



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Poliedros Caleidoscópicos

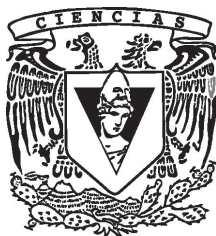
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

Alfredo Castañeda Olvera



**DIRECTOR DE TESIS:
Dra. Isabel Alicia Hubard Escalera
2012**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Castañeda
Olvera
Alfredo
55368841
Universidad Nacional
Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
405080609
2. Datos del tutor
Dra.
Isabel Alicia
Hubard
Escalera
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Javier
Bracho
Carpizo
4. Datos del sinodal 2
Mat.
Renato
Leriche
Vázquez
5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Francisco de Jesús
Struck
Chávez
6. Datos del sinodal 4
Dr. Leobardo
Fernández
Román
7. Datos del trabajo escrito
Poliedros Caleidoscópicos
47 p
2012

Índice general

1. Grupos y caleidoscopios	4
1.1. Caleidoscopios y sus grupos asociados	4
1.1.1. Caleidoscopios finitos del plano	7
1.1.2. Grupos finitos de rotaciones en \mathbb{R}^3	10
1.1.3. Caleidoscopios finitos en el espacio	12
2. Kaleidoscopio 3D	19
3. Polígonos caleidoscópicos	23
4. Poliedros caleidoscópicos	30
4.0.4. Poliedros caleidoscópicos del tetraedro	35
4.0.5. Poliedros caleidoscópicos del cubo / octaedro	36
4.0.6. Poliedros caleidoscópicos del icosaedro / dodecaedro	39

Introducción

Esta tesis muestra posibles poliedros que se pueden generar partir de un caleidoscopio finito en el espacio, utilizando fuertemente el programa computacional Kaleidoscopio 3D.

El programa Kaleidoscopio 3D tiene sus orígenes en 2009 cuando el Laboratorio de visualización virtual “Ixtli” de la UNAM aceptó la idea de modelar caleidoscopios en base a un programa a desarrollar por parte del Dr. Javier Bracho, el Dr. Michael Barot y el matemático/programador Renato Leriche. A finales de 2009 me incorporé a dicho equipo de trabajo para realizar mi servicio social en “Aventuras Matemáticas” (dentro del Instituto de Matemáticas) diseñando paisajes específicos relacionados a los caleidoscopios que fueron modelados en dicho programa. Tras concluir el servicio social en dicho proyecto, decidí realizar esta tesis. El lector interesado puede encontrar modelos físicos de este tipo de caleidoscopios, diseñados por el Dr. Javier Bracho, en Universum, el museo de la ciencias de la UNAM.

Los caleidoscopios habituales son aquellos que están hechos por tres espejos paralelos introducidos en un cilindro; al extremo del cilindro se le ponen pequeños objetos de colores (vidrios, canicas, botones, etc...) que al ser vistos del otro lado del cilindro producen imágenes muy bonitas. Este caleidoscopio fue inventado por Sir David Brewster en 1816 y hasta la fecha son los más conocidos dentro de su especie. Otro tipo de especie es el caleidoscopio triédrico que exhibe las transformaciones de un punto bajo un grupo generado por reflexiones, se le atribuye a Möebius; este tipo de caleidoscopios tienen forma cónica.

El capítulo 1 lo empezaremos con las nociones básicas que necesitamos para entender la construcción de los polígonos y poliedros caleidoscópicos, que son el motivo de esta tesis. En particular describiremos como ver un caleidoscopio “habitual” como un objeto matemático y estudiaremos los caleidoscopios finitos del plano que están generados por dos espejos, además de los caleidoscopios finitos generados por tres espejos que viven en el espacio tridimensional. El capítulo

2 explica el modelo matemático que se utilizó para simular los caleidoscopios y así crear el programa Kaleidoscopio 3D. Los capítulos 3 y 4 corresponden a los polígonos y poliedros caleidoscópicos respectivamente. En el capítulo 3, además de dar la construcción de estos polígonos daremos todos los posibles ejemplos de polígonos caleidoscópicos que provienen de caleidoscopios con dos espejos con ángulos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/5$. En el capítulo 4 explicaremos los poliedros caleidoscópicos y utilizaremos los resultados del capítulo 3 para dar la clasificación de todos los poliedros caleidoscópicos de los sólidos platónicos cuyos vértices se encuentran en la intersección de dos espejos. Los sólidos platónicos, sus grupos de simetrías y las relaciones entre ellos juegan un importante papel en esta tesis.

Desde el año 300a.C. aproximadamente, el autor anónimo de Euclides XV, 3-5, inscribió un octaedro en un cubo, un cubo en un octaedro y un dodecaedro en un icosaedro; también inscribió un octaedro en el tetraedro, observando una relación entre dichos poliedros. Pero probablemente Maurolycus (1494-1575) fue el primero en entender la relación entre dos poliedros recíprocos[2].

Capítulo 1

Grupos y caleidoscópios

El objetivo de este capítulo es relacionar los caleidoscópios ordinarios con ciertos grupos geométricos y estudiar sus propiedades básicas. La teoría general de los grupos geométricos y sus regiones fundamentales fueron desarrollados por Schwarz, Klein y Poincaré[4].

1.1. Caleidoscópios y sus grupos asociados

Cuando sostenemos un objeto en frente de un espejo, vemos dos cosas: el objeto y su imagen. Citando a Coxeter “si Alicia nos pudiera llevar a través de espejo, aún así veríamos las mismas dos cosas, para la imagen de la imagen, es tan solo el objeto original”[1]. En otros términos un espejo y su reflexión generan un grupo de orden dos, cuyos elementos en el grupo son la identidad y R , la reflexión en el espejo. No existen mas operaciones ya que $R^2 = 1$ y como consecuencia $R^{-1} = R$.

Un caleidoscópio es un conjunto de espejos en el plano o en el espacio posicionados de tal manera que nos producen imágenes y figuras. Como los caleidoscópios están hechos de espejos, vamos a considerar cada espejo como la reflexión en él. Las reflexiones son isometrías y las isometrías de un espacio euclidiano las podemos componer de manera que el “producto” de ellas siga siendo una isometría[5]. Definimos un *grupo geométrico* como un conjunto de isometrías de \mathbb{R}^n junto con todos sus productos. De esta manera un caleidoscópio se puede ver geoméricamente como el conjunto de planos que forman los espejos y sus reflexiones en ellos, o más algebraicamente, como el grupo generado por estas reflexiones.

Dado un caleidoscopio, diremos que un *espejo virtual* del caleidoscopio es la imagen de un espejo real (Ver Figura 1.1).

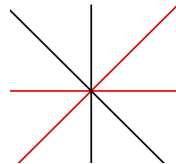


Figura 1.1: Espejos reales (rojos) y virtuales (negros) del caleidoscopio.

Sea G un grupo geométrico de \mathbb{R}^n y sea F un subconjunto de \mathbb{R}^n . Para cada $R \in G$, denotamos por $F \bullet R$ a la imagen de F bajo la isometría R . Diremos que F es una *región fundamental* para G si:

1. $F \cap (F \bullet R) \subseteq \partial F$ donde ∂F denota la frontera de F ;
2. $\bigcup_{R \in G} F \bullet R = \mathbb{R}^n$

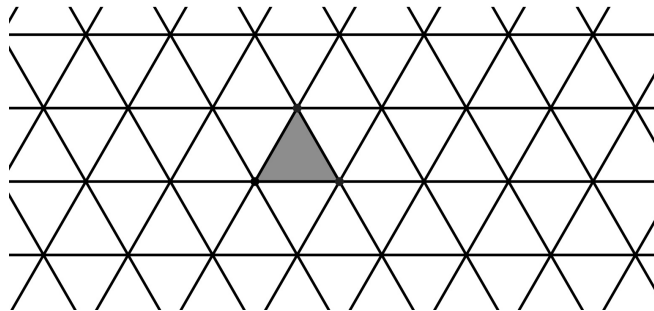


Figura 1.2: Una región fundamental $F \in \mathbb{R}^2$ tal que $\bigcup F \bullet R = \mathbb{R}^2$, con $R \in G$ donde F es la región gris y el grupo G está generado por tres líneas o espejos con ángulos $\pi/3$ unas de las otras.

Diremos que LA región fundamental de un caleidoscopio es la región fundamental F que tiene como frontera a los espejos reales.

Al pensar los caleidoscopios en abstracto, en vez de un espejo plano en el espacio, podemos utilizar una línea en el plano, o un punto en la línea. Un punto divide una línea en dos medias-líneas o rayos, y sirve como un espejo para reflejar

cada rayo en el otro. Si tenemos dos espejos en una línea, no existe un límite del número de imágenes; por ende existen las imágenes de las imágenes hacia el infinito. Ver Figura 1.3. Lo mismo sucede si tenemos dos espejos paralelos en el plano o en el espacio. En estos casos los espejos mismos tienen infinidad de imágenes.

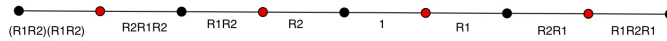


Figura 1.3:

Es decir, dos reflexiones en espejos paralelos R_1 y R_2 , generan un grupo infinito cuyos elementos son

$$1, R_1, R_2, R_1R_2, R_2R_1, R_1R_2R_1, R_2R_1R_2, \dots$$

Como grupo abstracto, a éste se le llama *producto libre* de dos elementos de orden dos; tienen las relaciones generadoras $R_1^2 = 1 = R_2^2$. Así podemos representar las R_s como reflexiones en dos líneas paralelas del plano, o en cualesquiera dos puntos de la línea.

Tomemos el grupo generado por las reflexiones en dos puntos de la línea y a cada uno de estos dos puntos los pensamos como un espejo. Las imágenes de estos espejos bajo todos los elementos del grupo son los espejos virtuales de este caleidoscopio. Notamos que los dos espejos junto con todos los espejos virtuales dividen la línea en infinitos segmentos iguales, los cuales pueden ser asociados con las operaciones del grupo como sigue:

El segmento determinado por los dos espejos originales (LA región fundamental) está asociado a la identidad, 1; y cada uno de los segmentos está asociado con la operación que transforma el segmento 1 en el otro segmento, como en la figura 1.3.

