UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS

K-TEORÍA EQUIVARIANTE TORCIDA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A:

JESÚS FRANCISCO ESPINOZA FIERRO

DIRECTOR:

DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CODIRECTOR:

DR. BERNARDO URIBE JONGBLOED
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

COMITÉ TUTOR:

DR. MARCELO ALBERTO AGUILAR GONZÁLEZ DE LA VEGA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MÉXICO, D.F. MAYO 2013

Este trabajo se desarrolló en el Instituto de Matemáticas, Campus Cuernavaca, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) bajo la dirección de los doctores José Luis Cisneros Molina y Bernardo Uribe Jongbloed. Se contó con el apoyo de una beca para estudios doctorales del CONACYT (Registro: 160366). Además se contó con el apoyo parcial del proyecto DGAPA PAPIIT IN102208 "Métodos de teoría K en geometría"; además del apoyo de la Universidad de los Andes, para estancias de investigación.

Redacción y edición de tesis

con LaTeX, editor `Kile`

y sistema operativo libre

`Debian GNU/Linux`

A mis abuelos, quienes partieron antes de ver concluido este proyecto.

A mi esposa por su constante e incondicional apoyo.

A mi hijo, por no dejarme olvidar lo

fascinante de esta área.

Agradecimientos

Existen muchas personas que de manera directa o indirecta han contribuido en la realización de este trabajo.

Comenzaré por agradecer a mis abuelos, quienes siempre creyeron que la mayor herencia que podían dejarme era el estudio, y se esforzaron y sacrificaron hasta el último de sus días para que pudiera continuar con este proyecto. Fue mi abuela (Justina Mátuz) quien desde mi infancia me alentó a dedicarme a esta fascinante área, y fue mi abuelo (Ramón Espinoza) quien despertó mi interés por los números y se convirtió en mi constante compañía en los concursos de matemáticas a los que tanto disfrutábamos asistir.

Mi esposa Rosalía G. Hernández ha jugado distintos papeles en este proyecto: secretaria, correctora ortográfica, crítica, psicóloga, amiga, estudiante, profesora, etc. Sería difícil visualizar este proyecto finalizado sin su incondicional ayuda y apoyo. Su cariño y comprensión han hecho que estos

Directores de tesis. Deseo extender un agradecimiento muy especial a un excelente matemático y profesor de vocación, alguien en quien la grandeza sólo contrasta con la sencillez y la calidez de su persona, el Dr. Bernardo Uribe Jongbloed, quien me ha brindado su apoyo profesional, académico y personal, al lado de quien he aprendido muchas cosas más que matemáticas. Aunque seguramente llegó al límite de su paciencia en varias ocasiones, me ha brindado siempre palabras amables y certeras que me han mantenido en la dirección correcta. Asimismo, agradezco al Dr. José Luis Cisneros quien como asesor y amigo me ha brindado su apoyo en tiempos difíciles, además de las oportunas y acertadas indicaciones sobre este trabajo.

Sinodales. Agradezco a los doctores Alejandro Adem, Daniel Juan Pineda y Marcelo A. Aguilar por las observaciones y correcciones que me señalaron a fin de hacer de éste un mejor trabajo. Las precisas indicaciones que tuvieron a bien proporcionarme me permitieron crecer en mi formación como matemático y darle a este trabajo una presentación con una calidad más profesional.

Software Libre. El formato de esta tesis esta basado en la plantilla que el Dr. Gengis Kanhg Toledo Ramírez tuvo a bien compartir lo cual le agradezco públicamente. Esta tesis fue redactada y editada en su totalidad usando 100 % software libre: TEX Live, Kile y Okular, corriendo sobre una plataforma basada en GNU/Debian Linux.

Índice general

Introducción

La K-teoría (topológica compleja) nace con el trabajo de Atiyah y Hirzebruch (cf. [5]) alrededor de 1959, basándose en el trabajo fundamental de Grothendieck y Bott. Esta viene a ser el primer ejemplo de una teoría de cohomología generalizada, es decir, una teoría que satisface todos los axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de cohomología ([15]), excepto el axioma de la dimensión. Como tal, por el Teorema de Representabilidad de Brown, es representable; de hecho, Atiyah y Jänich probaron de manera independiente que un modelo para su correspondiente Ω-espectro está dado por el espacio de operadores de Fredholm $Fred(\mathcal{H})$, sobre un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita $\mathcal{H}$. Es precisamente éste el ingrediente clave para definir las versiones torcidas asociadas a la K-teoría. Más precisamente, del Teorema de Atiyah-Jänich tenemos que la K-teoría de un CW-complejo finito X satisface

$$K^0(X) \cong [X, Fred(\mathcal{H})],$$

equivalentemente, si $E := X \times Fred(\mathcal{H})$ es el haz vectorial trivial sobre X con fibra $Fred(\mathcal{H})$ y $\Gamma(E; X)$ denota su espacio de secciones, entonces el Teorema de Atiyah-Jänich nos dice que

$$K^0(X) \cong \pi_0(\Gamma(E; X)).$$

Heurísticamente, podemos definir "versiones torcidas" de K-teoría reemplazando el haz trivial $X \times Fred(\mathcal{H})$ por un haz arbitrario E cuya fibra sea $Fred(\mathcal{H})$, y definiendo la correspondiente versión de K-teoría E-torcida por

$$K^0(X; E) := \pi_0(\Gamma(E; X)).$$

En otras palabras, estamos construyendo una nueva teoría a partir de un haz cuya fibra tiene estructura de un espacio de lazos infinito. Existen varias dificultades técnicas en esta construcción relativas a la topología que debe tener el espacio $Fred(\mathcal{H})$, las cuales fueron resueltas por Atiyah y Segal en [7].

El análogo equivariante tiene una construcción ad hoc dada también por Atiyah y Segal ([7]), la cual consiste a grandes rasgos en llevar la construcción del caso no equivariente al equivariante mediante la construcción de Borel.

En el contexto no equivariante, Atiyah y Segal ([7]) demuestran que la K-teoría torcida tiene como segundo término la cohomología ordinaria en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch, y en su análisis de los diferenciales superiores muestran que éstos corresponden a productos de Massey, los cuales en general no se trivializan al tomar el producto tensorial con $\mathbb{Q}$, es decir, la sucesión espectral no converge en el segundo término después de la tensorización con $\mathbb{Q}$ como en el caso ordinario. Esto presenta un panorama esencialmente distinto al caso ordinario que conlleva a nuevas e interesantes interrogantes. Existe bastante literatura reciente relativa no solo al caso de K-teoría equivariante torcida de G-CW-complejos sino a diferentes generalizaciones, y en varias publicaciones establecen la correspondiente sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch, la cual existe siempre de manera automática cuando tenemos una teoría de cohomología (sobre una categoría apropiada). Sin embargo, la escasez de ejemplos es notable y el estudio de los diferenciales superiores no ha sido desarrollado.

El objetivo general de este trabajo consiste en hacer un estudio profundo de la K-teoría equivariante torcida, y más precisamente sobre los *torcimientos equivariantes* y proporcionar nuevos ejemplos y resultados consecuentes de dicho análisis. Se busca también presentar un análisis de una sucesión espectral asociada a la K-teoría equivariante torcida siguiendo el enfoque de G. Segal en [37].

Los preliminares son introducidos en el Capítulo 1. Se establece la definición geométrica de K-teoría equivariante, esto es, mediante la construcción de Grothendieck del monoide de clases de isomorfismo de G-haces vectoriales. Estudiamos su correspondiente sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. Bajo ciertas condiciones respecto a la acción del grupo obtenemos como segundo término en la sucesión espectral, el grupo de cohomología de Bredon equivariante (desarrollada en el Apéndice A) y comentamos algunos hechos relativos a la convergencia de la sucesión. Hacemos también un análisis de un importante "subgrupo" en K-teoría equivariante, conocido como *K-teoría equivariante torcida con torsión discreta*, el cual es bastante sencillo de definir y hace uso de la teoría de representaciones proyectivas las cuales están en correspondencia biyectiva con representaciones α-torcidas, con $\alpha \in H^2(G;\mathbb{S}^1)$ el segundo grupo de cohomología del grupo G con coeficientes en el G-módulo trivial $\mathbb{S}^1$. La correspondiente sucesión espectral involucra también cohomología de Bredon equivariante pero con coeficientes locales dados por el funtor $\mathcal{R}_G : G/H \mapsto R_\alpha(H)$ (el grupo de representaciones α-torcidas).

El Capítulo 2 está dedicado al estudio de los elementos clave para definir las versiones "torcidas" de la K-teoría, en el Capítulo 3. Tales elementos, llamados *torcimientos equivariantes* (nombre con el cual se intitula este capítulo) corresponden a $PU(\mathcal{H})$-haces principales G-equivariantes sobre un G-CW finito X, con G un grupo de Lie compacto y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Anteriormente R. K. Lashof, J. P. May y G. Segal estudiaron la colección $B(G,\kappa)(X)$ de estos κ-haces principales G-equivariantes sobre X, llamados (G,κ)-haces en [27], cuyo resultado principal establece que si G y κ son grupos de Lie compactos, con κ **abeliano**, y X del mismo tipo de homotopía G-equivariante que un G-complejo celular, entonces existe un isomorfismo

$$B(G,\kappa)(X) \cong B(\kappa)(EG \times_G X),$$

con el conjunto $B(\kappa)(EG \times_G X)$ de clases de isomorfismo de κ-haces principales sobre el espacio ordinario (no equivariante) $EG \times_G X$, dado por la construcción de Borel sobre X. Posteriormente, en [7] los autores, M. F. Atiyah y G. Segal, analizan el caso $\kappa = PU(\mathcal{H})$ y realizan una construcción ad hoc para el correspondiente espacio clasificante. Luego, mediante el estudio de los grupos de homotopía de tal espacio clasificante establecen que los torcimientos equivariantes deben ser clasificados por el tercer grupo de cohomología de Borel equivariante $H^3_G(X;\mathbb{Z})$. La aportación más relevante, en este capítulo, del trabajo hecho en esta tesis respecto al estudio antes mencionado es una construcción alternativa de un espacio clasificante para los torcimientos equivariantes y el correspondiente espacio universal. La construcción de este espacio se realiza en la Sección 2.2 y el cálculo de sus grupos de homotopía es realizado en la Sección 2.3. Finalmente, en la Sección 2.4 se demuestra que efectivamente los torcimientos equivariantes están clasificados por $H^3_G(X;\mathbb{Z})$, como era de esperarse. Un aspecto relevante de esta construcción es la posibilidad de generalizarse a acciones propias de grupos discretos, trabajo realizado en [8] posterior a esta tesis, en colaboración con el Dr. Noé Bárcenas, el Dr. Michael Joachim y el Dr. Bernardo Uribe.

En el Capítulo 3 se establece la definición de K-teoría equivariante torcida mediante los torcimientos equivariantes introducidos en el capítulo anterior. Se demuestra que estos grupos forman una teoría de cohomología generalizada y a partir de estas propiedades cohomológicas se estudia la sucesión espectral para la K-teoría equivariante torcida a la Segal. Seguimos el enfoque de G. Segal en [38] y proporcionamos una sucesión espectral cuyo segundo término está dado por la cohomología de Bredon equivariante. Usando las propiedades locales de la K-teoría torcida y la sucesión de Mayer-Vietoris se proporcionan nuevos ejemplos de cálculos de tales grupos.

En los dos apéndices al final de este trabajo incluimos algunos resultados y conceptos usados a lo largo de la tesis.

Capítulo 1

K-Teoría Equivariante

Introducimos la definición geométrica de K-teoría equivariante, esto es, mediante la construcción de Grothendieck del monoide de clases de isomorfismo de G-haces vectoriales, haciendo énfasis en los resultados y propiedades que nos serán de utilidad en el resto del trabajo, iniciando con el estudio de la teoría de representaciones de grupos finitos, la cual viene a ser una de las principales herramientas en el estudio de K-teoría equivariante. Establecemos también algunas propiedades cohomológicas del funtor de K-teoría G-equivariante K_G, sus grupos superiores, grupos relativos, sucesión exacta larga, etc. Posteriormente estudiamos la correspondiente sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. Bajo ciertas condiciones respecto a la acción del grupo obtenemos como segundo término en la sucesión espectral, el grupo de cohomología de Bredon equivariante y comentamos algunos hechos relativos a la convergencia de la sucesión espectral. Hacemos también un análisis de un importante "subgrupo" en K-teoría equivariante, conocido como *K-teoría equivariante torcida con torsión discreta*, el cual es bastante sencillo de definir y hace uso de la teoría de representaciones proyectivas las cuales están en correspondencia biyectiva con representaciones α-torcidas, con $\alpha \in H^2(G; \mathbb{S}^1)$ el segundo grupo de cohomología del grupo G con coeficientes en el G-módulo trivial $\mathbb{S}^1$. La correspondiente sucesión espectral involucra también cohomología de Bredon equivariante con coeficientes locales dados por el funtor $\mathcal{R}_G : G/H \mapsto R_\alpha(H)$ (el grupo de representaciones α-torcidas).

Cabe mencionar que en este capítulo no hay resultados originales y el material aquí proporcionado tiene como objetivo introducir al lector en los prerrequisitos necesarios para poder establecer los resultados principales de esta tesis, los cuales se desarrollan en los siguientes dos capítulos.

1.1. Representaciones Lineales

En esta sección se establecen algunos resultados sobre teoría de representaciones lineales de grupos finitos. Este material es bastante estándar y tanto las definiciones como los resultados aqui enunciados, se pueden encontrar completamente desarrollados en [17] y [40].

Consideremos un grupo finito G y un espacio vectorial complejo V de dimensión finita. Una *representación* de G en V corresponde a un homomorfismo

$$\rho : G \to Aut_{\mathbb{C}}(V).$$

Equivalentemente, una acción lineal de G sobre V. El homomorfismo ρ le da una estructura de G-modulo a V de manera natural. En este trabajo solo consideraremos espacios vectoriales complejos y homomorfismos $\mathbb{C}$-lineales, de modo que en adelante omitiremos el subíndice en $Aut_{\mathbb{C}}(V)$, denotando este espacio simplemente por $Aut(V)$.

Cuando no existe ambigüedad repecto al homomorfismo ρ, usualmente nos referimos a V como la representación de G, y también escribimos $g \cdot v$, o bien, gv para denotar $\rho(g)(v)$. Dicho esto, una aplicación $\phi : V \to W$ entre dos representaciones V y W de G corresponde a una aplicación de espacios vectoriales que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

para cada $g \in G$. En este caso, decimos que ϕ es G-lineal y denotamos por $Hom^G(V, W)$ al conjunto de todas estas aplicaciones.

Si W es una representación de G y V es un subespacio vectorial de W tal que para cada $g \in G$ y $v \in V$ tenemos que $gv := \rho(g)(v) \in V$, entonces decimos que V es una *subrepresentación* de G o un *G-espacio invariante*. Cuando una representación no tiene subrepresentaciones propias $W \neq 0$, es llamada *irreducible*.

Ejemplo 1.1.1. Si V y W son dos representaciones de G y $\phi : V \to W$ es una aplicación G-lineal, entonces $Ker(\phi)$ e $Im(\phi)$ son subrepresentaciones de V y W, respectivamente, ya que si $v \in Ker(\phi) \subset V$ entonces $gv \in Ker(\phi)$ pues $\phi(gv) = g\phi(v) = g0 = 0$. Análogamente, si $w \in Im(\phi)$ y $w = \phi(v)$ para algún $v \in V$, entonces $gw = g\phi(v) = \phi(gv) \in Im(\phi)$.

Mostramos a continuación algunos ejemplos de como obtener nuevas representaciones a partir de representaciones dadas.

Representación suma directa. Si $\rho_1 : G \to Aut(V)$ y $\rho_2 : G \to Aut(W)$ son representaciones de G, podemos formar la representación *suma directa* $\rho : G \to Aut(V \oplus W)$ dada por

$$\rho(g)(v \oplus w) = \rho_1(g)(v) \oplus \rho_2(g)(w)$$

para cada $g \in G$, $v \in V$ y $w \in W$; o bien, en forma abreviada, $g(v \oplus w) = gv \oplus gw$.

Representación producto tensorial. Análogamente al caso anterior, es posible definir la representación *producto tensorial* $V \otimes W$ de dos represetaciones V y W de G, la cual es de nuevo una representación de G, donde $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$.

Representación Hom. Si V y W son representaciones del grupo G, podemos formar una nueva representación $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$, dada como el espacio de todas las aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales $\phi : V \to W$, con la estructura de G-modulo dada por

$$(g\phi)(v) := g\phi(g^{-1}v) \;\; v \in V.$$

Dado un G-espacio V, denotaremos por V^G al subconjunto de V que consiste de todos los puntos fijos de $\rho(g) : V \to V$ para todo $g \in G$, esto es,

$$V^G := \{v \in V \mid gv = v \text{ para todo } g \in G\}.$$

En esta notación, tenemos

$$Hom_{\mathbb{C}}(V, W)^G = Hom_{\mathbb{C}}^G(V, W).$$

En efecto, $\phi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, W)^G$ si y sólo si

$$(g\phi)(v) = \phi(v) \text{ para todos } g \in G,\ v \in V,$$

esto es, $g\phi(g^{-1}v) = \phi(v)$ para todos $g \in G$, $v \in V$, equivalentemente, $\phi(gv) = g\phi(v)$ para todos $g \in G$, $v \in V$, lo cual significa precisamente que $\phi \in Hom_{\mathbb{C}}^G(V, W)$.

Representación dual. Sea V una representación de G y consideremos el espacio vectorial complejo $V^* := Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ con la suma y multiplicación por escalares usual. De modo, que como un caso particular de la representación Hom, la representación dual es dada por

$$\rho^*(g) := \rho(g^{-1}).$$

Hemos visto que dadas dos representaciones podemos formar una nueva representación dada como la suma directa. Preguntémonos por el resultado inverso, es decir, dada una representación V de G, ¿será posible escribir V como una suma directa de representaciones? La respuesta es afirmativa y es dada por el siguiente resultado, también conocido como el Teorema de Maschke.

Teorema 1.1.2 (Maschke)**.** *Si V es una representación de dimensión compleja finita del grupo finito G y W es una subrepresentación, entonces existe un subespacio invariante complementario W' tal que $V = W \oplus W'$.*

Demostración. Si por un momento olvidamos la estructura de G-modulo que tiene V y sólo lo vemos como un espacio vectorial complejo de dimensión finita, entonces es claro que siempre podemos definir sobre V un producto interior Hermitiano, digamos

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}.$$

Si W es un subespacio vectorial de V siempre existe su complemento ortogonal $W^{\perp}$, sin embargo cuando V y W tienen un estructura de G-modulos, no necesariamente la tendrá tambien el complemento ortogonal $W^{\perp}$ (ver ejemplo 1.1.3). Para que dicha condición se cumpla debemos tener que si $w' \in W^{\perp}$, entonces

$$\langle gw', w\rangle = 0 \text{ para todos } g \in G, w \in W,$$

o bien, como W es G-invariante

$$\langle gw', gw\rangle = 0 \text{ para todos } g \in G, w \in W.$$

Esta última condición no es válida en general, pero en el caso de grupos finitos (incluso compactos) siempre es posible construir un producto Hermitiano que es invariante respecto a G, a saber,

$$\langle v, w\rangle_{inv} := \sum_{g \in G} \langle gv, gw\rangle,$$

ya que claramente $\langle gv, gw\rangle_{inv} = \langle v, w\rangle_{inv}$. Es dicha propiedad de invarianza la que garantiza la existencia de un complemento ortogonal con una estructura de G-modulo. ■

Ejemplo 1.1.3. Si V es una representación del grupo G y debilitamos la hipótesis de que éste sea finito, entonces el teorema de Maschke puede ya no ser válido. Por ejemplo, si $G = (\mathbb{R}, +)$ es el grupo aditivo de los números reales y $V = \mathbb{C}^2$ una representación de G con

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \mathbb{R} & \to & GL(2,\mathbb{C}) \\ & x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

entonces el subespacio $W = \mathbb{C} \oplus 0$ es G-invariante, sin embargo no tiene un complemento G-invariante.

Ejemplo 1.1.4. El Teorema de Maschke tampoco es válido en general para campos de característica positiva, por ejemplo si la característica del campo divide el orden del grupo.

Consideremos el campo $\mathbb{Z}_p$ y el espacio vectorial $V = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p$, con el siguiente producto interior

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & V \times V & \to & \mathbb{Z}_p \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & \langle v_1, v_2\rangle := v_{11}v_{21} + v_{12}v_{22} \end{array}$$

donde $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ y $v_2 = (v_{21}, v_{22})$. Si tomamos nuevamente la acción

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de un grupo G sobre V cuyo orden sea divisible por p, es fácil ver que el producto anterior no es invariante respecto a G y un cálculo sencillo muestra que

$$\langle v_1, v_2\rangle_{inv} = 0 \text{ para todos } v_1, v_2 \in V.$$

Además, aunque $\mathbb{Z}_p \oplus 0$ es un subespacio G-invariante, es claro que no existe un G-espacio complementario, de hecho su complemento $\langle\ ,\ \rangle_{inv}$-ortogonal es precisamente V.

Como una consecuencia inmediata del Teorema de Maschke se sigue que toda representación V de dimensión compleja finita de un grupo finito G, es una suma directa de representaciones irreducibles. Esta propiedad es conocida como *reducibilidad completa*. Combinando lo anterior con el siguiente resultado, tendremos que dicha descomposición es única, salvo isomorfismo.

Lema 1.1.5 (Schur)**.** *Si V y W son representaciones irreducibles de G y $\phi : V \to W$ es una aplicación G-lineal, entonces*

1. *ϕ es un isomorfismo, o bien, $\phi = 0$.*

2. *Si $V = W$, entonces $\phi = \lambda \cdot Id$, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $Id : V \to W$ la aplicación identidad.*

Demostración. La primera parte de este resultado se sigue del hecho de que $V_0 := Ker(\phi)$ y $W_0 := Im(\phi)$ son subrepresentaciones de V y W, respectivamente, ya que al ser éstas últimas representaciones irreducibles se tiene lo siguiente:

- Si $V_0 = 0$, entonces ϕ es inyectiva y distinta de cero, por lo tanto $W_0 \neq 0$ de donde se sigue que $W_0 = W$ por ser ésta irreducible. Por lo tanto ϕ es un isomorfismo.

- Si $V_0 \neq 0$ entonces $V_0 = V$, y por lo tanto $\phi = 0$.

Para la segunda parte del lema usamos el hecho de que el campo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, pues esto garantiza la existencia de un valor propio no nulo para la aplicación $\phi : V \to W$, digamos $\lambda \in \mathbb{C}$. Consideremos ahora la aplicación

$$\psi := \phi - \lambda \cdot Id : V \to W.$$

Es claro que todo multiplo $\mathbb{C}$-escalar del vector propio v_λ asociado al valor propio λ satisface

$$\psi(cv_\lambda) = (\phi - \lambda \cdot Id)(cv_\lambda) = \phi(cv_\lambda) - \lambda \cdot Id(cv_\lambda) = c\phi(v_\lambda) - \lambda cv_\lambda = 0,$$

de donde se sigue que $Ker(\psi) \neq 0$ y al ser una subrepresentación de V debemos tener $Ker(\psi) = V$, es decir, $\psi := \phi - \lambda \cdot Id = 0$ sobre todo elemento en V, lo cual establece la segunda parte del Lema de Schur. $\blacksquare$

Del Teorema de Maschke y el Lema de Schur, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.6. *Sea G un grupo finito y $\rho : G \to Aut(V)$ una representación. Entonces*

$$V \cong \bigoplus_{V_i \in Irr(G)} Hom^G(V_i, V) \otimes V_i$$

donde $Irr(G)$ corresponde al conjunto de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de G.

En otras palabras, lo que el resultado anterior nos dice es que para un grupo finito G, toda representación V de G se puede escribir de forma única, salvo isomorfismo, como una suma de representaciones irreducibles de G; donde $Hom^G(V_i, V) \otimes V_i \cong V_i^{\oplus a_i} =: a_i V_i$, nos dice cuantas veces aparece la representación irreducible V_i en tal descomposición.

1.2. El anillo de representaciones

Sea A un semigrupo abeliano. La construcción de Grothendieck de A, denotada por $K(A)$, es un grupo abeliano que satisface la siguiente propiedad universal: existe un homomorfismo de semigrupos $\alpha : A \longrightarrow K(A)$ tal que, si G es un grupo abeliano y $r : A \longrightarrow G$ es un homomorfismo de semigrupos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\tilde{r} : K(A) \to G$ tal que $\tilde{r}\alpha = r$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "r"'] & K(A) \arrow[dl, dashed, "\tilde{r}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

En el caso de que A posee una estructura de semianillo, $K(A)$ hereda una estructura de anillo. La unicidad de $K(A)$ se sigue por la propiedad universal y la existencia es probada por M. F. Atiyah en [3, Sec. 2.1]; siguiendo el mismo análisis hecho por Atiyah en dicha referencia, definimos el anillo de representaciones.

Definición 1.2.1. *Para un grupo G, definimos el anillo de representaciones $R(G)$ como la construcción de Grothendieck del semianillo consistente de las clases de isomorfismo de representaciones lineales complejas de G, de dimensión finita, con la suma y producto usuales.*

Cabe mencionar que los elementos en $R(G)$ pueden verse como diferencias formales de clases de isomorfismo de representaciones lineales complejas de G, de dimensión finita,

$$R(G) = \{[V] - [W]\}$$

con las operaciones de suma y producto dadas por,

$$([V_1] - [W_1]) + ([V_2] - [W_2]) = [V_1 \oplus V_2] - [W_1 \oplus W_2]$$

y

$$([V_1]-[W_1])\cdot([V_2]-[W_2]) = [V_1\otimes V_2\oplus W_1\otimes W_2]-[V_1\otimes W_2\oplus W_1\otimes V_2].$$

Ejemplo 1.2.2. Consideremos el grupo abeliano cíclico finito $G=\mathbb{Z}_n$, y sea

$$\rho : G \to Aut(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{\times}$$

una representación lineal de G. Como ρ es un homomorfismo de grupos, se sigue que para cada $g\in G$,

$$\rho(g)^n = \rho(g^n) = \rho(0) = 1,$$

es decir los automorfismos $\rho(g)$ de $\mathbb{C}$ corresponden a multiplicación por las raíces n-ésimas de la unidad. De modo que tenemos n representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{C}$, y si g es un generador de G, entonces cada una es dada por

$$\begin{array}{rcl} \rho_k : G & \longrightarrow & Aut(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{\times} \\ g & \longmapsto & e^{2\pi i k/n} \end{array} \tag{1.1}$$

para $k=0,1,\ldots,n-1$.

Si ahora consideramos una representación

$$\rho : G \to Aut(\mathbb{C}^m)$$

de dimensión m, entonces podemos ver a los automorfismos $\rho(g)$ como matrices complejas cuadradas de $m\times m$ no singulares. Luego, como ρ es un homomorfismo de grupos y $G=\mathbb{Z}_n$ es abeliano se sigue que dichas matrices conmutan, de modo que podemos tomar una base en $\mathbb{C}^m$ de tal manera que todos los automorfismos $\rho(g)$ se diagonalizan simultaneamente, esto es,

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, tenemos que $\rho(g)^n = I$ y en consecuencia cada α_k corresponde a una raíz n-ésima de la unidad. Lo que nos da una descomposición de la representación ρ en la forma

$$\rho = \rho_{k_1}\oplus\rho_{k_2}\oplus\cdots\oplus\rho_{k_m}$$

donde $\rho_{k_i}(g) = \alpha_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$. Por lo tanto, las únicas representaciones irrducibles de $\mathbb{Z}_n$ son de la forma (1.1).

