



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LIE EN  
MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICAS

PRESENTA:

AUGUSTO CABRERA BECERRIL

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. GUILLERMO GÓMEZ ALCARÁZ



2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**

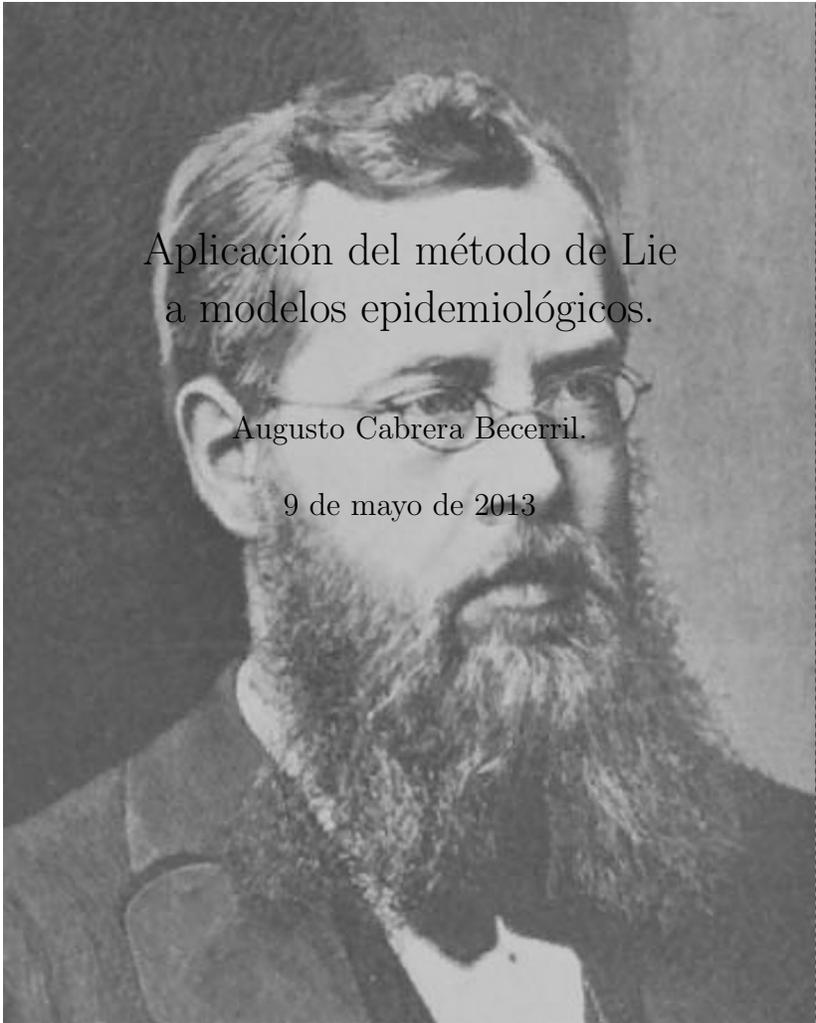


**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A black and white portrait of a man with a full, dark beard and mustache, wearing glasses and a dark suit jacket over a white shirt and dark tie. The portrait is centered on the page.

Aplicación del método de Lie  
a modelos epidemiológicos.

Augusto Cabrera Becerril.

9 de mayo de 2013



# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Índice general</b>                                  | <b>2</b>  |
| <b>1. Introducción .</b>                               | <b>5</b>  |
| 1.1. Un poco de historia. . . . .                      | 6         |
| 1.2. Acerca de la noción de simetría. . . . .          | 8         |
| 1.3. Acerca del método de Lie. . . . .                 | 10        |
| <b>2. Teoría de Lie.</b>                               | <b>16</b> |
| 2.1. Grupos algebraicos. . . . .                       | 16        |
| 2.2. Variedades Diferenciales. . . . .                 | 17        |
| 2.2.1. Funciones entre variedades. . . . .             | 18        |
| 2.2.2. Condición de rango máximo. . . . .              | 19        |
| 2.2.3. Subvariedades . . . . .                         | 19        |
| 2.3. Grupos de Lie. . . . .                            | 21        |
| 2.3.1. Subgrupos de Lie. . . . .                       | 21        |
| 2.3.2. Grupos de Lie locales. . . . .                  | 22        |
| 2.3.3. Grupos locales de transformaciones. . . . .     | 24        |
| 2.3.4. Órbitas. . . . .                                | 25        |
| 2.4. Campos vectoriales. . . . .                       | 26        |
| 2.4.1. Flujos. . . . .                                 | 27        |
| 2.4.2. Acción de un grupo sobre funciones. . . . .     | 29        |
| 2.4.3. Diferenciales. . . . .                          | 30        |
| 2.4.4. Corchete de Lie. . . . .                        | 31        |
| 2.5. Integrabilidad y el teorema de Frobenius. . . . . | 32        |
| 2.6. Álgebras de Lie. . . . .                          | 34        |
| 2.6.1. Campos invariantes. . . . .                     | 34        |
| 2.6.2. Subgrupos uniparamétricos. . . . .              | 36        |
| 2.6.3. Subálgebras. . . . .                            | 36        |
| 2.6.4. Constantes de estructura. . . . .               | 38        |
| 2.6.5. Álgebras de Lie solubles. . . . .               | 38        |
| <b>3. Simetrías de funciones</b>                       | <b>40</b> |
| 3.1. Simetría e invarianza. . . . .                    | 40        |
| 3.2. Funciones invariantes. . . . .                    | 42        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 3.3.      | Forma infinitesimal de un grupo. . . . .                           | 43         |
| 3.4.      | Series de Lie. . . . .   | 43         |
| 3.5.      | Resolviendo $X\Psi(x) = 0$ . . . . .                               | 44         |
| 3.6.      | Grupos de Lie dados sus infinitesimales . . . . .                  | 45         |
| 3.7.      | Grupos multiparamétricos. . . . .                                  | 46         |
| 3.7.1.    | El corchete de Lie. . . . .  | 47         |
| 3.8.      | Familias invariantes. . . . .                                      | 47         |
| 3.9.      | Condición de invarianza<br>para familias de curvas. . . . .        | 49         |
| <b>4.</b> | <b>EDO de primer orden</b>   | <b>52</b>  |
| 4.1.      | Factor integrante. . . . .   | 52         |
| 4.2.      | Integrando EDO de primer orden. . . . .                            | 54         |
| 4.3.      | Coordenadas canónicas. . . . .                                     | 57         |
| 4.4.      | Soluciones invariantes. . . . .                                    | 58         |
| <b>5.</b> | <b>EDO de segundo orden.</b>                                       | <b>61</b>  |
| 5.1.      | Álgebras de Lie solubles y reducción sucesiva de orden. . . . .    | 61         |
| 5.2.      | Método de variables canónicas. . . . .                             | 62         |
| 5.2.1.    | Formas canónicas para $\mathfrak{L}^2$ . . . . .                   | 62         |
| 5.2.2.    | Algoritmo de integración. . . . .                                  | 63         |
| 5.3.      | Clasificación... . . . .   | 65         |
| 5.3.1.    | Álgebras de dimensión 3 . . . . .                                  | 66         |
| 5.4.      | Linealización. . . . .   | 67         |
| 5.5.      | Un resultado útil. . . . .   | 68         |
| <b>6.</b> | <b>Aplicación...</b>   | <b>70</b>  |
| 6.1.      | Un modelo de VIH. . . . .  | 70         |
| 6.1.1.    | Análisis de simetrías. . . . .                                     | 71         |
| 6.1.2.    | Otra manera de hallar la solución general para el sistema. . . . . | 74         |
| 6.2.      | Un modelo de tipo núcleo. . . . .                                  | 76         |
| 6.2.1.    | Análisis de simetrías. . . . .                                     | 77         |
| 6.2.2.    | ¿Qué información obtenemos del análisis de simetrías? . . . . .    | 86         |
| 6.3.      | Un modelo SIS integrable. . . . .                                  | 88         |
| 6.3.1.    | Análisis de Painlevé. . . . .                                      | 88         |
| 6.3.2.    | Análisis de simetrías. . . . .                                     | 89         |
| 6.4.      | Un modelo SIR. . . . .   | 93         |
| 6.4.1.    | Análisis de singularidades. . . . .                                | 93         |
| 6.4.2.    | Análisis de simetrías. . . . .                                     | 94         |
| 6.4.3.    | Un caso más realista. . . . .                                      | 94         |
| 6.5.      | Tuberculosis. . . . .  | 95         |
| 6.6.      | Algunos comentarios finales. . . . .                               | 99         |
| <b>A.</b> | <b>Painlevé.</b>   | <b>100</b> |
| A.1.      | Simetría Painlevé. . . . .   | 102        |
| A.2.      | Ecuaciones de Painlevé. . . . .                                    | 102        |
| A.3.      | Análisis de Painlevé para EDO. . . . .                             | 103        |

**Bibliografía**

**104**

# Capítulo 1

## Introducción .

*La simetría es un tema amplio, importante en el arte y la naturaleza. Las matemáticas yacen en sus raíces y sería difícil encontrar una mejor manera de demostrar el trabajo del intelecto matemático.*

*Hermann Weyl.*

Esta tesis es producto de varios meses de trabajo, sin embargo quisiera mencionar algunos detalles de cómo fue que me encuentre con este tema tan interesante. Cuando estaba en el cuarto semestre de la carrera de matemáticas, por recomendación de un compañero me inscribí en el curso de ecuaciones diferenciales del profesor Guillermo Gómez, el punto más importante del curso era el desarrollo de un trabajo final, para el cual debíamos consultar al profesor sobre el tema del trabajo. Como mi intención era tener suficiente tiempo para dedicar al trabajo, me acerque al profesor Gómez para que me recomendara un tema de investigación, él me preguntó qué carrera estaba estudiando y cuando le respondí. “matemáticas”, él me sugirió que hiciera una monografía sobre *el método de Lie*. Así que me dediqué a buscar libros en la biblioteca, encontré algunos de los títulos que aparecen en la bibliografía de este trabajo.

Como era de esperarse todos los libros estaban pensados para estudiantes más avanzados con más conocimientos sobre ecuaciones diferenciales, modelación y geometría diferencial. Así que al final del semestre, presenté un trabajo sobre un tema que entendía poco, pero que me dejó bastante intrigado sobre los detalles de la teoría y la manera en que se estaba aplicando a la solución de ecuaciones y a la interpretación de los modelos.

Tuvieron que pasar varios semestres en los que tomé los cursos de geometría con la profesora Ana Irene Ramírez, para poder empezar a entender que lo que Lie estaba haciendo era jugar a la geometría con las ecuaciones diferenciales, después de todo la Geometría es el estudio de los invariantes bajo la acción de un grupo de transformaciones.

De esta manera, con un poco más de conocimientos sobre geometría volví a leer el material que había conseguido para mi trabajo y comencé a hacer notas sobre el tema, cuando me di cuenta tenía suficiente material para poder reescribir la monografía. Le comenté al profesor Gómez mi intención de presentar una tesis sobre este tema y él me contacto con Cruz Vargas de León, quien es especialista en modelación de enfermedades infecciosas. Cruz me envió dos artículos de la Dra. Maria Clara Nucci sobre la aplicación de los métodos de simetrías de Lie a sistemas epidemiológicos.

En los siguientes capítulos describiremos un método universal para encontrar las soluciones de ecuaciones

diferenciales desarrollado por el matemático noruego Sophus Lie hacia el final del siglo XIX.

En el capítulo 2 iniciamos con una introducción básica al formalismo de los grupos de Lie, en los capítulos 3, 4 y 5 aplicaremos ese formalismo en el análisis de familias de funciones y en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden, respectivamente, para terminar en el capítulo 6 con varios ejemplos de la aplicación de los métodos de simetría al estudio de modelos matemáticos de enfermedades epidémicas.

## 1.1. Un poco de historia.

Uno de los problemas centrales de las matemáticas del siglo XIX estaba relacionado con la teoría de ecuaciones aritméticas, en concreto se trataba de hallar una fórmula por radicales para las raíces de ecuaciones aritméticas de orden 5°. En 1770 Lagrange había descrito métodos para las ecuaciones de orden 2, 3 y 4 pero no había podido ir más allá. El problema mostró no tener solución.

La primera prueba de que no es posible resolver una ecuación de grado 5 por radicales se debe al matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829). La prueba de Abel era, sin embargo, limitada en el sentido de que sólo aseguraba la no existencia de una fórmula general válida para hallar las raíces por radicales cualquier ecuación quintica, sin embargo no menciona en qué casos especiales puede hallarse la solución por radicales.

Este último problema fue el que abordó el joven francés Evariste Galois. La historia de Galois es una de las más apasionadas y románticas de entre las historias de matemáticos y la Historia de las matemáticas. Galois nació en Burg la Reine en 1811, y fue asesinado en 1832. Galois creó la primera clasificación de ecuaciones algebraicas de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

El joven francés se preguntaba (como lo habían hecho Lagrange y Abel antes que él) si es posible hallar la solución de tal ecuación construyendo resolventes, esto es ecuaciones de orden inferior cuyas raíces sean raíces racionales de la ecuación original. La teoría desarrollada por Galois construye un criterio de solubilidad de ecuaciones por resolventes, así como de un método para hallar las soluciones. Galois extendió también su trabajo hacia las integrales de funciones algebraicas de una variable, conocidas como integrales abelianas, no obstante los descubrimientos de Galois permanecieron sin estudiarse varios años después de su muerte. Su hermano y uno de sus camaradas se encargaron de copiar sus trabajos y compilarlos, así como enviarlos a matemáticos de la talla de Gauss y Jacobi, sin embargo no obtuvieron respuesta. El primer matemático en estudiar cuidadosamente la teoría de Galois fue Joseph Liouville quien era profesor en la Ecole Polytechnique, catorce años después de la muerte de Galois.

El primer libro de texto sobre la teoría de Galois fue escrito por Camille Jordan y publicado en 1870, fue él quien introdujo los principales conceptos e ideas de la teoría de grupos, fue en ese año en el que acudieron a estudiar con Jordan dos estudiantes de posgrado, a quienes se debe la formalización del concepto de simetría: Sophus Lie y Felix Klein.

Lie y Klein se conocieron y entablaron amistad en Alemania en 1869 cuando Lie había llegado desde Noruega para estudiar en la universidad de Berlín, que entonces estaba dominada por personajes como Weierstrass, Kroenecker y Kummer. Klein fue alumno de Riemann cuyos métodos eran fuertemente criticados por la escuela rigurosa de Weierstrass.

En 1870, Lie y Klein llegaron a París para trabajar con Camille Jordan y Gaston Darboux, bajo la tutela de estos, continuaron con el estudio, comenzado en Berlín, de las llamadas W-curvas, que son curvas homogéneas que permanecen invariantes bajo la acción de cierto grupo de transformaciones proyectivas. La homogeneidad de las curvas está relacionada con la existencia de un conjunto de isometrías que transforman una curva en

sí misma (no necesariamente de manera puntual). En el caso de la geometría euclidiana plana, las curvas homogéneas son rectas y círculos. En el caso de las rectas, el grupo de isometrías que le corresponde es el grupo de traslaciones respecto a la dirección de la recta, mientras que para el círculo es el grupo de rotaciones alrededor de su centro. Las W-curvas son curvas en el espacio proyectivo real de dimensión  $n$ , también son llamadas curvas de trayectoria. Podemos hallar más ejemplos de tales objetos en la curvas logarítmicas, cuya ecuación en coordenadas polares puede escribirse:

$$r = a^\phi$$

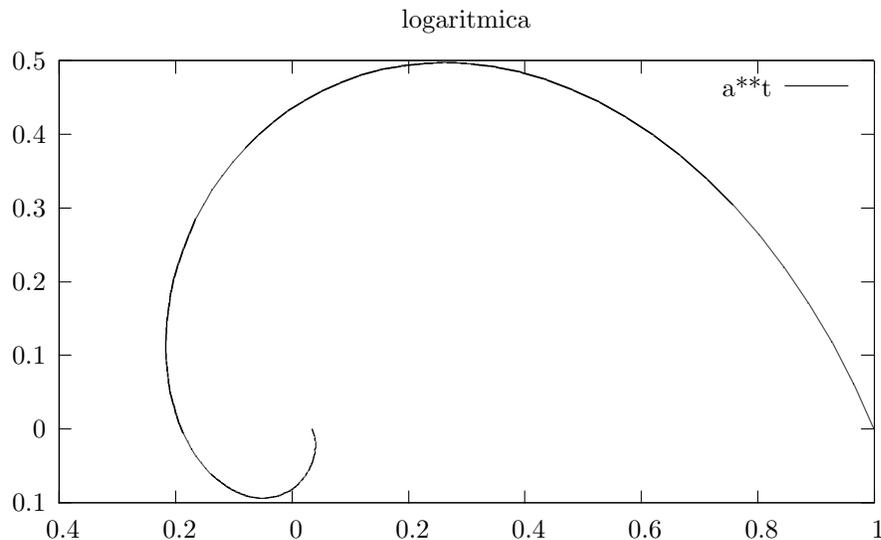


Figura 1.1: Espiral logarítmica.

La espiral logarítmica también acepta transformaciones de auto-similitud, tales transformaciones podemos escribirlas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \tilde{r} &= a^c r \\ \tilde{\phi} &= \phi + c \end{cases}$$

Observe que se define una familia infinita de transformaciones, una para cada  $c \in \mathbb{R}$ , esto es, la transformación de coordenadas puede entenderse como continua o infinitesimal, en el sentido de que el parámetro  $c$  cambia suavemente. El problema que abordaron Lie y Klein fue clasificar a todas las W-curvas. El estudio de estas curvas llevó a Lie a estudiar los subgrupos 1-paramétricos del grupo proyectivo, lo que a su vez le permitió desarrollar el concepto de álgebra asociada a un grupo continuo, ahora llamada álgebra de Lie.

Para Klein, el estudio de las W-curvas, implicó el inicio de un estudio más amplio acerca de la conexión entre geometría y grupos de transformaciones, formalizando la noción de simetría en su famoso programa de Erlangen (1872).

Lie dedicó la mayor parte de su carrera al estudio de los llamados grupos continuos (ahora llamados grupos de Lie) y su relación con las ecuaciones diferenciales. Una de los puntos cruciales de la teoría de Lie es el poder

asignar a cada grupo, un objeto algebraicamente más sencillo, su álgebra de Lie. Lie describió minuciosamente la relación entre los grupos continuos y su álgebra asociada, definió las álgebras y grupos solubles, en analogía con la teoría de Galois para ecuaciones algebraicas, y le asignó a tales objetos a ecuaciones diferenciales, de tal forma que, aquellas ecuaciones que admiten un grupo soluble son completamente integrables, finalmente Lie propuso el problema de clasificar todos los grupos continuos simples y sus álgebras. El problema quedó resuelto por Eliè Cartan, miembro del grupo Bourbaki.

A pesar de que el interés en los grupos y álgebras de Lie no ha disminuido desde la muerte de éste, el método de Lie para la solución de ecuaciones diferenciales dejó de utilizarse en favor de las técnicas de análisis funcional y métodos de transformadas, desarrollados por Hilbert, con el desarrollo posterior de los métodos numéricos y la aparición de las primeras computadoras digitales, las ideas de Lie acerca de las ecuaciones diferenciales cayeron en el olvido hasta la década de 1960. La investigación y simulación de modelos no-lineales, empezaron a rescatar los métodos de análisis de simetrías de Sophus Lie, dándose cuenta de que eran la única forma sistemática para estudiar las ecuaciones no-lineales, del mismo modo, los estudiosos de la física comenzaron a apreciar la importancia que tiene el estudio de las simetrías de las ecuaciones que describen fenómenos naturales, no sólo podían obtener información acerca de la solubilidad de tal ecuación, además obtenían valiosa información sobre la naturaleza del fenómeno mismo.

## 1.2. Acerca de la noción de simetría.

Antes de entrar en detalles sobre la teoría de Lie, es necesario hacer una breve introducción a la noción de simetría y a su formalización como concepto matemático.

Los objetos del mundo natural exhiben siempre alguna forma de simetría, a pesar de la gran variedad de formas, los cuerpos de los animales pueden clasificarse en únicamente 37 tipos, dependiendo de las simetrías que aceptan, la mayoría de los animales tienen cuerpos simétricos bilateralmente, estas simetrías tienen que ver con leyes físicas y procesos químicos que han llevado a los seres a desarrollar tales formas.

La simetría, como vimos en la sección anterior fue uno de los conceptos que inspiraron a Lie y a Klein en el desarrollo ulterior de su trabajo, pero ¿Qué significa que un objeto sea simétrico?, o más concretamente, ¿Cuándo podemos asegurar que un objeto o algún fenómeno posee una propiedad de simetría?. Cuando hablamos de simetrías de figuras geométricas nos estamos refiriendo de manera concreta a una relación entre los puntos que la componen, a saber si estos se encuentran a la misma distancia de un punto, una recta o un plano dados. Esta noción geométrica intuitiva de simetría se puede generalizar.

**Ejemplo 1.** *Consideremos un copo de nieve, se trata de cristales de hielo formados alrededor de partículas de polvo que se forman al condensarse el vapor de agua a temperaturas bajo el punto de congelamiento.*

*Una primera aproximación es considerar que las moléculas de agua forman un triángulo isóceles cuyos vértices son dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, formando un ángulo de aproximadamente  $104.5^\circ\text{C}$  entre los enlaces, si la temperatura es menor que  $-14^\circ\text{C}$ , cada molécula se enlaza con cuatro moléculas vecinas, formando un arreglo tetraedral, cuyos vértices son los átomos de oxígeno, es esta estructura tetraedral la que es responsable de las estructuras hexagonales de los cristales de hielo en escalas macroscópicas.*

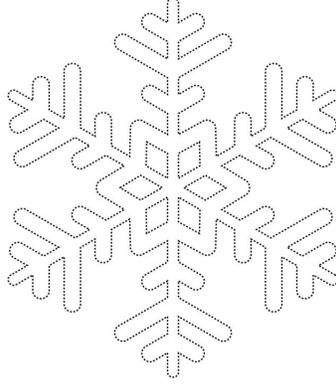


Figura 1.2: Estructura hexagonal del “copo de nieve”.

En la figura se tiene una caricatura de un copo de nieve. A primera vista parece ser un objeto de seis lados bastante simétrico. Hay exactamente seis ángulos distintos tales que las rotaciones respecto a esos ángulos, al rededor del centro de la figura, la dejan invariante:  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $360^\circ$ .

Recuerdese que una rotación puede ser expresada en forma matricial como:

$$\phi_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

con los ángulos dados, las rotaciones que dejan invariante al copo de nieve son:

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{\pi}{3}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \phi_{\frac{2\pi}{3}} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \phi_\pi &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \phi_{\frac{4\pi}{3}} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \phi_{\frac{5\pi}{3}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \phi_{2\pi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Además observese que el copo de nieve también tiene ejes de simetría, es decir queda invariante bajo reflexiones respecto a algunas rectas, a saber, las que pasan por el centro de la figura y bisectan las ramas del copo de nieve. Su expresión matricial es como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

El conjunto de transformaciones que dejan invariante al copo de nieve es

$$\mathbf{SIM}_{\text{cn}} = \{ \phi_{\frac{\pi}{3}}, \phi_{\frac{2\pi}{3}}, \phi_\pi, \phi_{\frac{4\pi}{3}}, \phi_{\frac{5\pi}{3}}, \phi_{2\pi}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \}$$

este conjunto tiene algunas propiedades interesantes, por ejemplo, al componer cualesquiera dos elementos del conjunto, obtenemos otro elemento del conjunto, la transformación identidad esta incluida en el conjunto y para cada transformación existe otra que al componer obtenemos la identidad. Estas propiedades caracterizan a la estructura matemática de grupo. de tal manera que  $\mathbf{SIM}_{\text{cn}}$  es el grupo de simetría del copo de nieve.

En los ejemplo anterior podemos ver que la noción matemática intuitiva de simetría se generaliza al concepto de invarianza.

**Definición 1.** Diremos que un objeto es simétrico si sujeto a cierta transformación queda invariante. Si alguna de las propiedades del objeto queda invariante bajo tal transformación, entonces diremos que es una propiedad de simetría.<sup>1</sup>

La búsqueda de simetrías en las leyes físicas está fuertemente relacionada con el reconocimiento de patrones en las ecuaciones que expresan matemáticamente tales leyes y en sus soluciones. Si las ecuaciones que “gobiernan” una ley de la naturaleza mantienen la misma estructura después de haber aplicado cierta transformación de coordenadas, diremos entonces que tal ley observa el principio de covarianza, este incorpora dos ideas aparentemente distintas.

1. **Independencia del sistema de coordenadas.** Los fenómenos naturales deben estar gobernados por leyes que no dependen del sistema de coordenadas usado para describir tal fenómeno.
2. **Homogeneidad dimensional.** Los fenómenos naturales deben ser descritos por leyes que no dependen de las unidades de las magnitudes aplicadas a las variables que describen el fenómeno.

En los capítulos siguientes abordaremos el primer punto, en esencia, pensaremos en los métodos de simetrías de Lie, como la búsqueda sistemática de transformaciones de coordenadas que dejen invariantes las propiedades interesantes del sistema, en cuanto al análisis dimensional lo abordaremos en un apéndice al final de este trabajo, para el lector interesado tanto en las técnicas como en el formalismo que implica este tipo de análisis.

### 1.3. Acerca del método de Lie.

Pasemos ahora a describir mediante un ejemplo en qué consiste en esencia los métodos con los que trabajaremos. Por el momento, pensemos que un grupo de Lie, por ejemplo en el plano, es una transformación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= F(x, y, s) \\ \tilde{y} &= G(x, y, s)\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde  $s$  es un parámetro escalar cuyo valor define una biyección del sistema de coordenadas  $(x, y)$  al  $(\tilde{x}, \tilde{y})$

---

<sup>1</sup>Esta definición se atribuye a Hermann Weyl.

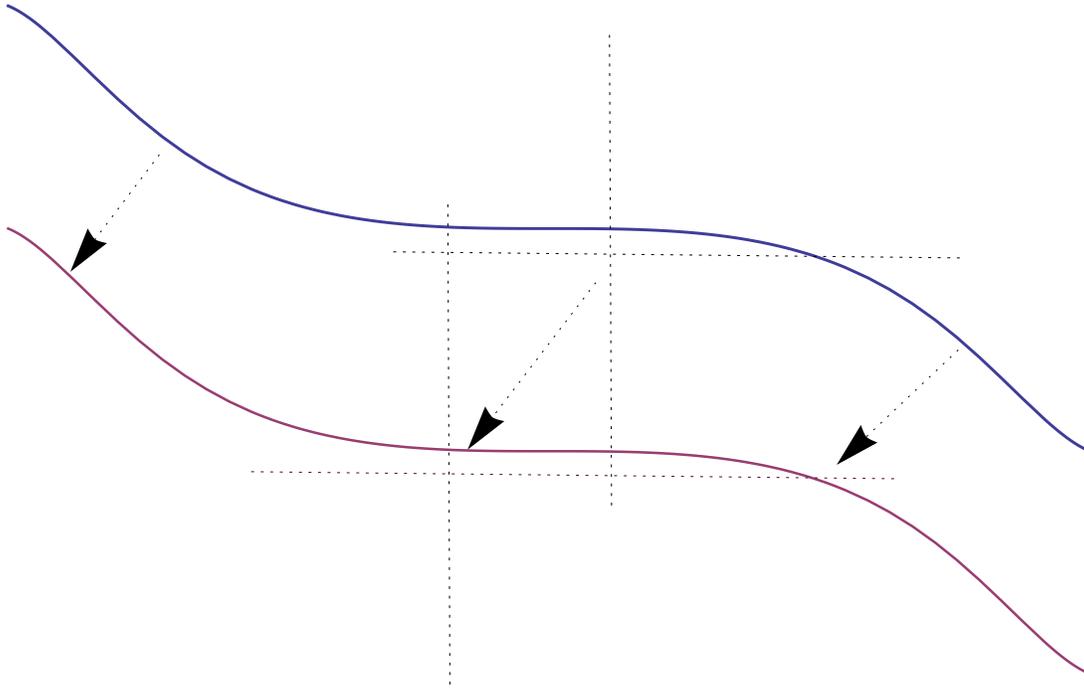


Figura 1.3: Acción de un grupo de Lie sobre una curva plana.

Las funciones  $F$  y  $G$  son funciones suaves respecto al parámetro  $s$  y por lo tanto pueden expandirse en serie de Taylor alrededor de cualquier valor en el abierto que contiene a  $s$ . En  $s = 0$ , la transformación no es otra que la identidad.

$$\begin{aligned} x &= F(x, y, 0) \\ y &= G(x, y, 0) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Podría parecer extraño llamarle a 1.4 grupo, después de todo es una transformación de coordenadas, pero debemos observar que al variar el parámetro  $s$  se inducen distintas transformaciones, como ya vimos se tiene que para  $s = 0$  la transformación es la identidad y es fácil ver que la transformación correspondiente a  $-s$  es la inversa de la que tiene parámetro  $s$ .

En la figura anterior, la curva  $\psi$  se transforma en la curva  $\phi$  usando el grupo para hacer un cambio de coordenadas:

$$\psi = \Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Psi(F(x, y, s), G(x, y, s)) = \Phi(x, y, s) = \phi \tag{1.6}$$

En este caso la transformación deja invariante a la curva, como conjunto, aunque los puntos van unos en otros, la invarianza bajo la transformación constituye una propiedad de simetría de la función que parametriza la curva.

En el caso de una EDO de primer orden, se debe transformar el espacio tangente, cuyas coordenadas son  $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ , para ello es necesario saber cómo transforma 1.4 a las derivadas:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \tilde{y}_{\tilde{x}} = \frac{dG}{dF} = \frac{G_x dx + G_y dy}{F_x dx + F_y dy} = \frac{G_x + G_y \frac{dy}{dx}}{F_x + F_y \frac{dy}{dx}} = G_{\{1\}}(x, y, y_x, s) \quad (1.7)$$

Llamaremos al conjunto de (1.4)-(1.7) la primera extensión del grupo de Lie. Consideremos una EDO de primer orden

$$\psi = \Psi \left( \tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \right) \quad (1.8)$$

La ecuación (1.8) se transforma usando (1.4)-(1.7), el resultado es una nueva EDO de primer orden

$$\begin{aligned} \psi &= \Psi \left( \tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \right) \\ &= \Psi \left( F(x, y, s), G(x, y, s), G_{\{1\}} \left( x, y, \frac{dy}{dx}, s \right) \right) \\ &= \Phi \left( x, y, \frac{dy}{dx}, s \right) = \phi \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si, después de aplicar la transformación, la ecuación se lee igual que en las variables originales, entonces diremos que la ecuación queda invariante bajo la acción del grupo.

$$\Psi \left( \tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \right) = \Phi \left( x, y, \frac{dy}{dx} \right) = \Psi \left( x, y, \frac{dy}{dx} \right) \quad (1.10)$$

La invarianza de la ecuación bajo la primera extensión del grupo constituye una propiedad de simetría de la ecuación diferencial.

**Ejemplo 2.** Consideremos el ejemplo más sencillo

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.11)$$

El conjunto de soluciones de esta ecuación es el conjunto de rectas

$$y(x) = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1.12)$$

este conjunto cubre al plano  $\mathbb{R}^2$

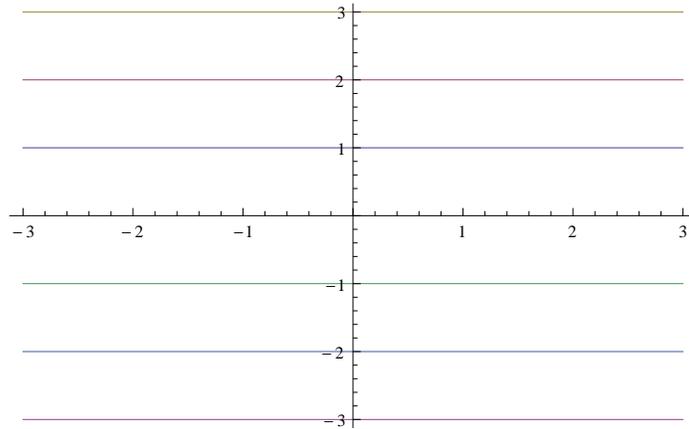


Figura 1.4: Soluciones de la ecuación  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Para poder encontrar el grupo de simetrías de la ecuación, tenemos que hayar un cambio de coordenadas tal que

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = 0 \quad (1.13)$$

bastará observar que tal transformación de coordenadas es invertible siempre que el jacobiano no se anule, entonces impondremos la siguiente condición

$$\tilde{x}_x \tilde{y}_y - \tilde{x}_y \tilde{y}_x \neq 0 \quad (1.14)$$

Esta ecuación tiene varias simetrías que pueden deducirse de la forma de las curvas solución, por ejemplo los escalamientos de la forma

$$\tilde{x} = x \quad (1.15)$$

$$\tilde{y} = e^s y \quad (1.16)$$

y las traslaciones

$$\tilde{x} = x + s_1 \quad (1.17)$$

$$\tilde{y} = y + s_2 \quad (1.18)$$

Observe que el grupo 1.15 es uniparamétrico mientras que 1.17 es 2-paramétrico. Cabe mencionar que no todos los grupos de simetría resultan útiles para el análisis. Por ejemplo, en el caso de una traslación en la dirección del vector  $(0, s_2)$ , manda a cada solución en sí misma, mientras que el estiramiento nos permite conocer todas las soluciones a partir de una solución particular.

**Ejemplo 3.** Consideremos la superficie definida por la gráfica de la edo  $\frac{dy}{dx} = e^{(x-y)}$ .

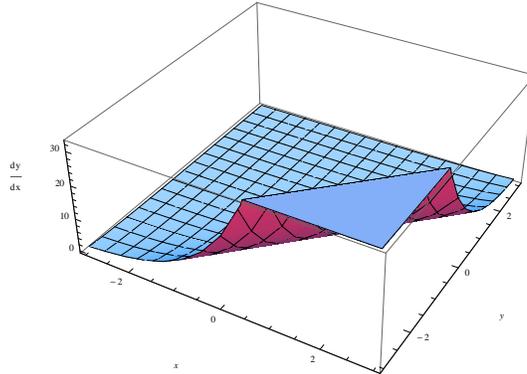


Figura 1.5: Gráfica de la EDO  $\frac{dy}{dx} = e^{(x-y)}$ .

