



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXISTENCIA DE SOLUCIONES
PARA UN PROBLEMA ELÍPTICO
CON NO-LINEALIDAD CRÍTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
FRANCISCO JOSÉ GONZÁLEZ DE COSSIO
ECHEVERRÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno

González de Cossio
Echeverría
Francisco José
15 20 13 10
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
409002876

Datos del tutor

Dra.
Mónica Alicia
Clapp
Jiménez Labora

Datos del sinodal 1

Dr.
Nils Heye
Ackermann

Datos del sinodal 2

Dr.
Antonio
Capella
Kort

Datos del sinodal 3

Dra.
Dora Cecilia
Salazar
Lozano

Datos del sinodal 4

M. en C.
Julio César
Cedillo
Sánchez

Datos del trabajo escrito

Existencia de soluciones para un problema elíptico con no-linealidad crítica
78 páginas
2013

Agradecimientos

Mi mayor y más sincero agradecimiento es para mis padres. Por apoyarme, especialmente en los momentos difíciles, y por asegurarse de que contara con lo necesario para lograr este objetivo. Es a ellos y a mi hermano a quienes dedico esta tesis.

También agradezco a las siguientes personas que, ya sea de manera directa o indirecta, resultaron fundamentales en el desarrollo de este trabajo:

A mi asesora de tesis, Mónica, por lo mucho que me enseñó durante los últimos semestres de la carrera; por ayudarme a entender que la parte pura y aplicada de las matemáticas no están realmente separadas sino que se desarrollan una a través de la otra.

A todos los demás profesores que intervinieron en mi formación como matemático. En especial a César Cedillo, a Jorge Martínez y a Hugo Rincón. Pues influyeron de manera directa en mi carrera y asistir a sus clases siempre fue una motivación.

A mis amigos y a mi familia, porque sin ellos no hubiera tenido la fuerza para concretar este trabajo.

A los sinodales, por tomarse el tiempo de leer mi tesis y por dar sus sugerencias para mejorarla, sobre todo en cuestiones de presentación. En especial a Mónica por la prueba de uno de los lemas importantes.

Por último y no por menos, a la Facultad de Ciencias de la UNAM en general por ofrecer una licenciatura en matemáticas insuperable a nivel nacional y altamente competitiva a nivel mundial.

Contenido

Prefacio	5
1. Introducción	9
1.1. Espacios de funciones	9
1.2. Encajes	12
2. Problemas elípticos con condición de frontera	16
2.1. Caso subcrítico	17
2.2. Caso crítico	19
3. Lema de deformación	30
3.1. Lema de deformación	30
4. Teorema de Struwe	34
4.1. Base inductiva	36
4.2. Paso inductivo	41
4.3. Teorema de Struwe	47
5. Teorema de Coron	56
5.1. Función baricentro	58
5.2. Teorema de Coron	64
5.3. Otros resultados	70
A. Resultados básicos	72
A.1. Espacios de Lebesgue	72
A.2. Diferenciabilidad en espacios de Hilbert	73
Bibliografía	77

Prefacio

*Divide las dificultades que examinas
en tantas partes como sea posible para
su mejor solución. René Descartes*

En realidad durante la carrera nunca pensé en hacer una tesis sobre el tema de las ecuaciones diferenciales parciales, que abreviaré edps, ya que siempre tuve más interés en materias orientadas hacia otras partes más puras o abstractas de las matemáticas, como lo son la topología, el álgebra abstracta y la teoría de conjuntos. Sin embargo, una serie de cursos que llevé con la Dra. Mónica Clapp me llevaron a pensar de manera distinta. La estrategia de tratar con métodos variacionales los problemas de edps que los admiten requiere de una mezcla de conocimientos sobre otras áreas, por dar dos ejemplos, topología para obtener información sobre el número de soluciones y teoría de grupos para conseguir resultados que involucran simetrías. El usar por primera vez las herramientas desarrolladas en otros cursos para probar (de forma completamente formal) resultados que sirven de manera más directa en la vida real fue algo que sin duda llamó mi atención. Otra razón por inclinarme hacia esta área es que, a diferencia de otras muchas áreas en matemáticas, se encuentra en actual desarrollo (basta con ver las fechas que aparecen en la bibliografía). Las publicaciones de nuevos descubrimientos van abriendo cada vez más el panorama para nuevos estudios.

A continuación damos una breve introducción histórica a la tesis (basada en [5], [3]) y comentamos sobre la forma en que se presenta ésta.

Una ecuación diferencial parcial es una ecuación que involucra una función y sus derivadas, de manera más precisa, es una expresión de la forma

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \dots, Du, u, x) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde F es una función dada, k un natural distinto de cero (que determina el orden), u es la incógnita, $D^j u$ denota las derivadas de orden j de u y Ω es un abierto de \mathbb{R}^n . La ecuación plantea un problema que radica en encontrar una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que la satisfaga.

El estudio de las edps empieza en el siglo 18 con el trabajo de conocidos matemáticos como Euler, Lagrange y Laplace resultando en una herramienta fundamental de estudio

para modelos provenientes de las ciencias físicas: electricidad, hidrodinámica, calor, magnetismo, óptica, elasticidad, etc. Más tarde, durante el siglo 20, las edps se caracterizan por contribuir tanto a áreas de las matemáticas aplicadas (como las finanzas) como al desarrollo de ciertas ramas de las matemáticas puras (como la geometría algebraica).

El ejemplo más sencillo de una edp (no ordinaria) es

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2.$$

En este caso resolver el problema es inmediato y las soluciones son todas aquellas funciones diferenciables $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que no dependen de su primera variable, por dar un ejemplo, la función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x_1, x_2) := x_2$. Para mencionar otra edp más interesante abreviemos

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

entonces la llamada ecuación de Laplace tiene la forma

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Esta ecuación fue utilizada alrededor de 1780 para estudiar los campos potenciales gravitacionales y fue resuelta de manera satisfactoria por Poincaré en 1890 (agregando además una condición de frontera, se probó existencia y unicidad para abiertos Ω bastante generales). Las ecuaciones de segundo orden, como la anterior, se pueden clasificar (casi) en 3 tipos: hiperbólicas, elípticas y parabólicas. La ecuación de Laplace es específicamente del tipo elíptico, la motivación para llamarlas así viene al sustituir en la ecuación los símbolos $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ por la variable algebraica ξ_j conservando el número que indica el orden de derivación, en este caso se obtiene

$$\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 0,$$

que representa a un elipsoide degenerado en \mathbb{R}^n . Otra cosa que podemos observar es que la ecuación de Laplace depende de u (de sus derivadas) de forma lineal, este tipo de ecuaciones modelan frecuentemente problemas físicos de manera aproximada. Para adquirir una mayor precisión es necesario involucrar una no-linealidad de cierto tipo, desgraciadamente esto complica bastante el problema. Un ejemplo sencillo de una edp elíptica (en general) no-lineal es la denominada ecuación no-lineal de Poisson:

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{en } \Omega,$$

donde f es dada y $f(u) := f \circ u$. Tanto fue el interés por las ecuaciones elípticas del tipo no-lineal que en el congreso internacional de matemáticas celebrado en París en el año 1900, 2 de los 23 famosos problemas de Hilbert son dedicados a este tema. Uno de ellos se refiere a la “regularidad” de las soluciones y el otro a la existencia de éstas para ciertos problemas.

En las últimas tres décadas se ha estudiado la relación entre la física teórica y la geometría por medio de áreas como la relatividad general y más recientemente la teoría de cuerdas super-simétricas. En este contexto las edps juegan un papel importante, por ejemplo, en geometría diferencial tenemos el llamado problema de Yamabe (que tiene que

ver con la curvatura). Un modelo sencillo del tipo de ecuación que aparece en el problema de Yamabe se define al tomar $n \geq 3$ y $f(x) := |x|^{\frac{4}{n-2}}x$ en la ecuación no-lineal de Poisson. Es decir, si denotamos $2^* := \frac{2n}{n-2}$ (llamado exponente crítico) entonces la ecuación queda como

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u \quad \text{en } \Omega.$$

En esta tesis tratamos principalmente con tal problema (incorporando una condición de frontera) y las respuestas: existencia o no de soluciones no cero, multiplicidad, etc. dependerán directamente de qué Ω se considere, más preciso, de su topología. El resultado central (teorema de Coron) establece que cuando Ω “se parece” a un anillo en \mathbb{R}^n , es decir a $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < a < |x - y| < b\}$, el problema tiene una solución distinta de la función cero. Notemos que la ecuación anterior es del tipo elíptico y su no-linealidad se expresa mediante el exponente crítico, lo que termina por justificar el título de la tesis.

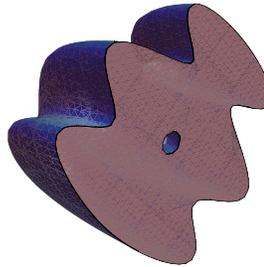


Figura 0.1: El corte transversal de un dominio Ω en \mathbb{R}^3 que pudiera satisfacer las hipótesis del teorema de Coron.

Hay muchas formas de enfrentar esta clase de problemas elípticos, aquí se hará utilizando los llamados métodos variacionales. Estos fueron motivados en su forma más primitiva por el conocido principio de acción mínima, típicamente atribuido a Maupertuis, y fueron en parte desarrollados por Riemann en 1851 bajo el nombre de Principio de Dirichlet. Este principio consiste en encontrar soluciones mediante minimización de un funcional adecuado. De hecho, caracterizaremos las soluciones como los puntos críticos de estos funcionales.

La tesis está distribuida de la siguiente manera. En el capítulo de introducción mencionamos ciertas convenciones, damos la notación y recordamos los espacios principales de funciones que usamos en la tesis. Después presentamos, sin prueba, los teoremas de encaje y hacemos una discusión sobre estos. En el Capítulo 2 tratamos con los problemas elípticos de la forma

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{en } \Omega,$$

con la condición $u = 0$ en $\partial\Omega$. Estudiamos el caso $p < 2^*$, en donde usamos una aplicación clara del principio de Dirichlet. También analizamos el caso $\lambda = 0$ y $p = 2^*$, aquí se prueba la llamada identidad de Pohozaev. Con ella demostramos resultados de inexistencia de soluciones no triviales para ciertos abiertos. En el Capítulo 3 trabajamos de manera abstracta sobre espacios de Hilbert arbitrarios. Introducimos las sucesiones de Palais-Smale y

probamos el lema de deformación, suponiendo un resultado de existencia. El objetivo del Capítulo 4 es demostrar un resultado de “compacidad global”, el teorema de Struwe. La demostración del teorema de Struwe es por inducción. En la primera sección trabajamos con la base inductiva, en la segunda con el paso inductivo y en la tercera damos la demostración completa. El Capítulo 5 tiene como objetivo demostrar un resultado de existencia de soluciones, el teorema de Coron. Primero probamos resultados relativos a la función baricentro (también conocida como función centro de masa). Después, utilizando el lema de deformación y el teorema de Struwe, demostramos el teorema de Coron. En la tercera sección comentamos sobre resultados afines. Finalmente, en el apéndice, presentamos resultados de uso frecuente sobre espacios de Lebesgue. Además, damos definiciones básicas sobre diferenciabilidad en espacios de Hilbert arbitrarios y demostramos un resultado de diferenciabilidad sobre un espacio en particular.

La introducción, el Capítulo 2 y el Capítulo 3 los escribí basándome en el seminario de métodos variacionales que impartió la Dra. Mónica Clapp en la Facultad de Ciencias de la UNAM durante la primera mitad del 2012. En el Capítulo 4 y en el Capítulo 5 me guié respectiva y principalmente por los libros [27] y [26].

Para leer esta tesis es recomendable haber estudiado un libro como [20].

Ciudad de México, Marzo 2013

Francisco J. González de Cossio E.

Capítulo 1

Introducción

En toda la tesis hacemos las siguientes convenciones y usamos la siguiente notación. A la norma usual de \mathbb{R}^n la denotamos por $|\cdot|$ y

$$B_r^n(y) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\},$$

cuando la dimensión sea clara ponemos simplemente $B_r(y)$. El símbolo Ω siempre denota un abierto en \mathbb{R}^n , es un dominio cuando además es conexo y es suave cuando es de clase C^∞ (ver definición en [6]). Por cuestiones de notación, $C > 0$ se usa para expresar constantes positivas posiblemente distintas cuya expresión explícita no es necesaria (si ésta depende de algo se expresa ello con un paréntesis), subsucesiones se suelen denotar de la misma forma que la sucesión original (cuando no hay confusión posible) y las restricciones y extensiones triviales de funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denotan por la misma u . Las integrales son consideradas de Lebesgue y la medida es siempre en el sentido de Lebesgue. El símbolo $|\cdot|$ también suele usarse para expresar la medida de un subconjunto de \mathbb{R}^n y, como es usual, abreviamos casi donde quiera y para casi todo por c.d. y p.c.t. respectivamente. Finalmente, con TCD nos referimos al teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

1.1. Espacios de funciones

Espacios de constante uso son $C^0(\Omega)$, $C^k(\Omega)$ para $k = 1, 2, \dots$ y $C^\infty(\Omega)$ que respectivamente denotan al espacio de funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, al de funciones que son k veces diferenciables con k -ésimas derivadas continuas y al de funciones infinitamente diferenciables.

El soporte de una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $\text{sop}(u)$, se define como la cerradura en \mathbb{R}^n del conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$, desde luego que $\text{sop}(u)$ podría no estar contenido en Ω . Si $k \in \mathbb{N}$ o $k = \infty$, al subconjunto de $C^k(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte es compacto y está contenido en Ω lo denotamos por $C_c^k(\Omega)$.

Además, $C^k(\overline{\Omega})$ es el subconjunto de $C^k(\Omega)$ que consiste de aquellas funciones cuyas derivadas admiten una extensión continua a $\overline{\Omega}$.

Otros espacios fundamentales en la tesis son los siguientes. Para $p \in [1, \infty)$ denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio de Lebesgue de funciones medibles $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $|u|^p$ es integrable en Ω ($\int_\Omega |u|^p < \infty$). Recordamos que en realidad cada elemento de $L^p(\Omega)$ es

una clase de equivalencia inducida por la relación “coincidir c.d. en Ω ” definida sobre el conjunto de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ medibles. Este espacio vectorial cuenta con la norma

$$|u|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

cuando se sobreentienda el abierto en cuestión la denotamos simplemente como $|u|_p$.

De manera similar se define $L^\infty(\Omega)$ como el espacio de funciones medibles $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para las cuales existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|u(x)| \leq c$ p.c.t. $x \in \Omega$. Este espacio tiene la norma

$$|u|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq c \text{ p.c.t. } x \in \Omega\}.$$

Usamos también a $L^p_{loc}(\Omega)$. Éste consiste de las funciones medibles $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen $u \in L^p(V)$ para cada abierto relativamente compacto V de \mathbb{R}^n que satisfaga $\bar{V} \subseteq \Omega$. Convergencia en $L^p_{loc}(\Omega)$ significa convergencia en $L^p(V)$ para cada V del tipo anterior.

Recordamos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ se dice débilmente diferenciable en Ω si existen $v_1, \dots, v_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ de tal forma que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tenga

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

En tal caso la unicidad nos permite definir $D_i u := v_i$ la i -ésima derivada débil de u . El gradiente (débil) de u es

$$\nabla u := (D_1 u, \dots, D_n u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

No requerimos definir todos los espacios de Sobolev; el que usamos es el siguiente.

Definición 1.1. *El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ se define como*

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega, D_i u \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Lo dotamos de la norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(|u|_2^2 + \sum_{i=1}^n |D_i u|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} u^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

y conseguimos un espacio de Hilbert. De hecho, la norma anterior está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v.$$

El espacio de interés en realidad es el que sigue.

Definición 1.2. *El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.*

Desde luego que $H_0^1(\Omega)$ es también un espacio de Hilbert. En caso de que $n \geq 3$ y Ω sea acotado, la desigualdad de Poincaré (ver la sección siguiente) nos permite definir una nueva norma en $H_0^1(\Omega)$ que resulta equivalente a la que hereda por $H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ésta está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v.$$

Cuando no haya confusión sobre el abierto considerado simplemente usamos $\|u\|$ y $\langle u, v \rangle$. Podemos pensar (de manera informal) a $H_0^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones de $H^1(\Omega)$ que se anulan en la frontera de Ω . En general $H_0^1(\Omega)$ difiere de $H^1(\Omega)$ aunque $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$. Una propiedad de uso frecuente es que, usando la extensión trivial, “ $H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\mathbb{R}^n)$ ”.

Para tratar problemas que involucran el exponente crítico de Sobolev $2^* := \frac{2n}{n-2}$ (donde $n \geq 3$) y un abierto no acotado, los espacios anteriores no funcionan de manera adecuada, esto se debe a que en tal caso $\|\cdot\|$ no es necesariamente una norma en $H_0^1(\Omega)$, por lo que es necesario definir unos nuevos.

Definición 1.3. *El espacio vectorial $D^{1,2}(\Omega)$ se define como*

$$D^{1,2}(\Omega) := \{u \in L^{2^*}(\Omega) : u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega, D_i u \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Es espacio de Banach bajo la norma

$$\|u\|_{D^{1,2}(\Omega)} := \left(|u|_{2^*}^2 + \sum_{i=1}^n |D_i u|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

El espacio resultante no es necesariamente de Hilbert. Siguiendo la idea anterior definimos el siguiente subespacio vectorial.

Definición 1.4. *$D_0^{1,2}(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $D^{1,2}(\Omega)$.*

Esta vez no es necesario que Ω sea acotado para definir una norma equivalente a la inducida por $D^{1,2}(\Omega)$, de hecho ésta es de nuevo

$$\|u\|_{D_0^{1,2}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta norma es inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{D_0^{1,2}(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v.$$

Naturalmente, en caso de que sea claro el abierto en consideración, volvemos a usar la notación $\|u\|$, $\langle u, v \rangle$. De esta forma, $D_0^{1,2}(\Omega)$ con la última norma sí es un espacio de Hilbert. No es difícil probar que cuando Ω es acotado en realidad $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$, además, se cumple que $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n) = D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Requerimos más adelante la siguiente observación; se puede revisar en [6].

Observación 1.5. Si Ω es de clase C^1 , $u \in D^{1,2}(\Omega)$, su extensión trivial $\bar{u} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ y para cada i , $\overline{D_i u} = D_i \bar{u}$ entonces $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$.

1.2. Encajes

La existencia de ciertos encajes (funciones lineales, continuas e inyectivas) entre los espacios anteriores nos da relaciones entre las normas, éstas resultan en una vía importante para la demostración de resultados. Una versión unificada de los teoremas de encaje de Sobolev y Rellich-Kondrachov bastante más general que la que presentamos aquí se puede consultar en [2]. Para pruebas de los encajes se recomienda ver [20].

Dado $n \geq 3$ el número $2^* := \frac{2n}{n-2}$ tiene mucha importancia en los encajes, éste suele marcar un límite como lo veremos en esta sección. Para encontrar soluciones a algunas de nuestras ecuaciones buscamos convergencia y por ello cierta compacidad en las inclusiones (al menos continuidad). Es por esto que la expresión del exponente crítico sale de manera natural. Supongamos que hemos encontrado $q \in [1, \infty)$ y $C > 0$ tales que para todo $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$|\psi|_q \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no cero y sea $\lambda > 0$ cualquiera, defínase $\varphi_\lambda(x) := \varphi(\lambda x)$ para tener que

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda|_q &= \lambda^{-\frac{n}{q}} |\varphi|_q, \\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_\lambda|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \lambda^{1-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Se sigue de usar (1.1) para φ_λ y de lo anterior que

$$|\varphi|_q \leq \lambda^{1+\frac{n}{q}-\frac{n}{2}} C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

como esto ocurre para cada $\lambda > 0$ necesariamente $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{2} = 0$. Concluimos que $n \geq 3$ y $q = \frac{2n}{n-2} = 2^*$.

Seguimos ahora con los mencionados resultados de encaje.

Proposición 1.6 (Desigualdad de Poincaré). Si $n \geq 3$ y Ω es acotado en \mathbb{R}^n , entonces para cada $q \in [1, 2^*]$ existe $C(n, q) > 0$ tal que

$$|u|_q \leq C |\Omega|^{\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

De hecho, podemos tomar cualquier Ω (no necesariamente acotado) para concluir que la inclusión

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

es continua para cada $q \in [2, 2^*]$. Más aún, tenemos el siguiente resultado que se puede revisar en [2].

Proposición 1.7. Si $n \geq 3$ y Ω es de clase C^1 , entonces la inclusión

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

es continua para cada $q \in [2, 2^*]$.

Uno de los resultados centrales en estos temas es la siguiente consecuencia del teorema de Arzela-Ascoli. Recordamos que una función entre dos espacios métricos $f : X \rightarrow Y$ se dice compacta si para cada A subconjunto acotado de X tenemos $f[A]$ es relativamente compacto en Y .

Teorema 1.8 (Rellich, 1930-Kondrachov, 1945). Si $n \geq 3$ y Ω es acotado en \mathbb{R}^n , entonces para cada $q \in [1, 2^*)$ se tiene

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{es compacta.}$$

Hay que remarcar que las hipótesis en el teorema anterior no se pueden relajar, veamos dos ejemplos de ello.

Ejemplo 1.9. Si $n \geq 3$ y $q \in [2, 2^*]$, entonces $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ no es compacta.

Demostración. Escojamos cualquier $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que no sea cero c.d. en \mathbb{R}^n y sea (ξ_k) una sucesión en \mathbb{R}^n que cumpla $|\xi_k| \rightarrow \infty$, denotaremos $\varphi_k(x) := \varphi(x - \xi_k)$.

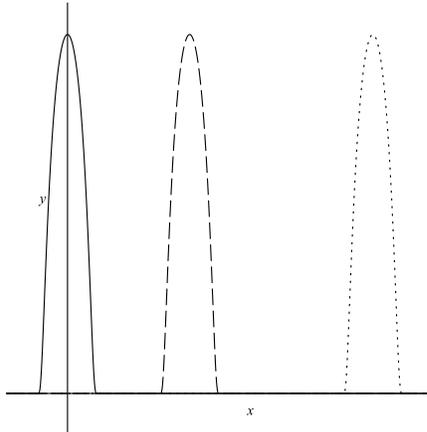


Figura 1.1: Comportamiento de φ_k de línea a punteado conforme crece k .

Se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_k|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_k|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 \quad \forall p \in [1, \infty), \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces

$$\|\varphi_k\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En particular (φ_k) está acotada en $H^1(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, supongamos que pasando a una subsucesión conseguimos $\varphi_k \rightarrow u$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces podemos también suponer que $\varphi_k \rightarrow u$ c.d. en \mathbb{R}^n . El soporte de φ está acotado en \mathbb{R}^n , esto y lo anterior implican que $u = 0$ y por tanto

$$0 \neq |\varphi|_q = \lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi_k|_q = |u|_q = 0.$$

La contradicción anterior implica que la inclusión en cuestión no es compacta. ■

Ejemplo 1.10. Sea $n \geq 3$ y Ω acotado en \mathbb{R}^n , entonces $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ no es compacta.

Demostración. Por facilidad supongamos que $0 \in \Omega$ y tomemos $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq \Omega$, sea $\varphi \in C_c^\infty(B_r(0))$ no cero y definamos esta vez $\varphi_k := k^{\frac{n-2}{2}}\varphi(kx)$.

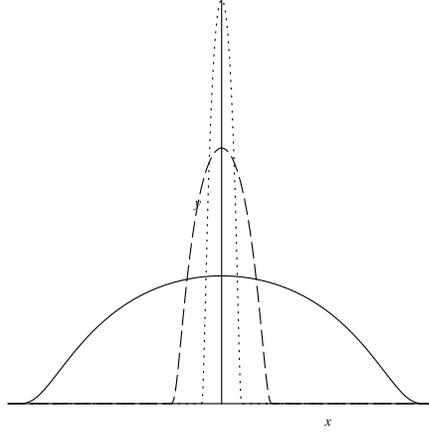


Figura 1.2: Comportamiento de φ_k de línea a punteado conforme crece k .