Por otro lado, en la notación de (1.1), es claro que

$$\rho_k = \rho_1 \otimes \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_1 \ (k \text{ veces})$$

y por lo tanto, la identificación

$$\rho_1 \longleftrightarrow x$$

induce un isomorfismo de anillos

$$R(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}[x]/(1 - x^n). \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.2.3. En este ejemplo estudiaremos las representaciones complejas (continuas) del grupo de Lie compacto $\mathbb{S}^1$. Si

$$\rho : \mathbb{S}^1 \to Aut(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$$

es una representación lineal continua, no es difícil convencerse de que para cada $\alpha \in \mathbb{S}^1$, $\rho(\alpha) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^\times$. Luego, como ρ es un homomorfismo de grupos se sigue que

$$\rho(\alpha) = \alpha^k$$

para todo $\alpha \in \mathbb{S}^1$ y algún $k \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, para cada $k \in \mathbb{Z}$ tenemos una representación irreducible

$$\rho_k : \alpha \mapsto \alpha^k. \tag{1.3}$$

Usando la conmutatividad de $\mathbb{S}^1$ y un argumento completamente análogo al ejemplo anterior, deducimos que las únicas representaciones irreducibles son de la forma (1.3). Por lo tanto, la identificación

$$\rho_1 \longleftrightarrow x$$

induce un isomorfismo de anillos

$$R(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}[x, x^{-1}].$$

Proposición 1.2.4. *Para el grupo cíclico abeliano de n elementos $\mathbb{Z}_n$, tenemos que*

$$R(\mathbb{Z}_n) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{d_i | n} \mathbb{Q}(\zeta_{d_i})$$

donde d_i toma valores sobre todos los divisores de n, ζ_{d_i} es una d_i-ésima raíz primitiva de la unidad y $\mathbb{Q}(\zeta_{d_i})$ es el campo ciclotómico obtenido al adjuntar ζ_{d_i} al campo de los números racionales.

Para demostrar la proposición anterior necesitaremos el siguiente resultado básico,

Lema 1.2.5. *Si ζ_d es una d-ésima raíz primitiva de la unidad, entonces*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_d) = \varphi(d)$$

donde $\varphi(d)$ es la función de Euler, que es igual al numero de primos relativos positivos menores que d. En particular,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \prod_{d_i|n} \mathbb{Q}(\zeta_{d_i}) = n.$$

Para una demostración puede consultarse [26, Teo. 3.1].

Demostración de la Proposición 1.2.4. Usando el isomorfismo 1.2, del ejemplo 1.2.2, mostraremos que la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : R(\mathbb{Z}_n) \otimes \mathbb{Q} \quad &\longrightarrow \quad \textstyle\prod_{d_i|n} \mathbb{Q}(\zeta_{d_i}) \\ f(x) \quad &\longmapsto \quad (f(\zeta_{d_1}), f(\zeta_{d_2}), \ldots, f(\zeta_{d_k})) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos. En primer lugar, es claro que Ψ es un morfismo de $\mathbb{Q}$-módulos, pues claramente es $\mathbb{Q}$-lineal. Por otro lado, si $\Psi(f(x)) = (0, \ldots, 0)$, entonces $f(x)$ debe de ser un múltiplo de cada uno de los polinomios ciclotómicos

$$\Phi_{d_i}(x) = \prod_{j=1}^{\varphi(d_i)} (x - \zeta_{d_i}^j),$$

ya que $\Phi_{d_i}(x)$ es un polinomio mónico irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ de grado $\varphi(d_i)$ (cf. [13, Teo. 41]). Por lo tanto, para algún polimonio $g(x)$,

$$f(x) = g(x) \prod_{d_i|n} \Phi_{d_i}(x) = g(x)(1 - x^n) = 0,$$

y se sigue que Ψ es inyectiva. Luego, por el lema anterior, sabemos que

$$\dim_{\mathbb{Q}} R(\mathbb{Z}_n) \otimes \mathbb{Q} = n = \dim_{\mathbb{Q}} \prod_{d_i|n} \mathbb{Q}(\zeta_{d_i}),$$

en consecuencia, Ψ es un isomorfismo de $\mathbb{Q}$-módulos. Además, es claro que Ψ preserva el producto en ambos anillos y obtenemos el resultado deseado. ■

Ejemplo 1.2.6. Consideremos el caso del grupo cíclico de orden un número primo, digamos p. En este caso, sabemos que

$$R(\mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[x]/(1 - x^p)$$

y por la proposición anterior,

$$\mathbb{Q}[x]/(1 - x^p) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\zeta_p)$$

donde el isomorfismo es dado por

$$f(x) \longmapsto (f(1), f(\zeta)) \tag{1.4}$$

En efecto, si $(r, r_0 + r_1\zeta + r_2\zeta^2 + \cdots + r_{p-1}\zeta^{p-1}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\zeta_p)$ entonces para

$$f(x) = (r_0 + s) + (r_1 + s)x + (r_2 + s)x^2 + \cdots + (r_{p-1} + s)x^{p-1} \quad \text{con } s = \frac{r - \sum r_k}{p}$$

se tiene que $f(1) = r$ y $f(\zeta) = r_0 + r_1\zeta + r_2\zeta^2 + \cdots + r_{p-1}\zeta^{p-1}$ ya que $s \cdot \sum_{k=0}^{p-1} \zeta^k = 0$, por lo tanto 1.4 es sobreyectivo. La inyectividad se sigue del hecho de que si $f(1) = f(\zeta) = 0$ para un polimonio $f(x)$, entonces existe $g(x)$ tal que $f(x) = (1-x)g(x)$ y además $g(\zeta) = 0$, lo cual es absurdo ya que $g(x)$ tiene grado menor o igual a $p - 2$ y el polimonio minimal de ζ es

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}.$$

Si ahora consideramos un grupo finito no necesariamente abeliano, entonces podemos establecer una fórmula de descomposición análoga a la Proposición 1.2.4, pero un poco más sofisticada como veremos enseguida, pero antes introducimos el concepto de *representación inducida*.

Sea $\rho : G \longrightarrow Aut(V)$ una representación lineal de G y sea ρ_H su restricción al subgrupo $H < G$. Consideremos una subrepresentación W de ρ_H, esto es, $\rho(h)(W) \subset W$ para cada $h \in H$, y denotamos por $\theta : H \longrightarrow Aut(W)$ esta representación. Observemos que para cada $g \in G$, el espacio vectorial $\rho(g)(W)$ depende sólo de la clase lateral gH de g, en efecto, para cada $h \in H$ se tiene que

$$\rho(gh)(W) = \rho(g) \circ \rho(h)(W) = \rho(g)(\rho(h)(W)) = \rho(g)(W)$$

ya que $\rho(h)(W) = W$. De modo que si σ es una clase lateral izquierda de H, podemos definir el subespacio W_σ de V, como $\rho(g)(H)$ para cualquier $g \in \sigma$. Luego, es claro que los subespacios W_σ son permutados sobre sí mismos por $\rho(g)$, para $g \in G$, y su suma $\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ es una subrepresentación de V.

Decimos que la representación $\rho : G \longrightarrow Aut(V)$ es *inducida* por la representación $\theta : H \longrightarrow Aut(W)$ si

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma,$$

y la denotamos por

$$\rho = \mathrm{Ind}_H^G(\theta).$$

Proposición 1.2.7. *Si G es un grupo finito, entonces*

$$R(G) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{(C)} \mathbb{Q}(\zeta_{|C|})^{N_G(C)}$$

donde (C) corre sobre las clases de conjugación de subgrupos cíclicos de G y $N_G(C)$ es el normalizador de C en G.

Demostración. Sea $\mathbf{C}$ la familia de subgrupos cíclicos de G y sea

$$\mathrm{Ind} \otimes \mathbb{Q} : \bigoplus_{C \in \mathbf{C}} R(C) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow R(G) \otimes \mathbb{Q}$$

la extensión $\mathbb{Q}$-lineal del homomorfismo

$$\mathrm{Ind} : \bigoplus_{C \in \mathbf{C}} R(C) \longrightarrow R(G)$$

definido por la familia Ind_C^G de representaciones inducidas para cada $C \in \mathbf{C}$. La sobreyectividad de $\mathrm{Ind} \otimes \mathbb{Q}$ es equivalente a la de

$$\mathrm{Ind} \otimes \mathbb{C} : \bigoplus_{C \in \mathbf{C}} R(C) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow R(G) \otimes \mathbb{C}$$

y por dualidad, esto es equivalente a la inyectividad de la aplicación adjunta, dada por la restricción,

$$\mathrm{Res} \otimes \mathbb{C} : R(G) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \bigoplus_{C \in \mathbf{C}} R(C) \otimes \mathbb{C}$$

lo cual es inmediato, ya que lo anterior significa que si una función de clase se restringe a 0 sobre cada subgrupo cíclico de G, entonces corresponde a la función de clase 0. Por lo tanto $\mathrm{Ind} \otimes \mathbb{Q}$ es sobreyectiva.

Sea N el núcleo de $\mathrm{Ind} \otimes \mathbb{Q}$. Tenemos los siguientes hechos:

(a) Sean $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$ tales que $C_1 \subset C_2$. Si $\rho_1 \in R(C_1)$ y $\rho_2 = \mathrm{Ind}_{C_1}^{C_2}(\rho_1) \in R(C_2)$, entonces

$$\rho_1 - \rho_2 \in N.$$

(b) Sean $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$ subgrupos cíclicos conjugados, digamos por $h \in G$, esto es $C_1 = hC_2h^{-1}$. Si $\rho_1 \in R(C_1)$ y definimos

$$\rho_2(c) := \rho_1(hch^{-1}) \text{ para cada } c \in C_2,$$

entonces $\rho_2 \in R(C_2)$ tal que $\rho_1 - \rho_2 \in N$.

De hecho, N es generado sobre $\mathbb{Q}$ por los elementos de la forma (a) y (b) (ver [40], Sec. 9.3), de modo que si en cada uno de los sumandos de

$$\bigoplus_{C \in \mathbf{C}} R(C) \otimes \mathbb{Q},$$

consideramos sólo la parte $N_G(C)$-invariante y tomamos la suma sobre las clases de conjugación de subgrupos cíclios, entonces

$$\mathrm{Ind} \otimes \mathbb{Q} : \bigoplus\nolimits_{(C)} (R(C) \otimes \mathbb{Q})^{N_G(C)} \xrightarrow{\cong} R(G) \otimes \mathbb{Q}.$$

Finalmente, usando el hecho de que para grupos cíclicos $C \subset G$,

$$R(C) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{d_i \mid |C|} \mathbb{Q}(\zeta_{d_i}),$$

y que además

$$(R(C) \otimes \mathbb{Q})^{N_G(C)} \cong \mathbb{Q}(\zeta_{|C|})^{N_G(C)},$$

obtenemos el resultado deseado. ∎

1.3. G-Haces Vectoriales

En esta sección introduciremos el concepto de *G-haz vectorial*, que necesitaremos para definir la K-teoría equivariante en la siguiente subsección. Asumimos que el lector está familiarizado con la teoría de haces vectoriales, la cual puede consultarse en [18] y [20]. Aunque en esta sección se proporcionan los conceptos y resultados necesarios sobre topología equivariante, se recomienda consultar el libro *Transformation groups*, de Tammo tom Dieck [44], el cual proporciona una excelente presentación sobre este tema.

Recordemos que un *G-espacio* M consiste de un espacio topológico M, sobre el cual actúa un grupo G mediante un homomorfismo

$$\theta : G \to Homeo(M).$$

Abusando de la notación, escribimos $g : M \to M$ para el homeomorfismo $\theta(g) : M \to M$ correspondiente al elemento $g \in G$.

Todo espacio topológico M se puede ver como un G-espacio mediante la acción

$$g : x \mapsto x, \text{ para todo } g \in G.$$

En este caso, llamamos a M un *G-espacio trivial*.

Decimos que M es un *G-espacio libre*, o que G actúa libremente sobre M, si para $x \in M$ y $g \in G$,

$$g(x) = x \text{ implica } g = e.$$

Ejemplo 1.3.1. Si $G = \mathbb{Z}_2$ y $M = S^n$, una G-acción libre y no trivial es dada por la aplicación antípoda.

Si M es un G-espacio, N un H-espacio y $\Psi : H \longrightarrow G$ es un homomorfismo continuo, decimos que $f : N \to M$ es una función *Ψ-equivariante* si ésta es continua y si $f(hy) = \Psi(h)f(y)$ para todo $h \in H$, $y \in N$.

Cuando $H = G$ y $\Psi = id$, entonces la función Ψ-equivariante $f : N \to M$ entre G-espacios M y N, es llamada *G-función*.

Definición 1.3.2. *Un G-**haz vectorial** sobre un G-espacio M consiste de un haz vectorial $p : E \to M$, tal que*

1. *E es un G-espacio,*

2. *La proyección $p : E \to M$ es una G-función, y*

3. *Para cada $g \in G$ y $x \in M$, la restricción a cada fibra de la acción de g sobre E,*

$$g : E_x \to E_{g(x)}$$

es lineal.

Es claro que si G es trivial, entonces todo G-haz vectorial es un haz vectorial ordinario.

En este trabajo consideraremos solo haces vectoriales complejos, de modo que a menos que se especifique lo contrario, todos los haces vectoriales aqui considerados tienen fibra $E_x \cong \mathbb{C}^n$.

Si M es un G-espacio y V un G-módulo complejo, entonces la proyección en el primer factor $p : M \times V \to M$ define de manera natural un G-haz vectorial sobre M. Este es un G-haz vectorial trivial con fibra V y lo denotado por $\mathbf{V}$.

Un *G-homomorfismo* $E \to F$ entre G-haces vectoriales es una G-función que es a su vez un homomorfismo de haces vectoriales. Análogamente, un *G-isomorfismo* es una G-función y un isomorfismo de haces vectoriales.

Definición 1.3.3. *Si G es un grupo finito actuando sobre el CW-complejo finito M, se define $Vect_G(M)$ como el conjunto de clases de isomorfismos de G-haces vectoriales complejos sobre M.*

Si E es un G-haz vectorial sobre M, denotamos por $[E] \in Vect_G(M)$ su clase de isomorfismo. Es claro que si G es trivial, entonces $Vect_G(M) = Vect(M)$, donde $Vect(M)$ denota el conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales sobre M.

Si M consta de un solo punto, entonces un G-haz vectorial sobre M corresponde a un espacio vectorial complejo $V \cong \mathbb{C}^n$ sobre el cual actúa G linealmente, esto es, un G-módulo. En este caso, la clase de isomorfismo del G-módulo V esta dada por el conjunto de G-módulos W de igual dimensión que V y tales que existe un isomorfismo lineal entre estos. De modo que podemos identificar la clase de isomorfismo de V en $Vect_G(*)$ con una representación de G en V,

$$\rho_V : G \to GL(V).$$

Recíprocamente, toda representación de G en un espacio vectorial complejo de dimensión finita V, define un elemento en $Vect_G(*)$ dado precisamente por $[V]$. Lo anterior establece una biyección entre $Vect_G(*)$ y el conjunto de representaciones complejas de dimensión finita de G.

1.4. K-Teoría Equivariante

Antes de establecer la definición de K-teoría equivariante, observemos que la suma directa de G-haces vectoriales se extiende de manera natural a clases de isomorfismo, de modo que ésta le da una estructura de semigrupo abeliano a $Vect_G(M)$.

Definición 1.4.1. *Definimos la K-**teoría equivariante** del G-CW-complejo finito M como el grupo de Grothendieck de $Vect_G(M)$ y la denotamos por $K_G(M)$.*

Dados dos G-haces vectoriales podemos obtener un nuevo G-haz como el producto tensorial de éstos, donde la acción de G es dada por la acción diagonal. Este producto se extiende de manera natural a $Vect_G(M)$ y a $K_G(M)$, dándole a este último una estructura de anillo conmutativo con unidad dada por el G-haz vectorial trivial $M \times \mathbb{C} \to M$, donde G actúa trivialmente sobre $\mathbb{C}$.

Es claro que si G es el grupo trivial, entonces la K-teoría equivariante corresponde a K-teoría ordinaria. Por otro lado, si M es un punto entonces obtenemos

$$K_G(*) \cong R(G),$$

el anillo de representaciones (virtuales) de G.

El siguiente resultado muestra que relación existe entre K-teoría equivariante y K-teoría ordinaria según la forma en la que la acción es dada.

Proposición 1.4.2 (G. Segal)**.** *(i) Si M es un G-espacio libre, entonces $K_G(M) \cong K(M/G)$.*

(ii) Si M es un G-espacio trivial, entonces $K_G(M) \cong K(M) \otimes R(G)$.

(iii) Si H es un subgrupo de G, entonces $K_G(G \times_H Y) \cong K_H(Y)$ para todo H-espacio Y.

(iv) $K_G(G/H) \cong R(H)$

Demostración. Comentaremos las ideas de las demostraciones de los enunciados anteriores, establecidos por G. Segal en [38].

(i) Para el G-espacio libre M, la aplicación de proyección sobre el espacio de órbitas $\mathrm{pr} : M \longrightarrow M/G$ induce un morfismo

$$\mathrm{pr}^* : K(M/G) \longrightarrow K_G(M).$$

En [38, Prop. 2.1], G. Segal muestra que si E es un G-haz vectorial sobre M, entonces la aplicación $E \longmapsto E/G$ es inversa a pr^*.

(ii) En [38, Prop. 2.2], G. Segal demuestra que si E es un G-haz vectorial sobre el G-espacio trivial M, entonces la aplicación

$$E \longmapsto \bigoplus_{[V]\in Irr(G)} Hom_G(\mathbf{V}, E) \otimes \mathbf{V},$$

donde la suma es sobre las las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de G y $\mathbf{V}$ representa el módulo trivial $M \times V$ sobre M, induce el isomorfismo deseado.

(iii) Este es un caso particular de la observación que G. Segal hace después de la Proposición 2.1 de [38].

(iv) Se sigue de (iii) tomando $Y = \{\mathrm{pt}\}$.

■

Propiedades Cohomológicas de la K-Teoría Equivariante

Los siguientes resultados pueden encontrarse en [29] y en [10].

Una *teoría de cohomología G-equivariante* sobre la categoría de parejas de G-CW-complejos finitos y G-clases de homotopía de G-funciones (celulares), consiste en una sucesión de funtores contravariantes $\{h_G^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sobre dicha categoría a la categoría de grupos abelianos, junto con una familia de transformaciones naturales

$$\delta^n : h_G^n(A, \emptyset) \longrightarrow h_G^{n+1}(M, A)$$

de tal manera que se satisfacen los siguientes axiomas:

(1) La inclusión $(M, M \cap A) \hookrightarrow (M \cup A, A)$, induce un isomorfismo,

$$h^n_G(M \cup A, A) \xrightarrow{\cong} h^n_G(M, M \cap A).$$

(2) Para una pareja de G-CW-complejos finitos (M, A), la sucesión,

$$\cdots \longrightarrow h^n_G(M, A) \longrightarrow h^n_G(M) \longrightarrow h^n_G(A) \xrightarrow{\delta^n} h^{n+1}_G(M, A) \longrightarrow \cdots$$

es exacta, donde $h^n_G(M) := h^n_G(M, \emptyset)$.

Se puede usar un argumento estándar para probar la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris y la sucesión larga de una terna.

Si M es un G-CW-complejo con un punto base, denotaremos por $SM = S \wedge M$ la suspensión reducida de M, con la acción trivial de G sobre el factor S. Una *teoría de cohomología G-equivariante reducida* sobre la categoría de G-CW-complejos finitos con punto base y G-clases de homotopía de G-funciones (celulares) que preservan el punto base, es una sucesión de funtores contravariantes $\{\widetilde{h}^n_G\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sobre dicha categoría a la categoría de grupos abelianos, junto con una familia de transformaciones naturales

$$\sigma^n : \widetilde{h}^n_G(M) \longrightarrow \widetilde{h}^{n+1}_G(SM)$$

de tal manera que se satisfacen los siguientes axiomas:

(1)' Las transformaciones σ^n son isomorfismos para cada n y para cada M.

(2)' La sucesión corta,

$$\widetilde{h}^n_G(M \cup_A CA) \longrightarrow \widetilde{h}^n_G(M) \longrightarrow \widetilde{h}^n_G(A)$$

es exacta.

Dada una teoría de cohomología G-equivariante h^*_G se puede construir una versión reducida asociada, mediante $\widetilde{h}^*_G(M) := h^*_G(M, *)$. Recíprocamente, si $\widetilde{h}^*_G$ es una teoría de cohomología G-equivariante reducida, entonces $h^*_G(M, A) := \widetilde{h}^*_G(M^+ \cup_A CA^+)$ define una teoría de cohomología G-equivariante.

El resultado principal de esta sección es establecer a la K-teoría G-equivariante como una teoría de cohomología sobre la categoría de parejas de G-CW-complejos a la categoría de grupos abelianos (con los correspondientes morfismos), de modo que a fin de hacer esto, es necesario construir la sucesión de funtores contravariantes K_G^n comentados anteriormente. Para extender el grupo de K-teoría equivariante a una familia de funtores, usamos el siguiente resultado.

Teorema 1.4.3 (Periodicidad de Bott)**.** *Si M es un G-CW-complejo finito, entonces*

$$\widetilde{K}_G(M) \cong \widetilde{K}_G(S^2 M)$$

Este resultado es mostrado en [38] y en [4]. Luego, usando Periodicidad de Bott, podemos definir los grupos superiores de K-teoría equivariante (reducida) por

$$\widetilde{K}_G^{2n}(M) := \widetilde{K}_G(M) \quad \text{ y } \quad \widetilde{K}_G^{2n+1}(M) := \widetilde{K}_G(SM),$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$ y M un G-CW-finito. Si (M, A) es una G-pareja de G-CW-complejos finitos, definimos

$$K_G^*(M, A) := \widetilde{K}_G^*(M \cup_A CA)$$

Proposición 1.4.4. *El funtor de K-teoría G-equivariante $\{K_G^*(-)\}$ definido de la categoría de parejas de G-CW-complejos finitos y G-clases de homotopía de G-funciones (celulares), a la categoría de grupos abelianos es una teoría de cohomología G-equivariante.*

La demostración de la proposición anterior es dada por G. Segal en [38].

La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch

Como teoría de cohomología equivariante generalizada, $K_G(-)$ tiene su correspondiente sucesión espectral. En [29], T. Matumoto construye una sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch para una teoría de cohomología G-equivariante sobre complejos celulares, la cual presenta ventajas computacionales sobre la sucesión espectral estudiada por G. Segal en [38].

En [29, Teo. 8.1] demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.4.5 (Matumoto)**.** *Sea G un grupo finito y X un G-complejo CW finito. Entonces existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ con*

$$E_1^{p,q} \cong C_G^p(X, K_G^q)$$

donde el diferencial d_1 *corresponde al operador cofrontera, y*

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &\cong H_G^p(X, K_G^q) \\ E_\infty^{p,q} &\cong Gr_p K_G^{p+q}(X) = K_{G,p}^{p+q}(X)/K_{G,p+1}^{p+q}(X) \end{aligned}$$

con $K_{G,p}^n(X) = Ker\ (K_G^n(X) \longrightarrow K_G^n(X^{p-1}))$*. El* G*-sistema de coeficientes* $K_G^q(G/H)$ *es isomorfo a* $K_G(G/H)$ *para* q *par y cero en otro caso.*

Los conceptos de G-*sistema de coeficientes* y el funtor contravariante $C_G^p(-, K_G^q)$, son establecidos en el Apéndice A.

Homomorfismo de Chern equivariante

Como una aplicación de la sucesión espectral anterior, se puede demostrar que el homomorfismo de Chern equivariante construido en [42], corresponde a un isomorfismo racional entre K-teoría equivariante y cohomología de Bredon equivariante con el sistema de coeficientes $\mathcal{R}_G \otimes \mathbb{Q} : G/H \longmapsto R_G(H) \otimes \mathbb{Q}$.

Teorema 1.4.6 (Słomińska, [42])**.** *Existe una transformación natural de teorías de cohomología equivariantes*

$$ch_G : K_G(-) \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_G^{2k}(-, \mathcal{R}_G \otimes \mathbb{Q}),$$

tal que para X *un* G*-complejo celular compacto, la aplicación inducida*

$$K_G(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H_G^{par}(X, \mathcal{R}_G \otimes \mathbb{Q}),$$

es un isomorfismo.

Representabilidad

Como una teoría de cohomología G-equivariante, K_G^* es representable (cf. [29], Teo. 6.1), y de hecho en [28] se demuestra que un Ω-espectro G-equivariante para la K-teoría equivariante es dado por el espacio $\mathcal{F}(G)$ de operadores de Fredholm sobre $L^2(G, \ell^2)$, el espacio de Hilbert complejo de funciones de cuadrado integrable sobre G (con respecto a una medida de Haar G-invariante) con valores en ℓ^2; esto es,

Teorema 1.4.7 (Matumoto, [28]). *Existe un isomorfismo de grupos canónico*

$$G-\mathrm{index}\colon [X,\mathcal{F}(G)]_G \longrightarrow K_G(X),$$

para todo G-espacio compacto X. Donde $[-,-]_G$ denota el conjunto de G-clases de homotopía de G-funciones.

1.5. Localización y K-teoría Equivariante

En esta sección mostramos algunos resultados clásicos de localización para K-teoría equivariante, los cuáles suelen ser útiles en la realización de cálculos.

Lema 1.5.1 (Słomińska, [42]). *Si M es un G-CW-complejo finito, entonces existe un isomorfismo*

$$K_G(M) \cong_{\mathbb{C}} \bigoplus_{(g)} K_G(M)_{(g)}$$

donde la suma es sobre las clases de conjugación (g) en G y $K_G(M)_{(g)}$ denota la localización del $R(G)$-módulo $K_G(M)$.

Demostración. La demostración es por inducción en las celdas. Probaremos que la descomposición del lema es válida para el k-ésimo esqueleto si es válida para el $(k-1)$-ésimo esqueleto.

En el caso $k=0$ los puntos son de la forma G/H, y tenemos

$$K_G(G/H)\otimes\mathbb{C} \cong R(H)\otimes\mathbb{C} \cong \bigoplus_{(g)} (R(H)\otimes\mathbb{C})_{(g)}$$

ya que $R(H)$ es un anillo Noetheriano.

Para probar el caso general, aplicamos la sucesión exacta larga en K-teoría a la pareja (X_k, X_{k-1}), y por Periodicidad de Bott e hipótesis de inducción, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
K^1_G(X_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & K_G(X_k,X_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & K_G(X_k) \arrow[r] \arrow[d] & K_G(X_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & K^1_G(X_k,X_{k-1}) \arrow[d] \\
\bigoplus_{(g)} K_G^{-1}(X_{k-1})_{(g)} \arrow[r] & \bigoplus_{(g)} K_G(X_k,X_{k-1})_{(g)} \arrow[r] & \bigoplus_{(g)} K_G(X_k)_{(g)} \arrow[r] & \bigoplus_{(g)} K_G(X_{k-1})_{(g)} \arrow[r] & \bigoplus_{(g)} K^1_G(X_k,X_{k-1})_{(g)}
\end{tikzcd}$$

ya que la primera y cuarta flecha son isomorfismos por hipótesis de inducción, y la segunda y quinta flechas verticales se siguen por Periodicidad de Bott. El resultado se sigue aplicando el Lema del 5. ■

Lema 1.5.2 (Segal, [38]). *Sea G un grupo finito y M un G-espacio. Si $M^{(g)}$ denota el conjunto de puntos fijos de M por cada elemento de (g), esto es $M^{(g)} := \bigcup_{h\in(g)} M^h = \bigcup_{h\in(g)}\{m \in M \mid h\cdot m = m\}$, entonces*

$$M^{(g)}/G \cong M^g/C(g),$$

con $C(g)$ el centralizador de $g \in G$.