Tomemos ahora un punto cualquiera en la línea, al conjunto de este punto con todas sus imágenes o transformaciones bajo los elementos del grupo G generado

por R_1 y R_2 , lo llamamos un *conjunto de puntos equivalentes* o *la órbita* del punto bajo el grupo G . Entonces cada punto en la línea es equivalente a algún punto en el segmento 1 (incluyendo los puntos finales), pero dos puntos distintos del segmento nunca son equivalentes entre ellos mismos. Así, cualquier segmento determinado por dos elementos del grupo es una región fundamental para el grupo G .

En este trabajo daremos especial atención a caleidoscopios que inducen grupos discretos, ya que, en particular, todo grupo geométrico finito es discreto. Un grupo geométrico se dice que es un *grupo discreto* de \mathbb{R}^n si cada punto de \mathbb{R}^n tiene una vecindad que no contenga otro punto equivalente al punto dado.

1.1.1. Caleidoscopios finitos del plano

Dos espejos que se intersequen forman un caleidoscopio ordinario. Físicamente esto lo podemos hacer fácilmente uniendo 2 espejos cuadrados con una cinta adhesiva, para que el ángulo entre los espejos pueda variar como queramos, y ponerlo sobre una mesa (con el borde de la cinta vertical). Tomando una sección con un plano perpendicular a ambos espejos (o considerando la superficie de arriba de la mesa sola), reducimos el caleidoscopio a su forma de dimensión 2, donde reflejamos en dos líneas que se cortan. Entonces las imágenes de cualquier punto (sin considerar el punto de intersección) están distribuidas alrededor de un círculo.

Tomamos 2 espejos R_1 y R_2 en \mathbb{R}^2 y el grupo generado por ellos. Suponiendo que este grupo es finito, el orden de la rotación R_1R_2 tiene que ser un número entero, por lo tanto finito. Entonces podemos ver geoméricamente esta rotación para concluir que el ángulo entre R_1 y R_2 tiene que ser $m\pi/n$ con $n, m \in \mathbb{Z}$.

Consideramos los números enteros que cumplan $m\pi/n$ con $n, m \in \mathbb{Z}$; si tomamos el ángulo $j\pi/p$, donde $(j,p)=1$ (primos relativos), podemos encontrar un múltiplo entero de j/p que sea congruente a $1/p$ módulo 2π , y por lo tanto un espejo virtual inclinado a π/p con alguno de los espejos dados. Esto mismo puede ser visto desde el hecho que los espejos reales y los virtuales forman un conjunto de líneas concurrentes que son simétricas bajo la reflexión en cada línea, tales que los ángulos entre las líneas vecinas sean todos iguales.

De acuerdo al procedimiento anterior, si colocamos un objeto entre dos espejos inclinados a π/p observamos $2p$ imágenes (incluido el objeto original); cada uno de los objetos, tanto el real como sus imágenes, está en una región angular

formada por los espejos reales y los virtuales. Ver la Figura 1.4.

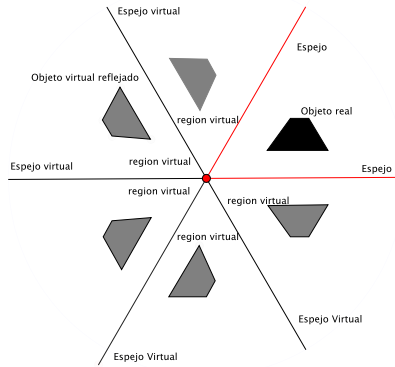


Figura 1.4: Caleidoscopio de 2 espejos.

El grupo generado por dos espejos con ángulo π/p es de orden $2p$ y su región fundamental es la región angular de magnitud π/p formada por los dos rayos que representan los espejos. Cada elemento del grupo tiene dos representaciones alternativas. Por ejemplo, si el ángulo entre los espejos es de $\pi/3$ y R_1, R_2 representan las reflexiones en estos espejos, entonces $R_1R_2R_1$ y $R_2R_1R_2$ representan el mismo elemento del grupo.

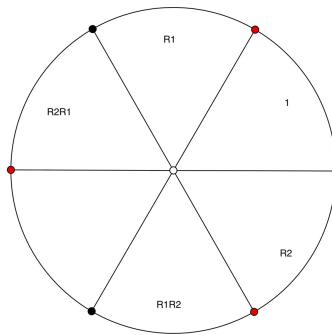


Figura 1.5: Producto de reflexiones en el caleidoscopio.

Estas representaciones son iguales en virtud de las relaciones de generadores:

$$R_1^2 = R_2^2 = (R_1 R_2)^p = 1.$$

De aquí en adelante seguiremos la notación de Coxeter y denotaremos por $[p]$ a este grupo de orden $2p$ generado por dos reflexiones, o el grupo abstracto correspondiente. Afirmamos que $[p] \cong D_p$: si tomamos un punto A en uno de los dos espejos, su órbita bajo el grupo $[p]$ son los vértices de un p -ágono regular (al que denotaremos $\{p\}$). Entonces D_p tiene $2p$ elementos por lo que $[p]$ es el grupo completo de simetrías de $\{p\}$ (Ver Figura 1.6; es decir, $[p] \cong D_p$. El subgrupo cíclico C_p de $[p]$ está generado por la rotación, de orden p , $R_1 R_2$.

En el caso particular de $p=2$, las relaciones de $[p]$ pueden ser expresadas como:

$$R_1^2 = 1, R_2^2 = 1, R_2 R_1 = R_1 R_2.$$

Así $[2]$ es el producto directo de dos grupos de orden dos (generados por las respectivas reflexiones, que en este caso conmutan). El simbolismo apropiado es $[2] = [1] \times [1]$.

Notemos sin embargo que es cuando $p=2$ el único caso en que R_1 y R_2 conmutan.

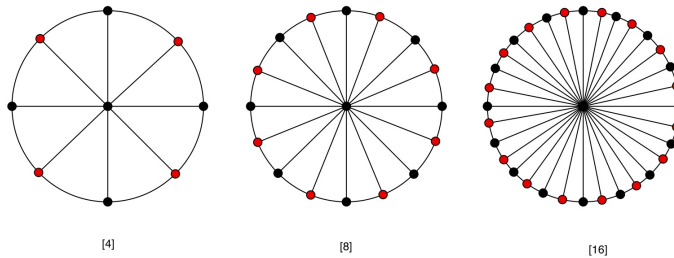


Figura 1.6: Observamos como $[p]$ es el grupo completo de simetrías de $\{p\}$ conforme $[p]$ va creciendo.

Resumimos esta discusión en el siguiente teorema:

Teorema 1

Sean R_1 y R_2 las reflexiones en dos espejos del plano que se intersecan y sea G el grupo generado por R_1 y R_2 . Entonces G es finito si y solo si existe $p \in \mathbb{Z}$, tal que $(R_1 R_2)^p = Id$. Más aún, en este caso $G \cong D_p$, el grupo diédrico de orden $p[1]$, generado por dos elementos a y b que satisfacen las siguientes condiciones:

$$a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^m = 1.$$

Corolario

Si K es un caleidoscopio finito en el plano generado por dos espejos R_1 y R_2 , entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que el ángulo entre los espejos generadores de K es $\pi m/n$.

1.1.2. Grupos finitos de rotaciones en \mathbb{R}^3

Los grupos finitos de rotaciones en \mathbb{R}^3 nos ayudan a entender las transformaciones del espacio en sí mismo que preservan sentido, es por eso que en esta sección daremos una breve explicación de sus resultados para posteriormente observar las rotaciones como producto de reflexiones. Cuando pensamos en un grupo finito de rotaciones es fácil relacionarlo ya sea con algún prisma o pirámide que nos repite la imagen observada tantas veces como el número de lados de dicho prisma o pirámide o con alguno de los sólidos platónicos.

Además de los tres grupos de rotaciones relacionados a los sólidos platónicos, existen dos familias infinitas de grupos finitos de simetría de rotaciones en tres dimensiones que están relacionadas a las pirámides y prismas de q lados. Los 3 grupos esporádicos finitos de simetrías de rotaciones en tres dimensiones fueron enumerados y publicados en 1830 por Hessel, en 1897 llega Edmund Hess y los republica en OSTWALD's Klassiker[1]. La idea fue la siguiente Todo grupo finito de transformaciones congruentes[5] deja invariante al menos un punto: el centroide (baricentro) de todas las imágenes de un punto arbitrario bajo todas las transformaciones del grupo. Cada transformación congruente que deja invariante un punto es una reflexión en un plano por ese punto o el producto de 2 o 3 reflexiones. Ésta preserva o invierte sentido dependiendo si el número de reflexiones es par o impar. Así, cada transformación que preserve sentido (con un punto fijo) es el producto de 2 reflexiones. Esto es una rotación (con el doble

del ángulo de los planos de reflexión). El punto invariante nos permite ver como el grupo actúa sobre una esfera con centro en dicho punto.

Como cualquier transformación que preserve sentido es el producto de 2 reflexiones, cada transformación que preserve sentido (con un punto fijo) es una rotación. Entonces el producto de 2 rotaciones en ejes concurrentes es otra rotación (cuando no son concurrentes es una traslación). Así todo grupo finito de transformaciones que preservan sentido es un grupo de rotaciones. Está demostrado que los únicos grupos de este tipo son los grupos con simetría rotacional de:

1. las pirámides de q lados.
2. las dipirámides o prismas de q lados.
3. el tetraedro regular $\{3, 3\}$
4. el cubo $\{4, 3\}$ u octaedro $\{3, 4\}$
5. el dodecaedro $\{5, 3\}$ o icosaedro $\{3, 5\}$

El grupo completo de simetrías de cada figura incluye reflexiones, pero por el momento consideramos el subgrupo que consiste en rotaciones sólomente.

Reconocemos de inmediato (1) y (2) como los grupos cíclicos y diédricos C_q y D_q respectivamente. Los otros 3 serán utilizados más adelante.

Los siguientes ejemplos corresponden a las rotaciones de una pirámide y un prisma hexágonoal.

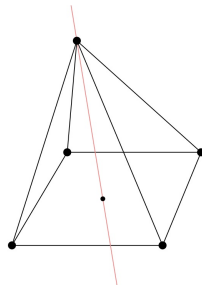


Figura 1.7: La línea roja es el eje de rotación de la pirámide con base cuadrada. Esta rotación genera el grupo cíclico C_4 .