Observe la acción de la primera extensión del grupo de traslaciones

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + s \\ \tilde{y} &= y + s \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} &= \frac{dy}{dx}\end{aligned}\tag{1.19}$$

deja invariante a la ecuación.

$$\begin{aligned}\Psi\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\right) &= \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} - e^{\tilde{x}-\tilde{y}} = \frac{dy}{dx} - e^{(x+s)-(y+s)} \\ &= \frac{dy}{dx} - e^{x-y} = \Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\end{aligned}\tag{1.20}$$

Observe que el parámetro  $s$  se anula en la ecuación transformada, dejándola invariante, la superficie se transforma en sí misma, llevando cada punto en ella, en otro punto en la misma superficie.

Para este ejemplo podemos integrar fácilmente para producir una solución general

$$\psi = \Psi(x, y) = e^y - e^x\tag{1.21}$$

aquí  $\psi$  es una constante arbitraria de integración. La acción del grupo sobre una solución dada, es llevarla a otra solución, esto se ve de la siguiente manera

$$\tilde{\psi} = \Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = e^{\tilde{y}} - e^{\tilde{x}} = e^{y+s} - e^{x+s} = e^s (e^y - e^x)\tag{1.22}$$

La curva solución  $\tilde{\psi}$  se transforma en

$$\frac{\tilde{\psi}}{e^s} = e^y - e^x\tag{1.23}$$

La ecuación permanece invariante bajo la acción del grupo, mientras que una solución dada se transforma en otra solución, es decir que el conjunto de soluciones queda invariante bajo la transformación.

En este ejemplo pudimos encontrar la simetría simplemente por la forma de la ecuación, en ejemplos más complicados, en los ejemplos de modelos epidemiológicos, el papel que juega el conocimiento de las simetrías para la solución del sistema.

## Capítulo 2

# Introducción a la teoría de Lie.

*La teoría de Lie esta en proceso de convertirse en la parte más importante de las Matemáticas, poco a poco se ha hecho obvio que las teorías más inesperadas, desde la Aritmética hasta la Física Cuántica, han venido a rodear este campo de Lie como a un gran eje gigante.*

*Jean Dieudonné.*

En este capítulo trataremos de presentar de la manera más consisa posible la maquinaria matemática que usaremos más adelante en la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. Comenzaremos con algunas definiciones básicas y terminaremos con resultados que nos permitirán hacer de los métodos de simetrías un análogo infinitesimal de la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales.

Un grupo de Lie es un objeto matemático que comparte simultáneamente dos estructuras, una de tipo algebraico (es un grupo) y otra de caracter geométrico (es una variedad diferenciable). Podemos pensar en un grupo como una generalización algebraica de la noción geométrica de simetría, una variedad diferenciable es un espacio que localmente es "parecido"<sup>1</sup> a un espacio euclidiano <sup>2</sup>, es un objeto que generaliza la noción de superficie diferenciable a un contexto de más variables.

### 2.1. Grupos algebraicos.

Veamos ahora la definición algebraica formal de grupo.

**Definición 2.** Sea  $X \neq \emptyset$  un conjunto y  $\odot : X \times X \rightarrow X$  una operación binaria en  $X$ . Diremos que  $X$  forma un grupo respecto a  $\odot$  sii:

1.  $\forall x, y \in X : x \odot y \in X$
2.  $\forall x, y, z \in X : (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$
3.  $\exists e \in X$  tal que:  $\forall x \in X : e \odot x = x$

---

<sup>1</sup>Parecido en el sentido topológico, es decir que existe una biyección continua, con inversa continua entre ambos espacios.

<sup>2</sup>Lease  $\mathbb{R}^n$  para un natural  $n$  adecuado.

4.  $\forall x \in X \exists x^{-1} \in X$  tal que:  $x \odot x^{-1} = e$

Si adicionalmente,  $\odot$  es conmutativa, diremos que  $(X, \odot)$  es un grupo abeliano.

Los grupos que nos interesarán aquí son típicamente grupos de transformaciones a  $n$  parámetros.

**Ejemplo 4.** Consideremos el conjunto de todas las transformaciones rígidas de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Es fácil ver que cuando componemos dos de éstas transformaciones, la rigidez de ambas implica la rigidez de la composición, evidentemente, la transformación identidad en  $\mathbb{R}^n$  es el elemento neutro del grupo, la asociatividad se hereda de la asociatividad de la composición de funciones y finalmente la existencia de inversos se sigue de la inyectividad de las transformaciones rígidas<sup>3</sup>.

## 2.2. Variedades Diferenciales.

Nos interesa que las propiedades que vamos a estudiar no dependan de la elección del sistema de coordenadas, las variedades diferenciales, son objetos cuya naturaleza es esa precisamente. Ya hemos dado una noción intuitiva de estos objetos, pasaremos ahora a dar una definición más formal.

**Definición 3.** Una variedad  $n$ -dimensional es un conjunto  $M \neq \emptyset$ , junto con una familia numerable de subconjuntos  $U_\alpha \subset M$  llamados cartas coordenadas, y funciones<sup>4</sup> biyectivas  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ , donde  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  bajo la topología inducida por la métrica euclidiana. De tal manera se satisface que:

i)  $\cup \{U_\alpha\} = M$  (La unión de las cartas cubre a  $M$ )

ii)  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  es una función suave<sup>5</sup> en este sentido, diremos que los cambios de coordenadas son diferenciables<sup>6</sup>.

iii) Si  $x \in U_\alpha$ ,  $y \in U_\beta$  son puntos distintos, entonces existen abiertos  $W_1 \subset V_\alpha$ ,  $W_2 \subset V_\beta$  tales que

$$\phi_\alpha(x) \in W_1 \quad , \quad \phi_\beta(y) \in W_2 \quad y \quad \phi_\beta^{-1}(W_2) \cap \phi_\alpha^{-1}(W_1) = \emptyset \quad (2.1)$$

Observese que las condiciones (i) y (iii) implican que  $M$  es un espacio topológico Hausdorff II-numerable<sup>7</sup>.

<sup>3</sup>Es suficiente notar que la rigidez implica inyectividad.

<sup>4</sup>A estas funciones les llamaremos coordenadas locales.

<sup>5</sup>Aquí usaremos "suave" como que pertenece a la clase  $C^\infty$

<sup>6</sup>Observese que al ser biyectivas, las funciones  $\phi_i$  deben forzosamente ser bi continuas y bidiferenciables, así, la condición puede ser leída como "Los cambios de coordenadas son difeomorfismos locales.

<sup>7</sup>Podemos entonces definir una  $n$ -variedad diferenciable como un espacio topológico de Hausdorff segundo-numerable, que es localmente difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$

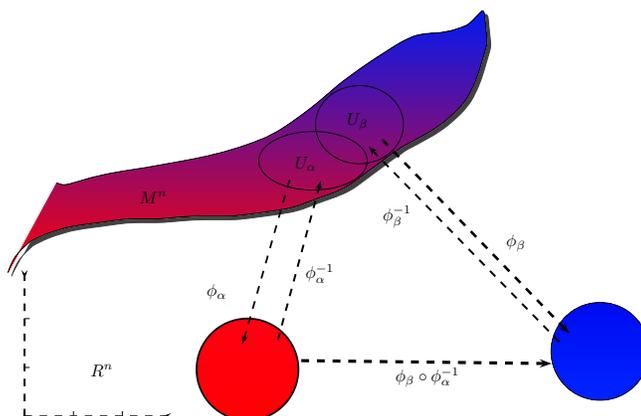


Figura 2.1: Variedad diferenciable

**Ejemplo 5.** El espacio euclidiano de dimensión  $n$   $\mathbb{R}^n$  es una variedad diferenciable, su estructura es trivial, tiene una única carta, la identidad junto con un único abierto  $\mathbb{R}^n$  mismo.

**Ejemplo 6.** El círculo unitario  $S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$  es una variedad de dimensión 1. Tomemos

$$s \mapsto (\cos s, \operatorname{sen} s) \quad s \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

**Ejemplo 7.** El toro, visto como producto de dos círculos, es decir:

$$T^2 = S^1 \times S^1 \quad (2.3)$$

es una variedad diferenciable de dimensión 2. Podemos parametrizar al toro como una superficie de revolución

$$(u, v) \mapsto (\cos u \cos(v + a), \operatorname{sen} u \cos(v + a), \operatorname{sen} v) \quad (2.4)$$

para lo cual se requieren dos vecindades abiertas.

En general si  $M^m$  y  $N^n$  son variedades diferenciales el producto  $M \times N$  es una variedad de dimensión  $n + m$ <sup>8</sup>.

### 2.2.1. Funciones entre variedades.

Para poder hacer cálculo diferencial en variedades, necesitamos redefinir las nociones básicas del cálculo real para el contexto de variedades. Comenzaremos por definir funciones suaves entre variedades.

**Definición 4.** Sean  $M^m$  y  $N^n$  variedades suaves  $F : M \rightarrow N$  es una función suave si para carta coordenada, su expresión en coordenadas locales es una función suave. Es decir

$$\forall \alpha, \beta \quad : \quad \phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad \psi_\beta : \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n \quad (2.5)$$

<sup>8</sup>Para mostrar este hecho, basta tomar como cartas al par  $(\phi_i, \psi_j)$  donde  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  parametriza a  $M$ , y  $\{\psi_j\}_{j \in J}$  parametriza a  $N$ .

se tiene que

$$\psi_\beta \circ F \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

es una función de clase  $C^\infty$  en su dominio.

**Ejemplo 8.** Consideremos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Es claramente una función suave entre variedades, en general toda parametrización de una variedad puede verse como tal.

**Ejemplo 9.** Tomemos

$$F : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.7)$$

$$(\theta, \rho) \mapsto \left( (\sqrt{2} + \cos \rho) \cos \theta, (\sqrt{2} + \cos \rho) \sin \theta, \sin \rho \right) \quad (2.8)$$

La imagen directa de  $F$  es el toro de revolución en  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2\sqrt{2(x^2 + y^2)} \quad (2.9)$$

### 2.2.2. Condición de rango máximo.

Definiremos ahora el rango de una función suave entre variedades y daremos una condición necesaria para simplificar el estudio de tales funciones.

**Definición 5.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades. El rango de  $F$  en  $x \in M$  es el rango de la matriz jacobiana en  $x$  con  $y = F(x)$  expresada en coordenadas locales adecuadas. La función  $F$  tiene rango máximo sobre un subconjunto  $S \subset M$  si  $\forall x \in S : \text{ran}(F) = \text{mín}(m, n)$

**Teorema 1.** Sea  $F : M \rightarrow N$  una función suave entre variedades de rango máximo en  $x_0 \in M$ . Entonces existen coordenadas locales  $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  en una vecindad de  $x_0$  y  $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$  al rededor de  $y_0 = F(x_0)$ , de tal manera que en las nuevas coordenadas  $F$  es o bien la identidad o la inmersión canónica de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$ .<sup>9</sup>

### 2.2.3. Subvariedades

En los ejemplos anteriores, vimos que la esfera y el toro pueden ser vistas como subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ , de tal forma tenemos 2-variedades contenidas en 3-variedades, a tales subconjuntos los llamaremos subvariedades.

**Definición 6.** Sea  $M$  una variedad suave. Una subvariedad de  $M$  es un subconjunto  $N \subset M$  junto con una función suave inyectiva  $\omega : \tilde{N} \rightarrow N \subset M$  que tiene rango máximo en todos los puntos. Donde  $\tilde{N}$  es una variedad diferenciable y  $N$  es la imagen directa de  $\tilde{N}$  bajo  $\omega$ .<sup>10</sup>

Hay que señalar que la subvariedad  $N$  la estamos parametrizando como una inmersión de  $\tilde{N}$  en  $M$ , vía la función  $\omega$ . En adelante, al referirnos usando el término subvariedad como el de subvariedades inmersas. La condición de rango maximal nos asegura que  $N$  no tiene singularidades.

<sup>9</sup>La demostración se sigue del teorema de la función implícita.

<sup>10</sup>De aquí se tiene que  $\dim \tilde{N} = \dim N$  y  $\dim N \leq \dim M$ .

**Ejemplo 10.** Tomaremos  $\tilde{N} = \mathbb{R}$ ,  $M = \mathbb{R}^3$ ,  $\omega(t) = (\cos t, \sin t, t)$  la imagen de  $\omega$  es una hélice circular que se desarrolla positivamente al rededor del eje Z. Nótese que  $\omega$  es inyectiva y además

$$\frac{d\omega}{dt} = (-\sin t, \cos t, 1) \quad (2.10)$$

la expresión (2.10) no se anula para ninguna elección de  $t$ , por lo tanto  $\omega$  tiene rango máximo. Obsérvese que la espiral está completamente contenida en un cilindro circular recto, de radio 1

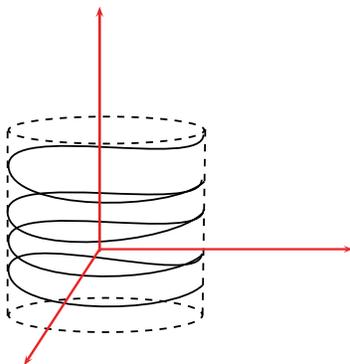


Figura 2.2: Hélice inscrita en importante de las Matemcilindro circular.

**Ejemplo 11.** Si tomamos  $M = \mathbb{R}^2$  y  $\omega(t) = ((1 + e^t) \cos t, (1 + e^{-t}) \sin t)$ . Notese que  $N(\mathbb{R})$  es una espiral que se enreda en el círculo unitario.

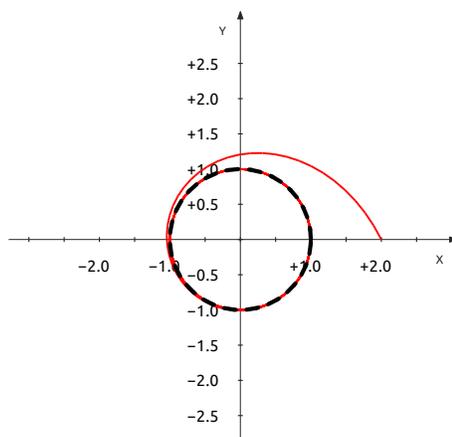


Figura 2.3: Espiral en  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.3. Grupos de Lie.

Un grupo de Lie es una  $n$ -variedad a la que puede ser asignada una estructura de grupo tal es el caso de los grupos de matrices y los grupos de transformaciones (entre los cuales existe una relación de acuerdo con el Álgebra Lineal.)

**Ejemplo 12.** Consideremos el grupo de rotaciones en el plano al que le corresponde el grupo de matrices  $SO(2, \mathbb{R})$ , que corresponde a matrices  $2 \times 2$  de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\operatorname{sen}(s) \\ \operatorname{sen}(s) & \cos(s) \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que al grupo de rotaciones le podemos asignar de manera natural una estructura de variedad con el disco  $S^1$ , asignando a cada valor de  $s \in \mathbb{R}$  con el punto  $(\cos(s) - \operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(s) + \cos(s)) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$

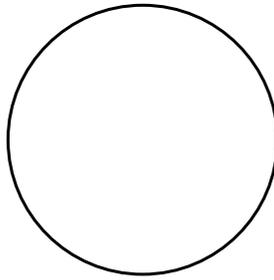


Figura 2.4:  $S^1 \cong SO(2, \mathbb{R})$

Por otro lado, el conjunto de matrices ortogonales forma un grupo respecto a la multiplicación. De tal forma tenemos un primer ejemplo de grupo de Lie 1-paramétrico.

**Definición 7.** Un grupo de Lie  $r$ -paramétrico es un grupo que acepta una estructura de variedad suave, de tal manera que la operación del grupo y la función que a cada elemento le asocia su inverso

$$m : G \times G \rightarrow G \quad m(g, h) = gh \tag{2.11}$$

$$i : G \rightarrow G \quad i(g) = g^{-1}$$

son funciones suaves entre variedades.

**Ejemplo 13.** El grupo de transformaciones ortogonales en  $\mathbb{R}^2$ ,  $O(2) = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$ , que puede interpretarse topológicamente como dos copias disconexas de  $S^1$

### 2.3.1. Subgrupos de Lie.

Vimos en la sección anterior, que algunos subconjuntos de variedades formaban también variedades, veremos qué pasa en el caso de los grupos de Lie.

**Definición 8.** Un subgrupo de un grupo de Lie  $G$  es una subvariedad inmersa, bajo la inmersión  $\omega : \tilde{H} \rightarrow G$ , donde  $\tilde{H}$  es un grupo de Lie y  $H = \omega(\tilde{H})$ .

Los subgrupos de Lie no necesariamente deben ser subvariedades regulares<sup>11</sup>, sin embargo podemos dar una caracterización para los subgrupos de Lie regulares.

**Teorema 2.** Supongamos que  $G$  es un grupo de Lie. Si  $H$  es un subgrupo de Lie cerrado, entonces  $H$  es una subvariedad regular de  $G$ . Recíprocamente toda subvariedad regular de  $G$  es un subgrupo cerrado.

### 2.3.2. Grupos de Lie locales.

En general no estaremos interesados en conocer el grupo completo, sino solo aquellos elementos que estén cercanos<sup>12</sup>, entonces necesitaremos decir a qué nos referimos, en el contexto local, cuando hablamos de grupos de Lie.

**Definición 9.** Un grupo local de Lie  $r$ -paramétrico consiste de subconjuntos abiertos y conexos  $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$  tal que contiene al origen de coordenadas de  $\mathbb{R}^r$  y funciones suaves

$$\begin{aligned} m : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}^r \\ i : V_0 &\rightarrow V \end{aligned} \quad (2.12)$$

que definen la operación del grupo y la función 'sacar inversos', de tal modo que  $m$  es asociativa, admite a 0 como identidad y cada elemento tiene un inverso local.

Con esta definición, sólo tendrá sentido hablar del producto  $xy$  en una vecindad del origen.

**Ejemplo 14.** Veamos un ejemplo de un grupo de Lie que no es global. Consideremos el siguiente conjunto.

$$V = \{x \mid |x| < 1\} \subset \mathbb{R} \quad (2.13)$$

con la operación

$$m(x, y) = \frac{2xy - x - y}{xy - 1} \quad (2.14)$$

Nótese que  $m$  cumple

- *Asociatividad.* En efecto, para  $x_1, x_2, x_3 \in V$  se tiene que

$$m(x_1, m(x_2, x_3)) = \frac{2x_1 m(x_2, x_3) - x_1 - m(x_2, x_3)}{x_1 m(x_2, x_3) - 1} = \frac{2x_1 \frac{2x_2 x_3 - x_2 - x_3}{x_2 x_3 - 1} - x_1 - \frac{2x_2 x_3 - x_2 - x_3}{x_2 x_3 - 1}}{x_1 \frac{2x_2 x_3 - x_2 - x_3}{x_2 x_3 - 1} - 1}$$

- $m(x, 0) = \frac{-x}{-1} = x = m(0, x)$

<sup>11</sup>En el sentido de que la aplicación diferencial de la parametrización sea regular.

<sup>12</sup>Es decir  $\epsilon$ -cercanos, según la topología relativa.

- Los inversos quedan dado por:

$$i(x) = \frac{x}{2(x-1)} \quad (2.15)$$

y esta bien definida en el conjunto  $V_0 = \left\{ x \mid |x| < \frac{1}{2} \right\}$

por tanto  $m$  define un grupo de Lie uniparamétrico local.

Una forma de construir grupos de Lie locales es tomar un grupo global y usar alguna carta que contenga a la identidad.

**Observación 1.** *Cualquier grupo de Lie se puede ver localmente de esta forma, es decir, localmente isomorfo a una vecindad de la identidad en algún grupo global  $G$ .*

**Teorema 3.** *Sea  $V_0 \subset v \subset \mathbb{R}^r$  un grupo de Lie local, con multiplicación  $m(x, y)$  e inversión  $i(x)$ , entonces existe un grupo de Lie global  $G$  y cartas coordenadas  $\phi : U^* \rightarrow V^*$ , donde  $U^*$  contiene a la identidad, de tal modo que*

$$V^* \subset V \quad y \quad \phi(e) = 0 \quad (2.16)$$

$$\phi(gh) = m(\phi(g), \phi(h)) \quad (2.17)$$

siempre que  $g, h \in U^*$  y

$$\phi(g^{-1}) = i(\phi(g)) \quad (2.18)$$

siempre que  $g \in U^*$

Aun más, existe un único grupo de Lie simplemente conexo  $G^*$  con estas propiedades. Si  $G$  es cualquier otro grupo de Lie, entonces existe una aplicación cubriente

$$\pi : G^* \rightarrow G \quad (2.19)$$

que además es un homomorfismo de grupos de Lie, tal que  $G$  es localmente isomorfo a  $G^*$ .  $G^*$  es llamado el cubriente simplemente conexo de  $G$ .

**Ejemplo 15.** *El único grupo de Lie uniparamétrico simplemente conexo es  $\mathbb{R}$  así que el grupo local del ejemplo 14 debe coincidir con alguna carta de  $\mathbb{R}$  al rededor del cero*

$$\phi(t) = \frac{t}{t-1} \quad U^* = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 1\} \quad (2.20)$$

Ahora

$$\phi(t+s) = m(\phi(t), \phi(s)) = \frac{2\phi(t)\phi(s) - \phi(t) - \phi(s)}{\phi(t)\phi(s) - 1} \quad (2.21)$$

$$\phi(-t) = i(\phi(t)) = \frac{\phi(t)}{2\phi(t) - 1} \quad (2.22)$$

Así  $\phi$  satisface el teorema 3.

**Proposición 1.** *Sea  $G$  un grupo de Lie conexo y  $U \subset G$  una vecindad de la identidad. Consideremos*

$$U^k = \{g_1, g_2 \dots g_k \mid g_i \in U\} \quad (2.23)$$

el conjunto de los productos de longitud  $k$ <sup>13</sup> de  $U$ , entonces

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k \quad (2.24)$$

La demostración se basa en la conexidad de  $G$ .

<sup>13</sup>Es decir productos de  $k$  elementos.

### 2.3.3. Grupos locales de transformaciones.

En lo subsecuente, al hablar de grupos de Lie, estaremos hablando concretamente de grupos de transformaciones sobre una variedad  $M$ . Por ejemplo, el grupo  $SO(2)$  lo estudiaremos como el grupo de rotaciones en el plano  $\mathbb{R}^2$  y  $GL(n, \mathbb{R})$  como el grupo de transformaciones lineales, no-singulares en  $\mathbb{R}^n$ . En general, un grupo de Lie puede pensarse como un grupo de transformaciones sobre una variedad si

$$\forall g \in G \quad \exists f_g : M \rightarrow M \quad (2.25)$$

tal que  $f_g$  es biyectiva y bicontinua.

**Definición 10.** Sea  $M$  una variedad diferenciable, un grupo local de transformaciones sobre  $M$  está dado por un grupo de Lie local  $G$ , un abierto  $U^{14}$  tal que

$$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M \quad (2.26)$$

y una aplicación suave

$$\Phi : U \rightarrow M \quad (2.27)$$

tal que se cumple lo siguiente

**a)** Si  $(h, x) \in U$ , entonces  $(g, \Phi(h, x)) \in U$  y  $(gh, x) \in U$  implica que  $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$

Podemos abreviar

$$\Phi(g, x) = gx \quad (2.28)$$

de tal manera, las condiciones toman una forma más sencilla

$$\begin{aligned} g(hx) &= (gh)x & gh &\in G & x &\in M \\ & & ex &= x & \forall x &\in M \\ g^{-1}(gx) &= x & \forall g &\in G & \forall x &\in M \end{aligned}$$

Nótese que para cada  $x \in M$ , el conjunto de elementos para los cuales  $gx$  está definida, forma un grupo de Lie local

$$G_x = \{g \in G \mid (g, x) \in U\}$$

Análogamente para cada  $g \in G$ , existe una subvariedad abierta

$$M_g = \{x \in M \mid (g, x) \in U\}$$

Un grupo global de transformaciones es aquel para el cual podemos tomar  $U = G \times M$ , en tal caso  $gx$  está definida para todos los elementos de  $G$  y de  $M$  y no hay que preocuparse por precisar los dominios de definición.

Un grupo de transformaciones  $G$  que actúa sobre una variedad  $M$  es conexo si se cumple que

**(a)**  $G$  es un grupo de Lie conexo y  $M$  es una variedad conexa.

**(b)**  $U \subset G \times M$  es un abierto conexo.

**(c)**  $\forall x \in M$  el grupo  $G_x$  es conexo

---

<sup>14</sup>Aquí  $U$  es el dominio de acción del grupo.

### 2.3.4. Órbitas.

Una órbita de un grupo local de transformaciones  $G$  es el mínimo subconjunto no-vacío de  $G$  tal que es  $G$ -invariante. es decir, el conjunto  $\mathcal{O}$  es la órbita de  $G$  en  $M$  si

- (a) Si  $x \in \mathcal{O}$ ,  $g \in G$  y  $gx$  está definido, entonces  $gx \in \mathcal{O}$ .
- (b) Si  $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$  y  $\tilde{\mathcal{O}}$  es  $G$ -invariante, entonces  $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$  o bien  $\tilde{\mathcal{O}} = \emptyset$

En el caso de un grupo de transformaciones global  $\forall x \in M$ , la órbita de  $x$  es el conjunto

$$\mathcal{O}_x = \{gx | g \in G\}$$

Para los grupos locales tenemos que fijarnos en los productos de elementos del grupo que actúan sobre  $x$

$$\mathcal{O}_x = \left\{ (g_1, g_2, \dots, g_k) \mid x \geq 1, g_i \in G, \left( \prod_{i=1}^k g_i \right) x \in G \right\}$$

Las órbitas de un grupo de Lie son de hecho subvariedades de  $M$  pero varían su dimensión y podrían no ser regulares.

Distinguiremos dos clases importantes de acciones.

**Definición 11. (a)** *Un grupo  $G$  actúa de manera semiregular si todas las órbitas  $\mathcal{O}_x$  son subvariedades de  $M$  con la misma dimensión.*

**(b)** *Un grupo  $G$  actúa de forma regular si la acción es semiregular y  $\forall x \in M$  existe una vecindad de radio  $\epsilon > 0$  tal que para cada órbita de  $G$  intersecciona a  $U$  en un subconjunto de  $M$  conexo por trayectorias.*

En particular si  $G$  actúa de manera regular sobre  $M$ , entonces toda órbita de  $G$  es una subvariedad regular de  $M$ . Una acción es llamada transitiva si existe una única órbita, que es  $M$  misma. Claramente una acción transitiva es regular, los grupos que nos interesan son los intransitivos.

**Ejemplo 16. (a)** *El grupo de traslaciones en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , arbitrario y fijo y tomaremos  $G = (\mathbb{R}, +)$ . Consideremos*

$$\Psi(s, x) = x + sa$$

*lo cual define una acción global, las órbitas son rectas paralelas al vector  $a$ , la acción es regular y tiene órbitas de dimensión 1.*

**(b)** *El grupo de escalamientos. Sean  $G = (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , de tal manera que los  $\alpha_i$  no son todos cero.*

*Se tiene que  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  actúa sobre  $\mathbb{R}^m$ , mediante los reescalamientos*

$$\Psi(\lambda, x) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_m} x_m)$$

*Con  $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  y  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$*

*Las órbitas de  $G$  son subvariedades 1-dimensionales, salvo por una órbita singular que consiste en  $\{0\}$ . En el caso  $m = 2$ , las órbitas son parábolas de la forma  $y = kx^2$ , el reescalamiento actúa regularmente en  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  estas son el tipo de acciones que surgen usualmente en el análisis dimensional de ecuaciones en derivadas parciales.*

**Ejemplo 17.** Para el caso de la ecuación del calor, tomamos

$$M = \mathbb{R}^2 \quad g = (\mathbb{R}, +)$$

y consideramos

$$\Psi(\epsilon, (x, y)) = \left( \frac{x}{1 - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \epsilon x} \right)$$

la cual está definida sobre

$$U = \left\{ (\epsilon(x, y)) \mid \epsilon < \frac{1}{x} \text{ si } x > 0, \epsilon > \frac{1}{x} \text{ si } x < 0 \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

Veamos que esta es una acción de grupo, en efecto

$$\begin{aligned} \Psi(\delta, \psi(\epsilon, (x, y))) &= \Psi\left(\delta, \left(\frac{x}{1 - \epsilon x}, \frac{y}{1 - \epsilon x}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{1 - \epsilon x}}{1 - \delta \frac{x}{1 - \epsilon x}}, \frac{\frac{y}{1 - \epsilon x}}{1 - \delta \frac{x}{1 - \epsilon x}}\right) \\ &= \left(\frac{x}{1 - (\delta + \epsilon)x}, \frac{y}{1 - (\delta + \epsilon)x}\right) \\ &= \Psi(\delta + \epsilon, (x, y)) \end{aligned}$$

y por tanto la acción es regular en el plano agujereado.

## 2.4. Campos vectoriales.

Una herramienta fundamental para el estudio de grupos de transformaciones es su forma infinitesimal, tenemos para ello dos enfoques equivalentes, el formalismo de las formas diferenciales y la teoría geométrica de los campos vectoriales.

Un campo vectorial  $V$  sobre una variedad  $M$  es una función, que a cada punto le asigna un vector tangente.

$$\begin{aligned} V &: M \rightarrow TM \\ x &\mapsto v \in T_x M \end{aligned}$$

En coordenadas locales  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$ :

$$V(x) = \xi^1(x)\partial_{x_1} + \xi^2(x)\partial_{x_2} + \dots + \xi^m(x)\partial_{x_m}$$

donde cada  $x^i$  es una función suave de  $x$ . Denotaremos al conjunto de todos los campos vectoriales sobre  $M$  por  $\mathfrak{X}(M)$ .

Una curva integral de un campo  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , es una curva regular, parametrizada

$$X = \phi(\epsilon)$$

de tal manera que su vector tangente en cada punto coincide con el valor de  $V$  en cada punto.

$$\frac{d\phi}{d\epsilon}(\epsilon_0) = V(\phi(\epsilon_0)) \quad (2.29)$$

los  $\xi^i$  son los coeficientes del campo. Puesto que  $\xi^i$  son suficientemente suaves, se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad para una condición inicial dada

$$\Phi(0) = x_0 \quad (2.30)$$

de tal forma que tenemos garantizada la existencia de una única curva integral maximal,

$$\Phi : I \rightarrow M$$

que pasa por un punto dado  $x_0 = \Phi(0) \in M$ , donde la maximalidad se da respecto a la contención.

Observemos que si  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f$  es una función de variable real, suave, entonces

$$fv = f(x)v(x) \in \mathfrak{X}(M)$$

en coordenadas locales, tenemos

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{i \in I} \xi^i(x) \partial_{x^i} \\ \Rightarrow fv(x) &= \sum_{i \in I} f(x) \xi^i(x) \partial_{x^i} \end{aligned}$$

Si la función  $f$  nunca se anula, entonces las curvas integrales de  $fv$  y las de  $v$  coinciden salvo un cambio de coordenadas.

### 2.4.1. Flujos.

Si  $v \in \mathfrak{X}(M)$ , denotaremos a su curva integral maximal como  $\Psi(\epsilon, x)$  y llamaremos a  $\Psi$  el flujo generado por  $v$ .

Así para cada  $x \in M$  y  $\epsilon \in I(x)$  con  $0 \in I(x)$ ,  $\Psi(\epsilon, x)$  es un punto sobre la curva integral que pasa por  $x \in M$ , el flujo de un campo vectorial tiene algunas propiedades básicas.

- $\Psi(\delta, \Psi(\epsilon, x))$ , para  $x \in M$ . Para cada  $\delta, \epsilon \in \mathbb{R}$  donde ambos lados de la ecuación esten bien definidos.
- $\Psi(0, x) = x$  y  $\frac{d}{d\epsilon} \Psi(\epsilon, x) = V(\Psi(\epsilon, x))$ , para todo  $\epsilon$  que tenga sentido.

Esta última propiedad establece que el campo  $V$  es tangente a  $\Psi(\epsilon, x)$  para una  $x$  fija, además de que establece condiciones iniciales para la curva integral. La primera propiedad se sigue del teorema de existencia y unicidad.

Debemos notar que el flujo generado por un campo vectorial es lo mismo que una acción local del grupo de Lie  $(\mathbb{R}, +)$ , sobre la variedad  $M$ . El campo  $V$  es el generador infinitesimal de la acción, en coordenadas locales, por medio de la aproximación de Taylor

$$\Psi(\epsilon, x) = x + \epsilon \xi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.31)$$

para  $\xi(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^m)$  coeficientes de  $V$ .