Demostración. Observemos que si $x \in M^{(g)}$, entonces $x \in M^h$ para algún $h \in G$, y para cada $k \in G$

$$\begin{aligned} k : M^h &\longrightarrow M^{khk^{-1}} \\ x &\longmapsto kx \end{aligned}$$

lo que nos da una acción de G sobre $M^{(g)}$.

Por otro lado, si $k \in C(g)$ y $x \in M^g$, entonces $g(kx) = (gk)x = (kg)x = k(gx) = kx$, es decir $kx \in M^g$, lo cual significa que tenemos una $C(g)$-acción sobre M^g.

Si consideramos la inclusión

$$i : M^g \to M^{(g)}$$

entonces para cada $k \in C(g)$ y $l \in G$, los puntos $i(k\cdot x)$ y $l\cdot i(x)$ en $M^{(g)}$ representan el mismo elemento en $M^{(g)}$, de modo que tenemos una aplicación inducida

$$\tilde{i} : M^g/C(g) \to M^{(g)}/G.$$

Consideremos ahora la aplicación

$$j : M^{(g)} \to M^g,$$

definida de la siguiente manera, si $x \in M^h \subset M^{(g)}$ con $h = aga^{-1}$, definimos $j(x) = a^{-1}x$. Es claro que esta aplicación puede no ser única, pues las clases de conjugación en G no necesariamente son disjuntas, sin embargo para cualquier elección de j tendremos una única aplicación

$$\tilde{j} : M^{(g)}/G \to M^g/C(G),$$

lo cual podemos observar en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M^{aga^{-1}} \arrow[r, "a^{-1}"] \arrow[d, "k"'] & M^g \arrow[d, "l"] \\
M^{khk^{-1}} \arrow[r, "(ka)^{-1}"] & M^g
\end{tikzcd}$$

Es claro que las aplicaciones $\tilde{i}$ y $\tilde{j}$ son inversas una de la otra y por lo tanto,

$$M^{(g)}/G \cong M^g/C(g).$$

■

Teorema 1.5.3 (Atiyah-Segal, [6]). *Si G es un grupo de Lie compacto que actúa sobre una variedad compacta M, entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$K_G^*(M) \otimes \mathbb{C} \cong \bigoplus_{(g)} [K^*(M^g) \otimes \mathbb{C}]^{C(g)},$$

donde la suma es sobre las clases de conjugación (g) en G y $[-]^{C(g)}$ denota la parte $C(g)$-invariante.

Aunque el isomorfismo anterior no es un isomorfismo de anillos, es posible modificar la parte de la derecha para obtenerlo.

Teorema 1.5.4 (Adem-Ruan, [1]).

$$K_G(M) \otimes \mathbb{Q} \cong \prod_{(C)} \left[K(M^C)^{Z(C)} \otimes \mathbb{Q}(\zeta_C)\right]^{N/Z}$$

1.6. Representaciones torcidas

En esta sección estudiaremos la teoría de representaciones expuesta al inicio del capítulo, en el contexto “torcido”. Para una exposición mas detallada puede consultarse [24, Cap. III]. Seguiremos principalmente la dirección abordada en [1, Sec. 6]. Los elementos de cohomología de grupos que se utilizan en esta sección pueden consultarse en el Apéndice B.

Definición 1.6.1. *Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Una aplicación $\rho : G \to Aut(V)$ es llamada una representación proyectiva de G si existe una función $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^*$ tal que $\rho(x)\rho(y) = \alpha(x, y)\rho(xy)$, para todos $x, y \in G$ y $\rho(1) = Id_V$.*

Observemos que α define un cociclo sobre G con valores en $\mathbb{C}^*$, es decir, $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{C}^*)$ (cf. Apéndice B). Las representaciones proyectivas de G, como han sido definidas, estan en correspondencia uno a uno con homomorfismos de G al espacio proyectivo asociado a $Aut(V)$. Más explícitamente, como el centro de $Aut(V)$ es dado por $\mathbb{C}^* \cdot Id_V$, el subgrupo de múltiplos escalares de la identidad, se define

$$PAut(V) = Aut(V)/\mathbb{C}^* \cdot Id_V,$$

el grupo general lineal proyectivo sobre V. De modo que si $\rho : G \longrightarrow Aut(V)$ es una representación proyectiva de G, entonces tenemos un homomorfismo $\widetilde{\rho} : G \longrightarrow PAut(V)$, definido como se muestra en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\widetilde{\rho}"'] & Aut(V) \arrow[d] \\ & PAut(V) \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical representa el homomorfismo cociente. Recíprocamente, si $f : G \longrightarrow PAut(V)$ es un homomorfismo y para algún $g \in G$ fijamos un elemento $\rho(g) \in Aut(V)$ de la clase $f(g)$ tal que $\rho(1) = 1$, entonces ρ es una representación proyectiva de G.

Enseguida introducimos la noción de *equivalencia lineal*, que será de interés en el resto de la sección.

Definición 1.6.2. *Dos representaciones proyectivas $\rho_1 : G \to Aut(V_1)$ y $\rho_2 : G \to Aut(V_2)$ se dicen ser linealmente equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_2(g) = f\rho_1(g)f^{-1}$ para todo $g \in G$.*

Si α es el cociclo correspondiente a ρ, decimos que ρ es una α-representación sobre el espacio V. Tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.6.3. *Sea ρ_i, $i = 1, 2$, una α_i-representación sobre el espacio V_i. Si ρ_1 es linealmente equivalente a ρ_2, entonces α_1 es igual a α_2.*

Es fácil ver que dado un cociclo fijo α, podemos tomar la suma directa de cualesquiera dos α-representaciones. Entonces podemos introducir el siguiente concepto,

Definición 1.6.4. *Definimos $M_\alpha(G)$ como el monoide de clases de isomorfismos lineales de α-representaciones de G. Denotamos por $R_\alpha(G)$ el grupo de Gothendieck asociado a $M_\alpha(G)$.*

Sea $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{C}^*)$. Un elemento $g \in G$ se dice que es α-regular si $\alpha(g,x) = \alpha(x,g)$ para todo $x \in C(g)$. Si un elemento $g \in G$ es α-regular, entonces cualquier conjugado de g es también α-regular, entonces podemos hablar de clases de conjugación α-regulares en G. Por propósitos técnicos introduciremos también la noción de un "cociclo estándar"; éste será un cociclo α con valores en $\mathbb{C}^*$ tal que

1. $\alpha(x, x^{-1}) = 1$ para todo $x \in G$ y,

2. $\alpha(x,g)\alpha(xg, x^{-1}) = 1$ para todo elemento α-regular $g \in G$ y todo $x \in G$.

En otras palabras, lo anterior significa simplemente que α es estándar si y sólo si, para todo $x \in G$ y para todo elemento α-regular $g \in G$, se tiene que $\overline{x}^{\,-1} = \overline{x^{-1}}$ y $\overline{x}\,\overline{g}\,\overline{x}^{\,-1} = \overline{xgx^{-1}}$. De hecho puede probarse que cualquier clase de cohomología $c \in H^2(G, \mathbb{C}^*)$ puede ser representada por un cociclo estándar, y asumiremos este hecho en el resto de este trabajo. Más aún, como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado se tiene que todo cociclo $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{C}^*)$ es cohomologo a un cociclo estándar con valores en $\mathbb{S}^1$, de modo que tenemos el isomorfismo $H^2(G, \mathbb{S}^1) \cong H^2(G, \mathbb{C}^*)$ (cf. [25, Teo. 6.4]). Además, como $\mathbb{C}$ tiene característica 0 y el grupo aditivo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es isomorfo al subgrupo de torsión de $\mathbb{C}^*$ se tiene que $H^2(G, \mathbb{C}^*) \cong H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. [25, Cor. 9.5]). De modo que tenemos los siguientes isomorfismos

$$H^2(G, \mathbb{S}^1) \cong H^2(G, \mathbb{C}^*) \cong H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^3(G, \mathbb{Z}),$$

el último isomorfismo es inducido por la sucesión exacta de $\mathbb{Z}G$-módulos (cf. [25, Prop. 1.19])

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

De modo que en el resto del trabajo usaremos clases de cohomología en $H^2(G, \mathbb{S}^1)$, donde la G-acción sobre los coeficientes se asume trivial.

Un elemento $\alpha \in H^2(G,\mathbb{S}^1)$ corresponde a una clase de equivalencia de extensiones de grupo

$$1 \to \mathbb{S}^1 \to \widetilde{G}_\alpha \to G \to 1.$$

Como G es un grupo finito, el grupo $\widetilde{G}_\alpha$ hereda de manera inmediata una estructura de grupo de Lie compacto, donde $\mathbb{S}^1 \to \widetilde{G}_\alpha$ es la inclusión de un subgrupo cerrado. Los elementos en la extensión de grupo pueden ser representados por parejas $\{(g,a) \mid g \in G,\ a \in \mathbb{S}^1\}$ con el producto $(g_1,a_1)(g_2,a_2) = (g_1g_2, \alpha(g_1,g_2)a_1a_2)$.

Existe una correspondencia uno a uno entre clases de isomorfismo de representaciones de $\widetilde{G}_\alpha$ las cuales se restingen a multiplicación escalar sobre $\mathbb{S}^1$ y las clases de isomorfismo de α-representaciones de G. Si $\psi : \widetilde{G}_\alpha \to Aut(V)$ es una de dichas representaciones, entonces definimos una α-representación asociada mediante $\rho(g) = \psi(g,1)$. Nótese que

$$\rho(gh) = \psi(gh,1) = \alpha(g,h)^{-1}\psi(gh,\alpha(g,h)) = \alpha(g,h)^{-1}\psi((g,1)(h,1)) = \alpha(g,h)^{-1}\rho(g)\rho(h).$$

Recíprocamente, dado $\rho : G \to Aut(V)$ definimos $\psi(g,a) = a\rho(g)$, y tenemos

$$\psi((g,a)(h,b)) = \psi(gh,\alpha(g,h)ab) = ab\rho(g)\rho(h) = a\rho(g)b\rho(h) = \psi(g,a)\psi(h,b).$$

Entonces podemos identificar a $R_\alpha(G)$ con el subgrupo de $R(\widetilde{G}_\alpha)$ generado por las representaciones que se restringen a multiplicación escalar sobre $\mathbb{S}^1$.

1.7. Torsión discreta

Definiremos enseguida una versión torcida de la K-teoría equivariante, con torcimientos en $H^2(G,\mathbb{S}^1)$ conocidos como torsión discreta.

Sea G un grupo finito, $\alpha \in H^2(G,\mathbb{S}^1)$,

$$1 \to \mathbb{S}^1 \to \widetilde{G}_\alpha \to G \to 1$$

la extensión central asociada a α, y X un G-complejo celular finito.

Definición 1.7.1. *Un G-haz vectorial α-torcido sobre X es un G-haz vectorial complejo $E \to X$ tal que $\mathbb{S}^1$ actúa sobre las fibras por multiplicación compleja, de tal manera que la G-acción se extiende a una $\widetilde{G}_\alpha$-acción sobre E que cubre la G-acción sobre X.*

De hecho, $E \to X$ es un $\widetilde{G}_\alpha$-haz vectorial, con acción sobre la base dada por la proyección sobre G y la correspondiente G-acción. Nótese que si dividimos por la acción de $\mathbb{S}^1$, obtenemos un haz proyectivo sobre X. Estos haces torcidos pueden ser sumados, formando un monoide abeliano, módulo isomorfismo.

Definición 1.7.2. *La K-teoría G-equivariante α-torcida de X, denotada por ${}^\alpha K_G(X)$, se define como el grupo de Grothendieck de clases de isomorfismo de G-haces vectoriales α-torcidos sobre X.*

Como con α-representaciones, podemos describir este grupo torcido como el subgrupo de $K_{\widetilde{G}_\alpha}(X)$ generado por clases de isomorfismo de haces que se restringen a multiplicación por escalares sobre el centro $\mathbb{S}^1$. Como la $\mathbb{S}^1$-acción sobre X es trivial, tenemos un isomorfismo natural $K_{\mathbb{S}^1}(X) \cong K(X) \otimes R(\mathbb{S}^1)$. Componiendo la restricción con la aplicación $K(X) \otimes R(\mathbb{S}^1) \to R(\mathbb{S}^1)$, obtenemos un homomorfismo $K_{\widetilde{G}_\alpha}(X) \to R(\mathbb{S}^1)$; podemos definir ${}^\alpha K_G(X)$ como la imagen inversa del subgrupo generado por las representaciones definidas por multiplicación escalar.

Del mismo modo que para K-teoría equivariante no torcida, esta definición se extiende a una teoría $\mathbb{Z}/2$-graduada. De hecho, podemos definir ${}^\alpha K^0_G(X) = {}^\alpha K_G(X)$ y ${}^\alpha K^1_G(X) = \mathrm{Ker}\,[{}^\alpha K_G(\mathbb{S}^1 \times X) \to {}^\alpha K_G(X)]$. Podemos extender la descripción dada para expresar ${}^\alpha K^*_G(X)$ como un subgrupo de $K^*_{\widetilde{G}_\alpha}(X)$.

Consideremos el caso $\alpha = 1$, este corresponde a la extensión trivial $G \times \mathbb{S}^1$. Cualquier G-haz vectorial puede convertirse en un $G \times \mathbb{S}^1$-haz vectorial, mediante multiplicación escalar sobre las fibras; recíprocamente, un $G \times \mathbb{S}^1$-haz se restringe a un G-haz ordinario. Por lo tanto ${}^\alpha K_G(X) \cong K_G(X)$.

Para G-espacios triviales tenemos el siguiente resultado,

Lema 1.7.3 (Adem-Ruan [1])**.** *Si X es un G-CW-complejo finito con una G-acción trivial, entonces*

$$ {}^\alpha K_G(X) \cong K(X) \otimes R_\alpha(G). $$

Demostración. Este resultado es el análogo de la versión no torcida en [38]. La aplicación natural $R(\widetilde{G}_\alpha) \to K_{\widetilde{G}_\alpha}(X)$ puede combinarse con $K(X) \to K_{\widetilde{G}_\alpha}(X)$ (dándole a un haz vectorial la $\widetilde{G}_\alpha$-acción trivial), para obtener un isomorfismo natural $K(X) \otimes R(\widetilde{G}_\alpha) \to K_{\widetilde{G}_\alpha}(X)$ la cual cubre la restricción a la $\mathbb{S}^1$-acción.

La aplicación inversa es dada por,

$$[E] \longmapsto \bigoplus_{[M]\in Irr(\widetilde{G}_\alpha)} Hom_{\widetilde{G}_\alpha}(M,E)\otimes [M].$$

■

Sea X es un G-espacio, Y un G'-espacio y $h : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y equivariante respecto a tal homomorfismo, obtenemos una aplicación inducida

$$^{\alpha}f^* : {}^{\alpha}K_{G'}(Y) \to {}^{h^*(\alpha)}K_G(X)$$

donde $h^* : H^2(G',\mathbb{S}^1) \to H^2(G,\mathbb{S}^1)$ es la aplicación inducida en cohomología por h. Si $H \subset G$ es un subgrupo de G, la inclusión define una restricción $H^2(G,\mathbb{S}^1) \to H^2(H,\mathbb{S}^1)$. De hecho, si $\widetilde{G}_\alpha$ es la extensión de grupo definida por $\alpha \in H^2(G,\mathbb{S}^1)$, entonces $res^G_H(\alpha)$ define la extensión de grupo “restringida” sobre H, denotada por $\widetilde{H}_{res(\alpha)}$. Así, tenemos una aplicación restricción ${}^{\alpha}K_G(X) \to {}^{res(\alpha)}K_H(X)$.

En este caso también tenemos una sucesión espectral.

Teorema 1.7.4. *Si G es un grupo finito, X un G-complejo celular finito y $\alpha \in H^3(G,\mathbb{Z}) \cong H^2(G,\mathbb{S}^1)$ dado por el cociclo $\alpha : G\times G \longrightarrow \mathbb{S}^1$, entonces existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ con término $E_\infty^{p,q} \Longrightarrow {}^{\alpha}K_G^{p+q}(X)$ y*

$$E_2^{p,q} \cong \begin{cases} H^p_G(X,\mathcal{R}_\alpha(-)) & \text{si } q \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } q \text{ es impar.} \end{cases}$$

donde $H^*_G(X,\mathcal{R}_\alpha(-))$ es la cohomología de Bredon equivariante de X, con sistema de coeficientes

$$\mathcal{R}_\alpha : G/H \longmapsto R_\alpha(H).$$

La demostración de este teorema es esencialmente la misma que para el Teorema de Atiyah-Hirzebruch, esto es, verificando que

$$E_1^{p,q} \cong C^p_G(X,\mathcal{R}_\alpha)$$

y luego mostrar que el primer diferencial corresponde efectivamente al operador cofrontera ordinario en cohomología de Bredon equivariante (cf. Apéndice A, para definiciones). Para una prueba usando estructuras de Mackey, puede consultarse [14].

Capítulo 2

Torcimientos equivariantes

La K-teoría torcida tiene su origen en la tesis doctoral de M. Karoubi [23] y en el artículo de M. Karoubi y P. Donovan [12], en cuyo trabajo se estudia el concepto de *K-teoría con coeficientes locales* (actualmente llamada *K-teoría torcida*) asociada a un elemento (no equivariante) de torsión. Posteriormente, en el trabajo de J. Rosenberg ([35]), de M. Atiyah - G. Segal ([7]) y Bouwknegt-Carey-Mathai-Murray-Stevenson ([9]), se presenta el caso de no torsión y el caso equivariante. Aunque esta teoría tiene ya varios años de que fue introducida por los matemáticos, es hasta hace poco que se ha convertido en el centro de atención para destacados investigadores en física y matemáticas, gracias al trabajo fundamental de Freed-Hopkins-Teleman el cual relaciona la K-teoría equivariante torcida, con el álgebra de Verlinde ([16]), y especialmente al trabajo de E. Witten ([47]) en donde se conjetura que la carga de una *D-brane* toma valores en la K-teoría (torcida) del espaciotiempo, lo cual ha hecho de esta teoría un tema de investigación muy activo, principalmente por la implicaciones en física teórica tales como teoría de cuerdas.

Los antecedentes del trabajo presentado en este capítulo se encuentran principalmente en el trabajo de M. Ayitah y G. Segal, publicado en [7] y [2].

Dado un G-CW-complejo finito X, M. Atiyah y G. Segal construyen en [7] un espacio ad hoc $\mathcal{P}$ el cual clasifica los *torcimientos equivariantes* de la K-teoría, y la construcción que ellos realizan se basa en un procedimiento estándar mediante el cual *se pega* una familia de espacios $\mathcal{P}_H$ (cf. [7, p. 323]) y el cual es G-homotópicamente equivalente a un espacio que *representa* al funtor de cohomología de Borel equivariante de grado 3. En este trabajo (capítulo) presentamos otra construcción del espacio clasificante para los torcimientos equivariantes de la K-teoría en la

Sección 2.2, luego estudiamos sus grupos de homotopía en la Sección 2.3 y, en la Sección 2.4 comprobamos que este espacio es G-homotópicamente equivalente a un representante del funtor de cohomología de Borel equivariante $H^3_G(-,\mathbb{Z}) := H^3(- \times_G EG, \mathbb{Z})$.

Cabe mencionar que varios de los resultados de este capítulo y algunos del siguiente, se encuentran contenidos en el artículo [8] el cual surge del trabajo en colaboración con Noé Bárcenas, Michael Joachim y Bernardo Uribe, y es una generalización de varios resultados de esta tesis al caso donde la acción está dada por un grupo discreto G que actúa propiamente sobre un espacio X el cual es un G-ANR.

Iniciamos el capítulo con una sección introductoria sobre G-haces proyectivos unitarios.

2.1. Haces proyectivos unitarios equivariantes

En esta sección damos una introducción a la teoría de haces proyectivos unitarios con la acción de un grupo de Lie compacto G, los cuales son también llamados $PU(\mathcal{H})$-haces principales G-equivariantes. Estos son los elementos necesarios para definir los *versiones torcidas* de la K-teoría equivariante (Capítulo 3). El material aquí expuesto puede encontrarse en [45] y [27].

Sea κ un grupo topológico y $P \longrightarrow X$ un κ-haz principal sobre el CW-complejo finito X. El grupo de simetrías del haz principal P es definido como el subgrupo de elementos del grupo de homeomorfismos $Homeo(P)$ que son κ-equivariantes, esto es,

$$Sim(P) := \{F \in Homeo(P) \mid F \text{ es } \kappa\text{-equivariante}\}.$$

Un homeomorfismo κ-equivariante F induce un homeomorfismo f sobre el espacio base, haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "F"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Recíprocamente, para cualquier función $f : X \longrightarrow X$ tal que existe un isomorfismo $\phi : P \cong f^*P$ de κ-haces principales, podemos construir un homeomorfismo κ-equivariante $F : P \longrightarrow P$, $F := \bar{f} \circ \phi$, donde $\bar{f}$ es la aplicación canónica $\bar{f} : f^*P \longrightarrow P$ inducida por f. Si denotamos por

$Homeo_P(X)$ al grupo de tales homeomorfismos $f : X \longrightarrow X$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta,

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_G(P) \longrightarrow Sim(P) \longrightarrow Homeo_P(X) \longrightarrow 1$$

donde $\mathcal{G}_G(P)$ es el conjunto de simetrías que inducen la identidad en el espacio base, esto es, el grupo de *transformaciones de calibración.*

Definición 2.1.1. *Sean G y κ grupos de Lie compactos y X un G-complejo celular. Llamamos κ-haz principal G-equivariante a un κ-haz principal $p : P \longrightarrow X$ para el cual se satisface que P y X son G-espacios (por la izquierda), p es G-equivariante y las acciones de G y κ sobre P conmutan.*

Dos κ-haces principales G-equivariantes P y P' son isomorfos si existe un isomorfismo G-equivariante $P \cong P'$ de κ-haces principales.

Definición 2.1.2. *Denotamos el conjunto de clases de isomorfismo de κ-haces principales G-equivariantes sobre X, por*

$$Bun_G(X, \kappa).$$

Es importante mencionar que en [27], los autores R. K. Lashof, J. P. May y G. Segal llaman (G, κ)-haz a un κ-haz principal G-equivariante, establecido en la definición 2.1.1, y denotan por $B(G, \kappa)(X)$ al conjunto $Bun_G(X, \kappa)$ introducido en la definición 2.1.2. El resultado principal en [27] establece que si G y κ son grupos de Lie compactos, con κ **abeliano**, y X del mismo tipo de homotopía G-equivariante que un G-complejo celular, entonces existe un isomorfismo

$$B(G, \kappa)(X) \cong B(\kappa)(EG \times_G X),$$

con el conjunto $B(\kappa)(EG \times_G X)$ de clases de isomorfismo de κ-haces principales sobre el espacio ordinario (no equivariante) $EG \times_G X$, dado por la construcción de Borel sobre X.

El conjunto $Bun_G(X, \kappa)$ de clases de isomorfismo es bien conocido para algunas elecciones específicas de κ y G. Por ejemplo, en el caso donde G es un grupo compacto actuando libremente sobre X y $\kappa = S^1$, tenemos

$$Bun_G(X, S^1) \cong Bun(X/G, S^1) \cong H^2(X/G, \mathbb{Z}),$$

donde el primer isomorfismo se sigue usando argumentos similares a [44, Prop. I.9.4] y [38, Prop. 2.1], el segundo isomorfismo se sigue por la clasificación de clases de isomorfismo de haces de línea dada por la primera clase de Chern (cf. [46, III.4]).

El caso que será de importancia para nosotros, pues será requerido en la definición de la K-teoría equivariante torcida, es cuando G corresponde a un grupo de Lie compacto y $\kappa = PU(\mathcal{H})$, el *grupo de operadores unitarios proyectivos* sobre el espacio de Hilbert separable de $\mathbb{C}$-dimensión infinita $\mathcal{H}$, el cual se define como el cociente del *grupo unitario* $U(\mathcal{H})$ por su centro, esto es,

$$PU(\mathcal{H}) = \frac{\{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid TT^* = T^*T = \mathrm{Id}\}}{\{T \in U(\mathcal{H}) \mid TS = ST, \text{ para todo } \ S \in U(\mathcal{H})\}} = \frac{U(\mathcal{H})}{\{\zeta \cdot \mathrm{Id} \mid |\zeta| = 1\}} = U(\mathcal{H})/S^1$$

donde hemos identificado el centro de $U(\mathcal{H})$ con S^1. De modo que tenemos la sucesión exacta corta

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow U(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} PU(\mathcal{H}) \longrightarrow 1 .$$

Es crucial para este trabajo el hecho de que esta sucesión es también una fibración, sin embargo, antes de establecer este resultado es necesario dotar primero con una topología al grupo unitario que le dé una estrucutura de grupo topológico.

Veamos las diferentes topologías con las que se suele dotar al grupo $U(H)$.

Topología fuerte. Si el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ es dotado con la topología inducida por la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in \mathcal{H}$, entonces la *topología fuerte* (llamada en inglés *strong operator topology*) sobre el grupo $U(\mathcal{H})$ se define como la topología más pequeña que, para cada $x \in \mathcal{H}$, hace continuas a todas las aplicaciones

$$\begin{aligned} \alpha_x : U(\mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{H}. \\ T &\longmapsto Tx \end{aligned}$$

Denotaremos por $U(\mathcal{H})_s$ al grupo unitario con la topología fuerte. En esta topología $T_k \xrightarrow{s} T$ si y sólo si, $T_k x \to Tx$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

En [22, Cor. 9.4 y Prop. 9.5, p. 256] se demuestra que con esta topología el grupo unitario adquiere una estructura de grupo topológico.

Topología débil. La *topología débil* (llamada en inglés *weak operator topology*) es definida como la menor topología que hace continuas a todas la funcionales

$$\begin{array}{rcl} U(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ T & \longmapsto & \langle Tx, y\rangle \end{array}$$

para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Denotamos al grupo unitario con la topología débil por $U(\mathcal{H})_w$. De modo que $T_k \xrightarrow{w} T$ si y sólo si, $y^*(T_k x) \to y^*(Tx)$ para todo $x \in \mathcal{H}$, $y^* \in \mathcal{H}^*$.

En el mismo resultado antes mencionado ([22, Cor. 9.4 y Prop. 9.5, p. 256]) se demuestra también que sobre el grupo unitario la topología débil y la topología fuerte coinciden. En consecuencia, $U(\mathcal{H})_w$ es también un grupo topológico.

Topología compacto-abierto. La topología *compacto-abierto* sobre el grupo unitario es definida como la menor topología tal que, para cada subconjunto compacto $C \in \mathcal{H}$ y abierto $A \in \mathcal{H}$, los subconjuntos

$$V_{C,A} = \{T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \mid T(C) \subset A\}$$

son abiertos en el espacio $U(\mathcal{H})$. Denotamos al grupo unitario con la topología compacto-abierto por $U(\mathcal{H})_{c.a.}$.

