subíndices  $i$  denotan el vector tangente después de la  $i$ -ésima colisión. Como en nuestro caso,  $\mathbf{F}$  son las ecuaciones de movimiento para la partícula libre, y  $\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$  tenemos que

$$\mathbf{F}(\Gamma) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

y por lo tanto

$$D\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_i(t) &= \delta\Gamma_i + t D\Gamma_i \cdot \delta\Gamma_i \\ &= \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q}_i \\ \delta\mathbf{p}_i \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \delta\mathbf{p}_i \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como ya se vio previamente, en las colisiones es conveniente separar la velocidad en componentes normal y tangencial a la frontera. La colisión se reduce a la inversión de la componente normal, mientras la componente tangencial permanece constante:

$$\Gamma' = M(\Gamma) = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} - 2(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

La velocidad se toma como un vector con magnitud unitaria y la reflexión es especular. Los ángulos los mediremos con respecto a la normal de la frontera.

Esto significa que la reflexión no depende explícitamente de la posición en el espacio fase, sino de la velocidad y el vector normal. La dependencia espacial está implícita en la función del vector normal definida a lo largo de la frontera de la mesa y la transformación no mezcla variables espaciales con momentos.

Con esta información, se pueden inferir la parte superior de la matriz correspondiente a la derivada de la transformación. Ésta es una matriz de  $4 \times 4$  que podemos subdividir en cuatro bloques de  $2 \times 2$  que corresponden a las esquinas de la matriz,

$$DM = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

El  $\mathbf{1}$  y el  $\mathbf{0}$  son las matrices identidad y la matriz de ceros de  $2 \times 2$  respectivamente. La matriz  $\mathbb{A}$  es la submatriz (también de  $2 \times 2$ ) que contiene la información importante del mapeo: cómo se transforman los momentos.

Para encontrar  $\mathbb{A}$ , hay que partir de la acción del mapeo.

Sean  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_f$  el momento inicial y final, respectivamente después de una colisión. Por la forma de la matriz  $DM$ , sabemos que:

$$\mathbf{p}_f = \mathbb{A} \cdot \mathbf{p}_i \quad (4.26)$$

Para hacer esto, es conveniente analizar como se transforman los vectores de momento. Separándolos en las componentes tangentes y normales a la frontera, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= (\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}} + (\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{p}_f &= (\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}} - (\mathbf{p}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

En lo que sigue de la derivación se utilizará  $\mathbf{p}$  en lugar de  $\mathbf{p}_i$  y nos enfocaremos en  $\mathbf{p}_f$ . Expresando  $\hat{\mathbf{t}}$  y  $\hat{\mathbf{n}}$  en términos de sus componentes, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_f &= (p_1 t_1 + p_2 t_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} - (p_1 n_1 + p_2 n_2) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 t_1 t_1 + p_2 t_2 t_1 - p_1 n_1 n_1 - p_2 n_2 n_1 \\ p_1 t_1 t_2 + p_2 t_2 t_2 - p_1 n_1 n_2 - p_2 n_2 n_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Recolectando términos para las componentes del momento, se obtiene

$$\mathbf{p}_f = \begin{pmatrix} p_1(t_1 t_1 - n_1 n_1) + p_2(t_2 t_1 - n_1 n_2) \\ p_1(t_1 t_2 - n_1 n_2) + p_2(t_2 t_2 - n_2 n_2) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

De esta última expresión, podemos extraer una ecuación matricial para la transformación del momento:

$$\mathbf{p}_f = \begin{pmatrix} (t_1 t_1 - n_1 n_1) & (t_2 t_1 - n_1 n_2) \\ (t_1 t_2 - n_1 n_2) & (t_2 t_2 - n_2 n_2) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p}. \quad (4.30)$$

Para simplificar estas ecuaciones vale la pena recordar que los vectores normal y tangente a la frontera son unitarios y, por supuesto, ortogonales entre sí, por lo que aplican las identidades,

$$\begin{aligned} t_1 &= n_2 \\ t_2 &= -n_1. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Esto se puede utilizar para expresar  $\mathbb{A}$  en términos de vector normal únicamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} (n_2 n_2 - n_1 n_1) & (-n_1 n_2 - n_1 n_2) \\ (-n_2 n_1 - n_1 n_2) & (n_1 n_1 - n_2 n_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_2^2 - n_1^2 & -2n_1 n_2 \\ -2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Los elementos de la diagonal se pueden simplificar si se expresa el vector normal,  $\hat{\mathbf{n}}$  en términos de sus cosenos directores (i.e.  $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ), es decir:  $n_1 = \cos \theta$  y  $n_2 = \sin \theta$ . Entonces,

$$\begin{aligned} n_2^2 - n_1^2 &= 1 - 2n_1^2, \\ n_1^2 - n_2^2 &= 1 - 2n_2^2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

y por lo tanto

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1 n_2 \\ -2n_2 n_1 & 1 - 2n_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

o sea

$$\mathbb{A} = \mathbf{1} - 2\mathbb{A}' \quad (4.35)$$

Donde  $\mathbf{1}$  es la matriz identidad y

$$\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 \\ n_2 n_1 & n_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Ahora ya podemos expresar la derivada de la colisión únicamente en términos del vector normal:

$$\begin{aligned}
DM &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} - 2\mathbb{A}' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} - 2(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) \end{pmatrix}, \tag{4.37}
\end{aligned}$$

donde  $\otimes$  representa el producto exterior.

En forma no abreviada se tiene:

$$DM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 \\ 0 & 0 & -2n_2n_1 & 1 - 2n_2^2 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Ya se puede encontrar una expresión compacta para la transformación del vector tangente cuando ocurre una colisión. Solamente falta hacer los cálculos correspondientes a los términos de la ecuación (4.17).

Recordemos que la ecuación (4.17) indica como se transforma el vector  $\delta\Gamma$ :

$$\delta\Gamma' = DM(\Gamma) \cdot \delta\Gamma + [DM(\Gamma) \cdot \mathbf{F}(\Gamma) - \mathbf{F}(M(\Gamma))] \delta\tau_c,$$

### Primer término

Se puede comenzar por el primer término ( $DM(\Gamma) \cdot \delta\Gamma$ ) y expresamos el vector tangente en términos de la posición y el momento, i.e,

$$\delta\Gamma = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta\mathbf{p} \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Entonces,

$$DM(\Gamma) \cdot \delta\Gamma = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \mathbb{A} \cdot \delta\mathbf{p} \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

La multiplicación de la matriz  $\mathbb{A}$  por el vector  $\delta\mathbf{p}$  la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} \cdot \delta\mathbf{p} &= (1 - 2\mathbb{A}') \cdot \delta\mathbf{p} \\ &= \delta\mathbf{p} - 2(\delta\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}\end{aligned}\tag{4.41}$$

Pues,

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}.\tag{4.42}$$

Entonces el primer término de (4.17) resulta:

$$DM(\Gamma) \cdot \delta\Gamma = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} \\ \delta\mathbf{p} - 2(\delta\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix}.\tag{4.43}$$

### Segundo término

El segundo término es mejor descomponerlo en sus dos partes:  $\frac{\partial M}{\partial \Gamma}$  y  $\mathbf{F}(M(\Gamma))$ , el producto con el tiempo de desfase se contemplará después. Empezando con la primera parte tenemos:

$$\begin{aligned}DM(\Gamma) \cdot \mathbf{F}(\Gamma) &= \frac{\partial M}{\partial \Gamma} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p}/m \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}/m \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

La segunda parte es

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(M(\Gamma)) &= \mathbf{F} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_f \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_f/m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.45}$$

donde  $\mathbf{p}_f$  representa el momento después de la colisión.

Tomemos la masa de la partícula,  $m = 1$ , y hacemos la resta de las dos partes como indica la ecuación (4.17), la parte de adentro de los corchetes se vuelve:

$$\begin{aligned} DM(\Gamma) \cdot \mathbf{F}(\Gamma) - \mathbf{F}(M(\Gamma)) &= \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $\Delta \mathbf{p}$  es el cambio en el vector de momento debido a la colisión i.e.  $\Delta \mathbf{p} = -2(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$ . Falta multiplicar por el tiempo de desfase de la colisión, que es lo que se hace a continuación, recordando que  $\delta\tau_c = -\frac{\delta \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \delta\tau_c &= - \begin{pmatrix} -2(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\delta \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \\ &= - \begin{pmatrix} 2(\delta \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Juntando los dos términos de acuerdo a la ecuación (4.17) obtenemos la nueva expresión de  $\delta\Gamma$ :

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \mathbf{p} - 2(\delta \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2(\delta \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Por lo tanto, la regla de transformación para el vector tangente en una colisión elástica es

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{q} - 2(\delta \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \\ \delta \mathbf{p} - 2(\delta \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

En la colisión, tanto las componentes espaciales como las de momento del vector  $\delta\Gamma$  se reflejan de la misma manera que lo hace la velocidad de la partícula: se invierten las componentes normales a la frontera. Es similar a el proceso bajo el cual se invierte una imagen en un espejo. La figura 4.2 muestra como se refleja la componente espacial de  $\delta\Gamma$ .

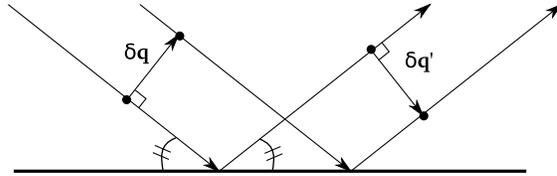


Figura 4.2: Reflexión de rayos paralelos en una superficie plana

## 4.2. Cálculos numéricos de exponentes de Lyapunov

En [3], Benettin presenta un método numérico para calcular los exponentes de Lyapunov para un sistema. Su método consiste en avanzar la dinámica simultáneamente para las ecuaciones de movimiento del sistema y para sus vectores tangentes  $\delta\Gamma$ . Durante la dinámica, los vectores tangentes se van transformando de acuerdo a las ecuaciones expuestas anteriormente pero se tienen que ir ortogonalizando mediante el método de Gram-Schmidt.