Las órbitas de la acción del grupo son curvas integrales maximales de  $V$ . Recíprocamente si  $\Psi(\epsilon, x)$  es un grupo uniparamétrico que actúa sobre  $M$ , su generador infinitesimal se obtiene restringiendo  $V$  a  $\epsilon = 0$

$$V(x) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Psi(\epsilon, x) \quad (2.32)$$

La unicidad de las soluciones garantiza que el flujo generado por  $V$  coincida localmente con la acción de  $\mathbb{R}$  sobre  $M$  en el dominio de definición común. De tal manera, se tiene una correspondencia inyectiva entre los grupos uniparamétricos de transformaciones locales y sus generadores infinitesimales. El cálculo del flujo generado por un campo se logra utilizando la aplicación exponencial.

$$\exp(\epsilon v)x \equiv \Psi(\epsilon, x) \quad (2.33)$$

La aplicación exponencial tiene las siguientes propiedades

$$\exp(0v)x = x \quad (2.34)$$

y

$$\frac{d}{d\epsilon} (\exp(\epsilon v)x) = V(\exp(\epsilon v)x) \quad \forall x \in M \quad (2.35)$$

**Ejemplo 18.** Consideremos el grupo de rotaciones planas

$$\Psi(\epsilon, (x, y)) = (x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, x \sin \epsilon + y \cos \epsilon) \quad (2.36)$$

su generador infinitesimal es

$$v = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y \quad (2.37)$$

donde

$$\xi(x, y) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (x \cos \epsilon - y \sin \epsilon) = -y \quad (2.38)$$

$$\eta(x, y) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (x \sin \epsilon + y \cos \epsilon) = x \quad (2.39)$$

Así que

$$V = -y\partial_x + x\partial_y \quad (2.40)$$

es el generador infinitesimal y el grupo de rotaciones coincide con las soluciones del sistema

$$\frac{dx}{d\epsilon} = -y \quad (2.41)$$

$$\frac{dy}{d\epsilon} = x \quad (2.42)$$

El efecto de un cambio de coordenadas  $y = \Psi(x)$  sobre un campo  $V$  está determinado por sus efectos en cada vector tangente  $V_x$ . De tal forma si  $V \in \mathfrak{X}(M)$  se escribe en coordenadas locales como

$$V = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \partial_{x^i} \quad (2.43)$$

y  $y = \Psi(x)$  es un cambio de coordenadas, entonces  $V$  puede reescribirse como

$$V = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \xi^i(\psi^{-1}(y)) \Psi_{(x^i)}^j(\Psi^{-1}(y)) \partial_{y^j} \quad (2.44)$$

**Proposición 2.** *Suponga que  $V \in \mathfrak{X}(M)$  no se anula en  $x_0 \in M$ . Entonces existe una carta local  $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$  al rededor de  $x_0$  de tal manera, que en términos de las nuevas coordenadas*

$$V = \partial_{y^1} \quad (2.45)$$

*Demostración.* Aplicamos un cambio de coordenadas, de tal manera que  $x_0 = 0$  y  $V(x_0) = \partial_{x^1}$ . Por continuidad  $\xi^1(x)$  es positivo para alguna vecindad de  $x_0$ . Así que, necesariamente, las curvas integrales de  $V$  cruzan el hiperplano  $x^1 = 0$  de manera transversal, y por tanto en una vecindad de 0, cada  $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  puede definirse de manera única, como algún flujo en el hiperplano. Por tanto

$$x = \exp(y^1 V)(0, y^2, y^3, \dots, y^m) \quad (2.46)$$

para  $y^1$  en una vecindad de  $0 \in \mathbb{R}$

Lo anterior nos permite dar un difeomorfismo <sup>15</sup> de  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$  a  $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ . Para  $\epsilon$  pequeño, en coordenadas  $y$ , se tiene

$$\exp(\epsilon V)(y^1, y^2, \dots, y^m) = (y^1 + \epsilon, y^2, \dots, y^m) \quad (2.47)$$

así que el flujo es una acción en la dirección  $y^1$

Por lo tanto, todo campo no-nulo es localmente equivalente al generador infinitesimal de un grupo de traslaciones.  $\square$

### 2.4.2. Acción de un grupo sobre funciones.

Consideremos un campo vectorial  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Nos interesa saber de qué manera cambia  $f$  bajo el flujo generado por  $V$ , es decir de qué manera cambia

$$f(\exp(\epsilon V)x) \quad (2.48)$$

conforme  $\epsilon$  se mueve.

Si  $V$  se escribe en coordenadas locales como

$$V = \sum \xi^i(x) \partial_{x^i} \quad (2.49)$$

entonces por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} f(\exp(\epsilon V)x) &= \sum_{i=1}^m \xi^i(\exp(\epsilon V)x) f_{x^i}(\exp(\epsilon V)x) \\ &= V(f)(\exp(\epsilon V)x) \end{aligned} \quad (2.50)$$

el campo  $V$  actúa como un operador diferencial parcial en las funciones de valor real sobre  $M$ , usando la expansión de Taylor

$$f(\exp(\epsilon V)x) = f(x) + \epsilon V(f)(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2.51)$$

así que  $V(f)$  nos dice el cambio infinitesimal en la función  $f$ , si continuamos la expansión de Taylor, tenemos

$$f(\exp(\epsilon V)x) = f(x) + \epsilon V(f)(x) + \frac{\epsilon^2}{2!} V^2(f)(x) + \dots + \frac{\epsilon^k}{k!} V^k(f)(x) + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1}) \quad (2.52)$$

<sup>15</sup>Geoméricamente se están rectificando las curvas integrales que pasan a travez del hiperplano perpendicular al eje  $x^1$ .

donde  $V^2(f) = V(V(f))$  y  $V^n(f) = V(V^{n-1}(f))$ .

Si asumimos que la serie de Taylor converge en  $\epsilon$ , obtenemos la serie de Lie para la acción del flujo sobre  $f$

$$f(\exp(\epsilon V)x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} V^k(f)(x) \quad (2.53)$$

Se tiene una situación análoga para las funciones vectoriales.

$$\begin{aligned} f &: M \rightarrow \mathbb{R}^n \\ n &\mapsto (f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x)) \end{aligned}$$

se tiene que  $V$  actúa componente a componente

$$V(f) = (V(f^1), V(f^2), \dots, V(f^n)) \quad (2.54)$$

En particular, si  $F^i$  son funciones coordenadas obtenemos una serie de Lie para el flujo

$$\exp(\epsilon V)x = x + \epsilon \xi(x) + \frac{\epsilon^2}{2!} V(\xi)(x) + \dots = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\epsilon^K}{K!} V^K(x) \quad (2.55)$$

De esta forma cada campo define una derivación en el espacio de funciones suaves de variable real en  $M$ , en otras palabras es lineal y cumple la regla de Liebniz

$$V(fg) = V(f)g + fV(g) \quad (2.56)$$

Recíprocamente cada derivación puede identificarse con un vector tangente, que en coordenadas locales queda dado por

$$\sum \xi^i \partial_{x^i} \quad (2.57)$$

### 2.4.3. Diferenciales.

Si  $M$  y  $N$  son variedades suaves y  $f : M \rightarrow N$  es una aplicación suave, cada curva parametrizada  $C = \{\Phi(\epsilon) \mid \epsilon \in I\}$  en  $M$  va a dar bajo  $f$  a una curva parametrizada en  $N$ , de tal manera, la función  $f$  induce una aplicación entre espacios tangentes de  $T_x M$  a  $T_{f(x)} N$ , tal aplicación es la diferencial de  $f$

$$df_{\Phi(\epsilon)} = \frac{d}{d\epsilon} (f \circ \Phi)(\epsilon) \quad (2.58)$$

en coordenadas locales si  $V \in \mathfrak{X}(M)$

$$V_x = \sum_{i=1}^m \xi^i \partial_{x^i} \quad (2.59)$$

entonces

$$df(V(x)) \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^m \xi^i f_{x^i}^j(x) \right) \partial_{y^j} = \sum_{j=1}^m V(f^j(x)) \partial_{y^j} \quad (2.60)$$

La diferencial es una transformación lineal, cuya matriz asociada no es otra sino la matriz jacobiana de  $f$ .

**Lema 1.** Si  $f : M \rightarrow N$  y  $h : N \rightarrow W$  son funciones suaves entre variedades diferenciales, entonces

$$d(h \circ f) = df \circ dh \quad (2.61)$$

La demostración del lema se sigue de la definición de la diferencial y de la regla de la cadena.

**Observación 2.** Si  $x \in \mathfrak{X}(M)$  no necesariamente ocurre que  $df(V) \in \mathfrak{X}(M)$ , si  $f$  no es inyectiva, nada garantiza venido a rodear este campo de Lie como a un gran eje gigante” .za que su diferencial sea un campo vectorial. Sin embargo, si  $f$  es un difeomorfismo, entonces su diferencial es un campo vectorial sobre  $N$

#### 2.4.4. Corchete de Lie.

Podemos definir una operación binaria en el conjunto de campos vectoriales sobre una variedad diferenciable, llamada conmutador o corchete de Lie

**Definición 12.** Si  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  definimos el corchete de Lie de  $v$  y  $w$  como

$$[V, W]f = v(wf) - w(vf) \quad (2.62)$$

donde  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave.

Lo primero que puede observarse es que el corchete de Lie de dos campos vectoriales es un campo vectorial. En efecto, consideremos  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  expresados en coordenadas locales

$$V = \sum_{i=0}^m \xi^i(x) \partial_{x^i} \quad W = \sum_{i=0}^m \eta^i(x) \partial_{x^i} \quad (2.63)$$

tenemos que

$$[V, W] = \sum_{i=0}^m (V(\eta^i) - W(\xi^i)) \partial_{x^i} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m (\xi^j \eta_{x^j}^i - \eta^j \xi_{x^i}^i) \partial_{x^i} \quad (2.64)$$

**Ejemplo 19.**

$$V = y \partial_y \quad W = x^2 \partial_x + xy \partial_y$$

Se tiene que

$$[V, W] = xy \partial_x + y^2 \partial_y$$

**Proposición 3.** El corchete de Lie cumple las siguientes propiedades para  $V, V', W \in \mathfrak{X}(M)$ .

(a) Es bilineal, es decir que para cualesquiera  $c, c' \in \mathbb{R}$

$$[cV + c'V', W] = c[V, W] + c'[V', W] \quad (2.65)$$

y

$$[W, cV + c'V'] = c[W, V] + c'[W, V'] \quad (2.66)$$

(b) Es antí simétrico, es decir

$$[V, W] = -[W, V] \quad (2.67)$$

(c) Cumple la identidad de Jacobi:

$$[V, [V', W]] + [W, [V, V']] + [V', [W, V]] = 0 \quad (2.68)$$

## 2.5. Integrabilidad y el teorema de Frobenius.

Hasta el momento, hemos visto que cualquier campo vectorial sobre  $M$  determina una curva integral en  $M$  de tal manera que  $V$  es tangente a la curva en todo punto.

El teorema de Frobenius se trata de un caso más general, determina subvariedades integrales de sistemas de campos vectoriales con la propiedad de ser tangente a tal subvariedad en cada punto.

**Definición 13.** Sean  $V_1, V_r \in \mathfrak{X}(M)$ , una subvariedad integral para  $\{V_i\}_{i=1}^r$  es una subvariedad  $N \subset M$ , cuyo espacio tangente  $T_y N$  es generado por  $\{V_i|_y\}_{i=1}^r \quad \forall y \in N$

Diremos que el sistema  $\{V_i\}_{i=1}^r$  es integrable si por cada  $x_0 \in M$  pasa una subvariedad integral.

Notese que si  $N$  es una subvariedad integral para  $\{V_i\}$ , entonces la dimensión del subespacio de  $T_y M$ , generado por  $\{V_i\}$ , que por definición es  $T_y N$  es la misma dimensión que la de  $N$ .

Esto no excluye la posibilidad de que la dimensión del subespacio de  $T_x M$  generado por  $\{V_i|_x\}$ , varía conforme varía  $x$ , esto implica que un conjunto de campos vectoriales puede tener subvariedades de distinta dimensión.

El lema anterior nos dá condiciones necesarias para la integrabilidad de sistemas de campos vectoriales. Digamos que  $N$  es una subvariedad integra, entonces cada campo de la colección deberá ser tangente a  $N$  en cada punto.

El corchete de Lie de cualquier par de campos en la colección debe ser tangente a  $N$  por tanto deberá estar en el generado de los campos en cada punto.

**Definición 14.** Un sistema de campos vectoriales  $\{V_i\} \subset \mathfrak{X}(M)$  está en involución si existen funciones suaves  $h_{ij}^k$

$$h_{ij}^k : M \rightarrow \mathbb{R}$$

De tal manera que

$$[V_i, V_j] = \sum_{k=1}^r h_{ij}^k V_k$$

**Teorema 4.** Sean  $\{V_i\} \subset \mathfrak{X}(M)$ , para  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Entonces  $\{V_i\}$  es integrable sí y sólo sí está en involución.

Este teorema no se cumple si el sistema es infinitamente generado. Pero podemos hacer una generalización útil.

**Definición 15.** Consideremos  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{X}(M)$  tal que forma un espacio vectorial, decimos que  $\mathfrak{H}$  está en involución si es cerrado bajo el corchete de Lie.

En el caso de dimensión finita  $\mathfrak{H}$  puede verse como conjunto de combinaciones lineales de los campos básicos  $V_i$ ,  $\sum f_i(x)V_i$ , donde las funciones  $f_i$  son suaves sobre  $M$ <sup>16</sup>.

Ahora podemos dar una definición local para las subvariedades integrales.

**Definición 16.** Consideremos  $\mathfrak{H}|_x$ , el subespacio de  $T_x M$  generado por el campo  $V|_x$ , para todo  $V \in \mathfrak{H}$ . Una subvariedad integral de  $\mathfrak{H}$  es una subvariedad conexa  $N \subset M$  tal que  $T_y M = \mathfrak{H}|_y$  para todo  $y \in N$ .

Diremos que  $\mathfrak{H}$  es invariante en rango si para cualquier  $V \in \mathfrak{H}$ , la dimensión del subespacio  $\mathfrak{H}_{\exp(\epsilon V)}$  a lo largo del flujo generado por  $V$  es constante independiente de  $\epsilon$  y que puede depender de la condición inicial  $x$ .

<sup>16</sup>En este caso se dice que  $\mathfrak{H}$  es finitamente generado.

Como la curva integral  $\exp(\epsilon V)x$  de  $V$ , sale del punto  $x$ , debe estar contenida en una subvariedad integral  $N$ , la invarianza en rango es una condición necesaria para la integrabilidad completa. La invarianza en rango se sigue automáticamente si  $\mathfrak{H}$  es finitamente generado o consiste de campos vectoriales analíticos sobre una variedad analítica.

**Teorema 5** (Frobenius.). *Sea  $\mathfrak{H}$  un sistema de campos vectoriales sobre una variedad  $M$ . Diremos que  $\mathfrak{H}$  es integrable si y sólo si está en involución y es invariante en rango.*

Escencialmente, la demostración se hace construyendo subvariedades integrales.

Si  $x \in N$  entonces podemos construir tal subvariedad, examinando curvas integrales sucesivas que comienzan en  $x$

$$N = \{\exp(V_1)\exp(V_2)\dots\exp(V_k)x \mid k \geq 1, V_i \in \mathfrak{H}\} \quad (2.69)$$

La invarianza en rango implica que para algún  $y \in N$ , se tiene que  $\mathfrak{H}|_y$  tiene la dimensión "correcta". Llamaremos a la colección de subvariedades integrales maximales de un sistema de campos vectoriales una foliación de la variedad  $M$ , cada subvariedad integral es una hoja de la foliación.

**Ejemplo 20.** *Consideremos los siguientes campos vectoriales sobre  $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned} V &= -y\partial_x + x\partial_y \\ W &= 2xz\partial_x + 2yz\partial_y + (z^2 + 1 - x^2 - y^2)\partial_z \end{aligned}$$

haciendo un cálculo sencillo tenemos que:

$$[V, W] = 0$$

así que por el teorema de Frobenius el sistema  $\{V, W\}$  es integrable.

Dado  $(x, y, z)$ , el subespacio de  $T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$  generado por  $V_{(x,y,z)}$  y  $W_{x,y,z}$  es de dimensión 2, excepto en el eje  $Z$  y en el círculo unitario con centro en  $(0, 0, 0)$ ,  $S^1$ , que son de dimensión 1, así que  $Z$  y  $S^1$  son subvariedades integrales de  $\{V, W\}$ .

Las otras subvariedades integrales son toros

$$\zeta(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = c$$

para  $c > 2$ . De hecho

$$d\zeta(V) = V(\zeta) = 0 \quad d\zeta(W) = W(\zeta) = 0$$

por lo cual, se tiene que los campos  $V$  y  $W$  son tangentes a todos los conjuntos de nivel de  $\zeta$  donde  $\nabla\zeta \neq 0$

Un sistema integrable de campos vectoriales  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es llamado semi-regular si la dimensión de  $T_x M$  no varía de punto a punto. En este caso todas las subvariedades integrales tienen la misma dimensión.

De manera análoga al concepto de acción regular de grupo, diremos que un sistema integrable de campos vectoriales es regular si es semi-regular y además, para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  existe una vecindad de  $X$ , tal que cada subvariedad integral maximal interseca a la vecindad en un subconjunto conexo por trayectorias.

Aunque la semi-regularidad es una propiedad local que puede deducirse usando coordenadas, la regularidad depende de la estructura global del sistema y es extremadamente difícil checarlo sin hallar explícitamente las subvariedades integrales. Cualquier sistema semi-regular puede hacerse regular si se le restringe a un abierto de  $M$ .

Para sistemas de campos vectoriales semi-regulares, el teorema de Frobenius nos permite aplanar las subvariedades integrales, vía la elección de coordenadas locales adecuadas.

**Teorema 6.** Sea  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  un sistema integrable de campos vectoriales tales que la dimensión del generado por  $\{V_1(x), V_2(x), \dots, V_r(x)\}$  en  $T_x M$  es una constante, independientemente de la elección de  $x \in M$ . Entonces para cada  $x_0 \in M$ , existen coordenadas locales planas  $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$  cerca de  $x_0$ , de tal manera que las subvariedades integrales intersecan la carta coordenada dada en las secciones transversales  $y^i = c_i$ . Si adicionalmente el sistema es regular, entonces la carta coordenada puede elegirse de tal forma que cada subvariedad integral la interseca en a lo más una sección transversal.

**Ejemplo 21.** Utilizando el ejemplo anterior, tomemos, al rededor de cualquier punto  $(x_0, y_0, z_0)$  con  $z_0 \neq 0$ , las coordenadas locales planas están dadas por  $(\tilde{x} = x, \tilde{y} = y, \tilde{z} = \zeta(x, y, z))$  el espacio tangente al plano  $z = \text{cte}$  es generado por los campos

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{x}} &= \partial_x - \frac{x(x^2 + y^2 - z^2 - 1)}{2z(x^2 + y^2)} \partial_z \\ \partial_{\tilde{y}} &= \partial_y - \frac{y(x^2 + y^2 - z^2 - 1)}{2z(x^2 + y^2)} \partial_z\end{aligned}$$

Notese que  $\{\partial_{\tilde{x}}, \partial_{\tilde{y}}\}$  y  $\{v, w\}$  generan el mismo subespacio de  $T\mathbb{R}^3$  en cada punto, de tal manera que  $z(x^2 + y^2) \neq 0$ , así que estamos aplanando el toro del ejemplo anterior.

## 2.6. Álgebras de Lie.

Si  $G$  es un grupo de Lie, tenemos que algunos campos vectoriales, restringidos sobre  $G$  están caracterizados por su invarianza bajo la operación del grupo. Estos campos invariantes forman un espacio vectorial de dimensión finita, aún más, con la suma y el corchete de Lie, forman un álgebra, llamada el álgebra de Lie asociada a  $G$ , en un sentido más preciso se trata del operador infinitesimal del grupo, de hecho casi toda la información referente al grupo está contenida en su álgebra de Lie.

### 2.6.1. Campos invariantes.

Consideremos un grupo de Lie  $G$ , para cada  $g \in G$  se define la aplicación multiplicativa derecha como sigue

$$\begin{aligned}R_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto hg\end{aligned}$$

en la definición se pide que la operación del grupo sea un difeomorfismo, así que  $R_g$  es invertible para todo  $g \in G$

$$(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$$

Un campo vectorial es llamado invariante por la derecha si  $dR_g(V|_h) = V_{R_g(h)} = V|_{hg}$  para cualquier  $g, h \in G$ .

**Observación 3.** Si  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  son invariantes por la derecha, entonces también lo es cualquier combinación lineal de ellos.

Así que los campos invariantes derechos forman un espacio vectorial.

**Definición 17.** El álgebra de Lie de un grupo de Lie  $G$ , denotada por  $\mathfrak{g}$  es el espacio vectorial de los campos invariantes derechos en  $G$

Observese que un campo invariante por la derecha queda bien determinado por su valor en el neutro de  $G$

$$\begin{aligned} V|_e &= dR_g(V|_e) \\ R_g(e) &= e \end{aligned}$$

Del mismo modo, cualquier vector tangente a  $G$  en  $e$  determina de manera unívoca un campo invariante derecho sobre  $G$ . En efecto

$$dR_g(V|_h) = dR_g(dR_h(V|_e)) = dR_{hg}(V|_e) = V|_{hg} \quad (2.70)$$

Así que podemos identificar el álgebra de Lie de  $G$  con  $T_eG$ , esto es  $\mathfrak{g} \cong T_eG$ , en el sentido de espacios vectoriales. Adicionalmente,  $\mathfrak{g}$  admite un operador bilineal y anti-simétrico que no es otro sino el corchete de Lie o conmutador.

$$[X, Y] = XY - YX \quad (2.71)$$

podemos reformular nuestra definición como sigue

**Definición 18.** *Un álgebra de Lie es un espacio vectorial  $\mathfrak{g}$  con una operación, llamada el corchete de Lie, tal que es*

1. *Bilineal.*
2. *Antisimétrica.*
3. *Cumple la identidad de Jacobi.*

**Ejemplo 22.** *El álgebra de Lie asociada al grupo general lineal de orden  $n$  sobre los reales es un espacio vectorial real de dimensión  $n^2$ , así que*

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \cong M_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad (2.72)$$

de hecho  $T_{I_{d_{n \times n}}}GL(n, \mathbb{R})$  esta formado por campos que pueden escribirse como sigue

$$V_A|_{I_d} = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{x_{ij}}|_{I_d} \quad (2.73)$$

donde  $A = (g_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

Consideremos  $Y = (y_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$  y definimos  $R_Y(X) = XY$  con  $XY_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj}$ , tenemos que

$$V_A|_Y = dR_y(V_a|_{I_d}) = \sum_{l,m} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{x_{ij}} \left( \sum_k x_{ik}y_{km} \right) \partial_{l_m} \quad (2.74)$$

En términos de  $X \in GL(n, \mathbb{R})$  tenemos

$$V_A|_X = \sum_{i,j} \left( \sum_k a_{ik} X_{kj} \right) \partial_{x_{ij}} \quad (2.75)$$

por lo tanto, tenemos finalmente que el corchete de Lie

$$[V_A, V_B] = V_{[A,B]} \quad (2.76)$$

es decir  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M_{n \times n}(\mathbb{R})$  con el conmutador de matrices como el corchete de Lie.

### 2.6.2. Subgrupos uniparamétricos.

Ahora enunciaremos un resultado mediante el que se muestra una correspondencia biyectiva entre los subespacios unidimensionales de  $\mathfrak{g}$  y los subgrupos uniparamétricos conexos de  $G$ .

**Proposición 4.** *Sea  $V \neq 0$  un campo vectorial, invariante por la derecha, sobre un grupo de Lie  $G$ , se tiene que el flujo generado por  $V$  a lo largo de la identidad*

$$g_\epsilon = \exp(\epsilon V)e = \exp(\epsilon V) \quad (2.77)$$

*está bien definido para todo  $\epsilon \in \mathbb{R}$  y forma un subgrupo uniparamétrico de  $G$ , isomorfo a  $\mathbb{R}$  o bien a  $SO(2)$ . De manera recíproca, se tiene que cualquier subgrupo unidimensional de  $G$  es generado por campos invariantes derechos.*

*Demostración.* Para  $\epsilon$  y  $\delta$ , arbitrariamente pequeños (2.77) se sigue de el hecho de que  $V$  es invariante derecho

$$\begin{aligned} g_\delta g_\epsilon &= R_{g_\epsilon}(g_\delta) = R_{g_\epsilon}(\exp(\delta V)e) \\ &= \exp(\delta dR_{g_\epsilon}(V))R_{g_\epsilon}(e) \\ &= \exp(\delta V)g_\epsilon \\ &= \exp(\delta V)\exp(\epsilon V)e \\ &= (\exp(\delta + \epsilon)V)e = g_{\delta+\epsilon} \end{aligned}$$

De tal manera, tenemos que  $g_\epsilon$  es un grupo local uniparamétrico, para cualquier  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño, en particular, tenemos que  $g_0 = e$  y  $g_{-\epsilon} = g_\epsilon^{-1}$ .

Ahora, tomando una vecindad de radio  $\frac{\epsilon}{2}$  al rededor de  $\epsilon$ , definimos de manera recursiva lo siguiente

$$g_{m\epsilon_0+\epsilon} = g_{m\epsilon_0}g_\epsilon \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.78)$$

De esta manera, extendemos, de manera continua a  $g_\epsilon$ , y así podremos definir el flujo de manera global y formar un subgrupo.

Si para algún  $\delta \neq \epsilon$  se tiene que  $g_\delta = g_\epsilon$ , tenemos entonces que  $g_{\epsilon_0} = e$ , para algún  $\epsilon_0 > 0$  y por tanto  $g_\epsilon$  es periódico de periodo  $\epsilon_0$ . En este caso  $\{g_\epsilon\} \cong SO(2)$ , en caso contrario, si  $g_\epsilon \neq g_\delta$  para todo  $\epsilon \neq \delta$ , se tiene que  $\{g_\epsilon\} \cong \mathbb{R}$ .

Recíprocamente, consideremos  $H \leq G$  de dimensión 1 y sea  $V|_e \in T_e H$ , tal que  $V \neq 0$ , recordemos que

$$T_e H \cong \{V \in \mathfrak{X}(H|_e) | V \text{ es invariante por la derecha}\}$$

ahora, como  $H \leq G$ , sucede que  $V|_h$  es tangente a  $H$  para cada  $h \in H$  por lo que en conclusión,  $H$  es la curva integral de  $V$  por  $e$ .  $\square$

### 2.6.3. Subálgebras.

Diremos que un subconjunto  $s$ -dimensional  $\mathfrak{L}^s \subset \mathfrak{L}^r$  de un álgebra de Lie es una subálgebra si es cerrado bajo  $[\cdot, \cdot]$ . Cualquier campo invariante por la derecha en  $H \leq G$  puede extenderse a un campo invariante por la derecha en  $G$

$$V|_g = dR_g(V|_e) \quad g \in G$$

los siguientes resultados establecen una correspondencia inyectiva entre subgrupos y subálgebras de Lie.

**Teorema 7.**<sup>17</sup> Sea  $G$  un grupo de Lie cuya álgebra asociada es  $\mathfrak{g}$ , y consideremos  $H \leq G$ , con álgebra  $\mathfrak{k}$ , entonces  $\mathfrak{k}$  es subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Recíprocamente, cada subálgebra  $\mathfrak{k}$  de  $\mathfrak{g}$  es el álgebra asociada a algún subgrupo  $s$ -paramétrico  $H \leq G$ .

**Ejemplo 23.** Si  $H \leq GL(n, \mathbb{R})$ , entonces  $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{gl}(n)$ , será suficiente encontrar los subgrupos uniparamétricos en  $GL(n, \mathbb{R})$  contenidos en  $H$

$$\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid e^{\epsilon A} \in H, \epsilon \in \mathbb{R}\}$$

para fijar ideas, consideremos en caso  $H = O(n)$ , debemos hallar matrices  $A$ ,  $n \times n$  tales que

$$(e^{\epsilon A})(e^{\epsilon A})^t = Id$$

derivando respecto de  $\epsilon$  tenemos que

$$A + A^t = 0$$

por tanto estas matrices son el álgebra  $\mathfrak{so}(n)$ .

**Teorema 8.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces es isomorfa a alguna subálgebra de  $\mathfrak{gl}(n)$ .

**Teorema 9.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces existe un único grupo de Lie  $G^*$ , simplemente conexo tal que admite  $\mathfrak{g}$  como su álgebra de Lie asociada. Aún más si  $G$  es otro grupo de Lie conexo que tiene a  $\mathfrak{g}$  como álgebra asociada entonces la proyección

$$\pi : G^* \rightarrow G$$

es una aplicación cubriente y por lo tanto  $G^*$  es el cubriente simplemente conexo de  $G$

En el caso de álgebras asociadas a grupos locales, podemos escribir los campos invariantes en términos infinitesimales

**Proposición 5.** Sea  $G$  un grupo de Lie local con producto  $m(x, y)$ . Entonces el álgebra de Lie asociada  $\mathfrak{g}$  está generada por los campos

$$V_k = \sum_{i=1}^r \xi_k^i(x) \partial_{x_i} \quad k \in \{1, 2, \dots, r\}$$

donde

$$\xi_k^i(x) = \frac{\partial m^i}{\partial x^k}(0, x) \quad m = (m^1, m^2, \dots, m^r) \quad (2.79)$$

*Demostración.* Puesto que  $R_y(x) = m(x, y)$  tenemos que  $V_k|_y = dR_y(\sum \xi_k^i(0) \partial_{x_i}) = \sum \xi_k^i(0) \frac{\partial m^j}{\partial x^i}(0, y) \partial_{x_j}$

Así que es suficiente probar que

$$\xi_k^i(0) = \delta_k^i$$

donde  $\delta_k^i$  es la delta de Kroenecker, es decir

$$\frac{\partial m^j}{\partial x^i}(0, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

lo cual se sigue de que  $m(x, 0)$  es la identidad. □

<sup>17</sup>La demostración puede encontrarse en [War, teo 3.19].

### 2.6.4. Constantes de estructura.

Supongamos que  $\mathfrak{g}$  es cualquier álgebra de Lie de dimensión finita. Por el teorema 7  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie asociada a algún grupo de Lie  $G$ . Si introducimos una base  $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  para  $\mathfrak{g}$ , debe cumplirse que el corchete de Lie de cualesquiera dos básicos sea nuevamente un elemento del álgebra, así que hay ciertas constantes  $c_{ij}^k$  llamadas constantes de estructura del álgebra, tales que

$$[V_i, V_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k V_k \quad (2.80)$$

Notemos que puesto que los campos  $V_i$  forman una base, el conocimiento de las constantes de estructura nos permite reconstruir el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  utilizando 2.80 y aprovechando la bilinealidad del corchete de Lie, se observa que las constantes de estructura deberán cumplir las condiciones de antisimetría y la identidad de Jacobi.

La elección de una nueva base para  $\mathfrak{g}$  implica la transformación de las constantes de estructura, si tenemos que

$$\hat{V}_i = \sum a_{ij} V_j \quad (2.81)$$

entonces

$$\hat{c}_{ij}^k = \sum_{l,m,n} a_{il} a_{jn} b_{nk} c_{lm}^n \quad (2.82)$$

donde  $(b_{ij})$  es la inversa de  $(a_{ij})$ . De esta manera, se tiene que dos conjuntos de constantes de estructura, determinan la misma álgebra si y sólo si están relacionados por la ecuación 2.82. Ahora, por el teorema 7 podemos dar una correspondencia uno a uno entre clases de constantes de estructura que satisfacen 2.81 y 2.82 y grupos de Lie simplemente conexos cuyas álgebras de Lie tengan a las constantes como constantes de estructura asociadas a alguna base. De esta manera, la teoría de Lie puede reducirse al estudio de las ecuaciones 2.81 y 2.82, sin embargo no hay que tomar este hecho de una manera tan literal pues llevaría a puntos de vista demasiado simplistas.

### 2.6.5. Álgebras de Lie solubles.

Una subálgebra  $\mathfrak{L}^q \subset \mathfrak{L}^r$  es un ideal si  $\forall X \in \mathfrak{L}^q$  y  $Y \in \mathfrak{L}^r$ :  $[X, Y] \in \mathfrak{L}^q$ .

Ahora definiremos álgebras de Lie solubles, de tal forma que la teoría de Lie será un análogo de la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales.

**Definición 19.**  $\mathfrak{L}^q$  es un álgebra de Lie soluble  $q$ -dimensional si  $\exists$  una sucesión de subálgebras  $\emptyset = \mathfrak{L}^0 \subset \mathfrak{L}^1 \subset \dots \subset \mathfrak{L}^{q-1} \subset \mathfrak{L}^q$  tal que:  $\mathfrak{L}^k$  es una álgebra de Lie  $k$ -dimensional y  $\mathfrak{L}^{k-1}$  es un ideal de  $\mathfrak{L}^k \quad \forall k \in \{1, \dots, q\}$

La condición de solubilidad es equivalente a poder ordenar  $X^1, \dots, X^q \in \mathfrak{L}^q$  para formar una base de tal forma que:

$$[X^a, X^b] = \beta_k^{ab} X^k$$

donde  $K = 1, \dots, b-1$  para  $a < b$ .

Nótese que toda 2-álgebra de Lie es soluble por construcción:

*Demostración.* En efecto:

$$[X^a, X^b] = \beta_a X^a + \beta_b X^b$$

Sean  $Y = \beta_a X^a + \beta_b X^b$ ,  $Z = \alpha_a X^a + \alpha_b X^b$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [Y, Z] &= (\beta_a \alpha_b - \beta_b \alpha_a) (X^a X^b - X^b X^a) \\ &\Rightarrow [Y, Z] = (\beta_a \alpha_b - \beta_b \alpha_a) Y \\ \therefore \{X, Z\} &\text{ es un álgebra de Lie soluble.} \end{aligned}$$

□

## Capítulo 3

# Simetrías de funciones

*Las simetrías nos proveen con un hilo de Ariadna que nos permite navegar a través del laberinto infinitamente variado y complejo de los fenómenos naturales.*

*Brian Cantwell.*

### 3.1. Simetría e invarianza.

**Definición 20.** Una relación matemática posee una propiedad de simetría si es posible transformar las variables de tal forma que la expresión resultante tenga la misma forma en las nuevas variables y en las antiguas. Diremos que la transformación es una simetría del objeto y que la expresión dada es un invariante de la transformación.

**Ejemplo 24.** Consideremos una traslación a lo largo de rectas horizontales:

$$T_s = \begin{cases} x = \tilde{x} + s \\ y = \tilde{y} \end{cases} \quad (3.1)$$

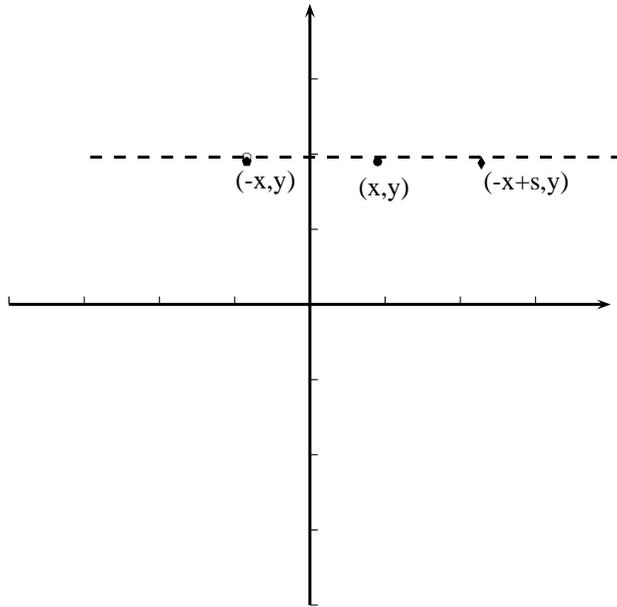
Observe que al variar el parámetro  $s$  podemos movernos a cualquier punto sobre una recta horizontal de forma bi-continua (esto es, que podemos regresar continuamente al punto de partida). Tenemos definida de forma sencilla una transformación inversa para cada elección de  $s$  a saber:  $T_s^{-1} = T_{-s}$ . Definimos un elemento identidad tomando  $s = 0$ . Sólo bastará observar que la composición de dos transformaciones equivale a sumar los parámetros de cada una.

