UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL HIPERESPACIO SUSPENSIÓN DE SUBCONTINUOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R Í A

P R E S E N T A:

TANIA GRICEL BENITEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ
2012

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción iii

1. Preliminares **1**
1.1. Espacios Métricos . . . 1
1.2. Espacios Cocientes . . . 9
1.3. Continuos . . . 14
1.4. Hiperespacios . . . 19

2. El Hiperespacio Suspensión **27**
2.1. Definición y Ejemplos . . . 27
2.2. Propiedades Generales . . . 34

3. Aposindesis **41**
3.1. Definición y Ejemplos . . . 41
3.2. Aposindesis en $HS(X)$ . . . 43

4. Conexidad Local **45**
4.1. Propiedades Generales . . . 45
4.2. Retractos Absolutos y el cubo de Hilbert . . . 48

5. Continuos de semimargen suprayectivo cero **51**
5.1. Definición y Ejemplos . . . 51
5.2. Hiperespacios . . . 53

6. Continuos hereditariamente indescomponibles **59**
6.1. Definición y Ejemplos . . . 59
6.2. Unicidad del hiperespacio suspensión . . . 62

Introducción

En la búsqueda de estudiar al espacio potencia, el cual es demasiado "grande" nos restringimos a espacios más conocidos. De aquí obtenemos que, dado un continuo (un espacio métrico, compacto y conexo) definimos sus hiperespacios como los siguientes conjuntos:

$$2^X = \big\{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\big\};$$

$$C_n(X) = \big\{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes, } \ n \in \mathbb{N}\big\};$$

$$F_n(X) = \big\{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos, } \ n \in \mathbb{N}\big\}.$$

En 1979, el profesor Sam B. Nadler Jr. definé el hiperespacio suspensión como sigue: Dado un continuo X, decimos que el hiperespacio suspensión de X, denotado por $HS(X)$, es $C(X)\diagup F_1(X)$ con la topología cociente. Aunque propiamente no es un hiperespacio, le llamo así por la similitud con la suspensión topológica (véase Teorema 2.2.9). Nadler define $HS(X)$ para presentar una familia de continuos tipo-disco con la propiedad del punto fijo.

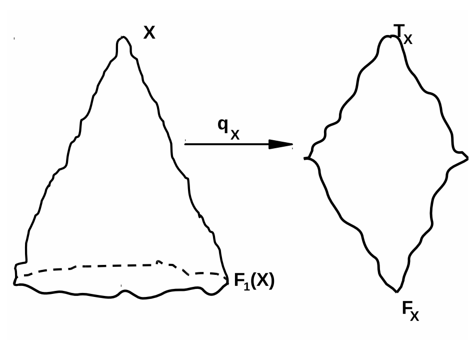

Figura 1

Este trabajo está basado en el artículo "*On the hyperspace suspension of a continuum*" de Raúl Escobedo, María de Jesús López y Sergio Macías [12]. En el cual se describen algunas propiedades que tiene el hiperespacio suspensión de subcontinuos.

En el capítulo 1, se dan las definiciones y propiedades básicas de topología, las cuales nos serviran para diversas pruebas a lo largo de este trabajo y también, para a partir de ello, poder leer este trabajo.

En el capítulo 2, en la primera parte presentamos y describimos los modelos del hiperespacio de ciertos continuos, para posteriormente determinar como es su hiperespacio suspensión. En la segunda parte, se muestran propiedades generales que tiene el hiperespacio suspensión, por ejemplo: se determina la métrica que se usa en $HS(X)$, también se prueba bajo que condiciones $HS(X)$ es homeomorfo a $Sus(X)$.

En el capítulo 3, se demuestra que dado un continuo X entonces $HS(X)$ es aposindético. Un resultado más fuerte es que, $HS(X)$ es aposindético por cerrados de dimensión cero.

En el capítulo 4, se presenta la equivalencia entre la conexidad local de un continuo y la de su hiperespacio suspensión. Además, se demuestra que el hiperespacio suspensión de un retracto absoluto es un retracto absoluto. Finalmente, se da un ejemplo de un continuo localmente conexo sin arcos libres tal que su hiperespacio suspensión no es homeomorfo al cubo de Hilbert, Q, sin embargo, $HS(Q)$ es homeomorfo a Q.

En el capítulo 5, se prueba que dada una función continua y suprayectiva que vaya de un continuo X en un continuo Y que tenga semimargen suprayectivo cero, la función inducida en los hiperespacios suspensión es universal. De esto último, se siguen resultados relacionados con la propiedad del punto fijo.

Finalmente, en el capítulo 6, se muestran algunos resultados con los cuales se prueba que el hiperespacio suspensión de un continuo hereditariamente indescomponible es único.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo, es mostrar los resultados de la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios, que nos servirán como base para este trabajo.