El valor de los exponentes, se calcula al ir midiendo que tan rápido crecen estos vectores conforme transcurre el tiempo.

La virtud del método es que evade problemas numéricos que surgen al tratar de calcular los exponentes individualmente.

En una dinámica caótica, el exponente positivo más grande domina la transformación del paralelogramo definido por los vectores  $\delta\Gamma^i$ , causando que estos se vayan alineando con la dirección de estiramiento del espacio fase. Cualquier vector  $\delta\Gamma$  con el que se inicie el cálculo se va a alinear rápidamente con la dirección de expansión y el factor de expansión va a converger al máximo exponente de Lyapunov. El problema numérico es que como los vectores tangentes crecen exponencialmente rápido, en pocas iteraciones ya no se pueden distinguir numéricamente las componentes de los vectores en las otras direcciones. Para evitar este problema, la idea es ir normalizando

los vectores (mientras se guarda el factor de expansión) con cada iteración del método y ortonormalizar los vectores tangentes, para poder distinguir las componentes en todas las direcciones.

Las limitaciones y justificaciones del método se discuten más a fondo en [3], pero el efecto de normalizar el vector repetidamente evita que su magnitud crezca demasiado como para dar errores numéricos. Eso se puede hacer porque buscamos saber que tan rápido crecen los vectores  $\delta\mathbf{\Gamma}$ , su tamaño en sí no es lo importante.

Cabe resaltar que existen otros métodos que no requieren de la normalización en cada paso, basándose en vez en propiedades de matrices; un método de este tipo, se presenta en [16].

## El exponente máximo de Lyapunov

Antes de explicar a detalle el método de Benettin se describirá como calcular el exponente máximo de Lyapunov. De esta manera será más fácil ver como se generaliza el procedimiento para calcular el espectro de Lyapunov.

Resulta útil expresar el límite (4.5) de otra manera. El cociente  $\frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(t)\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}_0\|}$  se puede expandir en un producto de cocientes:

$$\frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(t)\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}_0\|} = \frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(t)\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_{n-1})\|} \frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_{n-1})\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_{n-2})\|} \cdots \frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_1)\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}(0)\|}, \quad (4.50)$$

donde la sucesión de tiempos  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{n-1}, t\}$  son los tiempos a los que se mide la norma del vector y se normaliza. Para el caso de los billares que estamos estudiando sería conveniente después de las colisiones y de esta manera  $\mathbf{t}_i = \tau_i$ . Para pasar de  $\delta\mathbf{\Gamma}(t_{m-1})$  a  $\delta\mathbf{\Gamma}(t_m)$  hay que aplicar la transformación debida al flujo seguida de la transformación debida al mapeo, dada por la ecuación (4.17).

Pero en el límite (4.5), este producto es el argumento del logaritmo, por lo que se puede expresar como,

$$\lambda(\mathbf{\Gamma}_0, \delta\mathbf{\Gamma}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \log \frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_i)\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_{i-1})\|}. \quad (4.51)$$

Esta expresión va sumando el logaritmo del factor de crecimiento del vector  $\delta\mathbf{\Gamma}$ , pero si se va normalizando después de cada paso del cálculo (después de cada  $\mathbf{t}_i$ ), se pueden sustituir los denominadores por  $\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}'_i)\|$ , que son la

magnitud del vector después del paso  $\mathbf{t}_i$  pero ya normalizado (i.e.  $\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}'_i)\| = 1$ ). Además, como se está hablando de un cálculo numérico no se puede seguir la serie hasta un tiempo infinito, por lo que tenemos la siguiente aproximación del exponente máximo de Lyapunov:

$$\lambda_1 \simeq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \log \|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_i)\| \quad (4.52)$$

## El método de Benettin

A continuación se explicará a detalle el método de Benettin para calcular el espectro de Lyapunov.

Para evitar que se vuelvan imposibles de entender las ecuaciones, se ocupará la siguiente notación:

- $\delta\mathbf{\Gamma}_k^i$  representa el  $i$ -ésimo vector tangente ortonormalizado al paso  $k$  del algoritmo (al tiempo  $\mathbf{t}_k$ ).
- $\delta\mathbf{\Gamma}_k^{i'}$  representa el  $i$ -ésimo vector tangente al paso  $k$  **antes de normalizar u ortogonalizar**.

También se usará que  $\delta\mathbf{\Gamma}'$  represente la transformación debido al vuelo libre y a la siguiente colisión (no únicamente debido a la colisión como se utilizó en la sección anterior). El proceso de ortonormalización se hace después de cada colisión con la frontera de la mesa.

Se ortonormalizan los vectores después de cada paso del algoritmo antes de volver a evolucionarlos. Al hacer esto, los vectores se van a ir alineando con las direcciones de expansión/contracción (reminiscente del método de potencias para encontrar eigenvectores de matrices), por lo que los factores de expansión se aproximan cada vez más a los exponentes.

Denotemos por  $a_k^i$  a la norma del  $i$ -ésimo vector de desplazamiento al tiempo  $\mathbf{t}_k$ , es decir al  $k$ -ésimo paso del método:

$$a_k^i = \|\delta\mathbf{\Gamma}_k^{i'}\|$$

Entonces para el primer exponente, su magnitud y su vector normalizado van a estar dados en cada paso  $k$  por:

$$a_k^1 = \|\delta\mathbf{\Gamma}_k^{1'}\|$$

$$\delta\mathbf{\Gamma}_k^1 := \frac{\delta\mathbf{\Gamma}_k^{1'}}{a_k^1} \quad (4.53)$$

Sin embargo, las expresiones para los siguientes vectores no son tan sencillas, pues a cada vector se le tienen que restar sus componentes paralelas a los otros vectores. Antes de dar una expresión general vale la pena escribir estas expresiones para el segundo vector de desplazamiento. En este caso, su magnitud,  $a_k^2$ , va a ser la magnitud del vector una vez que se ortogonaliza con respecto al primero:

$$a_k^2 = \left\| \delta\mathbf{\Gamma}_k^{2'} - (\delta\mathbf{\Gamma}_k^{2'} \cdot \delta\mathbf{\Gamma}_k^1) \delta\mathbf{\Gamma}_k^1 \right\|$$

$$\delta\mathbf{\Gamma}_k^2 = \frac{\delta\mathbf{\Gamma}_k^{2'}}{a_k^2}. \quad (4.54)$$

Para el tercero, el procedimiento se repite pero se le tienen que restar sus componentes a lo largo de  $\delta\mathbf{\Gamma}_k^1$  y  $\delta\mathbf{\Gamma}_k^2$ , y así sucesivamente para todos los vectores.

En general, las ecuaciones recursivas para cualquier  $\delta\mathbf{\Gamma}^i$  son:

$$a_k^i = \left\| \delta\mathbf{\Gamma}_k^{i'} - \sum_{j=1}^{i-1} (\delta\mathbf{\Gamma}_k^{j'} \cdot \delta\mathbf{\Gamma}_k^j) \delta\mathbf{\Gamma}_k^j \right\|$$

$$\delta\mathbf{\Gamma}_k^i = \frac{\delta\mathbf{\Gamma}_k^{i'}}{a_k^i}, \quad (4.55)$$

y utilizando un argumento similar al que se usó para obtener la ecuación (4.52), los exponentes van están dados por:

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \sum_{j=1}^k \log a_k^i, \quad (4.56)$$

donde  $k$  representa cada paso del algoritmo y  $t_k$  es el tiempo que ha transcurrido hasta el paso  $k$ .

Nuevamente estamos hablando de un método numérico donde solo se pueden realizar un número finito  $n$  de pasos, entonces los exponentes están dados por la aproximación:

$$\lambda_i \simeq \frac{1}{t_{\text{total}}} \sum_{j=1}^n \log a_j^i. \quad (4.57)$$

### Justificación

La expansión del volumen en el espacio fase se puede determinar al estudiar lo que le sucede al paralelepípedo  $p$ -dimensional (donde  $p$  es la dimensionalidad del espacio fase) de que forman los vectores tangentes.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \{ \text{Vol}^p([\delta \mathbf{\Gamma}_t^{1'}, \dots, \delta \mathbf{\Gamma}_t^{p'}]) \},$$

y la expansión/contracción del volumen en cada iteración no depende del volumen seleccionado en el paso anterior, es una propiedad (a la larga) global del sistema.

Entonces, se pueden cambiar los vectores que forman el  $p$ -paralelepípedo en cada paso, con la condición que estos vectores generen el mismo espacio que los anteriores. En particular, una ortonormalización de los nuevos vectores satisfacen esto.



# Parte II

## Resultados



# Capítulo 5

## Dinámica de los vectores tangentes en billares inelásticos

En este capítulo desarrollaremos la transformación del vector tangente  $\delta\mathbf{\Gamma}$ , debido a colisiones inelásticas.

Recordemos que la ecuación que gobierna esta transformación es

$$\delta\mathbf{\Gamma}' = DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \delta\mathbf{\Gamma} + [DM(\mathbf{\Gamma}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}) - \mathbf{F}(M(\mathbf{\Gamma}))] \delta\tau_c,$$

y que habíamos expresado  $DM(\mathbf{\Gamma})$  como,

$$DM(\mathbf{\Gamma}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{A} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Los mapeos que dependen del momento de la partícula, no se puede expresar sólo en términos del vector normal a la frontera como se hizo para el caso elástico.

En billares poligonales, la regla de colisión no depende de la posición de la partícula sobre la frontera. La matriz  $\mathbb{A}$  contiene la dependencia funcional del vector de momento y determina cómo se transforma el vector  $\delta\mathbf{p}$  en la colisión.

## 5.1. Mapeo de contracción del ángulo

Como ya se ha mencionado, el mapeo de las colisiones inelásticas está dado por,

$$\varphi = \lambda\theta, \quad (5.2)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia y  $\varphi$  es el ángulo de reflexión. A estos ángulos también se les llamará ángulo de entrada y ángulo de salida respectivamente.