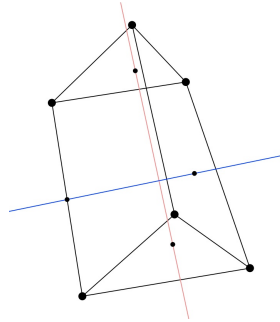


Figura 1.8: Las línea rojas y azul son ejes de rotación del prisma triangular. El grupo generado por estas dos rotaciones es el grupo diédrico D_3 .

1.1.3. Caleidoscópios finitos en el espacio

La importancia del estudio de los grupos finitos generados por reflexiones comienza a mediados del siglo pasado, obteniendo un gran desarrollo hasta lograr la completa clasificación de estos grupos finitos generados por reflexiones. Estos resultados jugaron un papel importantísimo para las áreas de física teórica y química.

En esta sección discutiremos estos grupos y daremos la clasificación de los grupos finitos en \mathbb{R}^3 generados por tres reflexiones. Si el grupo es finito, todos los planos de las reflexiones contenidos en el grupo pasan por un punto invariante (o puntos). Tomando una esfera con centro en dicho punto invariante, los planos de reflexión determinan una configuración de círculos máximos en la esfera. Los círculos máximos descomponen a la esfera en un número finito de regiones (hemisferios, lunas, o triángulos esféricos, dependiendo del grupo). Todas las regiones son congruentes (con la posible inversión de sentido), ya que es reflejada en sus vecinos.

Al grupo más sencillo de este estilo lo hemos denotado [1]. Sabemos que es de orden 2 y está generado por una sola reflexión, esta vez, en un plano que corta a la esfera en 2 hemisferios. Como en la siguiente Figura 1.9.

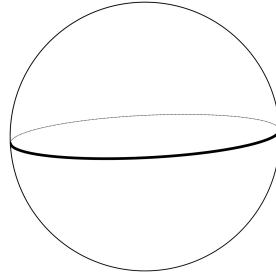


Figura 1.9: El grupo [1] generado por una sola reflexión.

Si tomamos dos planos que se intersequen en ángulo π/q , para algún entero $q \geq 2$, estos planos y sus transformaciones parten a la esfera en un haz de líneas (gajos) de q -meridianos que se descomponen en $2q$ lunas.

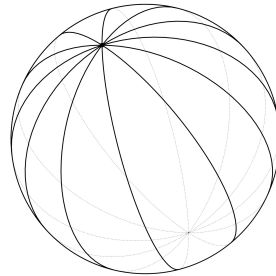


Figura 1.10: $2q$ lunas determinadas por dos espejos que se intersecan en ángulo π/q , $q \in \mathbb{N}$.

La definición abstracta de este grupo es un grupo con dos generadores R_1 y R_2 que cumplen las relaciones

$$R_1^2 = R_2^2 = (R_1 R_2)^q = I.$$

Este grupo, como grupo abstracto, es isomorfo al grupo diédrico D_q .

Otros grupos son generados por las reflexiones R_1, R_2, R_3 en tres lados de un triángulo esférico formado por los ángulos $\pi/p_{23}, \pi/p_{31}, \pi/p_{12}$ donde los p_{23}, p_{31} y p_{12} son enteros y sus inversos cumplen ciertas relaciones que discutiremos más adelante.

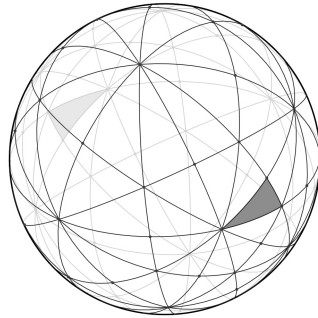


Figura 1.11: triángulos esféricos generados por R_1, R_2 y R_3

Claramente la reflexiones satisfacen:

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = I$$

y las 3 relaciones de la forma $R_i R_j$ satisfacen:

$$(R_i R_j)^{p_{ij}} = I.$$

Un grupo generado por 2 o 3 reflexiones puede ser infinito. Por ejemplo cuando tenemos 2 reflexiones paralelas generadoras.

Sea G un grupo finito de \mathbb{R}^3 generado por tres reflexiones R_1, R_2 y R_3 . Denotaremos por “región E” a la región fundamental de G . Observemos que cualquier elemento $S \in G$ del grupo transforma a la región E en una región congruente a la que denotaremos como “región S”. Es decir, para cada $S \in G$, la región S es la imagen de la región E bajo esa isometría. En particular, los espejos generadores transforman la región E en las regiones vecinas R_i ’s; el elemento

$S \in G$ transforma la región E junto con sus vecinos R_i en la región etiquetada con S junto con sus vecinos $R_i S$. Cualquier expresión de S como una palabra

$$\dots R_k R_j R_i \in G$$

corresponde al camino de una posición dentro de la región E a una posición dentro de la región S, pasando por el i -ésimo lado de E, a través del j -ésimo lado de R_i , a través del k -ésimo lado de $R_j R_i$, y así de derecha a izquierda y viceversa, cualquier camino que empiece en un punto dentro de la región E y cruce el lado i de E llega a la región R_i , así un camino que cruce, digamos lados i_0, i_1, \dots, i_k nos llevará a la región $R_{i_k} R_{i_{k-1}} \dots R_{i_1} R_{i_0}$.

Se sabe que existen solamente cinco sólidos regulares: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. A cada sólido regular le podemos asociar de forma natural un caleidoscopio de tres espejos en forma cónica que puestos en forma correcta producen imágenes muy bonitas; sin embargo al ser el cubo y el octaedro, al igual que el icosaedro y el dodecaedro sólidos duales, los caleidoscopios asociados son los mismos. Por lo tanto, existen tres caleidoscopios asociados con las simetrías de los sólidos regulares. Estos caleidoscopios se pueden ver en las Figuras 12 y 13. Este tipo de caleidoscopios fueron estudiados por A. Moebius en 1852.

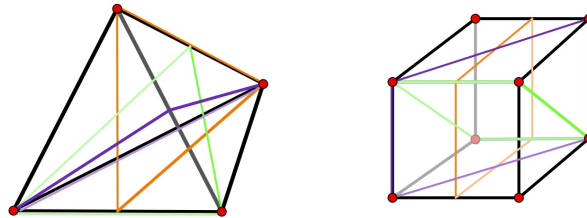


Figura 1.12: Planos de simetría del tetraedro y cubo, que producen sus respectivos caleidoscopios.

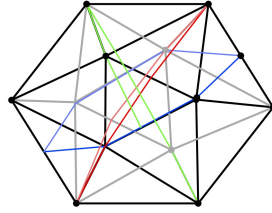


Figura 1.13: Planos de simetría del icosaedro que producen su respectivo caleidoscopio.

Además para cada $q \geq 3$ existe otro caleidoscopio de tres espejos cuyo grupo es isomorfo al producto directo del grupo diédrico D_q con el grupo generado por una reflexión. Estos caleidoscopios se asocian de manera natural con los prismas de q lados.

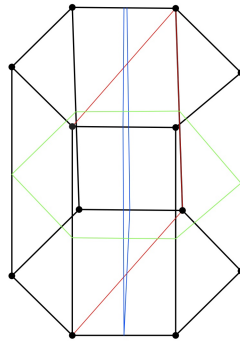


Figura 1.14: Un prisma hexagonal y sus espejos asociados con un caleidoscopio.

A continuación veremos que los caleidoscopios antes descritos son los únicos caleidoscopios finitos del espacio que están generados por tres espejos.

Si cualquier número de planos que reflejen están puestos de forma perpendicular a otro plano de reflexión, entonces podemos tomar su intersección con ese plano, y observar la teoría de las reflexiones de líneas en el plano. De manera parecida, cuando los espejos son concurrentes, entonces tomamos una esfera con centro en

ese punto (baricentro) para observar las reflexiones como círculos máximos de la esfera. Ahí, nuestra región fundamental será un polígono esférico. Los casos más triviales son cuando admitimos un hemisferio (cuando el grupo es $[1]$) y “gajo” (cuando es $[p]$). Para cualquier otro caso la región fundamental es un p -ágono esférico, la suma de los ángulos de dicho p -ágono esférico es siempre mayor que $\pi(p - 2)$.

Dado un caleidoscopio de tres espejos que generan un grupo finito, el subgrupo generado por dos de los espejos lo podemos ver en el plano. De esta manera por el Teorema 1, el ángulo entre los espejos es conmensurable con π . Suponiendo que el grupo es finito, el orden de la rotación es un número entero, por lo tanto finito. Así podemos relacionar los ángulos π/p , π/q y π/r entre los planos del caleidoscopio para concluir que el ángulo entre dos de los espejos tiene que ser $m\pi/n$ con $n, m \in \mathbb{Z}$.

El número de grupos generados por reflexiones en planos concurrentes se reduce a encontrar los triángulos esféricos con ángulos internos π/p , π/q y π/r que satisfagan la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Resolviendo esta desigualdad encontramos los posibles valores de $(p \ q \ r)$ que son $(2 \ 2 \ p)$ con $p \in \mathbb{N}$, $(2 \ 3 \ 3)$, $(2 \ 3 \ 4)$, $(2 \ 3 \ 5)$. Donde los últimos 3 son los que nos interesan por el momento y son los que se relacionan con los sólidos platónicos.

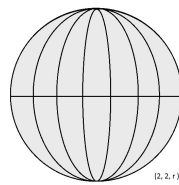


Figura 1.15: El caleidoscopio cuyo triángulo esférico tiene ángulos internos $\pi/2$, $\pi/2$ y π/q .

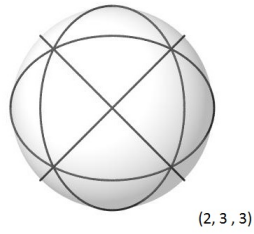


Figura 1.16: El caleidoscopio cuyo triángulo esférico tiene ángulos internos $\pi/2$, $\pi/3$ y $\pi/3$.

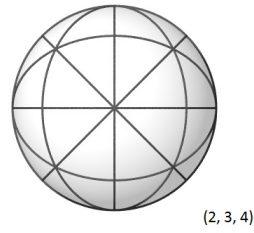


Figura 1.17: El caleidoscopio cuyo triángulo esférico tiene ángulos internos $\pi/2$, $\pi/3$ y $\pi/4$.