En efecto

$$T_{s_1} \circ T_{s_2}(x, y) = T_{s_1}(\tilde{x} + s_2, \tilde{y}) = (\tilde{x} + (s_1 + s_2), \tilde{y}) = T_{s_1+s_2}(x, y)$$

Puesto que  $\mathbb{R}$  forma un grupo con la operación adición, por herencia,  $T_s$  forma un grupo de transformaciones continuas, respecto a la composición. Por tanto es un grupo de Lie.

Ahora vamos a un ejemplo de un conjunto de transformaciones que no forma un grupo de Lie.

Figura 3.1:  $T_s$ 

**Ejemplo 25.** (*Transformación de los pasos.*)

Consideremos una traslación compuesta con una reflexión respecto a una recta en el plano.

$$T_s = \begin{cases} x = -\tilde{x} + s \\ y = \tilde{y} \end{cases} \quad (3.2)$$

Primero debemos observar que la transformación  $T_s$  no es continua para cualquier  $s$ . No existe elemento identidad y tampoco es cerrado bajo composición, puesto que una reflexión es autoinversa, por tanto 3.2 no forma un grupo de Lie.

Pasaremos ahora a dar una definición de grupo n-paramétrico de Lie.

**Definición 21.** Sea  $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n) \in D \subset \mathbb{R}^n$  con  $D$  un subconjunto abierto y conexo. Definamos la siguiente transformación:

$$(x^1, \dots, x^n) \xrightarrow{T_s} (F^1(\tilde{x}, s), \dots, F^n(\tilde{x}, s))$$

donde  $F^i$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$  respecto a  $\tilde{x}$  y analíticas respecto a  $s$  en un abierto  $S \subset \mathbb{R}$

El conjunto  $\{T_s\}$  forma un grupo de Lie respecto a la composición si y sólo si:

- i)  $\exists s_0$  tal que  $T_{s_0}(\bar{x}) = \bar{x}$
- ii)  $\forall s \in \mathbb{R}, \exists s^{-1}$  tal que  $T_{s^{-1}} \circ T_s(\bar{x}) = \bar{x}$
- iii)  $T_{s_1} \circ T_{s_2} = T_{s_3} \in \{T_s\}$
- iv)  $(T_{s_1} \circ T_{s_2}) \circ T_{s_3} = T_{s_1} \circ (T_{s_2} \circ T_{s_3})$

### 3.2. Funciones invariantes.

**Ejemplo 26.** *Invarianza de una familia de parábolas bajo una dilatación*

Consideremos la familia de parábolas

$$\Phi(x, y) = \frac{y}{x^2}$$

y la transformación:

$$T_s = \begin{cases} x = s\tilde{x} \\ y = s^n\tilde{y} \end{cases}$$

con  $s \in \mathbb{R}_+$  dado que para  $s = 0$  no está definida la transformación inversa. En este caso el elemento identidad corresponde a  $s = 1$ , Ahora notese que  $1 = e^0$ , lo cual nos permitirá reescribir el grupo de dilataciones como sigue:

$$\tilde{T}_s = \begin{cases} x = e^s\tilde{x} \\ y = e^{sn}\tilde{y} \end{cases}$$

de tal modo, el parámetro  $s$  corre en todo  $\mathbb{R}$  y el elemento identidad corresponde a  $s = 0$

Al aplicar  $\tilde{T}_s$  a  $\Phi(x, y)$  obtenemos:

$$\Phi(x, y) = \frac{y}{x^2} = e^{s(n-2)} \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^2}$$

Por la forma de  $\Phi(x, y)$ , si elegimos  $n = 2$  obtenemos:

$$\Phi(x, y) = \frac{y}{x^2} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^2} = \Phi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Entonces, para  $n = 2$ ,  $\Phi$  queda invariante bajo la acción de  $\tilde{T}_s$

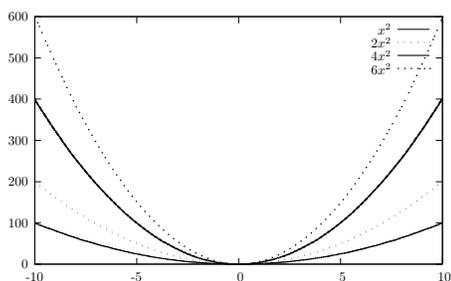


Figura 3.2: Familia de parábolas  $\Phi$

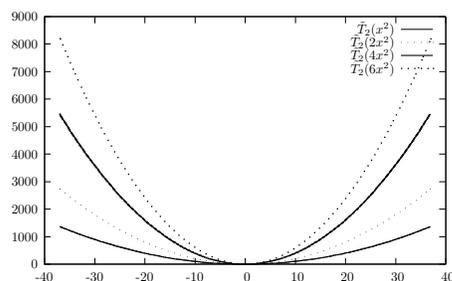


Figura 3.3:  $\Phi$  bajo la acción de  $\tilde{T}_2$

El ejemplo 26 da lugar a la siguiente definición.

**Definición 22.** Una función  $\phi(x)$  es invariante bajo la acción de un grupo de Lie  $\{T_s\}$  si y sólo si:

$$\phi(x) = \phi(F(\tilde{x}, s)) = \phi(\tilde{x})$$

### 3.3. Forma infinitesimal de un grupo.

Consideremos el grupo definido por:

$$\tilde{x}^j = F^j(x, s) \quad (3.3)$$

Supongamos además que podemos definirlo de tal forma que la identidad del grupo corresponda al valor  $s_0 = 0$  del parámetro.

$$x^j = F^j(x, 0)$$

Ahora expandimos 3.3 en serie de Taylor al rededor de  $s_0$ :

$$\tilde{x}^j = x^j + s \left( \frac{\partial F^j}{\partial s} \right) \Big|_{s=0} + \mathcal{O}(s^2) + \dots$$

los términos  $\frac{\partial F^j}{\partial s} \Big|_{s=0}$  son llamados generadores infinitesimales del grupo y usualmente los denotaremos con  $\xi^j$

$$\xi^j(\bar{x}) = \left( \frac{\partial}{\partial s} F^j(\bar{x}, s) \right) \Big|_{s=0} \quad (3.4)$$

El vector  $\xi^j$  es llamado campo vectorial del grupo.

### 3.4. Series de Lie.

En esta sección desarrollaremos el concepto de operador del grupo y presentaremos las condiciones de invarianza para funciones.

Consideremos la función  $\Psi(\tilde{x}) = \Phi(F(x, s))$  analítica en una vecindad de  $s = 0$ . Si expandimos  $\Psi$  en serie de Taylor al rededor de  $s = 0$  obtenemos:

$$\Psi(\tilde{x}) = \Psi(x) + s \frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} + \frac{s^2}{2!} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} \Big|_{s=0} + \frac{s^3}{3!} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial s^3} \Big|_{s=0} + \dots \quad (3.5)$$

por regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial F^j} \frac{\partial F^j}{\partial s} \Big|_{s=0} = \xi^j \frac{\partial \Psi}{\partial F^j}$$

La expansión 3.4 es la representación en serie de Lie de la función  $\Psi$ :

$$\Psi(\tilde{x}) = \Psi(x) + s \left( \xi^j \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \right) + \frac{s^2}{2!} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( x^{i j_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{j_1}} \right) + \frac{s^3}{3!} \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \xi^{j_1} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \left( \xi^{j_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{j_2}} \right) \right) + \dots \quad (3.6)$$

Así que  $\Phi(\tilde{x}) = \Phi(x)$  si y sólo si  $\xi^j \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = 0 \quad \forall j$

**Teorema 10.** Una función  $\Psi$ , analítica en un abierto alrededor de  $s = 0$  es invariante bajo un grupo de Lie  $T_s : \{\tilde{x}^j = F^j(x, s) : j = 0 \dots n\}$  con infinitesimal  $\xi^j \iff$

$$\xi^j(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \equiv 0$$

Las componentes  $\Psi^j(x)$  son invariantes del grupo  $T_s$ , el operador:

$$X \equiv \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

es llamado operador del grupo y diremos que

$$X\Psi$$

es la derivada de Lie de la función  $\Psi$

Utilizando esta notación podemos escribir la expansión en serie de Lie de  $\Psi$  de una manera mas concisa:

$$\Psi(\tilde{x}) = \Psi(x) + s(X\Psi) + \frac{s^2}{2!} X(X\Psi) + \frac{s^3}{3!} X(X(X\Psi)) + \dots \quad (3.7)$$

o equivalentemente

$$\Psi(\tilde{x}) = e^{sX}\Psi(x) \quad (3.8)$$

El gran aporte de Lie fué reemplazar la condición finita de invarianza que es no-lineal, por una condición infinitesimal lineal que es mucho mas útil en tanto es más fácil de manejar , además descubrió que la condición infinitesimal implica la finita . Este es lo que le permite a la teoría de Lie aplicarse a problemas no-lineales.

### 3.5. Resolviendo $X\Psi(x) = 0$

La ecuación  $\xi^j(x) \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0$  es una ecuación en derivadas parciales lineal, como tal tiene asociado un sistema de  $n - 1$  ordinarias de primer orden, es decir las ecuaciones características

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)} \quad (3.9)$$

cuyas integrales son:

$$\psi^i = \Psi^i(x) \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.10)$$

que son a su vez los invariantes del grupo.

Cada curva  $\psi^i = cte$  es individualmente invariante bajo el grupo, es decir, un punto sobre una de las curvas de la familia va a dar a otro punto sobre la misma curva bajo la acción del grupo

Veamos ahora un ejemplo de un grupo de transformaciones que deja invariante al conjunto de todas las curvas pero que no las fija individualmente.

**Ejemplo 27.** *El grupo de rotaciones planas*

*Los infinitesimales del grupo son  $(\xi, \eta) = (-y, x)$  y al condición de invarianza es:*

$$-y\Psi_x + x\Psi_y = 0$$

*con la ecuación característica correspondiente:*

$$\frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$$

*cuya integral invariante es una familia de círculos:*

$$\psi = \Psi(x, y) = x^2 + y^2$$

A lo largo de un círculo podemos escribir  $ay$  como función de  $x$ :

$$y = \pm\sqrt{\psi - x^2}$$

derivando tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\pm\sqrt{\psi - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

Observese que puede haber puntos fijos bajo un grupo de Lie, que de hecho corresponden a las raíces de

$$\xi^j(x) = 0$$

### 3.6. Grupos de Lie dados sus infinitesimales

Vimos en la sección anterior cómo una función analítica puede expandirse en serie de lie, en términos del operador  $X$

$$G(\tilde{x}) = G(x) + s(XG) + \frac{s^2}{2!}X(XG) + \frac{s^3}{3!}X(X(XG)) + \dots \quad (3.11)$$

Si hacemos  $G(x) = x^j$  para cada  $x^j$  entonces 3.11 se convierte en:

$$\tilde{x}^j = x^j + s(Xx^j) + \frac{s^2}{2!}X(Xx^j) + \frac{s^3}{3!}X(X(Xx^j)) \quad (3.12)$$

Para  $\xi^j$  simples, podemos sumar explícitamente y formalmente obtenemos:

$$\tilde{x}^j = e^{sX}x^j \quad (3.13)$$

**Ejemplo 28.** Operando bajo  $X$  a los infinitesimales del grupo de rotaciones  $(\xi, \eta) = (-y, x)$  obtenemos:

$$Xx = -y \quad X^2x = -x \quad X^3x = y \quad X^4x = x \quad (3.14)$$

Ahora podemos separar 3.12 en dos términos como sigue:

$$\tilde{x} = x \left( 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \dots \right) - y \left( s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots \right) = x \cos(s) - y \sin(s) \quad (3.15)$$

Análogamente la serie de lie para  $y$ :

$$\tilde{y} = x \left( s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots \right) + y \left( 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \dots \right) = x \sin(s) + y \cos(s) \quad (3.16)$$

Claramente 3.15 y 3.16 son la forma finita del grupo de rotaciones planas.

**Ejemplo 29.** Grupo de dilataciones. Consideremos  $(\xi, \eta) = (x, y)$ , entonces aplicando  $X$  a  $x$  tenemos:

$$Xx = x \quad X^2x = x \quad X^3x = x \quad X^4x = x \quad (3.17)$$

Entonces la serie tiene un sólo término:

$$\tilde{x} = x \left( 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots \right) = e^s x \quad (3.18)$$

Aplicando  $X$  a  $y$ :

$$Xy = y \quad X^2y = y \quad X^3 = y \quad (3.19)$$

Así que:

$$\tilde{y} \left( 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots \right) \quad (3.20)$$

Lo cual define al grupo de traslaciones.

### 3.7. Grupos multiparamétricos.

Hasta ahora habíamos considerado grupos uni-paramétricos, estos aparecen al estudiar las propiedades de simetría de funciones o de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, para estudiar las simetrías de ecuaciones de orden superior, transformaciones vectoriales o bien ecuaciones en derivadas parciales necesitaremos utilizar grupos multiparamétricos.

**Ejemplo 30.** Consideremos el grupo proyectivo de dimensión  $n$ :

$$T^{proj} : \left\{ \tilde{x}^j = \frac{x^j + a_j + b_{jk}x^k}{1 + c_kx^k} \right\} \quad (3.21)$$

El superíndice  $k$  indica la suma desde  $k = 1 \dots n$ . El grupo proyectivo tiene  $r = n^2 + 2n$  parámetros independientes. Para obtener la forma infinitesimal del grupo de una forma mas “económica”, haremos la siguiente identificación:

$$a_j \mapsto a_j s \quad b_{jk} \mapsto b_{jk} s \quad c_k \mapsto c_k \quad (3.22)$$

sustituyendo obtenemos:

$$\tilde{x}^j = \frac{x^j + (a_j + b_{jk}x^k) s}{1 + (c_kx^k) s} \quad (3.23)$$

Supongamos que  $s$  es infinitamente pequeño y aproximemos el denominador de 3.23 con los dos primeros términos del desarrollo binomial:

$$\tilde{x}^j = (x^j + (a_j + b_{jk}x^k) s) (1 + c_kx^k) s \quad (3.24)$$

Expandiendo, nos quedamos únicamente con el término en  $s$  de menor orden:

$$\tilde{x}^j = x^j + (a_j + b_{jk}x^k - c_kx^k) s \quad (3.25)$$

Los infinitesimales de 3.21 son:

$$\xi^j(x) = a_j + b_{jk}x^k - c_kx^k x^j \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (3.26)$$

Cada coeficiente de los infinitesimales, corresponde a un grupo 1-paramétrico finito. El grupo proyectivo define  $n^2 + 2n$  grupos 1-paramétricos independientes con operadores:

$$X^{a_j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \quad X^{b_{kj}} = x^k \frac{\partial}{\partial x^j} \quad X^{c_k} = x^k x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (3.27)$$

### 3.7.1. El corchete de Lie.

**Definición 23.** (provisional) Sean  $X^a$  y  $X^b$  operadores asociados a un grupo de Lie  $n$ -paramétrico, definimos el corchete de Lie de  $X^a$  y  $X^b$  como:

$$[X^a, X^b] = X^a X^b - X^b X^a$$

El conjunto de los operadores asociados a los infinitesimales de un grupo multi-paramétrico so es cerrado bajo el corchete de Lie:

$$\begin{aligned} X^a &= \alpha^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} & X^b &= \beta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \\ \Rightarrow [X^a, X^b] &= \alpha^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \beta^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) - \beta^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \alpha^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \left( \alpha^j \frac{\partial \beta^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} - \left( \beta^k \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

En el caso del grupo proyectirvo:

$$\begin{aligned} [X^{a_j}, X^{b_{j_1 k}}] &= X^{a_j} (X^{b_{j_1 k}}) - X^{b_{j_1 k}} (X^{a_j}) \\ &= \frac{\partial}{\partial X^j} \left( X^k \frac{\partial}{\partial X^{j_1}} \right) - X^k \frac{\partial}{\partial X^{j_1}} \left( \frac{\partial}{\partial X^j} \right) \\ &= \delta_k^j \frac{\partial}{\partial X^k} = \begin{cases} X^{a_j} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

que es uno de los operadores.

## 3.8. Familias invariantes.

**Ejemplo 31. El grupo de rotaciones.** El grupo  $SO(2, \mathbb{R})$  tiene como operador infinitesimal a :

$$X^\theta = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.28)$$

Observemos que la familia de círculos  $\phi = \Phi(x, y) = x^2 + y^2$  es invariante bajo  $SO(2, \mathbb{R})$ .

*Demostración.* En efecto:

$$X^\theta \phi = 0$$

Por tanto cada  $\Phi(x, y)$  es invariante bajo  $X^\theta$  □

Ahora apliquemos  $T^\theta \in SO(2, \mathbb{R})$  a la familia de rectas por el origen de coordenadas:

$$\psi = \Psi(x, y) = \frac{y}{x} \quad (3.29)$$

obtenemos:

$$\tilde{\psi} = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{\operatorname{sen}(\theta) + \frac{y}{x} \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \frac{y}{x} \operatorname{sen}(\theta)} = G\left(\frac{y}{x}, \theta\right) = G(\psi, \theta) \quad (3.30)$$

Así que  $T^\theta$  deja invariante a  $\psi$  como conjunto pero cada rayo no es invariante individualmente.

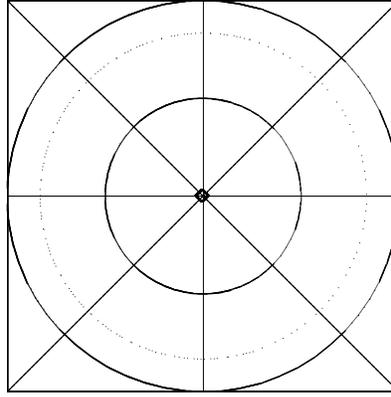


Figura 3.4: Familias invariantes bajo  $SO(2, \mathbb{R})$

Observese que:

$$X^\theta \Psi = -y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x} \right) + x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x} \right) = \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1 = \psi^2 + 1 \quad (3.31)$$

### Ejemplo 32. Grupo de dilataciones uniformes

$$T^s : \{\tilde{x} = e^s x, \tilde{y} = e^s y\} \quad (3.32)$$

$$X^s = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

La familia de rayos  $\psi$  es invariante bajo la acción de  $T^s$ , aun más cada rayo es invariante individual del grupo.

*Demostración.* En efecto:

$$\tilde{\psi} = \tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{e^s y}{e^s x} = \frac{y}{x} = \psi \quad (3.33)$$

□

Ahora observemos qué pasa con la familia de círculos  $\phi$

$$\tilde{\phi} = \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = e^{2s}(x^2 + y^2) = e^{2s}\Phi(x, y) = G(\phi, s) \quad (3.34)$$

La familia como conjunto queda invariante aunque cada círculo no lo sea individualmente:

$$\begin{aligned} X^s \Phi &= x \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + y \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) \\ &= 2(x^2 + y^2) \\ &= 2\phi \end{aligned}$$

### 3.9. Condición de invarianza para familias de curvas.

Consideremos  $\psi = \Psi(x, y)$  una familia de curvas, sí:

$$\tilde{\psi} = \Psi(\tilde{x}) = \Psi(F(x, y)) = G(\Psi(x, s)) = G(\psi, s) \quad (3.35)$$

con  $G$  una función arbitraria, tenemos que:  $\Psi(x, y)$  es una familia invariante bajo  $F$

La condición infinitesimal para la invarianza es:

$$X\Psi = \Omega(\Psi) \quad (3.36)$$

De hecho podemos interpretar es condición aplicada a una familia n-dimensional, equivalentemente como:

$$X\Gamma = 0 \quad (3.37)$$

donde  $\Gamma$  es una  $(n)$ -subespacio en un espacio  $(n + 1)$ -dimensional.

En efecto, sea  $\Gamma$  una función de  $n + 1$  variables de la forma:

$$\Gamma(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = \Psi(x^1, \dots, x^n) - x^{n+1} \quad (3.38)$$

Supongamos que  $\Gamma$  es invariante bajo la transformación:

$$T_s = \begin{cases} \tilde{x}^j = F^j(x^1, \dots, x^n, s) \\ \tilde{x}^{n+1} = x^{n+1} + s \end{cases} \quad (3.39)$$

**Afirmación 1.** La familia 3.39 forma un grupo respecto a la composición.

*Demostración.* En efecto: Sean  $s, r \in \mathbb{R}$  arbitrarios:

i) Tenemos:

$$T_s \circ T_r = \begin{cases} \tilde{x}^j = F^j(x^1, \dots, s + r) \\ \tilde{x}^{n+1} = x^{n+1} + (s + r) \end{cases}$$

que es cláramente un elemento de la familia de transformaciones.

ii) La asociatividad se cumple, pues se hereda de la asociatividad de la adición en  $\mathbb{R}$

iii) Nótese que:

$$T_0 = \begin{cases} \tilde{x}^j = F^j(x^1, \dots, x^n, 0) \\ \tilde{x}^{n+1} = x^{n+1} \end{cases}$$

Así que:

$$T_0 \circ T_s = \begin{cases} \tilde{x}^j = F^j(x^1, \dots, x^n, s) \\ \tilde{x}^{n+1} = x^{n+1} + s \end{cases} = T_s$$

iv) Ahora:

$$T_s \circ T_{-s} = \begin{cases} \tilde{x}^j = F^j(x^1, \dots, x^n, 0) \\ \tilde{x}^{n+1} = x^{n+1} \end{cases} = T_0$$

Por lo tanto 3.39 forma un grupo respecto a la composición.

□

La imágen de la función  $\Gamma$  es una superficie invariante bajo 3.39 si  $\Gamma$  satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \xi^1 \Gamma_{x^1} + \xi^2 \Gamma_{x^2} + \dots + \xi^n \Gamma_{x^n} + (1) \Gamma_{x^{n+1}} &= 0 \\ \Rightarrow X\Psi &= 1 \end{aligned}$$

Entonces  $\Psi(x^1, \dots, x^n) = x^{n+1}$  es una familia invariante  $n$ -dimensional, o bien una (hiper)superficie invariante  $n + 1$ -dimensional.

**Teorema 11.** La familia  $\psi = \Psi(x)$  es invariante bajo  $X = \xi^j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$  si y sólo si  $X\Psi = \Omega(\Psi)$  para alguna función  $\Omega$ .

**Observación 4.** Sin pérdida de generalidad podemos elegir una función  $\mathcal{C}^1$ ,  $\Pi(\Psi)$  tal que:  $\phi = \text{Phi}(x) = \Pi(\Psi(x))$  satisfice:  $X\phi = 1$

En efecto

$$X\phi(x) = X\Pi(\Psi(x)) = (X\psi) \frac{d\Pi}{d\psi} = \Omega(\psi) \frac{d\Pi}{d\Psi} = 1$$

y elegimos  $\Pi(\psi)$  tal que:

$$\Pi = \int \frac{d\psi}{\Omega(\psi)}$$

**Ejemplo 33. Grupo de rotaciones.**

Consideremos una superficie en  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente forma:

$$\Gamma(x, y, \psi) = \Psi(x, y) - \psi \tag{3.40}$$

Tal que cumple la condición de invarianza respecto al grupo de rotaciones planas:

$$-y\Gamma_x + x\Gamma_y + \Gamma_\phi = 0 \quad (3.41)$$

o bien, equivalétemente:

$$-y\Psi_x + x\Psi_1 = 1 \quad (3.42)$$

Las ecuaciones características asociadas a la ecuación 3.41 son:

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{d\psi}{1} \quad (3.43)$$

La parte izquierda de la igualdad tiene solución de la forma  $\theta = x^2 + y^2$ . Despejando  $x$  y sustituyendo en la parte derecha de 3.43:

$$d\phi = \frac{dy}{\pm\sqrt{\theta - y^2}} \quad (3.44)$$

integrando 3.44 obtenemos la familia:

$$\psi = \text{sen}^{-1} \left( \frac{y}{\sqrt{\theta}} \right) = \text{sen}^{-1} \left( \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \right) \quad (3.45)$$

Si despejamos  $y$ , sustituimos en 3.44 e integramos obtendremos:

$$\psi = \text{cos}^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{\theta}} \right) = \text{cos}^{-1} \left( \frac{\frac{x}{y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \right) \quad (3.46)$$

Podemos elegir  $\Pi$  tal que:

$$\Pi(\psi) = \int \frac{d\Psi}{\Psi^2 + 1} = \tan^{-1}(\Psi) = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

$$\therefore \psi = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

es una familia invariante bajo el grupo de rotaciones.

## Capítulo 4

# Ecuaciones ordinarias de primer orden.

*Tenía 26 años y de pronto me dí cuenta de que podía crear algo. Leí un poco y empecé a producir...Fue la teoría de grupos y su gran importancia para las ecuaciones diferenciales lo me interesó particularmente.*  
Sophus Lie.

En esta sección presentaremos la aplicación general del método de Lie para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, reconstruiremos algunos métodos analíticos que se aprenden en un curso estandar de ordinarias.

### 4.1. Factor integrante.

¿Cómo podemos usar la teoría de grupos de Lie para integrar ecuaciones ordinarias de primer orden?

Sean  $\psi = \Psi(x, y)$  las características de :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)} \quad (4.1)$$

la cual podemos reescribir como la 1-forma pfafiana:

$$-B(x, y)dx + A(x, y)dy = 0 \quad (4.2)$$

Ahora:

$$d\psi = \Psi_x dx + \Psi_y dy \quad (4.3)$$

Sobre una curva fija  $\psi$ , tenemos  $d\psi = 0$ . Obsérvese que  $\Psi(x, y)$  satisface la ecuacion en derivadas parciales siguiente:

$$A(x, y)\Psi_x + B(x, y)\Psi_y = 0 \quad (4.4)$$

Ahora supongamos que  $\psi = \Psi(x, y)$  es invariante bajo  $X$ , el operador de un grupo de Lie con infinitesimales  $(\xi, \eta)$ , entonces  $\Psi$  satisface la siguiente condición de invarianza

$$\xi(x, y)\Psi_x + \eta(x, y)\Psi_y = 1 \quad (4.5)$$

La familia de características es invariante bajo 2 grupos, el grupo trivial definido por sí misma con  $A$  y  $B$  interpretados como los infinitesimales del grupo y con operador:

$$A \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) + B \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4.6)$$

El segundo es no-trivial, con infinitesimales  $(\xi, \eta)$ , t deja invariante a la familia de soluciones  $\Psi(x, y)$  como conjunto, esto es, mapea soluciones en soluciones.

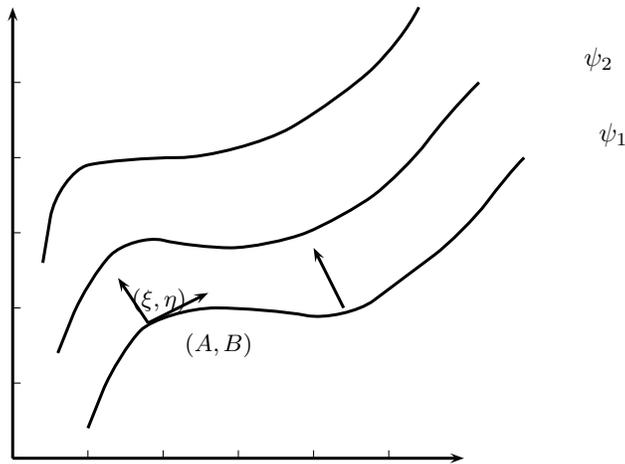


Figura 4.1: Acción de  $(\xi, \eta)$  sobre  $\psi$

El grupo  $(A, B)$  mapea puntos de  $\psi_1$  en puntos sobre la misma característica. Por otro lado  $(\xi, \eta)$  mapea los puntos de  $\psi_1$  a alguna otra característica ( $\psi_2$  en el ejemplo) para algún valor particular de  $s$ .

Tenemos 2 ecuaciones simultáneas independientes para las parciales de  $\Psi$  si:

$$\Psi_x = \frac{-B}{A\eta - B\xi} \quad \Psi_y = \frac{A}{A\eta - B\xi} \quad (4.7)$$

la función

$$M = \frac{1}{A\eta - B\xi} \quad (4.8)$$

es el factor integrante y

$$d\psi = \frac{-B}{A\eta - B\xi} dx + \frac{A}{A\eta - B\xi} dy \quad (4.9)$$

Así, la invarianza de las soluciones bajo un grupo de Lie llevan directamente a la solución de la ecuación ordinaria por cuadraturas:

$$\psi = \int \frac{-B}{A\eta - B\xi} dx|_{y=cte} + f(y) \quad (4.10)$$

Podemos determinar  $f(y)$  como sigue:

$$\Psi_y = \left( \int \frac{-B}{A\eta - B\xi} dx|_{y=cte} \right)_y + f'(y) = \frac{A}{A\eta - B\xi} \quad (4.11)$$

Así que la solución general de 4.1 es completa.

Dada una EDO de primer orden siempre podemos hallar un grupo de simetrías, ello queda garantizado por el teorema de Pfaf de existencia factor integrante

## 4.2. Integrando EDO de primer orden.

La siguiente tabla relaciona clases de EDO de primer orden con sus grupos de simetría, representados por sus infinitesimales :

| Ecuación   | $\xi$ | $\eta$        |
|--|-------|---------------|
| $y_x = F(y)$                                     | 1     | 0             |
| $y_x = F(x)$                                     | 0     | 1             |
| $y_x = F(ax + by)$                               | $b$   | $-a$          |
| $y_x = \frac{y+xF(x^2+y^2)}{x-yF(x^2+y^2)}$      | $y$   | $x$           |
| $y_x = F\left(\frac{y}{x}\right)$                | $x$   | $y$           |
| $y_x = x^{k-1}F\left(\frac{y}{x^k}\right)$       | $x$   | $ky$          |
| $xy_x = F(xe^{-y})$                              | $x$   | 1             |
| $y_x = \frac{y}{x} + xF\left(\frac{y}{x}\right)$ | 1     | $\frac{y}{x}$ |
| $xy_x = y + F\left(\frac{y}{x}\right)$           | $x^2$ | $xy$          |
| $y_x = \frac{y}{x+F\left(\frac{y}{x}\right)}$    | $xy$  | $y^2$         |
| $y_x \frac{y}{x+F(y)}$                           | $y$   | 0             |
| $xy_x = y + F(x)$                                | 0     | $x$           |
| $xy_x = \frac{y}{\ln(x)+F(y)}$                   | $xy$  | 0             |
| $xy_x = y(\ln(y) + F(x))$                        | 0     | $xy$          |
| $y_x = yF(x)$                                    | 0     | $y$           |

Tabla 4.1: EDO y sus grupos de simetría.