Para poder expresar correctamente lo que sucede en una colisión y posteriormente encontrar la derivada del mapeo, hay que tomar en cuenta algunas sutilezas de la regla. Una de estas sutilezas es que el ángulo se tiene que definir con signo.

La definición del ángulo de incidencia que resulta conveniente usar es,

$$\theta(\mathbf{p}) = -\arctan\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{t}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}}\right). \quad (5.3)$$

Los vectores  $\hat{\mathbf{n}}$  y  $\hat{\mathbf{t}}$  son los vectores normal y tangente a la frontera de la mesa en el punto de colisión.

La ventaja de esta definición es que el signo del ángulo indica en qué sentido viaja la partícula con respecto a la orientación de la frontera de la mesa. Los ángulos así definidos satisfacen la desigualdad,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Cuando la partícula viaja en el sentido tangente a la frontera, entonces  $\theta > 0$ . Si viaja en el sentido opuesto  $\theta < 0$ . La convención que estamos utilizando para el vector normal a la frontera es que es entrante, por lo que para cualquier colisión se tiene que  $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$ .

Al introducir esta definición del ángulo, hay que tener cuidado con cómo se expresa la regla inelástica. Tenemos que  $\varphi = -\lambda\theta$ , pues el nuevo ángulo también se mide con respecto a la normal, pero la trayectoria ahora queda del otro lado de la normal y entonces el ángulo cambia de signo. Cabe notar que sigue habiendo una reducción en el ángulo porque se tiene que  $|\varphi| = \lambda|\theta|$ .

Una manera útil de pensar en la regla inelástica es como una composición de la regla elástica seguida por una rotación del momento. El ángulo de la rotación necesario para que se cumpla la relación  $\varphi = -\lambda\theta$  es  $-(1 - \lambda)\theta(\mathbf{p})$ .

Por lo tanto hay que rotar el momento transformado por la colisión elástica por un factor que *depende del ángulo de incidencia*. A su vez, el ángulo de incidencia  $\theta$  también depende del momento. Esto hace que la dependencia funcional sobre el momento de entrada sea bastante complicada.

Queremos expresar el mapeo de la colisión inelástica como una función  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$ , donde  $\mathbf{p}'$  es el momento resultante después de la colisión inelástica. Además queremos expresar  $\mathcal{F}$  como

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) = (\mathcal{R}(\mathbf{p}) \circ \mathcal{F}_{\text{el}})(\mathbf{p}), \quad (5.4)$$

donde  $\mathcal{R}$  es la rotación y  $\mathcal{F}_{\text{el}}$  es la reflexión elástica. La rotación  $\mathcal{R}$  depende de  $\mathbf{p}$ , por lo que  $\mathcal{F}$  no es una transformación lineal de  $\mathbf{p}$ , aunque lo parezca.

Esta función resulta ser una composición de funciones representada de la siguiente manera:

$$\mathbf{p} \xrightarrow{f_1} \mathbf{p}_{\text{el}} \xrightarrow{f_2} (\mathbf{p}_{\text{el}}, \mathbf{p}_{\text{el}}) \xrightarrow{f_3} (\theta_{\text{el}}, \mathbf{p}_{\text{el}}) \xrightarrow{f_4} (\theta_{\text{rot}}, \mathbf{p}_{\text{el}}) \xrightarrow{f_5} (\mathcal{R}_{\theta_{\text{rot}}}, \mathbf{p}_{\text{el}}) \xrightarrow{f_6} \mathbf{p}'. \quad (5.5)$$

El vector  $\mathbf{p}_{\text{el}}$  es el momento resultante de una colisión elástica,  $\theta_{\text{el}}$  es el ángulo entre el momento de la colisión elástica y la normal (i.e.  $\theta_{\text{el}} = -\theta(\mathbf{p}_{\text{el}})$ ). El signo negativo es necesario porque el signo del ángulo va a determinar la dirección de la rotación. El ángulo  $\theta_{\text{rot}}$  es el ángulo por el cual se rota el vector  $\mathbf{p}_{\text{el}}$  para obtener la colisión inelástica,  $\theta_{\text{rot}} = (1 - \lambda)\theta_{\text{el}}$ .  $\mathcal{R}_{\theta_{\text{rot}}}$  es la matriz de rotación, que rota por el ángulo  $\theta_{\text{rot}}$  en contra de las manecillas del reloj (cuando el ángulo es positivo).

De esta manera tenemos que la función (el mapeo) de la colisión inelástica es la composición de estas seis funciones,

$$\mathcal{F} = f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1. \quad (5.6)$$

Las funciones  $f_i$  están definidas entre los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f_2 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ f_3 &: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_4 &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f_5 &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ f_6 &: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para las funciones que toman elementos de  $\mathbb{R}^2$ , éstos representan las dos componentes del vector momento. Para las que toman valores de  $\mathbb{R}^3$ , la primera componente representa un ángulo y las otras dos son las componentes del vector de momento. En  $\mathbb{R}^6$ , las primeras cuatro componentes son las entradas de una matriz y las últimas dos son las componentes del vector de

momento. Finalmente en  $\mathbb{R}^4$  las primeras dos componentes son componentes de un vector bidimensional y las últimas dos también.

Las  $f_i$  están dadas por

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{x}) &= (\mathbf{1} - 2\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{x} \\
 f_2(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \\
 f_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= (-\theta(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) \\
 f_4(\alpha, \mathbf{x}) &= ((1 - \lambda)\alpha, \mathbf{x}) \\
 f_5(\alpha, \mathbf{x}) &= (\mathcal{R}(\alpha), \mathbf{x}) \\
 f_6(\mathcal{L}, \mathbf{x}) &= \mathcal{L} \cdot \mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Para estas funciones, se está tomando  $\mathbf{x}$  como un vector de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha$  como un ángulo,  $\mathcal{L}$  como la matriz asociada a una transformación lineal y  $\mathcal{R}_\alpha$  como una matriz de rotación positiva que rota por un ángulo  $\alpha$ :

$$\mathcal{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Para fines operacionales se va a tomar cada una de estas funciones como  $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para distintas  $m$  y  $n$ . Aunque en las definiciones (5.8) se piense que la función  $f_3$  toma dos argumentos y devuelve otros dos, en realidad  $f_3$  toma como argumento un vector de cuatro entradas y devuelve uno de tres. Para las  $f_i$  que involucran matrices, las matrices se representan por vectores de cuatro entradas en el siguiente orden:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{11}, \mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{21}, \mathcal{L}_{22}). \tag{5.10}$$

Ahora encontraremos la derivada de  $\mathcal{F}$  con la regla de la cadena. Para que la notación no se vuelva un impedimento damos las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_1 &:= f_1(\mathbf{x}) \\
 \mathbf{y}_2 &:= f_2(\mathbf{y}_1) \\
 \mathbf{y}_3 &:= f_3(\mathbf{y}_2) \\
 \mathbf{y}_4 &:= f_4(\mathbf{y}_3) \\
 \mathbf{y}_5 &:= f_5(\mathbf{y}_4).
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Entonces la derivada de  $\mathcal{F}$  esta dada por,

$$D\mathcal{F}(\mathbf{x}) = Df_6(\mathbf{y}_5) \cdot Df_5(\mathbf{y}_4) \cdot Df_4(\mathbf{y}_3) \cdot Df_3(\mathbf{y}_2) \cdot Df_2(\mathbf{y}_1) \cdot Df_1(\mathbf{x}). \quad (5.12)$$

Las derivadas de las  $f_i$  en su forma matricial se muestran a continuación. La función  $f_1$  es el mapeo debido a la colisión elástica y es lineal, por lo que  $Df_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$  para cualquier  $\mathbf{x}$ .

La función  $f_2$  simplemente copia al vector que se le da, por lo que también es lineal. De esta manera  $Df_2(\mathbf{y}_1) = f_2(\mathbf{y}_1)$  y

$$Df_2(\mathbf{y}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Para las siguientes funciones las derivadas son más complicadas. La derivada de la función  $f_3$  tiene que involucrar a la derivada de  $\theta(\mathbf{p})$ . Recordemos que

$$\frac{d \arctan(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\xi^2 + 1}. \quad (5.14)$$

También necesitamos tener en mente la siguiente identidad (donde se utiliza la ortogonalidad de  $\hat{\mathbf{n}}$  y  $\hat{\mathbf{t}}$ ):

$$\frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{t}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \frac{p_1 n_2 - p_2 n_1}{p_1 n_1 + p_2 n_2}. \quad (5.15)$$

Por lo tanto, haciendo la sustitución  $u = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{t}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}}$  tenemos

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \theta(\mathbf{p}) = -\frac{d}{du}(\arctan(u)) \cdot \frac{\partial u}{\partial p_i}. \quad (5.16)$$

La derivada de  $u$  con respecto a  $p_1$  es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p_1} &= \frac{n_2(p_1 n_1 + p_2 n_2) - n_1(p_1 n_2 - p_2 n_1)}{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \\ &= \frac{-p_2(n_1^2 + n_2^2)}{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \\ &= -\frac{p_2}{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para  $p_2$  se obtiene de manera similar que,

$$\frac{\partial u}{\partial p_2} = \frac{p_2}{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2}. \quad (5.18)$$

Haciendo la multiplicación indicada en (5.16), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1} \theta(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{t}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}}\right)^2 + 1} \frac{p_2}{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \\ &= -\frac{p_2}{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{t}})^2 + (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2} \\ &= -\frac{p_2}{\|\mathbf{p}\|^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

De manera análoga se obtiene la derivada con respecto a  $p_2$  y se tienen las siguientes expresiones para las derivadas de  $\theta(\mathbf{p})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1} \theta(\mathbf{p}) &= -\frac{p_2}{\|\mathbf{p}\|^2} \\ \frac{\partial}{\partial p_2} \theta(\mathbf{p}) &= \frac{p_1}{\|\mathbf{p}\|^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Retomando la discusión sobre la derivada de  $f_3$ , si tomamos  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$

y  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ , la derivada de  $f_3(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta})$  esta dada por,

$$\begin{aligned}
 Df_3(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) &= \begin{pmatrix} -D_{\beta_1}\theta(\boldsymbol{\beta}) & -D_{\beta_2}\theta(\boldsymbol{\beta}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2} & -\frac{\beta_1}{\|\boldsymbol{\beta}\|^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