Para el grupo unitario, esta topología está dada por la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos, esto es,

$$T_k \xrightarrow{c.a.} T \text{ si y sólo si } T_k|_K \to T|_K$$

uniformemente para cada subconjunto compacto $K \in \mathcal{H}$.

Observemos que esta topología coincide con la topología inducida por la inclusión

$$U(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H})_{c.a.}$$

al dotar al espacio $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ con la topología compacto-abierto.

Topología compacto-abierto relativa. Esta topología es una variante de la topología compacto-abierto usual y es definida como la topología inducida por el encaje

$$\begin{array}{rcl} U(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathcal{H})_{c.a.} \times \mathrm{End}(\mathcal{H})_{c.a.} \\ T & \longmapsto & (T, T^{-1}) \end{array}$$

Denotamos por $U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$ al grupo unitario con esta topología.

Si X es un espacio topológico Hausdorff, el *espacio compactamente generado asociado* $k(X)$ (cf. [43]) es el conjunto X con la topología compactamente generada de X: *un subconjunto C es cerrado en $k(X)$ si la intersección de C con cualquier subconjunto compacto de X es un cerrado en X.*

Decimos que X es compactamente generado cuando $k(X) = X$, como espacios topológicos.

Teorema 2.1.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable de $\mathbb{C}$-dimensión infinita y sea $U(\mathcal{H})$ el grupo unitario asociado a $\mathcal{H}$. Entonces, sobre $U(\mathcal{H})$ la topología fuerte, la topología débil, la topología compacto-abierto y la topología compacto-abierto relativa coinciden.*

Además, con cada una de éstas topologías el grupo unitario $U(\mathcal{H})$ es un grupo topológico completamente metrizable y compactamente generado.

Demostración. De lo comentado anteriormente, tenemos que la topología fuerte y la topología débil sobre $U(\mathcal{H})$ coinciden.

Mostraremos a continuación que también las topologías fuerte y compacto-abierto relativa coinciden sobre el grupo unitario.

Una base de vecindades para el elemento fijo $T_0 \in U(\mathcal{H})$ en la topología fuerte está dada por los subconjuntos

$$\{T \in U(\mathcal{H}) : \|(T - T_0)x\| < \epsilon\}$$

para $x \in \mathcal{H}$, mientras que en la topología compacto-abierto relativa está dada por los subconjuntos

$$\{T \in U(\mathcal{H}) : \|(T - T_0)x\| < \epsilon \ \text{ y } \ \|(T^{-1} - T_0^{-1})x\| < \epsilon \text{ para todo } \ x \in K\}$$

para $K \subset \mathcal{H}$ compacto y $T_0 \in U(\mathcal{H})$ fijo. Por lo tanto, la aplicación identidad

$$U(\mathcal{H})_{c.a.r.} \longrightarrow U(\mathcal{H})_s$$

es continua.

Por otro lado, si X es un espacio topológico Hausdorff, tenemos por construcción que la aplicación identidad

$$k(X) \longrightarrow X$$

es continua (cf. [43, Teo. 3.2.(i)]). Si además, X es compactamente generado, entonces la aplicación identidad $k(X) \to X$ es un homeomorfismo (cf. [43, Teo. 3.2.(v)]). De modo que tenemos una sucesión de aplicaciones identidad continuas para el grupo unitario con las distintas topologías,

$$k(U(\mathcal{H})_{c.a.r.}) \longrightarrow U(\mathcal{H})_{c.a.r.} \longrightarrow U(\mathcal{H})_s. \tag{2.1}$$

El resultado que deseamos probar se sigue de los siguientes hechos:

(i) $U(\mathcal{H})_s$ es compactamente generado y,

(ii) $k(U(\mathcal{H})_{c.a.r.}) = k(U(H)_s)$,

ya que de estos hechos se sigue que la sucesión de funciones identidad

$$k(U(\mathcal{H})_s) \longrightarrow k(U(\mathcal{H})_{c.a.r.}) \longrightarrow U(\mathcal{H})_{c.a.r.} \longrightarrow U(\mathcal{H})_s.$$

es tal que sus extremos son espacios homeomorfos, lo cual implica que cada una de las funciones identidad involucradas es un homeomorfismo.

El inciso (i) se sigue de [34, Prop. II.1], en donde se demuestra que $U(\mathcal{H})_s$ es un grupo topológico completamente metrizable y en consecuencia satisface el primer axioma de numerabilidad. Por lo tanto, $U(\mathcal{H})_s$ es compactamente generado.

Para demostrar (ii), es suficiente probar que si K es un subconjunto compacto en $U(\mathcal{H})_s$, entonces K es compacto en $U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$, ya que de (2.1) se sigue la afirmación recíproca (por la continuidad de la identidad $U(\mathcal{H})_{c.a.r.} \longrightarrow U(\mathcal{H})_s$) y por lo tanto $U(\mathcal{H})_s$ tendrá exactamente los mismos subconjuntos compactos que $U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$, lo cual implica que $k(U(\mathcal{H})_s) = k(U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$.

Sea $K \subset U(\mathcal{H})_s$ compacto, entonces el conjunto $\{Tx \mid T \in K, x \in \mathcal{H}\}$ es compacto y por lo tanto acotado, esto es,

$$\sup_{T\in K} \|Tx\| < \infty.$$

Por el teorema de Banach-Steinhaus tenemos que K es acotado en norma, es decir,

$$\sup_{T\in K} \|T\| < \infty. \tag{2.2}$$

Para demostrar que K es compacto en $U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$, consideremos una sucesión $\{T_n\}$ en K. Como K es compacto en $U(\mathcal{H})_s$ existe una subsucesión convergente $T_{n_k} \xrightarrow{s} T \in K$. Luego, como $T \in K$

es un operador acotado y $T_{n_k} \longrightarrow T$ puntualmente, y todos los T_{n_k} y T están acotados (por (2.2)), esta convergencia se vuelve uniforme en compactos.

El mismo resultado se sigue para la sucesión de operadores $\{T_{n_k}^{-1}\}$, ya que al ser cada uno un operador unitario, tenemos que

$$\langle T_{n_k} x, y \rangle = \langle x, T_{n_k}^{-1} y \rangle$$

para cada $x, y \in \mathcal{H}$, de modo que $T_{n_k}^{-1} \to T^{-1}$.

Análogamente, la topología de K inducida por $U(\mathcal{H})_s$ y la topología de K inducida por $U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$ son la misma, por lo tanto $U(\mathcal{H})_s$ y $U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$ tienen los mismos compactos con la misma topología, lo cual implica que $k(U(H)_s) = k(U(\mathcal{H})_{c.a.r.})$.

Es importante destacar que este resultado no se cumple en general, como lo muestran M. F. Atiyah y G. Segal en [7, p. 321] para la sucesión de operadores (no unitarios) en $\mathrm{GL}(\ell^2)$,

$$T_n : (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots) \to (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \frac{\xi_n}{n}, \xi_{n+1}, \ldots)$$

ya que para el vector $\eta = \{1/k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, tenemos $T_n(\eta) \to \mathrm{Id}(\eta) = \eta$ puntualmente, sin embargo, $T_n^{-1}(\eta) \not\to \mathrm{Id}(\eta) = \eta$ puntualmente ya que

$$\|T_n^{-1}(\eta) - \mathrm{Id}(\eta)\| \xrightarrow{n \to \infty} 1.$$

Siguiendo la misma secuencia de razonamientos que se usaron para mostrar que sobre el grupo unitario coinciden la topología fuerte y la topología compacto-abierto relativa, se demuestra que estas coinciden con la topología compacto-abierto heredada del encaje $U(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H})_{c.a.}$.

Finalmente, como sobre $U(\mathcal{H})$ todas las topologías mencionadas en el teorema coinciden y $U(\mathcal{H})_s$ es un grupo topológico completamente metrizable, y por lo tanto compactamente generado, se sigue que $U(\mathcal{H})_w$, $U(\mathcal{H})_{c.a.r.}$ y $U(\mathcal{H})_{c.a.}$ son también grupos topológicos completamente metrizables y por lo tanto, compactamente generados. ■

En adelante denotaremos por $U(\mathcal{H})$ al grupo topológico de operadores unitarios con cualquiera de las topologías establecidas en el teorema.

Por otro lado, dotando a $PU(\mathcal{H})$ con la topología cociente $U(\mathcal{H})/S^1$, obtenemos una estructura de grupo topológico sobre este espacio. Más aún, D. J. Simms demuestra en [41, Teo. 1] que, con la topología fuerte, la sucesión

$$S^1 \longrightarrow U(\mathcal{H})_s \longrightarrow PU(\mathcal{H})_s$$

es un haz fibrado S^1-principal y por lo tanto $(U(\mathcal{H}), \pi, PU(\mathcal{H}))$ corresponde a una fibración con cualquiera de las topologías sobre $U(\mathcal{H})$ mencionadas en el teorema y $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/S^1$ con la correspondiente topología cociente.

Además, como $U(\mathcal{H})$ es contraíble se sigue que $PU(\mathcal{H})$ tiene el mismo tipo de homotopía que el espacio de Eilenberg-Maclane $K(\mathbb{Z}, 2)$, por lo tanto $PU(\mathcal{H})$ es un espacio universal para haces de línea complejos.

A fin de hacer un análisis detallado para el caso $\kappa = PU(\mathcal{H})$, comenzamos analizando tal situación cuando X corresponde al G-espacio trivial dado por un punto, en donde se sigue que

$$Bun_G(*, \kappa) \cong Hom(G, \kappa)/\kappa$$

con $Hom(-,-)$ el conjunto de homomorfismos continuos de grupos y el cociente por κ lo particiona en clases de conjugación por elementos en κ. De modo que para G un grupo de Lie compacto y $\kappa = PU(\mathcal{H})$, definimos la aplicación

$$\Psi : Hom(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H}) \longrightarrow Ext(G, S^1),$$

al conjunto de clases de isomorfismo de extensiones S^1-centrales

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

de la siguiente manera: Si $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$ es cualquier homomorfismo, éste determina una extensión S^1-central de G dada por $\widetilde{G} := a^*U(\mathcal{H})$, como se aprecia en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} = a^*U(\mathcal{H}) \arrow[r, "\widetilde{a}"] \arrow[d] & U(\mathcal{H}) \arrow[d] \\
G \arrow[r, "a"] & PU(\mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

de modo que Ψ es definida por

$$\Psi : (a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})) \longmapsto (\widetilde{G} = a^*U(\mathcal{H})).$$

Observación. 2.1.4. Observemos que la extensión central $S^1 \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G$ es equivalente a que $\widetilde{G}$ sea un haz S^1-fibrado principal sobre G. En el caso en el que $\widetilde{G}$ es un haz fibrado trivial, se sigue que $\widetilde{G} = S^1 \times_\alpha G$, esto es, el conjunto $S^1 \times G$ con el producto $(s, g) \cdot_\alpha (t, h) = (st, \alpha(s, t)gh)$ para un cociclo $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{S}^1)$.

Definición 2.1.5. *Consideremos el subespacio $V_{sc}(\widetilde{G})$ de $L^2(\widetilde{G})$ generado por los vectores sobre los cuales $S^1 \subset \widetilde{G}$ actúa por multiplicación de escalares. Un homomorfismo $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$ es llamado **estable** si la representación unitaria definida por $\widetilde{a} : \widetilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ contiene cada una de las representaciones irreducibles de $\widetilde{G}$ contenidas en $V_{sc}(\widetilde{G})$, un número infinito de veces. Denotamos por*

$$Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \subset Hom(G, PU(\mathcal{H}))$$

el subespacio de tales homomorfismos estables.

Lema 2.1.6. *La aplicación Ψ definida previamente, induce una biyección de conjuntos*

$$Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H}) \xrightarrow{\cong} Ext(G; S^1),$$

entre el conjunto de clases de isomorfismo de homomorfismos estables continuos y el conjunto de extensiones S^1-centrales de G.

Demostración. Dada una extensión S^1-central $\widetilde{G}$ de G, mostraremos que existe un homomorfismo $\widetilde{a} : \widetilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ que restringido a S^1 actúa sobre $\mathcal{H}$ por multiplicación de escalares, el cual se proyecta sobre un homomorfismo $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$, demostrando la sobreyectividad.

Por el Teorema de Peter-Weyl tenemos que el espacio $L^2(\widetilde{G})$ contiene todas las representaciones irreducibles de $\widetilde{G}$. Luego, tomemos cualquier isomorfismo de espacios de Hilbert

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H} \otimes V_{sc}(\widetilde{G})$$

y demos a $\mathcal{H}$ la $\widetilde{G}$-acción definida por la representación unitaria de $\widetilde{G}$ sobre $V_{sc}(\widetilde{G})$. Dicha acción nos da el homomorfismo deseado $\widetilde{a} : \widetilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$.

Supongamos ahora que tenemos dos homomorfismos estables continuos a, b tales que $a^*U(\mathcal{H}) \cong \widetilde{G} \cong b^*U(\mathcal{H})$. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ viene a ser una representación de $\widetilde{G}$ con respecto a la aplicación $\widetilde{a} : \widetilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ y por lo tanto existe un $\widetilde{G}$-isomorfismo equivariante (no canónico) $f_a : \mathcal{H} \to V_{sc}(\widetilde{G})$ que puede tomarse unitario. Obtenemos el mismo resultado para la aplicación b y obtenemos otro $\widetilde{G}$-isomorfismo equivariante $f_b : \mathcal{H} \to V_{sc}(\widetilde{G})$.

El isomorfismo equivariante $f_b^{-1} \circ f_a : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "f_b^{-1} \circ f_a"] \arrow[d, "\widetilde{a}(g)"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\widetilde{b}(g)"] \\
\mathcal{H} \arrow[r, "f_b^{-1} \circ f_a"] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

para cada $g \in \widetilde{G}$. Por lo tanto, los homomorfismos $\widetilde{a}$ y $\widetilde{b}$ son conjugados y se sigue la inyectividad.

□

2.2. El $PU(\mathcal{H})$-haz unitario proyectivo G-equivariante

Consideremos el grupoide acción

$$[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})]$$

asociado a la acción del grupo $PU(\mathcal{H})$ en los homomorfismos estables continuos por conjugación; este grupoide, también denotado por $PU(\mathcal{H}) \ltimes Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$, consiste en el grupoide cuyos objetos son los elementos $\phi \in Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$ y los morfismos $\sigma : \phi \longrightarrow \varphi$ son los elementos $\sigma \in PU(\mathcal{H})$ tales que $\sigma \cdot \phi = \varphi$. De modo que, en notación categórica, el conjunto de objetos es

$$[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})]_0 = Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$$

y el conjunto de morfismos consiste en

$$[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})]_1 = PU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$$

De modo que este grupoide también se puede ver como el grupoide cuyos objetos son funtores de la categoría definida por G (i.e., $G_0 = \{*\}$ y $G_1 = G$) a la categoría definida por $PU(\mathcal{H})$ (i.e., $PU(\mathcal{H})_0 = \{*\}$ y $PU(\mathcal{H})_1 = PU(\mathcal{H})$), y cuyos morfismos son transformaciones naturales. Una referencia útil para la teoría de grupoides desde el punto de vista de teoría de categorías es [31]; en esta referencia se da una excelente presentación de la teoría de orbidades[1] desde la perspectiva de la teoría de grupoides.

[1] *Orbifolds*, en inglés.

Consideremos ahora el espacio clasificante de esta categoría (grupoide acción)

$$B[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})],$$

el cual se define de la siguiente manera (cf. [37] y [39]). Si G_0 es el conjunto de objetos de $[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})]$ y para $n > 1$,

$$G_n := \left\{ (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \,\middle|\, \sigma_i \in G_1,\ \phi_0 \xleftarrow{\sigma_1} \phi_1 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\sigma_n} \phi_n \right\},$$

entonces la colección $\{G_n\}_{n \geq 0}$ tiene una estructura de espacio simplicial, llamado el *nervio* de la categoría. El operador *cara* $d_i : G_n \longrightarrow G_{n-1}$, para $i = 0, \ldots, n$ está dado por

$$d_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \begin{cases} (\sigma_2, \ldots, \sigma_n) & i = 0, \\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) & i = n, \\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_i \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y el espacio clasificante se define como,

$$B[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})] = \bigsqcup_n (G_n \times \Delta^n)/(d_i(g), x) \sim (g, \delta_i(x)),$$

con Δ^n el n-simplejo topológico estándar y $\delta_i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ el encaje lineal en la i-ésima cara.

Si denotamos el *n-simplejo* $\phi_0 \xleftarrow{\sigma_1} \phi_1 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\sigma_n} \phi_n$ por $[\sigma_1|\sigma_2|\cdots|\sigma_n]x$, podemos establecer el siguiente homeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) & \longrightarrow & B[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})] \\ ([\sigma_1|\sigma_2|\cdots|\sigma_n]\sigma, \phi) & \longmapsto & [\sigma_1|\sigma_2|\cdots|\sigma_n](\sigma \cdot \phi) \end{array}$$

donde $EPU(\mathcal{H})$ es el $PU(\mathcal{H})$-haz universal y el inverso de este homeomorfismo es

$$[\sigma_1|\sigma_2|\cdots|\sigma_n]\phi \longmapsto ([\sigma_1|\sigma_2|\cdots|\sigma_n]\mathrm{Id}, \phi).$$

Por el Lema 2.1.6 sabemos que sus componentes conexas están paremetrizadas por las extensiones S^1-centrales de G,

$$\pi_0(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) \cong Ext(G, S^1).$$

Si elegimos la componente conexa del espacio clasificante determinado por una aplicación estable $a : G \to PU(\mathcal{H})$, sus grupos de homotopía superiores están determinados por los grupos de homotopía de

$$EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})_a} \{a\} \simeq B(PU(\mathcal{H})_a)$$

donde

$$PU(\mathcal{H})_a = \{b \in PU(\mathcal{H}) | \forall g \in G,\ b^{-1}a(g)b = a(g)\}$$

es el subgrupo de $PU(\mathcal{H})$ que estabiliza a.

Si denotamos por $\widetilde{G}_a$ a la extensión S^1-central $a^*U(\mathcal{H})$ definida por a, entonces el homomorfismo inducido $\widetilde{a} : \widetilde{G}_a \to U(\mathcal{H})$ define una acción sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ haciéndolo isomorfo al espacio de Hilbert $V_{sc}(\widetilde{G}_a)$ dado en la Definición 2.1.5. Ahora podemos tomar la acción de $\widetilde{G}_a$ sobre $U(\mathcal{H})$ por conjugación mediante la aplicación $\widetilde{a}$; este induce una acción del grupo G sobre $PU(\mathcal{H})$ por conjugación mediante la aplicación a. Denotemos la acción de G sobre $PU(\mathcal{H})$ por conjugación mediante la aplicación a por G_a.

Si denotamos el conjunto de puntos fijos de la acción G_a sobre $PU(\mathcal{H})$ por

$$PU(\mathcal{H})^{G_a} := \{b \in PU(\mathcal{H}) | g \in G,\ a(g)^{-1}ba(g) = b\}$$

entonces tenemos que

$$PU(\mathcal{H})^{G_a} = PU(\mathcal{H})_a.$$

Esto significa que el conjunto de puntos fijos de la acción de G_a es el mismo que el estabilizador del homomorfismo a.

Lema 2.2.1. *Para cualquier $F \in PU(\mathcal{H})^{G_a}$ existe un homomorfismo $\sigma_F \in Hom(G_a, S^1)$ tal que para todos los levantamientos $\widetilde{F} \in U(\mathcal{H})$ de F y todo $\widetilde{g} \in \widetilde{G}_a$, tenemos que*

$$\widetilde{a}(\widetilde{g})^{-1}\widetilde{F}\,\widetilde{a}(\widetilde{g}) = \sigma_F(g) \cdot \widetilde{F}$$

donde g es la imagen de $\widetilde{g}$ en G_a bajo la aplicación natural $\widetilde{G}_a \to G_a$.

Demostración. Dado $F \in PU(\mathcal{H})^{G_a}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}\mathcal{H} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "a(g)"'] & \mathbb{P}\mathcal{H} \arrow[d, "a(g)"] \\ \mathbb{P}\mathcal{H} \arrow[r, "F"] & \mathbb{P}\mathcal{H} \end{tikzcd}$$

para cada $g \in G$, donde $\mathbb{P}\mathcal{H}$ denota la proyectivización del espacio $\mathcal{H}$. Consideremos un levantamiento $\widetilde{F} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ de F y

$$\widetilde{a} : \widetilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$$

el levantamiento de la G-acción a la acción de la extensión S^1-central $\widetilde{G}$ sobre $U(\mathcal{H})$. Observemos que en este caso, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, "\widetilde{a}(\widetilde{g})"'] & \mathcal{H} \arrow[d, "\widetilde{a}(\widetilde{g})"] \\ \mathcal{H} \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \mathcal{H} \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

dado como un levantamiento del diagrama previo, ya no es conmutativo; sin embargo, podemos medir el error para que tal diagrama conmute por medio de un elemento $\sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g}) \in S^1$ para cada $\widetilde{g}$, ya que este actúa por conjugación. Por lo tanto, tenemos una aplicación $\sigma_{\widetilde{F}} : \widetilde{G} \longrightarrow S^1$, de tal manera que para cada $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$,

$$\widetilde{a}(\widetilde{g})^{-1}\, \widetilde{F}\, \widetilde{a}(\widetilde{g}) = \sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g}) \cdot \widetilde{F}.$$

Dado otro elemento $\widetilde{h} \in \widetilde{G}$,

$$\begin{aligned} \sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{h}) \cdot (\sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g}) \cdot \widetilde{F}) &= \widetilde{a}(\widetilde{h})^{-1} \left(\widetilde{a}(\widetilde{g})^{-1}\, \widetilde{F}\, \widetilde{a}(\widetilde{g})\right) \widetilde{a}(\widetilde{h}) \\ &= \left(\widetilde{a}(\widetilde{g})\, \widetilde{a}(\widetilde{h})\right)^{-1} \widetilde{F} \left(\widetilde{a}(\widetilde{g})\, \widetilde{a}(\widetilde{h})\right) \\ &= \sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g}\widetilde{h}) \cdot \widetilde{F} \end{aligned}$$

de modo que $\sigma_{\widetilde{F}} \in Hom(\widetilde{G}, S^1)$. Por otro lado, para $\widetilde{F}, \widetilde{\tau} \in U(\mathcal{H})$, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{\widetilde{F}\,\widetilde{\tau}}(\widetilde{g}) \cdot (\widetilde{F}\,\widetilde{\tau}) &= \widetilde{a}(\widetilde{g})^{-1} \left(\widetilde{F}\,\widetilde{\tau}\right) \widetilde{a}(\widetilde{g}) \\ &= \left(\widetilde{a}(\widetilde{g})^{-1}\, \widetilde{F}\, \widetilde{a}(\widetilde{g})\right) \left(\widetilde{a}(\widetilde{g})^{-1}\, \widetilde{\tau}\, \widetilde{a}(\widetilde{g})\right) \\ &= \left(\sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g}) \cdot (\widetilde{F})\right) \circ \left(\sigma_{\widetilde{\tau}}(\widetilde{g}) \cdot (\widetilde{\tau})\right) \\ &= \sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g})\sigma_{\widetilde{\tau}}(\widetilde{g}) \cdot (\widetilde{F}\widetilde{\tau}) \end{aligned}$$

lo cual implica que la asociación $\widetilde{F} \longmapsto \sigma_{\widetilde{F}}$ es un homomorfismo de grupos.

Luego, es claro que si $\widetilde{g} \in S^1 \subset \widetilde{G}$, entonces $\mathcal{H} \xrightarrow{\widetilde{g}} \mathcal{H}$ está dada por conjugación compleja, lo que implica la conmutatividad del diagrama (2.3), y en consecuencia

$$\sigma_{\widetilde{F}}\big|_{S^1} = 1.$$

Luego, podemos factorizar $\sigma_{\widetilde{F}}$ como

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[rr, "\sigma_{\widetilde{F}}"] \arrow[dr, "pr"'] & & S^1 \\ & G \arrow[ur, "\sigma_F"'] & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

y tenemos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \bar{\Psi}: PU(\mathcal{H})^{G_a} & \longrightarrow & Hom(G_a, S^1) \\ F & \longmapsto & \sigma_F \end{array}$$

$\square$

Si tomamos dos operadores $F_1, F_2 \in PU(\mathcal{H})^{G_a}$ con sus respectivos levantamientos $\widetilde{F}_1$, $\widetilde{F}_2$ y los homomorfismos inducidos σ_{F_1}, $\sigma_{F_2} \in Hom(G_a, S^1)$, se tiene que la composición $\widetilde{F}_1\widetilde{F}_2$ es un levantamiento de la composición F_1F_2. Por lo tanto tenemos que el homomorfismo inducido $\sigma_{F_1F_2}$ para la composición F_1F_2 es igual al producto de los homomorfismos σ_{F_1} y σ_{F_2}, i.e.

$$\sigma_{F_1F_2} = \sigma_{F_1}\sigma_{F_2}.$$

Notemos que el producto de homomorfismos le da al conjunto $Hom(G_a, S^1)$ una estructura natural de grupo. Tenemos que

Teorema 2.2.2. *Sea $PU(\mathcal{H})$ el espacio de operadores proyectivos unitarios con una G-acción mediante un homomorfismo estable $a: G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$. Entonces,*

$$\pi_0(PU(\mathcal{H})^{G_a}) \cong Hom(G_a, S^1).$$

Además, cada componente conexa de $PU(\mathcal{H})^{G_a}$ tiene el tipo de homotopía de $K(\mathbb{Z}, 2)$.

Demostración. Por el Lema 2.2.1, tenemos un homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \bar{\Psi}: PU(\mathcal{H})^{G_a} & \longrightarrow & Hom(G_a, S^1) \\ F & \longmapsto & \sigma_F \end{array}$$

Veamos ahora que $\bar{\Psi}$ no depende del tipo de homotopía de F, esto es, si τ es otro elemento en la misma componente conexa de F, entonces $\bar{\Psi}(\tau) = \sigma_F$. Sea

$$\Lambda : \mathbb{P}\mathcal{H} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}\mathcal{H}$$

una homotopía G-equivariante entre F y τ, con G-acción trivial sobre $[0,1]$, y consideremos

$$\widetilde{\Lambda} : \mathcal{H} \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{H}$$

la $\widetilde{G}$-homotopía entre los operadores unitarios G-equivariantes $\widetilde{F}, \widetilde{\tau} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, que se proyecta sobre Λ. Dicha $\widetilde{G}$-homotopía existe ya que $\widetilde{G}$ es un grupo de Lie compacto y en consecuencia $U(\mathcal{H})$ es $\widetilde{G}$-contráctil (cf. [28]). Por el Teorema de Peter-Weyl, $\widetilde{F}$ y $\widetilde{\tau}$ son $U(\mathcal{H})$-conjugados y en consecuencia $\sigma_{\widetilde{F}} = \sigma_{\widetilde{\tau}}$, probando la invarianza homotópica de $\bar{\Psi}$.

Tenemos entonces una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \pi_0(PU(\mathcal{H})^{G_a}) & \longrightarrow & Hom(G_a, S^1) \\ & F & \longmapsto & \sigma_F \end{array}$$

bien definida.