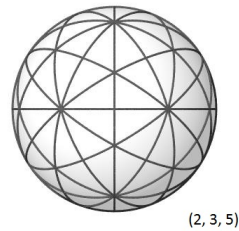


Figura 1.18: El caleidoscopio cuyo triángulo esférico tiene ángulos internos $\pi/2$, $\pi/3$ y $\pi/5$.

Resumimos esta discusión en el siguiente teorema.

Teorema 2:

Sean R_0 , R_1 y R_2 en el espacio y el grupo G generado por dichos espejos. Entonces el grupo G es finito sí y sólo si $(R_0R_1)^p = (R_1R_2)^q = (R_0R_2)^2 = 1$, donde $(p,q) = (2,q)$, $(3,3)$, $(3,4)$ ó $(3,5)$ con $q \in \mathbb{N}$.

Capítulo 2

Kaleidoscopio 3D

En los siguientes capítulos construiremos los polígonos y poliedros caleidoscópicos. Para esto utilizamos un programa con gráficos tridimensionales e interactivo, Kaleidoscopio 3D, que simula los reflejos generados por los espejos de un caleidoscopio tridimensional. Kaleidoscopio 3D es un proyecto académico sin fines de lucro que ha contado con el apoyo del Observatorio de Visualización “Ixtli” y al Departamento de Realidad Virtual de la UNAM. Está desarrollado con el lenguaje de programación orientado a objetos C++, además con base en las siguientes bibliotecas:

- **OpenSceneGraph.** Biblioteca en C++ de gráficos 3D, que es una capa orientada a objetos sobre la biblioteca de programación estructurada en C OpenGL, además tiene una gran cantidad de clases útiles para el desarrollo de aplicaciones gráficas 3D.
- **Qt.** Biblioteca en C++ para creación de interfaces gráficas con muchos módulos útiles.

Usando estas bibliotecas, este programa está desarrollado con base en un modelo matemático basado en multiplicaciones de matrices, el cual será explicado a continuación.

Pensaremos que el punto de intersección de los tres espejos del caleidoscopio es el origen de \mathbb{R}^3 . Así el modelo matemático que usaremos para describir un espejo que pasa por el origen en \mathbb{R}^3 es un subespacio M de dimension 2, que puede ser representado por la siguiente ecuación lineal.

$$\alpha \cdot v = 0$$

Donde $v = (x, y, z)$.

Ahora tomamos \mathbb{R}^3 como vectores columna 3×1 , el producto interno usual $u \cdot v = u'v$ con u' la traspuesta del vector fila (con la multiplicación usual de matrices), y $\alpha \neq 0$. El vector α es perpendicular a M ; lo llamaremos vector normal del espejo (o vector raíz). Podemos asumir que α tiene norma uno, ya que cualquier múltiplo de α distinto de 0 es también un vector normal del mismo espejo. Tomamos R como la reflexión en el plano ortogonal α .

Escribimos $M = M_\alpha$ y $R = R_\alpha$ si queremos mostrar como M y R dependen de la dirección de α .

Para encontrar la fórmula para R como matriz utilizamos la proyección del vector v sobre el plano de reflexión R_α que es:

$$v_1 = (v \cdot \alpha)\alpha$$

Con esto tenemos una descomposición ortogonal $v = v_1 + v_0$, donde $v_0 = v - v_1$ está en el espejo. Así

$$Rv = v - 2(\alpha \cdot v)\alpha$$

La matriz M_R asociada a R tiene como vectores columna a las imágenes de la base canónica $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ bajo la reflexión R . Los planos asociados a los caleidoscopios de los sólidos platónicos se pueden representar de forma que sus vectores normales sean los siguientes:

- Para el tetraedro $\alpha_1 = (1, -1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, -1)$ y $\alpha_3 = (0, 1, 1)$.

Para el cubo $\alpha_1 = (1, -1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 1, -1)$ y $\alpha_3 = (0, 0, 1)$.

- Para el dodecaedro $\alpha_1 = (0, 1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)$ y $\alpha_3 = (1/\phi, -\phi, (1/\phi) - \phi)$ donde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Por lo que las reflexiones asociadas son las siguientes: (donde $v = (x, y, z)$)

- Para el tetraedro $R_{\alpha_1(v)} = (-x+2y, 2x-y, z)$, $R_{\alpha_2(v)} = (x, -y+2z, 2y-z)$
y $R_{\alpha_3(v)} = (x, -y-2z, 2y-z)$.
- Para el cubo $R_{\alpha_1(v)} = (-x+2y, 2x-y, z)$, $R_{\alpha_2(v)} = (x, -y+2z, 2y-z)$
y $R_{\alpha_3(v)} = (x, y, -z)$.
- Para el dodecaedro $R_{\alpha_1(v)} = (x, -y, z)$, $R_{\alpha_2(v)} = (x, y, -z)$

y $R_{\alpha_3(v)} = (-2x/\phi^2 + 2y - 2z/\phi^2 + 2z, 2x - 2\phi^2 y + 2z - 2\phi^2 z, x(-2/\phi^2 + 2) + y(2 - 2\phi^2) + z(4 - 2/\phi^2 - 2\phi^2))$.

Por lo tanto las matrices de los caleidoscopios que estamos considerando son:

- Para el tetraedro $M_{R_{\alpha_1}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{R_{\alpha_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$M_{R_{\alpha_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Para el cubo $M_{R_{\alpha_1}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{R_{\alpha_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$M_{R_{\alpha_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Para el dodecaedro $M_{R_{\alpha_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{R_{\alpha_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$M_{R_{\alpha_3}} = \begin{pmatrix} -2/\phi^2 & 2 & -2/\phi^2 + 2 \\ 2 & -2\phi^2 & -2\phi^2 + 2 \\ -2/\phi^2 + 2 & 2 - 2\phi^2 & 4 - 2/\phi^2 - 2\phi^2 \end{pmatrix}.$$

Así consideramos los grupos de matrices relacionados con los caleidoscopios y los utilizaremos con las bibliotecas antes mencionadas para simular los caleidoscopios tridimensionales en la computadora.

Capítulo 3

Polígonos caleidoscópicos

Un *polígono* o más específicamente, un p -ágono, $p \geq 3$, es una sucesión cíclica ordenada de puntos P_1, P_2, \dots, P llamados vértices junto con los subconjuntos A_i determinados por los pares de vértices V_i, V_{i+1} adyacentes en orden cíclico, al que llamaremos el conjunto de aristas del polígono. Cada arista es incidente únicamente con los dos vértices que la determinan. Nuestros polígonos son simétricos y planos. Los vértices son puntos coplanares y las aristas son segmentos de recta entre vértices. Dos vértices diferentes pueden corresponder al mismo punto del plano.

Sean R_1 y R_2 dos espejos generadores y un punto original P (negro) dentro o fuera de la región fundamental. Dado el punto P , tomamos Q y S , sus imágenes bajo R_1 y R_2 respectivamente. Ponemos una arista azul en PQ y una arista roja en PS . Así generamos 2 órbitas de aristas, una roja y una azul. Tomamos las órbitas de las aristas, con la observación que algunas aristas pueden estar en la misma órbita (si P está en la bisectriz de R_1 y R_2). Sea θ el ángulo entre R_1 y R_2 y un punto P dentro o fuera de la región fundamental. Dado un punto P entre dos espejos R_1 y R_2 generamos dos tipos de aristas que nos generan un polígono que puede ser regular o no, dependiendo su posición en el plano. A este polígono generado por dos reflexiones lo llamaremos *polígono caleidoscópico*. Los polígonos que nos interesan son aquellos que se generan con valores de $p=2, 3, 4$ y 5 ya que los utilizaremos en el siguiente capítulo.

Dado $p=2, 3, 4$ y 5 consideramos $\theta = \pi/p$. Como los vértices son una secuencia cíclica ordenada, podemos mandar cualquier arista roja a otra roja y lo mismo para las aristas azules.

Existen tres casos para $p=2$.

Caso 1: Cuando el punto está en la región fundamental el polígono es un rectángulo.

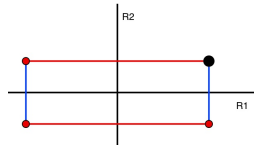


Figura 3.1: Polígono $p=2$. Rectángulo.

Caso 2: Si el vértice está sobre alguno de los 2 espejos se ve así:

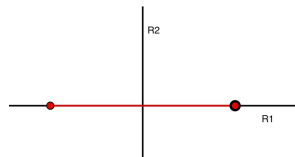


Figura 3.2: Polígono $p=2$. Punto sobre el espejo.

Caso 3: Cuando el punto P está sobre la bisectriz de R_1 y R_2 entonces la arista roja es igual a la arista azul y obtenemos un cuadrado.

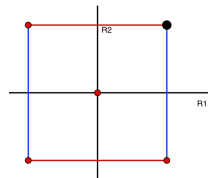


Figura 3.3: Polígono $p=2$. Cuadrado.

Estos son los posibles casos de polígonos caleidoscópicos para $p = 3$.

Caso 1: Cuando el punto está en el interior de la región fundamental el polígono es un hexágono. Sólomente es regular cuando el punto esté sobre la bisectriz de R_1 y R_2 . Si no es regular, entonces tenemos dos tipos de aristas.

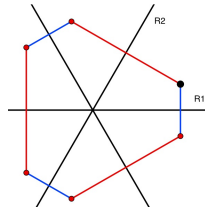


Figura 3.4: Polígono $p=3$. Hexágono.

Caso 2: Cuando el punto está sobre alguno de los espejos es un polígono regular, y es un triángulo equilátero.

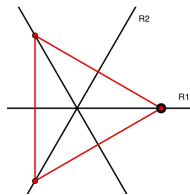


Figura 3.5: Polígono $p=3$. Triángulo equilátero.

Caso 3: Cuando el punto está fuera de la región fundamental el polígono es un hexágono con aristas cruzadas.

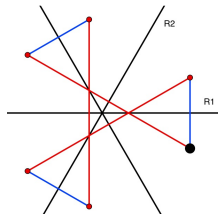


Figura 3.6: Polígono $p=3$. Hexágono cruzado.

Cuando $p=4$, los posibles polígonos caleidoscópicos son más que para $p=3$, de hecho tenemos todos los siguientes casos.

Caso 1: Cuando el punto está en la región fundamental el polígono es un octágono. El octágono es regular si y solo si el punto está sobre la bisectriz de R_1 y R_2 .