Entonces $\varphi_k \in C_c^\infty(B_{r/k}(0)) \subseteq H_0^1(\Omega)$ y de la definición de 2^* obtenemos que

$$|\varphi_k|_{2^*}^{2^*} = k^n \int_{B_{r/k}(0)} |\varphi(kx)|^{2^*} = \int_{B_r(0)} |\varphi|^{2^*} = |\varphi|_{2^*}^{2^*}.$$

Además, como para cada $x \in B_{r/k}(0)$ tenemos $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x) = k^{\frac{n}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(kx)$ se sigue que $\|\varphi_k\| = \|\varphi\|$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Ello muestra que (φ_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Procediendo de manera análoga que en el ejemplo anterior, tenemos que de nuevo la inclusión enunciada no puede ser compacta. ■

Analicemos el ejemplo anterior. Empezamos con una función φ , construimos una sucesión usando “dilataciones” de ella y la forma específica que tiene 2^* nos permitió que esta sucesión mantuviera la norma de φ en $L^{2^*}(\Omega)$. Esto último fue lo que originó la falta de compacidad que sufrimos. Por ello los problemas que tratan con exponente crítico son considerablemente más difíciles que los casos subcríticos; no podemos utilizar el teorema de Rellich-Kondrachov para concluir una convergencia que nos lleve a una solución. De hecho, muchas veces ni siquiera hay solución.

Veamos una consecuencia del teorema anterior, denotemos

$$\Sigma := \{u \in H_0^1(\Omega) : |u|_2 = 1\}.$$

Proposición 1.11. Si $n \geq 3$ y Ω es acotado en \mathbb{R}^n , entonces $\|\cdot\|^2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo.

Demostración. Sea $c_0 := \inf_{v \in \Sigma} \|v\|^2$, tomemos (u_k) sucesión en Σ tal que $\|u_k\|^2 \rightarrow c_0$. Como (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$ podemos suponer, salvo una subsucesión, que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y $u_k \rightarrow u$ en $L^2(\Omega)$, por tanto $u \in \Sigma$. Se sigue entonces que

$$c_0 \leq \|u\|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|^2 = c_0.$$

■

El número real positivo

$$\lambda_1(\Omega) := \min_{u \in \Sigma} \|u\|^2 \quad (1.2)$$

será importante en la próxima sección. Notemos que $\lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ es una constante óptima para el encaje $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Terminamos esta sección con otra consecuencia del Teorema 1.8 que resultará muy útil más adelante.

Proposición 1.12. *Si $n \geq 3$, $p \in [1, 2^*)$ y (u_k) es acotada en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ entonces, pasando a una subsucesión,*

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{c.d. en } \mathbb{R}^n, \\ u_k &\rightarrow u \quad \text{en } L_{loc}^p(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Demostración. Podemos suponer que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Escojamos para $m \geq 1$, $\varphi_m \in C_c^\infty(B_{m+1}(0))$ tal que $\varphi_m \equiv 1$ en $B_m(0)$. Es fácil ver que $(u_k \varphi_1)$ está acotada en $D_0^{1,2}(B_2(0))$, entonces hay una subsucesión (u_k^1) de (u_k) tal que

$$u_k^1 \rightarrow u \quad \text{en } L^p(B_1(0)) \quad \text{y} \quad u_k^1 \rightarrow u \quad \text{c.d. en } B_1(0).$$

Sea $u_k^0 := u_k$. Continuando de esta manera conseguimos para cada $m \geq 1$ una (u_k^m) subsucesión de (u_k^{m-1}) tal que

$$u_k^m \rightarrow u \quad \text{en } L^p(B_m(0)) \quad \text{y} \quad u_k^m \rightarrow u \quad \text{c.d. en } B_m(0).$$

Consideremos entonces la subsucesión diagonal, es decir, sea $v_k := u_k^k$. Es claro que (v_k) es una subsucesión de (u_k) que cumple lo requerido. ■

Cabe mencionar que con un ligero ajuste a la prueba anterior podemos obtener el resultado en $D_0^{1,2}(\Omega)$.

Capítulo 2

Problemas elípticos con condición de frontera

Nuestro objetivo es resolver ecuaciones en derivadas parciales, de manera más específica, ecuaciones elípticas que se anulan en la frontera. La ecuación más sencilla que presentamos primero es, en palabras de J.Jost, “quizás la ecuación en derivadas parciales más importante para las matemáticas y la física” (ver [20]). Es llamada la ecuación de Laplace y tiene la forma

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

en donde Δu es llamado el Laplaciano de u . Tal problema queda como un caso particular de la ecuación más general y con condición de frontera conocida como la ecuación no-lineal de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

en donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función previamente dada. Una solución clásica de (2.1) es una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en $C^2(\bar{\Omega})$ que satisface lo establecido en (2.1). Para utilizar métodos variacionales (encontrar soluciones por medio de puntos críticos de un funcional adecuado) requerimos una definición de solución que resulta más débil que la clásica, pero que afortunadamente es equivalente a ella cuando Ω es suficientemente suave.

Sea u una solución clásica de (2.1). Entonces

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)\varphi = \int_{\Omega} f(u)\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por la fórmula de Green obtenemos

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)\varphi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Usando la densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$ y lo anterior concluimos que entonces

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f(u)v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2)$$

Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (2.1) si u satisface (2.2). En el caso de que Ω sea acotado las soluciones clásicas pertenecen a $H_0^1(\Omega)$. Lo anterior muestra que, en tal caso, las soluciones clásicas son débiles. Para obtener las condiciones necesarias sobre Ω , f y u para que lo recíproco ocurra se requiere de teoría de regularidad; referencias para el tema son [18] y [15].

Nosotros trabajamos con soluciones débiles, por ello llamaremos a éstas simplemente soluciones. (Por esto es más conveniente mantener el signo menos del Laplaciano en (2.1) y no cargarlo en la definición de solución débil.)

Si $n \geq 3$, Ω es acotado y $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisface ciertas propiedades específicas, entonces el problema (2.1) cuenta con una solución no trivial, es decir, una solución distinta de $u = 0$; referimos al lector a [27]. Sin embargo, las condiciones sobre f son más claras al trabajar con un problema específico:

Consideremos $n \geq 3$, Ω acotado en \mathbb{R}^n , $p \in (2, 2^*)$ y $\lambda > -\lambda_1$ (para la definición de λ_1 ver (1.2)). Tomemos $f(x) := |x|^{p-2}x - \lambda x$ en (2.1) para obtener el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema, llamado subcrítico pues $p < 2^*$, es el que estudiamos en la primera sección. Probamos fácilmente, por medio del teorema de Rellich-Kondrachov, que en efecto tiene una solución no trivial.

Resulta natural preguntarse que ocurre en el caso crítico, cuando $p = 2^*$. Permitimos ahora que el problema tenga un dominio no necesariamente acotado y tomamos $\lambda = 0$. Se obtiene

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema lo estudiamos en la segunda sección y durante el resto de la tesis. Resulta mucho más difícil de tratar y depende fuertemente del dominio que se considere.

2.1. Caso subcrítico

Fijemos durante toda la sección $n \geq 3$, Ω acotado en \mathbb{R}^n , $p \in (2, 2^*)$ y $\lambda > -\lambda_1$. Definimos el problema

$$\wp \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

La hipótesis $\lambda > -\lambda_1$ se pide para lograr que

$$\langle u, v \rangle_\lambda := \int_\Omega \nabla u \nabla v + \lambda \int_\Omega uv$$

sea un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ (esto no es difícil de probar), que induce a la norma $\|\cdot\|_\lambda$ (equivalente a $\|\cdot\|$), y poder asociar a \wp el funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) := \frac{1}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p.$$

En el apéndice se prueba que J es de clase C^1 (de hecho es hasta de clase C^2) y

$$J'(u)v = \langle u, v \rangle_\lambda - \int_\Omega |u|^{p-2}uv.$$

Por esto las soluciones de φ quedan caracterizadas como los puntos críticos del funcional J . Una buena noticia es que no es necesario buscar puntos críticos de J sobre todo el espacio para encontrar soluciones.

Sea $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$. Por la forma que tiene $J_u(t) := J(tu)$ (pensar en la gráfica de J en la dirección u) podemos notar que hay un único $t \in (0, \infty)$ en el cual J_u alcanza su máximo, entonces tu que satisface $J'(tu)tu = 0$ resulta en un punto crítico de J . Esto motiva a definir la llamada variedad de Nehari asociada al problema φ como

$$\mathcal{N} := \{u \in H_0^1(\Omega) - \{0\} : J'(u)u = 0\}.$$

Claramente

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) - \{0\} : J(u) = \max_{t \in [0, \infty)} J(tu)\} = \{u \in H_0^1(\Omega) - \{0\} : \|u\|_\lambda^2 = |u|_p^p\}.$$

Los puntos críticos no triviales de J pertenecen a \mathcal{N} y, además, para cada $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ existe un único $t \in (0, \infty)$ tal que $tu \in \mathcal{N}$. Otras propiedades básicas de \mathcal{N} que se verifican fácilmente son que sus elementos están lejos de cero (existe $d > 0$ tal que $\|u\|_\lambda \geq d$ para cada $u \in \mathcal{N}$), \mathcal{N} es cerrada en $H_0^1(\Omega)$, $\inf_{\mathcal{N}} J > 0$, \mathcal{N} es una subvariedad de Hilbert de $H_0^1(\Omega)$ de clase C^2 y para cada $u \in \mathcal{N}$ se cumple que $u \notin T_u\mathcal{N}$.

De tales propiedades uno tiene que si u es un punto crítico de J sobre \mathcal{N} , es decir si $u \in \mathcal{N}$ y $J'(u)v = 0$ para todo $v \in T_u\mathcal{N}$, entonces $J'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ (pues $H_0^1(\Omega)$ es la suma directa de $T_u\mathcal{N}$ y $\mathbb{R}u$). Enunciamos el resultado obtenido.

Lema 2.1. *Las soluciones no triviales de φ son precisamente los puntos críticos de J sobre \mathcal{N} .*

■

El problema φ tiene una solución no trivial, el que $p < 2^*$ resulta fundamental. Antes de probarlo, aclaramos que si se alcanza el $\inf_{\mathcal{N}} J$ por $u \in \mathcal{N}$ entonces u es un punto crítico de J sobre \mathcal{N} .

Proposición 2.2. *φ tiene al menos una solución no trivial.*

Demostración. Sea $c_0 := \inf_{\mathcal{N}} J$ y tomemos una sucesión (u_k) en \mathcal{N} tal que $J(u_k) \rightarrow c_0$. Como $J(u_k) = \frac{p-2}{2p} \|u_k\|_\lambda^2$ entonces (u_k) está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y el que $p < 2^*$ nos deja suponer, por el Teorema 1.8, que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega) \quad \text{y} \quad u_k \rightarrow u \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Como también $J(u_k) = \frac{p-2}{2p}|u_k|_p^p$, obtenemos que $\frac{p-2}{2p}|u|_p^p = c_0 > 0$, en particular $u \neq 0$ y existe un $t \in (0, \infty)$ tal que $tu \in \mathcal{N}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} c_0 &\leq J(tu) := \frac{1}{2}\|tu\|_\lambda^2 - \frac{1}{p}|tu|_p^p \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\|tu_k\|_\lambda^2 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p}|tu_k|_p^p \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(tu_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = c_0. \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $J(tu) = c_0$ para $tu \in \mathcal{N}$, por tanto el lema anterior indica que tu es una solución no trivial para φ . \blacksquare

Usando el concepto de género de Krasnoselskii (ver por ejemplo [26]), es posible encontrar una sucesión $(\pm u_k)$ de pares de soluciones para φ tales que $\|u_k\|_\lambda^2 \rightarrow \infty$. Esto pues el género de \mathcal{N} , que es infinito, resulta ser una cota inferior para el número de puntos críticos de J . También hay resultados para φ cuando Ω no es acotado, por ejemplo, en 1977 Strauss prueba que si $\Omega = \mathbb{R}^n$ y $\lambda = 1$ entonces existe una infinidad de soluciones radiales (consultar [27] o [24]). Y Bartsch y Willem en 1993 prueban que si además $n = 4$ o $n \geq 6$, entonces existen también una infinidad de soluciones no radiales (ver [27]).

2.2. Caso crítico

Durante esta sección $n \geq 3$ y Ω denotará dominios de \mathbb{R}^n posiblemente no acotados. Los problemas que consideramos son de la forma

$$\varphi_\Omega \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este tipo de problema es interesante no solo por las dificultades de tratar con el exponente crítico sino también porque estar directamente relacionado con problemas de la geometría diferencial, en particular con el llamado problema de Yamabe. Para estudiar este problema recomendamos leer [22].

Como ya se ha mencionado en la sección de espacios de funciones, puesto que nos interesa trabajar también con Ω no acotado, requerimos usar el espacio $D_0^{1,2}(\Omega)$. Diremos u es solución de φ_Ω si $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega |u|^{2^*-2}uv = 0 \quad \forall v \in D_0^{1,2}(\Omega).$$

Observación 2.3. *Repetimos que en general las soluciones de φ_Ω no son soluciones clásicas. Si $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ es solución y Ω es suave, entonces $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y u es solución clásica. De nuevo, para resultados de regularidad se recomienda [18] y [15].*

El funcional asociado al problema es $J_\Omega : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$J_\Omega(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Con derivada

$$J'_\Omega(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega |u|^{2^*-2} uv.$$

Y la variedad de Nehari que le corresponde es

$$\mathcal{N}_\Omega := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) - \{0\} : \|u\|^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}.$$

Tenemos que \mathcal{N}_Ω sigue cumpliendo la propiedad deseada, es decir, las soluciones no triviales de φ_Ω son precisamente los puntos críticos de J_Ω sobre \mathcal{N}_Ω .

Sabemos del encaje $D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, pero si definimos

$$\Sigma_\Omega := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{2^*} = 1\} \quad \text{y} \quad S_\Omega := \inf_{u \in \Sigma_\Omega} \|u\|^2$$

entonces

$$S_\Omega = \inf_{0 \neq u \in D_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^{2^*}} > 0$$

da lugar a la constante óptima $S_\Omega^{-\frac{1}{2}}$. Un tipo especial de soluciones que nos interesan son las que minimizan a nuestro funcional, estas soluciones de “energía mínima” cuentan con propiedades interesantes, por ejemplo, no cambian de signo.

Definición 2.4. Decimos que $w \in \mathcal{N}_\Omega$ es una solución de energía mínima de φ_Ω si

$$J_\Omega(w) = \inf_{\mathcal{N}_\Omega} J_\Omega.$$

Usaremos la abreviación

$$e_\Omega := \inf_{\mathcal{N}_\Omega} J_\Omega.$$

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento de φ_Ω dependiendo de qué Ω se considere, es decir, analizar cuándo hay soluciones, cuándo hay algún tipo de unicidad, qué se requiere para obtener soluciones de energía mínima, bajo qué condiciones de Ω se encuentran soluciones positivas, etc.

Como ejemplos anteriores sugerían, presentamos el resultado de invariancia bajo dilataciones.

Definición 2.5. Sean $\varepsilon > 0$ y $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$. Decimos que $u_\varepsilon \in D_0^{1,2}(\varepsilon\Omega)$, dada por $u_\varepsilon(x) := \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, es una dilatación de u por ε .

Proposición 2.6. Sean $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene que $|u_\varepsilon|_{2^*} = |u|_{2^*}$ y $\|u_\varepsilon\| = \|u\|$.

Demostración. El resultado se tiene de las dos igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon|^{2^*} &= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*}, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_\varepsilon)|^2 &= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

■

En realidad S_Ω no cambia aunque Ω cambie como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 2.7. *Para cada dominio Ω de \mathbb{R}^n tenemos $S_\Omega = S_{\mathbb{R}^n}$.*

Demostración. Por facilidad supondremos que $0 \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $B_r(0) \subseteq \Omega$. Usando la densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, consideremos φ_k sucesión en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \Sigma_{\mathbb{R}^n}$ tal que

$$\|\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \rightarrow S_{\mathbb{R}^n}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $r_k > 0$ que cumpla $\text{sop}(\varphi_k) \subseteq B_{r_k}(0)$. Sean también

$$\xi_k := \frac{r}{r_k} \quad \text{y} \quad v_k := (\varphi_k)_{\xi_k}.$$

Entonces, de la proposición anterior, $|v_k|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} = 1$ y $\|v_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$. Por construcción $\text{sop}(v_k) \subseteq B_r(0) \subseteq \Omega$, de lo cual $v_k \in \Sigma_\Omega$ y $\|v_k\|^2 \rightarrow S_{\mathbb{R}^n}$. Esto implica $S_\Omega \leq S_{\mathbb{R}^n}$. La otra desigualdad se sigue inmediatamente de la inclusión (por extensión trivial), $D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. \blacksquare

Denotamos entonces $S := S_\Omega$ para cualquier Ω dominio de \mathbb{R}^n . Existe una relación entre e_Ω y S que requerimos constantemente.

Proposición 2.8. *Para cada dominio Ω de \mathbb{R}^n tenemos $e_\Omega = \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$.*

Demostración. Sea $u \in D_0^{1,2}(\Omega) - \{0\}$ y tomemos $t \in (0, \infty)$ tal que $tu \in \mathcal{N}_\Omega$. Entonces $t^2\|u\|^2 = t^{2^*}|u|_{2^*}^2$ y por tanto

$$t = \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \right)^{\frac{n-2}{4}}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} J_\Omega(tu) &= \frac{1}{n}\|tu\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \|u\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Haciendo lo anterior para cada $u \in D_0^{1,2}(\Omega) - \{0\}$, con su correspondiente t_u , obtenemos

$$e_\Omega = \inf_{0 \neq u \in D_0^{1,2}(\Omega)} J_\Omega(t_u u) = \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}.$$

\blacksquare

Tenemos por tanto que e_Ω tampoco depende de Ω y lo denotamos simplemente por e^* .

Observación 2.9. *La proposición anterior indica que: $w \in \mathcal{N}_\Omega$ y $e^* = J_\Omega(w)$ precisamente cuando existe $v \in \Sigma_\Omega$ tal que $w = S^{\frac{n-2}{4}}v$ y $\|v\|^2 = S$. Por lo que al preguntarnos sobre la existencia de soluciones de energía mínima, en realidad nos preguntamos si existe $v \in \Sigma_\Omega$ tal que $\|v\|^2 = S$.*

Es claro que no perdemos mucha generalidad al considerar a nuestro abierto Ω un conexo, siempre podemos trabajar por separado en las componentes conexas de un disconexo, sin embargo no se ha usado explícitamente tal suposición. El siguiente teorema requiere la conexidad de Ω y es un resultado conocido para probar la inexistencia de soluciones no triviales. No lo probamos pues difiere un poco del tema, se puede consultar en [19].

Teorema 2.10 (Continuación Única). *Sean Ω un dominio de \mathbb{R}^n , $V \in C^0(\mathbb{R}^n)$ y $v \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que*

$$-\Delta v + V(x)v = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Si existe un subconjunto abierto no vacío de Ω en el cual $v = 0$, entonces $v = 0$ en Ω .

Corolario 2.11. *Si $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$ es no vacío, entonces \wp_{Ω} no tiene solución de energía mínima.*

Demostración. Supongamos hay una solución de energía mínima de \wp_{Ω} . Por la Observación 2.9 existe $v \in D_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $|v|_{2^*} = 1$ y $\|v\|^2 = S$. Entonces $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $|v|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} = 1$ y $\|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 = S$. Si definimos

$$u := S^{\frac{n-2}{4}} v$$

obtenemos que u es una solución de energía mínima de $\wp_{\mathbb{R}^n}$, en particular resuelve tal problema en el sentido clásico. Es decir, si denotamos $V(x) := -|u(x)|^{2^*-2}$, entonces se cumple

$$-\Delta u + V(x)u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

Como $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$ es un abierto no vacío de \mathbb{R}^n en el cual $u = 0$, el teorema anterior implica que $u = 0$ en \mathbb{R}^n , lo cual no es posible. ■

Cabe notar que en la prueba anterior fue fundamental el hecho de que S no depende del dominio considerado. El corolario anterior nos dice que, en lo que respecta a nuestro problema, hay una gran cantidad de dominios que no admiten una solución de energía mínima, por ejemplo, todo dominio acotado no tendrá una. Nos preguntamos si la ecuación tiene soluciones de energía mínima al tomar como dominio \mathbb{R}^n ; la respuesta es que sí. La siguiente proposición fue probada por P.L. Lions en 1985.

Proposición 2.12. *$\wp_{\mathbb{R}^n}$ tiene al menos una solución de energía mínima.*

La prueba no resulta fácil y es algo técnica por lo que la omitimos. El lector interesado la puede ver en [27]. En realidad podemos decir algo bastante más fuerte sobre sus soluciones en general. Más aún, podemos determinar soluciones explícitas; algo que es nada común en esta teoría, requerimos llevar el problema a ecuaciones diferenciales ordinarias para ello. Necesitamos unos lemas técnicos primero.

Lema 2.13. *Sea $v \in C^2(0, \infty)$ y definamos $u : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como $u(x) := v(|x|)$. Entonces*

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u \quad \text{en } \mathbb{R}^n - \{0\} \quad \text{si y solo si} \quad -\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}v'(r)) = r^{n-1}|v|^{2^*-2}v \quad \text{en } (0, \infty).$$

Demostración. Notemos que para cada i y cada $x \neq 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(|x|)\frac{x_i}{|x|}$. Se sigue entonces que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = v''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right)$ y podemos calcular que

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}v'(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

En consecuencia, obtenemos la equivalencia de que $\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}v'(r)) = r^{n-1}\left(\frac{n-1}{r}v' + v''\right)$ en $(0, \infty)$. ■

Lema 2.14. Sean $a_n := (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}}$, $\varepsilon > 0$ y $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(r) := a_n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$. Entonces $v \in C^2(\mathbb{R})$ satisface la ecuación

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}v'(r)) = r^{n-1}|v|^{2^*-2}v \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Más aún, $v(0) = \frac{a_n}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}$ y $v'(0) = 0$.

Demostración. Hagamos los cálculos de manera directa. Tenemos

$$v'(r) = -(n-2)a_n\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}r(\varepsilon^2 + r^2)^{-\frac{n}{2}},$$

y también

$$r^{n-1}|v(r)|^{2^*-2}v(r) = a_n^{\frac{n+2}{n-2}}\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}r^{n-1}(\varepsilon^2 + r^2)^{-\frac{n+2}{2}}.$$

Por otro lado, si $g(r) := -r^{n-1}v'(r)$ entonces

$$g'(r) = n(n-2)a_n\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}r^{n-1}\left((\varepsilon^2 + r^2)^{-\frac{n}{2}} - r^2(\varepsilon^2 + r^2)^{-\frac{n+2}{2}}\right).$$

La igualdad buscada se sigue entonces de que $n(n-2) = a_n^{\frac{4}{n-2}}$. ■

De los dos lemas anteriores tenemos que si $\varepsilon > 0$ y se define

$$u(x) := a_n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

entonces u satisface la ecuación $-\Delta u = |u|^{2^*-2}u$ en \mathbb{R}^n (de hecho en 0 se puede verificar directo). Además, las funciones anteriores son simplemente dilataciones por ε de la función

$$U(x) := a_n \left(\frac{1}{1 + |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

su gráfica motiva su nombre.

Definición 2.15. Sea $a_n := (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}}$. La función $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$U(x) := a_n \left(\frac{1}{1 + |x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

es llamada la burbuja estándar.

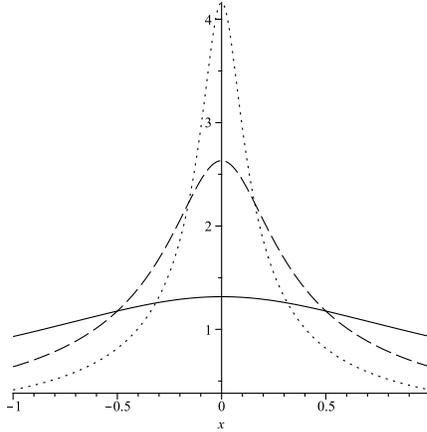


Figura 2.1: Para $n = 3$, restringimos el dominio de la burbuja estándar y sus dilataciones, por $1/4$ y $1/10$, a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$ para poder visualizar sus gráficas mostradas respectivamente en línea, guión y punto.

En resumen, hemos probado lo siguiente.

Corolario 2.16. *Las dilataciones de la burbuja estándar son soluciones de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ (en particular hay una infinidad de soluciones).*

■

Ahora bien, en el Lema 2.14 tenemos expuesto para cada $\varepsilon > 0$ un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. Sabemos que tal problema tiene una única solución, la cual ya hemos encontrado. Aunque no de manera inmediata, con esto y el Lema 2.13 es posible probar que cualquier solución positiva de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ debe de ser una traslación y dilatación de la burbuja estándar. Se puede mostrar que las soluciones de energía mínima mantienen un signo constante estricto, así que con la Proposición 2.12 tenemos el siguiente resultado (ver [23]).

Proposición 2.17. *La burbuja estándar es la única solución positiva de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ salvo traslaciones y dilataciones. Más aún, éstas (y sus negativos) son todas las soluciones de energía mínima.*

Por algún tiempo se pensó que no había soluciones no triviales de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ distintas a las anteriores. Sin embargo, Ding prueba que también existe una infinidad de soluciones que cambian de signo (distintas módulo traslación y dilatación). Para esto último consultar [14].