### Ejemplo 34. Invarianza respecto a un grupo de dilataciones.

Hallar la solución general de :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} H(xy) \quad (4.12)$$

donde  $H$  es una función arbitraria, rearrreglamos 4.12 de la siguiente forma:

$$-yH(xy)dx + xdy = 0 \quad (4.13)$$

Sean  $A(x, y) = -x$  y  $B(x, y) = -yH(x, y)$ , debemos hallar un grupo de Lie que deje invariante a 4.12, por inspección podemos notar que 4.12 es invariante bajo:

$$\tilde{x} = e^s x \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= e^{-s} y \\ \Rightarrow \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} &= \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} H(\tilde{x}\tilde{y}) \\ \Rightarrow e^{-2s} \frac{dy}{dx} &= e^{-2s} \frac{y}{x} H(xy) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} H(xy) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Así que 4.14 deja invariante a 4.12. Los infinitesimales de 4.14 son:

$$\xi = x \quad \eta = -y \tag{4.16}$$

y el factor integrante es:

$$M = \frac{1}{A\eta - B\xi} = \frac{1}{xy + xyH(xy)} \tag{4.17}$$

Si  $\psi$  es una solución, entonces:

$$d\psi = \frac{-yH(x, y)}{xy + xyH(xy)} dx + \frac{x}{xy + xyH(xy)} dy \tag{4.18}$$

y la solución general es la familia:

$$\psi = - \int_{xy} \frac{H(\alpha)}{\alpha(1 + H(\alpha))} d\alpha + \ln(y) \tag{4.19}$$

Ahora mostremos que 4.19 es invariante bajo 4.16

$$\begin{aligned} &\left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(- \int_{xy} \frac{H(\alpha)}{\alpha(1 + H(\alpha))} d\alpha + \ln(y)\right) = \\ &= x \left(- \frac{H}{\alpha(1 + H)} y\right)_{\alpha=xy} - y \left(- \frac{H}{\alpha(1 + H)} x\right)_{\alpha=xy} + y \left(\frac{1}{y}\right) = 1 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\Rightarrow \psi = - \int_{\tilde{x}\tilde{y}} \frac{H(\alpha)}{\alpha(1 + H(\alpha))} d\alpha + \ln(\tilde{y}) + s = \tilde{\psi} + s \tag{4.21}$$

**Ejemplo 35.** Hallar la solución de:

$$\frac{dy}{dx} = -g(x)y + f(x) \tag{4.22}$$

$$\Rightarrow -(f(x) - yg(x)) dx + dy = 0 \tag{4.23}$$

$$\tag{4.24}$$

tenemos que:

$$A = 1 \quad B = f - yg \tag{4.25}$$

Consideremos la traslación:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x \\ \tilde{y} &= y + s\theta(x)\end{aligned}\tag{4.26}$$

Sustituyendo 4.26 en 4.22 obtenemos:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = -g(\tilde{x})\tilde{y} + f(\tilde{x})\tag{4.27}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + s\frac{d\theta}{dx} = -g(x)(y + s\theta(x)) + f(x)\tag{4.28}$$

Entonces 4.22 es invariante bajo 4.26 si elegimos  $\theta(x)$  de forma que:

$$\frac{d\theta}{dx} = -g(x)\theta(x)\tag{4.29}$$

Por lo tanto el grupo adecuado es tal que:

$$\theta(x) = e^{-\int_x g(\alpha)d\alpha}\tag{4.30}$$

Los infinitesimales de 4.26 son:

$$\xi = 0 \quad \eta = \theta(x)\tag{4.31}$$

Así que el factor integrante de 4.22 es:

$$M(x) = \frac{1}{\theta(x)}\tag{4.32}$$

$$\Rightarrow d\psi = \frac{1}{\theta}(f(x) - yg(x))dx - \left(\frac{1}{\theta(x)}\right)dy\tag{4.33}$$

y podemos hallar la solución de 4.22 por cuadraturas:

$$\psi = \int_x \left(\frac{f(\alpha)}{\theta(\alpha)}\right)d\alpha - \frac{y}{\theta(x)}\tag{4.34}$$

4.34 define una familia de soluciones de 4.22 para toda condición inicial posible la acción de 4.26 sobre 4.34 es la traslación:

$$\psi = \tilde{\psi} + s\tag{4.35}$$

**Ejemplo 36. Un caso más complicado.** Hallar la solución de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - f(y)g\left(\frac{y}{x}\right)}\tag{4.36}$$

que podemos reescribir como:

$$\frac{y}{x}dx - \left(1 - \frac{f(y)}{x}g\left(\frac{y}{x}\right)\right)dy = 0\tag{4.37}$$

Sean

$$A = \left(1 - \frac{f(y)}{x}g\left(\frac{y}{x}\right)\right) \quad B = \frac{y}{x}\tag{4.38}$$

Sabemos que esta ecuación es invariante bajo un grupo cuyos infinitesimales son:

$$\xi = \frac{xy}{f(y)} \quad \eta = \frac{y^2}{f(y)} \quad (4.39)$$

el factor integrante es:

$$M = \frac{x}{y^2 g\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (4.40)$$

y la diferencial total es:

$$d\psi = -\frac{1}{yg\left(\frac{y}{x}\right)}dx + \left(\frac{x}{y^2 g\left(\frac{y}{x} - \frac{f(y)}{y^2}\right)}\right)dy \quad (4.41)$$

Integrando por cuadraturas obtenemos la solución general de 4.36

$$\psi = \Psi(x, y) = \int_{\frac{x}{y}} \frac{1}{\alpha^2 g(\alpha)} d\alpha - \int_y \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha \quad (4.42)$$

**Afirmación 2** (4.42 es invariante bajo 4.39).

*Demostración.*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{xy}{f(y)} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y^2}{f(y)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \int_{\frac{x}{y}} \frac{1}{\alpha^2 g(\alpha)} d\alpha - \int_y \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha \right) = \\ & = \frac{xy}{f(y)} \left( -\frac{1}{\alpha g(\alpha)} \frac{1}{x} \right)_{\alpha=\frac{y}{x}} - \frac{y^2}{f(y)} \left( -\frac{1}{\alpha g(\alpha)} \frac{1}{x} \right)_{\alpha=\frac{y}{x}} + \\ & \quad + \frac{y^2}{f(y)} \left( \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} \right)_{\alpha=y} = 1 \end{aligned}$$

□

### 4.3. Coordenadas canónicas.

Cualquier grupo de Lie puede ser reescrito en terminos de nuevas variables llamadas coordenadas canónicas de tal forma que la transformación se convierte en una traslación simple. El grupo:

$$\tilde{x}^j = F^j(x, s) \quad j = 1, \dots, n \quad (4.43)$$

con operador

$$X = \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (4.44)$$

asociado con las características

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \frac{dx^3}{\xi^3(x)} = \dots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)} \quad (4.45)$$

con  $n - 1$  integrales

$$r^i = R^i(x) \quad i = 1, \dots, n \quad (4.46)$$

Estas funciones satisfacen la siguiente condición de invarianza:

$$\xi^j \frac{\partial R^i}{\partial x^j} = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.47)$$

Sea  $r^n R^n(x)$  una familia invariante, tal que:

$$\xi^j \frac{\partial R^n}{\partial x^j} = 1 \quad (4.48)$$

Es decir, tomamos la familia  $R^n$  de curvas invariantes bajo 4.43, en términos de estas variables, 4.43 es equivalente al grupo de traslaciones:

$$\tilde{r}^i = r^i \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.49)$$

$$\tilde{r}^n = r^n + s$$

con operador

$$X = \frac{\partial}{\partial r^n} \quad (4.50)$$

Las integrales  $(r^1, \dots, r^n)$  son las coordenadas canónicas del grupo. Cualquier grupo de Lie puede reescribirse como grupo de traslaciones utilizando coordenadas canónicas.

Ocasionalmente pueden usarse las coordenadas canónicas para reconstruir la forma finita de un grupo, conociendo los infinitesimales sin tener que hacer la expansión en serie de Lie.

Expresamos 4.49 como función de  $x$ :

$$R^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = R^i(x^1, \dots, x^n) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (4.51)$$

$$R^n(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = R^n(x^1, \dots, x^n) + s$$

Resolviendo para  $\tilde{x}^j$  en 4.51 obtenemos la transformación finita 4.43: El uso de coordenadas canónicas nos permite expresar los resultados en términos más simples y elegantes.

## 4.4. Soluciones invariantes.

En secciones anteriores hemos visto que una EDO es invariante respecto a dos grupos, uno definido por la propia ecuación y que deja invariantes a soluciones particulares y un grupo no-trivial que deja invariante a la familia de soluciones y manda soluciones en soluciones.

Algunas curvas solución pueden quedar invariantes bajo la acción del grupo no-trivial. Tales curvas invariantes son importantes para el averiguar sobre el comportamiento asintótico de las solución.

### Ejemplo 37. Ecuación de Clairut.

Estudiaremos la noción de curvas invariantes en la ecuación de Clairut:

$$x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} + m = 0 \quad (4.52)$$

que es invariante bajo el grupo uniparamétrico de dilataciones

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= e^{2s}x & \tilde{y} &= e^s y\end{aligned}\tag{4.53}$$

$$\xi = 2x \quad \eta = y$$

Resolviendo (4.52) como una cuadrática para la derivada, podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera:

$$-\left(y \pm (y^2 - 4mx)^{\frac{1}{2}}\right) dx + 2x dy\tag{4.54}$$

Usando el grupo (4.55) obtenemos el factor integrante

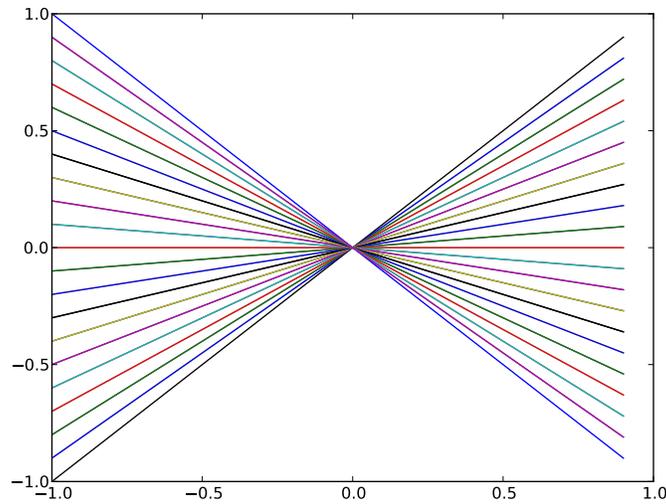
$$\mu = \frac{1}{A\eta - B\xi} = \frac{1}{\mp 2x(y^2 - 4mx)^{\frac{1}{2}}}\tag{4.55}$$

y obtenemos la solución general

$$\psi = \frac{y}{2x} \pm \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{x^2} - \frac{4m}{x} \right)^{\frac{1}{2}}\tag{4.56}$$

Esta solución puede reescribirse como sigue

$$\left( \psi - \frac{y}{2x} \right)^2 = \left( \frac{y^2}{4x^2} - \frac{m}{x} \right)\tag{4.57}$$



Cuando se expande (4.57), los términos cuadráticos en ambos lados de la igualdad se cancelan, dejando a la familia

$$y = \psi x + \frac{m}{\psi} \tag{4.58}$$

como solución general (4.58) se transforman bajo el grupo (4.55) de la siguiente manera:

$$y = (\psi e^s) x + \frac{m}{\psi e^s} \tag{4.59}$$

## Capítulo 5

# Ecuaciones Ordinarias de segundo orden.

*Puedo verme transfiriendo a la teoría de las ecuaciones diferenciales las ideas que, para los interesados en ecuaciones algebraicas, han dado pie a la doctrina de las ecuaciones abelianas...Creo que mis grupos de transformaciones tendrán una importancia especial para la teoría de ecuaciones diferenciales en dos variables si las afirmaciones de Poincaré son ciertas.*

*Sophus Lie.*

### 5.1. Álgebras de Lie solubles y reducción sucesiva de orden.

Consideremos  $\mathfrak{L}^r$  un álgebra de Lie de dimensión  $r < \infty$  y  $N \subset \mathfrak{L}^r$  un subespacio lineal.

**Definición 24.** *El subespacio  $N$  es una subálgebra de Lie si  $[x, y] \in N \forall x, y \in N$ . Por otro lado diremos que  $N$  es un ideal si  $[x, y] \in N \forall x \in N$  y  $y \in \mathfrak{L}^r$*

Si  $N$  es un ideal podemos introducir la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \quad \text{si y sólo si} \quad x - y \in N$$

El conjunto de todos los operadores equivalentes a  $X$  es llamado clase lateral de  $X$  respecto a  $\sim$ ,  $[x]_{\sim}$

$$\forall y \in [x] : y = x + z \text{ para algún } z \in N$$

El conjunto cociente  $\mathfrak{L}^r/N$  tiene estructura de álgebra de Lie.

Tomando como dominio el plano complejo  $\mathbb{C}$  tenemos que se cumple el siguiente resultado:

**Teorema 12.** *Cualquier álgebra de Lie  $\mathfrak{L}^r$  de dimensión  $r > 2$  contiene una subálgebra de dimensión 2. Aún más para cualquier  $x \in \mathfrak{L}^r$  se tiene que  $x$  pertenece a alguna subálgebra de dimensión 2.*

Ahora estamos en condiciones de definir álgebras de Lie solubles, como un análogo diferencial para la teoría de Galois.

**Definición 25.** *Un álgebra de Lie es soluble si existe una sucesión de subálgebras:*

$$\mathfrak{L}^1 \subset \mathfrak{L}^2 \subset \dots \subset \mathfrak{L}^{r-1} \subset \mathfrak{L}^r \quad (5.1)$$

de tal manera que  $\mathfrak{L}^{s-1}$  es ideal de  $\mathfrak{L}^s$  con  $s \in \{2, 3, \dots, r\}$

Un criterio para la solubilidad se puede establecer respecto a las álgebras derivadas.

**Definición 26.** *Sea  $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$  una base para  $\mathfrak{L}^r$  el espacio lineal generado por  $[X_\mu, X_\nu]$  de todas los pares básicos es un ideal denotado por  $\mathfrak{L}^{r'}$  llamada el álgebra derivada. Las álgebras derivadas de orden superior se definen recursivamente*

$$(\mathfrak{L}^r)^{(n+1)} = [(\mathfrak{L}^r)^{(n)}]' \quad n \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Teorema 13.**  $\mathfrak{L}^r$  es soluble si para alguna  $n > 0 : (\mathfrak{L}^r)^n = 0$

**Corolario 1.** *Cualquier álgebra de Lie de dimensión 2 es soluble.*

Para construir la secuencia (5.1) para  $\mathfrak{L}^2$  absta elegir  $X_1, X_2$  de tal manera que

$$[X_1, X_2] = \alpha X_1$$

Entonces el álgebra generada por  $X_1, \mathfrak{L}^1$  es un ideal de  $\mathfrak{L}^2$  y  $\mathfrak{L}^2/\mathfrak{L}^1 \cong \langle \{X_2\} \rangle$ .

Si  $\mathfrak{L}^2$  es admitida por una EDO de segundo orden, puede reducirse en 1 el orden de la ecuación usando el ideal  $\mathfrak{L}^1$ .

La EDO de primer orden resultante admite al álgebra cociente  $\mathfrak{L}^2/\mathfrak{L}^1$  y por lo tanto puede integrarse construyendo un factor integrante o bien utilizando coordenadas canónicas. Cualquier ecuación diferencial ordinaria de orden mayor que 2 puede integrarse reduciendo sucesivamente el orden si admite un álgebra de Lie soluble de dimensión  $n$ .

## 5.2. Método de variables canónicas.

Si una EDO de segundo orden admite un álgebra de Lie de dimensión 2 en lugar de hacer reducciones de orden, podemos buscar un cambio de variables adecuado, de tal manera que la ecuación se pueda integrar por cuadratura.

### 5.2.1. Formas canónicas para $\mathfrak{L}^2$ .

Para los siguientes resultados utilizaremos el corchete de Lie y definiremos un producto antisimétrico

$$X_1 \vee X_2 = \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2$$

donde

$$X_1 = \xi_1 \partial_x + \eta_1 \partial_y \quad y \quad X_2 = \xi_2 \partial_x + \eta_2 \partial_y$$

Una clasificación de las álgebras de Lie de dimensión 2 de acuerdo con sus propiedades estructurales se basa en el hecho de que las expresiones:

$$[X_1, X_2] = 0 \quad y \quad X_1 \vee X_2 = 0 \quad (5.2)$$

son ambas invariantes bajo cambios de base en  $\mathfrak{L}^2$  y cambios de variable en  $x$  y  $y$ .

**Teorema 14.** *Bajo una elección adecuada de la base  $\{X_1, X_2\}$ , cualquier álgebra de Lie de dimensión 2 puede reducirse a alguno de los cuatro tipos determinados por las relaciones estructurales canónicas. Podemos entonces clasificar las álgebras de Lie de dimensión dos en las siguientes clases no equivalentes:*

**I.**  $[X_1, X_2] = 0$  y  $X_1 \vee X_2 \neq 0$

**II.**  $[X_1, X_2] = 0$  y  $X_1 \vee X_2 = 0$

**III.**  $[X_1, X_2] \neq 0$  y  $X_1 \vee X_2 \neq 0$

**IV.**  $[X_1, X_2] \neq 0$  y  $X_1 \vee X_2 = 0$

Estas relaciones estructurales son invariantes bajo cualquier cambio de variables, de tal manera se puede simplificar la forma de los posibles operadores básicos.

**Teorema 15.** *La base de un álgebra de Lie de dimensión 2  $\mathfrak{L}^2$  puede reducirse, mediante un cambio de variables adecuado a una de las siguientes formas.*

**I.**  $X_1 = \partial_x$   $X_2 = \partial_y$

**II.**  $X_1 = \partial_y$   $X_2 = x\partial_y$

**III.**  $X_1 = \partial_y$   $X_2 = x\partial_x + y\partial_y$

**IV.**  $X_1 = \partial_y$   $X_2 = y\partial_y$

donde  $x$  y  $y$  son las variables canónicas.

### 5.2.2. Algoritmo de integración.

Ahora vamos a identificar todas las EDO de segundo orden que admiten álgebras de Lie de dimensión 2 usando la clasificación dada por los teoremas anteriores.

**Tipo I.** Para construir las ecuaciones que admiten un álgebra  $\mathfrak{L}^2$  con base  $\{\partial_x, \partial_y\}$  hay que construir una base para los invariantes diferenciales de segundo orden. Las extensiones de segundo orden de  $X_1$  y  $X_2$  coinciden con ellos mismos, así que  $y'$  y  $y''$  son una base para los invariantes diferenciales. De tal manera la EDO más general que admite a  $\mathfrak{L}^2$  tipo **I** tiene la forma:

$$y'' = f(y') \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) puede integrarse directamente

$$\int \frac{dy'}{f(y')} = x + C_1 \quad (5.4)$$

$$y' = \varphi(x + C_1) \quad (5.5)$$

y por lo tanto

$$y = \int \varphi(x + C) d(x + C) + C_2 \quad (5.6)$$

**Tipo II.** En este caso, una base para los invariantes diferenciales es  $\{x, y''\}$  y la ecuación diferencial invariante tiene la forma:

$$y'' = f(x) \quad (5.7)$$

e integrando obtenemos:

$$y = \int \left( \int f(x) dx \right) dx + C_1 x + C_2 \quad (5.8)$$

**Tipo III.** En este caso, una base para los invariantes diferenciales es  $\{y', xy''\}$  y la ecuación invariante tiene la forma:

$$y'' = \frac{1}{x} f(y') \quad (5.9)$$

integrando obtenemos:

$$\int \frac{dy'}{f(y')} = \ln x + C_1 \quad (5.10)$$

$$y' = \varphi(\ln x + C_1) \quad (5.11)$$

así que

$$y = \int \varphi(\ln x + C_1) dx + C_2 \quad (5.12)$$

**Tipo IV.** En este caso la base para los invariantes diferenciales es  $\{x, \frac{y''}{y'}\}$  y la ecuación que queda invariante tiene la forma:

$$y'' = f(x)y' \quad (5.13)$$

que al integrar nos deja:

$$y = C_1 \int e^{\int f(x) dx} dx + C_2 \quad (5.14)$$

Lo anterior puede implementarse como el siguiente algoritmo de 5 pasos para integrar una EDO de segundo orden.

1. Calcular un álgebra de Lie admisible  $\mathfrak{L}^r$
2. Si  $r > 2$  determinar una subálgebra de dimensión 2  $\mathfrak{L}^2 \subset \mathfrak{L}^r$ . Si  $r < 2$  la EDO no puede ser integrada por simetrías.
3. Calcular el conmutador y el producto pseudoescalar para la base de  $\mathfrak{L}^2$ . De ser necesario cambiar la base a coordenadas canónicas.
4. Introducir variables canónicas. Reescribir la ecuación en coordenadas canónicas e integrar
5. Escribir la solución en las variables originales.

**Ejemplo 38.** Aplicaremos nuestro algoritmo a la ecuación

$$y'' = \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} \quad (5.15)$$

1. Resolvemos la ecuación determinante y encontramos que la ecuación (6.66) admite un álgebra  $\mathfrak{L}^2$  generada por

$$X_1 = x^2\partial_x + xy\partial_y \quad X_2 = x\partial_x + \frac{y}{2}\partial_y \quad (5.16)$$

2. En este caso tenemos que  $r = 2$ , así que pasaremos al paso 3

3. Tenemos que  $[X_1, X_2] = -X_1$  y  $X_1 \vee X_2 = -\frac{1}{2}x^2y \neq 0$

4. Ahora reduciremos  $X_1$  a traslaciones mediante un cambio de variables

$$t = \frac{y}{x} \quad u = -\frac{1}{x} \quad (5.17)$$

tras este cambio tenemos que los operadores básicos son

$$\bar{X}_1 = \partial_u \quad \bar{X}_2 = \frac{t}{2}\partial_t + u\partial_u \quad (5.18)$$

estos operadores difieren de los de tipo III por un factor de  $\frac{1}{2}$  en  $\bar{X}_2$ . Para evitar la singularidad en  $u' = \infty$ , excluirémos las siguientes soluciones de (6.66)

$$y = Cx \quad (5.19)$$

Después del cambio de variables la ecuación (6.66) se convierte en:

$$\frac{u''}{u'^2} + \frac{1}{t^2} = 0 \quad (5.20)$$

(5.20) tiene las siguientes soluciones

$$u = -\frac{t^2}{2} + C \quad (5.21)$$

y

$$u = \frac{t}{C_1} + \frac{1}{C_1^2} \ln|C_1 t - 1| + C_2 \quad (5.22)$$

5. Sustituyendo (5.17) en (6.75) y (6.76) obtenemos la solución general para la EDO no lineal (6.66)

$$y = Cx \quad (5.23)$$

$$y = \pm\sqrt{2x + Cx^2} \quad (5.24)$$

$$C_1 y + C_2 x + x \ln\left|C_1 \frac{y}{x} - 1\right| + C_1^2 = 0 \quad (5.25)$$

donde  $C_i$  son constantes arbitrarias de integración.

### 5.3. Clasificación de ecuaciones de segundo orden.

Algunas de las ecuaciones en nuestra clasificación admiten álgebras de Lie de dimensión mayor  $\mathfrak{L}^r$  o grupos de Lie  $r$ -paramétricos (locales) para algún  $2 < r \leq 8$ , y surge ahora el problema de dar una clasificación completa para las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Lie resolvió el problema para ecuaciones de orden arbitrario, aquí sólo consideraremos las de segundo orden.

### 5.3.1. Clasificación para ecuaciones que admiten álgebras 3-dimensionales.

La clasificación por simetrías se basa en listar las posibles álgebras de Lie de operadores que actúan en el plano. Los operadores básicos se simplifican usando un cambio de variables adecuado. Las álgebras relacionadas por cambios de variable son llamadas similares.

Las ecuaciones que admiten álgebras similares son equivalentes en el sentido de que pueden llevarse una en otra mediante un cambio de coordenadas. La clasificación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 2 la dimensión del álgebra admisible sólo toma valores en  $\{1, 2, 3, 8\}$  ya hemos discutido los casos de dimensión 1 y 2, pasaremos pues al caso 3-dimensional.

Para  $\mathfrak{L}^3$  la construcción de ecuaciones invariantes se logra resolviendo la ecuación determinante respecto a la función incógnita.

Construyamos el álgebra de la siguiente manera

$$\mathfrak{L}^3 = \langle \{X_1 = \partial_x + \partial_y, X_2 = x\partial_x + y\partial_y, X_3 = X^2\partial_x + y^2\partial_y\} \rangle \quad (5.26)$$

Para  $X_1$  tenemos que  $\xi = 1$  y  $\eta = 1$ , al sustituirlos en la ecuación determinante obtenemos:

$$f_x + f_y = 0 \quad (5.27)$$

de tal modo que

$$f = f(x - y, y') \quad (5.28)$$

tomando  $\xi = x$  y  $\eta = y$  obtenemos la ecuación determinante para  $X_2$

$$zf_z + f = 0 \quad \text{para } z = x - y \quad (5.29)$$

se sigue que

$$f = \frac{g(y')}{x - y} \quad (5.30)$$

ahora, sustituyendo  $\xi = x^2$  y  $\eta = y^2$  obtenemos

$$2y' \frac{dg}{dy'} - 3g + 2(y'^2 - y') = 0 \quad (5.31)$$

finalmente

$$g = -2(y' + Cy'^{\frac{3}{2}} + y'^2) \quad (5.32)$$

así que  $\mathfrak{L}^3$  es admitida por la ecuación ordinaria de segundo orden

$$y'' + 2 \frac{y' + Cy'^{\frac{3}{2}} + y'^2}{x - y} = 0 \quad (5.33)$$

donde  $C$  es constante.

Lie demostró <sup>1</sup> que si una ecuación de segundo orden admite un álgebra de Lie  $\mathfrak{L}^r$  con  $r \geq 4$  entonces necesariamente admite un álgebra de dimensión 8. Estas ecuaciones son equivalentes y pueden ser linealizadas a  $y'' = 0$ . Con lo que queda completa la clasificación para ecuaciones de segundo orden.

<sup>1</sup>La clasificación de Lie utiliza como dominio el plano complejo  $\mathbb{C}$ , cuando pasamos a la recta real, algunas ecuaciones de la clasificación pasan únicamente a dos clases no equivalentes

$$y'' = C(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} e^{q \tan^{-1}(y')} \quad (5.34)$$

$$\tilde{y}'' = C\tilde{y}'^{\frac{k-2}{k-1}} \quad (5.35)$$

Si la ecuación admite  $\mathfrak{L}^1$  entonces la acción del grupo puede verse como traslaciones en una dirección coordenada. Por lo que la forma canónica de una ecuación que admite  $\mathfrak{L}^1$  es

$$y'' = f(y, y') \quad (5.36)$$

Para  $\mathfrak{L}^2$  y  $\mathfrak{L}^3$  ya hemos enlistado las posibilidades y para dimensiones más grandes tenemos que la única forma canónica es

$$y'' = 0 \quad (5.37)$$

## 5.4. Linealización.

**Teorema 16.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) Una EDO de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5.38)$$

puede ser linealizada por un cambio de variables

ii) (5.38) tiene la forma

$$y'' + F_3(x, y)y'^3 + F_2(x, y)y'^2 + F_1(x, y)y' + F(x, y) = 0 \quad (5.39)$$

donde las  $F_i$  satisfacen condiciones de integrabilidad del sistema sobredeterminado

$$\begin{aligned} z_x &= z^2 - Fw - F_1z + F_y + FF_2 \\ z_y &= -zw - FF_3 - \frac{1}{3}(F_2)_x + \frac{2}{3}(F_1)_y \\ w_x &= zw - FF_3 - \frac{1}{3}(F_2)_y + \frac{2}{3}(F_1)_x \\ w_y &= -w^2 - F_2w - F_2z + (F_3)_y + FF_3 \end{aligned} \quad (5.40)$$

iii) La ecuación (5.38) admite un álgebra de Lie de dimensión 8

iv) (5.38) admite un álgebra de Lie de dimensión 2 con base  $\{X_1, X_2\}$  tal que  $X_1 \vee X_2 = 0$

**Ejemplo 39.** Consideremos una ecuación de la forma

$$y'' = f(y') \quad (5.41)$$

del teorema anterior se sigue que  $f(y')$  es una polinomial de grado 3 en  $y'$  con coeficientes constantes,

$$y'' + A_3y'^3 + a_3y'^2 + A_1y' + A_0 \quad (5.42)$$

ahora bastará verificar que (5.40) escrito para (5.42) es integrable y por tanto (5.42) se puede linealizar. En efecto

$$\begin{aligned} z_x &= z^2 - A_1z + A_0A_2 \\ z_y &= -zw - A_0A_3 \\ w_x &= zw - A_0A_3 \\ w_y &= -w^2 - A_2w - A_2z + A_0A_3 \end{aligned} \quad (5.43)$$

por tanto el sistema (5.43) es integrable.

## 5.5. Un resultado útil.

Ahora introduciremos un nuevo concepto, diremos que el grupo de simetría de una ecuación diferencial  $\dot{x}_k = F_k(t)$  es completo si

- La variedad de soluciones es un espacio homogéneo del grupo.
- El grupo es específico para el sistema.

Si el sistema es autónomo podemos reconstruir el grupo de simetría completo, utilizando análisis de simetrías de Lie, mediante la siguiente proposición.

**Proposición 6.** *Si el sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{x}_k = F_k(t)$  es autónomo, entonces una de las funciones incógnitas puede tomarse como una nueva variable independiente y el sistema puede ser reescrito de tal manera que contenga una ecuación de segundo grado, que es susceptible de resolverse por reducción de orden.*

*Demostración.* En efecto, consideremos un sistema autónomo  $N$  ecuaciones ordinarias de segundo orden

$$\ddot{x}_k = F_k(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) \quad (5.44)$$

Un generador del grupo de simetrías puntuales tiene la forma

$$\Gamma = \tau(t, x_1, \dots, x_N) \partial_t + \sum_{k=1}^N \eta_k(t, x_1, \dots, x_N) \partial_{x_k} \quad (5.45)$$

El sistema (??) puede transformarse en uno equivalente de  $2N$  ecuaciones ordinarias de primer orden

$$u_k = u_{N+k} \quad (5.46)$$

$$\dot{u}_{N+k} = F_k(u_1, \dots, u_N, u_{n+1}, \dots, u_{2N}) \quad (5.47)$$

Ahora elegimos una de las variables dependientes para que sea la nueva variable independiente. Sea  $u_N = y$  tal variable. El sistema (5.46-5.47) se transforma en el siguiente sistema no-autónomo de  $2N - 1$  ordinarias de primer orden, cuya variable independiente es  $y$

$$\frac{du_j}{dy} = \frac{u_{N+j}}{u_{2N}} \quad (5.48)$$

$$\frac{du_{N+j}}{dy} = \frac{F_j}{u_{2N}} \quad (5.49)$$

$$\frac{du_{2N}}{dy} = \frac{F_N}{u_{2N}} \quad (5.50)$$

de (5.48) tenemos

$$U_{N+j} = U_{2N} \frac{du_j}{dy} \quad (5.51)$$

al sustituir esta expresión en las otras ecuaciones obtenemos el siguiente sistema

$$\dot{u}_j = \frac{1}{u_{2N}^2} (F_j - F_N) \dot{u}_j \quad (5.52)$$

$$\dot{u}_{2N} = \frac{F_N}{u_{2N}} \quad (5.53)$$

El generador del grupo de simetrías para este sistema tiene la forma

$$\tilde{\Gamma} = V(y, u_i)\partial_y + \sum_{i=1}^{N-1} G_j\partial_{u_j} + G_{2N}\partial_{u_{2N}} \quad (5.54)$$

sustituyendo  $u_j, y$  y  $u_{2N}$ , por  $x_j, x_N$  y  $\dot{x}_N$  y resolviendo el siguiente sistema

$$\eta_j = G_j \quad (5.55)$$

$$\eta_N = V \quad (5.56)$$

$$\frac{d\eta_N}{dt} - \xi_{x_N} = G_{2N} \quad (5.57)$$

recuperamos el grupo de simetrías completo. □

## Capítulo 6

# Aplicación de los métodos de simetrías a modelos epidemiológicos.

*No hay rama de las matemáticas, por abstracta que sea,  
que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del  
mundo real.*

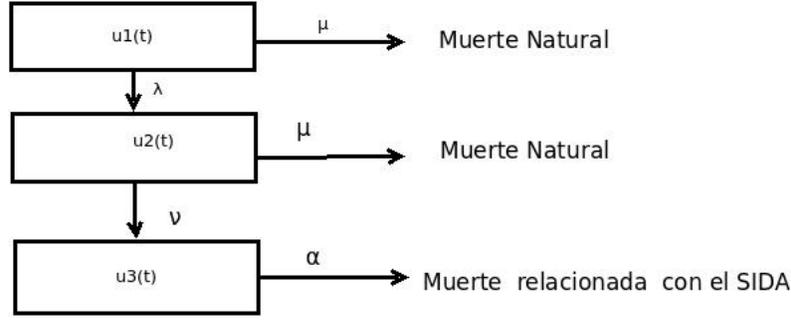
*Nikolai Lobachevski.*

Los métodos de simetrías de Lie han sido ampliamente aplicados en el contexto de la física matemática, sin embargo en otras áreas no ha tenido tanto uso, por ejemplo en la modelación matemática de fenómenos biológicos, se prefieren aplicar las técnicas del análisis cualitativo o de la implementación computacional de simulaciones numéricas.

Presentaremos tres ejemplos en donde se utilizan los métodos de simetría en el contexto de modelación de sistemas biológicos, en particular de sistemas epidemiológicos.

### 6.1. Un modelo de VIH.

Aplicaremos el análisis de simetrías para examinar un modelo propuesto por Anderson, que describe la transmisión de VIH entre parejas homosexuales o bisexuales. Se trata de un modelo compartimentado, se divide a la población en susceptibles (VIH-negativos), infectados (VIH-positivos), y pacientes enfermos de SIDA.



El parámetro  $\mu$  es la tasa de muertes per cápita (no relacionadas con el SIDA), tanto de susceptible como infectados, y  $\alpha$  es la tasa de mortalidad asociada al SIDA, el término  $\lambda$  representa la fuerza per cápita de la infección y se define como:

$$\lambda = \frac{\beta c u_2(t)}{u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)} \quad (6.1)$$

donde  $\beta$  es la probabilidad promedio de que un individuo infectado infecte a una pareja susceptible durante la duración de su relación y  $c$  es la tasa efectiva de cambio de pareja dentro de una categoría específica de riesgo.

Se supone además que se desarrolla SIDA con un periodo de incubación promedio de  $\frac{1}{\nu}$

El sistema de EDO no lineales que describen la dinámica infecciosa es:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{-\beta c u_1 u_2}{u_1 + u_2 + u_3} - \mu u_1 \quad (6.2)$$

$$(6.3)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\beta c u_1 u_2}{u_1 + u_2 + u_3} - (\nu + \mu) u_2 \quad (6.4)$$

$$(6.5)$$

$$\frac{du_3}{dt} = \nu u_2 - \alpha u_3 \quad (6.6)$$

### 6.1.1. Análisis de simetrías.

Primero debemos determinar el álgebra de Lie que admite el sistema, usando el criterio de invarianza.

Consideremos un operador

$$\Gamma = \xi(t, u_1, u_2, u_3) \partial_t + \eta_1(t, u_1, u_2, u_3) \partial_{u_1} + \eta_2(t, u_1, u_2, u_3) \partial_{u_2} + \eta_3(t, u_1, u_2, u_3) \partial_{u_3} \quad (6.7)$$

este genera un grupo de simetría para el sistema si su primera extensión  $\Gamma_{\{1\}}$  se anula sobre el sistema.

$$\Gamma_{\{1\}} \left( \frac{du_1}{dt} \right) = 0 \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{\{1\}} \left( \frac{du_2}{dt} \right) = 0 \quad (6.9)$$

$$\Gamma_{\{1\}} \left( \frac{du_3}{dt} \right) = 0 \quad (6.10)$$

Las ecuaciones (6.8-6.10) son las ecuaciones determinantes del sistema, forman un sistema de ecuaciones en derivadas parciales lineales en las variables  $\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ . Ahora debemos hallar un álgebra de Lie 3-dimensional soluble para poder integrar el sistema 6.2 por cuadraturas.

Investiguemos acerca de la forma que puede tener  $\Gamma$  para poder hallar el álgebra que necesitamos. Supongamos que  $\xi, \eta_1$  y  $\eta_2$  son polinomios de segundo grado en  $u_1, u_2$  y  $u_3$ , analizando el sistema con Maple 13, tenemos que 6.2 admite un álgebra 3-dimensional  $\mathfrak{L}_3$  cuya base es:

$$\left\{ X_1 = \partial_t \quad , \quad X_2 = u_1 \partial_{u_1} + u_2 \partial_{u_2} + u_3 \partial_{u_3} \quad , \quad X_3 = e^{-(\mu+\nu)t} \partial_{u_2} + \frac{u_1 + u_3}{u_2} e^{-(\mu+\nu)t} \partial_{u_3} \right\} \quad (6.11)$$

si se cumple que

$$\alpha = \mu + \beta c \quad (6.12)$$

Veamos ahora la tabla del conmutador para (6.11)

|       | $X_1$             | $X_2$ | $X_3$              |
|-------|-------------------|-------|--------------------|
| $X_1$ | 0                 | 0     | $-(\mu + \nu) X_3$ |
| $X_2$ | 0                 | 0     | $-X_3$             |
| $X_3$ | $(\mu + \nu) X_3$ | $X_3$ | 0                  |

tenemos que  $\{X_2, X_3\}$  genera un ideal de dimensión 2 :  $\mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_3$ . Ahora llamemos  $\mathfrak{L}_1$  al ideal generado por  $X_3$ , observese que:

$$\mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_3$$

lo cual implica que el álgebra  $\mathfrak{L}_3$  es soluble.