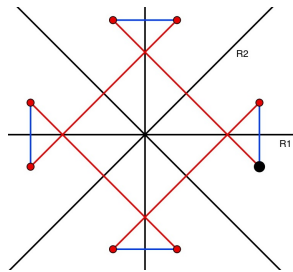


Figura 3.7: Polígono $p=4$. Octágono.

Caso 2: Cuando el punto está sobre algún espejo el polígono generado es un cuadrado regular.

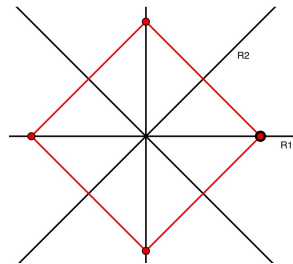


Figura 3.8: Polígono $p=4$. Cuadrado.

Caso 3: Cuando el punto está fuera de la región fundamental el polígono es un octágono con aristas cruzadas.

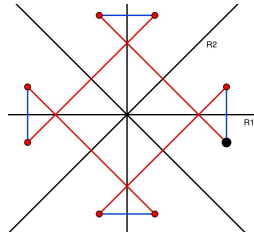


Figura 3.9: Polígono $p=4$. Octágono cruzado.

Caso 4: Cuando el punto está sobre alguno de los espejos virtuales se genera un octágono de este tipo.

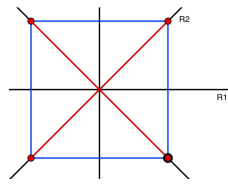


Figura 3.10: Polígono $p=4$. Cuadrado con diagonales.

Para finalizar el análisis de los polígonos caleidoscópicos que utilizaremos en el siguiente capítulo, consideramos $p=5$. Como veremos a continuación, los casos son similares a aquellos de $p=4$.

Caso 1: Cuando el punto está en la región fundamental el polígono es un decágono. Es regular únicamente cuando el punto está sobre la bisectriz de R_1 y R_2 .

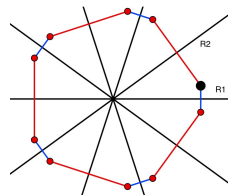


Figura 3.11: Polígono $p=5$. Decágono

Caso 2: Cuando el punto está sobre algún espejo real el polígono generado es un pentágono regular.

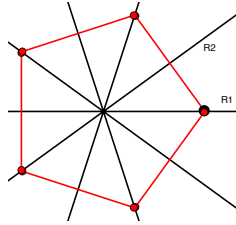


Figura 3.12: Polígono $p=5$. Pentágono regular.

Caso 3: Cuando el punto está fuera de la región fundamental el polígono generado es un decágono con aristas cruzadas.

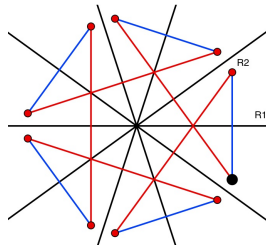


Figura 3.13: Polígono $p=5$. Decágono cruzado.

Caso 4: Cuando el punto está sobre un espejo virtual el polígono generado es un decágono de este tipo.

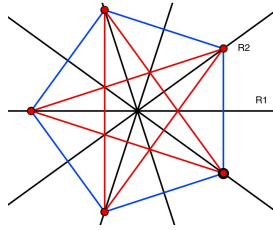


Figura 3.14: Polígono $p=5$. Decágono de pentágono con pentagrama.

Caso 5: Cuando el punto está en una región virtual el polígono generado es un decágono de este tipo.

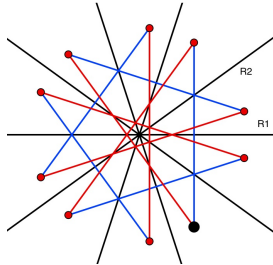


Figura 3.15: Polígono $p=5$. Decágono con aristas cruzadas.

Caso 6: Cuando el punto está sobre otro espejo virtual el polígono es un decágono hecho por dos pentagramas regulares.

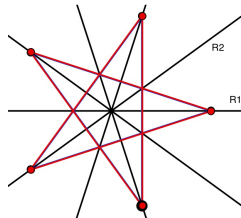


Figura 3.16: Polígono $p=5$. Decágono de pentagramas.

Capítulo 4

Poliedros caleidoscópicos

En esta parte construiremos poliedros asociados a cada uno de los tres caleidoscopios finitos del espacio ya mencionados.

Los poliedros son figuras sólidas que en sus fronteras tienen polígonos. Saltan a la mente los más conocidos que son cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Estos poliedros son de gran importancia en las matemáticas. En particular si consideramos los *Elementos* de Euclides como la base de las matemáticas, hay que recordar que comienzan con la construcción de un triángulo equilátero y concluyen con la construcción de dichos sólidos. Todos estos poliedros tienen las siguientes propiedades:

1. Todos los vértices están sobre la esfera.
2. Para cada 2 vértices, existe una transformación rígida de la figura en sí misma mandando el primer vértice al segundo.

Definimos formalmente un *poliedro* como una gráfica (llamada su 1-esqueleto) junto con una colección de ciclos distinguidos (llamados caras) que cumplen las siguientes condiciones:

- Cada arista está en exactamente dos caras.
- Todas las figuras de vértice son ciclos[1]. Donde para cada vértice v su figura de vértice es otra gráfica, cuyos vértices son las aristas incidentes

en v y con una arista entre dos de ellos, por cada cara que las contiene a ambas.

Aquí consideramos únicamente poliedros que viven en el espacio euclidiano de dimensión 3, es decir, polígonos cuyos vértices y aristas son puntos y segmentos de recta en \mathbb{R}^3 . Más aún, estaremos interesados únicamente en aquellos poliedros del espacio con caras planas. Notemos que los sólidos platónicos son ejemplos de poliedros de este tipo.

Las reflexiones en los espejos reales R_0, R_1 y R_2 nos permiten definir 3 tipos de aristas entre puntos de la órbita, que dependen sobre que espejo estemos reflejando al punto P . Al unir a P con sus respectivas imágenes Q, R y S definimos las aristas del poliedro de la siguiente manera:

- Las aristas azules son el conjunto que contiene al segmento PQ y a todas sus imágenes bajo G . $G = \langle R_0, R_1, R_2 \rangle$
- Las aristas verdes son la órbita de PR bajo G .
- Las aristas rojas son la órbita de PS bajo G .

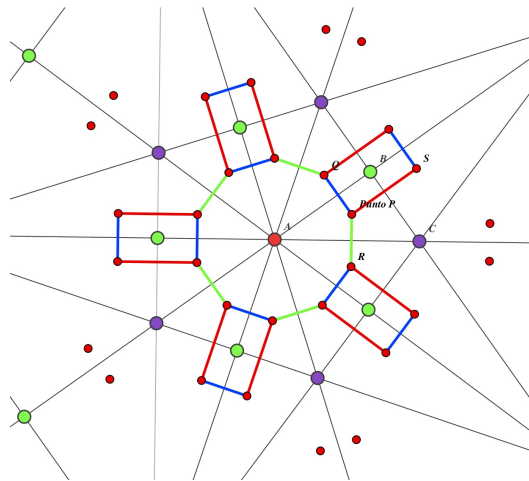


Figura 4.1: Estas son las tres tipos de órbitas de aristas que tenemos. Azules, verdes y rojas dependiendo sobre que espejo estemos reflejando.

Estos tres tipos de aristas nos permiten construir poliedros dependiendo la posición del punto P.

Con la ayuda del programa Kaleidoscopio 3D utilizaremos un método parecido al de Wythoff [1](el cual explicaremos a continuación). Para construir poliedros que satisfacen las dos propiedades antes mencionadas a partir de un punto P y un caleidoscopio finito. Sea P un punto en el espacio, el polígono caleidoscópico generado por los dos espejos R_0 y R_1 y el punto P y lo pintamos de azul. Tomamos la órbita de este polígono caleidoscópico azul bajo el grupo $G: = \langle R_0, R_1, R_2 \rangle$. Esta órbita será el conjunto de caras azules. Consideramos ahora el polígono caleidoscópico generado por los espejos R_1 y R_2 y el punto P y lo pintamos de rojo. Tomamos la órbita de este polígono bajo G. El conjunto de caras rojas es esta órbita. Haciendo lo mismo para los espejos R_0 y R_2 , generamos un polígono caleidoscópico con el punto P y lo pintamos de verde. Su órbita bajo G es el conjunto de caras verdes. Observamos que cada arista está en dos caras de las antes mencionadas, por lo que el resultado de unir todas estas caras es un poliedro. Le llamamos *poliedro caleidoscópico* a dicho poliedro.

Consideremos alguno de los tres caleidoscopios finitos de \mathbb{R}^3 relacionado con los sólidos platónicos y sean R_0, R_1 y R_2 sus tres espejos. Consideremos al vértice O (baricentro) como el centro de una esfera que interseca a los planos (espejos) R_0, R_1 y R_2 en círculos máximos. Si tomamos R_0 y R_2 perpendiculares tenemos que el triángulo ABC es rectángulo digamos en B. De manera similar a como lo hicimos en el capítulo 2, consideramos el triángulo esférico ABC determinado por los espejos R_0, R_1 y R_2 y recordamos que este triángulo es la región fundamental del caleidoscopio y las imágenes del triángulo esférico ABC bajo la acción del grupo G del caleidoscopio teselan la esfera con triángulos esféricos semejantes al ABC.

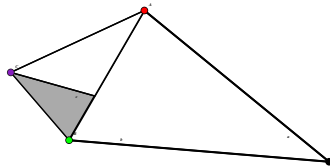


Figura 4.2: Caleidoscopio triédrico.

Ejemplos.

- En la Figura 37 el punto P está en un punto dentro del caleidoscopio sin tocar ningún vértice ni arista y usamos el caleidoscopio del tetraedro.

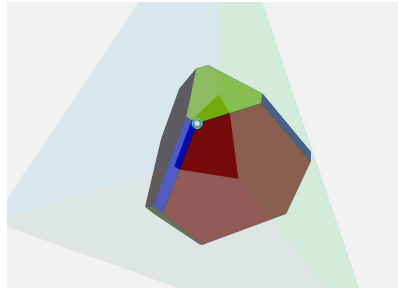


Figura 4.3:

Este es el caleidoscopio del tetraedro.

En este ejemplo podemos ver como las proyecciones ortogonales definen un poliedro con tres tipos de aristas.

- En la Figura 4.3 el punto P está sobre una arista del tetraedro ABCO, que representa la región fundamental del caleidoscopio del icosaedro.