Para pruebas de no existencia de soluciones no triviales la llamada identidad de Pohozaev también es fundamental. La demostración de ésta se basa en el siguiente resultado clásico del cálculo vectorial. Dado un campo vectorial diferenciable $\chi := (\chi_1, \dots, \chi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se define su divergencia como la función $\operatorname{div} \chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\operatorname{div} \chi(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i}(x).$$

Teorema 2.18 (Divergencia de Gauss). *Sean Ω un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n , $\chi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Se cumple la identidad*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \chi = \int_{\partial\Omega} \chi \cdot \vartheta \, d\sigma,$$

donde la segunda es una integral (escalar) de superficie dada según la parametrización σ , ésta induce a $\vartheta : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

Un resultado básico sobre la divergencia que usamos lo enunciamos en la siguiente observación.

Observación 2.19. *Si $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 , entonces*

$$\operatorname{div}(f\chi) = \nabla f \cdot \chi + f \operatorname{div} \chi.$$

Para el teorema siguiente sean Ω un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n , $f(x) := |x|^{2^*-2}x$ y $F(t) := \int_0^t f$. Denotemos por σ a una parametrización que induzca a ϑ vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ y sea $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} := \nabla u \cdot \vartheta$.

Teorema 2.20 (Identidad de Pohozaev, 1965). *Si u es una solución clásica de φ_{Ω} , entonces*

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} F(u) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} (x)^2 \vartheta(x) \cdot x \, d\sigma = 0.$$

Demostración. Las igualdades siguientes las tomamos en Ω . Tenemos

$$\begin{aligned} -\Delta u \nabla u \cdot x &= f(u) \nabla u \cdot x \\ &= \nabla F(u) \cdot x \\ &= \operatorname{div}(F(u)x) - nF(u). \end{aligned} \tag{2.3}$$

La primera igualdad se tiene por hipótesis, la segunda por el teorema fundamental del cálculo y la tercera usando la Observación 2.19 y el hecho de que la identidad en \mathbb{R}^n tiene divergencia idénticamente n . Por otro lado

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u &:= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} x_i \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &= |\nabla u|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} x_i \\ &= |\nabla u|^2 + \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \cdot x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

La tercera igualdad es consecuencia de que para cada i ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{|\nabla u|^2}{2} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

También tenemos

$$\begin{aligned}\nabla u \cdot x \Delta u &= \nabla u \cdot x \operatorname{div}(\nabla u) \\ &= \operatorname{div}((\nabla u \cdot x)\nabla u) - \nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u.\end{aligned}\quad (2.5)$$

La segunda igualdad es cierta debido a la Observación 2.19. Ahora tratemos con el término que está restando en la última expresión.

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla u \cdot x) \cdot \nabla u &= \nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) \cdot x + |\nabla u|^2 \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) - \frac{n|\nabla u|^2}{2} + |\nabla u|^2 \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) - \frac{n-2}{2}|\nabla u|^2.\end{aligned}\quad (2.6)$$

La igualdad que aparece primero se sigue de (2.4) y la segunda ocurre de nuevo por la Observación 2.19. Juntando (2.5) y (2.6) llegamos a

$$\nabla u \cdot x \Delta u = \operatorname{div}((\nabla u \cdot x)\nabla u) - \operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}x\right) + \frac{n-2}{2}|\nabla u|^2.\quad (2.7)$$

De modo que juntando (2.3) y (2.7) y usando la aditividad de la divergencia obtenemos

$$\operatorname{div}\left(-(\nabla u \cdot x)\nabla u + \frac{|\nabla u|^2}{2}x - F(u)x\right) = \frac{n-2}{2}|\nabla u|^2 - nF(u).$$

Integrando sobre Ω y usando el teorema de la divergencia de Gauss (Teorema 2.18),

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} F(u) = \int_{\partial\Omega} \left(-(\nabla u \cdot x)\nabla u + \frac{|\nabla u|^2}{2}x - F(u)x\right) \cdot \vartheta \, d\sigma.\quad (2.8)$$

Como $u = 0$ en $\partial\Omega$, obtenemos que $F(u) = F(0) = 0$ en $\partial\Omega$. Además, ∇u es un múltiplo de ϑ en tales puntos, de aquí que $\nabla u(x) = \frac{\partial u}{\partial \vartheta}(x)\vartheta(x)$ para cada $x \in \partial\Omega$. Como $|\vartheta| \equiv 1$ se sigue que $|\nabla u| = \left|\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right|$ en $\partial\Omega$. De lo expuesto en (2.8) concluimos que

$$\begin{aligned}\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} F(u) &= - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 \vartheta \cdot x \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 \vartheta \cdot x \, d\sigma \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2 \vartheta \cdot x \, d\sigma.\end{aligned}$$

■

Observación 2.21. *Lo primero que hay que notar es que la forma particular de f no se involucra en la prueba, por tanto, si consideramos el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces la identidad de Pohozaev correspondiente también vale, desde luego exigiendo ciertas condiciones sobre f . Lo que no es inmediato es que, aunque Ω no sea acotado, el resultado sigue siendo válido (ya no se puede usar el teorema de la divergencia de manera directa).

La prueba de esto último, dada por Kavian, es muy similar a la anterior. Primero se trunca usando funciones

$$\psi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dadas por} \quad \psi_m(x) := \psi\left(\frac{|x|^2}{m^2}\right),$$

donde $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ cumple $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(r) = 1$ para $r \leq 1$ y $\psi(r) = 0$ para $r \geq 2$. Se aplica el teorema de la divergencia. Las funciones ψ_m se remueven más tarde por medio del TCD. Para ver la demostración consultar [27].

La identidad anterior nos permite conseguir nueva información sobre \wp_Ω cuando Ω tiene cierto parecido a una “estrella”, demos la definición precisa.

Definición 2.22. Dado $x_0 \in \Omega$ decimos que Ω es estrictamente estrellado con respecto a x_0 si se cumple que para cada $x \in \bar{\Omega}$, $\{tx + (1-t)x_0 : t \in [0, 1]\} \subseteq \Omega$.

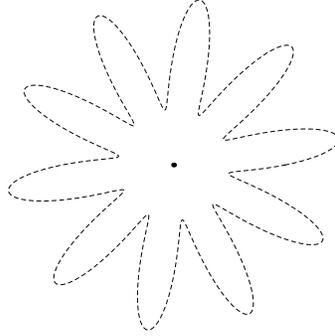


Figura 2.2: Un dominio estrictamente estrellado (con respecto al punto distinguido). Cabe mencionar que los conjuntos estrictamente estrellados, contrario a lo que indica su nombre, no siempre tienen la forma de una “estrella”.

Diremos simplemente que Ω es estrictamente estrellado si Ω es estrictamente estrellado con respecto a $0 \in \Omega$. La definición es geoméricamente clara, por ejemplo, se puede ver que un semiespacio, digamos $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > c\}$ para alguna $c \in \mathbb{R}$, es estrictamente estrellado con respecto a cada uno de sus puntos. Sin embargo, para involucrar la identidad de Pohozaev y este concepto requerimos cierta relación dada por el vector normal.

Lema 2.23. Si Ω es suave y estrictamente estrellado, entonces

$$x \cdot \vartheta(x) > 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

en donde ϑ denota el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

La prueba se sale del contexto y no es muy difícil, se puede ver en [15]. A continuación se muestra un resultado de no existencia para conjuntos estrellados en el sentido estricto. Es claro que seguirá valiendo para estrictamente estrellados respecto a un punto distinto del origen.

Corolario 2.24. Si Ω es acotado, suave y estrictamente estrellado, entonces \wp_Ω no tiene solución no trivial.

Demostración. Sea u una solución de \wp_Ω . Por la Observación 2.3 tenemos que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y u es solución clásica de nuestro problema. Utilizando el teorema de Pohozaev (Teorema 2.20), tenemos que se satisface la identidad

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} F(u) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)^2 \vartheta \cdot x \, d\sigma = 0, \quad (2.9)$$

donde $F(t) := \frac{1}{2^*} |t|^{2^*}$ y σ es una parametrización que induce a ϑ vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. Se sigue que como $u \in \mathcal{N}_\Omega$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(u) &= \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2^*} \|u\|^2 \\ &= \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

y entonces tenemos

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - n \int_{\Omega} F(u) = \left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{2^*} \right) \|u\|^2 = 0.$$

De (2.9) y lo anterior se concluye

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)^2 \vartheta \cdot x \, d\sigma = 0.$$

Como $x \cdot \vartheta > 0$, se sigue que $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0$ en $\partial\Omega$ y por tanto $\nabla u(x) = 0$ para cada $x \in \partial\Omega$. De ello, aunque no de manera inmediata, tenemos que la extensión trivial $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces u resuelve $\wp_{\mathbb{R}^n}$ en el sentido clásico, es decir,

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2} u \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

Usando que $\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$ es un abierto no vacío en el cual u se anula, el resultado de continuación única (Teorema 2.10) implica que necesariamente $u = 0$ en \mathbb{R}^n , en particular lo es en Ω . ■

Observación 2.25. *No es difícil ver que si uno no quiere usar continuación única, entonces se puede usar de nuevo el teorema de la divergencia de Gauss. Sin embargo, la conclusión sería más débil. Se probaría que no hay soluciones no triviales de signo constante. Además, de la Observación 2.21, el corolario anterior se puede relajar, en vez de pedir Ω acotado basta con tener $\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$ no vacío.*

A lo que respecta sobre soluciones de energía mínima de \wp_Ω ya hemos prácticamente terminado con el problema, sin embargo, falta mucho por decir sobre soluciones en general. Ya hemos visto que el problema sobre dominios suaves, no densos y estrictamente estrellados solo cuenta con la solución trivial, y tenemos todas las soluciones positivas de $\wp_{\mathbb{R}^n}$. Resulta que el problema sobre dominios arbitrarios (estudiado en los años 80) es sumamente complejo y la respuesta en cuestión a soluciones depende fuertemente de la topología, incluso de la geometría, particular del dominio. Por ejemplo, en 1975 Kazdan y Warner prueban que si el dominio es un anillo $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < a < |x| < b\}$, entonces el problema tiene una infinidad de soluciones que además son radiales (para la demostración ver [21]).

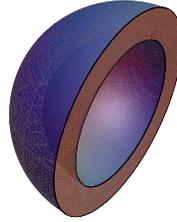


Figura 2.3: El corte transversal de un anillo en \mathbb{R}^3 .

Esto nos hace preguntarnos qué ocurre cuando el dominio no es precisamente un anillo pero sí un “estilo de anillo deformado”. El capítulo final se encarga de responder esta pregunta, al resultado lo conocemos como teorema de Coron. Para demostrar el teorema de Coron requerimos los tres capítulos siguientes.

Capítulo 3

Lema de deformación

Como ya hemos visto, los puntos críticos de funcionales adecuados son las soluciones a nuestras ecuaciones. Resulta que bajo ciertas circunstancias estos puntos críticos están íntimamente relacionados con la topología de ciertos subconjuntos del dominio (los conjuntos de subnivel del funcional). Por ello, conceptos puramente topológicos nos terminan dando valiosa información sobre los puntos críticos. De tal relación lo que a nosotros nos interesa es, bajo la ausencia de puntos críticos de cierto funcional G , poder librarnos de cambios en la topología de los ya mencionados conjuntos de subnivel de G . Esto para permitir “deformaciones continuas” de uno a otro.

En este capítulo H denota un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_H$ inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Además, U denota un abierto de H , $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^2 y $M \subseteq U$ una subvariedad cerrada de H de clase C^2 inducida por ψ (es decir, M es un subconjunto cerrado de H y $M = \psi^{-1}[a]$ con a valor regular de ψ y ψ de clase C^2).

3.1. Lema de deformación

Definición 3.1. Sean $X \subseteq U$ y $a \in \mathbb{R}$. El conjunto de subnivel a de G en X se define como $G^a(X) := \{u \in X : G(u) < a\}$.

Consideremos la función $f : I := [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \cos(x)$. Tenemos un

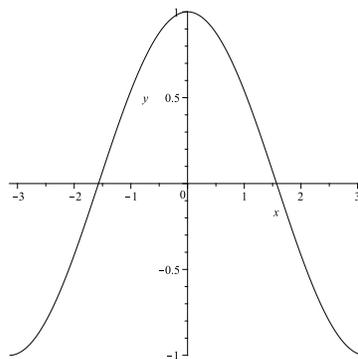


Figura 3.1: Gráfica de la función f .

máximo global en 0 (con valor 1) por lo que si $a > 1$, $f^a(I) = I$ y si $a < 1$ entonces $f^a(I) = [-\pi, x_1) \cup (x_2, \pi]$ para $x_1 < 0 < x_2$ que dependen de a . Es decir, los subconjuntos de nivel correspondientes a reales mayores al valor crítico 1 son conexos y los correspondientes a menores que 1 son disconexos. (Para un ejemplo sin utilizar máximos globales ver [3].)

Esto sugiere que los cambios en la topología de los subniveles son evidencia de un punto crítico. Desgraciadamente lo anterior no es necesariamente cierto: considérese la función $g(x) := xe^{1-x}$.

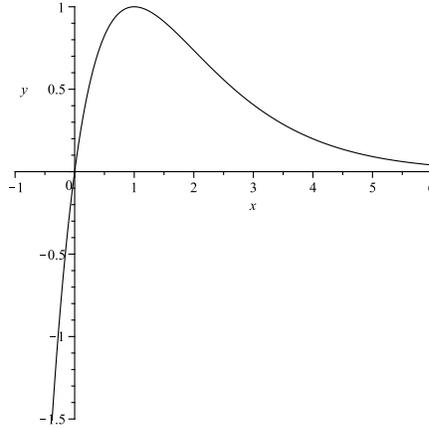


Figura 3.2: Gráfica de la función g .

Para $a \in (0, 1)$ los subniveles en \mathbb{R} son disconexos a diferencia de aquéllos para $a < 0$, sin embargo 0 no es un valor crítico.

Resulta que el cambio de topología es más sensible de lo que nos gustaría. En el último caso lo que detectó es una sucesión (x_k) divergente a ∞ tal que $g(x_k) \rightarrow 0$ y $g'(x_k) \rightarrow 0$. Faltó que la sucesión convergiera, pues en tal caso el límite sería un punto crítico con valor 0. Esto motiva la Definición 3.3, primero proyectamos (ortogonalmente) el gradiente sobre el plano tangente a nuestra variedad.

Definición 3.2. Se define $\nabla_M G : M \rightarrow H$ como

$$\nabla_M G(u) := \nabla G(u) - \frac{\langle \nabla G(u), \nabla \psi(u) \rangle_H}{\|\nabla \psi(u)\|_H^2} \nabla \psi(u).$$

Tal función es llamada el gradiente de G sobre M y resulta continua.

Definición 3.3. Sean (u_k) una sucesión en H y $c \in \mathbb{R}$. Decimos que (u_k) es de Palais-Smale (P.S.) sobre M para G en c si $(u_k) \subseteq M$, $G(u_k) \rightarrow c$ y $\nabla_M G(u_k) \rightarrow 0$. Diremos G cumple la condición de Palais-Smale sobre M en c si toda sucesión del tipo anterior tiene una subsucesión convergente en H .

Lo primero que hay que observar es que como M es cerrada en H , entonces una sucesión del tipo anterior que tenga la cualidad de converger necesariamente lo hará a un punto de M . Más aún, en el caso de que M sea compacta tendremos automáticamente que nuestro funcional cumplirá la condición de P.S. siempre. Desde luego que si una sucesión

del tipo anterior converge a $u \in M$ entonces u será un punto crítico de G sobre M con valor c .

El resultado de existencia y unicidad que damos por hecho es el siguiente; se puede consultar una prueba completa y con todo detalle en [1], no es breve.

Proposición 3.4. *Si $\chi : M \rightarrow H$ es un campo vectorial tangente a M (es decir, $\chi(u) \in T_u M$ para cada $u \in M$) y localmente Lipschitz, entonces para cada $u \in M$ existe un intervalo $0 \in I(u) := (T^-(u), T^+(u)) \subseteq \mathbb{R}$ y una única función diferenciable $\eta : I(u) \rightarrow M$ que satisface el problema*

$$\begin{cases} \eta'(t) = \chi(\eta(t)) & \text{en } I(u), \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

Más aún, si $\|\chi(\eta(t))\|_H \leq C < \infty$ para cada $t \in [0, T^+(u))$ entonces $T^+(u) = \infty$. Hay un resultado análogo para $T^-(u)$.

Requerimos la siguiente notación. Para $\emptyset \neq A \subseteq M$ y $\delta > 0$ definimos

$$B_\delta(A) := \{u \in M : \text{dist}(u, A) < \delta\} \quad \text{y} \quad B_\delta(\emptyset) := \emptyset.$$

Además, para $c \in \mathbb{R}$ abreviamos

$$M_c := G^c(M) \quad \text{y} \quad K_c := \{u \in M : G(u) = c, \nabla_M G(u) = 0\}.$$

Un lema anterior al resultado principal de la sección.

Lema 3.5. *Sean $\delta > 0$ y $-\infty < a \leq b < \infty$. Si para cada $c \in [a, b]$ G cumple P.S. sobre M en c , entonces existe un $\gamma > 0$ tal que*

$$\|\nabla_M G(u)\|_H \geq \frac{\gamma}{\delta} \quad \forall u \in M \cap G^{-1}[a - \gamma, b + \gamma] - \bigcup_{c \in [a, b]} B_\delta(K_c).$$

Demostración. Supongamos falso el resultado. Entonces se puede construir una sucesión (u_k) en M que satisface $\nabla_M G(u_k) \rightarrow 0$, $G(u_k) \in [a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}]$ y

$$u_k \notin B_\delta(K_c) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall c \in [a, b]. \quad (3.1)$$

De la compacidad de $[a - 1, b + 1]$ es fácil ver que, pasando a una subsucesión, $G(u_k) \rightarrow c_0 \in [a, b]$ y podemos suponer que entonces $u_k \rightarrow u$ en M , es decir, $u \in K_{c_0}$ en contradicción con (3.1). ■

Definición 3.6. *Sean A y B subconjuntos de X espacio métrico. Decimos A se deforma a B en X si existe $h : A \times [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que para cada $x \in A$, $h(x, 0) = x$ y $h(x, 1) \in B$. A h se le llama deformación. Cuando B es un punto decimos A es contraíble en X . Cuando X es contraíble en X decimos solamente X es contraíble.*

El lema de deformación que presentamos está escrito de una forma más técnica que lo normal. Lo enunciamos así pues de esa manera se usará posteriormente. Sea c cualquier número real.

Teorema 3.7 (Lema de deformación). *Si G cumple P.S. sobre M en c , entonces para cada $\delta > 0$ existe $\gamma > 0$ con la siguiente propiedad. Para todo $\varepsilon \in (0, \gamma]$, $M_{c+\varepsilon} - B_{3\delta}(K_c)$ se deforma a $M_{c-\varepsilon}$ en M . Más aún, la deformación η tiene como dominio $M \times [0, 1]$ y ocurre que para cada $u \in M_{c-2\varepsilon}$ y cada $t \in [0, 1]$, $\eta(u, t) = u$.*

Demostración. Sea $\delta > 0$. Escogemos $\gamma > 0$ tal que $\|\nabla_M G(u)\|_H \geq \frac{2\gamma}{\delta}$ para todo $u \in G^{-1}[c - 2\gamma, c + 2\gamma] \cap M - B_\delta(K_c)$. Sea $\varepsilon \in (0, \gamma]$ y definamos

$$A := (M - G^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cup B_\delta(K_c), \quad B := G^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] - B_{2\delta}(K_c).$$

Consideremos entonces $\rho : U \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\rho(u) := \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)},$$

notemos que $\rho = 0$ en A y $\rho = 1$ en B . Con ella podemos definir $\chi : M \rightarrow H$ como

$$\chi(u) := \begin{cases} -\rho(u) \frac{\nabla_M G(u)}{\|\nabla_M G(u)\|_H^2} & \text{si } \nabla_M G(u) \neq 0, \\ 0 & \text{si } u \in A. \end{cases}$$

No es difícil probar que χ es un campo vectorial tangente a M y localmente Lipschitz, además $\|\chi(u)\|_H \leq \frac{\delta}{2\varepsilon}$ para cada $u \in M$. La Proposición 3.4 asegura entonces la existencia de $\sigma : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que para todo $u \in M$ y todo $t \in \mathbb{R}$, $\sigma(u, 0) = u$ y $\frac{\partial}{\partial t} \sigma(u, t) = \chi(\sigma(u, t))$. Entonces, de la definición de $\nabla_M G$, uno puede ver que la función $G(\sigma(u, \cdot))$ es decreciente en \mathbb{R} .

Definimos la función $\eta : M \times [0, 1] \rightarrow M$ como

$$\eta(u, s) := \sigma(u, 2\varepsilon s).$$

Es claro que η es continua y que $\eta(u, 0) = u$ para todo $u \in M$. Sea $u \in M_{c+\varepsilon} - B_{3\delta}(K_c)$, tenemos dos casos posibles. En el primero $\eta(u, s) \in M_{c-\varepsilon}$ para algún $s \in [0, 1]$, entonces $G(\eta(u, 1)) \leq G(\sigma(u, 2\varepsilon s)) < c - \varepsilon$ y $\eta(u, 1) \in M_{c-\varepsilon}$.

En el segundo caso supongamos que $\eta(u, s) \notin M_{c-\varepsilon}$ para todo $s \in [0, 1]$, entonces $\eta(u, s) \in G^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ para cada $s \in [0, 1]$. Por el teorema del valor medio se tiene que si $t \in [0, 2\varepsilon]$, $\|\sigma(u, t) - \sigma(u, 0)\|_H \leq \delta$ lo que lleva a que $\sigma(u, t) \notin B_{2\delta}(K_c)$ y por tanto $\sigma(u, t) \in B$. Así, del teorema fundamental del cálculo tenemos

$$G(\sigma(u, 2\varepsilon)) - G(\sigma(u, 0)) = \int_0^{2\varepsilon} -\rho(\sigma(u, t)) dt = -2\varepsilon.$$

Se sigue que $G(\eta(u, 1)) = G(\eta(u, 0)) - 2\varepsilon < c - \varepsilon$. Es decir, en cualquier caso $\eta(u, 1) \in M_{c-\varepsilon}$ y hemos probado la deformación.

Por último, sea $u \in M_{c-2\varepsilon}$. Entonces $\sigma(u, t) \notin G^{-1}[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$ para cada $t \in [0, \infty)$ y por tanto $\chi(\sigma(u, t)) = 0$ para tales t . Se sigue que $\sigma(u, \cdot)$ es constante en $[0, \infty)$, esto implica que $\eta(u, t) = u$ para cada $t \in [0, 1]$ como dice el enunciado. ■

Capítulo 4

Teorema de Struwe

Durante este capítulo sea $n \geq 3$ y a los dominios A de \mathbb{R}^n les asociamos el problema

$$\wp_A \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } A, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial A. \end{cases}$$

Recordemos al funcional de energía asociado

$$J_A : D_0^{1,2}(A) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad J_A(u) = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} \int_A |u|^{2^*}$$

cuya derivada es

$$J'_A(u)v = \int_A \nabla u \nabla v - \int_A |u|^{2^*-2}uv.$$

Los puntos críticos de J son precisamente las soluciones de \wp_A . Para todo el capítulo fijamos Ω un abierto, conexo, acotado y suave de \mathbb{R}^n . Usamos la notación

$$\begin{aligned} \wp &:= \wp_\Omega, \\ J &:= J_\Omega, \\ |\cdot|_p &:= |\cdot|_{L^p(\Omega)} \quad \text{para } p \in [1, \infty), \\ \|\cdot\| &:= \|\cdot\|_{D_0^{1,2}(\Omega)}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle &:= \langle \cdot, \cdot \rangle_{D_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Recordamos del Capítulo 2 que

$$S = \inf_{0 \neq u \in D_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} = \inf_{0 \neq u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \frac{\|u\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2}{|u|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2}$$

y que $e^* = \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}$. Motivados por el capítulo anterior, nos interesa caracterizar las sucesiones de Palais-Smale de nuestro funcional J . Lo haremos sobre el espacio $D_0^{1,2}(\Omega)$.

Definición 4.1. Sean (u_k) una sucesión en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$. Decimos (u_k) es de Palais-Smale (P.S.) para J en c si $J(u_k) \rightarrow c$ y $\nabla J(u_k) \rightarrow 0$. Decimos J satisface la condición de Palais-Smale en c si toda sucesión del tipo anterior tiene una subsucesión convergente.