Podemos usar la base canónica de  $\mathfrak{L}_2$  para reducir el sistema a una EDO de primer orden esta ecuación podrá integrarse por cuadratura, pues admite el álgebra  $\mathfrak{L}_3/\mathfrak{L}_2$ , generada por  $X_1$  en las variables canónicas.

Los invariantes diferenciales de  $\mathfrak{L}_2$  son

$$t \quad , \quad \zeta = \frac{u_2}{u_1 + u_3} \quad (6.13)$$

Reducimos el sistema a una EDO:

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\beta c - \nu) \zeta - \nu \zeta^2 \quad (6.14)$$

La ecuación (6.14) admite el operador  $\tilde{X}_1 = \partial_t$ , así que la ecuación se puede integrar por cuadraturas. La solución general de (6.14) es

$$\zeta = \frac{e^{\beta c t} (\beta c - \nu)}{e^{\beta c t} \nu + e^{\nu t} \beta c c_1 - e^{\nu t} c_1 \nu} \quad (6.15)$$

donde  $c_1$  es una constante arbitraria de integración.

Usando (6.15) y (6.13) obtenemos una expresión para  $u_3$  en términos de  $u_1$  y  $u_2$

$$u_3 = \frac{e^{\beta c t} (u_1 + u_2) \nu - e^{\beta c t} \beta c u_1 + e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 u_2}{e^{\beta c t} (\beta c - \nu)} \quad (6.16)$$

al sustituir la ecuación (6.16) en el sistema original obtenemos:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{-e^{\beta ct} (\beta c + \mu - \nu) \beta c u_1 - e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 \mu u_1}{e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta ct} \beta c} \quad (6.17)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{-e^{\beta ct} [(u_1 + u_2) \nu - \beta c u_1 + \mu u_2] \beta c - e^{\nu t} (\beta c - \nu) (\mu + \nu) c_1 u_2}{e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta ct} \beta c} \quad (6.18)$$

Podemos integrar (6.17) y obtener

$$u_1 = \frac{e^{\nu t} c_2}{e^{\mu t} [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta ct} \beta c]} \quad (6.19)$$

donde  $c_2$  es una constante arbitraria de integración. Ahora tenemos que (6.18) se reescribe como sigue:

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{-e^{\beta ct + \nu t} [2e^{\mu t} (\beta c + \mu - \nu) c_1 u_2 - c_2] (\beta c + \mu - \nu) \beta c}{e^{\mu t} [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta ct} \beta c]^2} \quad (6.20)$$

$$\frac{2e^{\nu t} (\beta c - \nu)^2 (\mu - \nu) c_1^2 u_2 - e^{2\beta ct} (\mu - \nu) \beta c^2 u_2}{[e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta ct} \beta c]^2} \quad (6.21)$$

Cuya solución general es:

$$u_2 = \frac{(\beta c - \nu) \int \frac{e^{\beta ct + 2\nu t}}{(e^{\beta ct} \beta c + e^{\nu t} \beta c c_1 - e^{\nu t} c_1 \nu)^2} dt \beta c c_2 + c_3}{e^{\mu t + \nu t}} \quad (6.22)$$

donde  $c_3$  es una constante arbitraria de integración. Finalmente obtenemos la solución general del sistema:

$$u_1 = \frac{e^{\nu t} c_2}{e^{\mu t} [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta ct} \beta c]} \quad (6.23)$$

$$u_2 = \frac{(\beta c - \nu) \int \frac{e^{\beta ct + 2\nu t}}{(e^{\beta ct} \beta c + e^{\nu t} \beta c c_1 - e^{\nu t} c_1 \nu)^2} dt \beta c c_2 + c_3}{e^{\mu t + \nu t}} \quad (6.24)$$

$$u_3 = \frac{[e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 e^{\beta ct} \nu] c_3}{e^{\beta ct + \mu t + \nu t} (\beta c - \nu)} + \frac{-e^{\nu t} c_2}{e^{\mu t} [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 e^{\beta ct} \beta c]} + \quad (6.25)$$

$$\frac{\beta c c_2 [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 e^{\beta ct} \nu] \int \frac{e^{\beta ct + 2\nu t}}{(e^{\beta ct} \beta c + e^{\nu t} \beta c c_1 - e^{\nu t} c_1 \nu)^2} dt}{e^{\beta ct + \mu t + \nu t}} \quad (6.26)$$

Ahora si  $\beta c = 2\nu$ , la solución general queda como:

$$u_1 = \frac{c_1}{e^{\mu t} (2e^{\nu t} + c_1 c_2)} \quad (6.27)$$

$$u_2 = [2e^{\nu} \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1 - 2e^{\nu t} c_1 + 4e^{\nu t} c_3 + \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 c_3] / [2e^{\mu t + \nu t} (2e^{\nu t} + c_1 c_2)] \quad (6.28)$$

$$u_3 = [e^{\nu t} \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1 - 2e^{\nu t} c_1 + 2e^{\nu t} c_3 + \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 c_3] / [2e^{\mu t + 2\nu t}] \quad (6.29)$$

### 6.1.2. Otra manera de hallar la solución general para el sistema.

Recordemos que cualquier sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden puede transformarse en otro equivalente, donde al menos una de las ecuaciones es de segundo orden. En este caso el álgebra admitida ya no es de dimensión infinita y podemos recuperar las simetrías del sistema original. Si aplicamos este resultado al sistema, encontraremos que cuando  $\alpha = \mu + \beta c$  tenemos una ecuación ordinaria de segundo orden linealizable

En efecto transformaremos el sistema en uno con dos ecuaciones una de primer orden y otra de segundo orden. De (6.2) podemos reescribir  $u_3$

$$u_3 = \frac{\frac{du_1}{dt} (u_2 - u_1) + \beta c u_1 u_2 + \mu u_1^2 + \mu u_1 u_2}{\frac{du_1}{dt} + \mu u_1} \quad (6.30)$$

y tenemos la EDO de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} = & \left[ \alpha \beta c \mu u_1^2 u_2 + \alpha \beta c u_1 \frac{du_1}{dt} u_2 + \alpha \mu^2 u_1^3 + \alpha \mu^2 u_1^2 u_2 \right. \\ & + 2\alpha \mu u_1^2 \frac{du_1}{dt} + 2\alpha \mu u_1 \frac{du_1}{dt} u_2 + \alpha u_1 \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 \\ & + \alpha \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 u_2 - \beta c \mu^2 u_1^3 - \beta c \mu^2 u_1^2 u_2 - \beta c \mu \nu u_1^2 u_2 \\ & - 2\beta c \mu u_1^2 \frac{du_1}{dt} - \beta c \mu u_1 \frac{du_1}{dt} u_2 - \beta c \nu u_1 \frac{du_1}{dt} u_2 - \beta c u_1 \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 \\ & + \beta c \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 u_2 - \mu^3 u_1^3 - \mu^3 u_1^2 u_2 - 2\mu^2 u_1^2 \frac{du_1}{dt} - 2\mu^2 u_1 \frac{du_1}{dt} u_2 \\ & \left. - \mu u_1 \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 - \mu \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 u_2 \right] / (\beta c u_1 u_2) \end{aligned} \quad (6.31)$$

junto con la EDO:

$$\frac{du_2}{dt} = - \left( \mu u_1 + \mu u_2 + \mu u_2 + \frac{du_1}{dt} \right) \quad (6.32)$$

Aplicaremos ahora el análisis de simetrías para estas ecuaciones, usando *Maple 13* y obtenemos una EDP parabólica, cuya curva característica es

$$u_1 + u_2 = cte \quad (6.33)$$

y en consecuencia, introducimos una variable independiente nueva:

$$v_2 = u_1 + u_2 \quad (6.34)$$

Ahora tenemos un nuevo sistema, en el caso de que  $\alpha = \mu + \beta c$  este nuevo sistema admite un álgebra de Lie de dimensión 8.

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} = \left[ \beta c \mu u_1^2 + \beta c u_1 \frac{du_1}{dt} + \mu^2 u_1^2 - \mu \nu u_1^2 + 2\mu u_1 \frac{du_1}{dt} - \nu u_1 \frac{du_1}{dt} + 2 \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 \right] / u_1 \quad (6.35)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = - (\mu + \nu) v_2 + \nu u_1 \quad (6.36)$$

Los operadores que generan al álgebra de Lie que admite el nuevo sistema son si  $\beta c \neq \nu$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{(\beta c + \mu - \nu)t} \left( \frac{1}{u_1} \partial_t - \mu \partial_{u_1} \right) \\ X_2 &= e^{-\mu t} \left( \frac{1}{u_1} \partial_t - (\beta c + \mu - \nu) \partial_{u_1} \right) \\ X_3 &= e^{(\beta c + \mu - \nu)t} u_1^2 \partial_{u_1} \\ X_4 &= e^{\mu t} u_1^2 \partial_{u_1} \\ X_5 &= u_1 \partial_{u_1} \\ X_6 &= \partial_t \\ X_7 &= e^{(\beta c - \nu)t} (-\partial_t + (\beta c + \mu - \nu) u_1 \partial_{u_1}) \\ X_8 &= -e^{(\beta c - \nu)t} (-\partial_t + \mu u_1 \partial_{u_1}) \end{aligned}$$

Si  $\beta = \nu$ , los operadores que generan al álgebra de Lie que admite el sistema son:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= e^{-\mu t} \left( \frac{1}{u_1} \partial_t - \mu \partial_{u_1} \right) \\ \hat{X}_2 &= e^{-\mu t} \left( \frac{t}{u_1} \partial_t - (\mu t + 1) \partial_{u_1} \right) \\ \hat{X}_3 &= e^{\mu t} u_1^2 \partial_{u_1} \\ \hat{X}_4 &= e^{\mu t} t u_1^2 \partial_{u_1} \\ \hat{X}_5 &= u_1 \partial_{u_1} \\ \hat{X}_6 &= \partial_t \\ \hat{X}_7 &= t (t \partial_t - (\mu t + 1) u_1 \partial_{u_1}) \\ \hat{X}_8 &= t (\partial_t - \mu u_1 \partial_{u_1}) \end{aligned}$$

Para poder linealizar, debemos buscar una subálgebra de dimensión 2 (abeliano e intransitiva), expresada en coordenadas canónicas y, de acuerdo con la clasificación de Lie, tenemos que buscar una subálgebra:

$$\{\partial_{\tilde{u}}, \tilde{x} \partial_{\tilde{u}}\} \quad (6.37)$$

donde  $\tilde{u}$  y  $\tilde{t}$  son las llamadas variables canónicas, bajo las cuales podemos interpretar la acción del grupo como traslaciones sobre  $\tilde{t}$ . Tomaremos por ejemplo la generada por  $\{X_3, X_4\}$  si  $\beta c \neq \nu$  o bien  $\{\hat{X}_3, \hat{X}_4\}$  en el caso de que  $\beta = \nu$ .

Ahora podemos proponer una transformación uniparamétrica para linealizar (6.35):

$$\bar{t} = e^{(\nu - \beta c)t}, \quad \bar{u} = -\frac{e^{(\nu - \beta c - \mu)t}}{u_1} \quad (6.38)$$

en el caso  $\beta c \neq \nu$ , y

$$\bar{t} = t, \quad \bar{u} = -\frac{e^{-\mu t}}{u_1} \quad (6.39)$$

en el caso  $\beta c = \nu$

Así la ecuación (6.35) se convierte en:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = 0 \quad (6.40)$$

Cuya solución es:

$$\bar{u} = a_1 \bar{t} + a_2 \quad (6.41)$$

lo cual nos lleva a la solución general del sistema original

$$u_1 = \frac{e^{\nu t} c_2}{e^{\mu t} [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta c t} \beta c]} \quad (6.42)$$

$$u_2 = \frac{(\beta c - \nu) \int \frac{e^{\beta c t + 2\nu t}}{(e^{\beta c t} \beta c + e^{\nu t} \beta c c_1 - e^{\nu t} c_1 \nu)} dt \beta c c_2 + c_3}{e^{\mu t + \nu t}} \quad (6.43)$$

$$u_3 = \frac{[e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta c t} \nu] c_3}{e^{\beta c t + \mu t + \nu t} (\beta c - \nu)} + \frac{-e^{\nu t} c_2}{e^{\mu t} [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta c t} \beta c]} \quad (6.44)$$

$$+ \frac{\beta c c_2 [e^{\nu t} (\beta c - \nu) c_1 + e^{\beta c t} \nu] \int \frac{e^{\beta c t + 2\nu t}}{(e^{\beta c t} \beta c + e^{\nu t} \beta c c_1 - e^{\nu t} c_1 \nu)^2} dt}{e^{\beta c t + \mu t + \nu t}}$$

Ahora si  $\beta c = 2\nu$ , la solución general queda como:

$$u_1 = \frac{c_1}{e^{\mu t} (2e^{\nu t} + c_1 c_2)} \quad (6.45)$$

$$u_2 = [2e^{\nu} \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1 - 2e^{\nu t} c_1 + 4e^{\nu t} c_3 + \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 c_3] / [2e^{\mu t + \nu t} (2e^{\nu t} + c_1 c_2)] \quad (6.46)$$

$$u_3 = [e^{\nu t} \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1 - 2e^{\nu t} c_1 + 2e^{\nu t} c_3 + \log(2e^{\nu t} + c_1 c_2) c_1^2 c_2 + 2c_1 c_2 c_3] / [2e^{\mu t + 2\nu t}] \quad (6.47)$$

## 6.2. Un modelo de tipo núcleo.

El siguiente modelo fue presentado por Haderler y Castillo-Chávez para dinámica de enfermedades de transmisión sexual, toma en consideración un grupo relativamente pequeño de individuos activos, cuyo tamaño es constante. Este grupo o núcleo, recluta individuos del resto de la población, la tasa de reclutamiento puede depender del estado del núcleo. El complemento del núcleo está inactivo.

La población tiene tamaño  $P(t)$  y su complemento  $A$ , el núcleo  $C$  se divide en susceptibles  $S$ , vacunados (educados)  $V$  e infectados  $I$ .

$$P = C + A \quad C = S + V + I \quad (6.48)$$

La tasa de nacimientos es  $b > 0$ , la tasa de nacimientos de los infectados es  $0 \leq \hat{b} \leq b$ , la tasa de mortalidad es  $\mu$ , mientras que para los infectados la tasa de mortalidad es  $\bar{\mu} \geq \mu$ , la tasa de recuperación es  $\alpha \geq 0$ , la tasa de vacunación es  $\psi \geq 0$ , la tasa de transmisión de infectados a susceptibles es  $\beta \geq 0$  y la de infectados a educados es  $0 \leq \hat{\beta} \leq \beta$ . Al recuperarse, los individuos pueden pasar a la clase de educados con una tasa

de  $\alpha\gamma$ , con  $0 \leq \gamma \leq 1$  o volver a ser susceptibles a una tasa  $\alpha(1 - \gamma)$ . El reclutamiento queda descrito por  $r(I, C)$ .

Como una primera simplificación consideraremos  $P = \text{constante}$ , con lo cual  $b = \bar{b} = \mu = \bar{\mu}$ . Entonces el modelo es:

$$\dot{A} = \mu P - Ar(I, C) - \mu A \quad (6.49)$$

$$\dot{S} = Ar(I, C) - \beta \frac{SI}{C} - \psi S + \alpha(1 - \gamma)I - \mu S \quad (6.50)$$

$$\dot{V} = \psi S - \bar{\beta} \frac{VI}{C} + \alpha\gamma I - \mu V \quad (6.51)$$

$$\dot{I} = \frac{\beta SI + \bar{\beta} VI}{C} - \alpha I - \mu I \quad (6.52)$$

En el artículo de Haderler y Castillo-Chávez [CCH95] se relaciona este sistema con un modelo para el núcleo aislado de tamaño constante  $C = 1$

$$\dot{S} = \mu - \beta SI - \psi S + \alpha(1 - \gamma)I - \mu S \quad (6.53)$$

$$\dot{V} = \psi S - \bar{\beta} VI + \alpha\gamma I - \mu V \quad (6.54)$$

$$\dot{I} = \beta SI + \bar{\beta} VI - \alpha I - \mu I \quad (6.55)$$

Haderler y Castillo-Chávez, hacen el análisis cualitativo del modelo, así como análisis de estabilidad. Ahora aplicaremos el método de Lie para hallar las condiciones físicas para la existencia de simetrías puntuales y de ser posible deducir la solución general en forma exácta, de tal manera complementaremos la información obtenida mediante análisis cualitativo.

### 6.2.1. Análisis de simetrías.

El sistema (6.53)-(6.55) puede reducirse a un sistema de dos ecuaciones usando la relación

$$C \equiv 1 = S + V + I \quad (6.56)$$

y reescribimos el sistema de dos ecuaciones como una ecuación de segundo orden, usando

$$I = 1 - S - V \quad (6.57)$$

deduciendo  $V$  de (6.53)

$$V = \frac{\dot{S} - \mu S + \psi S - \mu}{\alpha\gamma - \alpha + \beta S} - S + 1 \quad (6.58)$$

y obtenemos una ecuación de segundo orden para  $S$

$$\ddot{S} = f(t, S, \dot{S}) \quad (6.59)$$

Ahora, buscaremos el álgebra de Lie asociada para (6.59). Un operador

$$\Gamma = v(t, u)\partial_t + g(t, u)\partial_u \quad (6.60)$$

genera al grupo de simetría de una EDO de orden 2 si su segunda extensión

$$\Gamma_{\{2\}} = \Gamma + \left( \frac{dg}{dt} - \dot{u} \frac{dv}{dt} \right) \partial_u + \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{dg}{dt} - \dot{u} \frac{dv}{dt} \right) - \ddot{u} \frac{dv}{dt} \right) \partial_{\dot{u}} \quad (6.61)$$

aplicada a la ecuación, se anula

$$\Gamma_{\{2\}}(\ddot{u}) \equiv 0 \quad (6.62)$$

La ecuación determinante (6.62) constituye un sistema de ecuaciones en derivadas parciales sobredeterminado para  $v(t, u)$  y  $g(t, u)$ . Aplicando el análisis de las simetrías, obtenemos una EDP lineal de primer orden para  $v(t, S)$ , sus curvas características sugieren que se haga la siguiente simplificación.

$$S = \frac{-\alpha\gamma + \alpha + u}{\beta} \quad (6.63)$$

donde  $u(t)$  es una variable independiente nueva.

Ahora (6.58) se transforma en

$$V = 1 + \frac{\dot{u} + \alpha(1 - \gamma)(\mu + \psi) + (\alpha\gamma - \alpha + \mu + \psi - u)u - \beta\mu}{\beta u} \quad (6.64)$$

y 6.59 se transforma en

$$\begin{aligned} \ddot{u} = & \frac{1}{\beta u} (\alpha^2 \beta \gamma^2 \mu u + \alpha^2 \beta \gamma^2 \psi u - \alpha^2 \beta \gamma \mu u - \alpha^2 \beta \gamma \psi u + \alpha^2 \bar{\beta} \gamma^2 \mu^2 + 2\alpha^2 \bar{\beta} \gamma^2 \mu \psi) \\ & - \alpha^2 \bar{\beta} \gamma^2 \mu u + \alpha^2 \bar{\beta} \gamma^2 \psi^2 - \alpha^2 \bar{\beta} \gamma^2 \psi u - 2\alpha^2 \bar{\beta} \gamma \mu^2 + 2\alpha^2 \bar{\beta} \mu \psi - \alpha^2 \bar{\beta} \mu u + \alpha^2 \bar{\beta} \psi^2 \\ & - \alpha^2 \bar{\beta} \psi u + \alpha \beta^2 \gamma \mu u + 2\alpha \beta \bar{\beta} \gamma \mu^2 + 2\alpha \beta \bar{\beta} \gamma \mu \psi - 2\alpha \beta \bar{\beta} \gamma \mu u - \alpha \beta \bar{\beta} \gamma \psi u - 2\alpha \beta \bar{\beta} \mu^2 - 2\alpha \beta \bar{\beta} \mu \psi \\ & + 2\alpha \beta \bar{\beta} \mu u + \alpha \beta \bar{\beta} \psi u + \alpha \beta \gamma \mu^2 u + \alpha \beta \mu \psi u - 2\alpha \beta \gamma \mu u^2 - \alpha \beta \gamma \mu \dot{u} - 2\alpha \beta \gamma \psi u^2 - \alpha \beta \gamma \psi \dot{u} - \alpha \beta \gamma u \dot{u} - \alpha \beta \mu^2 u \\ & - \alpha \beta \mu \psi u + \alpha \beta \mu u^2 + \alpha \beta \mu \dot{u} + \alpha \beta \psi u^2 + \alpha \beta \psi \dot{u} - 2\alpha \bar{\beta} \gamma \mu^2 u - 4\alpha \bar{\beta} \gamma \mu \psi u + 2\alpha \bar{\beta} \gamma \mu u^2 - 2\alpha \bar{\beta} \gamma \mu \dot{u} - 2\alpha \bar{\beta} \gamma \psi^2 u \\ & + 2\alpha \bar{\beta} \gamma \psi u^2 - 2\alpha \bar{\beta} \gamma \psi \dot{u} + \alpha \bar{\beta} \gamma u \dot{u} + 2\alpha \bar{\beta} \mu^2 u + 4\alpha \bar{\beta} \mu \psi u - 2\alpha \bar{\beta} \mu^2 + 2\alpha \bar{\beta} \mu \dot{u} + 2\alpha \bar{\beta} \psi^2 u - 2\alpha \bar{\beta} \psi u^2 + 2\alpha \bar{\beta} \psi \dot{u} \\ & - \alpha \bar{\beta} u \dot{u} + \beta^2 \bar{\beta} \mu^2 - \beta^2 \bar{\beta} \mu u + \beta^2 \mu^2 u - \beta^2 \mu u^2 - \beta^2 \mu \dot{u} - \beta \bar{\beta} \mu^2 u - 2\beta \bar{\beta} \mu \psi u + 2\beta \bar{\beta} \mu u^2 - 2\beta \bar{\beta} \mu \dot{u} + \beta \bar{\beta} \psi u^2 \\ & + \beta \bar{\beta} u \dot{u} - \beta \mu^2 u^2 - \beta \mu \psi u^2 + \beta \mu u^3 - \beta \mu u \dot{u} + \beta \psi u^3 + \beta u^2 \dot{u} + \bar{\beta} \mu^2 u^2 + 2\bar{\beta} \mu \psi u^2 - \bar{\beta} \mu u^3 + 2\bar{\beta} \mu u \dot{u} \\ & + \bar{\beta} \psi^2 u^2 - \bar{\beta} \psi u^3 + 2\bar{\beta} \psi u \dot{u} - \bar{\beta} u^2 \dot{u} + \bar{\beta} \dot{u}^2) \end{aligned} \quad (6.65)$$

Aplicando el método de Lie, obtenemos simetrías puntuales no-triviales sólo en cinco casos.

**Caso 1.**  $\beta = \bar{\beta}$

En este caso tenemos un álgebra de Lie de dimensión 8 isomorfa a  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$  cuyos generadores son:

$$\Gamma_1 := \frac{e^{-t(-\alpha+\beta-\mu)} (\alpha\gamma\mu + \alpha\gamma\psi - \alpha\mu - \alpha\psi + \beta\mu - u\mu - u\psi) \partial_t}{(\alpha\gamma\mu + \alpha\gamma\psi - \alpha\mu - \alpha\psi + \beta\mu) u} \quad (6.66)$$

$$\Gamma_2 := \frac{(\partial_t + \partial_u \alpha \gamma \mu + \partial_u \alpha \gamma \psi - \partial_u \alpha \mu - \partial_u \alpha \psi + \partial_u \beta \mu - \partial_u u \mu - \partial_u u \psi) e^{-t(\beta+\psi-\alpha)}}{u} \quad (6.67)$$

$$\Gamma_3 := \frac{1}{u\alpha\gamma\mu + \alpha\gamma\psi - \alpha\mu - \alpha\psi + \beta\mu} \left( e^{t(-\alpha+\beta-\mu)} (-2\partial_u u\mu\alpha\gamma\psi + 2\partial_u \beta\mu\alpha\gamma\psi - 2\partial_u \beta\mu\alpha\gamma \right. \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} & -2\partial_u \beta u\alpha\gamma\psi - 2\partial_u u\psi\alpha^2 + \partial_t \alpha\gamma\psi + 2\partial_u u\psi^2\alpha - 2\partial_u \beta^2 u\mu \\ & -2\partial_u \alpha^2\gamma\psi^2 - 2\partial_u u^2\alpha\psi - 2\partial_u \alpha^2\mu^2\gamma + 2\mu\partial_u \alpha^2\psi - 2\mu\partial_u \alpha^2 u + \mu\partial_t \alpha\gamma \\ & -2\beta\mu^2\partial_u \alpha - 2\partial_u \beta u^2\alpha + \partial_u \alpha^2\gamma^2\psi^2 + \partial_u \alpha^2\gamma^2\mu^2 + 2\partial_u \beta u^2\psi + 2\partial_u u\psi\alpha^2\gamma \\ & -2\partial_u u\psi^2\alpha\gamma + 2\partial_u u\mu\alpha\psi + 2\beta\mu^2\partial_u \alpha\gamma + 4\partial_u \beta\mu\alpha\psi - 2\partial_u \beta\mu\psi\psi - 2\partial_u \beta\mu\alpha\psi \\ & + 2\partial_u \beta u\psi\alpha - 4\mu\partial_u \alpha^2\gamma\psi + 2\mu\partial_u \alpha^2 u\gamma + 2\mu\partial_u \alpha^2\gamma^2\psi - \mu\partial_t \alpha + \partial_u \alpha^2\psi^2 \\ & \left. -\partial_t \alpha\psi + \partial_u \alpha^2\mu^2 + \partial_u \beta^2\mu^2 + \partial_t u\alpha - \partial_t u\psi + \partial_u u^2\alpha^2 \right. \\ & \left. + \beta\mu\partial_t - \partial_t u\beta + \partial_u u^2\psi^2 + \partial_u u^2\beta^2\right) \end{aligned}$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{(\alpha\gamma\mu + \alpha\gamma\psi - \alpha\mu - \alpha\psi + \beta\mu)^2 u} \left( e^{t(\beta+\psi-\alpha)} (-2\partial_u u^3\beta\psi^2 - \partial_u u^3\beta^2\psi + 6\partial_u u^2\beta\mu\alpha\gamma\psi - 3\partial_u u\psi^3\alpha^2 \right. \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} & -8\partial_u u\mu^2\alpha\gamma\psi\beta + \partial_u \beta^3\mu^3 - 9\partial_u \alpha^3\psi\gamma^2\mu^2 - 3\partial_u u\psi\beta^2\mu^2 + \partial_t \alpha^2\mu^2 - \partial_u \alpha^3\mu^3 - \partial_u \alpha^3\psi^3 \\ & + \partial_t \beta^2\mu^2 - 6\partial_u u\psi^2\alpha\gamma\beta\mu - 4\partial_u \beta u\alpha^2\gamma^2\mu\psi + 12\partial_u \alpha^2 u\gamma\psi\beta\mu \\ & -4\partial_u \beta^2 u\alpha\gamma\psi\mu - \partial_u u^3\psi^3 - \partial_t u\beta\alpha\gamma\mu - 7\partial_u u\psi^2\alpha^2\gamma^2\mu + 8\partial_u u\mu^2\alpha\psi\beta - 5\partial_u u^2\psi^2\alpha\mu \\ & + \partial_t u\psi\alpha\mu - 4\partial_u \alpha^3 u\gamma\psi^2 + 3\partial_u \alpha^2\psi^2\beta\mu + \partial_t u\alpha^2\gamma\mu - 4\partial_u \alpha^3 u\gamma\mu^2 + 3\partial_u \beta^2\mu^3\alpha\gamma \\ & + 6\partial_u \alpha^2\psi\beta\mu^2 - \partial_t u\psi^2\alpha\gamma + \partial_t u\beta\alpha\psi + 3\partial_u u^2\psi^3\alpha\gamma - \partial_t u\psi\beta\mu - 3\partial_u \beta^2\mu^2\alpha\psi \\ & + 2\partial_u u\mu^3\alpha^2\gamma - 2\partial_u \beta u\alpha^2\psi^2 - 5\partial_u u\mu^2\alpha^2\psi + 5\partial_u u^2\psi^2\alpha\gamma\mu - \partial_u u^3\alpha^2\mu \\ & + 2\partial_u u^3\psi^2\alpha + \partial_u u^2\beta^2\alpha\gamma\mu + 3\partial_u \alpha^2\gamma^2\psi^2\beta\mu + 2\partial_u u^2\beta\mu^2\alpha\gamma + \partial_u u^2\beta^2\alpha\gamma\psi - \partial_t u\beta^2\mu \\ & -2\partial_u u\mu^3\alpha\gamma\beta - 3\partial_u u^2\psi^3\alpha - 4\partial_u \beta^2 u\alpha\gamma\mu^2 - \partial_t u\psi\alpha\gamma\mu \\ & + 3\partial_u \beta^2\mu^2\alpha\gamma\psi + 4\partial_u \alpha^3 u\gamma^2\mu\psi + \partial_u u^2\alpha^3\gamma\psi - 3\partial_u u\psi^3\alpha^2\gamma^2 + 3\partial_u u^2\psi^2\beta\mu \\ & -3\partial_u u^2\beta^2\alpha\mu - 9\partial_u \alpha^3\psi^2\gamma^2\mu - \partial_u u^2\alpha^3\psi \\ & + \partial_t \alpha^2\psi^2 - 6\partial_u \alpha^2\psi^2\beta\mu\gamma - 2\partial_u \beta u\alpha^2\gamma^2\mu^2 - \partial_u u^3\alpha^2\psi - \partial_t u\alpha^2\mu - 2\partial_t \alpha\mu^2\beta \\ & + \partial_t \alpha^2\gamma^2\psi^2 + \partial_t u\psi^2\alpha - 3\partial_u \alpha^3\mu^2\psi + 3\partial_u \alpha^2\mu^3\beta \\ & -3\partial_u \beta^2\mu^3\alpha + \partial_t \alpha^2\gamma^2\mu^2 + \partial_u \alpha^3\gamma^3\psi^3 + \partial_u \alpha^3\gamma^3\mu^3 + 4\partial_u \beta^2 u\alpha\psi\mu \\ & -10\partial_u u^2\beta\mu\alpha\psi + 6\partial_u \alpha^2\gamma^2\mu^2\psi\beta - 2\partial_u \beta u\alpha^2\gamma^2\psi^2 + 8\partial_u \alpha^2 u\gamma\mu^2\beta \\ & -8\partial_u \alpha^3 u\gamma\mu\psi - \partial_t u\beta\alpha\gamma\psi + 2\partial_t \alpha\gamma\psi\beta\mu + 10\partial_u \alpha^2 u\gamma\mu^2\psi + 4\partial_u \beta u\alpha^2\gamma\psi^2 \\ & -12\partial_u \alpha^2\psi\gamma\mu^2\beta - 8\partial_u \beta u\alpha^2\mu\psi - 5\partial_u u\mu^2\alpha^2\gamma^2\psi + 6\partial_u u\psi^2\alpha\beta\mu + 2\partial_u u^2\mu^2\psi\alpha\gamma - 6\partial_u u^2\alpha^2\mu\gamma\psi \\ & -2\partial_u u^2\alpha^2\beta\gamma\mu - 2\partial_u u^2\alpha^2\beta\gamma\psi + 4\partial_u u^2\psi^2\beta\alpha\gamma + 14\partial_u u\psi^2\alpha^2\gamma\mu - \partial_u u^2\beta^2\alpha\psi \\ & -2\partial_t \alpha\psi\beta\mu - 4\partial_t \alpha^2\psi\gamma\mu + 2\partial_u \alpha^3 u\gamma^2\psi^2 - 7\partial_u u\mu\alpha^2\psi^2 + \partial_t u\alpha^2\gamma\psi \\ & -6\partial_u \beta u\alpha^2\mu^2 + 2\partial_u \alpha^3 u\gamma^2\mu^2 + 2\partial_u u\mu^3\beta\alpha + 9\partial_u \alpha^3\psi^2\gamma\mu + 3\partial_u \alpha^3\gamma^3\mu\psi^2 \\ & + 2\partial_t \alpha\gamma\mu^2\beta + 9\partial_u \alpha^3\mu^2\gamma\psi - 6\partial_u \alpha^2\gamma\mu^3\beta + 6\partial_u \beta^2 u\alpha\mu^2 \\ & -\partial_u u\mu^3\alpha^2\gamma^2 + 6\partial_u u\psi^3\alpha^2\gamma + 2\partial_t \alpha^2\gamma^2\mu\psi + 3\partial_u \alpha^3\gamma^3\mu^2\psi \\ & + 2\partial_u u^3\beta\mu\alpha - 2\partial_u u^2\mu^2\psi\alpha - 4\partial_u u^2\psi^2\beta\alpha + 4\partial_u \alpha^3 u\mu\psi - 4\partial_u u^2\alpha^2\psi^2\gamma \\ & \left. + 6\partial_u u^2\alpha^2\mu\psi - 2\partial_u u^2\alpha^2\mu^2\gamma + 2\partial_u u^2\mu^2\psi\beta + 4\partial_u u^2\beta^2\psi\mu \right) \end{aligned} \quad (6.70)$$



$$\Gamma_6 = \frac{e^{-(\mu+\psi)t} (\partial_t + \partial_u \beta \mu - \partial_u \beta u - \partial_u \alpha \mu + \partial_u \alpha \gamma \mu + \partial_u \alpha u - \partial_u \alpha \psi + \partial_u \alpha \gamma \psi - \partial_u u \psi)}{u} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_7 = & \frac{1}{(\alpha \gamma \mu + \alpha \gamma \psi - \alpha \mu - \alpha \psi + \beta \mu) u} (\partial_u u^2 \psi^2 - \partial_t \alpha \psi + \partial_u \alpha^2 u \gamma \psi - \beta \partial_u u \alpha \gamma \psi \\ & - 3 \partial_u u \mu \alpha \gamma \psi + 2 \beta \mu \partial_u \alpha \gamma \psi - \beta \mu \partial_u u \alpha \gamma - \partial_u u \psi \alpha^2 - \partial_u \beta^2 u \mu + \partial_u u^2 \mu \psi - \partial_u u^2 \alpha \mu \\ & - 2 \partial_u \alpha^2 \gamma \psi^2 - \partial_u u \mu^2 \beta - \partial_u u^2 \alpha \psi - 2 \mu^2 \partial_u \alpha^2 \gamma + 2 \mu \partial_u \alpha^2 \psi + \partial_u \alpha^2 \mu^2 + \partial_u u \mu^2 \alpha + \partial_u \alpha^2 \gamma^2 \psi^2 \\ & + \partial_u \alpha^2 \gamma^2 \mu^2 + \partial_u \beta^2 \mu^2 - \partial_u u \mu^2 \alpha \gamma - \partial_u u \mu \alpha^2 + \partial_u u^2 \beta \mu + \partial_u \alpha^2 \psi^2 + 2 \partial_u u \psi^2 \alpha + 3 \partial_u u \mu \alpha \psi \\ & + 2 \beta \mu^2 \partial_u \alpha \gamma - \mu \partial_t \alpha + \beta \mu \partial_t + \mu \partial_t \alpha \gamma - 2 \beta \mu^2 \partial_u \alpha \\ & + 2 \beta \mu \partial_u u \alpha - 2 \beta \mu \partial_u u \psi - 2 \beta \mu \partial_u \alpha \psi + \beta \partial_u u \psi \alpha - 4 \mu \partial_u \alpha^2 \gamma \psi \\ & + \mu \partial_u u \alpha^2 \gamma + 2 \mu \partial_u \alpha^2 \gamma^2 \psi + \partial_u u^2 \beta \psi - 2 \partial_u u \psi^2 \alpha \gamma + \partial_t \alpha \gamma \psi) \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\Gamma_8 := \partial_t \quad (6.74)$$

En este caso (6.66) es linealizable por medio de una transformación puntual. Para hallar la transformación indicada, debemos hallar una subálgebra abeliana de dimensión 2, intransitiva. Según la clasificación de Lie podemos llevarla a su forma canónica

$$\partial_{\bar{u}} \quad \bar{t} \partial_{\bar{u}}$$

donde  $\bar{u}$  y  $\bar{t}$  son las nuevas variables. Podemos, sin perder generalidad tomar la subálgebra formada por  $\{\Gamma_3, \Gamma_6\}$ .