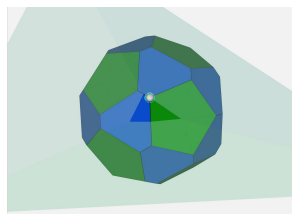


Figura 4.4:

Este es el caleidoscopio del icosaedro / dodecaedro.

Aquí observamos que una de las proyecciones ortogonales se hace cero pero siguen existiendo 3 caras del poliedro alrededor de cada vértice.

- En la Figura 4.5 el punto P está sobre un vértice, distinto al O, del tetraedro ABCO, correspondiente a la región fundamental del caleidoscopio del cubo.

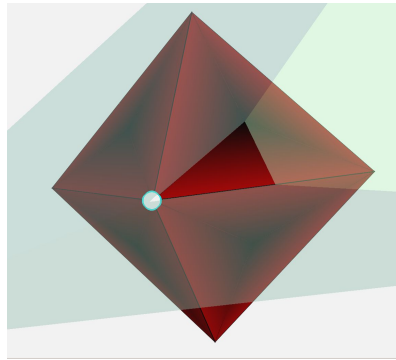


Figura 4.5:
Este es el caleidoscopio del cubo / octaedro.

Este último caso es de consideración especial, debido a que 2 de las proyecciones ortogonales desaparecen, por lo que el poliedro queda determinado por un sólo tipo de cara (en este caso triángulos). Observemos sin embargo que ahora tenemos cuatro caras por vértice.

El motivo de esta tesis es mostrar todos los posibles poliedros caleidoscópicos que cumplan estar generados por un punto sobre la intersección de dos espejos, reales o virtuales para cada uno de los tres caleidoscopios finitos de 3 espejos asociados a los sólidos platónicos. Para hacer esto consideramos a K como uno de estos caleidoscopios generados por R_0 , R_1 y R_2 y le asociamos el triángulo esférico ABC como lo habíamos hecho antes. Pintamos el punto A de color rojo y le aplicamos la acción del grupo G , entonces el conjunto de puntos rojos sobre la esfera son la órbita de A . Hacemos lo mismo con B y C de color verde y morado respectivamente y obtenemos los conjuntos de puntos verdes y morados sobre la esfera que son las órbitas de B y C bajo G respectivamente. Así tenemos

tres tipos de vértices fijos sobre la esfera. Con esto aseguramos que todas las imágenes del triángulo ABC tienen un vértice verde, uno rojo y uno morado, dependiendo de la orbita a la que pertenezcan. Se dice entonces que A, B y C son los *puntos generadores del caleidoscopio*.

Es fácil ver que los puntos P que necesitamos considerar para generar todos los poliedros caleidoscópicos que queremos son precisamente todos los puntos rojos, verdes y morados.

Las caras de los poliedros caleidoscópicos quedan determinadas por los polígonos caleidoscópicos correspondientes al caleidoscopio que escojamos.

4.0.4. Poliedros caleidoscópicos del tetraedro

En el caso del caleidoscopio del tetraedro usamos el modelo de la Figura 4.6 donde tenemos 14 vértices sobre la esfera (8 morados y 6 rojos) y como cada punto y su antípoda nos genera exactamente el mismo poliedro mostraremos los 7 poliedros del caleidoscopio correspondientes con los 7 ejes de simetría del tetraedro[3].

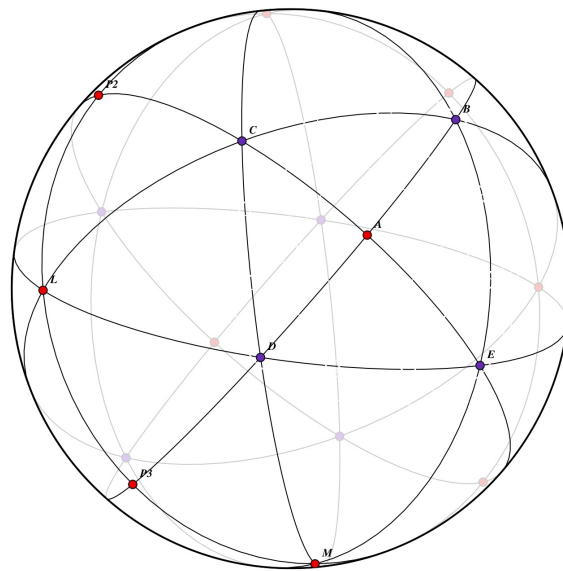
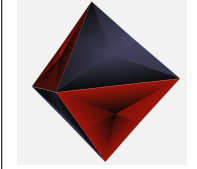
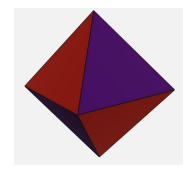
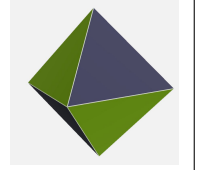








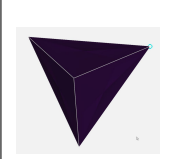
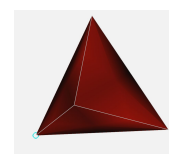
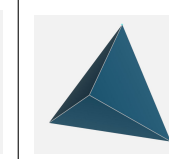
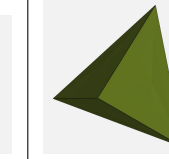




Figura 4.6: El modelo muestra los espejos del caleidoscopio junto con los espejos virtuales y sus intersecciones con la esfera.

Los poliedros correspondientes para los vértices rojos (órbita de A) son el conjunto de puntos $\{A, P2, P3\}$.

		
 	 	 
Punto A	Punto P2	Punto P3

Cuadro 4.1: Puntos rojos.

Los poliedros correspondientes para los vértices morados (órbita de B o C, ya que tienen el mismo ángulo entre los espejos) son el conjunto de puntos $\{C, B, D, E\}$.

			
			
Punto C	Punto B	Punto D	Punto E

Cuadro 4.2: Puntos morados.

4.0.5. Poliedros caleidoscópicos del cubo / octaedro

En el caso del caleidoscopio del cubo/octaedro tenemos 26 puntos sobre la esfera (12 verdes, 6 rojos y 8 morados) y como análogamente pasa lo mismo con sus puntos antípodos, mostraremos los 13 poliedros correspondientes a los 13 ejes de simetría del cubo/octaedro[3].

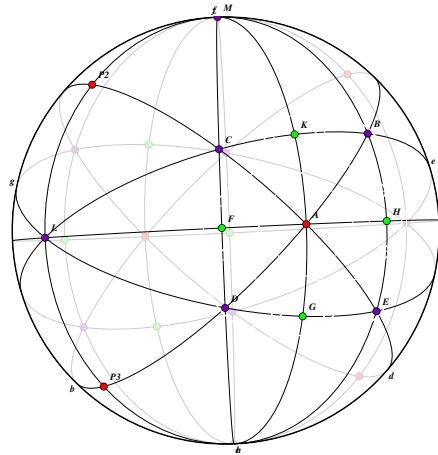


Figura 4.7:
Modelo esférico de los espejos del caleidoscopio junto con los espejos virtuales y sus intersecciones con la esfera.

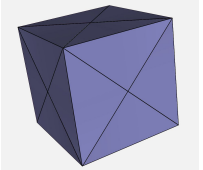
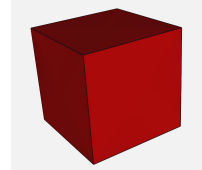
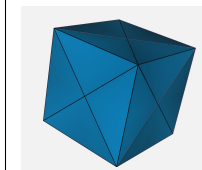
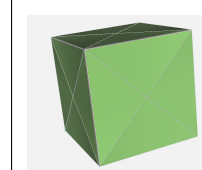




- Poliedros del cubo/octaedro correspondientes al modelo de la Figura 4.7 donde A,B y H son los puntos generadores del caleidoscopio.

Los poliedros correspondientes para los vértices rojos (órbita de A) son el conjunto de puntos $\{A, M, L\}$ sobre la esfera.

Punto A	Punto M	Punto L

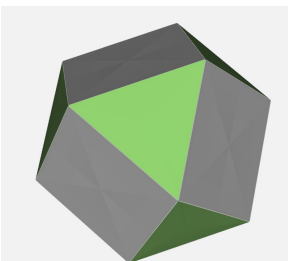
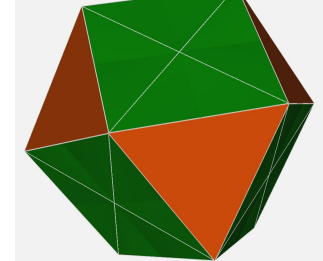
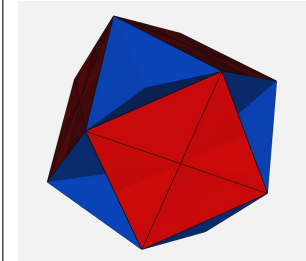



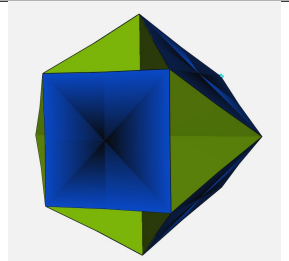
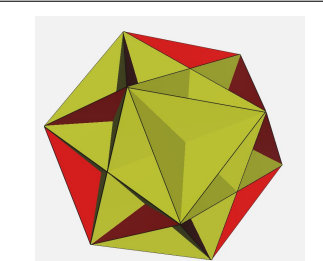
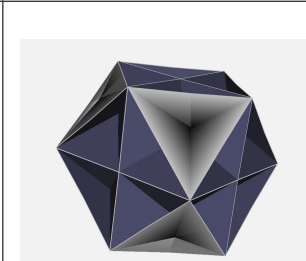



Cuadro 4.3: Vértices rojos.

Los poliedros correspondientes a los puntos morados (órbita de B) son el conjunto de puntos $\{C, B, D, E\}$.

			
			
Punto C	Punto B	Punto D	Punto E

Cuadro 4.4: Puntos Morados

Los poliedros correspondientes a los puntos verdes (órbita de H) son el conjunto de puntos $\{H, K, G, F, P2, P3\}$.

		
		
Punto H	Punto K	Punto G
		
		
Punto F	Punto P2	Punto P3

Cuadro 4.5: Vértices verdes.