La derivada de  $f_4$  es algo más sencilla, pues la función simplemente multiplica la primera componente por el factor  $(1 - \lambda)$ . Tomemos  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  y la derivada nos da,

$$Df_4(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} (1 - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

La función  $f_5$  toma el ángulo de rotación y “construye” la matriz de rotación adecuada; sin embargo, esta matriz queda expresada en forma de un vector de cuatro componentes. Si tomamos  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  nuevamente, la función devuelve un vector con seis componentes donde las primeras cuatro son las entradas de la matriz de rotación como se muestra en la ecuación (5.10). De esta manera,

$$f_5(\boldsymbol{\beta}) = (\mathcal{R}(\beta_1)_{11}, \mathcal{R}(\beta_1)_{12}, \mathcal{R}(\beta_1)_{21}, \mathcal{R}(\beta_1)_{22}, \beta_2, \beta_3), \tag{5.23}$$

y tomando  $\mathcal{R}$  como se definió en la ecuación (5.9) resulta que la derivada es

$$Df_5(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} -\sin(\beta_1) & 0 & 0 \\ -\cos(\beta_1) & 0 & 0 \\ \cos(\beta_1) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

La función  $f_6$  es la multiplicación de una matriz por un vector, una función bilineal. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_6(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6) &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_5 \\ \beta_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1\beta_5 + \beta_2\beta_6 \\ \beta_3\beta_5 + \beta_4\beta_6 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

y de aquí se obtiene la derivada:

$$Df_6(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \beta_5 & \beta_6 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Una vez obtenidas estas matrices, se puede obtener una expresión para la matriz  $\mathbb{A}$  de la ecuación (5.1). En el caso inelástico la llamaremos  $\mathbb{A}_{\text{in}}$ .

Esta matriz expresa como se transforman los vectores  $\delta\mathbf{p}$  en las colisiones con las fronteras y por lo tanto esta dada por

$$\mathbb{A}_{\text{in}} = D\mathcal{F}(\mathbf{p}), \quad (5.27)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el vector de momento antes de la colisión y la expresión de  $D\mathcal{F}$  esta dada por (5.12).

Lo que falta por hacer es encontrar la expresión para  $\delta\Gamma'$  de acuerdo a la ecuación 5.1, pero vale la pena notar que el término dentro de los corchetes va a tener la misma forma que para en el caso elástico, como se puede ver en la ecuación (4.46). Lo que cambia es la expresión para  $\Delta\mathbf{p}$ .

Al multiplicar  $\Delta\mathbf{p}$  por el tiempo de desfase  $\delta\tau_c$  tenemos

$$-\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \Delta\tau_c = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\delta\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}}. \quad (5.28)$$

Por lo tanto, la expresión para la transformación del vector tangente resulta:

$$\delta\Gamma' = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{q} + \Delta\mathbf{p} \left( \frac{\delta\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right) \\ \mathbb{A}_{in} \cdot \delta\mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

donde  $\Delta\mathbf{p}$  es el cambio en el vector  $\mathbf{p}$ , i.e.  $\mathbf{p}_{\text{final}} - \mathbf{p}_{\text{inicial}}$ .

Ya tenemos la expresión de cómo se transforma el vector tangente  $\delta\Gamma$  en las colisiones para el caso inelástico.

### 5.1.1. Comentarios acerca del desarrollo de la regla

Es importante ahondar en por que se expresó la regla como una composición tan complicada y por qué  $f_1$  duplica uno de los argumentos de la función original.

El problema radica en que el vector que buscamos transformar también es un argumento de la transformación. Es decir, buscamos expresar la transformación lo más que se pueda como una transformación lineal,  $\mathbf{p}' = \mathcal{L}_{\mathbf{p}}(\mathbf{p})$ , pero el problema es que esa transformación lineal (que es una reflexión compuesta con una rotación) no depende linealmente de  $\mathbf{p}$ . Tenemos que ver la transformación lineal como  $\mathcal{L}_{\mathbf{p}}$  donde el vector  $\mathbf{p}$  es un parámetro de la función. Para hacer esto, es de gran ayuda pensar en la expresión del vector transformado cómo:  $\mathbf{p}' = \mathcal{L}_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = \mathcal{L}'(\mathbf{p}; \mathbf{p})$ , en donde  $\mathcal{L}'$  es una función que toma dos vectores como argumentos, que en general no tienen por qué ser iguales. Ésta es la razón por la que se tiene que duplicar el momento en la

regla de colisión. Por esto no se puede simplemente escribir las derivadas de la rotación ingenuamente, sino hay que separar las dos dependencias de  $\mathbf{p}$  y calcular las derivadas con el cuidado debido. Esto resulta en que se haya desmenuzado la regla de colisión en una composición de muchas funciones para poder aplicar la regla de la cadena.

### 5.1.2. Cálculo numérico de los exponentes

Una vez que se tiene explícitamente la transformación (5.29) de los vectores tangentes debida a las colisiones elásticas, es cuestión de seguir el algoritmo de Benettin.

Se darán 4 vectores tangentes  $\delta\Gamma$  aleatorios en el espacio fase, se evolucionarán de acuerdo a la dinámica y se irán ortonormalizando después de cada colisión.

# Capítulo 6

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de la tesis. El más importante es el cálculo numérico del espectro de Lyapunov en el billar triangular equilátero con colisiones inelásticas. También se calcula de la dimensión de Lyapunov del atractor que aparece en el espacio de colisiones. Se comenta y explica de manera general la dinámica de la partícula en el triángulo y se resalta como cambia el tiempo medio de retorno del mapeo conforme se varía el parámetro inelástico  $\lambda$ .

**Nota al lector:** A lo largo de este capítulo entra en conflicto la notación estándar de los exponentes de Lyapunov que se denotan por  $\lambda$  con la notación utilizada en la literatura para el mapeo inelástico en donde el parámetro de inelasticidad de la regla de colisión también se denota con la letra  $\lambda$ . Se intentará escribir los exponentes de Lyapunov con subíndices ( $\lambda_i$ ) cuando se hable de varios para facilitar la distinción. Se espera que por el contexto quede claro la cantidad de la cual se esté hablando.

### 6.1. Resultados

#### 6.1.1. Dinámica y atractor en el espacio de colisiones

Al variar el parámetro de inelasticidad, se obtienen cambios drásticos en el comportamiento del sistema visto en el espacio fase del mapeo del billar, es decir, en el espacio con coordenadas  $s$  y  $\varphi$ .

Como ya se vio en el caso elástico, el sistema explora todos los valores de longitud de arco, pero únicamente se tiene tres ángulos que dependen de las

condiciones iniciales. En el espacio fase, esto se traduce a líneas horizontales. Dependiendo de las condiciones iniciales, la órbita puede explorar todas las longitudes de arco para cada ángulo rápidamente, o si la órbita resulta más regular, puede tardar más y en este caso se observan líneas horizontales punteadas durante muchas colisiones.

Una vez que se introduce una colisión elástica mediante el parámetro  $\lambda$ , se observan cambios en la estructura de las órbitas, por ejemplo, líneas que en el caso elástico eran paralelas, poco a poco comienzan a dejar de serlo. Eventualmente las órbitas dejan de verse como ligeras variaciones de las órbitas elásticas y parecen ser más aleatorias.

Sin embargo, a pesar de la apariencia de las órbitas, en el espacio fase se observa una estructura bien definida en el atractor extraño, que evoluciona conforme cambia el parámetro de inelasticidad.

Si uno observa cuidadosamente las órbitas para los distintos valores de  $\lambda$ , las cuales se pueden ver en las esquinas superiores izquierdas de las gráficas de las figuras 6.1 y 6.2, se nota un ligero cambio en lo que podemos llamar cualitativamente el “orden” de las orbitas y la alineación de las trayectorias rectas.

Conforme el atractor presenta una estructura más complicada, este orden se pierde y la órbita parece volverse más complicada. Mientras sigue evolucionando el parámetro y se vuelve a simplificar el atractor. Conforme se tiende al caso elástico, se observa como las trayectorias retoman cierto orden.

El atractor es cíclico en términos de la longitud de arco y tiene tres regiones, cada una correspondiente a un lado del triángulo. Más aún, como el triángulo es equilátero y tiene simetría rotacional, cada una de las regiones del atractor también tienen esa simetría. La región de ángulos negativos es equivalente a la de los ángulos positivos. Es decir, ningún lado del triángulo es “especial” en términos de la dinámica y la orientación de la frontera tampoco la afecta.

Cuando  $\lambda = 0$  la dinámica que se sigue es la del mapeo *slap*, en donde el ángulo de salida siempre es cero. Es decir, la trayectoria de la partícula al salir de la colisión siempre es normal a la frontera de la mesa en el punto donde ocurrió la colisión.

Conforme se incrementa un poco el parámetro de inelasticidad  $\lambda$ , en el espacio fase del mapeo los ángulos que alcanza la trayectoria parecen separarse del cero en bandas. Al seguir aumentando el parámetro de inelasticidad, las nuevas bandas se vuelven a separar, pero quedan centradas alrededor de un valor cercano al valor del parámetro  $\lambda$ .