Para encontrar  $\bar{t}$  y  $\bar{u}$  tenemos que resolver las siguientes cuatro EDP lineales

$$\begin{aligned} \Gamma_3(\bar{t}) = 0 \quad \Gamma_3(\bar{u}) = \bar{t} \\ \Gamma_6(\bar{t}) = 0 \quad \Gamma_3(\bar{u}) = 1 \end{aligned} \quad (6.75)$$

Tenemos que si  $\bar{\beta} \neq \alpha - \psi$  sucede que

$$\bar{t} = \frac{e^{(\beta - \alpha + \psi)t}}{\alpha - \bar{\beta} - \psi} (\bar{\beta} \mu - \bar{\beta} u + \alpha u - \alpha \mu - u \psi - \alpha \psi + \bar{\beta} \mu - \mu u - \psi u) \quad (6.76)$$

$$\bar{u} = e^{(\mu + \psi)t} (\alpha \gamma \mu + \alpha \gamma \psi - \alpha \mu - \alpha \psi - \bar{\beta} \mu - \mu u - \psi u) \quad (6.77)$$

y con estas nuevas coordenadas (6.66) tiene la forma:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{t}} = 0 \quad (6.78)$$

integrando obtenemos

$$\bar{u} = a_1 \bar{t} + a_2 \quad (6.79)$$

donde  $a_i$  son constantes arbitrarias de integración.

Usando (6.76), (6.77), (6.63), (6.58) y (6.57), reconstruimos la solución general para el sistema original.

$$S = \frac{e^{\bar{\beta}t} (\alpha (\gamma - 1) (\alpha - \bar{\beta} + \mu) + \bar{\beta}\mu) a_1}{\bar{\beta} (\bar{\beta} + \psi - \alpha) (e^{(\alpha+\mu)t} (\mu + \psi) + e^{\bar{\beta}t} a_1)} + \frac{e^{(\alpha+\psi)t} (e^{(\mu+\psi)t} \bar{\beta}\mu - a_2)}{\bar{\beta} (e^{(\alpha+\mu)t} (\mu + \psi) + e^{\bar{\beta}t} a_1)} \quad (6.80)$$

$$V = \frac{e^{\alpha t} (e^{\mu t} \bar{\beta}\psi + e^{-\psi t} a_2)}{\bar{\beta} (e^{(\alpha+\mu)t} (\mu + \psi) + e^{\bar{\beta}t} a_1)} + \frac{e^{\bar{\beta}t} (\gamma (\bar{\beta}\alpha - \mu) + \psi + \mu) \alpha a_1}{\bar{\beta} (\bar{\beta} + \psi - \alpha) (e^{(\alpha+\mu)t} (\mu + \psi) + e^{\bar{\beta}t} a_1)} \quad (6.81)$$

$$I = \frac{e^{\bar{\beta}t} (\bar{\beta} - \mu - \alpha) a_1}{\bar{\beta} (e^{(\alpha+\mu)t} (\mu + \psi) + e^{\bar{\beta}t} a_1)} \quad (6.82)$$

Si  $\bar{\beta} = \alpha - \psi$  y  $\gamma \neq \frac{\psi(\alpha + \mu)}{\alpha(\mu + \psi)}$  tenemos que el álgebra generada por  $\Gamma_3$  y  $\Gamma_6$  puede llevarse a su forma canónica haciendo:

$$\bar{t} = \frac{\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi}{u + t(\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi)} \quad (6.83)$$

$$\bar{u} = (u + t(\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi))^2 + \frac{(\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi + (\mu + \psi)u)(\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi)}{e^{-(\mu+\psi)t}(u + t(\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi))(\mu + \psi)^2} \quad (6.84)$$

Así que la ecuación (6.66) se reescribe como

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{t}} = -6 \frac{(\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi)^2}{\bar{t}^4} \quad (6.85)$$

que puede integrarse como sigue:

$$\bar{u} = a_1 + a_2 \bar{t} - \frac{(\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi)^2}{\bar{t}^2} \quad (6.86)$$

Así la solución general para el sistema es:

$$S = (\mu + \psi) \frac{(a_1 t + a_2) (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) - \alpha a_1 (1 - \gamma)}{(e^{(\mu+\psi)t} (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) - (\mu + \psi) a_1) (\alpha - \psi)} + \frac{e^{(\mu+\psi)t} (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) \mu}{(e^{(\mu+\psi)t} (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) - (\mu + \psi) a_1) (\mu + \psi)} \quad (6.87)$$

$$V = -(\mu + \psi) \frac{(a_1 t + a_2) (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) + a_1 (\alpha\gamma + \mu)}{(e^{(\mu+\psi)t} (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) - (\mu + \psi) a_1) (\alpha - \psi)} + \frac{e^{(\mu+\psi)t} (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) \psi}{(e^{(\mu+\psi)t} (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) - (\mu + \psi) a_1) (\mu + \psi)} \quad (6.88)$$

$$I = \frac{(\mu + \psi)^2 a_1}{(e^{(\mu+\psi)t} (\alpha\psi + \mu\psi - \alpha\gamma\mu - \alpha\gamma\psi) - (\mu + \psi) a_1) (\mu + \psi)} \quad (6.89)$$

Finalmente si  $\bar{\beta} = \alpha - \psi$  y  $\gamma = \frac{\psi(\alpha + \mu)}{\alpha(\mu + \psi)}$  entonces (6.66) se integra directamente

$$\bar{u} = \frac{1}{e^{(\mu+\psi)t} a_1 + a_2} \quad (6.90)$$

y por tanto la solución general es

$$S = \frac{\mu + \psi + \mu(\alpha - \psi)(e^{(\mu+\psi)t} a_1 + a_2)}{(e^{(\mu+\psi)t} a_1 + a_2)(\alpha - \psi)(\mu + \psi)} \quad (6.91)$$

$$V = \frac{e^{(\mu+\psi)t}(\alpha - \psi)a_1\psi + \alpha a_2\psi + a_2\mu^2 + 2a_2\mu\psi - \mu - \psi}{(e^{(\mu+\psi)t} a_1 + a_2)(\alpha - \psi)(\mu + \psi)} \quad (6.92)$$

$$I = \frac{-(\mu + \psi)a_2}{(e^{(\mu+\psi)t} a_1 + a_2)(\alpha - \psi)} \quad (6.93)$$

**Caso 2.**  $\beta = \frac{(1-\gamma)(\mu+\psi)\alpha}{\mu}$ ,  $\bar{\beta} = \frac{(\alpha-\psi)(\mu+\psi)}{\psi}$ ,  $\psi < \alpha\gamma$

Ahora la ecuación (6.66) admite un álgebra bidimensional (intransitiva y no-abeliana) generada por los siguientes operadores:

$$\Gamma_1 = e^{(\mu+\psi)t}(\partial_t - (\mu + \psi)u\partial_u) \quad \Gamma_2 = \partial_t \quad (6.94)$$

Una base para los invariantes diferenciales para  $\Gamma_1$  en (6.94) es

$$\bar{t} = ue^{(\mu+\psi)t} \quad \bar{u} = (\dot{u} + u\mu + u\psi)e^{2(\mu+\psi)t} \quad (6.95)$$

y por tanto la ecuación (6.66) se reescribe como

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \frac{(-\alpha\gamma + \alpha\gamma\psi - \alpha\psi + \mu\psi)\bar{u} + (\alpha\gamma\mu + \alpha\gamma\psi - \alpha\psi - \gamma\psi)\bar{t}^2}{\alpha\psi(\gamma - 1)\bar{t}} \quad (6.96)$$

la cual puede integrarse directamente:

$$\bar{u} = a_1\bar{t} \frac{(\alpha\gamma - \psi)\mu + (1-\gamma)\alpha\psi}{(1-\gamma)\alpha\psi} + \bar{t}^2 \quad (6.97)$$

La ecuación (6.96) admite una simetría generada por  $\Gamma_2$  en (6.94), entonces se transforma en:

$$\bar{\Gamma}_2 = (\mu + \psi)(\bar{t}\partial_{\bar{t}} + 2\bar{u}\partial_{\bar{u}}) \quad (6.98)$$

sustituyendo, obtenemos la siguiente EDO de primer orden

$$\dot{u} = au \frac{(\alpha\gamma - \psi)\mu}{(1-\gamma)\alpha\psi} + e^{\left(\frac{(\alpha\gamma - \psi)\mu}{(1-\gamma)\alpha\psi} - 1\right)(\mu+\psi)t} + u(u - \psi - \mu) \quad (6.99)$$

la cual la podemos integrar, puesto que admite el álgebra generada por  $\Gamma_1$ , y por tanto admite el siguiente factor integrante

$$\mathcal{M} = \frac{-e^{-(\mu+\psi)t}}{au \frac{(\alpha\gamma - \psi)\mu}{(1-\gamma)\alpha\psi} + e^{\left(\frac{(\alpha\gamma - \psi)\mu}{(1-\gamma)\alpha\psi} - 1\right)(\mu+\psi)t} + u^2} \quad (6.100)$$

así (6.99) queda como sigue

$$du - \left( a_1 u \frac{(\alpha\gamma - \psi)\mu}{(1-\gamma)\alpha\psi} + e^{\left(\frac{(\alpha\gamma - \psi)\mu}{(1-\gamma)\alpha\psi} - 1\right)(\mu+\psi)t} + u(u - \psi - \mu) \right) dt = 0 \quad (6.101)$$

de esta manera obtendremos una solución para (6.66) por cuadraturas.

**Caso 3.**  $\beta = 2\bar{\beta}$ ,  $\gamma = \frac{(\alpha + 2\mu)\psi}{(2\mu + \psi)\alpha}$ ,  $\beta = \frac{(\alpha - \psi)(\mu + \psi)}{2\mu + \psi}$

Tenemos que (6.66) admite la misma álgebra que en el caso 2, tomando como base de los invariantes diferenciales a (6.95), podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \frac{3\bar{u} + \bar{t}^2}{2\bar{t}} \quad (6.102)$$

esta ecuación puede integrarse directamente de la siguiente manera

$$\bar{u} = a_1 \bar{t} \sqrt{\bar{t}} + \bar{t}^2 \quad (6.103)$$

sustituyendo (6.95) en (6.103) obtenemos la EDO

$$\dot{u} = -a_1 u \sqrt{u} e^{-\frac{(\mu + \psi)t}{2}} - \frac{e^{-(\mu + \psi)t}}{\mu + \psi} + \frac{1}{a_1^2} \log\left(u e^{(\mu + \psi)t}\right) - \frac{2}{a^2} \log\left(\sqrt{u} e^{(\mu + \psi)t} + a_1\right) = a_2 \quad (6.104)$$

la cual es una solución implícita para el sistema.

**Caso 4.**  $\bar{\beta} = \alpha\gamma + \mu$ ,  $\gamma = \frac{(2\mu + \psi)\psi}{\alpha\mu}$ ,  $\beta = \frac{-(2\mu + \psi)\psi + \alpha\mu}{\mu^2}(\mu + \psi)$

Nuevamente, tenemos la misma álgebra que en el caso 2. Una base para los invariantes diferenciales de  $\Gamma_1$  esta dada en (6.95) y por tanto la ecuación (6.66) se transforma en

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \frac{(\alpha\mu + \mu^2 - \mu\psi - \psi^2)\bar{u} + (\alpha\mu + \mu^2 - 3\mu\psi - \psi^2)\bar{t}^2}{(\alpha\mu - 2\mu\psi - \psi^2)\bar{t}} \quad (6.105)$$

que podemos integrar directamente y obtener

$$\bar{u} = a_1 \bar{t} \frac{(-\alpha\mu - \mu^2 + \mu\psi + \psi^2)}{(-\alpha\mu + \mu^2 + 2\mu\psi)} + \bar{t}^2 \quad (6.106)$$

y al sustituir obtenemos la siguiente EDO

$$\dot{u} = a_1 e^{-t} \frac{(\mu + \psi)(\alpha\mu - \mu^2 - 3\mu\psi - \psi^2)}{(\alpha\mu - 2\mu\psi - \psi^2)} u^{-t} \frac{(\alpha\mu - \mu^2 - \mu\psi - \psi^2)}{(\alpha\mu - 2\mu\psi - \psi^2)} + u(u - \mu - \psi) \quad (6.107)$$

la cual admite una solución implícita.

**Caso 5.**  $\bar{\beta} = 0$ ,  $\psi = \alpha\gamma$ ,  $\beta = \frac{\alpha(1-\gamma)(\alpha\gamma+\mu)}{\mu}$

La ecuación (6.66) admite el álgebra de Lie generada por

$$\Gamma_1 = e^{(\mu+\alpha\gamma)t} (\partial_t - (\mu + \alpha\gamma) u \partial_u) \quad \Gamma_2 \partial_t \quad (6.108)$$

una base de invariantes diferenciales para  $\Gamma_1$  es

$$\bar{t} = ue^{(\mu+\alpha\gamma)t} \quad \bar{u} = (\dot{u} + u\mu + u\alpha\gamma) e^{(\mu+\alpha\gamma)t} \quad (6.109)$$

sustituyendo tenemos que (6.66) se transforma en

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} = \frac{\bar{u} + \bar{t}^2}{\bar{t}} \quad (6.110)$$

e integrando, tenemos

$$\bar{u} = a_1 \bar{t} + \bar{t}^2 \quad (6.111)$$

sustituyendo tenemos la EDO

$$\dot{u} = \frac{u(-e^{(\alpha\gamma+\mu)t}(\alpha\gamma+\mu+u) + a_1)}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t}} \quad (6.112)$$

cuya solución general esta dada por

$$u = \frac{a_1}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t} \left( e^{\frac{a_1}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t}(\alpha\gamma+\mu)}} a_1 a_2 - 1 \right)} \quad (6.113)$$

por tanto la solución general para el sistema es

$$S = \frac{\left( e^{(\alpha\gamma+\mu)t} \left( e^{\frac{a_1}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t}(\alpha\gamma+\mu)}} a_1 a_2 - 1 \right) (\gamma-1)\alpha - a_1 \right) \mu}{\left( e^{(\alpha\gamma+\mu)t} \left( e^{\frac{a_1}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t}(\alpha\gamma+\mu)}} a_1 a_2 - 1 \right) (\alpha\gamma+\mu)(\gamma-1) \right) \alpha} \quad (6.114)$$

$$V = \frac{e^{(\alpha\gamma+\mu)t} \alpha^2 \gamma (\gamma-1) - a_1 \mu}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t} (\alpha\gamma+\mu) (\gamma-1) \alpha} \quad (6.115)$$

$$I = \frac{\frac{a_1}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t} (\alpha\gamma+\mu)} a_1^2 a_2 \mu}{\left( e^{(\alpha\gamma+\mu)t} \left( e^{\frac{a_1}{e^{(\alpha\gamma+\mu)t}(\alpha\gamma+\mu)}} a_1 a_2 - 1 \right) (\alpha\gamma+\mu)(\gamma-1) \right) \alpha} \quad (6.116)$$

### 6.2.2. ¿Qué información obtenemos del análisis de simetrías?

Estudiaremos con más detalle las soluciones que hallamos en la sección anterior para los casos **1** y **5**. Supongamos que existe un programa de control de la enfermedad en el núcleo activo. Graficaremos las soluciones obtenidas para distintos valores de los parámetros  $\beta$  y  $\psi$  y para distintas condiciones iniciales. La intuición parece indicar que a bajas tasa de transmisión y altas tasas de educación implicarían un decrecimiento en el número de infectados y susceptibles, sin embargo el comportamiento de ciertas infecciones puede ser contraintuitivo, como veremos más adelante.

Tomaremos los siguientes valores numéricos para  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\gamma$

$$\alpha = 4 \quad \mu = 0.2 \quad \gamma = 0.025 \quad (6.117)$$

los demás parámetros los obtenemos a partir del análisis de simetrías. Tomaremos dos tipos de condiciones iniciales

(A) Hay presencia de vacunados y un número muy pequeño de individuos infectados

$$S(0) = 0.9 \quad V(0) = 0 \quad I(0) = 0.1 \quad (6.118)$$

(B) Tenemos presencia de vacunados y un gran número de infectados, poco menos de la mitad

$$S(0) = 0.6 \quad V(0) = 0 \quad I(0) = 0.4 \quad (6.119)$$

Para cada caso tomaremos valores bajo, medio y alto para las tasas de vacunación.

$$\beta \in \{0.3, 3.3, 6\} \quad \psi \in \{0.1, 1, 2\} \quad (6.120)$$

En la figura se muestran los distintos casos para cada juego de parámetros. En color verde se muestran los susceptibles, en rojo los infectados y en azul los vacunados.

Vemos que la campaña de vacunación tiene completo éxito en los casos en que

- Las tasas de transmisión son bajas o de rango medio, la tasa de vacunación es de rango medio y la prevalencia inicial de infectados es alta, como en las gráficas A4 y A5.
- Las tasas de transmisión son altas, la tasa de vacunación tiene rango medio y hay una alta prevalencia de la enfermedad, gráfica B6.
- Las tasas de transmisión son bajas, la tasa de vacunación es alta y hay una prevalencia inicial de infectados baja, gráfica A7.
- Las tasas de transmisión son medias y la tasa de vacunación es alta, sin importar el número inicial de infectados, gráficas A8 y B8.
- Las tasas de transmisión son altas, la tasa de vacunación es alta y el número inicial de infectados es alto, gráfica B9.

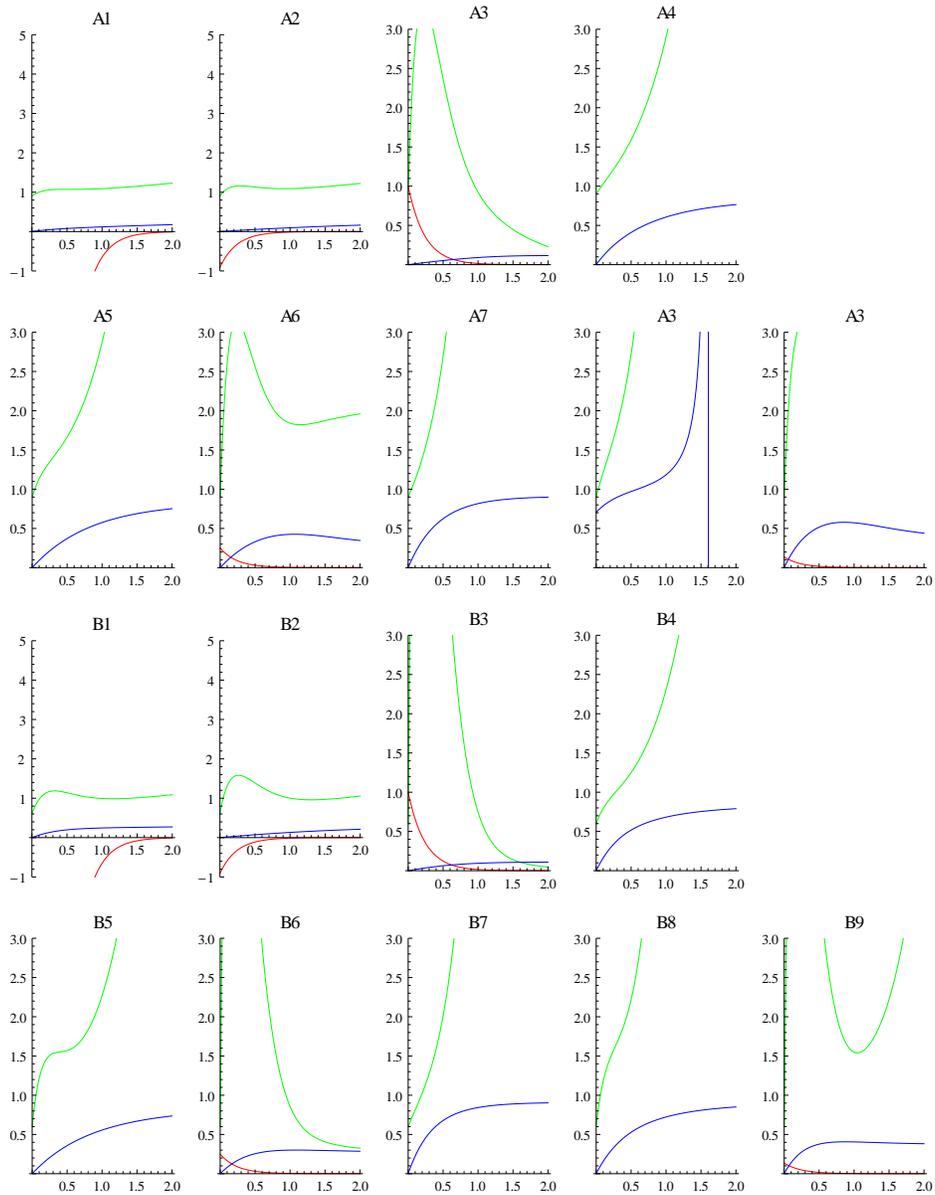


Figura 6.1: Gráficas de las soluciones, para cada conjunto de condiciones iniciales, y cada juego de parámetros.

Tenemos casos donde hay un incremento de susceptibles seguido por un decrecimiento cuando

- Las tasas de transmisión son bajas y la tasa de vacunación es baja. Gráficas A1 y B1.
- Las tasas de transmisión son medias, la tasa de vacunación es baja y el número inicial de infectados es bajo. Gráfica A2.

- Las tasas de transmisión son medias o bajas, la tasa de vacunación es media y el número inicial de infectados es alto. Gráficas B4 y B5.
- Las tasas de transmisión son bajas, la tasa de vacunación es alta y el número inicial de infectados es alto. Gráfica B7.

Cuando tenemos altas o medianas tasas de transmisión, la tasa de vacunación es baja y una alta prevalencia inicial de infectados, tenemos que la enfermedad llega a un equilibrio endémico como en las gráficas B2 y B3. Finalmente en el pero de los casos tenemos un incremento de infectados con un decrecimiento de los susceptibles cuando las tasas de transmisión son altas, la tasa de vacunación es baja o alta y una baja prevalencia inicial de infectados.

### 6.3. Un modelo SIS integrable.

En la presente sección examinaremos un modelo simple SIS, usando el análisis de singularidades de Painlevé<sup>1</sup> y el análisis de simetrías de Lie.

Asumiremos que la recuperaci3n de una enfermedad infecciosa no letal, no confiere inmunidad. El modelo queda dado por un sistema de dos EDO de primer orden.

$$\dot{S} = -\beta SI - \mu S + \gamma I + \mu k \quad (6.121)$$

$$\dot{I} = \beta SI - (\mu + \gamma) I$$

donde  $S$  representa a la poblaci3n susceptible,  $I$  a la poblaci3n infectada,  $\mu$  es la tasa de mortalidad  $\beta$  es un coeficiente de infectividad,  $\gamma$  es una tasa de recuperaci3n y  $\mu k$  representa la tasa promedio de natalidad.

#### 6.3.1. Análisis de Painlevé.

Queremos investigar el comportamiento que lleva al orden de  $S(t)$  e  $I(t)$ , en la EDO (6.121) escribimos

$$S = a\tau^p \quad (6.122)$$

$$I = b\tau^q$$

con  $a, b, p, q$  constantes a determinarse y  $\tau = t - t_0$ , donde  $t_0$  es el tiempo para el cual tenemos una singularidad removible, al sustituir en (6.121) tenemos

$$ap\tau^{p-1} = \beta ab\tau^{p+q} - \mu a\tau^p + \gamma b\tau^q - \mu k \quad (6.123)$$

$$bq\tau^{q-1} = \beta ab\tau^{p+q} - (\mu + \gamma)\tau^q \quad (6.124)$$

de lo anterior deducimos que  $p = q = -1$  y  $-a = b = 1$  de tal manera que el comportamiento que lleva al orden es:

$$S = -\frac{1}{\beta}\tau^{-1} \quad (6.125)$$

$$I = \frac{1}{\beta}\tau^{-1}$$

<sup>1</sup>Consultese el apéndice sobre la propiedad de Painlevé para más detalles.

para determinar la resonancia a la que la segunda constante arbitraria ocurre, hacemos

$$S = -\frac{1}{\beta}\tau^{-1} + m\tau^{r-1}$$

$$I = \frac{1}{\beta}\tau^{-1} + n\tau^{r-1}$$

en los términos dominantes que ya determinamos, tomando los términos lineales en  $m$  y  $n$ , obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0 \quad (6.126)$$

para el cual hay una solución no-trivial si  $r \in \{1, -1\}$ .

Así la segunda constante arbitraria entra en el segundo término de la serie de Laurent para la solución de (6.121). Para verificar la consistencia con los términos no-dominantes bastará sustituir (6.126) en (6.121). En  $\tau^{-1}$  se requiere que

$$0 = -\beta(an + bm) - \mu a + \gamma b \quad (6.127)$$

$$0 = \beta(an + bm) - (\mu + \gamma)b$$

Para los valores dados de  $a$  y  $b$ , las ecuaciones en (6.127) son idénticamente iguales y por tanto, se sigue la consistencia. Podemos tomar a  $m$  como constante arbitraria y hacer

$$n = m - \frac{\mu + \gamma}{\beta} \quad (6.128)$$

El sistema (6.121) pasa la prueba de Painlevé y por lo tanto es integrable en el sentido de Poincaré, es decir en términos de funciones analíticas alejadas de la singularidad removible cuya localización queda determinada por las condiciones iniciales. La serie de Laurent se obtiene sustituyendo

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \tau^{i-1} \quad (6.129)$$

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \tau^{i-1} \quad (6.130)$$

en (6.121).

### 6.3.2. Análisis de simetrías.

Trataremos de llevar nuestro sistema (6.122) a una EDO de segundo orden equivalente. En efecto, de la segunda ecuación se tiene:

$$S = \frac{\dot{I}}{\beta I} + \frac{\mu + \gamma}{\beta} \quad (6.131)$$

sustituyendo en la primera ecuación:

$$I\ddot{I} - \dot{I}^2 + \beta I^2 \dot{I} + \mu I \dot{I} + \beta \mu I^3 + \mu(\mu + \gamma - \beta K) I^2 = 0 \quad (6.132)$$

Observese que (6.132) no posee simetrías de reescalamiento, así que podemos intentar una simplificación, haciendo

$$I = \frac{\mu}{\beta}y \quad t = \frac{x}{\mu} \quad (6.133)$$

y tomando

$$k = 1 + \frac{\gamma - \beta K}{\mu} \quad (6.134)$$

y obtenemos la siguiente EDO no-lineal de segundo orden

$$yy'' - y'^2 + y^2y' + yy' + y^3 + ky^2 = 0 \quad (6.135)$$

(6.135) es integrable, puesto que (6.121) lo es. La ecuación (6.135) es una ecuación autónoma, los invariantes diferenciales de orden 1 y cero quedan dados por dos soluciones independientes de las características asociadas a  $\partial_x$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy'}{0} \quad (6.136)$$

tomamos pues

$$u = y \quad v = y' \quad (6.137)$$

la forma reducida de (6.135) es

$$uv \frac{dv}{du} - v^2 + (u^2 + u)v + u^3 + ku^2 = 0 \quad (6.138)$$

la cual es una ecuación de Abel de segunda especie y por tanto no posee una solución en forma cerrada.

La transformación  $\Gamma_1 = \partial_x$  es la única simetría puntual que admite la ecuación (6.135) para valores arbitrarios de  $k$ . A continuación probamos qué pasa si restringimos los parámetros de la ecuación. Si proponemos los casos  $\beta = 0$  y  $\beta \neq 0$  estaríamos eliminando información sobre el término más importante de la ecuación, es decir la interacción. Por otro lado podemos proponer los casos  $\gamma = \beta K$  y  $\gamma \neq \beta K$  esta elección de casos no afecta la condición de integrabilidad del sistema e introduce una segunda simetría puntual

$$\Gamma_2 = e^{\mu t} (\partial_t - \mu I \partial_I) \sim e^x \partial_x - y \partial_y \quad (6.139)$$

Nótese que

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = \mu \Gamma_2 \quad (6.140)$$

Así que supondremos que la reducción de (6.135) debe hacerse por medio de  $\Gamma_2$ , con lo cual se lleva a la ecuación a una de segundo orden de tipo III<sup>2</sup> la ecuación de las características para este operador es

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-y} = \frac{dy'}{-2y' - y} \quad (6.141)$$

de tal forma que

$$u = ye^x \quad v = \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} \quad (6.142)$$

Ahora escribimos  $\partial_x$  en estas nuevas coordenadas

$$u \partial_u \quad (6.143)$$

---

<sup>2</sup>Los detalles de la clasificación se dieron en el capítulo anterior.

proponemos entonces el siguiente cambio de variables

$$X = \log y + x \quad Y = \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} \quad (6.144)$$

y obtenemos la siguiente EDO autónoma

$$\frac{dY}{dX} + Y + 1 = 0 \quad (6.145)$$

integrando obtenemos

$$(Y + 1)e^X = B \quad (6.146)$$

recuperando las variables originales  $x, y$

$$\frac{y'}{y} + 1 + y = Be^x \quad (6.147)$$

la cual es una ecuación de Riccati, integrando<sup>3</sup> se tiene

$$y = \frac{BCe^{-x}}{Ae^{Be^{-x}} + C} \quad (6.148)$$

A pesar de que (6.135) posee un lagrangiano<sup>4</sup> no puede determinarse fácilmente, por otro lado  $\partial_x$  podría ser una simetría de Noether.

Podemos no imponer restricciones en la dependencia funcional de los coeficientes en

$$\Gamma = \xi \partial_x + \eta \partial_y \quad (6.149)$$

y anularemos alguno de los coeficientes para reducir la complejidad de los cálculos, por conveniencia tomemos  $\eta = 0$ <sup>5</sup>, la segunda extensión del grupo es

$$\Gamma_{\{2\}} = \xi \partial_x - y' \xi \partial_{y'} - (2y'' \xi' + y' \xi'') \partial_{y''} \quad (6.150)$$

aplicando a (6.135) obtenemos

$$y^2 \xi'' + \xi' (2yy'' - 2y'^2 + y'(y^2 + y)) = 0 \quad (6.151)$$

integrando formalmente tenemos

$$\xi = A + B \int \frac{e^{-y \frac{2y'}{y}} dx}{y} \quad (6.152)$$

el coeficiente  $A$  nos lleva a la simetría trivial  $\partial_x$ , mientras que el coeficiente  $B$  nos lleva a una simetría no local.

Ahora para no meternos en más líos, proponemos aumentar el orden de la ecuación, por medio de la transformación de Riccati

$$y = \rho \frac{w'}{w} \quad (6.153)$$

donde  $\rho$  es constante, cuando aplicamos (6.153) a (6.135) y tomando  $\rho = 1$  obtenemos

$$ww''' - w''^2 + w'w'' + kw^2 = 0 \quad (6.154)$$

<sup>3</sup>Usando las técnicas vistas en el capítulo 4.