Para probar la inyectividad de Ψ, observemos que si $\bar{\Psi}(F) = 1$, entonces para todo levantamiento $\widetilde{F}$ se tiene que $\sigma_{\widetilde{F}} = 1$ ya que esta se factoriza a través de σ_F y la proyección $\widetilde{G} \longrightarrow G$. Esto implica que todo levantamiento $\widetilde{F}$ es $\widetilde{G}$-equivariante, esto es, $\widetilde{F} \in U(\mathcal{H})^{\widetilde{G}}$ para todo F tal que $\bar{\Psi}(F) = 1$. Luego, como el operador identidad $id_{\mathcal{H}}$ es claramente $\widetilde{G}$-equivariante y el espacio $U(\mathcal{H})^{\widetilde{G}}$ es G-conexo, existe una homotopía $\widetilde{G}$-equivariante entre $id_{\mathcal{H}}$ y $\widetilde{F}$ que se proyecta a una homotopía G-equivariante entre $id_{\mathbb{P}\mathcal{H}}$ y F, probando que $F \simeq_G id_{\mathbb{P}\mathcal{H}}$ y por lo tanto, $\Psi([F]) = 1$.

Para probar la sobreyectividad, sea $\sigma_F : G \to S^1$ un homomorfismo, $\sigma_{\widetilde{F}} : \widetilde{G} \longrightarrow S^1$ su levantamiento y $\mathbb{C}(\sigma_{\widetilde{F}})$ la representación lineal asociada. Definimos $\widetilde{F}_V : V \longrightarrow V \otimes \mathbb{C}(\sigma_{\widetilde{F}})$ por $\widetilde{F}_V : v \longmapsto v \otimes 1$. En consecuencia, el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\widetilde{F}_V"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & V \otimes \mathbb{C}(\sigma_{\widetilde{F}}) \arrow[d, "\widetilde{g}"] \\ V \arrow[r, "\widetilde{F}_V"] & V \otimes \mathbb{C}(\sigma_{\widetilde{F}}) \end{tikzcd}$$

no es conmutativo, sino que para cada $v \in V$ se tiene

$$\widetilde{g} \cdot \widetilde{F}_V(v) = \widetilde{g} \cdot (\widetilde{F}_V(\widetilde{g}^{-1} \cdot v)) = \widetilde{g} \cdot [(\widetilde{g}^{-1} \cdot v) \otimes 1] = v \otimes \sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g}) = \sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g})(v \otimes 1) = \sigma_{\widetilde{F}}(\widetilde{g})\widetilde{F}_V(v).$$

Definimos el operador $\widetilde{F} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $\widetilde{F}|_V = \widetilde{F}_V$ para cada representación irreducible V de $\widetilde{G}$, el cual claramente satisface que $\Psi([F]) = \sigma$.

Finalmente, como cada componente conexa de $PU(\mathcal{H})^{G_a}$ puede verse como la proyectivización del grupo de operadores unitarios $U(\mathcal{H})^G$, se sigue la segunda parte del teorema, ya que $P\left(U(\mathcal{H})^G\right)$ tiene el tipo de homotopía de un $K(\mathbb{Z},2)$ (cf. [7, p.323]). $\square$

Definición 2.2.3. *Un $PU(\mathcal{H})$-haz principal G-equivariante $P \longrightarrow X$ sobre el G-espacio X, es llamado* ***estable****, si para para todo $x \in X$ con subgrupo de isotropía G_x, existe una vecindad G_x-equivariante U_x de x y un isomorfismo de haces G_x-equivariantes*

$$P|_{U_x} \cong U_x \times PU(\mathcal{H})$$

de tal manera que la G_x-acción sobre el factor $PU(\mathcal{H})$ del lado derecho es mediante homomorfismos estables.

Dos haces estables G-equivariantes unitarios proyectivos P y P' sobre X se dicen ser isomorfos si existe un homeomorfismo G-equivariante $P \longrightarrow P'$ de $PU(\mathcal{H})$-haces principales. Las clases de isomorfismo de haces estables G-equivariantes unitarios proyectivos sobre X serán denotados por

$$Bun_G^{st}(X, PU(\mathcal{H})).$$

Los elementos en $Bun_G^{st}(X, PU(\mathcal{H}))$ serán llamados *torcimientos G-equivariantes.*

Sea G un grupo de Lie compacto y consideremos el $PU(\mathcal{H})$-haz unitario proyectivo G-equivariante

$$\begin{tikzcd} PU(\mathcal{H}) \arrow[r] & EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \arrow[d] \\ & EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

La $PU(\mathcal{H})$-acción derecha sobre el espacio total del haz en (2.5) es definida por:

$$\begin{aligned} EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \times PU(\mathcal{H}) &\longrightarrow EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \\ ((a, f), F) &\longmapsto (aF, F^{-1}fF) \end{aligned}$$

donde $F^{-1}fF$ denota el homomorfismo conjugado de f por F.

La G-acción izquierda sobre el espacio total de (2.5) es definida como:

$$\begin{aligned} G \times EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) &\longrightarrow EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \\ (g, (a, f)) &\longmapsto (af(g), f(g)^{-1}f\, f(g)) \end{aligned}$$

donde un cálculo directo muestra que la G-acción es efectivamente una acción izquierda.

Llamamos al espacio base de este haz, el *cociente homotópico.*

Se sigue que el espacio total del haz (2.5) tiene una G-acción izquierda induciendo una G-acción trivial sobre la base. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.4. *El haz unitario proyectivo*

$$\begin{tikzcd} PU(\mathcal{H}) \arrow[r] & EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \arrow[d] \\ & EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

es un haz estable G-equivariante unitario proyectivo.

Demostración. Sea $g \in G$, $(a, f) \in EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$ y $F \in PU(\mathcal{H})$. Probemos primero que la G-acción izquierda conmuta con la $PU(\mathcal{H})$-acción derecha; por un lado, tenemos

$$\begin{aligned} (g(a, f))F &= (af(g), f(g)^{-1} f\, f(g))F \\ &= (af(g)F, F^{-1} f(g)^{-1} f\, f(g)F) \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} g((a, f)F) &= g(aF, F^{-1} fF) \\ &= (aFF^{-1} f(g)F, F^{-1} f(g)^{-1} FF^{-1} f\, FF^{-1} f(g)F) \\ &= (af(g)F, F^{-1} f(g)^{-1} f\, f(g)F); \end{aligned}$$

lo cual muestra que las acciones conmutan.

Por otro lado, para la segunda condición tomamos cualquier punto $x \in EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$ y fijamos una vecindad contraíble V de x. Luego, como el haz restringido

$$EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))|_V$$

es trivializable, podemos hallar una sección

$$\begin{tikzcd} & EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \arrow[d] \\ V \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r] & EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

la cual se descompone como

$$\alpha(v) = (\lambda(v), \eta(v))$$

con $\lambda : V \longrightarrow EPU(\mathcal{H})$ y $\eta : V \longrightarrow Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$.

Sea $f := \eta(x)$ y consideremos la componente conexa $W_f \subset Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$ que contiene a f. Por el Lema 2.1.6 sabemos que el grupo $PU(\mathcal{H})$ actúa transitivamente sobre W_f y por lo tanto tenemos un homeomorfismo no canónico

$$PU(\mathcal{H})/PU(\mathcal{H})_f \xrightarrow{\cong} W_f\ , \quad [F] \longmapsto F^{-1}fF$$

donde

$$PU(\mathcal{H})_f = \{F \in PU(\mathcal{H}) \mid F^{-1}fF = f\}$$

es el grupo de isotropía de f y actúa por la derecha sobre $PU(\mathcal{H})$, por conjugación.

Por otro lado, como el haz

$$PU(\mathcal{H})_f \longrightarrow PU(\mathcal{H}) \longrightarrow PU(\mathcal{H})/PU(\mathcal{H})_f$$

es un haz principal y V es contraíble, podemos hallar un levantamiento $\sigma : V \longrightarrow PU(\mathcal{H})$ de la función $\eta : V \longrightarrow W_f$ haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & PU(\mathcal{H}) \arrow[d] \\
V \arrow[urr, "\sigma"] \arrow[r, "\eta"'] & W_f \arrow[r, "\cong"] & PU(\mathcal{H})/PU(\mathcal{H})_f
\end{tikzcd}$$

De modo que la función σ satisface la ecuación

$$\eta(v) = \sigma(v)^{-1} f\, \sigma(v)$$

para $v \in V$.

Consideremos ahora otra sección

$$\alpha' : V \longrightarrow EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$$

del diagrama (2.7) definida por la acción de σ sobre α, esto es,

$$\alpha'(v) := \alpha(v) \cdot \sigma(v)^{-1} = (\lambda(v)\sigma(v)^{-1}, \sigma(v)\eta(v)\sigma(v)^{-1}) = (\lambda'(v), f)$$

donde $\lambda'(v) := \lambda(v)\sigma(v)^{-1}$.

Con la sección α' podemos definir una trivialización local como sigue

$$\begin{array}{rcl} V \times PU(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\phi} & (EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})))\big|_V \\ (v, F) & \longmapsto & \alpha'(v) \cdot F = (\lambda'(v)F, F^{-1}fF). \end{array} \tag{2.8}$$

Transportando la G-acción al lado izquierdo de (2.8) se tiene que para cada $g \in G$ y $(v, F) \in V \times PU(\mathcal{H})$,

$$\begin{array}{rcl} g \cdot (v, F) & := & \phi^{-1}(g(\phi(v, F))) \\ & = & \phi^{-1}(g(\lambda'(v)F, F^{-1}fF)) \\ & = & \phi^{-1}(\lambda'(v)f(g)F, F^{-1}f(g)^{-1}f\, f(g)F) \\ & = & (v, f(g)F) \end{array}$$

lo cual implica que la G-acción sobre $PU(\mathcal{H})$ es multiplicación por la izquierda por un homomorfismo estable fijo f.

□

2.3. Grupos de homotopía del $PU(\mathcal{H})$-fibrado universal

Teorema 2.3.1. *Sea G un grupo de Lie compacto y $Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})$ la categoría cuyo espacio de objetos consiste de los homomorfismos estables continuos de G al grupo unitario proyectivo con la topología compacto-abierto, y cuyo espacio de morfismos consiste en las transformaciones naturales. Entonces las componentes conexas del cociente homotópico son parametrizadas por las extensiones S^1-centrales de G,*

$$\pi_0(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) = Ext_c(G, S^1),$$

y los grupos superiores de homotopía de cualquier componente conexa son

$$\pi_i(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) = \begin{cases} Hom(G, S^1) & si\ i = 1 \\ \mathbb{Z} & si\ i = 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración. Del análisis en la subsección 2.2 tenemos que las componentes conexas del cociente homotópico

$$EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$$

son parametrizadas por $Ext_c(G, S^1)$. Además, para todo homomorfismo estable $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$, la componente conexa definida por a es homotópicamente equivalente a

$$EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})_a} \{a\} \cong B(PU(\mathcal{H})_a) = B(PU(\mathcal{H})^{G_a}).$$

Por el teorema 2.2.2 tenemos que $\pi_0(PU(\mathcal{H})^{G_a}) = Hom(G, S^1)$ es un isomorfismo de grupos, y por lo tanto,

$$\pi_1(B(PU(\mathcal{H})^{G_a})) = Hom(G, S^1).$$

Además, también por el Teorema 2.2.2, tenemos que $\pi_2(PU(\mathcal{H})^{G_a}) = \mathbb{Z}$ y que los demás grupos de homotopía son triviales. Por lo tanto,

$$\pi_3(B(PU(\mathcal{H})^{G_a})) = \mathbb{Z}$$

y

$$\pi_i(B(PU(\mathcal{H})^{G_a})) = 0$$

para $i = 2$ e $i > 3$. □

Estos grupos de homotopía descritos en el teorema son precisamente los grupos de cohomología para el espacio clasificante BG en los grados que se muestran en el siguiente resultado.

Corolario 2.3.2. *Para un grupo de Lie compacto G tenemos los siguientes isomorfismos,*

$$\pi_i(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) = H^{3-i}(BG, \mathbb{Z}).$$

Demostración. El espacio BG es conexo, de modo que $H^0(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, coincidiendo con el tercer grupo de homotopía del cociente homotópico.

Como el grupo G es compacto, se sigue que $\pi_0(BG)$ es finito, entonces $\pi_1(BG)$ también es finito y por lo tanto, $H^1(BG, \mathbb{Z}) = 0$, lo cual establece el isomorfismo para $i = 2$.

En [27, Prop. 4] se demuestra que la aplicación natural

$$Hom(G, A) \longrightarrow [BG, BA]$$

es un isomorfismo cuando A y G son grupos de Lie compactos y A es abeliano. En consecuencia,

$$Hom(G, S^1) \xrightarrow{\cong} [BG, BS^1] = H^2(BG, \mathbb{Z}),$$

lo cual prueba el isomorfismo para $i = 1$.

Por último, Atiyah y Segal demuestran en [7, Prop. 6.3] que $H^3(BG, \mathbb{Z}) \cong Ext_c(G, S^1)$, estableciendo el isomorfismo para $i = 0$. La idea de la demostración de este resultado es usar los grupos de hipercohomoloía $\mathbb{H}^*(N_\bullet G, sh(S^1))$ del nervio del grupo G con coeficientes en la gavilla de funciones con valores en S^1. Primero observan que

$$\mathbb{H}^*(N_\bullet G, sh(S^1)) \cong H^{*+1}(BG, \mathbb{Z})$$

y posteriormente aplican una sucesión espectral a los grupos de hipercohomología para demostrar que $\mathbb{H}^2(N_\bullet G, sh(S^1))$ puede describirse por medio de haces S^1-principales sobre G a los cuales se les puede dar una estructura de grupo que desciende sobre la estructura de grupo de G, más las extensiones centrales de G por S^1 parametrizadas por 2-cociclos continuos de G con valores en S^1, lo cual es precisamente $Ext_c(G, S^1)$. □

2.4. Torcimientos equivariantes y cohomología de Borel equivariante

Dado un G-complejo celular finito X, se define su cohomología de Borel equivariante como

$$H^*_G(X) := H^*(X \times_G EG).$$

El objetivo del siguiente resultado es caracterizar los torcimientos G-equivariantes sobre un G-espacio en términos de su cohomología de Borel equivariante.

Teorema 2.4.1.

$$Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H})) \cong H^3_G(X; \mathbb{Z})$$

Es fácil ver que el espacio $\mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))$, con la G-acción trivial sobre $BPU(\mathcal{H})$, representa el funtor $X \longmapsto H^3_G(X;\mathbb{Z})$. En efecto,

$$\begin{aligned}
[X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G &\cong [X \times EG; BPU(\mathcal{H})]_G \\
&\cong [X \times_G EG; BPU(\mathcal{H})] \\
&\cong H^3_G(X;\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

donde el último isomorfismo se sigue por el hecho de que $BPU(\mathcal{H})$ es homotópicamente equivalente a $K(\mathbb{Z}, 3)$, lo cual es una consecuencia de la sucesión exacta larga en homotopía inducida por la fibración

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow U(\mathcal{H}) \longrightarrow PU(\mathcal{H}) \longrightarrow 1\,.$$

De modo que el Teorema 2.4.1 es equivalente a demostrar que

$$\iota : Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H})) \longrightarrow [X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G$$

es un isomorfismo. Para la demostración de este teorema seguimos las técnicas usadas por Atiyah y Segal en [7], y esta se divide en dos partes.

Se tiene en primer lugar, en el Lema 2.4.2, que la aplicación ι definida a continuación es inyectiva. Dado $P \in Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H}))$ se define $\iota(P)$ como la aplicación inducida $\iota(P) : X \longrightarrow \mathrm{Map}(EG, BPU(\mathcal{H}))$ por la función clasificante $X \times EG \longrightarrow BPU(\mathcal{H})$ del haz proyectivo G-equivariante $P \times EG \longrightarrow X \times EG$.

Lema 2.4.2 (Atiyah-Segal, [7])**.** *La aplicación*

$$\iota : Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H})) \longrightarrow [X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G,$$

es inyectiva.

Para demostrar la sobreyectividad, se construirá un G-espacio $\mathfrak{B}$ el cual es G-homotópicamente equivalente al G-espacio $\mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))$, Lema 2.4.3; de tal manera que el isomorfismo inducido $[X; \mathfrak{B}]_G \longrightarrow [X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G$ se factoriza a través de ι, es decir, hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[X;\mathfrak{B}]_G} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & {[X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G} \\
& Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H})) \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

probando así el teorema.

Veremos a continuación la construcción del G-espacio $\mathfrak{B}$, que necesitaremos para concluir la demostración del Teorema 2.4.1.

Para cada subgrupo $H \subset G$, consideremos el espacio

$$B_H = \coprod_{\widetilde{H} \in Ext(H,S^1)} B\left(PU(\mathcal{H}_{\widetilde{H}})^H\right)$$

donde a cada extensión S^1-central $\widetilde{H}$ de H le asociamos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\widetilde{H}}$ con la representación proyectiva estable inducida por la extensión.

Luego, sea B el funtor contravariante de la categoría de G-órbitas (cf. Apéndice A) a espacios, definido por $B(G/H) = B_H$ y consideremos la categoría topológica $\mathcal{O}_B$ cuyos objetos son ternas (S, s, y), con S una órbita, $s \in S$ y $y \in B(S)$, tal que un morfismo $(S_0, s_0, y_0) \longrightarrow (S_1, s_1, y_1)$ es una función $\theta : S_0 \longrightarrow S_1$ en $\mathcal{O}$, con $\theta(s_0) = s_1$ y $\theta^*(y_1) = y_0$. Definimos

$$\mathfrak{B} := |\mathcal{O}_B|$$

la realización geométrica de la categoría $\mathcal{O}_B$ en el sentido de [37].

Es claro que el grupo G actúa sobre la categoría $\mathcal{O}_B$ por

$$g \cdot (S, s, y) = (S, gs, y),$$

de modo que el espacio $\mathfrak{B}$ hereda una G-acción.

Por otro lado, el G-espacio $\mathfrak{B}$ tiene un haz proyectivo G-equivariante tautológico $\mathfrak{E} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{B}$, dado por la realización geométrica $|\mathcal{O}_E|$ de la categoría $\mathcal{O}_E$ descrita anteriormente, asociada al funtor

$$E : G/H \longmapsto E_H = \coprod_{\widetilde{H} \in Ext(H,S^1)} E\left(PU(\mathcal{H}_{\widetilde{H}})^H\right).$$

Luego, si denotamos por $\widetilde{\mathfrak{F}} : \mathfrak{B} \times EG \longrightarrow BPU(\mathcal{H})$ la G-función que clasifica el haz proyectivo G-equivariante $\mathfrak{E} \times EG \longrightarrow \mathfrak{B} \times EG$, esto es,

$$\begin{tikzcd} PU(\mathcal{H}) \arrow[r] & \mathfrak{E} \times EG \arrow[d, "\pi \times id"'] & \\ & \mathfrak{B} \times EG \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{F}}"] & BPU(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

entonces tenemos una G-función inducida

$$\mathfrak{F} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H})).$$

El teorema se sigue del siguiente resultado.

Lema 2.4.3. *La aplicación $\mathfrak{F} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))$ es una G-equivalencia homotópica.*

Demostración. Por el resultado de James y Segal (cf. [21]), es suficiente probar el resultado para todo subgrupo cerrado $H \subset G$, esto es,

$$\pi_i(B_H) \cong \pi_i(\mathrm{Map}(BH; BPU(\mathcal{H}))) \cong H^{3-i}(BH; \mathbb{Z}).$$

□

Lema 2.4.4. *Si P es un torcimiento G-equivariante sobre el G-complejo celular finito X, entonces*

$$\pi_0(\mathcal{G}_G(P)) \cong H^2_G(X; \mathbb{Z}).$$

Demostración. Mostraremos que existe un isomorfismo entre $\pi_0(\mathcal{G}_G(P))$ y $\pi_0(\mathcal{G}(P \times_G EG))$ usando inducción sobre las celdas del G-complejo celular X. Luego, si $Q \longrightarrow Y$ es un haz principal unitario, Atiyah y Segal muestran en [7] que $\pi_0(\mathcal{G}(Q)) \cong H^2(Y; \mathbb{Z})$, de modo que el lema se sigue aplicando este isomorfismo al haz $Q = P \times_G EG$ sobre $Y = X \times_G EG$, esto es,

$$\pi_0(\mathcal{G}_G(P)) \cong \pi_0(\mathcal{G}(P \times_G EG)) \cong H^2(X \times_G EG; \mathbb{Z}) = H^2_G(X; \mathbb{Z})$$

Sea X_k el k-ésimo esqueleto de X y supongamos que $X = X_n$ para algún n. Para $k = 0$ la afirmación del lema se cumple ya que

$$\pi_0(\mathcal{G}_G(P|_{G/H})) \cong \pi_0(PU(\mathcal{H})^H) \cong H^2_G(G/H; \mathbb{Z}),$$

para toda 0-celda. Más aún, si $D^k \times G/H$ es una k-celda equivariante, entonces

$$\pi_0(\mathcal{G}_G(P|_{D^k \times G/H})) \cong \pi_0(\mathcal{G}_G(P|_{G/H}))$$

y por otro lado,

$$H^2_G(D^k \times G/H; \mathbb{Z}) \cong H^2_G(G/H; \mathbb{Z}),$$

de modo que el lema permanece válido para toda k-celda del tipo $D^k \times G/H$.

Supongamos que el lema se cumple para X_{n-1} y consideremos el coproducto fibrado

$$\begin{tikzcd}
X_{n-1} \cup_\varphi (D^n \times G/H) & D^n \times G/H \arrow[l] \\
X_{n-1} \arrow[u, hook] & S^{n-1} \times G/H \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $X = X_{n-1} \cup_\phi (D^n \times G/H)$. De modo que tenemos de manera natural los diagramas inducidos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_G(P) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_G(P|_{D^n \times G/H}) \arrow[d] \\
\mathcal{G}_G(P|_{X_{n-1}}) \arrow[r] & \mathcal{G}_G(P|_{S^{n-1} \times G/H})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(P \times_G EG) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}(P|_{D^n \times G/H} \times_G EG) \arrow[d] \\
\mathcal{G}(P|_{X_{n-1}} \times_G EG) \arrow[r] & \mathcal{G}(P|_{S^{n-1} \times G/H} \times_G EG)
\end{tikzcd}$$

Luego, mediante la restricción de la aplicación obvia $\psi : \mathcal{G}_G(P) \longrightarrow \mathcal{G}(P \times_G EG)$ a cada uno de los subgrupos anteriores, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(P \times_G EG) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathcal{G}(P|_{D^n \times G/H} \times_G EG) \arrow[ddd] \\
& \mathcal{G}_G(P) \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_G(P|_{D^n \times G/H}) \arrow[ur, "\psi|_{D^n \times G/H}"] \arrow[d] & \\
& \mathcal{G}_G(P|_{X_{n-1}}) \arrow[r] \arrow[dl, "\psi|_{X_{n-1}}"'] & \mathcal{G}_G(P|_{S^{n-1} \times G/H}) \arrow[dr, "\psi|_{S^{n-1} \times G/H}"] & \\
\mathcal{G}(P|_{X_{n-1}} \times_G EG) \arrow[rrr] & & & \mathcal{G}(P|_{S^{n-1} \times G/H} \times_G EG)
\end{tikzcd}$$

Tomando los grupos de homotopía en el diagrama anterior y usando la hipótesis de inducción, obtenemos el isomorfismo que deseábamos establecer.

$\square$

Capítulo 3

K-teoría equivariante torcida

En el capítulo anterior construimos un espacio clasificante para los torcimientos equivariantes de la K-teoría equivariante y en este capítulo establecemos la construcción precisa de los grupos de K-teoría equivariante torcida en el sentido que comentamos en la introducción de este trabajo.

En la primera sección introducimos la definición de K-teoría equivariante torcida y establecemos algunas de sus propiedades cohomológicas. Posteriormente, en la segunda sección, usamos las propiedades cohomológicas para mostrar nuevos ejemplos del cálculo de ciertos grupos de K-teoría equivariante torcida, usando principalmente una sucesión de Mayer-Vietoris y trabajo previo de K-teoría torcida no equivariante (cf. [35]). Los ejemplos presentados conciernen a las esferas con la acción trivial de un grupo de Lie compacto y diversos torcimientos equivariantes, lo cual muestra un panorama diferente al caso no equivariante.

En la tercera sección introducimos la definición de un sistema de Cartan-Eilenberg, y mostramos algunos ejemplos para el caso de K-teoría ordinaria y cohomología. Concluimos el capítulo presentando en la cuarta sección una sucesión espectral para la K-teoría equivariante torcida, siguiendo el esquema de G. Segal en [37] y escribiendo el segundo término de esta sucesión espectral usando cohomología de Bredon equivariante.

3.1. Definición de K-teoría equivariante torcida

Damos a continuación la definición de K-teoría equivariante torcida, las definiciones de los grupos superiores y los grupos relativos. Establecemos además, las propiedades cohomológicas que le dan una estructura de teoría de cohomología generalizada.

Definición 3.1.1. *Sean G un grupo de Lie compacto y X un G-espacio celular finito. Si P es un torcimiento G-equivariante, definimos la K-teoría G-equivariante P-torcida de X como el grupo*

$$K_G(X; P) := [\Gamma(X; Fred(P))^G],$$

cuyos elementos corresponden a clases de homotopía de secciones G-equivariantes del haz vectorial G-equivariante de Fredholm asociado

$$Fred(P) := P \times_{PU(\mathcal{H})} Fred(\mathcal{H}).$$

Nota. Es importante señalar que P es un haz fibrado cuyo grupo estructural $PU(\mathcal{H})$ tiene la topología compacto-abierto y el modelo de $Fred(\mathcal{H})$ que estamos considerando aquí[1] consiste del conjunto de parejas de operadores de Fredholm (A, B) tales que $AB - 1$ y $BA - 1$ son compactos, con la topología sobre $Fred(\mathcal{H})$ inducida por el encaje

$$(A, B) \longmapsto (A, B, AB - 1, BA - 1)$$

en $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, con $\mathcal{B}$ el espacio de operadores acotados en $\mathcal{H}$ con la topología compacto-abierto y $\mathcal{K}$ el espacio de operadores compactos con la topología de la norma. El hecho de que $PU(\mathcal{H})$ actúa continuamente sobre $Fred(\mathcal{H})$, por conjugación, y que efectivamente $Fred(\mathcal{H})$ representa un espacio clasificante para la K-teoría es demostrado en la Proposición 3.1 de [7]. En la sección 3 de [7] se hace un análisis detallado de lo comentado anteriormente y se comenta sobre otra posible elección del modelo para representar la K-teoría torcida.

Observemos que la G-acción sobre $Fred(P)$ está dada mediante la G-acción en P y la correspondiente $\widetilde{G}$-acción en $Fred(\mathcal{H})$.

Veremos a continuación que la definición anterior de K-teoría equivariante torcida, se reduce al grupo de representaciones proyectivas cuando el espacio consiste de sólo un punto.

[1] En [7], Atiyah y Segal denotan este espacio por $Fred'(\mathcal{H})$.

3.1.1. El grupo de representaciones proyectivas

Sea G un grupo de Lie compacto actuando sobre el G-espacio trivial X dado por un punto, y $P \in Bun_G^{st}(*; PU(\mathcal{H}))$ un torcimiento G-equivariante, esto es, un haz proyectivo $P \cong PU(\mathcal{H})$ con una G-acción estable mediante $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$. Es fácil ver que dicho torcimiento es determinado unívocamente por el elemento en $H^3(BG;\mathbb{Z}) \cong [BG; K(\mathbb{Z};3)]$ dado por la clase de homotopía de la aplicación clasificante $Ba : BG \longrightarrow BPU(\mathcal{H}) \simeq K(\mathbb{Z};3)$ inducida por el homomorfismo $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$. Veamos explícitamente a que corresponde el grupo de K-teoría equivariante torcida $K_G(*; P)$.