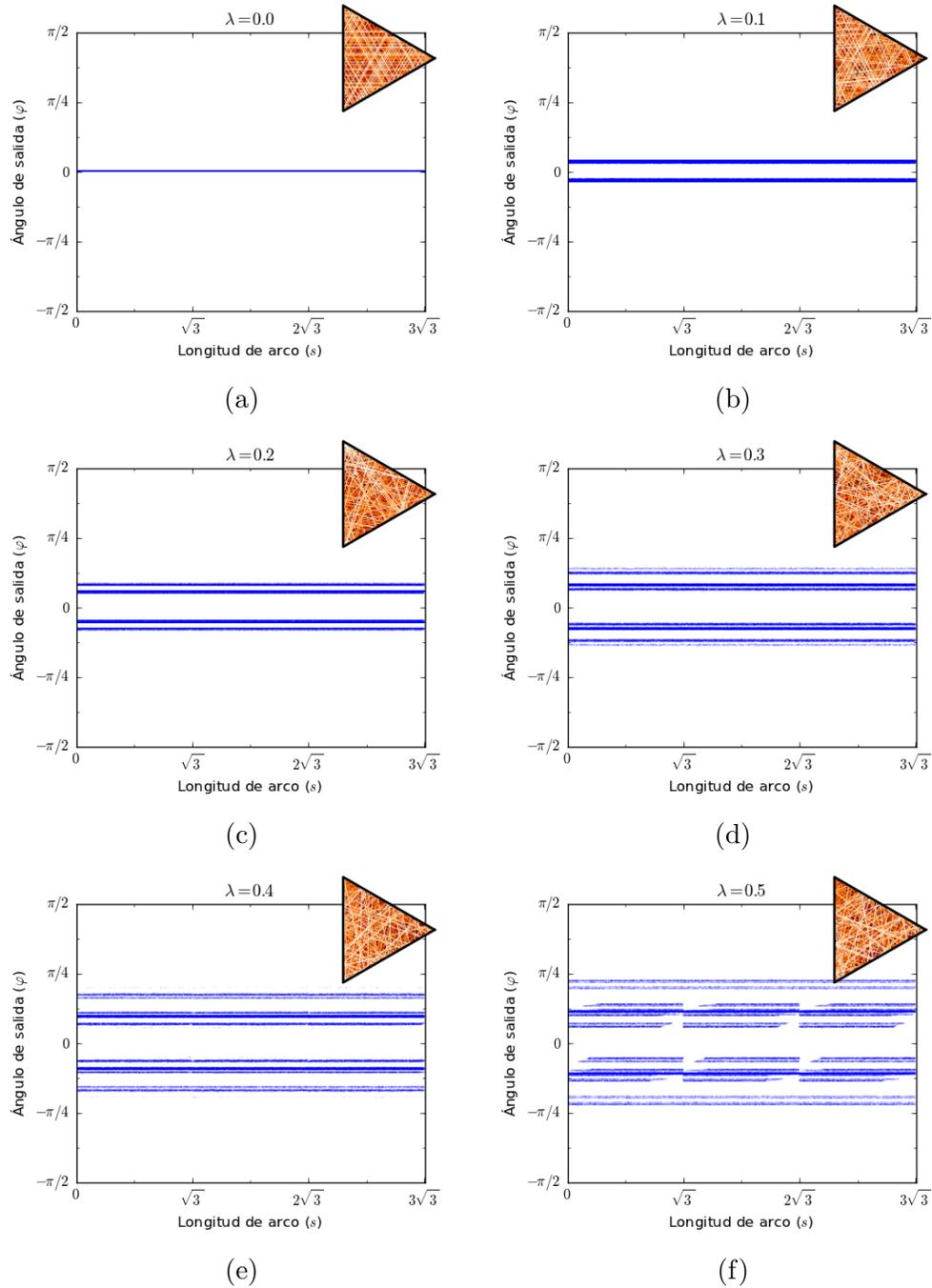


Figura 6.1: Gráficas de las órbitas y los atractores para distintos valores de  $\lambda$  (de 0 a 0.5). En las órbitas, colores más claros indican tiempos más grandes. El triángulo tiene lados de longitud  $\sqrt{3}$ .

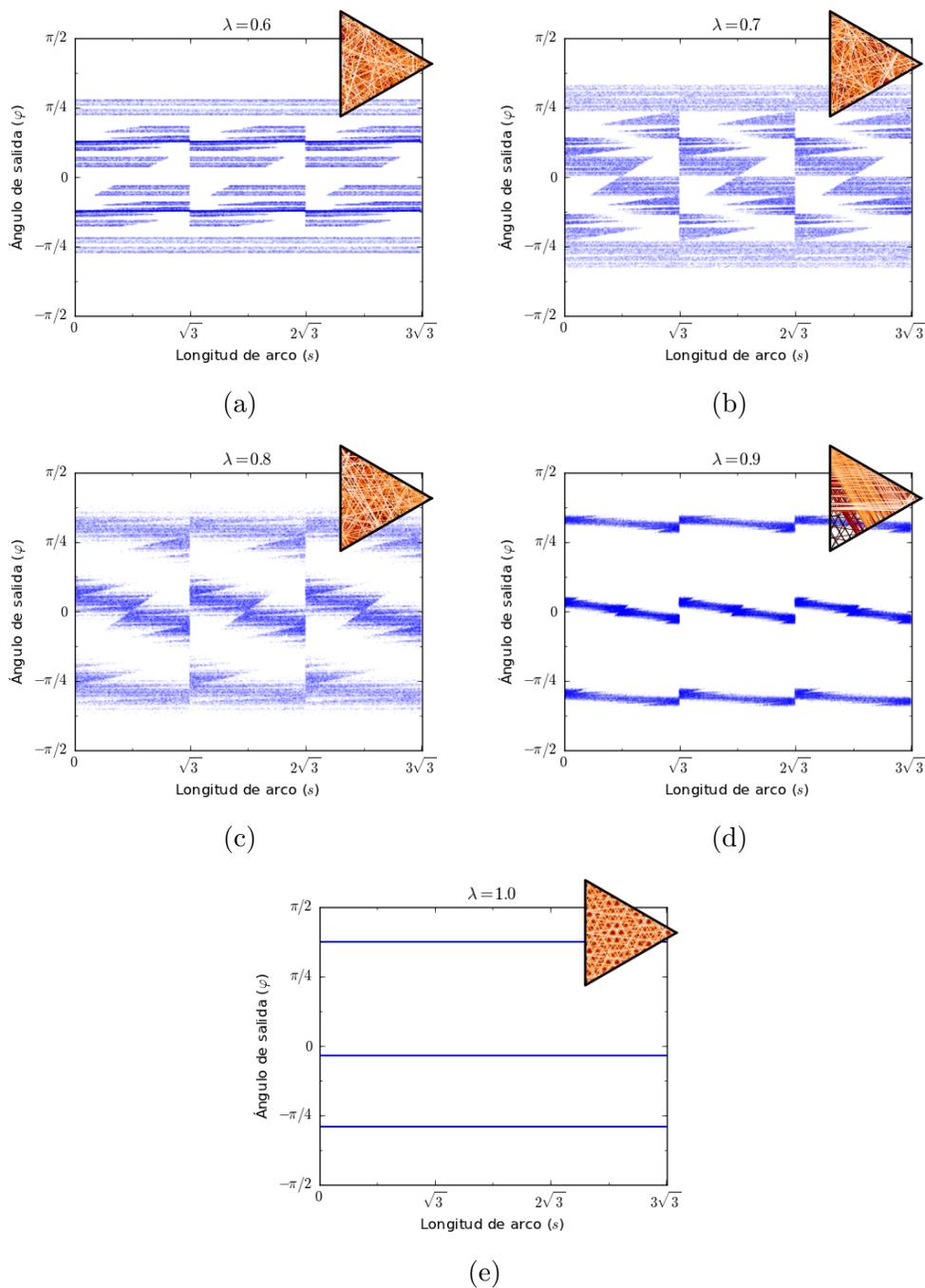


Figura 6.2: Gráficas de las órbitas y los atractores para distintos valores de  $\lambda$  (de 0.6 a 1). En las órbitas, colores más claros indican tiempos más grandes. El triángulo tiene lados de longitud  $\sqrt{3}$ .

Alrededor de  $\lambda = 0.5$ , el comportamiento del atractor cambia. Mientras se siguen separando las bandas del ángulo de salida, las bandas centrales se comienzan a separar de manera distinta a como había estado sucediendo anteriormente y se forman unas regiones triangulares donde dejan de caer puntos de la órbita.

A partir de ese momento, las bandas comienzan a “expandirse” en el eje de los ángulos mientras las regiones triangulares se vuelven más prominentes. Para estos valores de  $\lambda$  se ve la estructura autosimilar del atractor, reminiscente del atractor de Henón (bandas dentro de bandas).

Para  $\lambda = 0.8$ , las bandas comienzan a agruparse en 3 regiones verticales distintas y se comienzan a colapsar (aún preservando su estructura).

Cuando  $\lambda = 1$ , la regla inelástica se reduce a una colisión elástica. Y en este caso los puntos de colisión llegan a cubrir todos los puntos de la frontera de la mesa, pero como se explicó previamente, sólo se logran alcanzar tres ángulos de salida distintos. Esto se logra apreciar en la figura 6.2. Las trayectorias dentro de la mesa siempre son paralelas a una de tres direcciones por lo que en se observa un orden en la red que forma la trayectoria.

### 6.1.2. Exponentes del flujo y el mapeo

Para poder calcular propiedades de la dinámica, como son los exponentes de Lyapunov, se tomó el sistema como un sistema dinámico híbrido que consta de un flujo con interrupciones discretas. Sin embargo, de este tratamiento surge un problema. Los exponentes de Lyapunov se definen de manera distinta para mapeos que para flujos. El límite que se toma es ligeramente distinto.

Para mapeos discretos, los exponentes se obtienen con la expresión,

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \log \frac{\|\delta \mathbf{x}_n\|}{\|\delta \mathbf{x}_{n-1}\|}. \quad (6.1)$$

Sin embargo, para flujos continuos con interrupciones discretas, la expresión a la que se llegó en el capítulo ?? es,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \log \frac{\|\delta \Gamma(\mathbf{t}_i)\|}{\|\delta \Gamma(\mathbf{t}_{i-1})\|}. \quad (6.2)$$

La semejanza que hay entre las dos expresiones es evidente. Los tiempos discretos  $\mathbf{t}_i$  indican cuando “salta” la partícula en el caso discreto. Es decir, los tiempos  $\mathbf{t}_i$  indican cuando se tienen que tomar los puntos para que

la sección estroboscópica coincide con el espacio fase del mapeo en tiempo discreto.