<sup>4</sup>Puesto que se trata de una EDO escalar de segundo orden

<sup>5</sup>La elección de  $\xi = 0$  nos llevaría a una EDO de segundo orden que parece ser más complicada.

que es una EDO de tercer orden que admite las siguientes simetrías

$$\Gamma_1 = \partial_x \quad \Gamma_2 = \partial_w \quad \Gamma_3 = w\partial_w \quad (6.155)$$

Obsérvese que  $\Gamma_2$  no tiene contraparte entre las simetrías de (6.135), así que la usaremos para tratar de reducir el orden la (6.154). Proponemos el cambio de variables

$$X = x \quad W = \log w' \quad (6.156)$$

sustituyendo obtenemos

$$W'' + W' + k = 0 \quad (6.157)$$

la cual podemos interpretar como una EDO de primer orden en  $w'$

En consecuencia

$$\begin{aligned} W(X) &= -kX \log A + Be^{-X} \\ w(x) &= A \int e^{(-kx + Be^{-x})} dt + C \\ y(x) &= \frac{Ae^{(-kx + Be^{-x})}}{A \int e^{(-kx + Be^{-x})} dt + C} \end{aligned} \quad (6.158)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias de integración. Ahora podemos reconstruir la solución general para el sistema original

$$I(t) = \frac{1}{\beta} \frac{Ae^{-(\mu+\gamma-\beta k)t + Be^{-\mu t}}}{A\mu \int e^{-(\mu+\gamma-\beta k)t + Be^{-\mu t}} dt + C} \quad (6.159)$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\mu + \gamma}{\beta} + \frac{1}{\beta} \frac{Ae^{-(\mu+\gamma-\beta k)t + Be^{-\mu t}}}{A\mu \int e^{-(\mu+\gamma-\beta k)t + Be^{-\mu t}} dt + C} (\mu + \gamma - \beta k - \mu Be^{-\mu t} + \\ &\quad \left. \frac{1}{\beta} \frac{Ae^{-(\mu+\gamma-\beta k)t + Be^{-\mu t}}}{A\mu \int e^{-(\mu+\gamma-\beta k)t + Be^{-\mu t}} dt + C} \right) \end{aligned} \quad (6.160)$$

Para terminar hay que hacer notar tres cuestiones

1. La ecuación (6.157) es una EDO lineal, por tanto acepta un álgebra de Lie de dimensión 8

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial_w \\ \Gamma_2 &= e^x (\partial_x - k\partial_w) \\ \Gamma_3 &= \partial_w \\ \Gamma_4 &= e^{-x} \partial_w \\ \Gamma_5 &= -e^{-x} (\partial_x + (w - 3kx)\partial_w) \\ \Gamma_6 &= (w + kx)\partial_w \\ \Gamma_7 &= (w + kx)\partial_x + (4k^2x - 2kxw - w^2)\partial_w \\ \Gamma_8 &= e^x (w + kx)(\partial_x - k\partial_w) \end{aligned} \quad (6.161)$$

$$(6.162)$$

2. La transformación que relaciona a (6.135) con (6.157) es

$$W = \log y + \int y dx \quad (6.163)$$

3. Obsérvenos que  $\Gamma_2$  no es local para valores arbitrarios de  $k$ , pero para  $k = 1$  y  $\gamma = \beta K$  se recupera la simetría (6.139).

## 6.4. Un modelo SIR.

Consideremos el modelo de Kermack-McKendric para la Gran Plaga de Londres(1665-1666).

$$\dot{S} = -\beta SI \quad (6.164)$$

$$\dot{I} = \beta SI - \alpha I \quad (6.165)$$

$$\dot{R} = \alpha I \quad (6.166)$$

en este modelo,  $S$  representa la porción de la población que es susceptible a contraer la enfermedad,  $I$  la población que está infectada con la enfermedad y  $R$  es la población “removida”, que ha obtenido resistencia a la enfermedad o bien ha muerto a causa de ella. Los susceptibles sucumben a la enfermedad a una tasa proporcional a la interacción entre susceptibles e infectados. La escala de tiempo característica de la enfermedad es tal que la dinámica de nacimientos-mortandad puede ser ignorada.

### 6.4.1. Análisis de singularidades.

Para determinar el comportamiento que lleva al orden hacemos:

$$S = a\tau^p \quad I = b\tau^q \quad (6.167)$$

y sustituimos en (6.164) y (6.165) para obtener

$$ap\tau^{p-1} = -\beta ab\tau^{p+q} \quad bq\tau^{q-1} = \beta ab\tau^{p+q} - \alpha b\tau^q \quad (6.168)$$

Balanceando las potencias entre los términos que se obtienen al derivar y la parte no lineal de cada ecuación, se tiene que

$$p = q = -1 \quad a = -\frac{1}{\beta} \quad b = \frac{1}{\beta} \quad (6.169)$$

Encontramos las resonancias al sustituir

$$S = a\tau^{-1} + \mu\tau^{r-1} \quad I = b\tau^{-1} + \nu\tau^{r-1} \quad (6.170)$$

es decir, las resonancias son  $r \in \{1, -1\}$  y  $\nu = -\mu$ . Al sustituir (6.170) en el sistema original, tenemos una incompatibilidad, salvo en el caso en el que  $\alpha = 0$ , es decir el caso en el que no hay remociones de la clase de infectados, lo cual puede sugerir que en realidad el modelo no es lo más adecuado para modelar una enfermedad como la Gran Plaga de Londres.

### 6.4.2. Análisis de simetrías.

Sólo por completez consideraremos el análisis de simetrías del modelo. Eliminaremos  $I$  para poder obtener la siguiente ecuación ordinaria de segundo orden

$$S\ddot{S} - \dot{S}^2 - \beta S^2 \dot{S} + \alpha S \dot{S} = 0 \quad (6.171)$$

$$I = -\frac{\dot{S}}{\beta S}$$

observamos que para (6.171) también falla la prueba de Painlevé, salvo para el caso en el que  $\alpha = 0$ , ahora aumentaremos el orden de la ecuación utilizando una transformación de Riccati. En efecto, para  $\alpha = 0$  obtenemos una ecuación de Kummer-Schwarz generalizada

$$\dot{w}\ddot{w} - \dot{w}^2 = 0 \quad (6.172)$$

$$S = -\frac{\dot{w}}{\beta w}$$

observese que aparece el mismo factor que en el análisis de Painlevé  $\frac{1}{\beta}$ , el sistema (6.171) es integrable en el sentido de Lie, puesto que posee dos simetrías puntuales obvias  $\partial_t$  y  $t\partial_t + S\partial_S$ . Al incrementar el orden, encontramos cuatro simetrías puntuales  $\partial_t$ ,  $t\partial_t$ ,  $\partial_w$  y  $w\partial_w$ .

Aquí sucede algo inesperado, si tratamos de reducir (6.172) a (6.171), utilizando  $w\partial_w$ , el operador  $\partial_w$  deja de ser una simetría puntual y se convierte en una simetría exponencial no-local  $Se^{\beta S \text{d}t}\partial_S$  y por lo tanto  $\partial_w$  es una simetría oculta de tipo **I**.<sup>6</sup>

Usando  $\partial_w$  para reducir el orden de 6.172, obtenemos la ecuación ordinaria de segundo orden

$$\ddot{v} = 0 \quad v = \log \dot{w} \quad (6.173)$$

La ecuación 6.173 tiene ocho simetrías puntuales, con el álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ .

### 6.4.3. Un caso más realista.

Ahora consideremos un modelo más detallado en el que se considera el efecto de la muerte natural y el desarrollo de inmunidad contra la enfermedad

$$\dot{S} = \mu K - \beta SI - \mu S \quad (6.174)$$

$$\dot{I} = \beta SI - (\mu + \alpha + \gamma) I \quad (6.175)$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R \quad (6.176)$$

en este nuevo modelo, las variables  $S$ ,  $I$ ,  $R$  y los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  tienen el mismo significado que en el modelo anterior  $\mu K$  es la tasa constante de crecimiento de la población,  $\gamma$  es la tasa de recuperación de la enfermedad y  $\mu$  es la tasa de muertes que no están relacionadas con la enfermedad. El análisis es completamente análogo. Observamos que el sistema (6.174)-(6.176) es integrable en el sentido de Painlevé para  $\alpha + \gamma = 0$ . Si tomamos

$$w_1 = S + I \quad w_2 = I \quad (6.177)$$

<sup>6</sup>Para esta clasificación de simetrías ocultas, consúltese el apéndice 3.

llevamos nuestro sistema al siguiente

$$\dot{w}_1 = \mu K - \mu w_1 - (\alpha + \gamma) w_2 \quad (6.178)$$

$$\dot{w}_2 = -(\mu + \alpha + \gamma) w_2 + \beta w_1 w_2 - \beta w_2^2 \quad (6.179)$$

Cuando  $\alpha + \gamma = 0$  el sistema se desacopla

$$\dot{w}_1 = \mu K - \mu w_1 \quad (6.180)$$

$$\dot{w}_2 = -\mu w_2 + \beta w_1 w_2 - \beta w_2^2 \quad (6.181)$$

La ecuación (6.180) es integrable de manera trivial en términos de una función exponencial, la cual es analítica, con esta solución, (6.181) se convierte en una Riccati, la cual puede reducirse a una ecuación lineal de primer orden en  $\dot{w}$  utilizando la transformación  $w_2 = \frac{\dot{w}}{\beta w}$ . Solo falta hacer notar que el sistema cumple la propiedad de Painlevé si ningún infectado muere a causa de la enfermedad y esta no genera inmunidad entre los recuperados.

## 6.5. Un modelo para la tuberculosis con dinámicas rápida y lenta.

En el siguiente modelo se estudia la dinámica de la infección de tuberculosis en dos vías, contactos cercanos en hogares casi-permanentes y contactos casuales con la población en general, esto lleva a considerar escalas de tiempo diferenciadas. Consecuencia de estas observaciones es el sistema que originalmente plantearon Castillo-Chavez y Song [CCS02].

Primero se asume que la población total se divide en cuatro compartimentos los susceptibles  $S$ , los latentes o expuestos  $E$ , los infectados  $I$  y los recuperados por el tratamiento  $R$ . Para enfermedades con un periodo de latencia como la tuberculosis, la forma general del modelo es la siguiente:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \beta_1 S \frac{1}{N} \quad (6.182)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta_1 D \frac{1}{N} - (\mu + k + r_1) E - \beta_2 E \frac{1}{N} + \beta_3 R \frac{1}{N} \quad (6.183)$$

$$\frac{dI}{dt} = kE + \beta_2 E \frac{1}{N} - (\mu + d + r_2) I \quad (6.184)$$

$$\frac{dR}{dt} = r_2 I + r_1 E - \mu R - \beta_3 R \frac{1}{N} \quad (6.185)$$

Donde  $\Lambda$  es la tasa de reclutamiento,  $\mu$  es la tasa de mortalidad natural,  $d$  es la tasa de mortalidad asociada a la tuberculosis,  $r_1$  y  $r_2$  son las tasas de tratamiento para los individuos latentes e infectados respectivamente.  $N = S + E + I + R$  es la población total.

Pero podemos dar un acercamiento distinto. Asumiremos que sólo los individuos que tienen interacciones largas y frecuentes con individuos infectados, experimentan un alto riesgo de infección. Los nuevos infectados tienen cierto grupo social de influencia <sup>7</sup>, para cuyos miembros aumenta el riesgo de infección de tuberculosis. Se sabe que hay  $8 \times 10^6$  nuevos casos de tuberculosis activa anuales en el mundo, esto sugiere que, por la escala, cada grupo social de influencia contiene a un único individuo infectado.

Suponemos que el tamaño promedio de un grupo de influencia es  $n$ , el riesgo de contraer la enfermedad, dentro del grupo tiene una distribución exponencial con parámetro  $\beta$ , la prevalencia de tuberculosis activa

<sup>7</sup>Castillo-Chavez y Fong, los llaman "clusters", y los describen como grupos de individuos que tienen contacto cercano y regular con enfermos activos.

es  $\frac{I}{N}$  que es típicamente baja, el número de personas infectadas dentro de un grupo es  $N_0(t) \approx (n+1)I(t)$  y los que aun no estan infectados son  $N_1(t) \approx nI(t)$  y adicionalmente, tenemos que  $N_1(t) = S_1(t) + E_1(t)$ . Por otro lado, la población fuera del grupo de influencia es  $N_2(t) = S_2(t) + E_2(t)$ . Los latentes fuera del grupo, desarrollan la enfermedad a una tasa de  $kE_2$ , cada individuo infectado inducirá de esta forma un nuevo grupo de influencia. El modelo queda dado por el sistema:

$$\frac{dS_1}{dt} = -(\beta + \gamma)S_1 + \frac{S_2}{N_2}KnE_2 \quad (6.186)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \beta S_1 - \gamma E_1 + \frac{E_2}{N_2}knE_2 \quad (6.187)$$

$$\frac{dI}{dt} = kE_2 - \gamma I \quad (6.188)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \Lambda - \mu S_2 + \gamma S_1 - \frac{S_2}{N_2}knE_2 \quad (6.189)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \gamma E_1 - (\mu + k)E_2 - \frac{E_2}{N_2}knE_2 \quad (6.190)$$

donde  $\Lambda$  es la tasa de reclutamiento,  $\mu$  es la tasa de muertes no asociadas a la enfermedad,  $n$  es el tamaño promedio del grupo de influencia, los parámetros  $\beta_i$  son las tasas de transmisión

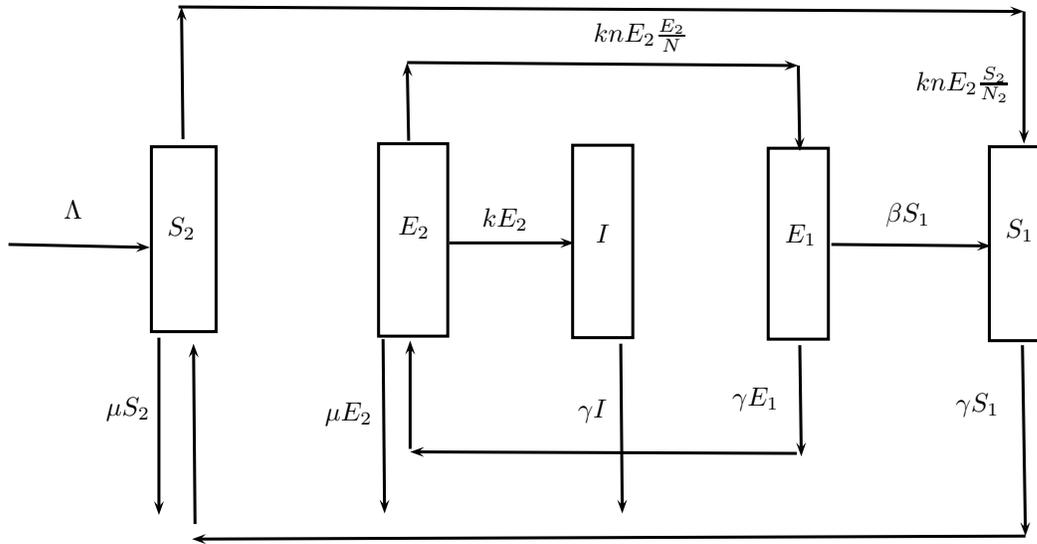


Figura 6.2: Diagrama de flujo del modelo tipo "cluster".

Como mencionamos antes, este modelo distingue dos tiempos característicos, dentro del grupo de influencia la dinámica es rápida, mientras que fuera de él la dinámica es lenta. Reescalamos el modelo (6.186)-(6.190) utilizando  $\tau = kt$ , mientras que  $S_2$  y  $E_2$  quedan reescaladas usando el tamaño asintótico de la población

$\Omega = \frac{1}{\mu}$  y  $N_1$  se reescala mediante el factor de balance  $\frac{k}{\beta + \gamma\Omega}$ . Las nuevas variables adimensionales son

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{S_2}{\Omega} & x_2 &= \frac{E_2}{\Omega} & y_1 &= \frac{\beta + \gamma}{k} \left( \frac{S_1}{\Omega} \right) \\ y_2 &= \frac{\beta + \gamma}{k} \left( \frac{E_1}{\Omega} \right) & y_3 &= \frac{\beta + \gamma}{k} \left( \frac{I}{\Omega} \right) \end{aligned}$$

el modelo queda reescrito en las nuevas variables

$$\frac{dx_1}{d\tau} = B(1 - x_1) + (1 - m)y_1 - n \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \quad (6.191)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = (1 - m)y_2 - (1 - B)x_2 - n \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} \quad (6.192)$$

$$\varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} = -y_1 + n \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \quad (6.193)$$

$$\varepsilon \frac{dy_2}{d\tau} = my_1 - (1 - m)y_2 + n \frac{x_2^2}{x_1 + x_2} \quad (6.194)$$

$$\varepsilon \frac{dy_3}{d\tau} = x_2 - (1 - m)y_3 \quad (6.195)$$

donde  $\varepsilon = \frac{k}{\beta + \gamma} \ll 1$ ,  $m = \frac{\beta}{\beta + \gamma} < 1$ ,  $B = \frac{\mu}{k}$ . Las  $y_i$  son variables rápidas, mientras que las  $x_i$  son las variables lentas.

Podemos reescribir las variables rápidas en términos de las lentas

$$y_1(t) = n \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \quad (6.196)$$

$$y_2(t) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} \frac{Q_0 x_1 + n x_2}{1 - m} \quad (6.197)$$

$$y_3 = \frac{x_2}{1 - m} \quad (6.198)$$

Sustituyendo en la parte del sistema que describe la variedad “lenta”, tenemos el sistema simplificado

$$\frac{dx_1}{d\tau} = B(1 - x_1) - Q_0 \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \quad (6.199)$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -(1 - B)x_2 - Q_0 \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \quad (6.200)$$

donde  $Q_0 = \frac{\beta n}{\beta + \gamma}$  es el número de infecciones secundarias producidas por un individuo en una población de susceptibles.

Reescribimos ahora (6.199)-(6.200) de la siguiente manera

$$(x_1 + x_2) \frac{dx_1}{d\tau} = B(1 - x_1) - Q_0 x_1 x_2 \quad (6.201)$$

$$(x_1 + x_2) \frac{dx_2}{d\tau} = -(1 - B)x_2 - Q_0 x_1 x_2 \quad (6.202)$$

de esta manera, es relativamente nos damos cuenta que el sistema no cumple la propiedad de Painlevé. Usemos la transformación

$$u = -\frac{1}{w} \quad (6.203)$$

obtenemos al ecuación

$$\begin{aligned} w\ddot{w} + (Q_0 - 2)\dot{w}^2 &= (2B + 1)(Q_0 - 1)w\dot{w} + 2BQ_0w^2\dot{w} \\ &\quad - B((B + 1)(Q_0 - 1)w^2 + ((B + 1)(Q_0 - 1) + BQ_0)w^3 + BQ_0w^4) \end{aligned} \quad (6.204)$$

el comportamiento que lleva al orden es  $-(\beta\tau)$ , al calcular las resonancias, los parámetros  $B$  y  $Q_0$  desaparecen,  $r \in \{1.0\}$  y debemos introducir consecuentemente un término logarítmico, la búsqueda de una solución analítica parece vana.

El análisis de simetrías nos indica que hay simetrías puntuales no triviales para

$$Q_0 = B + 1 \quad (6.205)$$

En el caso general tenemos dos simetrías

$$\Gamma_1 = \partial_\tau \quad \Gamma_2 = e^{-B\tau(\partial_{\tau u} - Bu\partial_u)} \quad (6.206)$$

Notemos que  $[\Gamma_1, \Gamma_2] = -B\Gamma_2$  y  $\Gamma_1 \propto \rho(\tau, u)\Gamma_2$ , entonces la ecuación

$$u\ddot{u} - (B + 1)\dot{u}^2 = B(2B + 1)u\dot{u} - 2Bu^2\dot{u} - B^2(B + 1)(u + 1)^2 \quad (6.207)$$

es una de tipo **III** y podemos transformarla en

$$y'' = \frac{-(B + 1)(y' - 1)^2 y'}{x} \quad (6.208)$$

utilizando la transformación puntual

$$x = ue^{B\tau} \quad (6.209)$$

$$y = e^{B\tau} \quad (6.210)$$

podemos integrar (6.208) y obtenemos

$$\left(1 - \frac{1}{y'}\right) e^{\frac{1}{y'-1}} = kx^{B+1} \quad (6.211)$$

Por otro lado podemos reducir el sistema original a una ecuación de primer orden, eliminando la variable independiente

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{B(x_1 + x_2) - Bx_1^2 - (B + Q_0)x_1x_2}{(Q_0 - B - 1)x_1x_2 - (B + 1)x_2^2} \quad (6.212)$$

observese que si restringimos  $Q_0 = B + 1$  tenemos otra simetría puntual para el sistema, la ecuación de segundo orden puede reducirse a una Riccati

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{(B + 1)x_2^2} (Bx_1^2 + (2B - 1)x_1x_2 - B(x_1 + x_2)) \quad (6.213)$$

podemos llevar a (6.213) a una lineal de segundo orden

$$x_2^3 w'' \left( \frac{3B+2}{B(B+1)x_2^2} + \frac{B}{B+1} x_2 \right) w' + w = 0 \quad (6.214)$$

donde

$$x_1 = - \left( \frac{B+1}{B} \right) x_2^2 \frac{w'}{w} \quad (6.215)$$

y usando la ecuación

$$\xi \zeta'' \left( \frac{(2B+1)(B+2)}{B(B+1)} \xi + \frac{B}{B+1} \xi \right) \zeta' + \zeta = 0 \quad (6.216)$$

donde

$$\xi = \frac{1}{x_2} \quad \zeta(\xi) = w(x_2) \quad (6.217)$$

Ya hemos visto que  $Q_0 = B+1$  esta relacionado con la linealidad. Notemos que además  $x_2$  es una función analítica de  $x_1$ , salvo singularidades aisladas. A partir de esta información podemos obtener una solución general, para valores generales de  $B$  la solución esta dada en términos de funciones de Whittaker.

Puesto que (6.213) es una ecuación de Riccati, satisface la condición de Painlevé, pues  $x_1$  es una función analítica de  $x_2$  salvo polos simples. Tenemos pues una situación peculiar donde las variables dependientes están relacionadas analíticamente aunque ninguna de ellas es una función analítica de la variable independiente.

## 6.6. Algunos comentarios finales.

A lo largo de este capítulo hemos descrito varios ejemplos de aplicación de los métodos de simetría en el contexto de la modelación matemática de enfermedades epidémicas, en los últimos ejemplos hicimos uso del análisis de Painlevé para verificar la integrabilidad del sistema <sup>8</sup>. Los resultados obtenidos son los que uno podría esperar cuando se le impone al modelo la condición de integrabilidad, pues esta condición impone a su vez restricciones sobre los parámetros.

Una posible objeción a esta propuesta es que en general los modelos que aparecen en la modelación de fenómenos biológicos no necesariamente son integrables, sin embargo, como se mostró en este capítulo, a través de distintos ejemplos, los métodos de análisis de Lie y de Painlevé pueden darnos información importante sobre el problema.

Los métodos de simetrías son quizás la herramienta más potente con la que se puede contar al momento de analizar un modelo basado en ecuaciones diferenciales, sin embargo no carece de deficiencias, por ello, aunque constituyen métodos de aplicación sumamente general, no deben tomarse más que como una herramienta más, que complementa el conocimiento que podríamos obtener con los métodos cualitativos, propios de la teoría de los sistemas dinámicos y aquella obtenida de las simulaciones numéricas.

---

<sup>8</sup>Sobre la relación entre intregabilidad y la propiedad de Painleve, vease el **Apéndice A**

## Apéndice A

# Integrabilidad y la propiedad de Painlevé.

La conexión entre la integrabilidad de ecuaciones diferenciales y la estructura de singularidades de sus soluciones fue descubierta primero por Sofía Kowalewski, en sus trabajos sobre movimiento de cuerpos bajo la acción de la gravedad de un cuerpo sólido al rededor de un punto fijo, la aportación de Sofía Vasilievna Kowalevskaya a la solución de este problema fue mostrar que el sistema podía ser resuelto de manera explícita siempre que las variables dependientes fueran funciones meromorfas del tiempo extendidas en todo  $\mathbb{C}$ . Haciendo expansiones de Laurent al rededor de las singularidades pudo dividir el problema en dos casos previamente conocidos debidos a Euler y Lagrange.



Figura A.1: Sofía Kovalevskaya.

La solución general de una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  puede tener sólo singularidades fijas en el plano complejo, mientras que para las ecuaciones no lineales, se admiten también singularidades móviles que dependen de las condiciones iniciales.

**Ejemplo 40.** *Considere la ecuación no lineal de primer orden*

$$\frac{dy}{dz} + y^2 = 0 \tag{A.1}$$

tiene como solución general a

$$y = \frac{1}{z - z_0} \quad (\text{A.2})$$

con un polo simple removible en  $z = z_0$ . Si la condición inicial  $y = y_0$  se especifica en  $z = 0$ , entonces la posición del polo simple varía conforme a

$$z_0 = -\frac{1}{y_0} \quad (\text{A.3})$$

La clasificación de EDO en términos de su estructura de singularidades fue iniciada por Paul Painlevé (1863-1933). La principal propiedad que Painlevé buscó en ecuaciones diferenciales, fue el que sus soluciones fueran univaluadas al rededor de las singularidades removibles. Una formulación moderna es

**Definición 27 (Propiedad de Painlevé para EDO.).** Decimos que una EDO cumple la propiedad de Painlevé (es Painlevé-integrable) si todas las singulares removibles de todas sus soluciones son polos.



Figura A.2: Paul Painlevé

Painlevé probó que para una EDO

$$\frac{dy}{z} = \frac{P(z, y)}{Q(z, y)} \quad (\text{A.4})$$

donde  $P$  y  $Q$  son funciones polinomiales de  $y$  y funciones analíticas de  $z$ , las únicas singularidades removibles son polos y puntos de ramificación.

Painlevé mostró que la EDO de primer orden más general que cumplía con tal propiedad es la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dz} = a_2 y^2 + a_1 y + a_0 \quad (\text{A.5})$$

donde los coeficientes  $a_i$  son funciones analíticas de  $z$ .

Para las ecuaciones de segundo orden, las cosas son un poco más complicadas, pues pueden existir singularidades esenciales móviles. Painlevé inició la clasificación de las EDO de segundo orden de la forma

$$y'' = F(z, y, y'') \quad (\text{A.6})$$

donde  $F$  es una función racional de  $y'$  y  $y$ , y una función analítica de  $z$ . Painlevé y sus contemporáneos tuvieron éxito en clasificar las EDO de tipo (A.6) que cumplen los requisitos de la definición 27. El resultado

completo consta de una lista de 50 ecuaciones representativas, únicas salvo transformaciones de Möbius, además se encontró que, después de un cambio adecuado de variables, todas estas ecuaciones admiten soluciones generales en términos de funciones especiales o funciones elípticas, salvo por seis ecuaciones especiales conocidas como Painlevé *I-VI*. Para la clasificación de EDO de orden más alto las cosas se vuelven cada vez más complicadas, en este trabajo usamos solamente el análisis de Painlevé para ecuaciones de segundo orden, pero el lector interesado puede consultar [Her98] y [Pie99]

## A.1. Grupos de simetría para la propiedad de Painlevé.

En la clasificación suficiente tomar una ecuación representante para toda una clase de equivalencia. Tenemos dos relaciones de equivalencia.

El primer grupo de invarianza es el llamado grupo homográfico, que no es otra cosa que el grupo de simetrías de la ecuación de Riccati. Como conserva la razón cruzada de cuatro puntos, su uso práctico consiste en que dada una EDO con tres polos  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ ,  $p_3(x)$  puede llevarse a una EDO equivalente cuyos polos sean  $\infty$ , 0, 1.

El segundo grupo es el grupo de las transformaciones birracionales

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= R(\tilde{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(n)}) = 0 \\ \tilde{x} &= \xi(x)\end{aligned}\tag{A.7}$$

donde la función  $R$  es racional en  $\tilde{u}$ ,  $u$  y sus derivadas y analítica en  $x$  y  $\tilde{x}$ .

Este grupo admite como subgrupo al grupo de transformaciones homográficas. Existen otros grupos de simetrías para EDO no lineales que no preservan la propiedad de Painlevé, típicamente las transformaciones puntuales.

## A.2. Ecuaciones de Painlevé.

Las seis ecuaciones de tipo Painlevé son las siguientes.

$$I \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 6y^2 + t \tag{A.8}$$

$$II \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 2y^3 + ty + \alpha \tag{A.9}$$

$$III \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = t \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - y \frac{dy}{dt} + \delta t + \beta y + \alpha y^3 + \gamma t y^4 \tag{A.10}$$

$$IV \quad y \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \beta + 2(t^2 - \alpha)y^2 + 4ty^3 + \frac{3}{2}y^4 \tag{A.11}$$

$$V \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} \tag{A.12}$$

$$+ \frac{(y-1)^2}{t^2} \left( \alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{t} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1} \tag{A.13}$$

$$VI \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) \frac{dy}{dt} \quad (\text{A.14})$$

$$+ \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left( \alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right) \quad (\text{A.15})$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . Más detalles sobre la invarianza de las ecuaciones de Painlevé puede consultarse en [Con08]

### A.3. Análisis de Painlevé para EDO.

Consideremos una EDO, si ésta cumple la propiedad de Painlevé, entonces sus soluciones deberán admitir expansiones de Laurent al rededor de  $z = z_0$ . Si ocurrieran ramificaciones, pueden detectarse haciendo un análisis local. El test de Painlevé para EDO consiste en los siguientes pasos.

**Paso 1** Identificar todos los posibles comportamientos que lleven al orden, es decir las singularidades de la forma

$$y \approx c_0(z - z_0)^\mu \quad (\text{A.16})$$

**Paso 2** Si todos los  $\mu$  son enteros, hallar las resonancias, donde pueden aparecer constantes arbitrarias.

**Paso 3** Si todas las resonancias son enteras, verificar la condición de resonancia en cada expansión de Laurent.

**Paso 4** Si no se encuentra ningún impedimento en los pasos **1-3** para cada comportamiento que lleva al orden, entonces la propiedad de Painlevé se satisface.

# Bibliografía

- [A.11] Cohen A. *An introduction to the Lie theory of one parameter groups*. D.C. Heath and Co, 1911.
- [Bau00] G. Baumann. *Symmetry Analysis of Differential Equations With Mathematica*. Springer Verlag, 2000.
- [BK89] G.W. Bluman and S Kumei. *Symmetries and Differential Equations*. Applied mathematical sciences 81. Springer Verlag, 1989.
- [Boo86] W. M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press, 1986.
- [Can02] Brian J. Cantwell. *Introduction to symmetry analysis*. Cambridge University press, 2002.
- [Cap93] V. Capasso. *Mathematical Structures of Epidemic Systems*. Lecture Notes in Biomathematics. Springer Verlag, 1993.
- [CCH95] C. Castillo-Chavez and K. P. Hadeler. A Core Group Model for Disease Transmission. *MATHEMATICAL BIOSCIENCES*, (128):41–55, 1995.
- [CCS02] C. Castillo-Chavez and B. Song. Tuberculosis Models with fast and slow dynamics. *MATHEMATICAL BIOSCIENCES*, (180):187–205, 2002.
- [Con08] M Conte, R.and Musette. *The Painlevé Handbook*. Springer Verlag, 2008.
- [Eis61] L.P. Eisenhart. *Continuous groups of transformations*. Dover, 1961.
- [Gil74] R. Gilmore. Lie groups, Lie algebras, and some of their applications. 1974.
- [Her76] R. Hermann. *Sophus Lie' s 1884 differential invariant paper*. Math Sci Press, 1976.
- [Her98] Willy Hereman. The Painlevé Integrability Test, 1998.
- [HH00] P.E. Hydon and P.E. Hydon. *Symmetry methods for differential equations: a beginner's guide*, volume 22. Cambridge Univ Pr, 2000.
- [Hyd98] Peter E. Hydon. How to find discrete contact symmetries. Technical Report JNMP 4/2002 (Article), October 1998.
- [I+96a] N.H. Ibragimov et al. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 2*. CRC Press, 1996.

- [I<sup>+</sup>96b] N.H. Ibragimov et al. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3.* CRC Press, 1996.
- [Ibr99] N.H. Ibragimov. *Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations.* Wiley-Interscience, 1999.
- [Ibr04] N.H. Ibragimov, editor. *Lie group analysis, classical heritage.* ALGA, 2004.
- [IR79] N.H. Ibragimov and Anderson R.L. *Lie-Bäcklund Transformations in Applications.* SIAM, 1979.
- [MN03] M. Marcelli and MC Nucci. Lie point symmetries and first integrals: The Kowalevski top. *Journal of Mathematical Physics*, 44:2111, 2003.
- [N<sup>+</sup>96] Ibragimov N.H. et al. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1.* CRC Press, 1996.
- [NE06] M.C. Nucci and M. Edwards. Application of Lie group analysis to a core group model for sexually transmitted diseases. *J. Nonlinear Math. Phys.*, (13):211–230, 2006.
- [NG97] M.C. Nucci and L. Gammaitoni. Evaluation of the efficacy of TB control measures using a mathematical model. *Emerging Infectious Diseases*, (3):335–342, 1997.
- [NL00] M.C. Nucci and P.G.L. Leach. The determination of nonlocal symmetries by the technique of reduction of order. *J. Math. Anal. Appl.*, (251):871–884, 2000.
- [NL04] M.C. Nucci and P.G.L. Leach. An integrable S-I-S model. *J. Math. Anal. Appl.*, (290):506–518, 2004.
- [NL07] M.C. Nucci and P.G.L. Leach. Lie integrable cases of the simplified multistrain/two-stream model for Tuberculosis and Dengue fever. *J. Math. Anal. Appl.*, (333):430–449, 2007.
- [NL09] M.C. Nucci and P.G.L. Leach. Singularity and symmetry analyses of mathematical models of epidemics. *South African J. Sci.*, 105(3-4):136–146, 2009.
- [NT01] M.C. Nucci and V Torrisi. *Application of Lie group analysis to a mathematical model which describes HIV transmission*, pages 11–20. AMS, 2001.
- [Nuc92] M.C. Nucci. *Interactive REDUCE programs for calculating classical, non-classical, and approximate symmetries of differential equations*, pages 345–250. Elsevier, 1992.
- [Nuc97] M.C. Nucci. The role of symmetries in solving differential equations. *Mathl. Comput. Modelling*, (25):181–193, 1997.
- [Nuc05] M.C. Nucci. Using Lie symmetries in epidemiology. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2005.
- [Olv93] Peter J. Olver. *Applications of Lie Groups to differential equation.* Springer Verlag, 1993.
- [Ovs82] L.V. Ovsianikov. *Group Analysis of Differential Equations.* Academic Press, 1982.
- [Pie99] V. Pierce. Painlevé analysis and integrability. *The Nonlinear Journal*, 105:41–49, 1999.

- 
- [Ste90] H. Stephani. *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries*. Cambridge University press, 1990.
- [Sto00] Stormark. *Lie's structural approach to PDE systems*. Cambridge University press, 2000.
- [War] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresman and Company.
- [Yag88] I.M. Yaglom. *Felix Klein and Sophus Lie: evolution of the idea of symmetry in the Nineteenth Century*. Birkhäuser, 1988.