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} ind : K_G(* : P) &\longrightarrow R(\widetilde{G}) \\ T &\longmapsto \text{Ker } T - \text{Coker } T \end{aligned}$$

donde $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un operador de Fredholm $\widetilde{G}$-equivariante, cuya $\widetilde{G}$-acción está dada por multiplicación compleja sobre el central S^1, de modo que los subespacios Ker T y Coker T son de manera natural $\widetilde{G}$-representaciones de dimensión finita, y su diferencia es un elemento del grupo $R(\widetilde{G})$. Sin embargo la aplicación *ind* no es sobreyectiva, ya que $ind(K_G(*; P))$ corresponde precisamente al subgrupo de las representaciones virtuales sobre las cuáles el central S^1 actúa por multiplicación compleja.

Por otro lado, si $\alpha : G \times G \longrightarrow S^1$ es el homomorfismo asociado a la extensión $\widetilde{G}$ y $\tau : \widetilde{G} \longrightarrow Aut(V)$ es una representación de $\widetilde{G}$, entonces la restricción $\rho = \tau|_G : G \longrightarrow Aut(V)$ corresponde a una representación proyectiva, o bien, una representación α-torcida ya que $\rho(g)\rho(h) = \alpha(g,h)\rho(gh)$ para cada $g, h \in G$. Si denotamos el grupo de todas las representaciones α-torcidas de G por $R_\alpha(G)$, entonces tenemos el siguiente isomorfismo

$$ind : K_G(* : P) \xrightarrow{\cong} R_\alpha(G) \subset R(\widetilde{G}) \ .$$

El elemento α define de manera natural una clase de cohomología en $H^2(G; S^1) \cong H^3(G;\mathbb{Z})$, la cual coincide precisamente con la clase definida por la aplicación $Ba : BG \longrightarrow BPU(\mathcal{H})$, mencionada al principio de esta subsección.

3.1.2. Grupos relativos y superiores de K-teoría equivariante torcida

Para definir los grupos relativos de K-teoría usaremos la construcción del espacio fibra homotópica (cf. [19]). Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es cualquier aplicación continua, su fibra homotópica es definida como

$$E_\varphi := \{(a, f) \in A \times B^{[0,1]} \mid f(0) = \varphi(a)\}.$$

Tal espacio tiene la propiedad de que la aplicación $E_\varphi \longrightarrow B$ definida por $ev_1 : (a, f) \longmapsto f(1)$ es una fibración (cf. [19], Prop. 4.64), cuya fibra es denotada por F_φ y es llamada la fibra homotópica de f, la cual explícitamente está dada por

$$(F_\varphi)_{b_0} = \{(a, f) \in A \times B^{[0,1]} \mid f(0) = \varphi(a), f(1) = b_0\}$$

para algún punto base $b_0 \in B$.

Definición 3.1.2. *Sea G un grupo de Lie compacto, (X, A) una G-pareja celular finita y P un torcimiento G-equivariante sobre X. Entonces, dada la aplicación de restricción*

$$\Gamma(X; Fred(P))^G \xrightarrow{res} \Gamma(A; Fred(P|_A))^G ,$$

y $F_{res}(X, A; P)$ la correspondiente fibra homotópica, definimos los grupos relativos de K-teoría equivariante torcida por

$$K_G(X, A; P) := \pi_0(F_{res}(X, A; P)).$$

Por otro lado, como el elemento

$$\begin{pmatrix} 0 & id \\ id & 0 \end{pmatrix} \in Fred(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \cong Fred(\mathcal{H})$$

es fijado bajo $PU(\mathcal{H})$, éste forma una sección del haz $Fred(P)$, la cual claramente es G-invariante. Por lo tanto, $\Gamma(X; Fred(P))^G$ tiene un punto base distinguido y podemos hablar sobre grupos superiores de homotopía.

Definición 3.1.3. *Sea G un grupo de Lie compacto, (X, A) una G-pareja celular finita y P un torcimiento G-equivariante sobre X. Definimos*

$$K_G^{-i}(X; P) := \pi_i(\Gamma(X; Fred(P))^G).$$

Asimismo, definimos

$$K_G^{-i}(X, A; P) := \pi_i(F_{res}(X, A; P))$$

con $F_{res}(X, A; P)$ *la fibra homotópica de la restricción*

$$\Gamma(X; Fred(P))^G \xrightarrow{\ res\ } \Gamma(A; Fred(P|_A))^G \ .$$

3.1.3. Propiedades cohomológicas

Los grupos de K-teoría equivariante torcida definidos en la subsección anterior satisfacen ciertas propiedades, las cuales enlistamos enseguida, de tal manera que le dan una estructura de teoría de cohomología generalizada. La demostración de estas propiedades puede consultarse en el artículo [16], donde Freed, Hopkins y Teleman demuestran (Proposición 3.3) que la K-teoría equivariante torcida de un grupoide X satisface las propiedades de una teoría de cohomología generalizada, y las propiedades presentadas en esta sección corresponden al caso particular del grupoide acción $[X/G]$ con X un G-espacio CW finito.

Más precisamente, sea $\mathfrak{Twist}$ la categoría cuyos objetos consisten de parejas de G-complejos celulares (X, A) con un torcimiento G-equivariante $P \in Bun_G^{st}(X, PU(\mathcal{H}))$. En la categoría $\mathfrak{Twist}$, un morfismo $f : (X, A; P) \longrightarrow (Y, B; Q)$ consiste en una aplicación G-equivariante $f : P \longrightarrow Q$ de $PU(\mathcal{H})$-haces principales que induce una aplicación G-equivariante $\widetilde{f} : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, entre parejas de G-complejos celulares, de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\widetilde{f}"] & Y \end{tikzcd} \ .$$

La conmutatividad de este diagrama implica que el diagrama inducido

$$\begin{tikzcd} Fred(P) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Fred(Q) \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\widetilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

es también conmutativo. Por lo tanto, tenemos una aplicación G-equivariante entre los correspondientes espacios de secciones $\Gamma(X, A; Fred(P)) \longrightarrow \Gamma(Y, B; Fred(Q))$ que desciende a un homomorfismo al nivel de los grupos de homotopía (Definición 3.1.3) y por lo tanto, tenemos el homomorfismo

$$f^* : K_G^{-i}(X, A; P) \longrightarrow K_G^{-i}(Y, B; Q).$$

Entonces, la K-teoría equivariante torcida define un funtor $\mathfrak{Twist} \longrightarrow \mathbf{Ab}$. De hecho, define un funtor homotópico, donde una homotopía en $\mathfrak{Twist}$ es dada en la siguiente definición.

Definición 3.1.4. *Una homotopía entre dos aplicaciones*

$$f, g : (X, A; P) \longrightarrow (Y, B; Q)$$

es una aplicación

$$((X, A) \times [0, 1]; \pi^* P) \longrightarrow (Y, B; Q)$$

con $\pi : (X, A) \times [0, 1] \longrightarrow (X, A)$ *dada por la proyección, tal que la restricción a* $(X, A) \times \{0\}$ *es* f *y a* $(X, A) \times \{1\}$ *es* g.

La correspondencia

$$K_G^{-i} : (X, A; P) \longmapsto K_G^{-i}(X, A; P)$$

es un funtor homotópico contravariante de la categoría $\mathfrak{Twist}$ a la categoría de grupos abelianos. El funtor de K-teoría equivariante torcida satisface las siguientes propiedades cohomológicas.

Invarianza homotópica. Dadas dos aplicaciones homotópicas

$$f, g : (X, A; P) \longrightarrow (Y, B; Q),$$

entre parejas de G-complejos celulares, tenemos que las inducidas en los correspondientes espacios de secciones G-equivariantes

$$f^*, g^* : \Gamma(Y, B; Fred(Q))^G \longrightarrow \Gamma(X, A; Fred(P))^G$$

son también homotópicas, por lo tanto

$$f^* = g^* : K_G^{-i}(Y, B; Q) \longrightarrow K_G^{-i}(X, A; P).$$

Sucesión exacta larga. De la fibración establecida en la definición 3.1.2

$$F_{res}(X, A; P) \longrightarrow \Gamma(X; Fred(P))^G \xrightarrow{res} \Gamma(A; Fred(P|_A))^G ,$$

tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow K_G^{-i}(X, A; P) \longrightarrow K_G^{-i}(X; P) \longrightarrow K_G^{-i}(A; P) \longrightarrow K_G^{-i+1}(X, A; P) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K_G^{0}(X, A; P) \longrightarrow K_G^{0}(X; P) \longrightarrow K_G^{0}(A; P)$$

Aditividad. Si $(X, A; P) = \coprod_\lambda (X_\lambda, A_\lambda; P_\lambda)$, entonces

$$K_G^{-i}(X, A; P) \longrightarrow \prod_\lambda K_G^{-i}(X_\lambda, A_\lambda; P_\lambda)$$

es un isomorfismo.

Escisión. Si $Z \subset A$ es un G-subcomplejo celular contenido en el interior de A, entonces la aplicación

$$K_G^{-i}(X, A; P) \longrightarrow K_G^{-i}(X \setminus Z, A \setminus Z; P)$$

es un isomorfismo (cf. [16, Prop. 3.3-(ii)]).

Observación. 3.1.5. El axioma de la dimensión para una teoría de cohomología $\mathfrak{h}^*$ establece que $\mathfrak{h}^n(*) = 0$ para $n \neq 0$. Sin embargo, en el caso de los grupos de K-teoría equivariante torcida esto no se cumple, pues de hecho el Teorema de Periodicidad de Bott establece que

$$K_G^{-i}(X; P) \cong K_G^{-i-2}(X; P). \tag{3.1}$$

Este resultado se sigue por la existencia de una equivalencia homotópica entre $Fred(\mathcal{H})$ y $\Omega^2 Fred(\mathcal{H})$ la cual, al ser $U(\mathcal{H})$-equivariante (cf. [7, Sec. 4]), induce una equivalencia homotópica fibra a fibra entre $Fred(P) = P \times_{PU(\mathcal{H})} Fred(\mathcal{H})$ y $\Omega^2 Fred(P) := P \times_{PU(\mathcal{H})} \Omega^2 Fred(\mathcal{H})$ de la cual se sigue el isomorfismo (3.1).

Debido a esta propiedad de periodicidad, esta teoría no puede cumplir el axioma de la dimensión que caracteriza a una teoría de cohomología, sagún los axiomas de Eilenberg-Maclane, pero al cumplir el resto de los axiomas antes enlistados y usando Periodicidad de Bott para definir los K-grupos para todo entero mediante

$$K^i_G(X,A;P)=\begin{cases} K^0_G(X,A;P) & \text{si } i \text{ es par,}\\ K^{-1}_G(X,A;P) & \text{si } i \text{ es impar,}\end{cases}$$

se sigue que la K-teoría equivariante torcida es una teoría de cohomología generalizada sobre la categoría $\mathfrak{Twist}$.

3.2. Ejemplos

Es claro que si el torcimiento G-equivariante P está dado por el $PU(\mathcal{H})$-haz trivial, entonces el grupo de K-teoría equivariante torcida es isomorfo al grupo de K-teoría equivariante ordinaria $K_G(X;P)\cong K_G(X)$, si además, la G-acción es trivial entonces tenemos el conocido resultado (cf. [38]),

$$K_G(X;P)\cong K_G(X)\cong K(X)\otimes R(G).$$

Resultado que podemos interpretar, a riego de ser impreciso, como una "separación" de la parte la parte geométrica y la acción del grupo, lo cual se puede apreciar más claramente por el isomorfismo mostrado en (*ii*), página 17.

En el caso de torsión discreta (ver Sección 1.7) tenemos un resultado similar, donde la parte *torcida* queda totalmente soportada por el grupo de representaciones torcidas, esto se debe esencialmente a que el torcimiento es de caracter algebraico, es decir, depende sólo del grupo en cuestión siendo prácticamente irrelevante el espacio X, de modo que si al torcimiento G-equivariante P le corresponde el elemento $\alpha\in H^3_G(*,\mathbb{Z})\cong H^2(G,\mathbb{S}^1)$, entonces

$$K_G(X;P)\cong {}^{\alpha}K_G(X)\cong K(X)\otimes R_\alpha(G),$$

con la G-acción trivial sobre X.

En los ejemplos que mostramos a continuación hemos considerado torcimientos G-equivariantes que dependen tanto del grupo G como del espacio X, presentando resultados de naturaleza similar a los anteriores y en los cuales se aprecia de manera clara la forma en la que se "separa" la parte geométrica de la acción del grupo. De tal manera que incluso con la G-acción trivial, los grupos de

K-teoría equivariante torcida difieren de los casos antes mencionados, la razón subyace fuertemente en la naturaleza del torcimiento G-equivariante P.

Cuando la acción no es trivial, no es claro (al menos en el momento de escribir estas notas) cómo calcular los grupos de K-teoría equivariante torcida de manera directa. De modo que a fin de tener una herramienta que nos permita obtener información sobre tales grupos, en la Sección 3.4 se proporciona una sucesión espectral siguiendo las ideas de G. Segal (cf. [37, 38]).

3.2.1. La esfera de dimensión 1.

En esta subsección mostraremos algunos resultados sobre los grupos de K-teoría equivariante torcida de la esfera S^1 con la acción trivial de un grupo finito G. Lo primero que debemos observar es que la cohomología equivariante de S^1 presenta la siguiente descomposición

$$H^3_G(S^1;\mathbb{Z}) \cong H^1(S^1) \otimes H^2(BG) \bigoplus H^0(S^1) \otimes H^3(BG),$$

ya que por definición $H^3_G(S^1;\mathbb{Z}) \cong H^3(S^1 \times_G EG;\mathbb{Z}) \cong H^3(S^1 \times BG;\mathbb{Z})$ pues la G-acción sobre S^1 es trivial, y como $H^*(S^1;\mathbb{Z})$ es libre de torsión podemos aplicar la fórmula de Künneth (cf. [19, Teo. 3.16]). De modo que toda clase de cohomología $\alpha \in H^3_G(S^1;\mathbb{Z})$ presenta una descomposición en subclases de cohomología $\alpha = \gamma \oplus \beta$, con $\gamma \in H^1(S^1) \otimes H^2(BG)$ y $\beta \in H^0(S^1) \otimes H^3(BG)$.

Por otro lado, del isomorfismo

$$H^1(S^1,\mathbb{Z}) \otimes H^2(BG,\mathbb{Z}) \cong H^2(BG,\mathbb{Z}) \cong H^1(G,S^1) \cong Hom(G,S^1),$$

podemos ver a todo elemento $\gamma \in H^1(S^1,\mathbb{Z}) \otimes H^2(BG,\mathbb{Z})$ como un homomorfismo $\gamma : G \longrightarrow S^1$, y definimos la siguiente representación lineal 1-dimensional asociada,

$$\begin{aligned} \rho_\gamma : G &\longrightarrow Aut(\mathbb{C}) \\ g &\longmapsto \rho_\gamma(g) := \gamma(g). \end{aligned}$$

Proposición 3.2.1. *Sea G un grupo finito actuando trivialmente sobre la esfera S^1 y $\gamma \oplus \beta$ la clase de cohomología asociada al torcimiento G-equivariante $P \in Bun^{st}_G(S^1; PU(\mathcal{H}))$. Entonces*

$$K^0_G(S^1;P) \cong \begin{cases} R_\beta(G) & si\ \gamma = 0 \\ 0 & si\ \gamma \neq 0. \end{cases}$$

y

$$K_G^1(S^1;P) \cong R_\beta(G)/(1-\rho_\gamma),$$

donde ρ_γ es la representación lineal asociada a γ y el cociente es tomado mediante la acción de los escalares sobre el $R(G)$-módulo $R_\beta(G)$.

Demostración. La sucesión de Mayer-Vietoris para $K_G^*(S^1;P)$ está dada por

$$\begin{array}{ccccc} K_G^0(S^1;P) & \longrightarrow & K_G^0(U;P|_U)\oplus K_G^0(V;P|_V) & \longrightarrow & K_G^0(S^0;P_{U\cap V}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_G^1(S^0;P|_{U\cap V}) & \longleftarrow & K_G^1(U:P|_U)\oplus K_G^1(V;P|_V) & \longleftarrow & K_G^1(S^1;P) \end{array}$$

con U y V dos abiertos G-equivariantemente contráctiles. Por el análisis hecho en la sección 3.1.1, la sucesión anterior se reduce a

$$\begin{array}{ccccc} K_G^0(S^1;P) & \longrightarrow & R_{\alpha|_U}(G)\oplus R_{\alpha|_V}(G) & \longrightarrow & R_{\alpha|_{U\cap V}}(G)\oplus R_{\alpha|_{U\cap V}}(G) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & K_G^1(S^1;P) \end{array}$$

donde $\alpha = \gamma \oplus \beta$.

La aplicación $R_{\alpha|_U}(G) \longrightarrow R_{\alpha|_{U\cap V}}(G)\oplus R_{\alpha|_{U\cap V}}(G)$ corresponde a la aplicación inducida por el isomorfismo de la subsección 3.1.1 y la restricción inducida en los K-grupos $K_G^0(U;P|_U) \longrightarrow K_G^0(S^0;P_{U\cap V})$ mediante la inclusión $i: U\cap V \longrightarrow U$

Para la correspondiente trivialización de $j: U\cap V \longrightarrow V$, es necesario interpretar el efecto del cociclo γ sobre los K-grupos centrales. De modo que si ρ_γ es la representación lineal 1-dimensional asociada a γ, entonces $j^*: R_\beta(G) \longrightarrow R_\beta(G)\oplus R_\beta(G)$ está dado por

$$j^*: b \longmapsto (b, \rho_\gamma \cdot b)$$

y se sigue que para $\alpha = \gamma\oplus\beta$,

$$\begin{array}{ccc} R_\beta(G)\oplus R_\beta(G) & \xrightarrow{\psi} & R_\beta(G)\oplus R_\beta(G) \\ (a,b) & \longrightarrow & (a-b, a-\rho_\gamma\cdot b). \end{array}$$

Después de un apropiado cambio de base obtenemos que,

$$K_G^0(S^1;P) = \text{Coker }\psi \cong \begin{cases} R_\beta(G) & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma \neq 0. \end{cases}$$

y

$$K^1_G(S^1;P) = \mathrm{Ker}\ \psi \cong R_\beta(G)/(1-\rho_\gamma),$$

donde el cociente es tomado mediante la acción de los escalares sobre el $R(G)$-módulo $R_\beta(G)$. $\square$

Si G es cíclico de orden finito p, entonces $H^3(BG) = 0$ y $H^3_G(S^1) \cong H^1(S^1) \otimes H^2(BG)$, de modo que $\alpha = \gamma \oplus 0$. En este caso,

$$\psi(a,b) = (a-b, a - x^n \cdot b)$$

donde x^n es el elemento correspondiente a la representación ρ_γ mediante el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}[x]/(1-x^p) \\ \rho_\gamma & \longrightarrow & x^n \end{array}$$

Por lo tanto $K^0_G(S^1;P) \cong 0$, y

$$K^1_G(S^1;P) \cong \mathbb{Z}[x]/(1-x^p, 1-x^n) \cong \mathbb{Z}[x]/(1-x^d),$$

con $d = (n,p)$.

3.2.2. La esfera de dimensión 2.

En el caso de la esfera de dimensión 2 con la acción trivial de un grupo finito G, la fórmula de Künneth para su tercer grupo de cohomología de Borel equivariante está dada por

$$H^3_G(S^2;\mathbb{Z}) \cong H^3(BG;\mathbb{Z}),$$

ya que $H^2(S^2) \otimes H^1(BG) = 0$ por ser G finito. En consecuencia, sus grupos de K-teoría equivariante torcida corresponden todos a grupos de K-teoría con torsión discreta (cf. [1]) y por ser la G-acción trivial, tenemos que

$$K^*_G(S^2;P) \cong K^*(S^2) \otimes R_\beta(G),$$

donde β corresponde a la clase de cohomología del haz P en $H^3(BG;\mathbb{Z})$.

3.2.3. La esfera de dimensión 3.

Nuevamente consideramos la acción trivial de un grupo finito G, ahora sobre la esfera S^3. En este caso, vemos que su tercer grupo de cohomología G-equivariante presenta la siguiente descomposición,

$$H^3_G(S^3;\mathbb{Z}) \cong H^3(S^3;\mathbb{Z}) \bigoplus H^3(BG;\mathbb{Z}),$$

de modo que toda clase de cohomología $\alpha \in H^3_G(S^3;\mathbb{Z})$ admite una descomposición del tipo $n\gamma \oplus \beta$, donde $\gamma \in H^3(S^3;\mathbb{Z})$ es el generador y $\beta \in H^3(BG;\mathbb{Z})$.

Por otro lado, podemos tomar una G-cubierta dada por abiertos contráctiles U y V que satisfacen las condiciones de Mayer-Vietoris, y tenemos la siguiente sucesión para $K^*_G(S^3;P)$, con P un torcimiento G-equivariante de S^3.

$$\begin{tikzcd}
K^0_G(S^3;P) \arrow[r] & K^0_G(U;P) \oplus K^0_G(V;P) \arrow[r] & K^0_G(S^2;P) \arrow[d] \\
K^1_G(S^2;P) \arrow[u] & K^1_G(U;P) \oplus K^1_G(V;P) \arrow[l] & K^1_G(S^3;P) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

el cual se reduce a

$$\begin{tikzcd}
K^0_G(S^3;P) \arrow[r] & R_{\alpha|_U}(G) \oplus R_{\alpha|_V}(G) \arrow[r] & R_{\alpha|_{U\cap V}}(G) \oplus R_{\alpha|_{U\cap V}}(G) \arrow[d] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[l] & K^1_G(S^3;P) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

donde α es la clase de cohomología asociada a P.

Lema 3.2.2. *Si S^3 tiene la $\mathbb{Z}_p$-acción trivial con un torcimiento equivariante P, entonces*

$$K^*_{\mathbb{Z}_n}(S^3;P) \cong {}^{\alpha}K^*(S^3) \otimes \mathbb{Z}[x]/(1-x^p),$$

donde α es la clase en cohomología dada por la imagen de la clase de P, mediante la proyección $H^3_G(S^3;\mathbb{Z}) \cong H^3(S^3;\mathbb{Z}) \oplus H^3(BG;\mathbb{Z}) \to H^3(S^3;\mathbb{Z})$.

Demostración. Como $G := \mathbb{Z}_p$ es cíclico, entonces $H^3(BG,\mathbb{Z}) \cong 0$ y

$$H^3_G(S^3,\mathbb{Z}) \cong H^3(S^3;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

además
$$H^3_G(U,\mathbb{Z}) \cong H^3_G(V,\mathbb{Z}) \cong H^3_G(U\cap V,\mathbb{Z}) \cong 0,$$

de modo que las restricciones del haz $P|_V$, $P|_V$ y $P|_{U\cap V}$ son triviales. Por lo tanto, la sucesión de Mayer-Vietoris se reduce a

$$0 \longrightarrow K^0_G(S^3;P) \longrightarrow R(G)\oplus R(G) \xrightarrow{\psi} R(G)\oplus R(G) \longrightarrow K^1_G(S^3;P) \longrightarrow 0$$

De modo que $K^0_G(S^3;P) \cong \mathrm{Ker}\ \psi$ y $K^1_G(S^3;P) \cong \mathrm{Coker}\ \psi$. Veamos ahora a quienes corresponden explícitamente estos grupos de K-teoría.

Por ser G cíclico, se tiene que
$$R(G) \cong \mathbb{Z}[x]/1-x^p. \tag{3.2}$$

En consecuencia, si la clase de cohomología asociada a P está dada por $n\gamma$, con γ el generador de $H^3(S^3;\mathbb{Z})$, entonces
$$\begin{array}{rccc}\psi: & R(G)\oplus R(G) & \longrightarrow & R(G)\oplus R(G)\\ & (a,b) & \longrightarrow & (a-b,a-nb)\end{array}$$

Por lo tanto,
$$\begin{aligned}K^0_G(S^3;P) &\cong 0\\ K^1_G(S^3;P) &\cong \mathbb{Z}_n[x]/(1-x^p).\end{aligned}$$

El resultado del lema se sigue del hecho de que ${}^{n\gamma}K^1(S^3)\cong\mathbb{Z}_n$, ${}^{n\gamma}K^0(S^3)\cong 0$ y de (3.2). $\square$

Podemos generalizar el caso anterior, de la siguiente manera.

Proposición 3.2.3. *Si P es un torcimiento equivariante del G-espacio trivial S^3, cuya clase de cohomología está dada por $\eta\oplus 0 \in H^3(S^3;\mathbb{Z})\bigoplus H^3(BG;\mathbb{Z})$, entonces*
$$K^*_G(S^3;P) \cong {}^{\eta}K^*(S^3)\otimes R(G).$$

La demostración sigue prácticamente el mismo argumento que la demostración del Lema 3.2.2.

Finalizamos con el siguiente resultado para torcimientos equivariantes más generales.

Proposición 3.2.4. *Si S^3 tiene la acción trivial de un grupo finito G y P es un torcimiento G-equivariante cuya clase de cohomología es $\alpha = n\gamma \oplus \beta$, entonces*

$$K_G^*(S^3; P) \cong {}^{n\gamma}K^*(S^3) \otimes R_\beta(G),$$

donde γ es el generador de $H^3(S^3; \mathbb{Z})$ y $\beta \in H^3(BG; \mathbb{Z})$.

Demostración. Para una cubierta contráctil dada por U y V, la sucesión de Mayer-Vietoris tiene la siguiente forma,

$$0 \longrightarrow K_G^0(S^3; P) \longrightarrow K_G^0(U; P) \oplus K_G^0(V; P) \xrightarrow{\psi} K_G^0(U \cap V; P) \longrightarrow K_G^1(S^3; P) \longrightarrow 0$$

de modo que $K_G^0(S^3; P) \cong \text{Ker } \psi$ y $K_G^1(S^3; P) \cong \text{Coker } \psi$, donde

$$\psi := i^* \ominus j^* : (a, b) \longmapsto i^*(a) - j^*(b),$$

con $i : U \cap V \to U$ y $j : U \cap V \to V$ las inclusiones canónicas.

Para calcular explícitamente las aplicaciones i^* y j^*, es necesario conocer cómo se trivializa la clase $n\gamma \oplus \beta$ a cada uno de los abiertos U y V de esta cubierta de S^3, así como la restricción a $U \cap V$.