De nuevo, una sucesión de P.S. para J en c que converge lo hace a una solución de φ de energía c . Si tal sucesión no converge, ¿se puede concluir algo?. El teorema de Struwe establece, de manera imprecisa, que por lo menos se aproxima a una solución de φ más una suma de soluciones de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$. Más aún, la suma de energía de tales soluciones es precisamente c .

En la tercera sección probamos el teorema de Struwe. La demostración es por medio de dos proposiciones principales, 4.8 y 4.14. Estos a su vez requieren varios lemas previos. En la primera sección nos dedicamos a probar la Proposición 4.8. En la segunda sección probamos la Proposición 4.14. A continuación enunciamos el teorema de Struwe y damos la idea de su prueba.

Teorema (Struwe, 1984). *Sea (u_k) una sucesión de Palais-Smale para J en c . Existen v_0 solución de φ , $m \in \mathbb{N}$, v_1, \dots, v_m soluciones no triviales de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ sucesiones (λ_k^i) y (y_k^i) , respectivamente en $(0, \infty)$ y Ω , tales que pasando a una subsucesión de (u_k) ,*

$$\left\| u_k - v_0 - \sum_{i=1}^m (\lambda_k^i)^{\frac{2-n}{2}} v_i \left(\frac{\cdot - y_k^i}{\lambda_k^i} \right) \right\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0,$$

$$\|u_k\|^2 \rightarrow \|v_0\|^2 + \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2,$$

$$J(v_0) + \sum_{i=1}^m J_{\mathbb{R}^n}(v_i) = c,$$

$$\frac{1}{\lambda_k^i} \text{dist}(y_k^i, \partial\Omega) \rightarrow \infty \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

(En donde v_0 es posiblemente trivial y m es posiblemente cero.)

La idea para la demostración del teorema de Struwe es la siguiente. Empezamos tomando una sucesión de P.S. para J en cierto nivel c . Como ésta es acotada podemos suponer converge débilmente a una solución v_0 de φ . Esto lleva a que la sucesión dada por

$$u_k^1 := u_k - v_0$$

es de P.S. para J en un nivel menor o igual al anterior, $c - J(v_0)$. Ahora hay dos casos, si (u_k^1) converge a 0 en $L^{2^*}(\Omega)$ entonces converge a 0 en $D_0^{1,2}(\Omega)$ (usando que (u_k^1) es de P.S.), en tal caso el enunciado del teorema de Struwe se cumple para $m = 0$. El caso interesante es cuando u_k^1 no converge a 0 en tal espacio, esto implicará la existencia de $\delta \in \left(0, \left(\frac{S}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$ y de sucesiones (y_k^1) y (λ_k^1) , respectivamente en Ω y $(0, \infty)$, tales que

$$\delta = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\lambda_k^1}(y)} |u_k^1|^{2^*} = \int_{B_{\lambda_k^1}(y_k^1)} |u_k^1|^{2^*} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces trasladamos y dilatamos u_k^1 para obtener

$$v_k^1 := (\lambda_k^1)^{\frac{n-2}{2}} u_k^1(\lambda_k^1 \cdot + y_k^1)$$

que podemos suponer converge débilmente a v_1 en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Puesto que el suponer $v_1 = 0$ lleva a que $v_k^1 \rightarrow 0$ en $L_{loc}^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, lo cual contradice a lo anterior, se sigue que $v_1 \neq 0$ y $\lambda_k^1 \rightarrow 0$. Si ocurriera que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k^1} \text{dist}(y_k^1, \partial\Omega) < \infty$ entonces v_1 resuelve $\wp_{\mathbb{R}_+^n}$ para algún semiespacio \mathbb{R}_+^n y la identidad de Pohozaev (versión no acotada) implicaría la contradicción $v_1 = 0$. Así, tal límite es infinito y v_1 resuelve de manera no trivial $\wp_{\mathbb{R}^n}$.

Definimos u_k^2 como

$$u_k^1 - (\lambda_k^1)^{\frac{2-n}{2}} v_1 \left(\frac{\cdot - y_k^1}{\lambda_k^1} \right)$$

pero truncando el segundo término para obtener una sucesión en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Resulta que (u_k^2) es de nuevo de P.S. para J en un nivel estrictamente menor al anterior, el nivel $c - J(v_0) - J_{\mathbb{R}^n}(v_1)$. De nuevo tenemos dos casos, si u_k^2 converge a 0 en $L^{2^*}(\Omega)$ entonces el teorema se cumple para $m = 1$, si no, podemos repetir el procedimiento anterior.

La clave está en que no podemos continuar de esta manera para siempre pues las sucesiones de P.S. ocurren en niveles no negativos y, en lo anterior, el nivel se va bajando cada paso. Por tanto, el enunciado debe satisfacerse para algún m natural.

4.1. Base inductiva

El siguiente lema expresa la condición de convergencia débil en $D_0^{1,2}(\Omega)$ para sucesiones acotadas en términos de funciones de prueba.

Lema 4.2. Sean $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ y (u_k) una sucesión acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Si

$$\langle u_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

entonces $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$.

Demostración. Sean $d > 0$ cota de (u_k) , $v \in D_0^{1,2}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ y $(\varphi_k) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \rightarrow v$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Tomemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_k - v\| < \frac{\varepsilon}{2(d + \|u\|)} \quad \forall k \geq k_0.$$

En particular $\langle u_k, \varphi_{k_0} \rangle \rightarrow \langle u, \varphi_{k_0} \rangle$ por lo que sea $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle u_k, \varphi_{k_0} \rangle - \langle u, \varphi_{k_0} \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq k_1.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} |\langle u_k, v \rangle - \langle u, v \rangle| &\leq |\langle u_k - u, v - \varphi_{k_0} \rangle| + |\langle u_k - u, \varphi_{k_0} \rangle| \\ &\leq \|u_k - u\| \|v - \varphi_{k_0}\| + |\langle u_k, \varphi_{k_0} \rangle - \langle u, \varphi_{k_0} \rangle| \\ &< (\|u_k\| + \|u\|) \|v - \varphi_{k_0}\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq (d + \|u\|) \frac{\varepsilon}{2(d + \|u\|)} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \quad \forall k \geq k_1. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\langle u_k, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle$. Como lo anterior ocurre para todo $v \in D_0^{1,2}(\Omega)$, tenemos que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$. ■

Lema 4.3. ∇J es débilmente continuo.

Demostración. Supongamos que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Como Ω es acotado se sigue del teorema de Rellich-Kondrachov que, pasando a una subsucesión, $u_k \rightarrow u$ en $L^{2^*-1}(\Omega)$, que $u_k \rightarrow u$ c.d. en Ω y que existe $g \in L^{2^*-1}(\Omega)$ tal que $|u_k| \leq g$ c.d. en Ω y para todo $k \in \mathbb{N}$. Por el TCD tenemos

$$\int_{\Omega} |u_k|^{2^*-2} u_k \varphi \rightarrow \int_{\Omega} |u|^{2^*-2} u \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Es decir, si

$$\phi := |\cdot|_{2^*}^{2^*} : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

entonces

$$\langle \nabla \phi(u_k), \varphi \rangle \rightarrow \langle \nabla \phi(u), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4.1)$$

Notemos además que

$$\begin{aligned} |\phi'(u_k)v| &\leq 2^* |u_k|^{2^*-1} |v|_1 \\ &\leq 2^* |u_k|_{\frac{2^*}{2^*-1}}^{2^*-1} |v|_{2^*} \\ &= 2^* |u_k|_{2^*}^{2^*-1} |v|_{2^*} \\ &\leq C \|u_k\|^{2^*-1} \|v\| \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall v \in D_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Como (u_k) es acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$, $(\nabla \phi(u_k))$ es acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Juntando (4.1) con lo anterior y aplicando el Lema 4.2 se obtiene que

$$\nabla \phi(u_k) \rightharpoonup \nabla \phi(u) \quad \text{débilmente en } D_0^{1,2}(\Omega).$$

Por tanto, $\nabla J(u_k) \rightharpoonup \nabla J(u)$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$. ■

Observación 4.4. Definamos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(t) := |t|^{2^*-2}t$. Por el teorema del valor medio tenemos

$$|f(t+s) - f(t)| \leq (2^* - 1)(|t| + |s|)^{2^*-2} |s| \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

A continuación mostramos fuertes consecuencias de este simple hecho. En el próximo lema denotamos

$$\psi := |\cdot|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} : D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Lema 4.5. Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ y $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces, pasando a una subsucesión,

$$\nabla \psi(u_k) - \nabla \psi(u_k - u) \rightarrow \nabla \psi(u) \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $f(t) := |t|^{2^*-2}t$. Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u_k)v - f(u_k - u)v - f(u)v = \frac{1}{2^*}(\psi'(u_k)v - \psi'(u_k - u)v - \psi'(u)v) \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

por lo que es suficiente mostrar que

$$\sup_{0 \neq v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(u_k)v - f(u_k - u)v - f(u)v \right| \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Fijemos $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ y sea $V_R := \mathbb{R}^n - \overline{B}_R(0)$. Notemos que $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{2^*} + \frac{1}{2} = 1$. Usando la Observación 4.4, que (u_k) está acotada en $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} |f(u_k)v - f(u_k - u)v|_{L^1(V_R)} &\leq (2^* - 1)(|u_k| + |u|)^{2^*-2}uv|_{L^1(V_R)} \\ &\leq (2^* - 1)(|u_k| + |u|)^{2^*-2}|_{L^{\frac{n}{2}}(V_R)} |u|_{L^{2^*}(V_R)} |v|_{L^{2^*}(V_R)} \\ &\leq (2^* - 1)S^{-\frac{1}{2}}\|u_k\| + \|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*-2} |u|_{L^{2^*}(V_R)} \|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{|x|>R} |u|^{2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Además,

$$\begin{aligned} |f(u)v|_{L^1(V_R)} &\leq \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} |f(u)|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(V_R)} \\ &\leq S^{-\frac{1}{2}}\|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{|x|>R} |u|^{2^*} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sean $p := \frac{2n}{2n-5} \leq 2^*$ y $r := \frac{2n}{5}$. La desigualdad de Hölder implica que

$$\begin{aligned} |f(u_k)v - f(u_k - u)v - f(u)v|_{L^1(B_R(0))} &\leq \\ |f(u_k) - f(u_k - u) - f(u)|_{L^r(B_R(0))} |v|_{L^p(B_R(0))} &\leq \\ C_R |f(u_k) - f(u_k - u) - f(u)|_{L^r(B_R(0))} \|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} &\quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De (4.3), (4.4) y (4.5) se sigue que si

$$d_R := \int_{|x|>R} |u|^{2^*},$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(u_k)v - f(u_k - u)v - f(u)v \right| &\leq \\ C_R \|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} |f(u_k) - f(u_k - u) - f(u)|_{L^r(B_R(0))} + C \|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} (d_R^{\frac{1}{2^*}} + d_R^{\frac{2^*-1}{2^*}}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

y esto ocurre para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ y $k \in \mathbb{N}$.

Fijemos $R > 0$. Usando de nuevo la Observación 4.4 y que $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(u_k) - f(u_k - u)| &\leq (2^* - 1)(|u| + |u_k|)^{2^* - 2} |u| \\ &\leq (2^* - 1)2^{2^* - 2}(|u|^{2^* - 2} + |u_k|^{2^* - 2})|u| \\ &\leq C_R(1 + |u_k|^{2^* - 2}) \quad \text{c.d. en } B_R(0), \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Definimos

$$q := \frac{8n}{5n - 10} \in (1, 2^*).$$

Como $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ podemos suponer que $u_k \rightarrow u$ c.d. en \mathbb{R}^n y $u_k \rightarrow u$ en $L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$, en particular, $u_k \rightarrow u$ en $L^q(B_R(0))$. Como consecuencia de ello, de que $\frac{q}{r} = 2^* - 2$ y de (4.7) tenemos que, pasando a una subsucesión que depende de R ,

$$f(u_k) - f(u_k - u) \rightarrow f(u) \quad \text{en } L^r(B_R(0)).$$

Para que una sola subsucesión cumpla lo anterior para toda $R > 0$ simplemente se usa un “argumento diagonal” (ver Proposición 1.12). Finalmente, como

$$d_R \rightarrow 0 \quad \text{si } R \rightarrow \infty,$$

de (4.6) y lo anterior se concluye (4.2). ■

Para el próximo corolario sea $\psi := |\cdot|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} : D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ y consideremos una sucesión $(\varphi_k) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$0 \leq \varphi_k \leq 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Corolario 4.6. *Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $u\varphi_k \rightarrow u$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ y $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces, pasando a una subsucesión,*

$$\begin{aligned} \nabla\psi(u_k) - \nabla\psi(u_k - u\varphi_k) - \nabla\psi(u\varphi_k) &\rightarrow 0 \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \\ \|u_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 - \|u_k - u\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 - \|u\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 &\rightarrow 0, \\ |u_k|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} - |u_k - u\varphi_k|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} - |u\varphi_k|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $f(t) := |t|^{2^* - 2}t$. De la Observación 4.4 y de que $|\varphi_k| \leq 1$ en \mathbb{R}^n tenemos que

$$\begin{aligned} |f(u_k) - f(u_k - u\varphi_k)| &\leq (2^* - 1)(|u_k| + |u\varphi_k|)^{2^* - 2} |u\varphi_k| \\ &\leq (2^* - 1)(|u_k| + |u|)^{2^* - 2} |u| \quad \text{c.d. en } \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos proceder de manera análoga que en la prueba del lema anterior para concluir

$$\nabla\psi(u_k) - \nabla\psi(u_k - u\varphi_k) \rightarrow \nabla\psi(u) \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Como ψ es de clase C^1 entonces $\nabla\psi$ es continuo, se sigue que

$$\nabla\psi(u\varphi_k) \rightarrow \nabla\psi(u) \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Las dos convergencias anteriores implican que

$$\nabla\psi(u_k) - \nabla\psi(u_k - u\varphi_k) - \nabla\psi(u\varphi_k) \rightarrow 0 \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Por otra parte, como (u_k) está acotada en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} \left| \|u_k - u\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 - \|u_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 + \|u\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \right| &\leq 2\left| \|u\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 - \|u\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \right| \\ &\quad + 2\left| \|u\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 - \langle u, u_k \rangle_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \right| \\ &\quad + C\|u - u\varphi_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

y copiando la idea en la prueba del lema de Brézis-Lieb (ver Proposición A.5) obtenemos que

$$\|u_k - u\varphi_k\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} - \|u_k\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} + \|u\varphi_k\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

En el próximo corolario denotemos

$$\phi := |\cdot|_{2^*}^{2^*} : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Corolario 4.7. *Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y $u \in C^0(\overline{\Omega})$ entonces, pasando a una subsucesión,*

$$\nabla\phi(u_k) - \nabla\phi(u_k - u) \rightarrow \nabla\phi(u) \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega).$$

Demostración. Recordemos que si $v \in D_0^{1,2}(\Omega)$, entonces al extenderla como cero fuera de Ω obtenemos que $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. El resultado se sigue entonces al aplicar el Lema 4.5 a (u_k) y u . \blacksquare

Podría decirse que la siguiente proposición es la base inductiva de la prueba del teorema de Struwe.

Proposición 4.8. *Si (u_k) es una sucesión de P.S. para J en c y $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ entonces, pasando a una subsucesión, $(u_k - u)$ es una sucesión de P.S. para J en $c - J(u)$.*

Demostración. Es claro que (u_k) está acotada en $L^{2^*}(\Omega)$ y, pasando a una subsucesión, $u_k \rightarrow u$ c.d. en Ω . Del lema de Brézis-Lieb (ver Proposición A.5) y la hipótesis tenemos entonces que

$$\begin{aligned} |J(u_k - u) - (c - J(u))| &\leq \\ \frac{1}{2} \left| \|u_k - u\|^2 + \|u\|^2 - \|u_k\|^2 \right| &+ \frac{1}{2^*} \left| \|u_k - u\|_{2^*}^{2^*} + \|u\|_{2^*}^{2^*} - \|u_k\|_{2^*}^{2^*} \right| + |J(u_k) - c| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$J(u_k - u) \rightarrow c - J(u).$$

Usando el Lema 4.3 obtenemos que $\nabla J(u_k) \rightharpoonup \nabla J(u)$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y por tanto, $\nabla J(u) = 0$. Se sigue de la Observación 2.3 y el Corolario 4.7 que

$$\nabla J(u_k) - \nabla J(u_k - u) \rightarrow \nabla J(u) = 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega),$$

esto implica que

$$\nabla J(u_k - u) \rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega). \quad \blacksquare$$

4.2. Paso inductivo

Ahora vamos rumbo a probar la ya mencionada Proposición 4.14. Sea $\varepsilon > 0$ y

$$\Omega_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \Omega.$$

Notemos que Ω_ε es de nuevo un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n . Sean $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ y $v \in D_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$, entonces sabemos que $u_{\frac{1}{\varepsilon}} \in D_0^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ y $v_\varepsilon \in D_0^{1,2}(\Omega)$, más aún, se tiene el siguiente resultado que usamos adelante.

Lema 4.9. $J'(u)v_\varepsilon = J'_{\Omega_\varepsilon}(u_{\frac{1}{\varepsilon}})v$.

Demostración. Basta notar que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_\varepsilon &= \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \varepsilon^{\frac{n}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u(\varepsilon x) \nabla v(x) dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_{\frac{1}{\varepsilon}} \nabla v. \end{aligned}$$

Y que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{2^*-2} u v_\varepsilon &= \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \varepsilon^n \int_{\Omega_\varepsilon} |u(\varepsilon x)|^{2^*-2} u(\varepsilon x) v(x) dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |u_{\frac{1}{\varepsilon}}|^{2^*-2} u_{\frac{1}{\varepsilon}} v. \end{aligned}$$

■

Se tiene por tanto que u es solución de φ precisamente cuando $u_{\frac{1}{\varepsilon}}$ es solución de $\varphi_{\Omega_\varepsilon}$. De manera similar, si ρ es una isometría lineal de \mathbb{R}^n y $u, v \in D_0^{1,2}(\Omega)$, entonces $J'(u)v = J'_{\rho(\Omega)}(u \circ \rho^{-1})(v \circ \rho^{-1})$. Lo mismo ocurre con las traslaciones.

Probaremos un lema técnico. Antes hacemos una aclaración y enunciamos un lema previo. Decimos que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un semiespacio si existen una rotación ρ y una traslación T de \mathbb{R}^n tales que $(\rho \circ T)[S] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

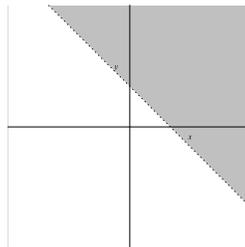


Figura 4.1: Un semiespacio en \mathbb{R}^2 .

Demos por hecho la siguiente consecuencia, la cual resulta bastante intuitiva, del teorema de la función implícita. Denotamos por ϑ al vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

Lema 4.10. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B_\varepsilon(x - \varepsilon\vartheta(x)) \subseteq \Omega \quad \text{y} \quad B_\varepsilon(x + \varepsilon\vartheta(x)) \subseteq \mathbb{R}^n - \bar{\Omega} \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Lema 4.11. *Sean $(\lambda_k) \subseteq (0, \infty)$ tal que $\lambda_k \rightarrow 0$, $(y_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Omega_k := \frac{1}{\lambda_k}(\Omega - y_k)$.*

(1) *Si $\left(\frac{1}{\lambda_k} \text{dist}(y_k, \partial\Omega)\right)$ es acotada entonces existe un semiespacio \mathbb{R}_+^n que, salvo una subsucesión, satisface lo siguiente. Para cada K compacto de $\mathbb{R}^n - \partial\mathbb{R}_+^n$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$K \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq \bigcap_{k \geq k_0} \Omega_k \quad \text{y} \quad K \cap (\mathbb{R}^n - \mathbb{R}_+^n) \subseteq \bigcap_{k \geq k_0} (\mathbb{R}^n - \bar{\Omega}_k).$$

(2) *Si $\left(\frac{1}{\lambda_k} \text{dist}(y_k, \partial\Omega)\right)$ no es acotada y $(y_k) \subseteq \bar{\Omega}$ entonces, salvo una subsucesión, se satisface lo siguiente. Para cada K compacto de \mathbb{R}^n existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$K \subseteq \bigcap_{k \geq k_0} \Omega_k.$$



Figura 4.2: Demos un ejemplo en concreto, sean $\Omega = B_1^2(0)$ y $\lambda_k = \frac{1}{k}$. Para lograr las hipótesis de 1) tomamos $y_k \equiv (0, 1)$ y en la gráfica de la izquierda se exponen Ω_1 , Ω_4 y Ω_{10} que ilustran la “convergencia” al semiespacio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Tomando ahora $y_k \equiv (0, \frac{1}{2})$ logramos las condiciones de 2) y haciendo lo mismo, obtenemos la imagen de la derecha en donde la convergencia es ahora a \mathbb{R}^2 .

Demostración. Denotemos

$$\rho_k := \frac{1}{\lambda_k} \text{dist}(y_k, \partial\Omega)$$

$$\varphi_k(x) := \frac{1}{\lambda_k}(x - y_k).$$

Usando la compacidad de $\partial\Omega$, para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $x_k \in \partial\Omega$ que cumpla

$$\text{dist}(y_k, \partial\Omega) = |y_k - x_k|.$$

(1) Supongamos que (ρ_k) es acotada. Pasando a una subsucesión tenemos que $x_k \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ y que $\rho_k \rightarrow \rho$. Sin perder generalidad, podemos suponer además que $\vartheta(x_0) = (0, \dots, 0, -1)$, donde ϑ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. Usando el Lema 4.10, sea $\varepsilon > 0$ que cumpla

$$B_\varepsilon(x - \varepsilon\vartheta(x)) \subseteq \Omega \quad \text{y} \quad B_\varepsilon(x + \varepsilon\vartheta(x)) \subseteq \mathbb{R}^n - \bar{\Omega} \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Bajo una subsucesión, se pueden distinguir tres casos:

$$\begin{aligned}(y_k) &\subseteq \Omega, \\ (y_k) &\subseteq \mathbb{R}^n - \overline{\Omega} \\ (y_k) &\subseteq \partial\Omega.\end{aligned}$$

Supongamos $(y_k) \subseteq \Omega$. En este caso podemos denotar

$$v_k := \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} = -\vartheta(x_k)$$

y proponemos como semiespacio a

$$\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > -\rho\}.$$

Sean K un compacto cualquiera de $\mathbb{R}^n - \partial\mathbb{R}_+^n$ y $R > 0$ que satisfaga

$$K \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq B_R(0, \dots, 0, R - \rho) \quad \text{y} \quad K \cap (\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}_+^n}) \subseteq B_R(0, \dots, 0, -R - \rho),$$

como

$$(R - \rho_k)v_k \rightarrow (R - \rho)(0, \dots, 0, 1) \quad \text{y} \quad (-R - \rho_k)v_k \rightarrow (-R - \rho)(0, \dots, 0, 1),$$

entonces podemos suponer que para k suficientemente grande,

$$K \cap \mathbb{R}_+^n \subseteq B_R((R - \rho_k)v_k) \quad \text{y} \quad K \cap (\mathbb{R}^n - \overline{\mathbb{R}_+^n}) \subseteq B_R((-R - \rho_k)v_k). \quad (4.8)$$

Finalmente, como $\frac{\varepsilon}{\lambda_k} \rightarrow \infty$, para k suficientemente grande tenemos que

$$B_R(Rv_k - \rho_k v_k) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{\lambda_k}} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_k} v_k - \rho_k v_k \right) = \varphi_k(B_\varepsilon(x_k - \varepsilon\vartheta(x_k))) \subseteq \Omega_k,$$

y también

$$B_R(-Rv_k - \rho_k v_k) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{\lambda_k}} \left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_k} v_k - \rho_k v_k \right) = \varphi_k(B_\varepsilon(x_k + \varepsilon\vartheta(x_k))) \subseteq \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}_k.$$

Se concluye usando (4.8), lo anterior y que $K \cap \partial\mathbb{R}_+^n = \emptyset$.