4.0.6. Poliedros caleidoscópicos del icosaedro / dodecaedro

Los siguientes dos modelos (el plano y el esférico) esencialmente son el mismo, ya que si tomamos una línea de reflexión en el plano, como ya vimos, nos divide la esfera en 2 hemisferios; por lo que los puntos que no vemos en el modelo plano son los puntos al infinito que si podemos observar en la esfera.

En el caso del caleidoscopio del dodecaedro/icosaedro tenemos 62 puntos en la esfera (12 puntos rojos, 20 puntos azules y 30 puntos verdes). Como cada punto y su antípoda nos genera exáctamente el mismo poliedro mostraremos los 31 distintos poliedros correspondientes a los 31 ejes de simetría del dodecaedro/icosaedro[3].

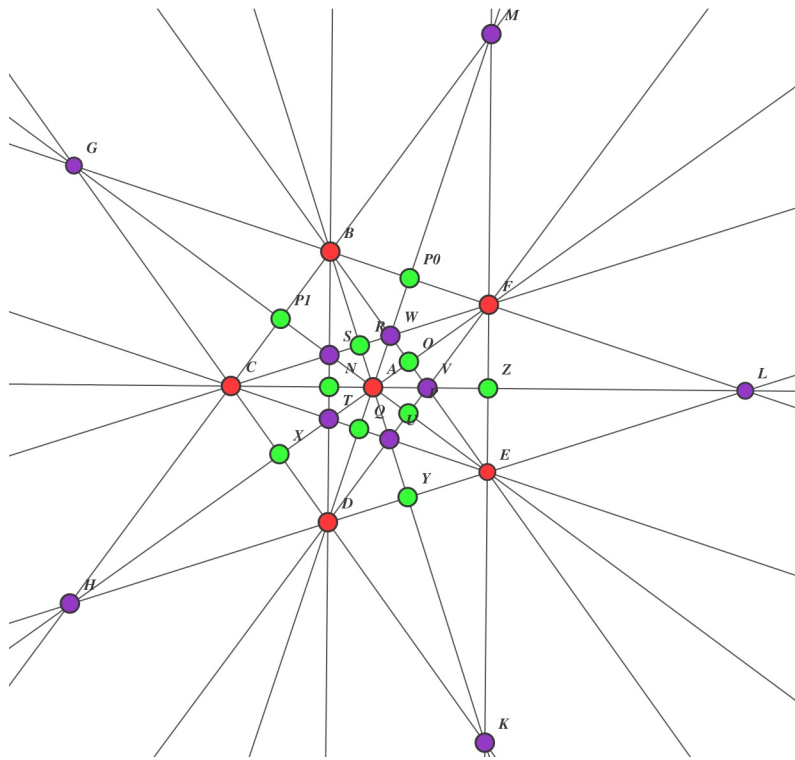


Figura 4.8: Modelo plano de los espejos reales y virtuales del caleidoscopio del dodecaedro / icosaedro.

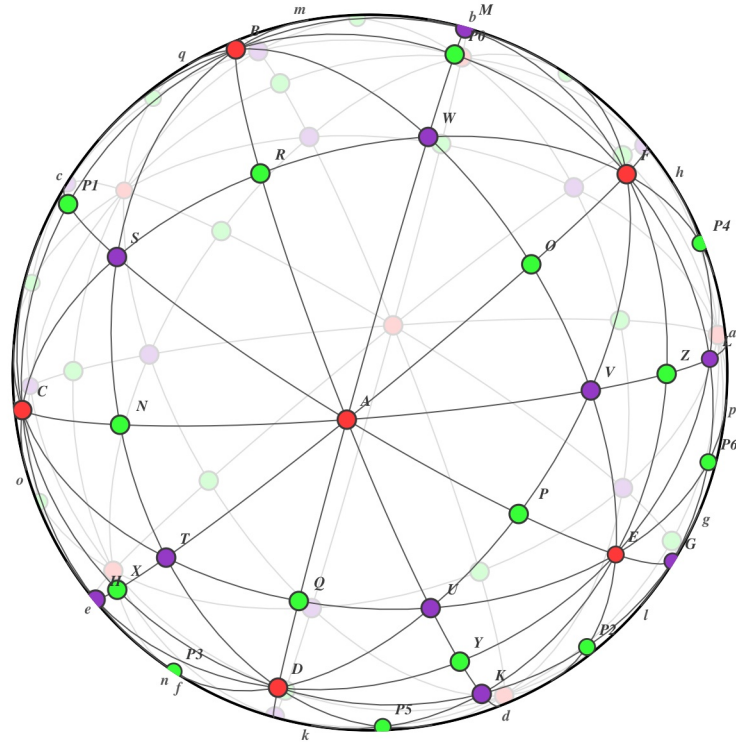
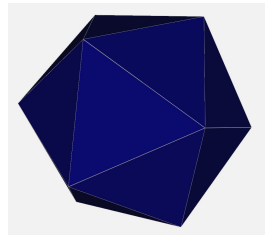
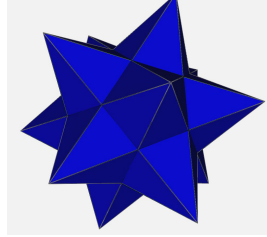
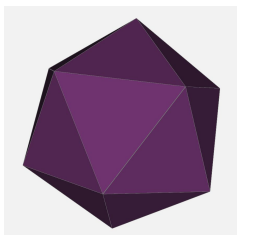



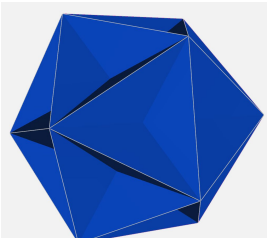
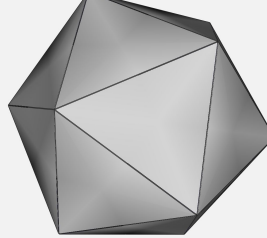
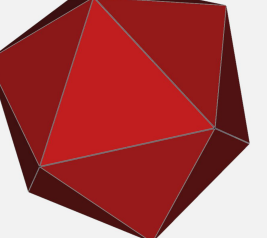





Figura 4.9:
Modelo esférico del caleidoscopio del icosaedro / dodecaedro.

- Poliedros del dodecaedro/icosaedro correspondientes al modelo de la Figura 4.9 donde A, O y V son los puntos generadores del caleidoscopio.

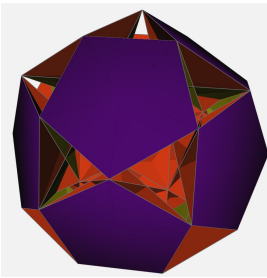
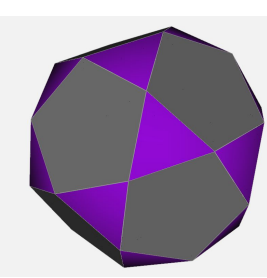
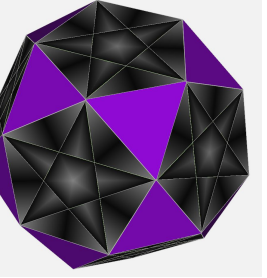







Los poliedros correspondientes a los vértices rojos (órbita de A) para el caleidoscopio del dodecaedro.

El conjunto de puntos rojos son $\{A, B, C, D, E, F\}$

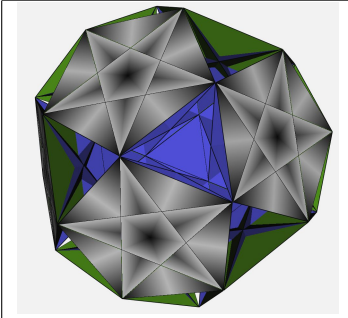
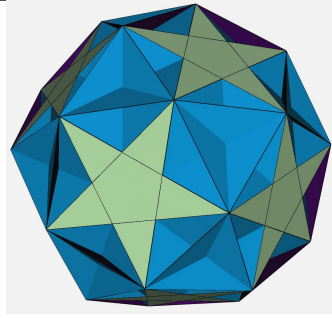
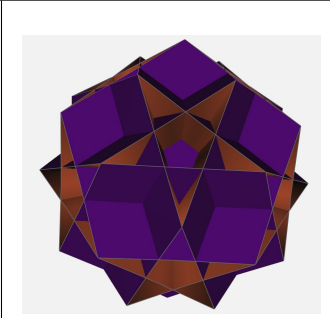



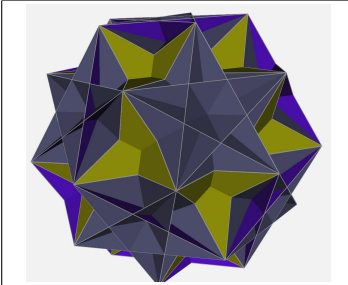
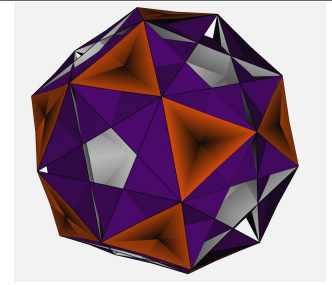
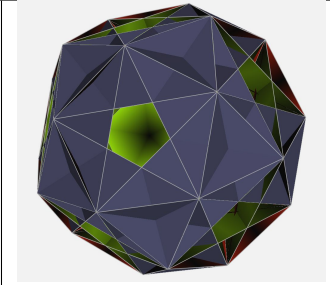



		
		
Punto A	Punto B	Punto C
		
		
Punto D	Punto E	Punto F

Cuadro 4.6: Vértices rojos.

Los poliedros correspondientes a los vértices verdes (órbita de B) para el caleidoscópio del dodecaedro. Este conjunto está formado por los puntos $\{N, O, P, Q, R, X, Y, Z, P_0, P_1\}$.

		
  	 	 
Punto N	Punto O	Punto P

Cuadro 4.7: Vértices verdes.

		
		
Punto Q	Punto R	Punto X
		
		
Punto Y	Punto Z	Punto P0

Cuadro 4.8: Vértices verdes.