Sean E_U y E_V, G-haces β-torcidos sobre U y V respectivamente. Estos haces son triviales por la contractibilidad de U y V, de modo que corresponden a representaciones proyectivas (β-torcidas) de G ya que la G-acción sobre S^3 es trivial. Entonces

$$E_U \cong U \times \mathbb{C}_\beta^r \quad \text{y} \quad E_V \cong V \times \mathbb{C}_\beta^s$$

donde $\mathbb{C}_\beta^r$ denota una representación β-torcida de G; por lo tanto, si escogemos la trivialización

$$i^* : U \times \mathbb{C}_\beta^r \longmapsto U \cap V \times \mathbb{C}_\beta^r$$

tendremos que

$$j^* : V \times \mathbb{C}_\beta^s \longmapsto (U \cap V \times \mathbb{C}_\beta^s) \otimes L^n$$

donde L es corresponde a la representación lineal trivial de G. Se sigue que

$$\psi : (a, b) \longmapsto (a - b, a - nb).$$

Por otro lado, consideremos la siguiente sucesión exacta dada por Mayer-Vietoris para ${}^{n\gamma}K^*(S^3)$

$$0 \longrightarrow {}^{n\gamma}K^0(S^3) \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow {}^{n\gamma}K^1(S^3) \longrightarrow 0$$

donde $\phi : (k,l) \longmapsto (k-l, k-nl)$. De modo que tomando el producto tensorial con $R_\beta(G)$ en cada término de la sucesión anterior, obtenemos

$$0 \longrightarrow {}^{n\gamma}K^0(S^3)\otimes R_\beta(G) \longrightarrow R_\beta(G)\oplus R_\beta(G) \xrightarrow{\varphi} R_\beta(G)\oplus R_\beta(G) \longrightarrow {}^{n\gamma}K^1(S^3)\otimes R_\beta(G) \longrightarrow 0$$

la cual sigue siendo exacta y además $\varphi = \psi$. Se sigue que,

$$K_G^*(S^3;P) \cong {}^{n\gamma}K^*(S^3)\otimes R_\beta(G).$$

□

3.2.4. Esferas de dimensión mayor a 3.

En este caso, tenemos una situación similar al caso de la esfera de dimensión 2. Observemos que la fórmula de Künneth para el tercer grupo de cohomología de Borel equivariante de una esfera de dimensión $n > 3$ con la G-acción trivial está dada por

$$H_G^3(S^n;\mathbb{Z}) \cong H^3(BG;\mathbb{Z}),$$

al igual que en el caso de S^2, ya que $H^2(S^n)\otimes H^1(BG) = 0$ para $n > 3$. En consecuencia, sus grupos de K-teoría equivariante torcida corresponden todos a grupos de K-teoría con torsión discreta y por ser la G-acción trivial, tenemos que

$$K_G^*(S^n;P) \cong K^*(S^n)\otimes R_\beta(G),$$

donde β corresponde a la clase de cohomología del haz P en $H^3(BG;\mathbb{Z})$.

3.3. Sistemas de Cartan-Eilenberg

Sea $\mathscr{H} = \{H(p,q)\}$ una familia de módulos, uno por cada pareja de enteros (p,q) tales que $\infty \leq p \leq q \leq \infty$. La familia $\mathscr{H}$ es llamada un sistema de Cartan-Eilenberg si satisface los siguientes axiomas:

CE-1. Existen homomorfismos

$$\eta : H(p', q') \to H(p, q)$$

si $p \leq p'$ y $q \leq q'$.

CE-2. Para una terna de enteros $-\infty \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ existe un homomorfismo de conexión.

CE-3. La aplicación $H(p, q) \to H(p, q)$ está dada por la identidad.

CE-4. Si $p \leq p' \leq p''$ y $q \leq q' \leq q''$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H(p'', q'') \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(p, q) \\ & H(p', q') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

CE-5. Para $p \leq p'$, $q \leq q'$ y $r \leq r'$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H(p', q') \arrow[r] \arrow[d] & H(q', r') \arrow[d] \\ H(p, q) \arrow[r] & H(q, r) \end{tikzcd}$$

CE-6. Para $-\infty \leq p \leq q \leq r \leq \infty$, la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H(q, r) \longrightarrow H(p, r) \longrightarrow H(p, q) \xrightarrow{\delta} H(q, r) \longrightarrow \cdots$$

CE-7. Para cada q fijo,

$$H(q, q) \longrightarrow H(q-1, q) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H(p, q) \longrightarrow H(p-1, q) \longrightarrow \cdots$$

tiene como límite directo a $H(-\infty, q)$.

Denotamos por $H(p)$ a $H(p, \infty)$ y por H a $H(-\infty, \infty)$. Definimos

$$\begin{aligned} Z_r^p &= \text{Im } (H(p, p+r) \to H(p, p+1)) \\ B_r^p &= \text{Im } (H(p-r+1, p) \to H(p, p+1)) \\ E_r^p &= Z_r^p / B_r^p \end{aligned}$$

Lo anterior define una sucesión espectral que cuando converge, lo hace a H.

Ejemplo 3.3.1 (Módulos diferenciales filtrados)**.** Todo módulo graduado A con diferencial d y filtración F^pA, define un sistema de Cartan-Eilenberg mediante $H(p,q) = H(F^pA/F^qA)$.

Ejemplo 3.3.2. Sea X un espacio topológico y $\{X^p\}$ una familia de subespacios definida para todo entero p, tal que $X^p \subset X^{p+1}$, $X^{-\infty} = \varnothing$ y $X^{\infty} = X$. Definimos

$$H(p,q) = \sum\nolimits_n H^n(X^q, X^p),$$

donde $H^n(X^q, X^p)$ corresponden a los grupos de cohomología de la pareja (X^q, X^p) respecto a alguna teoría de cohomología fija. En este caso, la familia $\mathscr{H} = \{H(p,q)\}$ no siempre define un sistema da Cartan-Eilenberg, siendo el axioma (**CE-7**) el que no necesariamente se satisface. Sin embargo, en el caso de cohomología celular H^* y complejos CW con filtración por esqueletos, dicha familia $\mathscr{H}$ define efectivamente un sistema de Cartan-Eilenberg.

Ejemplo 3.3.3 (Atiyah-Hirzebruch)**.** Si X es un complejo celular finito con una filtración mediante esqueletos $\{X^p\}$, y $K^n(X^q, X^p)$ denota el n-ésimo grupo de K-teoría compleja de la pareja (X^q, X^p), definimos

$$H(p,q) = K^*(X^{q-1}, X^{p-1}).$$

Resulta que la familia $\mathscr{H} = \{H(p,q)\}$ define un sistema de Cartan-Eilenberg, pues en este caso los axiomas (CE-1)-(CE-7) corresponden a las propiedades cohomológicas de la K-teoría compleja. De modo que podemos formar la sucesión espectral E_r^p, llamada la *sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch* (cf. [5]). El término E_1^p está dado por

$$E_1^p \cong C^p(X, \mathbb{Z})$$

ya que

$$\begin{aligned}
Z_1^p &= \text{Im } (H(p,p+1) \to H(p,p+1)) = H(p,p+1) \\
B_1^p &= \text{Im } (H(p,p) \to H(p,p+1)) = \text{Im } (0 \to H(p,p+1)) = 0 \\
E_1^p &= Z_1^p/B_1^p \cong H(p,p+1) = K^*(X^p, X^{p-1})
\end{aligned}$$

Observación. 3.3.4. En general, la convergencia de una sucesión espectral inducida por un sistema de Cartan-Eilenberg, así como el tipo de convergencia, dependen de varios factores relativos a la familia de módulos $\mathscr{H} = \{H(p,q)\}$ (cf. [11, Cap. XV, Sección 7] y [30, p. 59]). Incluso, si los módulos de la familia $\mathscr{H}$ están inducidos por los grupos de cohomología de una teoría de cohomología fija, esta sucesión podría no converger, como se comenta en el Ejemplo 3.3.2. Sin embargo, como en este trabajo estamos considerando G-complejos celulares finitos, podemos garantizar la convergencia de la sucesión espectral asociada al sistema de Cartan-Eilenberg formado los grupos de K-teoría equivariante torcida, la cual es estudiada en la siguiente sección.

3.4. Sucesión espectral a la Segal

El objetivo de esta sección es establcer una sucesión espectral cuyo término E_2 sea "sencillo" de calcular y que converja a $K_G^*(X;P)$. Podríamos proceder de la misma manera que en la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch para la K-teoría ordinaria, esto es, para el G-complejo celular finito X definimos la familia de módulos

$$H(p,q) := K_G^q(X^p, X^{p-1}; P),$$

asociada a la filtración por esqueletos de X, la cual tiene una estructura de sistema de Cartan-Eilenberg (cf. [11, Cap. XV]), ya que los axiomas (CE-1)-(CE-7) corresponden justo a las propiedades cohomológicas del funtor de K-teoría equivariante torcida. Luego, como X es un G-complejo celular finito, la sucesión espectral asociada a tal sistema converge, y lo hace a $K_G^{p+q}(X;P)$. Sin embargo en este caso el término inicial de la sucesión espectral, $E_1^{p,q} = K_G^q(X^p, X^{p-1}; P)$, no aporta ninguna ventaja computacional sobre el problema original, de modo que no es la forma más conveniente de proceder.

Por lo anterior, seguiremos el enfoque de Segal en [38], que consiste esencialmente en construir un espacio $W_{\mathscr{U}}$, asociado al espacio X y a la G-cubierta finita por subconjuntos cerrados

$$\mathscr{U} = \{U_i\}_{i=0}^{\mathbf{N}} \tag{3.3}$$

sobre X, de tal manera que $K_G^*(W_{\mathscr{U}};P) \cong K_G^*(X;P)$ y que además su correspondiente sistema de Cartan-Eilenberg $H(p,q) := K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}; P)$ asociado a cierta filtración presenta propiedades que permiten calcular las primeras dos diferenciales de la sucesión espectral de manera explícita.

Teorema 3.4.1. *Sea G un grupo finito, X un G-complejo celular finito y $P \in Bun_G^{st}(X; PU(\mathcal{H}))$ un torcimiento equivariante. Dada una G-cubierta finita $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i=0}^{\mathbf{N}}$ de subconjuntos cerrados de X, existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ tal que*

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathscr{U}, \check{\mathcal{K}}^q)$$

y convergente a $K_G^{p+q}(X; P)$, donde $\check{\mathcal{K}}^q$ es la pregavilla $U \mapsto K_G^q(U; P)$.

A fin de proporcionar la demostración de este resultado, daremos la definición del G-espacio $W_{\mathscr{U}}$ asociado a la G-cubierta finita cerrada $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i=0}^{\mathbf{N}}$ de X.

Sea $N_{\mathscr{U}}$ el nervio de la cubierta $\mathscr{U}$, esto es, un complejo simplicial finito cuyos simplejos son los subconjuntos de la forma $\{0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_n \leq \mathbf{N}\}$ tales que

$$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n} \neq \varnothing,$$

y $|N_{\mathscr{U}}|$ su realización geométrica. Si $\mathbf{J} = \{0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_n \leq \mathbf{N}\}$, escribiremos $\mathbf{J}_{(n)}$ para indicar que el subconjunto $\mathbf{J}$ tiene n elementos. Asimismo, usaremos la notación

$$U_{\mathbf{J}_{(k)}} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n}.$$

Definimos $W_{\mathscr{U}}$ como el subespacio cerrado

$$\bigcup_{0 \leq i \leq N} U_{\mathbf{J}_{(i)}} \times |\mathbf{J}_{(i)}| \tag{3.4}$$

del producto $X \times |N_{\mathscr{U}}|$ y $w : W_{\mathscr{U}} \longrightarrow X$ la proyección en el primer factor. El siguiente resultado es importante para la demostración del Teorema 3.4.1.

Lema 3.4.2. $K_G^*(W_{\mathscr{U}}; P) \cong K_G^*(X; P)$.

La demostración de este lema sigue los argumentos usados por G. Segal en [38, Sec. 5] y [37].

Demostración. Sea X_p el conjunto de puntos $x \in X$ que se encuentran contenidos en al menos $p+1$ *elementos distintos* de $\mathscr{U}$, esto es, $x \in U_{\mathbf{J}_{(p)}}$ para algún $\mathbf{J}_{(p)}$. Como la cubierta es finita, con $\mathbf{N}$ elementos, se tiene que $X_p = \varnothing$ para $p \geq \mathbf{N}$, esto es,

$$X_{\mathbf{N}} = X_{\mathbf{N}+1} = X_{\mathbf{N}+2} = \cdots = \varnothing.$$

De tal manera que tenemos una filtración de X por subespacios,

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_{\mathbf{N}-1} \supset X_{\mathbf{N}} = \varnothing,$$

la cual, mediante $w : W_{\mathscr{U}} \longrightarrow X$ induce una filtración sobre $W_{\mathscr{U}}$, a saber, $W_p = w^{-1}(X_p)$. De modo que tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\coprod(U_{\mathbf{J}_{(p)}}, U_{\mathbf{J}_{(p)}} \cap X_{p+1}) \times |\mathbf{J}_{(p)}| \arrow[r] \arrow[d] & (W_p, W_{p+1}) \arrow[d] \\
\coprod(U_{\mathbf{J}_{(p)}}, U_{\mathbf{J}_{(p)}} \cap X_{p+1}) \arrow[r] & (X_p, X_{p+1})
\end{tikzcd}$$

cuyas aplicaciones horizontales son dadas por homeomorfismos relativos G-equivariantes y la aplicación vertical de la izquierda del diagrama es una G-equivalencia homotópica. En consecuencia,

$$K_G^*(W_p, W_{p+1}; P) \cong K_G^*(X_p, X_{p+1}; P)$$

para todo p. Por otro lado, como los grupos

$$E_1^{p,q} = K_G^{p+q}(W_p, W_{p+1}; P)$$

son triviales para $p \geq \mathbf{N}$ y para $p < 0$, se sigue que el primer término de la sucesión espectral que éstos definen, está localizada en $\mathbf{N}$ columnas en el plano cartesiano (desde la columna $p = 0$ hasta $p = \mathbf{N} - 1$). Luego, las diferenciales

$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

son todas triviales para $r \geq \mathbf{N}$ y por lo tanto la sucesión espectral converge en el término $\mathbf{N}$ y se sigue el resultado que deseábamos mostrar. $\square$

Demostración del Teorema 3.4.1. Al espacio $W_{\mathscr{U}}$, definido en (3.4), podemos asociarle una filtración

$$W^0 \subset W^1 \subset \cdots \subset W_{\mathscr{U}}$$

dada por

$$W^p := \bigcup_{0 \leq i \leq p} U_{\mathbf{J}_{(i)}} \times |\mathbf{J}_{(i)}|,$$

esto es, la imagen inversa del p-esqueleto de $|N_{\mathscr{U}}|$. A esta filtración le corresponde un sistema de Cartan-Eilenberg y en consecuencia una sucesión espectral convergiendo a $K_G^*(W_{\mathscr{U}}; P)$ cuyo primer término está dado por $K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}; P)$. Luego, a fin de reformular éste primer término y poder expresarlo en forma más explícita aplicamos el funtor $K_G^*(-; P)$ a la sucesión

$$X \longleftarrow \coprod U_{\mathbf{J}_{(0)}} \leftleftarrows \coprod U_{\mathbf{J}_{(1)}} \Lleftarrow \coprod U_{\mathbf{J}_{(2)}} \cdots$$

donde las flechas son dadas por inclusión y obtenemos la sucesión

$$K_G^*(X; P) \longrightarrow \prod K_G^*(U_{\mathbf{J}_{(0)}}; P) \rightrightarrows \prod K_G^*(U_{\mathbf{J}_{(1)}}; P) \Rrightarrow \prod K_G^*(U_{\mathbf{J}_{(2)}}; P) \cdots$$

donde los morfismos satisfacen ciertas condiciones de pegado inducidas por las funciones de pegado del torcimiento G-equivariante P. Más específicamente, sobre cada doble intersección $U_i \cap U_j$ existe un isomorfismo

$$L_{ij} \otimes P|_{U_i} \longrightarrow P|_{U_j} \tag{3.5}$$

de tal manera que sobre cada triple intersección tenemos que se cumple la condición de cociclo dada por el isomorfismo

$$L_{jk} \otimes L_{ij} \longrightarrow L_{ik}.$$

Esto implica que los morfismos en la sucesión son dados por la composición de restricciones y automorfismos de la K-teoría equivariante torcida.

Definimos

$$E_1^{p,q} = K_G^q(A_p; P), \text{ donde } A_p := \coprod U_{\mathbf{J}_{(p)}}.$$

Luego, si Δ^p es el p-simplejo estándar y $\dot{\Delta}^p$ su $(p-1)$-esqueleto, de la terna $(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1})$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_G^{p+q-1}(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1}; P) \longrightarrow K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p; P) \longrightarrow 0,$$

esto es, un isomorfismo

$$K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p; P) \cong K_G^{p+q-1}(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1}; P),$$

y usando el principio de escisión en la pareja $(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1})$, tenemos

$$K_G^{p+q-1}(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1}; P) \cong K_G^{p+q-1}(A_p \times \Delta^{p-1}, A_p \times \dot{\Delta}^{p-1}; P)$$

en consecuencia

$$K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p; P) \cong K_G^{p+q-1}(A_p \times \Delta^{p-1}, A_p \times \dot{\Delta}^{p-1}; P)$$

e inductivamente, se sigue que

$$E_1^{p,q} \cong K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p; P).$$

Luego, de las propiedades cohomológicas de $K_G^*(-)$ y la equivalencia homotópica relativa $(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p) \longrightarrow (W^p, W^{p-1})$, se sigue que,

$$E_1^{p,q} \cong K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}; P).$$

Por lo tanto, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1^{p,q} \arrow[r, "d_1^{p,q}"] \arrow[d, "\cong"'] & E_1^{p+1,q} \arrow[d, "\cong"] \\ K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}; P) \arrow[r, "\delta_1^{p,q}"] & K_G^{p+q+1}(W^{p+1}, W^p; P) \end{tikzcd}$$

obtenemos que la sucesión espectral $E_r^{p,q}$ converge a $K_G^*(W_{\mathscr{U}}; P)$.

Finalmente, si $\check{\mathcal{K}}^q$ es la pregavilla $U \mapsto K_G^q(U; P)$, entonces por definición se sigue que

$$E_2^{p,q} \cong \check{H}^p(\mathscr{U}, \check{\mathcal{K}}^q).$$

□

Del teorema anterior se deduce que $d_2 = 0$ y entonces $E_2 = E_3$.

Por otro lado, si tomamos el límite directo de la familia de sucesiones espectrales correspondientes a cada cubierta cerrada e indexada por éstas, entonces del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.4.3. *Dado un grupo finito G, un G-complejo celular finito X y $P \in Bun_G^{st}(X; PU(\mathcal{H}))$, existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ tal que*

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{K}^q)$$

y convergente a $K_G^{p+q}(X; P)$, donde $\mathcal{K}^q$ es la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto K_G^q(U; P)$.

Proposición 3.4.4. *Sea G un grupo finito, X un G-complejo celular finito y $P \in Bun_G^{st}(X; PU(\mathcal{H}))$ un torcimiento equivariante. Entonces existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ tal que*

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathscr{U}, R_\alpha(-))$$

y convergente a $K_G^{p+q}(X; P)$, donde α es el elemento en $H_G^3(*; \mathbb{Z}) \cong H^2(G; \mathbb{S}^1)$ correspondiente a la imagen de P mediante el homomorfismo $H_G^3(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_G^3(*; \mathbb{Z})$.

Demostración. El resultado anterior se sigue por la forma en como se construye la sucesión espectral en el Teorema 3.4.1. En efecto, como G es finito y X es un G-CW-complejo finito se sigue que X es un G-ANR[2] (cf. [36, Sec. 3]) y por lo tanto, podemos tomar una cubierta cerrada equivariantemente contraible $\mathscr{U}$ y cuyas intersecciones arbitrarias no vacías sean también G-contráctiles, entonces para cada cerrado $U_i \in \mathscr{U}$ se tiene

$$\lambda_i : K_G(U_i; P) \xrightarrow{\cong} R_\alpha(G_i)$$

con G_i el subgrupo de isotropía de U_i; y en una doble intersección $U_i \cap U_j$,

$$\begin{tikzcd}
K_G(U_i; P) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_i"', "\cong"] & K_G(U_i \cap U_j; P) \arrow[d, "\lambda_{ij}"', "\cong"] & K_G(U_j; P) \arrow[l] \arrow[d, "\lambda_j"', "\cong"] \\
R_\alpha(G_i) \arrow[r] & R_\alpha(G_{ij}) & R_\alpha(G_j) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

de modo que si los morfismos en el renglon inferior son tomados de tal manera que hacen conmutar cada diagrama, entonces cada morfismo $\psi_i : R_\alpha(G_i) \longrightarrow R_\alpha(G_{ij})$ está dado explícitamente como

$$\psi_i = \rho_{ij} \cdot res$$

con $\rho_{ij} \in H_G^3(U_i \cap U_j; \mathbb{Z}) \cong H^2(G; \mathbb{S}^1)$, $res : R_\alpha(G_i) \longrightarrow R_\alpha(G_{ij})$ la restricción y los morfismos ρ_{ij} satisfaciendo la correspondiente condición de cociclo sobre las triples intersecciones. Sobre las intersecciones múltiples se cumplen las propiedades análogas.

De lo anterior, tenemos un morfismo de cadenas

$$\begin{tikzcd}
K_G^*(X; P) \arrow[r] & \prod K_G^*(U_{\mathbf{J}_{(0)}}; P) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod K_G^*(U_{\mathbf{J}_{(1)}}; P) \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod K_G^*(U_{\mathbf{J}_{(2)}}; P) \cdots \arrow[d] \\
& \prod R_\alpha(G_{\mathbf{J}_{(0)}}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod R_\alpha(G_{\mathbf{J}_{(1)}}) \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & \prod R_\alpha(G_{\mathbf{J}_{(2)}}) \cdots
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

[2] Del inglés "G-equivariant absolute neighborhood retract".

de tal manera que las correspondientes cohomologías de Čech son isomorfas y en consecuencia la sucesión espectral inducida por este complejo de cadenas converge a $K_G^{p+q}(X;P)$. ■

3.4.1. Cohomología de Bredon equivariante local

Concluiremos esta sección demostrando que el término $E_2^{p,q}$ corresponde a un grupo de cohomología de Bredon equivariante. Iniciaremos con la definición de la cohomología de una categoría y presentamos el grupo de cohomología de Bredon equivariante con un sistema de coeficientes locales, equivalente a la construcción dada en el Apéndice A (cf. [33, Teo. 4.1]). El siguiente material puede ser consultado en [32].

Sea $\mathscr{C}$ una categoría pequeña. Denotamos por $\underline{\mathbf{Ab}}(\mathscr{C})$ la categoría cuyos objetos son los funtores contravariantes de $\mathscr{C}$ a $\mathbf{Ab}$, y los morfismos consisten en las transformaciones naturales.

Sea $\underline{\mathbf{Ab}} = \underline{\mathbf{Ab}}(1)$, la categoría de grupos abelianos. Existe un funtor "secciones globales" (o bien, $\varprojlim$),

$$\Gamma = \Gamma_{\mathscr{C}} : \underline{\mathbf{Ab}}(\mathscr{C}) \longrightarrow \underline{\mathbf{Ab}}$$

dado por $\Gamma(M) = \varprojlim M = \{\alpha : \mathscr{C}_0 \longrightarrow M \mid M(u)(\alpha(C)) = \alpha(D),\ \text{para todo } u \in \mathscr{C}_1(D,C)\}$. La categoría $\underline{\mathbf{Ab}}(\mathscr{C})$ tiene suficientes inyectivos, de modo que podemos tomar los funtores derivados derechos de Γ. Estos son, por definición, los grupos de cohomología de la categoría $\mathscr{C}$:

$$H^n(\mathscr{C}, M) \stackrel{\mathbf{def}}{=} R^n\Gamma(M),\ n \geq 0.$$

Para una categoría pequeña $\mathscr{C}$, sea $N\mathscr{C}$ el nervio de $\mathscr{C}$, es decir, el conjunto simplicial con n-simplejos dados por las sucesiones de composición $u = (\ C_0 \xrightarrow{u_1} C_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_n} C_n\ )$ en $\mathscr{C}$. Si $M \in \underline{\mathbf{Ab}}(\mathscr{C})$, podemos formar un grupo abeliano cosimplicial $C^\bullet(\mathscr{C}, M)$ definido por

$$C^n(\mathscr{C}, M) = \prod_{u \in N_n(\mathscr{C})} M(u(0)),$$

donde $u(0) = C_0$ para $u = (\ C_0 \xrightarrow{u_1} C_1 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_n} C_n\ )$. Las diferenciales en el complejo de cocadenas asociado, también denotado por $C^\bullet(\mathscr{C}, M)$, son obtenidas por la suma alternada de las funciones cara de $N\mathscr{C}$. De hecho la cohomología de este complejo de cadenas es precisamente la cohomología de la categoría $\mathscr{C}$ con coeficientes en M, esto es,

$$H^*(\mathscr{C}, M) \cong H^*(C^\bullet(\mathscr{C}, M)).$$

Retomando el G-espacio X, podemos asociarle a éste una categoría $\Delta_G(X)$ cuyos objetos consisten en los n-simplejos equivariantes de X y un morfismo entre $\sigma : G/H \times \Delta^n \longrightarrow X$ y $\tau : G/K \times \Delta^m \longrightarrow X$ en $\Delta_G(X)$ consiste de una pareja (ϕ, α), con $\phi : G/H \longrightarrow G/K$ una G-aplicación y $\alpha : \{0, 1, \dots, n\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ una función que preserva el orden y tal que $\tau \circ (\phi \times \alpha) = \sigma$.

Sea $M \in \underline{\mathbf{Ab}}(\Delta_G(X))$ un funtor que se factoriza a través del funtor canónico $\Delta_G(X) \longrightarrow \mathcal{O}_G$. En [33, Teo. 4.1] se demuestra que existe un isomorfismo

$$H^*(\Delta_G(X), M) \cong H^*_G(X; M),$$

con $H^*_G(X; M)$ el grupo de cohomología de Bredon G-equivariante con coeficientes M.

Por otro lado, si M está dado por el funtor $\mathcal{R}_\alpha : \Delta_G(X) \longrightarrow \mathcal{O}_G \longrightarrow \underline{\mathbf{Ab}}$ tal que

$$\mathcal{R}_\alpha : (G/H \times \Delta^n \longrightarrow X) \longmapsto G/H \longmapsto R_\alpha(H),$$

donde α es el elemento en $H^3_G(*; \mathbb{Z}) \cong H^2(G; \mathbb{S}^1)$ correspondiente a la imagen de P mediante el homomorfismo $H^3_G(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^3_G(*; \mathbb{Z})$, entonces $C^\bullet(\Delta_G(X), \mathcal{R}_\alpha)$ está dado precisamente por el renglón inferior de (3.6). En consecuencia, el segundo término de la sucesión espectral para la K-teoría equivariante torcida puede escribirse como,

$$E_2^{p,q} \cong \begin{cases} H^p_G(X; \mathcal{R}_\alpha) & \text{para } q \text{ par} \\ 0 & \text{para } q \text{ impar,} \end{cases}$$

con $H^p_G(X, \mathcal{R}_\alpha(-))$ el p-ésimo grupo de cohomología de Bredon G-equivariante.

Apéndices

Apéndice A

Cohomología de Bredon

A continuación introduciremos la cohomología de Bredon, la cual viene a ser la teoría de cohomología equivariante mas adecuada para los resultados en este trabajo.

El contenido de este apéndice está totalmente basado en el contenido del texto de G. Bredon, *Equivariant Cohomology Theories* (cf. [10]).

Sistemas de coeficientes genéricos

Sea G un grupo y H un subgrupo. Definimos la *categoría de órbitas de* G, denotada por $\mathcal{O}_G$, como la categoría cuyos objetos consisten de las clases izquierdas G/H y morfismos dados por aplicaciones equivariantes $G/H \to G/K$.