El caso $(y_k) \subseteq \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$ se prueba de manera análoga, solo que se sugiere como semiespacio

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \rho\}.$$

Además, la prueba anterior se puede adaptar fácilmente si $(y_k) \subseteq \partial\Omega$, el semiespacio que sirve en tal caso es

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

(2) Supongamos que (ρ_k) no es acotada y que $(y_k) \subseteq \overline{\Omega}$. Bajo una subsucesión se tiene $\rho_k \rightarrow \infty$. Sea K un compacto de \mathbb{R}^n y tomemos $R > 0$ tal que

$$K \subseteq B_R(0).$$

Para k suficientemente grande logramos $\rho_k > R$ y entonces

$$B_R(0) \subseteq B_{\rho_k}(0) = \varphi_k(B_{\lambda_k \rho_k}(y_k)).$$

Finalmente, recordando que $\lambda_k \rho_k = \text{dist}(y_k, \partial\Omega)$ y usando que $y_k \in \bar{\Omega}$, es fácil ver que

$$B_{\lambda_k \rho_k}(y_k) \subseteq \Omega \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que para k suficientemente grande

$$K \subseteq \Omega_k.$$

■

Necesitamos un último resultado antes de probar la Proposición 4.14. Para el siguiente lema sean

$$\begin{aligned} (\lambda_k) &\subseteq (0, \infty), \\ (y_k) &\subseteq \bar{\Omega}, \\ \Omega_k &:= \frac{1}{\lambda_k}(\Omega - y_k), \\ (u_k) &\subseteq D_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Extendiendo las últimas como cero fuera de Ω defínase

$$v_k := \lambda_k^{\frac{n-2}{2}} u_k(\lambda_k \cdot + y_k) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \quad (v_k \in D_0^{1,2}(\Omega_k)).$$

Supongamos que

$$\lambda_k \rightarrow 0$$

y consideremos Ω_∞ que cumple lo establecido en el enunciado del lema anterior, donde

$$\Omega_\infty := \begin{cases} \mathbb{R}_+^n & \text{si } \left(\frac{1}{\lambda_k} \text{dist}(y_k, \partial\Omega)\right) \text{ es acotada,} \\ \mathbb{R}^n & \text{si no.} \end{cases}$$

Lema 4.12. *Si*

$$\begin{aligned} \nabla J(u_k) &\rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega), \\ v_k &\rightharpoonup v \quad \text{débilmente en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

entonces v es solución de φ_{Ω_∞} .

Demostración. Por la Proposición 1.12 podemos suponer que $v_k \rightarrow v$ en $L_{loc}^{2^*-1}(\mathbb{R}^n)$ y que $v_k \rightarrow v$ c.d. en \mathbb{R}^n . Primero es necesario que $v \in D_0^{1,2}(\Omega_\infty)$. En el caso en que $\Omega_\infty = \mathbb{R}^n$ esto es inmediato. Si $\Omega_\infty = \mathbb{R}_+^n$ tenemos a primera vista solo que $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$. Como el lema anterior implica que $v = 0$ c.d. en $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}_+^n$, se sigue de la Observación 1.5 que de hecho $v \in D_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^n)$.

Verifiquemos ahora que $\nabla J_{\Omega_\infty}(v) = 0$. Fijemos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\infty)$ y definamos la sucesión

$$\varphi_k := \lambda_k^{\frac{2-n}{2}} \varphi \left(\frac{1}{\lambda_k}(\cdot - y_k) \right).$$

El lema anterior indica que, pasando a una subsucesión, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_k)$ para todo $k \geq k_0$, esto es, $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ para todo $k \geq k_0$. Así, usando el Lema 4.9 tenemos

$$\begin{aligned} J'_{\Omega_k}(v_k)\varphi &= J'(u_k)\varphi_k \\ &\leq \|\nabla J(u_k)\| \|\varphi_k\| \\ &\leq \|\nabla J(u_k)\| \|\varphi\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall k \geq k_0. \end{aligned}$$

Como $\nabla J(u_k) \rightarrow 0$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ se sigue que

$$J'_{\Omega_k}(v_k)\varphi \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

De ser necesario, extendamos a φ como cero fuera de Ω_∞ , de modo que $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $v_k \rightharpoonup v$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla v_k \nabla \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla \varphi. \quad (4.10)$$

Si

$$\omega := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\} = \varphi^{-1}[\mathbb{R} - \{0\}],$$

entonces ω es un abierto relativamente compacto de \mathbb{R}^n y $v_k \rightarrow v$ en $L^{2^*-1}(\omega)$. Podemos suponer existe $g \in L^{2^*-1}(\omega)$ tal que $|v_k| \leq g$ c.d. en ω , se sigue del TCD que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{2^*-2} v_k \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{2^*-2} v \varphi. \quad (4.11)$$

De (4.10) y (4.11) uno obtiene que $J'_{\Omega_k}(v_k)\varphi \rightarrow J'_{\Omega_\infty}(v)\varphi$ y usando (4.9) concluimos que $J'_{\Omega_\infty}(v)\varphi = 0$. Como esto es cierto para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\infty)$, entonces $\nabla J_{\Omega_\infty}(v) = 0$ como afirma el lema. \blacksquare

Observación 4.13. *¿Qué pasaría si en las hipótesis del lema anterior no tuvieramos $(y_k) \subseteq \bar{\Omega}$ pero sí $\left(\frac{1}{\lambda_k} \text{dist}(y_k, \partial\Omega)\right)$ acotada? De igual manera el Lema 4.11 nos permite concluir que v es solución de $\wp_{\mathbb{R}^n_+}$. Usaremos esta observación en la prueba del teorema de Struwe.*

Para el teorema que sigue sean (λ_k) y (y_k) sucesiones respectivamente en $(0, \infty)$ y Ω , definamos $\Omega_k := \frac{1}{\lambda_k}(\Omega - y_k)$ y sean además

$$\begin{aligned} v &\in D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \\ (u_k) &\subseteq D_0^{1,2}(\Omega), \\ v_k &:= \lambda_k^{\frac{n-2}{2}} u_k(\lambda_k \cdot + y_k) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Tomemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ en $B_1(0)$ y $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - B_2(0)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ defínase

$$r_k := \frac{1}{4} \text{dist}(y_k, \partial\Omega) \neq 0.$$

Desde luego que

$$\varphi_k := \varphi(r_k^{-1}(\cdot - y_k)) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

pero podemos decir más. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(r_k^{-1}(x - y_k)) \neq 0$, entonces $|r_k^{-1}(x - y_k)| < 2$ y $x \in B_{2r_k}(y_k)$. Por tanto,

$$\text{sop}(\varphi(r_k^{-1}(\cdot - y_k))) \subseteq B_{4r_k}(y_k) \subseteq \Omega \quad (\text{pues } (y_k) \subseteq \Omega)$$

y $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente definamos

$$w_k := u_k - \lambda_k^{\frac{2-n}{2}} v \left(\frac{\cdot - y_k}{\lambda_k} \right) \varphi_k \in D_0^{1,2}(\Omega).$$

Tenemos el siguiente resultado de carácter recursivo, éste equivale al paso inductivo en la prueba del teorema de Struwe.

Proposición 4.14. *Si (u_k) es una sucesión de P.S. para J en c y se satisface*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_k} \text{dist}(y_k, \partial\Omega) &\rightarrow \infty, \\ v_k &\rightharpoonup v \quad \text{débilmente en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

entonces, pasando a una subsucesión, (w_k) es una sucesión de P.S. para J en $c - J_{\mathbb{R}^n}(v)$. Más aún,

$$\begin{aligned} \|u_k\|^2 - \|w_k\|^2 &\rightarrow \|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2, \\ \nabla J_{\mathbb{R}^n}(v) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. Como $\lambda_k \rightarrow 0$ es inmediato del lema anterior que $\nabla J_{\mathbb{R}^n}(v) = 0$, de la Observación 2.3 se sigue que $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Por otra parte, un desarrollo directo muestra que si $\eta_k := \varphi(r_k^{-1}\lambda_k \cdot)$,

$$|\nabla(v\eta_k - v)|^2 \leq 2|(1 - \eta_k)\nabla v|^2 + 2|v\nabla\eta_k|^2 \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

Entonces si $\xi_k := \frac{1}{\lambda_k}r_k$, como $\xi_k \rightarrow \infty$, se sigue que

$$\begin{aligned} \|v\eta_k - v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n - B_{\xi_k}(0)} |1 - \eta_k|^2 |\nabla v|^2 + 2 \int_{B_{2\xi_k}(0) - B_{\xi_k}(0)} |v|^2 |\nabla\eta_k|^2 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n - B_{\xi_k}(0)} |\nabla v|^2 + C \int_{B_{2\xi_k}(0) - B_{\xi_k}(0)} |v|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, $v\eta_k \rightarrow v$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Tenemos del Corolario 4.6 que si $\psi := |\cdot|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} : D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ entonces, pasando a una subsucesión,

$$\begin{aligned} \nabla\psi(v_k) - \nabla\psi(v_k - v\eta_k) - \nabla\psi(v\eta_k) &\rightarrow 0 \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \\ \|v_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 - \|v_k - v\eta_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 - \|v\eta_k\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 &\rightarrow 0 \\ |v_k|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} - |v_k - v\eta_k|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} - |v\eta_k|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

De modo que por la invariancia de la norma bajo dilataciones obtenemos,

$$\begin{aligned} \|w_k\|^2 - \|u_k\|^2 + \|v\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 &\rightarrow 0 \quad \text{y} \\ |w_k|_{2^*}^{2^*} - |u_k|_{2^*}^{2^*} + |v|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pero $J(u_k) \rightarrow c$, entonces

$$\begin{aligned} |J(w_k) - (c - J_{\mathbb{R}^n}(v))| &\leq \\ |J(w_k) - J(u_k) + J_{\mathbb{R}^n}(v)| + |J(u_k) - c| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es claro que de (4.12) también

$$\nabla J(u_k) - \nabla J(w_k) - \nabla J\left(\lambda_k^{\frac{2-n}{2}} v\left(\frac{\cdot - y_k}{\lambda_k}\right) \varphi_k\right) \rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega).$$

Como

$$\nabla J\left(\lambda_k^{\frac{2-n}{2}} v\left(\frac{\cdot - y_k}{\lambda_k}\right) \varphi_k\right) \rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega),$$

del que $\nabla J(u_k) \rightarrow 0$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y de la desigualdad del triángulo conseguimos que $\nabla J(w_k) \rightarrow 0$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$. ■

4.3. Teorema de Struwe

Estamos prácticamente listos para probar el teorema de Struwe. Antes requerimos el importante argumento que servirá como “freno” en la demostración de éste. Las sucesiones de Palais-Smale para J son siempre acotadas y en niveles no negativos.

Proposición 4.15. *Si (u_k) es una sucesión de P.S. para J en c , entonces (u_k) está acotada y $c \geq 0$.*

Demostración. Sean $d > 0$ cota para $(J(u_k))$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|J'(u_k)u_k|}{\|u_k\|} \leq \|\nabla J(u_k)\| \leq 1 \quad \forall k \geq k_0.$$

Como $J(u_k) - \frac{1}{2^*} J'(u_k)u_k = \frac{1}{n} \|u_k\|^2$ entonces

$$\frac{1}{n} \|u_k\|^2 \leq d + \frac{1}{2^*} \|u_k\| \quad \forall k \geq k_0.$$

Se sigue que

$$\|u_k\| \leq \text{máx} \left\{ 1, nd + \frac{n}{2^*} \right\} \quad \forall k \geq k_0$$

y (u_k) está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Por otro lado,

$$|J'(u_k)u_k| \leq \|\nabla J(u_k)\| \|u_k\| \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces $J'(u_k)u_k \rightarrow 0$ y tenemos

$$\|u_k\|^2 = nJ(u_k) - \frac{n-2}{2} J'(u_k)u_k \rightarrow nc.$$

Esto implica que necesariamente $c \geq 0$. ■

Observación 4.16. Recordamos de la definición de $e^* := \inf_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}} J_{\mathbb{R}^n}$ que si $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ satisface $\nabla J_{\mathbb{R}^n}(u) = 0$, entonces $J_{\mathbb{R}^n}(u) \geq e^*$. Esto se puede volver a notar de la siguiente forma. Como $\|u\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 = |u|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2$ y $\|u\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \geq S|u|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2$ es fácil conseguir que

$$J_{\mathbb{R}^n}(u) = \frac{1}{n} \|u\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \geq \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}} = e^*.$$

Desde luego que el razonamiento anterior se puede copiar para Ω en vez de \mathbb{R}^n .

La demostración del teorema de Struwe que damos está basada en la dada en [27] y la prueba original se puede consultar en [25].

Teorema 4.17 (Struwe, 1984). Sea (u_k) es una sucesión de Palais-Smale para J en c . Existen v_0 solución de \wp , $m \in \mathbb{N}$, v_1, \dots, v_m soluciones no triviales de $\wp_{\mathbb{R}^n}$ y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ sucesiones (λ_k^i) y (y_k^i) , respectivamente en $(0, \infty)$ y Ω , tales que pasando a una subsucesión de (u_k) ,

$$\begin{aligned} & \left\| u_k - v_0 - \sum_{i=1}^m (\lambda_k^i)^{\frac{2-n}{2}} v_i \left(\frac{\cdot - y_k^i}{\lambda_k^i} \right) \right\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \\ & \|u_k\|^2 \rightarrow \|v_0\|^2 + \sum_{i=1}^m \|v_i\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2, \\ & J(v_0) + \sum_{i=1}^m J_{\mathbb{R}^n}(v_i) = c, \\ & \frac{1}{\lambda_k^i} \text{dist}(y_k^i, \partial\Omega) \rightarrow \infty \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

(En donde v_0 es posiblemente trivial y m es posiblemente cero.)

Demostración. Usando la proposición anterior obtenemos que (u_k) es acotada en $D_0^{1,2}(\Omega)$ por lo que, pasando a una subsucesión, existe v_0 tal que

$$\begin{aligned} u_k &\rightharpoonup v_0 \quad \text{débilmente en } D_0^{1,2}(\Omega), \\ u_k &\rightarrow v_0 \quad \text{c.d. en } \Omega. \end{aligned}$$

Por el Lema 4.3 tenemos que $\nabla J(u_k) \rightharpoonup \nabla J(v_0)$ débilmente en $D_0^{1,2}(\Omega)$, en consecuencia $\nabla J(v_0) = 0$. Definimos

$$u_k^1 := u_k - v_0.$$

Utilizando la Proposición 4.8 obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla J(u_k^1) &\rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega), \\ J(u_k^1) &\rightarrow c - J(v_0), \\ \|u_k\|^2 - \|u_k^1\|^2 &\rightarrow \|v_0\|^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Supongamos que $u_k^1 \rightarrow 0$ en $L^{2^*}(\Omega)$. Como $\|u_k^1\|^2 - |u_k^1|_{2^*}^{2^*} = J(u_k^1)u_k^1 \rightarrow 0$ se sigue que $u_k^1 \rightarrow 0$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$, entonces también $J(u_k) \rightarrow J(v_0)$ y se concluye $J(v_0) = c$. Por tanto, el teorema de Struwe se cumple tomando $m := 0$.

Así, supongamos que (u_k^1) no es una sucesión convergente a cero en $L^{2^*}(\Omega)$. Entonces podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ exista $k_0 > k$ tal que $|u_{k_0}^1|_{2^*}^{2^*} \geq \varepsilon$. Sea

$$\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{2} \right\},$$

entonces $0 < \delta < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ y pasando a una subsucesión

$$\int_{\Omega} |u_k^1|^{2^*} > \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ extendemos u_k^1 a \mathbb{R}^n como cero fuera de Ω y definimos la función de concentración de Levy, $Q_k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$Q_k(r) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} |u_k^1|^{2^*}.$$

Se prueba de manera directa que $g_k : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g_k(r, y) := \int_{B_r(y)} |u_k^1|^{2^*}$$

es continua (haciendo uso del TCD). Ahora bien, como Ω es acotado y cada u_k^1 se anula fuera de Ω , podemos encontrar un compacto K de \mathbb{R}^n (el cual no es necesariamente $\bar{\Omega}$) y $r_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{r_0}(y)} |u_k^1|^{2^*} &= \int_{\Omega} |u_k^1|^{2^*} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} |u_k^1|^{2^*} &= \sup_{y \in K} \int_{B_r(y)} |u_k^1|^{2^*} \quad \forall r \in [0, r_0], \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En particular tenemos que cada g_k es uniformemente continua en $[0, r_0] \times K$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$.

Afirmación: Q_k es continua en $[0, r_0]$.

Sea $r_1 \in [0, r_0]$ y $\alpha > 0$. Tomemos $\beta > 0$ tal que para todo $(r, y), (s, x) \in [0, r_0] \times K$, si $|(r, y) - (s, x)| < \beta$ entonces $|g(r, y) - g(s, x)| < \alpha$. Sea $r \in [0, r_0]$ que cumpla $|r - r_1| < \beta$. Notemos que

$$\left| \int_{B_r(y)} |u_k^1|^{2^*} - \int_{B_{r_1}(y)} |u_k^1|^{2^*} \right| = |g(r, y) - g(r_1, y)| < \alpha \quad \forall y \in K,$$

en consecuencia

$$\int_{B_r(y)} |u_k^1|^{2^*} \leq \sup_{x \in K} \int_{B_{r_1}(x)} |u_k^1|^{2^*} + \alpha \quad \forall y \in K$$

y

$$\sup_{x \in K} \int_{B_r(x)} |u_k^1|^{2^*} \leq \sup_{x \in K} \int_{B_{r_1}(x)} |u_k^1|^{2^*} + \alpha.$$

Análogamente conseguimos

$$\sup_{x \in K} \int_{B_{r_1}(x)} |u_k^1|^{2^*} \leq \sup_{x \in K} \int_{B_r(x)} |u_k^1|^{2^*} + \alpha,$$

por lo que $|Q_k(r) - Q_k(r_1)| \leq \alpha$. Esto muestra que Q_k es continua en $[0, r_0]$.

Como $Q_k(0) = 0$ y $Q_k(r_0) > \delta$, del teorema del valor intermedio se sigue la existencia de $\lambda_k^1 \in (0, r_0)$ tal que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\lambda_k^1}(y)} |u_k^1|^{2^*} = Q_k(\lambda_k^1) = \delta.$$

Usando de nuevo la compacidad de K , existe $y_k^1 \in K$ tal que

$$\int_{B_{\lambda_k^1}(y_k^1)} |u_k^1|^{2^*} = \sup_{y \in K} \int_{B_{\lambda_k^1}(y)} |u_k^1|^{2^*} = \delta. \quad (4.14)$$

De esta forma construimos las sucesiones (λ_k^1) y (y_k^1) , respectivamente en $(0, r_0)$ y K , y podemos suponer que

$$\begin{aligned} \lambda_k^1 &\rightarrow \lambda_0^1 \in [0, \infty), \\ y_k^1 &\rightarrow y_0^1 \in K. \end{aligned}$$

Definimos entonces

$$\begin{aligned} v_k^1 &:= (\lambda_k^1)^{\frac{n-2}{2}} u_k^1(\lambda_k^1 \cdot + y_k^1) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \\ \Omega_k &:= \frac{1}{\lambda_k^1} (\Omega - y_k^1), \end{aligned}$$

y notemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(y)} |v_k^1|^{2^*} &= \int_{B_{\lambda_k^1}(\lambda_k^1 y + y_k^1)} |u_k^1|^{2^*}, \\ \int_{B_1\left(\frac{y - y_k^1}{\lambda_k^1}\right)} |v_k^1|^{2^*} &= \int_{B_{\lambda_k^1}(y)} |u_k^1|^{2^*}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |v_k^1|^{2^*} &= \int_{B_{\lambda_k^1}(y_k^1)} |u_k^1|^{2^*}, \\ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_1(y)} |v_k^1|^{2^*} &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\lambda_k^1}(y)} |u_k^1|^{2^*}. \end{aligned}$$

Por tanto, de (4.14),

$$\delta = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_1(y)} |v_k^1|^{2^*} = \int_{B_1(0)} |v_k^1|^{2^*} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.15)$$

Como $\|v_k^1\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|u_k^1\|$ tenemos que (v_k^1) está acotada en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, por la Proposición 1.12 podemos suponer existe $v_1 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} v_k^1 &\rightharpoonup v_1 \quad \text{débilmente en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n), \\ v_k^1 &\rightarrow v_1 \quad \text{c.d. en } \mathbb{R}^n, \\ v_k^1 &\rightarrow v_1 \quad \text{en } L_{loc}^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Para simplificar la notación, sean

$$\begin{aligned} f_k &:= \nabla J(u_k^1), \\ g_k &:= (\lambda_k^1)^{\frac{n-2}{2}} f_k(\lambda_k^1 \cdot + y_k^1) \in D_0^{1,2}(\Omega_k). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} J'_{\Omega_k}(v_k^1)w &= J'(u_k^1)w_{\lambda_k^1}(\cdot - y_k^1) \\ &= \int_{\Omega} \nabla f_k \nabla w_{\lambda_k^1}(\cdot - y_k^1) \\ &= \int_{\Omega_k} \nabla g_k \nabla w \quad \forall w \in D_0^{1,2}(\Omega_k) \end{aligned}$$

tenemos que de hecho

$$\nabla J_{\Omega_k}(v_k^1) = g_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.16)$$

Afirmación: $v_1 \neq 0$.

Supongamos lo contrario y busquemos una contradicción. Tomemos $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{sop}(h) \subseteq B_1(y)$ para algún $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene en particular que

$$\int_{\Omega_k} \nabla g_k \nabla (h^2 v_k^1) = \int_{\Omega_k} \nabla v_k^1 \nabla (h^2 v_k^1) - \int_{\Omega_k} |v_k^1|^{2^*-2} v_k^1 (h^2 v_k^1).$$

Desarrollando directo entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} |\nabla (h v_k^1)|^2 &= \int_{\Omega_k} |v_k^1 \nabla h|^2 + \int_{\Omega_k} \nabla v_k^1 \nabla (h^2 v_k^1) \\ &= \int_{\Omega_k} |v_k^1 \nabla h|^2 + \int_{\Omega_k} h^2 |v_k^1|^{2^*} + \int_{\Omega_k} \nabla g_k \nabla (h^2 v_k^1). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_k} h^2 |v_k^1|^{2^*} &= |h^2 |v_k^1|^{2^*}|_{L^1(B_1(y))} \\
 &= ||v_k^1|^{2^*-2} (v_k^1 h)^2|_{L^1(B_1(y))} \\
 &\leq ||v_k^1|^{2^*-2}|_{L^{\frac{n}{2}}(B_1(y))} |(v_k^1 h)^2|_{L^{\frac{n}{n-2}}(B_1(y))} \\
 &= \left(\int_{B_1(y)} |v_k^1|^{2^*} \right)^{\frac{2}{n}} |v_k^1 h|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 &\leq S^{-1} \left(\int_{B_1(y)} |v_k^1|^{2^*} \right)^{\frac{2}{n}} \int_{\Omega_k} |\nabla(v_k^1 h)|^2
 \end{aligned}$$

y como además tenemos de (4.15) que

$$S^{-1} \left(\int_{B_1(y)} |v_k^1|^{2^*} \right)^{\frac{2}{n}} \leq S^{-1} \delta^{\frac{2}{n}} < S^{-1} \frac{S}{2} = \frac{1}{2},$$

se sigue que

$$\int_{\Omega_k} |\nabla(hv_k^1)|^2 \leq \int_{\Omega_k} |v_k^1 \nabla h|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} |\nabla(hv_k^1)|^2 + \int_{\Omega_k} \nabla g_k \nabla(h^2 v_k^1),$$

es decir,

$$\int_{\Omega_k} |\nabla(hv_k^1)|^2 \leq 2 \int_{\Omega_k} |v_k^1 \nabla h|^2 + 2 \int_{\Omega_k} \nabla g_k \nabla(h^2 v_k^1). \quad (4.17)$$

Adicionalmente, como $v_k^1 \rightarrow v_1 = 0$ en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_k} |v_k^1 (\nabla h)|^2 &= \int_{B_1(y)} |v_k^1|^2 |\nabla h|^2 \\
 &\leq C |v_k^1|_{L^2(B_1(y))}^2 \rightarrow 0.
 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Un cálculo directo muestra que $(h^2 v_k^1)$ está acotada en $D_0^{1,2}(\Omega_k)$, entonces

$$|J'_{\Omega_k}(v_k^1) h^2 v_k^1| \leq C \|\nabla J_{\Omega_k}(v_k^1)\|_{D_0^{1,2}(\Omega_k)} = C \|f_k\| \rightarrow 0$$

y de (4.16),

$$\int_{\Omega_k} \nabla g_k \nabla(h^2 v_k^1) \rightarrow 0.$$

Usando (4.17), (4.18) y lo último obtenemos

$$\int_{B_1(y)} |\nabla(hv_k^1)|^2 = \int_{\Omega_k} |\nabla(hv_k^1)|^2 \rightarrow 0.$$

Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ podemos escoger $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{sop}(h) \subseteq B_1(y)$ y $h \equiv 1$ en $B_{\frac{1}{2}}(y)$, y en consecuencia,

$$|\nabla(hv_k^1)|^2 = |\nabla v_k^1|^2 \quad \text{en } B_{\frac{1}{2}}(y).$$

Por tanto, es fácil concluir que $|\nabla v_k^1| \rightarrow 0$ en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$. Usando de nuevo que $v_k^1 \rightarrow 0$ en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ y aplicando la Proposición 1.7 obtenemos $v_k^1 \rightarrow 0$ en $L_{loc}^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. En particular tenemos que $v_k^1 \rightarrow 0$ en $L^{2^*}(B_1(0))$, lo cual es una contradicción a (4.15). Se sigue entonces que necesariamente

$$v_1 \neq 0.$$

Afirmación: $\lambda_0^1 = 0$.