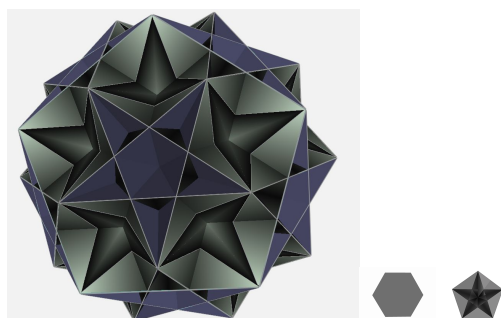
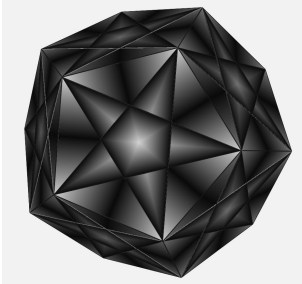
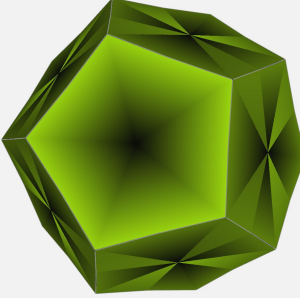
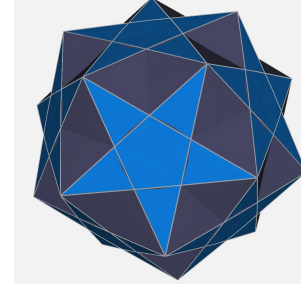




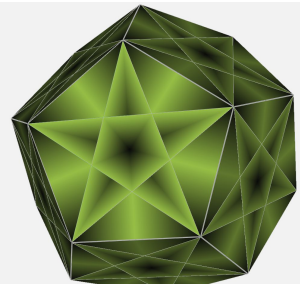
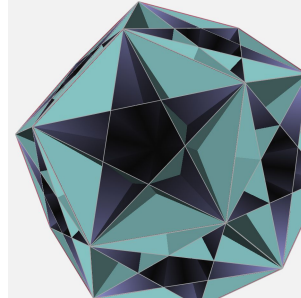



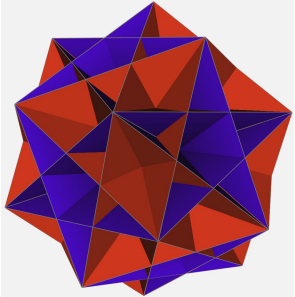
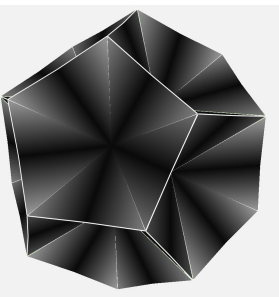
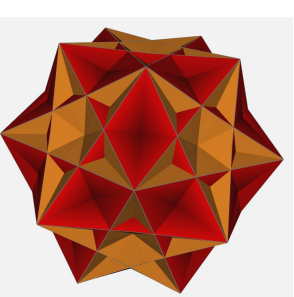



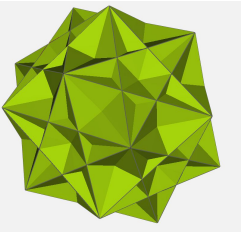
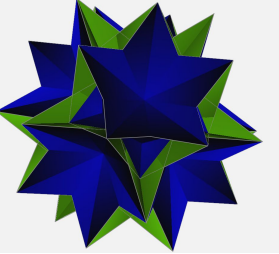
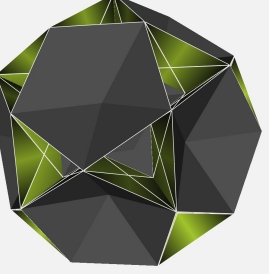
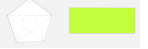


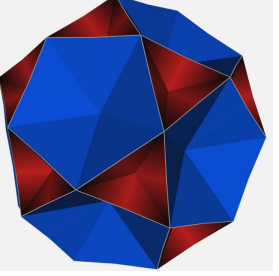
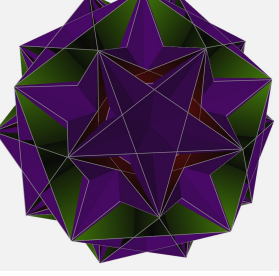
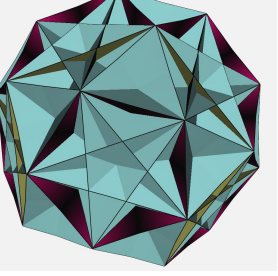

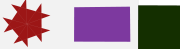



Figura 4.10: Vértice verde. Punto P1.

Figuras correspondientes a los vértices morados (órbita de C) para el caleidoscopio del dodecaedro. Este conjunto de puntos morados está formado por los puntos $\{S, T, U, V, W, G, H, K, L, M, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

		
		
Punto S	Punto T	Punto U
		
		
Punto V	Punto W	Punto G

Cuadro 4.9: Vértices morados.

		
		
Punto H	Punto K	Punto L
		
		
Punto M	Punto P2	Punto P3
		
		
Punto P4	Punto P5	Punto P6

Cuadro 4.10: Vértices morados.

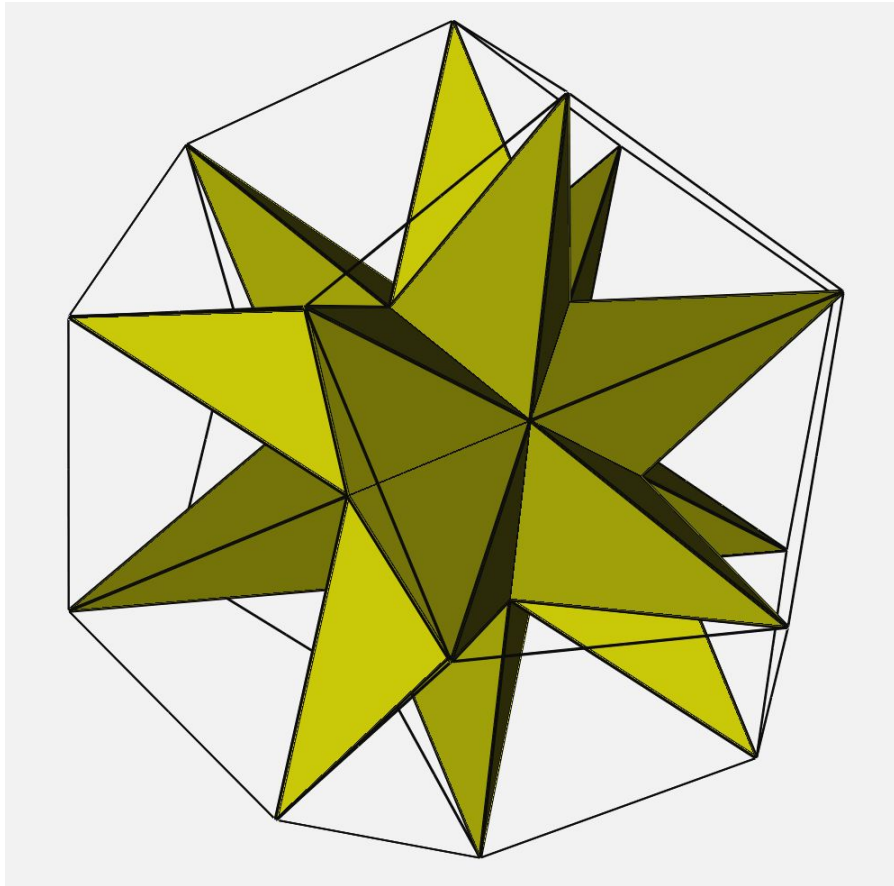


Figura 4.11: Punto K, con dos caras transparentes.

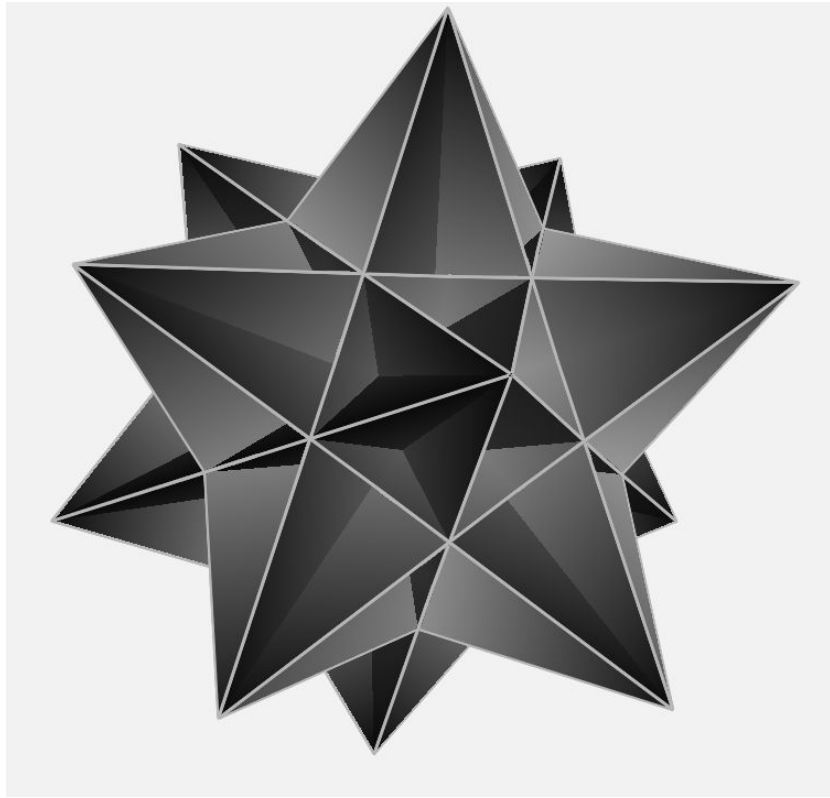


Figura 4.12: Punto B con transparencias en dos de las caras.

Bibliografía

- [1] Coxeter, H.S.M. *Regular Polytopes* (3^a edición). Dover. Nueva York, 1973.
- [2] Heath, Tomas. *A History of Greek Mathematics*. Oxford, 1921.
- [3] Holden, Alan, *Shapes, Space, and Symmetry*. Courier Dover Publications, 1991.
- [4] Klein, F., Lie, S. *Evolution of the idea of symmetry in the Nineteenth. Century* Birkhäuser, 1988.
- [5] Martin, G.E. *Transformation Geometry*. Springer, 1982.
- [6] Sherk, F. A., McMullen P., Thompson, A. C. and Weiss, A. I. editors: *Kaleidoscopes* — Selected Writings of H.S.M. Coxeter. John Wiley, 1995
- [7] Stewart, I. *De aqui al infinito*. Oxford University Press, Oxford, 2004.