Por este motivo podemos considerar que las magnitudes de los vectores dentro de la suma van a ser equivalentes. Esto nos lleva a que la diferencia radica en que en una expresión se está dividiendo entre números enteros que indican el número de colisiones que ha habido, mientras en la otra se está dividiendo entre el tiempo total.

Ignorando por el momento el límite en la expresión, podemos re-escribir la ecuación para el flujo de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{flujo}} &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \log \frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_i)\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_{i-1})\|} \\ &\simeq \frac{1}{\bar{\tau}N} \sum_{i=1}^{\infty} \log \frac{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_i)\|}{\|\delta\mathbf{\Gamma}(\mathbf{t}_{i-1})\|},\end{aligned}\tag{6.3}$$

donde  $\bar{\tau}$  es el tiempo promedio entre colisiones, tal que  $\bar{\tau}N = t$ .

De esta manera llegamos a que los exponentes de Lyapunov de un sistema, visto como mapeo o como flujo, difieren únicamente por una constante de proporcionalidad que es el tiempo de vuelo libre promedio, o el tiempo libre medio (*mean free time*).

$$\lambda_{\text{flujo}} = \bar{\tau}\lambda_{\text{mapeo}}.\tag{6.4}$$

Esto es lo que se encontró en las simulaciones y se muestra a continuación. Este resultado se demuestra en [5].

En términos de la correspondencia entre los exponentes para el mapeo y para el flujo, se aprecia en la figura 6.3 una relación que parece proporcional. La constante de proporcionalidad es el tiempo libre medio (o el tiempo medio de retorno, si es que se ve desde el punto de vista de la teoría de las secciones de Poincaré). Las figuras 6.4 y 6.5 muestran la razón de los exponentes  $\lambda_d/\lambda_c$ , donde  $\lambda_d = \lambda_{\text{mapeo}}$  y  $\lambda_c = \lambda_{\text{flujo}}$  son los exponentes correspondiendo al mapeo y al flujo respectivamente.

Antes de conocer detalles de la dinámica, uno podría pensar que  $\bar{\tau}$  sería constante y no variaría con el parámetro de inelasticidad. Como la velocidad de la partícula es unitaria  $\bar{\tau}$  es igual (salvo por un factor de unidades) a la

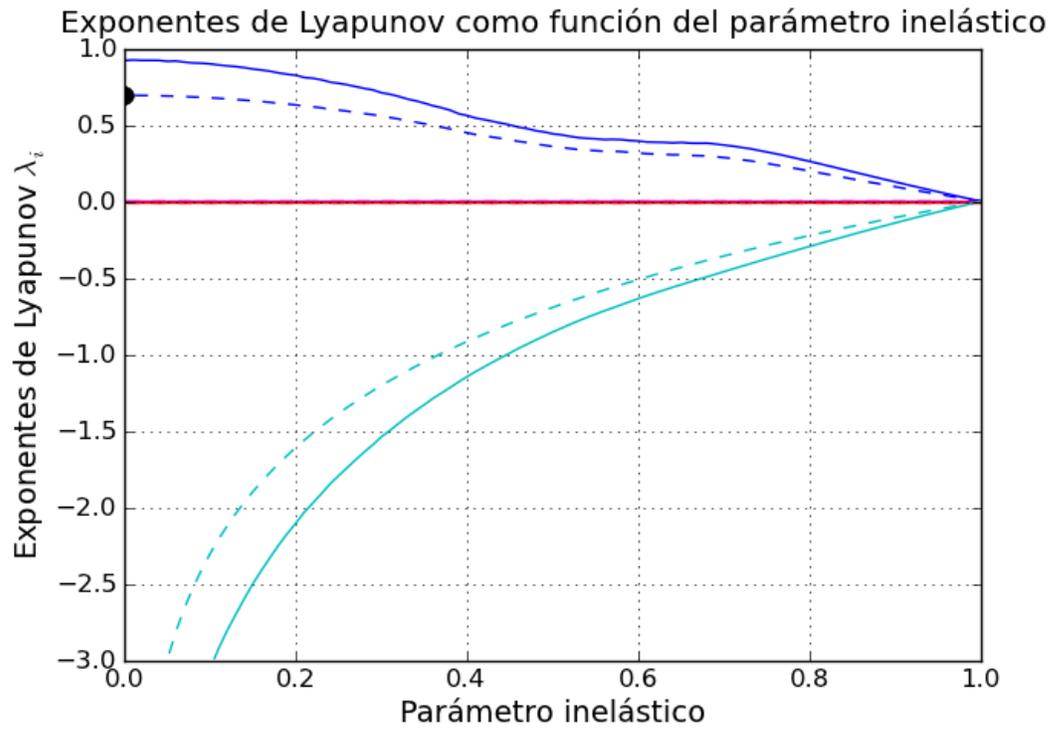


Figura 6.3: Variación de los exponentes de Lyapunov con el parámetro de inelasticidad. Las líneas punteadas representan la dinámica discreta. Las líneas continuas representan la dinámica continua. El punto negro es el punto  $(0, \ln 2)$  para verificar el comportamiento del mapeo *slap*.

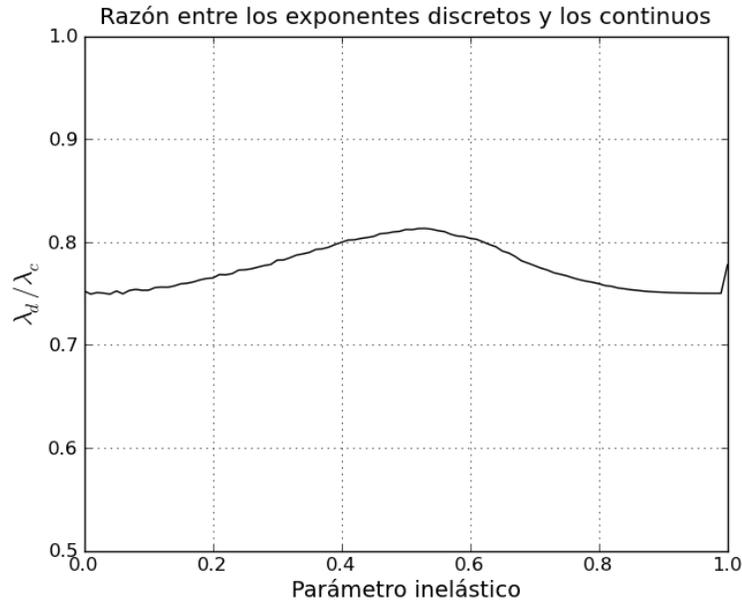


Figura 6.4: Valor del cociente de los exponentes del mapeo y el flujo.

distancia promedio entre puntos de colisión. Esto a su vez es igual a la longitud promedio de una cuerda que se tome dentro del triángulo. El problema es que esta línea de pensamiento se enfrenta con dos barreras. La primera es que el parámetro de inelasticidad afecta la distribución de los ángulos de salida, lo que automáticamente selecciona a algunas familias de cuerdas, por ende, conforme varía el parámetro se exploran otras familias de cuerdas con longitud promedio ligeramente distinta. La segunda barrera, y probablemente la más profunda, tiene algo que ver con la primera, pero es similar a la paradoja de Bertrand [4] de la teoría de probabilidad. La longitud promedio de las cuerdas depende de la manera en la que se elige la cuerda.

En esencia lo que hace la dinámica inelástica, es inducir una regla de selección de las cuerdas. Al variar el parámetro de inelasticidad, varía ligeramente la distribución de las longitudes de los segmentos rectos y por ende, el tiempo de vuelo libre.

Una vez que uno considera esta línea de razonamiento, puede resultar lógico que al haber más libertad en posibles ángulos de salida, los pedazos rectos de la trayectoria que sigue la partícula, exploren de manera más uniforme las cuerdas en el triángulo. El hecho que esto resulte en cuerdas un

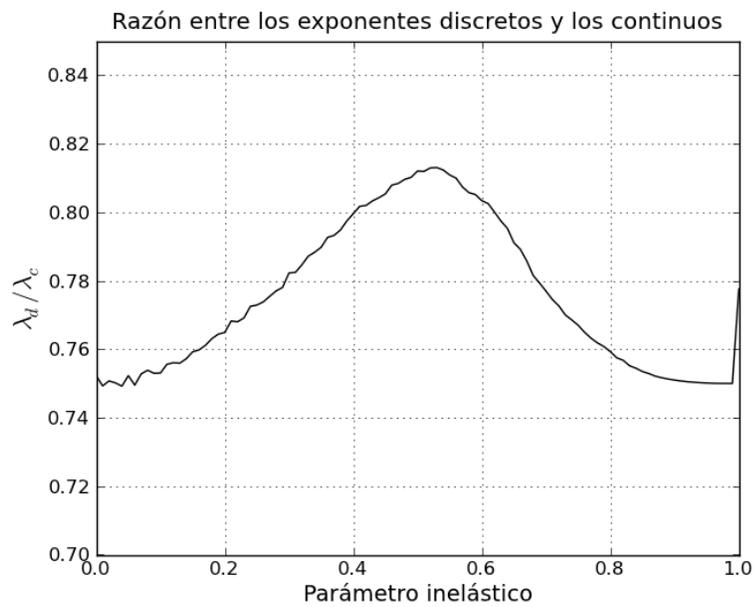


Figura 6.5: Valor del cociente de los exponentes del mapeo y el flujo. Se alcanza a ver el límite de la resolución numérica. El tamaño de paso para el parámetro inelástico es de 0.01.

poco más largas es interesante. Sin embargo, este problema queda fuera del alcance de la tesis y únicamente lo resaltaremos como un resultado de interés.