Supongamos lo contrario. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y denotemos

$$\begin{aligned}\psi_k &:= (\lambda_k^1)^{\frac{2-n}{2}} \varphi\left(\frac{\cdot - y_k^1}{\lambda_k^1}\right), \\ \psi &:= (\lambda_0^1)^{\frac{2-n}{2}} \varphi\left(\frac{\cdot - y_0^1}{\lambda_0^1}\right).\end{aligned}$$

Usando el TCD es fácil ver que

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi_k - \nabla \psi|^2 \rightarrow 0,$$

y utilizando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega} \nabla u_k^1 \nabla \psi_k - \int_{\Omega} \nabla u_k^1 \nabla \psi \right| &\leq \|u_k^1\| \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi_k - \nabla \psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi_k - \nabla \psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Notemos que $u_k^1 \rightharpoonup 0$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ (pues la inclusión $D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ es lineal y continua), usando la desigualdad del triángulo entonces concluimos

$$\langle v_k^1, \varphi \rangle_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_k^1 \nabla \psi_k \rightarrow 0.$$

Del Lema 4.2 se sigue que $v_k^1 \rightharpoonup 0$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, es decir, $v_1 = 0$ una contradicción. De aquí que

$$\lambda_0^1 = 0 \quad \text{y por tanto} \quad y_0^1 \in \bar{\Omega}.$$

Afirmación: $\left(\frac{1}{\lambda_k^1} \text{dist}(y_k^1, \partial\Omega)\right)$ no es una sucesión acotada.

Supongamos lo opuesto. La Observación 4.13 asegura que en este caso v_1 es solución de $\wp_{\mathbb{R}_+^n}$ para algún semiespacio \mathbb{R}_+^n , la Observación 2.25 por tanto indica que necesariamente $v_1 = 0$ c.d. en \mathbb{R}_+^n . Usando el Lema 4.11 concluimos que $v_1 = 0$ c.d. en \mathbb{R}^n , lo cual es una contradicción. Así, pasando a una subsucesión conseguimos

$$\frac{1}{\lambda_k^1} \text{dist}(y_k^1, \partial\Omega) \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad (y_k^1) \subseteq \Omega.$$

Tomemos $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ en $B_1(0)$ y $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - B_2(0)$, y sean

$$r_k^1 := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(y_k^1, \partial\Omega),$$

$$\varphi_k^1 := \varphi \left(\frac{\cdot - y_k^1}{r_k^1} \right).$$

Como en lo previo a la Proposición 4.14, se cumple que

$$u_k^2 := u_k^1 - (\lambda_k^1)^{\frac{2-n}{2}} v_1 \left(\frac{\cdot - y_k^1}{\lambda_k^1} \right) \varphi_k^1 \in D_0^{1,2}(\Omega).$$

Recordemos de (4.13) que u_k^1 es una sucesión de P.S. para J en $c - J(v_0)$. Entonces la misma Proposición 4.14 nos deja suponer que

$$\begin{aligned} \nabla J(u_k^2) &\rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega), \\ J(u_k^2) &\rightarrow c - J(v_0) - J_{\mathbb{R}^n}(v_1), \\ \|u_k^1\|^2 - \|u_k^2\|^2 &\rightarrow \|v_1\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned}$$

Como $\|u_k\|^2 - \|u_k^1\|^2 \rightarrow \|v_0\|^2$ se sigue que de hecho

$$\|u_k\|^2 - \|u_k^2\|^2 \rightarrow \|v_0\|^2 + \|v_1\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Más aún, v_1 es una solución no trivial de $\wp_{\mathbb{R}^n}$. De la Proposición 4.15 y la Observación 4.16 tenemos entonces que $c - J(v_0) - J_{\mathbb{R}^n}(v_1) \geq 0$ y que $J_{\mathbb{R}^n}(v_1) \geq e^*$. Por tanto

$$c \geq e^*. \tag{4.19}$$

Podemos repetir el procedimiento, es decir, supongamos que $u_k^2 \rightarrow 0$ en $L^{2^*}(\Omega)$ entonces de nuevo $u_k^2 \rightarrow 0$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$. Como en la prueba de la Proposición 4.14, es fácil ver que

$$(\lambda_k^1)^{\frac{2-n}{2}} v_1 \left(\frac{\cdot - y_k^1}{\lambda_k^1} \right) - (\lambda_k^1)^{\frac{2-n}{2}} v_1 \left(\frac{\cdot - y_k^1}{\lambda_k^1} \right) \varphi_k^1 \rightarrow 0 \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

entonces se cumple el teorema de Struwe para $m = 1$. Por tanto, suponemos que u_k^2 no converge a 0 en $L^{2^*}(\Omega)$ y continuamos de igual manera para conseguir la situación correspondiente a (4.19), es decir, $c \geq 2e^*$. Como $e^* > 0$ el procedimiento debe parar en algún momento, esto es, debe haber un natural m para el cual se satisfaga el teorema de Struwe. De hecho notemos que $m \in [0, \frac{c}{e^*}]$. \blacksquare

Cabe mencionar que, en el teorema anterior, si $m \geq 1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq 0$ c.d. en Ω entonces podemos además concluir que cada $v_i > 0$ c.d. en \mathbb{R}^n (ver [27]).

Existe una cantidad muy grande de modificaciones al teorema de Struwe (por ejemplo considerando simetrías). Sus pruebas radican en tomar la idea de la demostración original y adecuarla, cuando es posible, al resultado que se busca. Son conocidos como resultados de compacidad del tipo Struwe respecto a cierto problema en específico. Es interesante comparar las demostraciones de estos con la dada aquí, consultar por ejemplo [16] y [7].

Para terminar la sección veamos una observación previa a un corolario del teorema anterior.

Observación 4.18. Si u es solución de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ y $J_{\mathbb{R}^n}(u) < 2e^*$, entonces u no cambia de signo.

Para notarlo supongamos que u es una solución de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ que cambia de signo y sean $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) := \min\{u(x), 0\}$ (por lo que $u^+ \neq 0$ y $u^- \neq 0$). Puesto que $J'_{\mathbb{R}^n}(u)u^+ = 0 = J'_{\mathbb{R}^n}(u)u^-$, podemos argumentar como en la Observación 4.16 para obtener que $J_{\mathbb{R}^n}(u^+), J_{\mathbb{R}^n}(u^-) \geq e^*$. Como $J_{\mathbb{R}^n}(u) = J_{\mathbb{R}^n}(u^+) + J_{\mathbb{R}^n}(u^-)$ concluimos que $J_{\mathbb{R}^n}(u) \geq 2e^*$.

Corolario 4.19. J satisface P.S. en $(e^*, 2e^*)$.

Demostración. Sea $c \in (e^*, 2e^*)$ y sea (u_k) una sucesión de P.S. para J en c . Por el teorema anterior tenemos en particular que existe $m \in \mathbb{N}$, v_0 solución posiblemente trivial de φ y v_1, \dots, v_m soluciones no nulas de $\varphi_{\mathbb{R}^n}$ tales que

$$c = J(v_0) + \sum_{i=1}^m J_{\mathbb{R}^n}(v_i).$$

Usando la Observación 4.16 obtenemos que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $J_{\mathbb{R}^n}(v_i) \geq e^*$. Como además $J(v_0) \geq 0$, se sigue de que $c \in (e^*, 2e^*)$ el que

$$m \in \{0, 1\}.$$

Supongamos que $m = 1$. Entonces $J_{\mathbb{R}^n}(v_1) \in [e^*, 2e^*)$ y de la observación anterior tenemos v_1 no cambia de signo, usando la Proposición 2.17 llegamos a que $J_{\mathbb{R}^n}(v_1) = e^*$. Esto muestra que v_0 no es trivial. La Observación 4.16 nos dice entonces que $J(v_0) \geq e^*$, lo cual contradice la elección de c . Tenemos por tanto que $m = 0$ y el Teorema 4.17 indica entonces que, pasando a una subsucesión,

$$u_k \rightarrow v_0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega).$$

■

Capítulo 5

Teorema de Coron

Al igual que en el capítulo anterior, en este capítulo sea $n \geq 3$ y a los dominios A de \mathbb{R}^n les asociamos el problema

$$\wp_A \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } A, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial A. \end{cases}$$

Recordemos al funcional de energía asociado

$$J_A : D_0^{1,2}(A) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad J_A(u) = \frac{1}{2} \int_A |\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*} \int_A |u|^{2^*}$$

cuya derivada es

$$J'_A(u)v = \int_A \nabla u \nabla v - \int_A |u|^{2^*-2}uv.$$

Los puntos críticos de J son precisamente las soluciones de \wp_A . Para todo el capítulo fijamos Ω un abierto, conexo, acotado y suave de \mathbb{R}^n . Usamos la notación

$$\begin{aligned} \wp &:= \wp_\Omega, \\ J &:= J_\Omega, \\ |\cdot|_p &:= |\cdot|_{L^p(\Omega)} \quad \text{para } p \in [1, \infty), \\ \|\cdot\| &:= \|\cdot\|_{D_0^{1,2}(\Omega)}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle &:= \langle \cdot, \cdot \rangle_{D_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Recordamos también que

$$S = \inf_{0 \neq u \in D_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} = \inf_{0 \neq u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \frac{\|u\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2}{|u|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2}.$$

Denotemos a la esfera unitaria de \mathbb{R}^n como

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

y dados $a, b \in \mathbb{R}$ definimos al anillo abierto

$$A_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}.$$

En este capítulo será de mucha importancia la función baricentro $\beta : D_0^{1,2}(\Omega) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\beta(u) := \frac{1}{|u|_{2^*}^{2^*}} \int_{\Omega} x |u(x)|^{2^*} dx,$$

en donde

$$\int_{\Omega} x |u(x)|^{2^*} dx := \left(\int_{\Omega} x_1 |u(x)|^{2^*} dx, \dots, \int_{\Omega} x_n |u(x)|^{2^*} dx \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Como Ω es acotado es fácil ver que β está bien definida. Dada una función $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$ se puede pensar en $\beta(u)$ como el centro de masa de la gráfica de u . Notemos que no ocurre necesariamente que $\beta(u) \in \overline{\Omega}$.

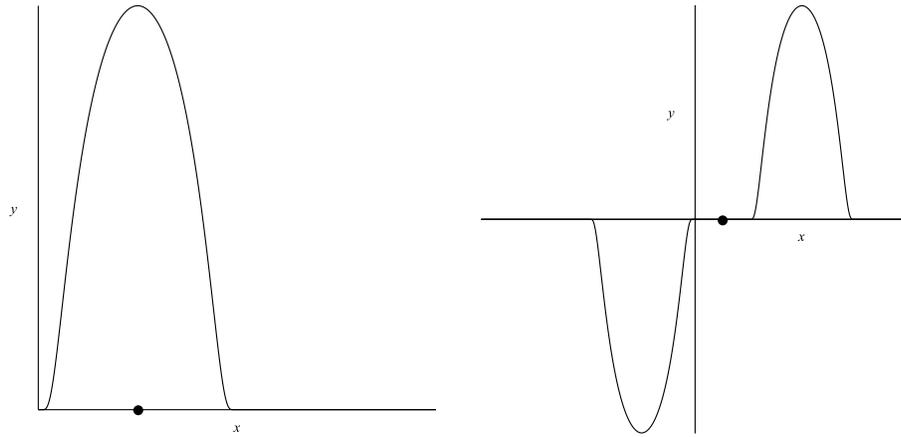


Figura 5.1: Comportamiento de la función baricentro.

Ya hemos observado que la existencia o no existencia de soluciones no triviales para nuestro problema \wp depende fuertemente de la topología de Ω . En la segunda sección de este capítulo probamos el resultado principal de la tesis, el ya discutido teorema de Coron, el cual garantiza una solución positiva sobre cierto dominio con “forma de anillo deformado”. En la primera sección estudiamos la llamada función baricentro. La demostración del teorema de Coron queda como consecuencia de tal estudio. En la última sección comentamos sobre resultados relacionados al teorema de Coron. A continuación enunciamos el teorema y damos la idea de su demostración.

Teorema (Coron, 1984). *Si $0 \notin \overline{\Omega}$ y si existen números reales positivos r_1, r_2 tales que*

$$\frac{r_2}{r_1} \text{ es suficientemente grande y } \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\} \subseteq \Omega,$$

entonces \wp tiene una solución positiva.

El “suficientemente grande” dependerá únicamente de la dimensión n , la cota no se encontrará de manera explícita. Consideremos

$$M := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{2^*} = 1\}.$$

(1) La idea de la prueba del teorema de Coron es argumentar por contradicción de la siguiente manera. Podemos suponer que $\Sigma \subseteq \Omega$. Resulta que funciones en M cuyo valor bajo $\|\cdot\|^2$ se aproxima al ínfimo S tienen la propiedad de contar con un baricentro cercano a Ω . En particular si $0 \notin \overline{\Omega}$, los baricentros de tales funciones son distintos de cero.

Por otro lado, el “suficientemente grande” que condiciona a la forma anular de Ω permite forzar la existencia de una familia de funciones en M , $\{v_t^\sigma\}$ indexadas por Σ y $[0, 1)$, tales que

$$S \leq \sup \|v_t^\sigma\|^2 < S_1 < 2^{\frac{2}{n}} S.$$

Por la forma de éstas, la función $f : B_1(0) - \{0\} \rightarrow M$ dada por $f(x) := v_{\frac{x}{|x|}}^\sigma$ se puede extender de manera continua a toda la bola abierta, y si $y_k \rightarrow y \in \Sigma$ entonces $\|f(y_k)\|^2 \rightarrow S$ y $\beta(f(y_k)) \rightarrow y$.

El suponer que \wp no tiene solución positiva, el lema de deformación (aplicado varias veces) y el corolario del teorema de Struwe implican que, para $\delta > 0$ que haga a los elementos de

$$B := \{u \in M : \|u\|^2 < S + \delta\}$$

cumplir lo expuesto en el párrafo (1), existe una función continua $\psi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ que en el tiempo 1 manda al subnivel $\{u \in M : \|u\|^2 < S_1\}$ en el subnivel B y en todo momento fija al subnivel $\{u \in M : \|u\|^2 < S + \frac{\delta}{2}\}$.

Usando f , ψ y β se construye la función obvia de la bola cerrada de \mathbb{R}^n en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ que no “mueve” a la esfera. De la última parte de los dos párrafos anteriores es fácil ver tal función es continua, lo que contradice el teorema del punto fijo de Brouwer. Esto significa que \wp debe de tener una solución positiva.

5.1. Función baricentro

La primera propiedad esencial de la función baricentro β es su continuidad. Sea $u_k \rightarrow u$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$, pasando a una subsucesión $u_k \rightarrow u$ c.d. en Ω y existe $g \in L^{2^*}(\Omega)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $|u_k| \leq g$ c.d. en Ω . Usando el TCD tenemos entonces que $|u_k|^{2^*} \rightarrow |u|^{2^*}$ en $L^1(\Omega)$, se sigue que $\beta(u_k) \rightarrow \beta(u)$. Esto muestra que β es continua. En el siguiente lema probamos que los centros de masa (o baricentros) de una sucesión minimizante se aproximan a Ω . Para el próximo lema sea

$$M := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{2^*} = 1\}.$$

Lema 5.1. *Si $(u_k) \subseteq M$ cumple que $\|u_k\|^2 \rightarrow S$ entonces, pasando a una subsucesión,*

$$\text{dist}(\beta(u_k), \overline{\Omega}) \rightarrow 0.$$

Demostración. Definamos $v_k := S^{\frac{n-2}{4}} u_k$ y sea

$$\phi := |\cdot|_{2^*}^{2^*} : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Se tiene de un desarrollo directo que

$$\|\nabla J(v_k)\|^2 = S^{\frac{n-2}{2}} \|u_k\|^2 - \frac{n-2}{n} S^{\frac{n}{2}} \phi'(u_k) u_k + \left(\frac{n-2}{2n}\right)^2 S^{\frac{n+2}{2}} \|\nabla \phi(u_k)\|^2.$$

Usando Hölder conseguimos que

$$|\phi'(u_k)v| \leq 2^* |u_k|_{2^*}^{2^*-1} |v|_{2^*} = 2^* |v|_{2^*} \leq 2^* S^{-\frac{1}{2}} \|v\| \quad \forall v \in D_0^{1,2}(\Omega),$$

entonces $\|\nabla \phi(u_k)\| \leq 2^* S^{-\frac{1}{2}}$. Se sigue que

$$\|\nabla J(v_k)\|^2 \leq S^{\frac{n-2}{2}} \|u_k\|^2 - 2S^{\frac{n}{2}} + S^{\frac{n}{2}} \rightarrow 0.$$

Usando otra vez que $|u_k|_{2^*} = 1$ obtenemos que también $J(v_k) \rightarrow \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}$. Podemos aplicar el teorema de Struwe (Teorema 4.17) para concluir que existen $m \in \mathbb{N}$, z_0 solución de \emptyset , z_1, \dots, z_m soluciones no triviales de $\emptyset_{\mathbb{R}^n}$ y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ sucesiones (ξ_k^i) , (y_k^i) , respectivamente en $(0, \infty)$ y Ω , tales que pasando a una subsucesión de (v_k) se cumple

$$\left\| v_k - z_0 - \sum_{i=1}^m (\xi_k^i)^{\frac{2-n}{2}} z_i \left(\frac{\cdot - y_k^i}{\xi_k^i} \right) \right\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \quad (5.1)$$

$$\|v_k\|^2 \rightarrow \|z_0\|^2 + \sum_{i=1}^m \|z_i\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (5.2)$$

$$J(z_0) + \sum_{i=1}^m J_{\mathbb{R}^n}(z_i) = \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{\xi_k^i} \text{dist}(y_k^i, \partial\Omega) \rightarrow \infty \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (5.4)$$

Ahora bien, como Ω es acotado tenemos por el Corolario 2.11 que $m \geq 1$, y de la Observación 4.16 se sigue que de hecho $m = 1$ y $z_0 = 0$. Así, si denotamos $\xi_k := \xi_k^1$ y $y_k := y_k^1$, (5.1) implica que

$$v_k - \xi_k^{\frac{2-n}{2}} z_1 \left(\frac{\cdot - y_k}{\xi_k} \right) \rightarrow 0 \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Entonces si normalizamos

$$z := \frac{z_1}{|z_1|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}},$$

puesto que de (5.2) y (5.3) tenemos que $\|z_1\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 = S^{\frac{n}{2}} = |z_1|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*}$, obtenemos

$$u_k - z_{\xi_k}(\cdot - y_k) \rightarrow 0 \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n). \quad (5.5)$$

Usando la compacidad de $\bar{\Omega}$ podemos suponer que $y_k \rightarrow y \in \bar{\Omega}$, y de (5.4) concluimos que

$$\xi_k \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Como en la Proposición 4.14, tomamos $r_k := \frac{1}{4} \text{dist}(y_k, \partial\Omega)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \equiv 1$ en $B_1(0)$, $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - B_2(0)$ y $0 \leq \varphi \leq 1$. Definimos $\varphi_k := \varphi(r_k^{-1}(\cdot - y_k)) \in C_c^\infty(\Omega)$, $\eta_k := \varphi(r_k^{-1}\xi_k \cdot)$. De nuevo se tiene

$$z\eta_k \rightarrow z \quad \text{en } D^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

y usando (5.5) tenemos que de hecho

$$u_k - z_{\xi_k}(\cdot - y_k)\varphi_k \rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega).$$

Por otro lado, como en la prueba del lema de Brézis-Lieb (ver Proposición A.5), para cada $\varepsilon > 0$ existe c que únicamente depende de ε tal que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

$$||a|^{2^*} - |b|^{2^*}| \leq c|a - b|^{2^*} + \varepsilon|a|^{2^*}.$$

De esto, lo anterior y de que $|u_k|_{2^*} = 1$ se tiene

$$\int_{\Omega} x_i |u_k(x)|^{2^*} dx - \int_{\Omega} x_i |z_{\xi_k}(x - y_k)\varphi_k(x)|^{2^*} dx \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

La Proposición 2.17 asegura que z_1 es la burbuja estándar (o menos ésta) salvo alguna dilatación y traslación, con ello es fácil ver que $x \mapsto x_i |z_1(x)|^{2^*}$ es integrable en \mathbb{R}^n . Usando (5.6) y el TCD se consigue

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\xi_k x_i + y_{k,i}) |z_1(x)\eta_k(x)|^{2^*} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} y_i |z_1(x)|^{2^*} dx.$$

Como tenemos

$$\frac{1}{|z_1|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*}} \int_{\mathbb{R}^n} (\xi_k x_i + y_{k,i}) |z_1(x)\eta_k(x)|^{2^*} dx = \int_{\Omega} x_i |z_{\xi_k}(x - y_k)\varphi_k(x)|^{2^*} dx,$$

entonces se sigue que

$$\int_{\Omega} x_i |z_{\xi_k}(x - y_k)\varphi_k(x)|^{2^*} dx \rightarrow y_i.$$

Al usar la desigualdad del triángulo, la última afirmación y (5.7) obtenemos que para cada i en $\{1, \dots, n\}$,

$$\int_{\Omega} x_i |u_k(x)|^{2^*} dx \rightarrow y_i.$$

Entonces $\beta(u_k) \rightarrow y$ y concluimos al recordar que $y \in \bar{\Omega}$. ■

Hay una parte del enunciado del teorema de Coron que menciona un “suficientemente grande”, esto es debido a que requerimos la existencia de una familia de funciones, indexadas por Σ y $[0, 1)$, con ciertas características específicas. De nuevo, sea

$$M := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{2^*} = 1\}.$$

Lema 5.2. *Si existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $A_{\frac{1}{4R}, 4R} \subseteq \Omega$, entonces existe una familia de funciones, $\{v_t^\sigma : \sigma \in \Sigma \text{ y } t \in [0, 1)\} \subseteq M$, que satisface lo siguiente.*

- (1) $\sup_{\sigma \in \Sigma, 0 \leq t < 1} \|v_t^\sigma\|^2 < 2^{\frac{2}{n}} S$,
- (2) $v_0 := v_0^\sigma$ no depende de σ ,
- (3) La función $f : B_1(0) \rightarrow M$ dada por $f(x) := \begin{cases} v_{|x|}^{\frac{x}{|x|}} & \text{si } x \neq 0, \\ v_0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ es continua,
- (4) Si $(y_k) \subseteq B_1(0)$ cumple $y_k \rightarrow y \in \Sigma$ entonces, pasando a una subsucesión, $\|f(y_k)\|^2 \rightarrow S$ y $\beta(f(y_k)) \rightarrow y$.