No es difícil ver que toda función equivariante

$$f : G/H \to G/K$$

es de la forma

$$\begin{aligned} \widehat{a} : G/H &\longrightarrow G/K \\ gH &\longrightarrow gaK \end{aligned}$$

para algún $a \in G$ tal que $a^{-1}Ha \subset K$.

Definición A.0.5. *Un* ***sistema de coeficientes (genérico)*** *para G, es definido como un funtor contravariante*

$$\mathcal{O}_G \to \mathbf{Ab},$$

entre la categría de órbitas de G y la categoría de grupos abelianos.

Si $M, N : \mathcal{O}_G \to \mathbf{Ab}$ son sistemas de coeficientes, un *morfismo* $T : M \to N$ es una transformación natural de funtores. Con esta definición, los sistemas de coeficientes (genéricos) para G forman una categoría abeliana $\mathcal{C}_G = Funct(\mathcal{O}_G^{op}, \mathbf{Ab})$

Sistemas de coeficientes sobre un G-complejo

Si K un G-complejo, podemos formar la categoría $\mathcal{K}$ cuyos objetos son los subcomplejos finitos de K y cuyos morfismos están definidos de la siguiente manera, si L y L' son subcomplejos finitos de K, entonces $hom(L, L')$ consiste de todas las aplicaciones $g : L \to gL \subset L'$ para $g \in G$.

Es claro que los morfismos de $\mathcal{K}$ son justo las funciones inclusión $L \subset L'$, las funciones $a : L \to L'$ inducidas por operación por elementos en G, y las composiciones de éstas.

Para cualquier subconjunto $A \subset K$, denotaremos por $K(A)$ al mas pequeño subcomplejo de K que contiene a A. Para la mayoria de nuestros propósitos sólo los objetos $K(\sigma)$ de $\mathcal{K}$ para celdas σ de K son de importancia, pero para algunas construccuiones son necesarios los subcomplejos mas generales.

Existe un *funtor contravariante canónico*

$$\Theta : \mathcal{K} \to \mathcal{O}_G$$

definido de la siguiente manera: para $L \subset K$ un subcomplejo finito, sea

$$G_L = \{g \in G \mid g \text{ fija } L \text{ puntualmente}\}$$

y se define

$$\Theta(L) \overset{\mathbf{def}}{=} G/G_L.$$

Luego, si $gL \subset L'$ y f denota la aplicación $L \to L'$ inducida por operación por $g \in G$, entonces vemos que

$$g^{-1}\, G_{L'}\, g \subset G_L$$

y por lo tanto,

$$\Theta(f) \stackrel{\mathbf{def}}{=} \widehat{g} : \Theta(L') \to \Theta(L),$$

esto es, $\Theta(f)$ es la aplicación $\widehat{g} : G/G_{L'} \to G/G_L$ la cual envia $g'G_{L'}$ a $g'gG_L$.

En otras palabras, si $L \subset L'$ entonces $G_{L'} \subset G_L$ y

$$\Theta(L \hookrightarrow L') : G/G_{L'} \to G/G_L$$

es la aplicación natural mientras que, si $g : L \to gL$ entonces $G_{gL} = g\,G_L\,g^{-1}$ y

$$\Theta(g : L \to gL) : \Theta(gL) = G/g\,G_L\,g^{-1} \to G/G_L = \Theta(L)$$

es multiplicación derecha por g.

Por otro lado, si $M \in \mathcal{C}_G$ es un sistema de coeficientes genérico, esto es si $M : \mathcal{O}_G \to \mathbf{Ab}$ es un funtor contravariante, entonces

$$M\Theta : \mathcal{K} \to \mathbf{Ab}$$

es un funtor covariante, y es llamado un *sistema de coeficientes (simple) sobre* K. Lo anterior se generaliza de la siguiente manera.

Definición A.0.6. *Un **sistema de coeficientes locales** sobre K es un funtor covariante*

$$\mathcal{L} : \mathcal{K} \to \mathbf{Ab}$$

Los sistemas de coeficientes locales forman una categoría abeliana $\mathcal{LC}_K = Funct(\mathcal{K}, \mathbf{Ab})$, de la cual los sistemas de coeficientes genéricos forman una subcategoría $\mathcal{C}_K$.

Notación. Si $\mathcal{L} \in \mathcal{LC}_K$ y σ es una celda, denotamos $\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}(K(\sigma))$ y para $K(\sigma) \subset K(\tau)$ denotamos por $\mathcal{L}(\tau \to \sigma)$ la aplicación $\mathcal{L}(K(\tau) \hookrightarrow K(\sigma))$. Nótese que si $[\tau : \sigma] \neq 0$ entonces $K(\tau) \subset K(\sigma)$, de modo que $\tau \to \sigma$ "pertenece" a $\mathcal{K}$

Cohomología de Bredon

Sea $\mathcal{L} : \mathcal{K} \to \mathbf{Ab}$ un sistema de coeficientes locales. Orientamos las celdas de K de tal manera que G preserve las orientaciones y definimos

$$C^q(K; \mathcal{L})$$

como el grupo de todas las funciones f sobre q-celdas de K con

$$f(\sigma) \in \mathcal{L}(\sigma).$$

Definimos $\delta : C^q(K;\mathcal{L}) \to C^{q+1}(K;\mathcal{L})$ por

$$(\delta f)(\sigma) \stackrel{\mathbf{def}}{=} \sum_{\tau} [\tau : \sigma]\mathcal{L}(\tau \to \sigma) f(\tau) \tag{A.1}$$

(la cual está bien definida ya que $K(\sigma) \subset K(\tau)$ siempre que $[\tau : \sigma] \neq 0$). En otras palabras, $(\delta f)(\sigma)$ es definida "empujando"todos los coeficientes a $\mathcal{L}(\sigma)$ y entonces tomando la cofrontera usual. Se puede mostrar directamente que $\delta\delta f = 0$ para toda f.

Definiremos ahora una operación de G sobre $C^q(K;\mathcal{L})$ como sigue: Si $g \in G$ y $f \in C^q(K;\mathcal{L})$ definimos

$$g(f)(\sigma) = \mathcal{L}(g)(f(g^{-1}(\sigma))). \tag{A.2}$$

Aquí, $\mathcal{L}(g)$ significa $\mathcal{L}(g : K(g^{-1}\sigma) \to K(\sigma))$, la cual abreviaremos por

$$\mathcal{L}(g) = g_*$$

de modo que (A.2) puede escribirse como

$$g(f)(g\sigma) = g_*(f(\sigma)). \tag{A.3}$$

Es claro que los automorfismos $f \to g(f)$ de $C^*(K;\mathcal{L})$ definen una acción de G sobre $C^*(K;\mathcal{L})$ por funciones de cadenas. En consecuencia, el conjunto de puntos fijos

$$C^q(K;\mathcal{L})^G = \{f \in C^q \mid g(f) = f \text{ para todo } g \in G\}$$

es un subcomplejo, y lo denotaremos por $C^q_G(K;\mathcal{L})$. De (A.2) se sigue que $C^q_G(K;\mathcal{L})^G$ consiste precisamente de cocadenas equivariantes f, es decir, cocadenas tales que $f(g\sigma) = g_*(f(\sigma))$.

Definición A.0.7. *Definimos el q-ésimo grupo de cohomología de Bredon por*

$$H^q_G(K;\mathcal{L}) \stackrel{\textit{def}}{=} H^q(C^q(K;\mathcal{L})^G) \tag{A.4}$$

Si $M \in \mathcal{C}_G$, entonces $M\Theta \in \mathcal{C}_K \subset \mathcal{L}\mathcal{C}_K$ y en este caso usamos la abreviación

$$H^q_G(K;M) \stackrel{\textit{def}}{=} H^q_G(K;M\Theta). \tag{A.5}$$

Si L es un subcomplejo de K invariante bajo G, entonces existe una función restricción $C^*(K;\mathcal{L}) \to C^*(L;\mathcal{L})$ cuyo núcleo es el grupo de cocadenas relativo $C^*(K,L;\mathcal{L})$. Existe además un homomorfismo de descomposición $C^*(L;\mathcal{L}) \to C^*(K;\mathcal{L})$ definido por extensión de una cocadena por cero. Esto claramente conmuta con las operaciones por G, de modo que tenemos la sucesión exacta

$$0 \to C^*(K,L;\mathcal{L})^G \to C^*(K;\mathcal{L})^G \to C^*(L;\mathcal{L})^G \to 0.$$

Con las definiciones obvias tenemos una sucesión exacta inducida en cohomología

$$\cdots \to H^n_G(K,L;\mathcal{L}) \to H^n_G(K;\mathcal{L}) \to H^n_G(L;\mathcal{L}) \to H^{n+1}_G(K,L;\mathcal{L}) \to \cdots$$

Una reformulación de la cohomología de Bredon

Definimos

$$\underline{C}_n(K) \in \mathcal{C}_G$$

por $\underline{C}_n(K)(G/H) = C_n(K^H)$ junto con los valores obvios sobre morfismos de $\mathcal{O}_G$, y donde $C_*(-)$ denota el funtor complejo de cadenas celular. Estos objetos, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, forman un complejo de cadenas en la categoría abeliana $\mathcal{C}_G$. Podemos fomar la homología $\underline{H}_n(K) = H_n(\underline{C}_*(K)) \in \mathcal{C}_G$ de este complejo. Claramente, esto es justo $\underline{H}_n(K)(G/H) = H_n(K^H)$, de nuevo, junto con los valores obvios sobre morfismos. Similares consideraciones se aplican al caso relativo.

Proposición A.0.8. *Dado un G-complejo celular K y $M \in \mathcal{C}_G$ un sistema de coeficientes genéricos, existe un isomorfismo*

$$C^n_G(K;M) \cong Hom_{\mathcal{C}_G}(\underline{C}_n(K), M),$$

el cual preserva los operadors cofrontera. En particular,

$$H^n_G(K;M) \cong H^n(Hom_{\mathcal{C}_G}(\underline{C}_n(K), M)).$$

Demostración. El isomorfismo es dado por

$$\begin{array}{ccc} C^n_G(K;M) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}_G}(\underline{C}_n(K), M) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$$

donde

$$\widehat{f}(G/H) : C_n(K^H) \to M(G/H)$$

es definido sobre cada n-celda $\sigma \in K^H$ por

$$\widehat{f}(G/H)(\sigma) \stackrel{\mathbf{def}}{=} M(G/H \to G/G_\sigma)f(\sigma).$$

■

Apéndice B

La 2-Cohomología de Grupos

Mostramos algunos resultados básicos sobre cohomología de grupos. Nos enfocaremos particularmente en el segundo grupo de cohmología $H^2(G,A)$, por ser éste el que necesitamos para efectuar los torcimientos en las representaciones estudiadas en el capítulo 1.

Asumimos que A es un grupo abeliano sobre el cual G actúa trivialmente.

El material expuesto en este apéndice puede consultarse en [24].

Segundo grupo de cohomología

Sea G un grupo y sea $\mathcal{Z}^2(G,A)$ el conjunto de todas las funciones

$$f : G \times G \to A$$

que satisfacen la condición:

$$\begin{aligned} f(x,1) &= f(1,x) = 1 \text{ para todo } x \in G && \text{(B.1)} \\ f(x,y)f(xy,z) &= f(y,z)f(x,yz) \text{ para todos } x,y,z \in G && \text{(B.2)} \end{aligned}$$

Los elementos de $\mathcal{Z}^2(G,A)$ son llamados cociclos; un cociclo que satisface $f(x,y) = f(y,x)$ para todos $x,y \in G$ es llamado un *cociclo simétrico*. Dados $f,g \in \mathcal{Z}^2(G,A)$ definimos fg mediante

$$fg(x,y) = f(x,y)g(x,y) \text{ para } x,y \in G.$$

Es obvio entonces que fg es también un cociclo y por lo tanto $\mathcal{Z}^2(G, A)$ tiene una estructura de grupo abeliano. El elemento identidad es la función constante $f = 1$ y el elemtento inverso f^{-1} de f es

$$f^{-1}(x, y) = f(x, y)^{-1}, \ \ x, y \in G.$$

Sea $g : G \to A$ tal que $g(1) = 1$ y sea $\delta g : G \times G \to A$ definida por

$$(\delta g)(x, y) = g(x)g(y)g(xy)^{-1}, \ \ \ x, y \in G.$$

El elemento δg es llamado una cofrontera. Es sencillo ver que el conjunto de todas las cofronteras $\mathcal{B}^2(G, A)$ forma un subgrupo de $\mathcal{Z}^2(G, A)$.

Definición B.0.9. *Definimos el segundo grupo de cohomología del grupo G con coeficientes en A, como*

$$H^2(G, A) := \mathcal{Z}^2(G, A)/\mathcal{B}^2(G, A).$$

Los elementos de $H^2(G, A)$ son llamados *clases de cohomología* y cualesquiera dos cociclos contenidos en una misma clase de cohomología se dicen ser *cohomólogos*. Dado un cociclo $f \in \mathcal{Z}^2(G, A)$, denotaremos por $\bar{f}$ su correspondiente clase de cohomología.

No es difícil verificar que si la condición (B.1) es omitida para la construccuón de $\mathcal{Z}^2(G, A)$, aún así el grupo de cohomología obtenido será isomorfo al definido anteriormente. Por lo tanto, cuando consideremos clases de cohomología en $H^2(G, A)$, estaremos considerando cociclos como funciones $f : G \times G \to A$ que satisfacen (B.2).

Extensiones de grupo centrales

Una extensión central de A por G es una sucesión exacta corta

$$\mathbf{E} \, : \, 1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1 \tag{B.3}$$

tal que $\alpha(A)$ pertenece al centro del grupo B. Sea

$$\mathbf{E}' \, : \, 1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} C \xrightarrow{\beta'} G \longrightarrow 1 \tag{B.4}$$

otra extensión central de A por G. Decimos que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$ son *congruentes* si existe un homomorfismo $\gamma : B \to C$ el cual hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & G \arrow[r] \arrow[d, "1_G"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] & C \arrow[r, "\beta'"] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

El siguiente lema muestra que de hecho γ es un isomorfismo, y por lo tanto la relación de congruencia es simétrica. Luego, como dicha relación de congruencia es obviamente reflexiva y transitiva, podemos hablar de *clases de congruencia* de extensiones centrales de A por G; denotamos por $\{\mathbf{E}\}$ la clase de congruencia de $\mathbf{E}$.

Lema B.0.10. *Sea*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & G_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\gamma_2"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_3"] & 1 \\
1 \arrow[r] & H_1 \arrow[r, "\alpha_2"] & H_2 \arrow[r, "\beta_2"] & H_3 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en el cual los renglones superior e inferior son exactos. Si γ_1 y γ_3 son inyectivos (sobreyectivos o biyectivos, respectivamente), entonces γ_2 también lo es.

Como mencionabamos, si las extensiones (B.3) y (B.4) son congruentes entonces $B \cong C$, pero el recíproco de esto no es cierto en general. Sin embargo, tenemos el caso especial.

La extensión (B.3) se dice que se *escinde* si existe un homomorfismo $f : G \to B$, llamado *homomorfismo de descomposición*, tal que $\beta \circ f = 1_G$; esto significa que B es el producto directo interno de $\alpha(A)$ y $f(G)$. Luego, dada una extensión como en (B.3) que se escinde, esta es congruente a

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha'} A \times G \xrightarrow{\beta'} G \longrightarrow 1$$

donde $\alpha'(a) = (a, 1)$ y $\beta'(a, g) = g$, y el isomorfismo entre B y $A \times G$ es dado por

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \times G \\ \alpha(a)f(g) & \longmapsto & (a, g). \end{array}$$

Una *sección* $\lambda : G \longrightarrow B$ de β consiste en una función tal que $\beta \circ \lambda = 1_G$ y $\lambda(1) = 1$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} : 1 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[l, bend left, "\lambda"] \arrow[r] & 1 .
\end{tikzcd} \tag{B.5}$$

Extensiones centrales y el segundo grupo de cohomología

Enseguida mostraremos la relación entre las clases de congruencia de extensiones centrales de A por G y el segundo grupo de cohomología $H^2(G, A)$.

Sea **E** una extensión de la forma (B.5), con λ una sección de β. Entonces $\lambda(G)$ es transversal a A en B, de modo que cada elemento de B se puede escribir de manera única como $a\lambda(g)$, con $a \in A$ y $a \in G$. Luego, como $\beta[\lambda(x)\lambda(y)] = \beta[\lambda(xy)] = xy$ para todos $x, y \in G$, entonces $\lambda(x)\lambda(y)$ y $\lambda(xy)$ pertenecen a la misma clase de A y se sigue que existe un único elemento $f(x, y) \in A$ tal que

$$\lambda(x)\lambda(y) = f(x, y)\lambda(x, y) \tag{B.6}$$

Del hecho que $\lambda(x)[\lambda(y)\lambda(x)] = [\lambda(x)\lambda(y)]\lambda(x)$, se sigue f satisface (B.2). Por la definición de sección y (B.6), tenemos que f también satisface (B.1). En conclusión, f es un cociclo.

La clase de cohomología de f no depende de λ. En efecto, sea μ otra sección de β. Dado que μ y λ pertenecen a la misma clase de A, existe una función $t : G \to A$ tal que $t(1) = 1$ y $\mu(x) = t(x)\lambda(x)$ para todo $x \in G$. Si g es el cociclo correspondiente a μ, entonces

$$\begin{aligned} t(x)t(y)f(x, y)\lambda(xy) &= t(x)t(y)\lambda(x)\lambda(y) \\ &= \mu(x)\mu(y) \\ &= g(x, y)\mu(xy) \\ &= g(x, y)t(xy)\lambda(xy) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(x, y) = (\delta t)(x, y)f(x, y)$, esto es, f y g son cohomólogos. Podemos concluir que la extensión **E** determina una única clase de cohomología C_E.

Teorema B.0.11. *La aplicación $\{\boldsymbol{E}\} \mapsto C_E$ determina una correspondencia biyectiva entre las clases de congruencia de extensiones centrales de A por G y el segundo grupo de cohomología $H^2(G, A)$. Además, si la extensión **E** se escinde, entonces $C_E = 1$.*

Demostración. En primer lugar, mostraremos que dos extensiones

$$\mathbf{E} : 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$
$$\mathbf{E}' : 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\beta'} G \longrightarrow 1$$

son congruentes si y sólo si $C_E = C_{E'}$. Esto asegurará que la asignación $\{\mathbf{E}\} \mapsto C_E$ está bien definida y es inyectiva.

Supongamos que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$ son congruentes por un isomorfismo $\gamma : B \to C$. Sea λ una sección de β y f el cociclo correspondiente a λ. Como $\beta' \circ \gamma = \beta$, se sigue que $\mu = \gamma \circ \lambda$ es una sección de β', y tomando en cuenta que

$$\mu(x)\mu(y) = \gamma(\lambda(x)\lambda(y)) = \gamma(f(x,y)\lambda(xy)) = f(x,y)\mu(xy)$$

concluimos que f es el cociclo correspondiente a μ. Esto demuestra que $C_E = C_{E'}$.

Recíprocamente, supongamos que $C_E = C_{E'}$. Sean λ, f las aplicaciones definidas en la parte anterior y μ, g las respectivas aplicaciones para $\{\mathbf{E}'\}$. Entonces $f = (\delta t)g$ para algún $t : G \to A$ con $t(1) = 1$. Definiendo $\mu'(x) = \mu(x)t(x)$, obtenemos que μ' es una sección de β' tal que f es el cociclo correspondiente μ'. Luego, es inmediato que $\mathbf{E}$ es congruente a $\mathbf{E}'$ por el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ a\lambda(x) & \longmapsto & a\mu'(x). \end{array}$$

Para probar que $\{\mathbf{E}\} \longmapsto C_E$ es una biyección, fijemos un cociclo f. Podemos definir una multiplicación sobre el conjunto $B = A \times G$, haciendo

$$(a_1, x)(a_2, y) = (a_1 a_2 f(x,y), xy) \tag{B.7}$$

Se puede demostrar fácilmente que este producto le da una estructura de grupo a B y que $\{(a,1) \mid a \in A\}$ es un subgrupo contenido en el centro de B, isomorfo a A. Identificando A con dicho subgrupo, obtenemos una extensión central de A por G:

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

donde $\beta[(a,x)] = x$ para todo $a \in A$, $x \in G$. Sea $\lambda : G \to B$ una sección de β definida por $\lambda(x) = (1, x)$. Entonces por (B.7), se sigue que f es el cociclo correspondiente a β y por lo tanto $\{\mathbf{E}\} \longmapsto C_E$ es una biyección.

Finalmente, supongamos que la extensión E se escinde. Entonces existe un homomorfismo $\alpha : G \to B$ que es una sección de β. En consecuencia, el correspondiente cociclo asociado a α es la función constante 1, lo cual demuestra la afirmación del teorema. ■

Supongamos que G es un grupo abeliano y que $f \in \mathcal{Z}^2(G, A)$. Si $g \in \mathcal{B}^2(G, A)$, digamos $g(x, y) = t(x)t(y)t(xy)^{-1}$ para algún $t : G \to A$, entonces $g(x, y) = g(y, x)$ (es decir, g es simétrico). Así, si f es simétrico entonces también lo es cualquier cociclo cohomólogo a f. Lo anterior nos permite introducir el siguiente subgrupo de $H^2(G, A)$:

$$Ext(G, A) = \{\bar{f} \in H^2(G, A) \mid f \text{ es simétrico } \}.$$

Diremos que la extensión (B.3) es *abeliana* si el grupo B es abeliano. Es obvio que si **E** es una extensión abeliana, entonces también lo es cualquier extensión congruente a **E**. Por lo tanto, podemos hablar sobre *clases de congruencia de extensiones abelianas*. De (B.7) deducimos que f es simétrico si y sólo si, la correspondiente extensión es abeliana. Así, para un grupo abeliano G, tenemos el siguiente resultado,

Corolario B.0.12. *La aplicación $\{\boldsymbol{E}\} \mapsto C_E$ determina una correspondencia biyectiva entre las clases de congruencia de extensiones abelianas de A por G y el grupo $Ext(G, A)$.*

Bibliografía

[1] A. Adem and Y. Ruan. Twisted Orbifold K-Theory. *Comm. Math. Phys.*, 237(3):533–556, 2003.

[2] Michael Atiyah and Graeme Segal. Twisted K-theory and cohomology, Octubre 2005.

[3] Michael F. Atiyah. *K-Theory.* Lecture notes by D. W. Anderson. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[4] Michael F. Atiyah. Bott Periodicity and the Index of Elliptic Operators. *Quart. J. Math. Oxford*, 2(19):113–140, 1968.

[5] Michael F. Atiyah and Friedrich Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces. *Amer. Math. Soc. Symp. in Pure Math.*, 3:7–38, 1961.

[6] Michael F. Atiyah and Greame Segal. On Equivariant Euler Characteristics. *Journal of Geometry and Physics*, 6(4):671–677, 1989.

[7] Michael F. Atiyah and Greame Segal. Twisted K-Theory. *Ukr. Mat. Visn.*, 1(3):287–330, 2004.

[8] Noe Barcenas, Jesus Espinoza, Michael Joachim, and Bernardo Uribe. Classification of twists in equivariant k-theory for proper and discrete actions. *http://arxiv.org/abs/1202.1880*, Febrero 2012.

[9] Peter Bouwknegt, Alan L. Carey, Varghese Mathai, Michael K. Murray, and Danny Stevenson. Twisted K-Theory and K-Theory of Bundle Gerbes. *Communications in Mathematical Physics*, 228:17–49, 2002.

[10] Glen E. Bredon. *Equivariant cohomology theories.* Springer-Verlag, 1967.

[11] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra.* Princeton Landmarks in Mathematics, 1956.

[12] P. Donovan and M. Karoubi. Graded Brauer groups and K-theory with local coefficients. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 38:5–25, 1970.

[13] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract Algebra.* John Wiley and Sons, 2004.

[14] Christopher Dwyer. Twisted equivariant K-theory for proper actions of discrete groups. *K-Theory*, 38:95–111, 2008.

[15] Samuel Eilenberg and Norman E. Steenrod. *Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press, 1952.

[16] Daniel S. Freed, Michael J. Hopkins, and Constantin Teleman. Loop groups and twisted K-theory I, Noviembre 2007.

[17] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory. A First Course.* Springer-Verlag, 1991.

[18] Allen Hatcher. Vector Bundles and K-Theory. Disponible en http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html.

[19] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge, New York, NY., 2002.

[20] Dale Husemöler. *Fibre Bundles.* Springer, 1993.

[21] I. M. James and Greame Segal. On equivariant homotopy type. *Topology*, 3:267–272, 1978.

[22] Joachim Hilgert and Karl Hermann Neeb. *Lie semigroups and their applications*, volume 1552 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1993.

[23] M. Karoubi. *Algèbres de Clifford et K-théorie.* PhD thesis, Ecole Norm. Sup., 1968.

[24] G. Karpilovsky. *Projective Representations of Finite Groups.* Monographs in Pure and Applied Mathematics 94. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1985.

[25] G. Karpilovsky. *Group Representations*, volume 2 of *North-Holland Mathematics Studies 177*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1993.

[26] S. Lang. *Algebra*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2002.

[27] R. K. Lashof, J. P. May, and G. B. Segal. Equivariant bundles with abelian structural group. *Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982)*, 19:167–176, 1983.

[28] Takao Matumoto. Equivariant K-theory and Fredholm operators. *Journal of the Faculty of Science*, 18:109–125, 1970.

[29] Takao Matumoto. Equivariant cohomology theories on G-CW complexes. *Osaka J. Math.*, 10:51–68, 1973.

[30] John McCleary. *User's Guide to Spectral Sequences*. Wilmington, Delaware (U.S.A.), 1985.

[31] I. Moerdijk. Orbifolds as groupoids: an introduction. *Contemp. Math.*, 310:205–222, 2002. MR MR1950948 (2004c:22003).

[32] Ieke Moerdijk and J.-A. Svensson. The equivariant Serre spectral sequence. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(1):263–278, 1993.

[33] Goutam Mukherjee and Neeta Pandey. Equivariant cohomology with local coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(1):227–232, 2002.

[34] Karl-Hermann Neeb. On a Theorem of S. Banach. *Journal of Lie Theory*, 8:293–300, 1997.

[35] Jonathan Rosenberg. Homological invariants of extensions of C^*-algebras, part 1. *Operator algebras and applications, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc.*, 38:35–75, 1982.

[36] Reinhard Schultz. Homotopy decompositions of equivariant function spaces. II. *Math. Z.*, 132:69–90, 1973.

[37] Greame Segal. Classifying spaces and spectral sequences. *Publications Mathematiques de Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 34:105–112, 1968.

[38] Greame Segal. Equivariant K-Theory. *Publications Mathematiques de Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 34:129–151, 1968.

[39] Greame Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13:293–312, 1974.

[40] J. P. Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Springer, 1977.

[41] D. J. Simms. Topological aspects of the projective unitary group. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 68:57–60, 1970.

[42] J. Słomińska. On the equivariant Chern homomorphism. *Bull Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 24:909–913, 1976.

[43] N. E. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Math. J.*, 14:133–152, 1967.

[44] Tammo tom Dieck. *Transformation groups*. Walter de Gruyter, 1987.

[45] Bernardo Uribe. Group actions on dg-manifolds and their relation to equivariant cohomology. *arXiv:1010.5413v2 [math.DG]*, Octubre 2010.

[46] Raymond O. Wells. *Differential analysis on complex manifolds*. Springer - Verlag, New York, 1973.

[47] Edward Witten. D-Branes and K-Theory, Noviembre 1998.