### 6.1.3. Exponentes y el espacio fase

Para  $\lambda = 1$  el sistema es elástico y la transformación de la velocidad de la partícula se encuentra por medio de una función lineal: una reflexión sobre la recta determinada por el vector tangente a la frontera. Esto implica que el sistema es integrable, y por ende, no es caótico. En la figura 6.3 se confirma este comportamiento, pues en  $\lambda = 1$  todos los exponentes se anulan. Esto es resultado de que se conserva el *volumen* en el espacio fase. El sistema en este caso es hamiltoniano, conservativo y lineal.

Conforme  $\lambda \rightarrow 0$  se observa como un exponente crece conforme se reduce el parámetro de inelasticidad, mientras otro exponente se vuelve cada vez más negativo, eventualmente tendiendo a  $-\infty$  cuando  $\lambda \rightarrow 0$ . Los otros dos exponentes permanecen en cero.

El exponente que tiende a  $-\infty$  corresponde a la contracción en el espacio fase debido a que el sistema es disipativo (en realidad el termino disipativo no es el más correcto, pues sí se conserva la energía debido a que la magnitud de la velocidad es constante). Este comportamiento es razonable pues como se vio en el capítulo de Billares cuando  $\lambda = 0$  el mapeo del billar se reduce al mapeo *slap* que es un mapeo unidimensional. Por lo tanto este exponente corresponde a la dimensión del espacio fase que se colapsa cuando esto sucede.

En el capítulo ?? se vio que el mapeo *slap* está dado por,

$$\mathcal{T}(s) = -2s + 3 \pmod{3}. \quad (6.5)$$

Utilizando la expresión para el exponente local de Lyapunov  $\lambda = \log |f'(s)|$  se llega a que el exponente máximo de Lyapunov para el mapeo *slap* es:

$$\lambda_{\text{slap}} = \log |-2| = \log 2. \quad (6.6)$$

En la figura 6.6 se grafica el mapeo utilizando resultados numéricos.

Este resultado es congruente, y de cierta manera verifica los datos obtenidos mediante este método.

Los exponentes se calculan tomando desplazamientos infinitesimales de la trayectoria original y viendo cómo cambiaría la separación entre los dos puntos conforme se lleva a cabo la dinámica. Aunque esto se hace por medio de la derivada, las direcciones en las que se toman los desplazamientos iguales

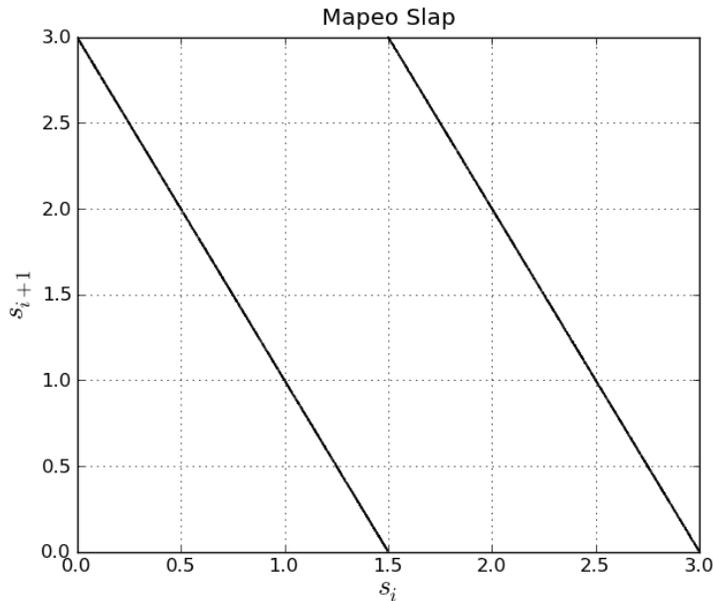


Figura 6.6: Mapeo *slap*, en este caso el mapeo del billar se reduce a un mapeo unidimensional. Se toma la longitud de cada lado del triángulo como 1.

se pueden entender intuitivamente. Aunque se empiece con direcciones de desplazamiento arbitrarias, los exponentes son únicos. Pero si se piensa en direcciones posibles de desplazamiento inicial en el espacio fase uno puede entender lo que sucede. En el espacio fase se tienen direcciones de momentos y direcciones de posiciones. El caso más sencillo e intuitivo es pensar lo que le pasa si el desplazamiento es en la dirección del movimiento de la partícula. Como la velocidad se mantuvo unitaria, los puntos van a seguir las mismas órbitas pero el punto original irá retardado. A la larga, las dos trayectorias no se separan, se mantienen a la misma distancia excepto al momento de las colisiones, pero esto se corrige rápidamente y se recupera la separación original.

El otro exponente que es cero es un poco más complicado de interpretar. Lo que miden los exponentes es el cambio exponencial con el que se separan las trayectorias. Es decir, se parte de la idea que la separación  $\delta$  entre órbitas cercanas varía con el tiempo de la forma  $\dot{\delta}(t) = C\delta e^{\lambda t}$ , donde  $C$  es una constante. Esto implica que si la velocidad de separación es una función lineal de  $\delta$ , forzosamente  $\lambda = 0$ . Como la partícula es libre excepto por las colisiones,

un desplazamiento en el espacio fase en el cual se pasa de una superficie de energía constante a otra únicamente cambiaría la energía cinética y por lo tanto la magnitud de la velocidad. Estas direcciones de desplazamiento normales a la la superficie de energía de la trayectoria original son las que corresponden con el otro exponente que se anula.

La suma de los exponentes siempre es  $\sum_i \lambda_i \leq 0$ , como se muestra en la figura 6.7. Esto es típico, aunque no completamente necesario, para la formación de atractores extraños. Esto garantiza que exista el mecanismo de estiramiento y doblado (*stretch and fold*) como en el caso de las herraduras de Smale [17]. Es más, el conjunto invariante tiene que tener comportamiento similar al del conjunto invariante que se presenta en el mapeo de Smale, pues si se itera el mapeo hacia atrás en el tiempo para algún punto inicial arbitrario, la regla de contracción se vuelve una regla de expansión y la mayoría de los puntos (excepto por un conjunto con medida cero) eventualmente se saldrían de la mesa. Pero este tipo de análisis queda fuera del alcance de este trabajo, pues no se hace análisis de órbitas periódicas ni puntos fijos.

Algo que vale la pena mencionar, es que la suma de los exponentes de Lyapunov, al ser menor a cero, garantiza que el sistema es disipativo y que hay una contracción del volumen en el espacio fase conforme avanza la dinámica. Pero pensar en que hay energía que se esta perdiendo se complica pues al normalizar la velocidad en cada colisión garantiza que se conserve la energía cinética de la partícula.

El hecho que hay una coincidencia entre la dinámica del mapeo del billar y el sistema dinámico en tiempo continuo resalta la importancia de poder tratar sistemas desde puntos de vista diferentes. También le da más peso a la motivación del estudio de sistemas discretos para comprender el comportamiento de flujos no-lineales.

Una característica interesante en la gráfica de los exponentes es el cambio de curvatura en el exponente positivo que ocurre alrededor de  $\lambda = 0.5$ . Esta característica coincide con un cambio en la pendiente local de la suma de los exponentes y con el cambio cualitativo que ocurre en el atractor para estos valores del parámetro inelástico. En términos de la dinámica, es la región de valores del parámetro en la cual la regla de contracción del ángulo le permite al sistema explorar un intervalo mayor de ángulos de salida. Esto se ve claramente en las gráficas de las figuras 6.1 y 6.2. Para esos valores del parámetro el atractor abarca una región más extensa en la dirección angular.

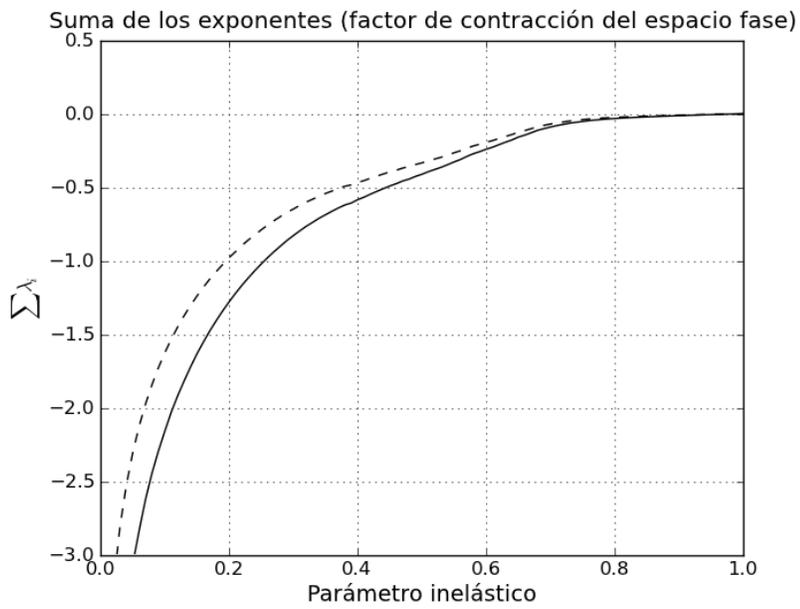


Figura 6.7: Comportamiento de la suma de los exponentes, también es el factor de contracción del volumen en el espacio fase. La línea punteada corresponde a la dinámica discreta mientras que la continua corresponde al flujo.