Demostración. Para $\sigma \in \Sigma$ y $t \in [0, 1)$ definimos $u_t^\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u_t^\sigma(x) := \left(\frac{1-t}{(1-t)^2 + |x-t\sigma|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n).$$

Además, sea $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u_0(x) := \left(\frac{1}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} = u_0^\sigma(x) \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ radial tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ en \mathbb{R}^n , $\varphi \equiv 1$ en $A_{\frac{1}{2}, 2}$ y $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - A_{\frac{1}{3}, 3}$. Para cada $R \in [1, \infty)$ sea $\varphi_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\varphi_R(x) := \begin{cases} \varphi(Rx) & \text{si } |x| < R^{-1}, \\ 1 & \text{si } R^{-1} \leq |x| < R, \\ \varphi\left(\frac{x}{R}\right) & \text{si } R \leq |x|. \end{cases}$$

Notemos que $\varphi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_R(x) \neq 0\} \subseteq A_{\frac{1}{3R}, 3R}$. Por lo que si

$$A_{\frac{1}{4R}, 4R} \subseteq \Omega \quad \text{entonces} \quad \varphi_R \in C_c^\infty(\Omega). \quad (5.8)$$

Para cada $R \in [1, \infty)$ definimos también

$$w_t^\sigma := \varphi_R u_t^\sigma, \quad w_0 := \varphi_R u_0.$$

Probemos que $\|w_t^\sigma - u_t^\sigma\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ uniformemente en $\sigma \in \Sigma$, $t \in [0, 1)$ cuando $R \rightarrow \infty$. Empecemos notando que para $R \in [1, \infty)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(w_t^\sigma - u_t^\sigma)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(1-\varphi_R)\nabla u_t^\sigma - u_t^\sigma \nabla \varphi_R|^2 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} |(1-\varphi_R)\nabla u_t^\sigma|^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^n} |u_t^\sigma \nabla \varphi_R|^2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

en donde

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |1 - \varphi_R|^2 |\nabla u_t^\sigma|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n - B_{2R}(0)} |1 - \varphi_R|^2 |\nabla u_t^\sigma|^2 + \int_{B_{\frac{1}{2R}}(0)} |1 - \varphi_R|^2 |\nabla u_t^\sigma|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n - B_{2R}(0) \cup B_{\frac{1}{2R}}(0)} |\nabla u_t^\sigma|^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u_t^\sigma|^2 |\nabla \varphi_R|^2 &= R^2 \int_{B_{\frac{1}{R}}(0)} |u_t^\sigma|^2 |\nabla \varphi(Rx)|^2 + \frac{1}{R^2} \int_{\mathbb{R}^n - B_R(0)} |u_t^\sigma|^2 \left| \nabla \varphi \left(\frac{x}{R} \right) \right|^2 \\ &\leq CR^2 \int_{B_{\frac{1}{2R}}(0) - B_{\frac{1}{3R}}(0)} |u_t^\sigma|^2 + \frac{C}{R^2} \int_{B_{3R}(0) - B_{2R}(0)} |u_t^\sigma|^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Juntando (5.9), (5.10) y (5.11) obtenemos

$$\begin{aligned} \|w_t^\sigma - u_t^\sigma\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \\ C \int_{\mathbb{R}^n - B_{2R}(0) \cup B_{\frac{1}{2R}}(0)} |\nabla u_t^\sigma|^2 &+ CR^2 \int_{B_{\frac{1}{2R}}(0) - B_{\frac{1}{3R}}(0)} |u_t^\sigma|^2 + CR^{-2} \int_{B_{3R}(0) - B_{2R}(0)} |u_t^\sigma|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la expresión explícita de $D_i u_t^\sigma$ y u_t^σ podemos conseguir

$$C \int_{\mathbb{R}^n - B_{2R}(0)} |\nabla u_t^\sigma|^2 \leq CR^{2-n}, \quad C \int_{B_{\frac{1}{2R}}(0)} |\nabla u_t^\sigma|^2 \leq C \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^{-n},$$

así como

$$CR^2 \int_{B_{\frac{1}{2R}}(0) - B_{\frac{1}{3R}}(0)} |u_t^\sigma|^2 \leq C \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^{2-n}, \quad CR^{-2} \int_{B_{3R}(0) - B_{2R}(0)} |u_t^\sigma|^2 \leq CR^{2-n}.$$

En donde remarcamos el hecho de que $C > 0$ es una constante que solo depende de n . Como $n \geq 3$ concluimos que $\|w_t^\sigma - u_t^\sigma\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ uniformemente en $\sigma \in \Sigma$, $t \in [0, 1)$ cuando $R \rightarrow \infty$.

Por otra parte, si $U(x) := a_n \left(\frac{1}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$ es la burbuja estándar, de la Proposición 2.17 tenemos

$$\|U\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 = S^{\frac{n}{2}} = |U|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*}.$$

Es claro también que

$$\|u_t^\sigma\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = a_n^{-1} \|U\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{y} \quad |u_t^\sigma|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} = |u_0|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} = a_n^{-1} |U|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Definamos el funcional

$$G_A : D_0^{1,2}(A) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dado por} \quad G_A(u) := \frac{\|u\|_{D_0^{1,2}(A)}^2}{|u|_{L^{2^*}(A)}^2},$$

para dominios A de \mathbb{R}^n . Entonces

$$G_{\mathbb{R}^n}(u_t^\sigma) = G_{\mathbb{R}^n}(U) = S. \quad (5.12)$$

Ahora bien, tomemos $c_0 \in (0, |u_0|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)})$. Sea $R_0 \in [1, \infty)$ tal que para cada $R \geq R_0$ logremos para todo σ y t , $|w_t^\sigma - u_t^\sigma|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} \leq c_0$, y por tanto,

$$\frac{1}{|w_t^\sigma|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}} \leq \frac{1}{|u_0|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)} - c_0}.$$

Para cada $R \geq R_0$ podemos considerar $\{w_t^\sigma(R) : \sigma \in \Sigma, t \in [0, 1)\}$, a la unión de estos conjuntos y $\{u_t^\sigma : \sigma \in \Sigma, t \in [0, 1)\}$ llamémosle Z . Es fácil ver que, por elección de R_0 ,

$$\frac{1}{|\cdot|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}} : (Z, \|\cdot\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}) \rightarrow \mathbb{R}$$

es Lipschitz continua y con ello concluir que

$$G_{\mathbb{R}^n} : (Z, \|\cdot\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}) \rightarrow \mathbb{R}$$

también lo es. Se sigue de la convergencia uniforme encontrada y (5.12) que

$$G_{\mathbb{R}^n}(w_t^\sigma) \rightarrow S \quad \text{uniformemente en } \sigma \in \Sigma, t \in [0, 1) \text{ si } R \rightarrow \infty.$$

Por la hipótesis podemos suponer la existencia de $R \in [1, \infty)$ tal que $A_{\frac{1}{4R}, 4R} \subseteq \Omega$ y tal que para todo σ y t ,

$$|G_{\mathbb{R}^n}(w_t^\sigma) - S| < S \left(2^{\frac{2-n}{n}} - \frac{1}{2} \right),$$

es decir, $G_{\mathbb{R}^n}(w_t^\sigma) < 2^{\frac{2-n}{n}} S + \frac{S}{2} < 2^{\frac{2}{n}} S$. Fijemos tal R . Tenemos que $w_t^\sigma \in D_0^{1,2}(\Omega)$ y definamos

$$v_t^\sigma := \frac{1}{|w_t^\sigma|_{2^*}} w_t^\sigma \in M, \quad v_0 := \frac{1}{|w_0|_{2^*}} w_0.$$

Es claro que con tal definición se cumple (2) y como $G_{\mathbb{R}^n}(w_t^\sigma) = G_\Omega(w_t^\sigma) = G_\Omega(v_t^\sigma)$ conseguimos (1). Una aplicación directa del TCD muestra que, como (3) enuncia, f es continua.

Por otra parte, sea $(y_k) \subseteq B_1(0)$ tal que $y_k \rightarrow y \in \Sigma$. Podemos suponer que $y_k \neq 0$ para cada k y denotemos $\sigma_k := \frac{y_k}{|y_k|}$, $t_k := |y_k|$. Como en lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} & \|w_{t_k}^{\sigma_k} - u_{t_k}^{\sigma_k}\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \\ & C \int_{(\mathbb{R}^n - B_{2R}(0)) \cup B_{\frac{1}{2R}}(0)} |\nabla u_{t_k}^{\sigma_k}|^2 + C \int_{B_{\frac{1}{2R}}(0) - B_{\frac{1}{3R}}(0)} |u_{t_k}^{\sigma_k}|^2 + C \int_{B_{3R}(0) - B_{2R}(0)} |u_{t_k}^{\sigma_k}|^2. \end{aligned}$$

Usando el TCD ($|y_k| \rightarrow 1$) es fácil llegar a que, pasando a una subsucesión, el lado derecho de la desigualdad tiende a cero cuando k tiende a infinito. Por tanto,

$$\|f(y_k)\|^2 = \frac{\|w_{t_k}^{\sigma_k}\|^2}{|w_{t_k}^{\sigma_k}|_{2^*}^2} \rightarrow \frac{\|u_0\|_{D_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)}^2}{|u_0|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2} = S.$$

Finalmente, como $0 \leq w_{t_k}^{\sigma_k} \leq u_{t_k}^{\sigma_k}$ en \mathbb{R}^n tenemos que, para cada i en $\{0, \dots, n\}$,

$$\left| \int_{\Omega} x_i |w_{t_k}^{\sigma_k}|^{2^*} - \int_{\Omega} x_i |u_{t_k}^{\sigma_k}|^{2^*} \right| \leq C | |u_0|_{2^*}^{2^*} - |w_{t_k}^{\sigma_k}|_{2^*}^{2^*} | \rightarrow 0,$$

y como $\Sigma \subseteq \Omega$ podemos suponer que

$$\int_{\mathbb{R}^n - \Omega} x_i |u_{t_k}^{\sigma_k}|^{2^*} dx \rightarrow 0.$$

Se sigue entonces que

$$\frac{1}{|w_{t_k}^{\sigma_k}|_{2^*}^{2^*}} \int_{\Omega} x_i |w_{t_k}^{\sigma_k}|^{2^*} dx - \frac{1}{|u_{t_k}^{\sigma_k}|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*}} \int_{\mathbb{R}^n} x_i |u_{t_k}^{\sigma_k}|^{2^*} dx \rightarrow 0.$$

Pero $u_{t_k}^{\sigma_k}$ resulta una función radialmente simétrica con respecto de y_k , entonces es sencillo mostrar que

$$\frac{1}{|u_{t_k}^{\sigma_k}|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*}} \int_{\mathbb{R}^n} x_i |u_{t_k}^{\sigma_k}|^{2^*} = y_{k,i}.$$

De esto y lo anterior concluimos que $\beta(f(y_k)) = \beta(v_{t_k}^{\sigma_k}) = \beta(w_{t_k}^{\sigma_k}) \rightarrow y$. ■

Observación 5.3. *Es importante notar que, en el teorema anterior, “el que tan grande” deba de ser la R que cumpla $A_{\frac{1}{4R}, 4R} \subseteq \Omega$ depende únicamente de n ; aunque es claro que repitiendo la demostración pero usando una φ distinta se genera una cota posiblemente diferente.*

5.2. Teorema de Coron

Ya conocemos lo suficiente a las útiles propiedades de la función baricentro. Sin embargo, antes de empezar la prueba del teorema de Coron, necesitamos utilizar el lema de deformación. En el siguiente lema denotamos

$$G : D_0^{1,2}(\Omega) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definido como} \quad G(u) := \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} \quad \text{y} \quad M := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{2^*} = 1\}.$$

Puesto que los funcionales están relacionados, es de esperarse una relación entre las sucesiones de Palais-Smale de J y las sucesiones de Palais-Smale de G sobre M .

Lema 5.4. *Si $c \geq 0$ y (u_k) es una sucesión de P.S. sobre M para G en $(nc)^{\frac{2}{n}}$, entonces $((nc)^{\frac{1}{2^*}} u_k)$ es una sucesión de P.S. para J en c .*

Demostración. Utilizando la desigualdad de Hölder tenemos que, si

$$\phi := |\cdot|_{2^*}^{2^*} : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned}
 |\phi'(u_k)v| &\leq 2^* |u_k^{2^*-1}v|_1 \\
 &\leq 2^* |u_k^{2^*-1}|_{\frac{2^*}{2^*-1}} |v|_{2^*} \\
 &= 2^* |v|_{2^*} \\
 &\leq 2^* S^{-\frac{1}{2}} \|v\| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\|\nabla\phi(u_k)\| \leq 2^* S^{-\frac{1}{2}} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.13)$$

Tenemos por definición

$$\nabla G(u_k) = \nabla_M G(u_k) + t_k \nabla\phi(u_k), \quad \text{si } t_k := \frac{\langle \nabla G(u_k), \nabla\phi(u_k) \rangle}{\|\nabla\phi(u_k)\|^2}. \quad (5.14)$$

Además

$$|\langle \nabla_M G(u_k), u_k \rangle| \leq C \|\nabla_M G(u_k)\| \rightarrow 0,$$

en donde

$$\begin{aligned}
 &\| \langle \nabla G(u_k), u_k \rangle - |t_k| \langle \nabla\phi(u_k), u_k \rangle \| \leq | \langle \nabla_M G(u_k), u_k \rangle |, \\
 &\langle \nabla\phi(u_k), u_k \rangle = 2^*, \\
 &\langle \nabla G(u_k), u_k \rangle = 0; \quad \text{pues } \nabla G(u_k) = 2u_k - \frac{n-2}{n} \|u_k\|^2 \nabla\phi(u_k).
 \end{aligned}$$

De modo que $t_k \rightarrow 0$. Usando (5.13) y (5.14) obtenemos

$$\nabla G(u_k) \rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega). \quad (5.15)$$

Ahora bien, sea $\lambda := (nc)^{\frac{1}{2^*}}$ y $v_k := \lambda u_k$, por definición tenemos $(u_k) \subseteq M$ y como $\|u_k\|^2 \rightarrow (nc)^{\frac{2}{n}}$ se sigue que

$$J(v_k) = \frac{\lambda^2}{2} \|u_k\|^2 - \frac{\lambda^{2^*}}{2^*} \rightarrow \frac{\lambda^2}{2} (nc)^{\frac{2}{n}} - \frac{\lambda^{2^*}}{2^*} = c.$$

Por otro lado, se cumple que

$$\begin{aligned}
 \|\nabla J(v_k)\| &= \left\| v_k - \frac{\lambda^{2^*-1}}{2^*} \nabla\phi(u_k) \right\| \\
 &\leq \left\| v_k - \frac{\lambda}{2^*} \|u_k\|^2 \nabla\phi(u_k) \right\| + \left| -\frac{\lambda^{2^*-1}}{2^*} + \frac{\lambda}{2^*} \|u_k\|^2 \right| \|\nabla\phi(u_k)\|,
 \end{aligned}$$

y si usamos (5.15) y que $\|u_k\|^2 \rightarrow \lambda^{\frac{4}{n-2}}$ se consigue

$$\begin{aligned}
 &\left\| v_k - \frac{\lambda}{2^*} \|u_k\|^2 \nabla\phi(u_k) \right\| \rightarrow 0, \\
 &\frac{\lambda}{2^*} \|u_k\|^2 \rightarrow \frac{\lambda^{2^*-1}}{2^*}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, de (5.13) y lo anterior concluimos que

$$\nabla J(v_k) \rightarrow 0 \quad \text{en } D_0^{1,2}(\Omega).$$

■

Observación 5.5. *En particular, el lema anterior muestra que si J cumple P.S. en c , entonces G cumple P.S. sobre M en $(nc)^{\frac{2}{n}}$.*

Es fácil ver que si se tiene una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 con $f'' \geq 0$ en (a, b) , entonces f alcanza su máximo en a o en b . Más aún, si f alcanza su máximo en algún punto interior de su dominio entonces f es constante. Esta es la versión más simple de los

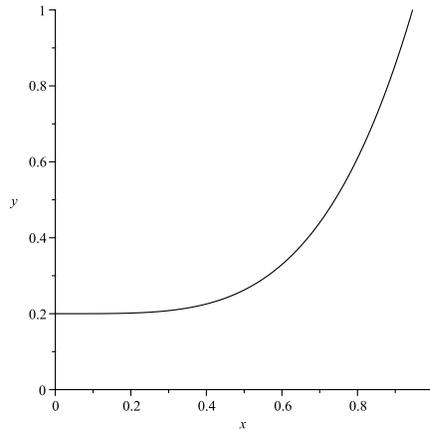


Figura 5.2: Gráfica de la función convexa $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 + \frac{1}{5}$, cuenta con un máximo en 1.

llamados respectivamente principios débil y fuerte del máximo. Se tienen los resultados análogos para mínimos pidiendo que $f'' \leq 0$. Así, si tenemos por ejemplo f no negativa y $f'' \leq 0$ en (a, b) entonces hay dos opciones, f es idénticamente cero o f es positiva en (a, b) . En esencia es esto lo que usamos para encontrar un solución (estrictamente) positiva en el teorema de Coron. La generalización que se usa y un tratamiento completo se pueden consultar en [15]. Nosotros escribimos la consecuencia de ello tal cual la usamos solo como referencia.

Corolario 5.6. *Si A es un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n y $u \geq 0$ es una solución no trivial de φ_A , entonces $u > 0$.*

Hacemos uso de tal corolario, de la Observación 5.5 y de resultados anteriores en el siguiente lema técnico, éste resulta sumamente importante para la prueba del teorema de Coron. Como es usual, utilizamos la notación:

$$G : D_0^{1,2}(\Omega) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad G(u) := \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}, \quad M := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{2^*} = 1\}$$

y para cada $a \in \mathbb{R}$ sea

$$M_a := \{u \in M : G(u) < a\}.$$

Lema 5.7. *Si \wp no cuenta con una solución positiva y $S_1 \in (S, 2^{\frac{2}{n}}S)$, entonces para cada $\delta \in (0, S_1 - S)$ existe una función $\psi_\delta : M \times [0, 1] \rightarrow M$ continua que satisface para todo $u \in M_{S+\frac{\delta}{2}}$ y todo $t \in [0, 1]$, $\psi_\delta(u, t) = u$. Ésta cumple además que $\psi_\delta(M_{S_1} \times \{1\}) \subseteq M_{S+\delta}$.*

Demostración. Supongamos existe $u \in M$ tal que $b := G(u) \in (S, 2^{\frac{2}{n}}S)$ y $\nabla_M G(u) = 0$. Utilizando la sucesión constante (u) y el Lema 5.4 obtenemos que si $v := b^{\frac{n-2}{4}}u$ entonces $\nabla J(v) = 0$ y

$$J(v) = \frac{1}{n}b^{\frac{n}{2}} \in \left(\frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}, \frac{2}{n}S^{\frac{n}{2}} \right),$$

como en la Observación 4.18 tenemos entonces que v no cambia de signo. Es claro que $v \neq 0$ por lo que, ya sea usando la misma v o usando $-v$, llegamos a una contradicción con la hipótesis al aplicar el principio fuerte del máximo (ver el Corolario 5.6). Por tanto, concluimos que para cada $\alpha \in (S, 2^{\frac{2}{n}}S)$,

$$\{u \in M : G(u) = \alpha \text{ y } \nabla_M G(u) = 0\} = \emptyset.$$

Por otra parte, por el corolario del teorema de Struwe (Corolario 4.19) tenemos que J satisface P.S. en $(\frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}, \frac{2}{n}S^{\frac{n}{2}})$, y de la Observación 5.5 se sigue que G satisface P.S. sobre M en $(S, 2^{\frac{2}{n}}S)$.

Sea $\delta \in (0, S_1 - S)$ cualquiera. De las dos afirmaciones anteriores y el lema de deformación (Teorema 3.7) tenemos que para cada $\alpha \in [S + \delta, S_1] \subseteq (S, 2^{\frac{2}{n}}S)$ existen $\varepsilon_\alpha \in (0, \frac{2\alpha - 2S - \delta}{4})$ y una función continua $\phi_\alpha : M \times [0, 1] \rightarrow M$ que satisface

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(u, 0) &= u \quad \forall u \in M_{\alpha + \varepsilon_\alpha}, \\ \phi_\alpha[M_{\alpha + \varepsilon_\alpha} \times \{1\}] &\subseteq M_{\alpha - \varepsilon_\alpha}, \\ \phi_\alpha(u, t) &= u \quad \forall t \in [0, 1], \forall u \in M_{\alpha - 2\varepsilon_\alpha}. \end{aligned}$$

Usando la compacidad de $[S + \delta, S_1]$ encontramos $l \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in [S + \delta, S_1]$ tales que

$$[S + \delta, S_1] \subseteq \bigcup_{i=1}^l (\alpha_i - \varepsilon_{\alpha_i}, \alpha_i + \varepsilon_{\alpha_i}).$$

Entonces es fácil ver que existe una función $p : \{1, \dots, l\} \rightarrow \{1, \dots, l\}$ tal que $\psi_\delta : M \times [0, 1] \rightarrow M$, dada por

$$\psi_\delta(u, t) := \phi_{\alpha_{p(l)}}(\phi_{\alpha_{p(l-1)}}(\dots(\phi_{\alpha_{p(1)}}(u, t), t)\dots), t),$$

cumple lo requerido. ■

El teorema del punto fijo de Brouwer establece que una función continua de la bola cerrada en la bola cerrada debe siempre dejar al menos un punto fijo. Es fácil ver que ello implica el siguiente teorema. Recordemos que $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ y consideremos $\overline{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Teorema 5.8. *No existe una función continua $r : \overline{B}_1(0) \rightarrow \Sigma$ tal que $r|_\Sigma = id_\Sigma$.*

De hecho el teorema de Brouwer es equivalente a este resultado. Recomendamos consultar el teorema de Brouwer en [13]. Hacemos una última observación antes del resultado principal, debido a lo que ya se sabe sobre dilataciones y exponente crítico no debe sorprender.

Observación 5.9. *Supongamos que se ha probado que existe $b_n > 0$ (constante que solo depende de n) tal que si A es un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n , $0 \notin \bar{A}$ y existe $R \geq b_n$ tal que $A_{\frac{1}{4R}, 4R} \subseteq A$, entonces \wp_A tiene una solución positiva. Se siguen entonces 3 resultados.*

(1) *Si C es un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n , $0 \notin \bar{C}$ y existen $s_1, s_2 > 0$ tales que $\frac{s_2}{s_1} \geq b_n$ y $A_{1, (\frac{4s_2}{s_1})^2} \subseteq C$, entonces \wp_C tiene una solución positiva.*

(2) *Si D es un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n , $0 \notin \bar{D}$ y existen $s_3, s_4 > 0$ tales que $\frac{s_4}{s_3} \geq 16(b_n)^2$ y $A_{1, \frac{s_4}{s_3}} \subseteq D$, entonces \wp_D tiene una solución positiva.*

(3) *Si B es un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n , $0 \notin \bar{B}$ y existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $\frac{r_2}{r_1} \geq 16(b_n)^2$ y $A_{r_1, r_2} \subseteq B$, entonces \wp_B cuenta con una solución positiva.*

En realidad es consecuencia del Lema 4.9. Para probar (1) tomamos $R := \frac{s_2}{s_1}$ y $A := \frac{s_1}{4s_2} C$ para obtener de la hipótesis que hay una solución positiva u de \wp_A , entonces $u \frac{4s_2}{s_1}$ es una solución positiva de \wp_C .

Para notar (2) tomamos $s_1 := (s_3)^{\frac{1}{2}}$, $s_2 := \frac{1}{4}(s_4)^{\frac{1}{2}}$ y $C := D$ para conseguir de (1) una solución positiva de $\wp_D = \wp_C$.

Finalmente para mostrar (3), tomando $D := r_1^{-1} B$, $s_3 := 1$ y $s_4 := \frac{r_2}{r_1}$ obtenemos de (2) que \wp_D tiene una solución positiva u , entonces u_{r_1} es una solución positiva de \wp_B como se buscaba.

Nos encontramos en condiciones de probar el teorema principal. Denotaremos por $d_n > 0$ a la cota que marca el que tan grande debe ser R en el Lema 5.2. Motivados por la Observación 5.9 sea $c_n := 16(d_n)^2$. La demostración que damos del teorema de Coron está basada en la dada en [26] y la prueba original de Coron se puede ver en [10].

Teorema 5.10 (Coron, 1984). *Si $0 \notin \bar{\Omega}$ y si existen números reales positivos r_1, r_2 tales que*

$$\frac{r_2}{r_1} \geq c_n \quad \text{y} \quad \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x| < r_2\} \subseteq \Omega,$$

entonces \wp tiene una solución positiva.

Demostración. Usando la observación anterior, en lugar de tomar r_1 y r_2 podemos suponer que existe $R \geq d_n$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n : (4R)^{-1} < |x| < 4R\} \subseteq \Omega$. Tenemos entonces del Lema 5.2 que existe una familia de funciones, $\{v_t^\sigma : \sigma \in \Sigma \quad \text{y} \quad t \in [0, 1)\} \subseteq M$, tal que

$$(1) \quad \sup_{\sigma \in \Sigma, 0 \leq t < 1} \|v_t^\sigma\|^2 < 2^{\frac{2}{n}} S,$$

$$(2) \quad v_0 := v_0^\sigma \quad \text{no depende de } \sigma,$$

$$(3) \quad \text{La función } f : B_1(0) \rightarrow M \quad \text{dada por} \quad f(x) := \begin{cases} v_{|x|}^{\frac{x}{|x|}} & \text{si } x \neq 0, \\ v_0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{es continua,}$$

$$(4) \quad \text{Si } (y_k) \subseteq B_1(0) \text{ cumple que } y_k \rightarrow y \in \Sigma \text{ entonces pasando a una subsucesión, } \|f(y_k)\|^2 \rightarrow S \quad \text{y} \quad \beta(f(y_k)) \rightarrow y,$$

en donde

$$M := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : |u|_{2^*} = 1\}.$$

Usando (1) escojamos $S_1 \in (S, 2^{\frac{2}{n}}S)$ que cumpla $S_1 > \sup_{\sigma \in \Sigma, 0 \leq t < 1} \|v_t^\sigma\|^2$. Sea de nuevo

$$M_a := \{u \in M : \|u\|^2 < a\} \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que para todo $\delta > 0$ existe $u \in M_{S+\delta}$ tal que $\beta(u) = 0$. En particular tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $u_k \in M_{S+\frac{1}{k}}$ tal que $\beta(u_k) = 0$, así, construimos la sucesión $(u_k) \subseteq M$ que claramente satisface $\|u_k\|^2 \rightarrow S$. Del Lema 5.1 tenemos que pasando a una subsucesión, $\text{dist}(0, \overline{\Omega}) = \text{dist}(\beta(u_k), \overline{\Omega}) \rightarrow 0$, es decir, $\text{dist}(0, \overline{\Omega}) = 0$ y por tanto $0 \in \overline{\Omega}$, contrario a la hipótesis. Se sigue que necesariamente existe $\delta \in (0, S_1 - S)$ tal que para todo $u \in M_{S+\delta}$, $\beta(u) \neq 0$. Esto es

$$\beta[M_{S+\delta}] \subseteq \mathbb{R}^n - \{0\}. \quad (5.16)$$

Supongamos que φ no cuenta con una solución positiva. Del Lema 5.7 encontramos una función continua $\psi_\delta : M \times [0, 1] \rightarrow M$ que cumple $\psi_\delta(M_{S_1} \times \{1\}) \subseteq M_{S+\delta}$ y

$$\psi_\delta(u, t) = u \quad \forall u \in M_{S+\frac{\delta}{2}}, \forall t \in [0, 1]. \quad (5.17)$$

Definimos $h_0 : \overline{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ como

$$h_0(x) := \begin{cases} \beta(\psi_\delta(f(x), 1)) & \text{si } |x| < 1, \\ x & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

Notemos que por elección de S_1 para cada $x \in B_1(0)$ se tiene $f(x) \in M_{S_1}$ y por tanto, $\psi_\delta(f(x), 1) \in M_{S+\delta}$. Se sigue de (5.16) que $\beta(\psi_\delta(f(x), 1)) \neq 0$ y entonces h_0 está bien definida. Más aún, de (3) tenemos que h_0 es continua en $B_1(0)$. Lo siguiente muestra que de hecho lo es en todo su dominio.

Sea $(y_k) \subseteq B_1(0)$ tal que $y_k \rightarrow y \in \Sigma$. De (4) tenemos que, pasando a una subsucesión y para todo $k \in \mathbb{N}$, $|||f(y_k)|^2 - S| < \frac{\delta}{2}$ y $\beta(f(y_k)) \rightarrow y$. Entonces de (5.17) podemos concluir que

$$h_0(y_k) = \beta(\psi_\delta(f(y_k), 1)) = \beta(f(y_k)) \rightarrow y = h_0(y).$$

Finalmente, definimos $h : \overline{B}_1(0) \rightarrow \Sigma$ como

$$h(x) = \frac{1}{|h_0(x)|} h_0(x).$$

Es claro que h está bien definida, es continua y de hecho para cada $x \in \Sigma$, $h(x) = x$. Esto es una contradicción al teorema del punto fijo de Brouwer; ver Teorema 5.8. Por tanto, debe de existir un solución positiva para φ . ■

5.3. Otros resultados

Sea $n \geq 3$ y Ω un dominio acotado y suave de \mathbb{R}^n . Los estudios del problema puro de exponente crítico

$$\varphi_0 \begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

no terminan con el teorema anterior. De hecho éste motiva el desarrollo de nuevos estudios. Un resultado interesante y reciente (del 2010) se consigue por Ge, Musso y Pistoia, éste establece que si $0 \notin \bar{\Omega}$ y $A_{\varepsilon,b} \subseteq \Omega$ entonces el número de soluciones de φ_0 tiende a infinito mientras $\varepsilon \rightarrow 0$. El resultado más general conocido hasta ahora fue probado en 1988 por A. Bahri y J.M. Coron. No daremos las definiciones precisas de lo que enuncia pero hacemos breves comentarios sobre ello.

En el área de topología algebraica se definen los llamados grupos de homología, los cuales marcan una relación entre espacios topológicos y grupos (a cada espacio topológico se le asigna un grupo). Esta relación permite de cierta forma medir el número de “hoyos” de un espacio topológico. Para estudiar este tema recomendamos [13].

Viendo a Ω como espacio topológico le asignamos su homología de dimensión d con coeficientes en \mathbb{Z}_2 ; denotada por $H_d(\Omega, \mathbb{Z}_2)$. La homología de Ω tiene un relación profunda con su topología, por ejemplo, se puede probar que en el caso $n = 3$ si

$$H_1(\Omega, \mathbb{Z}_2) = 0 = H_2(\Omega, \mathbb{Z}_2)$$

entonces Ω es contraíble. El resultado general que mencionamos es el siguiente.

Teorema 5.11 (Bahri-Coron, 1988). *Si existe $d > 0$ tal que $H_d(\Omega, \mathbb{Z}_2) \neq 0$, entonces φ_0 tiene una solución positiva.*

La demostración es bastante más complicada que la del teorema de Coron y se puede revisar en [4]. Si $n = 3$ los dominios que satisfacen la hipótesis del teorema anterior quedan caracterizados como los no contraíbles. Por tanto, si $n = 3$ y Ω no es contraíble, entonces φ_0 tiene una solución positiva. En dimensión general únicamente se tiene que tales dominios no son contraíbles. Esto lleva a la siguiente conjetura actual.

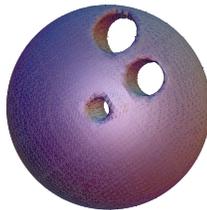


Figura 5.3: Un dominio Ω en \mathbb{R}^3 que probablemente no satisfaga las condiciones del teorema de Coron, sin embargo, su no contractibilidad asegura la existencia de una solución positiva para φ_0 .

Conjetura 5.12. *Si $n \geq 4$ y Ω no es contraíble, entonces φ_0 tiene una solución no trivial.*

Recíprocamente, nos gustaría poder concluir que si nuestro dominio tiene cierto “tipo de topología trivial”, entonces la única solución es la trivial. Desgraciadamente esto no es cierto pues ya se sabe que para ciertos dominios contraíbles el problema tiene también solución no trivial (para aquellos dominios contraíbles que a primera vista no lo parecen, por ejemplo, un anillo con una rebanada radial delgada removida, ver [11]).

En cuestión a multiplicidad de soluciones, en [8] Clapp y Weth prueban que cuando Ω tiene un “hoyo suficientemente chico” se pueden encontrar dos soluciones (dos pares de soluciones no triviales) para φ_0 . Hay también otros resultados de multiplicidad cuando el dominio tiene ciertas simetrías.

Sería prácticamente imposible caracterizar completamente, según Ω , las soluciones de φ_0 . Como se ha visto, es un problema que depende fuertemente de la forma específica que tenga el dominio y es un reto encontrar un resultado más general que el Teorema 5.11.

Para terminar, hacemos unas observaciones del problema cuando $\lambda \neq 0$ y/o hay un exponente supercrítico. Sean $n \geq 3$, Ω un dominio suave de \mathbb{R}^n , $p \geq 2^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideremos el problema

$$\varphi_\lambda \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Un resultado que no es difícil de probar con la teoría ya vista es por ejemplo el caso supercrítico siguiente. Si Ω es estrellado, es decir $0 \in \Omega$ y para cada $x \in \overline{\Omega}$ tenemos $\{tx : t \in [0, 1]\} \subseteq \overline{\Omega}$, y además se cumple que $(\lambda > 0)$ o $(\lambda = 0 \text{ y } p \neq 2^*)$, entonces el problema φ_λ no tiene soluciones no triviales. (Solo hay que usar la identidad de Pohozaev, esta vez se tiene $x \cdot \vartheta(x) \geq 0$ para cada $x \in \partial\Omega$.)

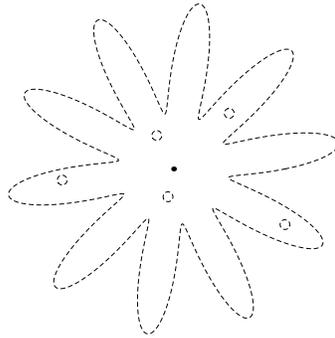


Figura 5.4: Un conjunto estrellado que no resulta estrictamente estrellado.

Otro resultado relativamente sencillo, pero más complicado que el anterior, es el dado por Brézis y Nirenberg en 1983 (ver [27]). Éste establece que si $n \geq 4$, Ω es acotado, $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$ y $p = 2^*$ entonces φ_λ tiene una solución positiva. Finalmente, un resultado muy completo dado en 2002 por Devillanova y Solimini en [12] muestra que si $n \geq 7$, Ω es acotado, $\lambda < 0$ y $p = 2^*$ entonces el problema φ_λ tiene una infinidad de soluciones.

En la actualidad y en todo el mundo se siguen estudiando este tipo de problemas, constantemente hay publicaciones sobre nuevos resultados que involucran tipos especiales de soluciones. El caso de exponente crítico sigue siendo de los más interesantes.

Apéndice A

Resultados básicos

A.1. Espacios de Lebesgue

Dejamos como referencia los resultados de uso más frecuente sobre espacios de Lebesgue. Los resultados son básicos, el tema se puede consultar en [9] o en [20].

Ω denotará un abierto cualquiera de \mathbb{R}^n . El primer resultado establece que para cada $p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, esta es la razón principal por la cual usamos la integral de Lebesgue en vez de la integral de Riemann. Dos desigualdades que utilizamos constantemente son las siguientes.

Proposición A.1 (Desigualdad de Hölder). *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$|uv|_1 \leq |u|_p |v|_q.$$

Si $u \in L^\infty(\Omega)$ y $v \in L^1(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y

$$|uv|_1 \leq |u|_\infty |v|_1.$$

Proposición A.2. *Si Ω es acotado y $1 \leq p < s \leq \infty$, entonces $L^s(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ y existe $c(\Omega, p, s) > 0$ tal que para todo $u \in L^s(\Omega)$,*

$$|u|_p \leq c|u|_s.$$

Y en lo que respecta a convergencia en estos espacios podemos decir lo siguiente.

Teorema A.3 (Convergencia dominada en L^p). *Sea $p \in [1, \infty)$ y (u_k) una sucesión en $L^p(\Omega)$ tal que $u_k \rightarrow u$ c.d. en Ω . Si existe $v \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_k| \leq v$ c.d. en Ω para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $u \in L^p(\Omega)$ y*

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en } L^p(\Omega).$$

Proposición A.4. *Si $p \in [1, \infty)$ y $u_k \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ entonces, pasando a una subsucesión, $u_k \rightarrow u$ c.d. en Ω y existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$|u_k|, |u| \leq g \quad \text{c.d. en } \Omega, \forall k \in \mathbb{N}.$$

La siguiente no tan común proposición la presentamos con prueba, hacemos referencia a ésta en la tesis.

Es fácil probar que en cualquier espacio de Hilbert la convergencia débil de $u_k \rightharpoonup u$ implica $\|u_k\|^2 - \|u_k - u\|^2 \rightarrow \|u\|^2$. Aunque $L^p(\Omega)$ solamente sea espacio de Hilbert cuando $p = 2$, tenemos el siguiente resultado.

Proposición A.5 (Brézis-Lieb, 1983). *Si $p \in [1, \infty)$, (u_k) está acotada en $L^p(\Omega)$ y $u_k \rightarrow u$ c.d. en Ω , entonces*

$$|u_k|_p^p - |u_k - u|_p^p \rightarrow |u|_p^p.$$

Demostración. Afirmamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $c > 0$ (que depende de ε y p) tal que

$$||a + b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon|a|^p + c|b|^p \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $t \in \mathbb{R}$. Si $t + 1 < 0$ consideramos $|\cdot|^p : [t, t + 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Por el teorema del valor medio existe $s_0 \in (t, t + 1)$ tal que $||t + 1|^p - |t|^p| = |s_0|^{p-1}p \leq |t|^{p-1}p$, entonces

$$||t + 1|^p - |t|^p| - \varepsilon|t|^p \leq |t|^{p-1}p - \varepsilon|t|^p \rightarrow -\infty \quad \text{si } t \rightarrow -\infty. \quad (\text{A.1})$$

Igualmente, si $t > 0$ entonces existe $s_0 \in (t, t + 1)$ tal que $||t + 1|^p - |t|^p| = |s_0|^{p-1}p \leq |t + 1|^{p-1}p$, por tanto

$$||t + 1|^p - |t|^p| - \varepsilon|t|^p \leq |t + 1|^{p-1}p - \varepsilon|t|^p \rightarrow -\infty \quad \text{si } t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.2})$$

De (A.1) y (A.2) es fácil ver existe $c > 0$ (que depende de ε y p) tal que

$$||t + 1|^p - |t|^p| - \varepsilon|t|^p \leq c \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces la afirmación es trivial para $b = 0$ y cuando $b \neq 0$ se sigue de tomar $t := \frac{a}{b}$. Ahora bien, es inmediato del llamado “lema de Fatou” que $u \in L^p(\Omega)$, tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Definimos $v_k := ||u_k|^p - |u_k - u|^p - |u|^p| - \varepsilon|u_k - u|^p$ para obtener la existencia de $c(\varepsilon, p) > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $v_k \leq ||u_k|^p - |u_k - u|^p| + |u|^p - \varepsilon|u_k - u|^p \leq (c + 1)|u|^p$ en Ω . Aplicando el TCD para $v_k^+ := \max\{v_k, 0\}$ obtenemos

$$\int_{\Omega} v_k^+ \rightarrow 0.$$

Entonces el resultado se sigue de que (u_k) es acotada en $L^p(\Omega)$ y de que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\Omega} ||u_k|^p - |u_k - u|^p - |u|^p| \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u_k - u|^p + \int_{\Omega} v_k^+ \leq \varepsilon(|u_k|_p + |u|_p)^p + \int_{\Omega} v_k^+.$$

■

A.2. Diferenciabilidad en espacios de Hilbert

Definimos algunas nociones básicas sobre funcionales diferenciables en espacios de Hilbert. Además, se prueba que el funcional $J : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*}$$

es de clase C^1 .

H denotará un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_H$ inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Para la definición de diferenciabilidad entre espacios de Banach y para las demostraciones consultar [9] o [20].

Para poder definir el gradiente de un funcional se utiliza el conocido teorema de Fréchet y Riesz.

Teorema A.6 (De representación de Fréchet-Riesz). *Sea $\eta : H \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal y continua. Existe un único $w \in H$ tal que $\eta(u) = \langle w, u \rangle_H$ para todo $u \in H$. Más aún,*

$$\|w\|_H = \sup_{0 \neq u \in H} \frac{|\eta(u)|}{\|u\|_H} < \infty.$$

Sean U un abierto de H y $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Definición A.7. *El gradiente de G en $u \in U$ se define como el único $w_u \in H$ que satisfice $G'(u)v = \langle w_u, v \rangle_H$ para todo $v \in H$. La notación que usamos es $\nabla G(u) := w_u$.*

Propiedades básicas son por ejemplo que G es de clase C^1 precisamente cuando $\nabla G : U \rightarrow H$ es continua. Podemos definir los puntos críticos de G como aquellos $u \in U$ que cumplen $G'(u)v = 0$ para todo $v \in H$ o, equivalentemente, $\nabla G(u) = 0$. También se puede hablar de puntos críticos sobre ciertos subconjuntos cerrados, para esto la siguiente definición. Si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ cumple que

$$\nabla \varphi(u) \neq 0 \quad \forall u \in \varphi^{-1}[a],$$

entonces $M := \varphi^{-1}[a]$ se dice una subvariedad de H . Se puede hablar del espacio tangente a M en $u \in M$, éste se define como

$$T_u M := \{v \in H : \langle \nabla \varphi(u), v \rangle_H = 0\}.$$

Decimos que $u \in M$ es un punto crítico de G sobre M si $\langle \nabla G(u), v \rangle_H = 0$ para cada $v \in T_u M$.

Hacemos la siguiente aclaración. Sean I un intervalo abierto de \mathbb{R} ,

$$L(\mathbb{R}, H) := \{T : \mathbb{R} \rightarrow H : T \text{ es lineal y continua}\}$$

y $\sigma : I \rightarrow H$ diferenciable, observemos que $\sigma' : I \rightarrow L(\mathbb{R}, H)$. Se suele “identificar” $L(\mathbb{R}, H)$ con \mathbb{R} obteniendo así $\sigma'(u) \equiv \sigma'(u)1$, esto se puede ver por ejemplo en el resultado de existencia y unicidad que usamos para probar el lema de deformación.

Para probar la diferenciabilidad del funcional J que mencionamos al inicio, requerimos resultados previos. Sean $n \geq 3$ y Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n .

Lema A.8 (Operador de Nemytskii). *Sean $p, r \in [1, \infty)$, $f \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ y supongamos existe $c > 0$ tal que para cada $x \in \overline{\Omega}$ y cada $s \in \mathbb{R}$, $|f(x, s)| \leq c(|s|^{\frac{p}{r}} + 1)$. Entonces la función $\eta : L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$ dada por*

$$(\eta(u))(x) := f(x, u(x))$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Sea $u \in L^p(\Omega)$. Como Ω es acotado tenemos que ahí

$$|f(\cdot, u)| \leq c(|u|^{\frac{p}{r}} + 1) \in L^r(\Omega)$$

y η está bien definida. Sea $u_k \rightarrow u$ en $L^p(\Omega)$, podemos suponer que $u_k \rightarrow u$ c.d. en Ω y que existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple $|u_k| \leq g$ en Ω . Entonces

$$|f(\cdot, u_k)| \leq c(g^{\frac{p}{r}} + 1) \quad \text{en } \Omega.$$

Es claro de la continuidad de f que $f(\cdot, u_k) \rightarrow f(\cdot, u)$ c.d. en Ω por lo que

$$|f(\cdot, u_k) - f(\cdot, u)|_r \rightarrow 0.$$

■

Proposición A.9. Sean $F \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y $f(x, s) := \frac{\partial F}{\partial s}(x, s)$. Supongamos que existen $c > 0$ y $\sigma \in (0, 2^* - 1]$ tales que para todo $(x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, $|f(x, s)| \leq c(|s|^\sigma + 1)$. Entonces la función $\psi : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) := \int_{\Omega} F(\cdot, u)$$

está bien definida, es de clase C^1 y $\psi'(u)v = \int_{\Omega} f(\cdot, u)v$.

Demostración. Usando el teorema del valor medio no es difícil probar que $|F(x, s)| \leq C(|s|^{\sigma+1} + 1)$ para cada $(x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$. Tomando $p := \sigma + 1$ y $r := 1$ en el lema anterior tenemos que ψ está bien definida.

Tomemos $u, v \in D_0^{1,2}(\Omega)$, del teorema fundamental del cálculo tenemos que para cada $x \in \Omega$,

$$F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x)) = \int_0^1 f(x, u(x) + tv(x))v(x)dt.$$

Integrando sobre Ω y restando un término de ambos lados obtenemos

$$\psi(u + v) - \psi(u) - \int_{\Omega} f(\cdot, u)v = \int_0^1 \int_{\Omega} (f(\cdot, u + tv) - f(\cdot, u))v dx dt.$$

Usando de nuevo el lema anterior y la desigualdad de Hölder tenemos que si $q := \frac{2n}{n+2}$ entonces para cada $t \in (0, 1)$,

$$\int_{\Omega} (f(\cdot, u + tv) - f(\cdot, u))v \leq |f(\cdot, u + tv) - f(\cdot, u)|_q |v|_{2^*}.$$

De aquí que para cada $v \in D_0^{1,2}(\Omega) - \{0\}$,

$$\frac{\left| \psi(u + v) - \psi(u) - \int_{\Omega} f(\cdot, u)v \right|}{\|v\|} \leq C \int_0^1 |f(\cdot, u + tv) - f(\cdot, u)|_q dt.$$

Es claro del lema anterior que el miembro derecho de la desigualdad tiende a cero cuando $\|v\| \rightarrow 0$, y un cálculo directo muestra que $T_u : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_u(v) := \int_{\Omega} f(\cdot, u)v$$

es lineal y continua. En consecuencia, ψ es diferenciable en u y $\psi'(u) = T_u$. Finalmente, si $u_k \rightarrow u$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ entonces del lema anterior $f(\cdot, u_k) \rightarrow f(\cdot, u)$ en $L^q(\Omega)$, y es fácil ver que

$$\begin{aligned} \|\psi'(u_k) - \psi'(u)\|_{L(D_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})} &:= \sup_{0 \neq v \in D_0^{1,2}(\Omega)} \frac{|\psi'(u_k)v - \psi'(u)v|}{\|v\|} \\ &\leq C|f(\cdot, u_k) - f(\cdot, u)|_q. \end{aligned}$$

Se concluye que ψ es de clase C^1 . ■

Corolario A.10. $J : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $J(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}$ es de clase C^1 . Más aún,

$$J'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} |u|^{2^*-2}uv.$$

Demostración. Basta con tomar $F(x, s) := |s|^{2^*}$ en la proposición anterior para concluir que $|\cdot|_{2^*}^{2^*} : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 . Su derivada en u es entonces dada por

$$v \mapsto 2^* \int_{\Omega} |u|^{2^*-2}uv.$$

Es trivial que $\|\cdot\|^2 : D_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y que $(\|\cdot\|^2)'(u)v = 2\langle u, v \rangle = 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$, por lo que el resultado se sigue. ■

Observación A.11. Aunque en la demostración anterior fue fundamental que Ω fuera acotado, una prueba menos ilustrativa se puede hacer para cualquier dominio no necesariamente acotado. Una demostración igual de directa muestra que de hecho el funcional resulta C^2 . Con lo que ya se ha hecho también se puede probar la diferenciabilidad de los funcionales que dependían de λ .

Bibliografía

- [1] N. Ackermann, *El lujo del flujo y teoremas minimax en el cálculo de variaciones*, notas del minicurso impartido en la Escuela de Verano en Ecuaciones Diferenciales Parciales, UNAM 2011.
- [2] A. Ambrosetti, D. Arcoya, *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems*, Birkhäuser, 2011.
- [3] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer, 2011.
- [4] A. Bahri, J.M. Coron, *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*, Commun. Pure Appl. Math. **41** (1988), 253-294.
- [5] H. Brezis, F. Browder, *Partial Differential Equations in the 20th Century*, Advances in Math. **135** (1998), 76-144.
- [6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [7] M. Clapp, *A global compactness result for elliptic problems with critical nonlinearity on symmetric domains: methods, models and applications*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **54** (2003), 117-126.
- [8] M. Clapp, T. Weth, *Two solutions of the Bahri-Coron problem in punctured domains via the fixed point transfer*, Commun. Contemp. Math. **10** (2008), 81-101.
- [9] M. Clapp, *Análisis, Notas del curso de Análisis 1 y 2*, UNAM 2011.
- [10] J.M. Coron, *Topologie et cas limite des injections de Sobolev*, C.R. Acad. Sc. Paris **299** (1984), 209-212.
- [11] N.E. Dancer, *A note on an equation with critical exponent*, Bull. Lond. Math. Soc. **20** (1988), 600-602.
- [12] G. Devillanova, S. Solimini, *Concentration estimates and multiple solutions to elliptic problems at critical growth*, Adv. Differential Equations **7** (2002), 1257-1280.
- [13] T.T. Dieck, *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2008.

- [14] W.Y. Ding, *On a conformally invariant elliptic equation on \mathbb{R}^n* , Commun. Math. Phys. **107** (1986), 331-335.
- [15] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, segunda edición, American Mathematical Society, 2010.
- [16] F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic Boundary Value Problems*, Springer, 2010.
- [17] Y. Ge, M. Musso, A. Pistoia, *Sign changing tower of bubbles for an elliptic problem at the critical exponent in pierced non-symmetric domains*, Commun. Partial Differential Equations **35** (2010), 1419-1457.
- [18] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.
- [19] D. Jerison, C. Kenig, *Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators*, Ann. of Math. **121** (1985), 463-494.
- [20] J. Jost, *Postmodern Analysis*, tercera edición, Springer, 2005.
- [21] J. Kazdan, F. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Commun. Pure Appl. Math. **38** (1975), 557-569.
- [22] J. Lee, T. Parker, *The Yamabe problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 37-81.
- [23] E.H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, segunda edición, American Mathematical Society, 2001.
- [24] W. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.
- [25] M. Struwe, *A Global Compactness Result for Elliptic Boundary Value Problems Involving Limiting Nonlinearities*, Math. Z. **187** (1984), 511-517.
- [26] M. Struwe, *Variational Methods*, cuarta edición, Springer, 2007.
- [27] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.