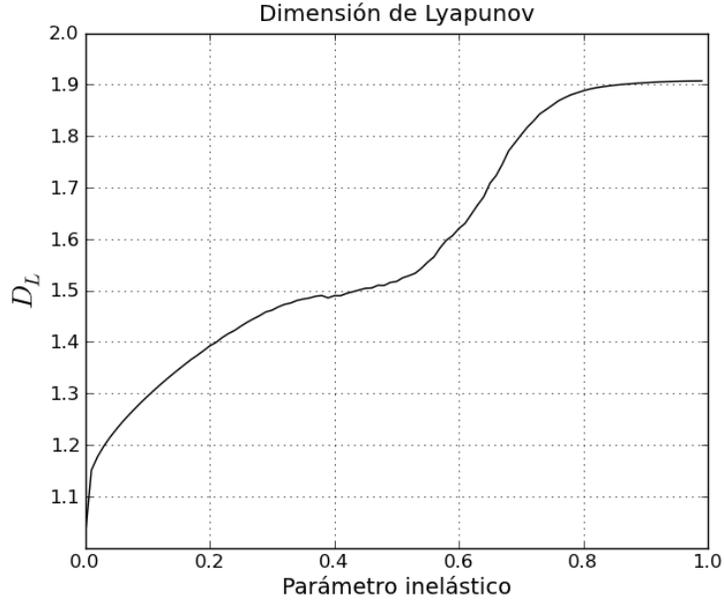


Figura 6.8: Dimensión de Lyapunov como función del parámetro inelástico

#### 6.1.4. Dimensión

Utilizando los valores obtenidos de los exponentes de Lyapunov que se obtienen al variar el parámetro inelástico  $\lambda$ , también podemos graficar cómo varía la dimensión de Lyapunov (o de Kaplan-Yorke)  $D_L$ .

Para nuestro caso del mapeo en dos dimensiones, la dimensión de Lyapunov está dado por,

$$D_L = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}. \quad (6.7)$$

Donde  $\lambda_1$  es el exponente positivo y  $\lambda_2$  es el exponente negativo.

La figura 6.8 muestra el comportamiento de  $D_L$ . Como es de esperarse, muestra el mismo cambio de curvatura alrededor de  $\lambda = 0.5$  que se observa en la gráfica de los exponentes de Lyapunov.

Es importante la manera en la que se relacionan las dimensiones del atractor cuando se toma el mapeo o el flujo. La ecuación general para la dimensión de Lyapunov es:

$$D_L = D + \frac{1}{|\lambda_{D+1}|} \sum_{j=1}^D \lambda_j. \quad (6.8)$$

Hay que recordar que  $D$  es el número de exponentes tal que  $\sum_1^D \lambda_i \geq 0$ . Para considerar la dimensión en el espacio fase, que tiene más dimensiones, lo único que cambia es  $D$  ya que hay dos exponentes adicionales que son cero. Por esto mismo el valor de la suma no cambia.

De esta manera la relación entre la dimensión de Lyapunov para el flujo, que denotaremos como  $d_L$ , está relacionada con la del mapeo ( $D_L$ ) de la siguiente manera:

$$d_L = D_L + 2 \tag{6.9}$$

Esto es de esperarse y tiene sentido, ya que en el espacio fase del flujo 4-dimensional, hay dos dimensiones más en las que no se exhibe contracción de volumen conforme avanza la dinámica.

Es interesante pensar en la dimensión de Lyapunov del atractor cuando se habla del espacio de colisiones. Al variar  $\lambda$  entre 0 y 1, se está pasando del mapeo *slap* que es unidimensional al mapeo del billar elástico  $\mathcal{T}$ . Para todos los valores intermedios la dimensión de Lyapunov  $D_L$  es un número entre uno y dos. De cierta manera, la dimensión de Lyapunov del atractor captura el tránsito de un mapeo unidimensional a uno bidimensional.



# Capítulo 7

## Conclusiones

En este capítulo se resume y resalta a lo que se llegó a lo largo de la tesis. También se comentan posibles extensiones a este trabajo y posibles vertientes que se pueden tomar.

### 7.1. Conclusiones Finales

En esta tesis, se estudió una regla de colisión inelástica en una mesa de billar muy particular: el triángulo equilátero. Éste es el polígono regular más sencillo (con el menor número de lados) sin lados paralelos. Es una mesa sencilla con fronteras planas, por lo que simplifica algunas cosas. Sin embargo, resulta en un sistema dinámico con mucha riqueza. En este sistema simple se puede observar (y medir) comportamiento caótico. También es un modelo en el que se puede pasar fácil e intuitivamente de un sistema dinámico en tiempo continuo a un mapeo discreto.

Se logró mostrar, mediante el estudio de los exponentes de Lyapunov, que los mapeos discretos no tienen por qué considerarse ajenos a la física. El modificar la regla de colisión para tomar en cuenta otro tipo de interacciones simplifica los sistemas con interacciones complicadas y el tratarlos como sistemas híbridos permite que se rescate el comportamiento físico y sus propiedades dinámicas.

Se logró extender exitosamente el método presentado en [7] para la dinámica del sistema inelástico. A pesar de que los autores mencionan que es sencillo extender su método a sistemas inelásticos, como se puede apreciar en el tratamiento de la regla de colisión inelástica, hay que tener mucho cuidado con

cómo se expresa la regla.

Para el caso de la regla inelástica,  $\varphi = -\lambda\theta$  que se utilizó, se tuvo que hacer una construcción a base de composiciones de funciones que parece muy artificial, pero fue completamente necesaria. Es posible que para algunas otras reglas de colisión el tratamiento se simplifique. Posiblemente una regla que modifique directamente con las componentes normal y tangencial del vector  $\mathbf{p}$  pueda resultar en un tratamiento más sencillo.

De el cálculo de los exponentes de Lyapunov surgieron cosas interesantes. No se esperaba que fuera a haber una diferencia entre el valor que encontraría el método de Dellago *et al.* y lo que se puede calcular para el mapeo *slap*. Por esto se pensó durante un tiempo considerable que había un error en el código. La correspondencia entre las dos visiones de la dinámica resultó útil e ilustra la conexión entre la dinámica del billar y su mapeo. También se encontró inesperadamente que el tiempo medio de retorno varía con el parámetro de inelasticidad, pues en [5], inclusive se da una fórmula para  $\bar{\tau}$  que depende únicamente del área de la mesa y de la longitud de la frontera para el caso elástico.

## 7.2. Extensiones Posibles

En la elaboración de este trabajo se viajó por muchas vertientes posibles, que para conservar la brevedad y enfoque ya no fue posible concluir ni presentar aquí.

Cualquiera de las siguientes vertientes que se tocaron serían extensiones interesantes al trabajo presente.

Se podría explorar lo que pasa con el atractor y la regla de colisión en mesas poligonales con mayor número de lados como rectángulos, pentágonos y hexágonos.

Otra posibilidad que se contempló y sería interesante seguir es estudiar el comportamiento en polígonos irregulares, y en particular en triángulos isóceles donde se rompe la irregularidad, mientras se preserva cierta simetría.

Se podría también hacer un estudio más profundo de las dimensiones fractales y observar que sucede con el espectro de dimensiones de Rényi conforme cambia el parámetro inelástico de la regla de colisión. Sin embargo, al intentar hacer esto, hubo que enfrentarse con una barrera computacional de ajustes que hubiera desviado demasiado la atención del enfoque principal del presente trabajo.

Se pueden calcular exponentes de Lyapunov para una infinidad de reglas de colisión inelásticas, sería interesante investigar que propiedades tiene que tener una regla para poder simplificar el tratamiento, pues con la regla inelástica que se trabajó surgieron varias complicaciones.

También se podría ahondar en la estructura del atractor y su evolución con el parámetro de inelasticidad, como se hace en [2]. Una manera de hacer esto es con técnicas de la dinámica simbólica.

Estas posibles extensiones son evidencia de que tan amplio puede ser el estudio de billares, que en esta tesis se enfocó únicamente a la determinación de los exponentes de Lyapunov.



# Bibliografía

- [1] V.I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.
- [2] Aubin Arroyo, Roberto Markarian, and David P Sanders. Structure and evolution of strange attractors in non-elastic triangular billiards. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 22(2):026107–026107, 2012.
- [3] Giancarlo Benettin, Luigi Galgani, Antonio Giorgilli, and Jean-Marie Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 2: Numerical application. *Meccanica*, 15:21–30, 1980. 10.1007/BF02128237.
- [4] Joseph Bertrand. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, 1888.
- [5] N.I. Černov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Mathematical Surveys and Monographs Series. American Mathematical Society, 2006.
- [6] Hallard T Croft, Kenneth J Falconer, and Richard K Guy. *Unsolved problems in geometry*, volume 17. Springer-Verlag New York, 1991.
- [7] Ch Dellago, Harald A Posch, and William G Hoover. Lyapunov instability in a system of hard disks in equilibrium and nonequilibrium steady states. *Physical Review E*, 53(2):1485, 1996.
- [8] J. P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57:617–656, Jul 1985.
- [9] Thomas Gilbert and David P Sanders. Stable and unstable regimes in higher-dimensional convex billiards with cylindrical shape. *New journal of physics*, 13(2):023040, 2011.

- [10] Valeriĭ Viktorovich Kozlov and Dmitriĭ V Treshchëv. *Billiards: a genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, volume 89. Amer Mathematical Society, 1991.
- [11] François Ledrappier. The metric entropy of diffeomorphisms: Part ii: Relations between entropy, exponents and dimension. *The Annals of Mathematics*, 122(3):540–574, 1985.
- [12] Joseph Liouville. *J. Math. Pures Appl.*, 3:342, 1838.
- [13] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [14] Roberto Markarian, Enrique J Pujals, and Martín Sambarino. Pinball billiards with dominated splitting. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 30(6):1757–1786, 2010.
- [15] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [16] Govindan Rangarajan, Salman Habib, and Robert D. Ryne. Lyapunov exponents without rescaling and reorthogonalization. *Phys. Rev. Lett.*, 80:3747–3750, Apr 1998.
- [17] David Ruelle. a strange attractor? *Notices of the AMS*, 53(7), 2006.
- [18] Nándor Simányi. Proof of the boltzmann-sinai ergodic hypothesis for typical hard disk systems. *Inventiones Mathematicae*, 154(1):123–178, 2003.
- [19] J.C. Sprott. *Chaos and Time-series Analysis*. Oxford University Press, Incorporated, 2003.
- [20] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in nonlinearity. Westview Press, 2008.
- [21] George W Tokarsky. Polygonal rooms not illuminable from every point. *The American mathematical monthly*, 102(10):867–879, 1995.
- [22] Stephen Wiggins. Liapunov exponents. In *Introduction to Applied Non-linear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*, pages 726–735. Springer Berlin Heidelberg, 2003. 10.1007/0-387-21749-5\_30.