1.1. Espacios Métricos

En esta sección discutiremos las definiciones y propiedades principales sobre espacios métricos que usaremos en el resto del trabajo.

Notación 1.1.1. Como de costumbre, $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los números naturales; $\mathbb{R}$ denota al conjunto de los números reales y $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, denota al espacio Euclidiano de dimensión n, con la métrica Euclidiana.

Observación 1.1.2. Todos los espacios que consideraremos son métricos.

Notación 1.1.3. Si X es un espacio métrico, con métrica d, y A un subconjunto de X, entonces $Cl_X(A)$ denota la cerradura de A, $Int_X(A)$ denota el interior de A y $Fr_X(A)$ denota la frontera de A. Además, si $\varepsilon > 0$ entonces $\mathcal{V}^d_\varepsilon(A)$ denota la bola abierta alrededor de A. Si $A = \{x\}$, para algún punto $x \in X$, escribiremos $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x)$ en lugar de $\mathcal{V}^d_\varepsilon(\{x\})$.

Definición 1.1.4. Sean X un espacio métrico, V un subconjunto de X y p un punto de V. Decimos que *V es una vecindad de X* si existe un abierto U de X tal que $p \in U \subset V$.

Definición 1.1.5. Sea X un espacio métrico. Decimos que X tiene la *propiedad del punto fijo* si para cualquier función continua, $f : X \to X$, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Ya que tenemos esta definición y algunas notaciones, se enunciarán algunos resultados con respecto a la propiedad del punto fijo.

Teorema 1.1.6. *La propiedad del punto fijo es un invariante topológico.*

Demostración. Sean X y Y dos espacios métricos homeomorfos, donde X tiene la propiedad del punto fijo. Tomemos una función continua $f : Y \to Y$. Hay que ver que existe $y \in Y$ tal que $f(y) = y$. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Consideremos la función $h^{-1} \circ f \circ h : X \to X$. Esta función es continua y tiene un punto fijo ya que X tiene la propiedad del punto fijo. Sea $x \in X$ tal que $(h^{-1} \circ f \circ h)(x) = x$, con lo que $f(h(x)) = h(x)$; si $y = h(x)$ entonces $f(y) = y$ y f tiene un punto fijo. Por lo tanto, Y tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 1.1.7. *El intervalo* $[0, 1]$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Hay que ver que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

Definimos la siguiente función continua:

$$g(x) = f(x) - x$$

Hay que ver que $g(x) = 0$ para alguna $x \in [0, 1]$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{g(x) \geq 0 \mid \text{para alguna } x \in [0, 1]\}$$

y

$$B = \{g(x) \leq 0 \mid \text{para alguna } x \in [0, 1]\}.$$

Como g es una función continua, A y B son cerrados de X.

Como $g(0) = f(0) \geq 0$, tenemos que $0 \in A$. Además, como $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$; se tiene que $1 \in B$. Por tanto, A y B son no vacíos. Claramente, $[0, 1] = A \cup B$. Como $[0, 1]$ es conexo, $A \cap B \neq \emptyset$. De donde, si $t_0 \in A \cap B$, $g(t_0) = 0$; i.e., $f(t_0) = t_0$. Por tanto $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

El Teorema 1.1.7 es un caso particular del Teorema del punto fijo de Brouwer, el cual enunciaremos a continuación. Una demostración de éste se puede encontrar en [37, Teorema 9.2].

Teorema 1.1.8. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *entonces el espacio* $[0, 1]^n$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

Definición 1.1.9. *El cubo de Hilbert*, Q, es el espacio $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]_n$ con la topología producto, donde $[0,1]_n$ es una copia del intervalo $[0,1]$. A Q se le da la siguiente métrica $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|x_n - y_n|$ la cual induce la topología producto.

Lema 1.1.10. *Sean (X,d) un espacio métrico y compacto y $f : X \to X$ una función continua. Si para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$ entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_n tal que $d\left(x_{\frac{1}{n}}, f\left(x_{\frac{1}{n}}\right)\right) < \dfrac{1}{n}$. Como X es métrico y compacto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto x_0. Como f es continua y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$. Por construcción, $d(x_n, f(x_n)) \leq \dfrac{1}{n}$. Lo que implica que $d(x_0, f(x_0)) = 0$, pues la función distancia es continua. Por tanto, $f(x_0) = x_0$ y f tiene un punto fijo. $\square$

Lema 1.1.11. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]_n$ *es homeomorfo a* $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{2^n}\right]$.

Demostración. Sea $h_n : [0,1] \to [0,\frac{1}{2^n}]$ definida por: $h_n(t) = \frac{1}{2^n}t_n$. Claramente h_n es continua. Sabemos que las funciones proyección son continuas. Sean $\pi'_n : \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}[0,1]_k \to [0,1]_n$ dada por: $\pi'_n((t_k)_{k=1}^{\infty}) = t_n$, $\pi_n : \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{2^k}\right] \to \left[0,\frac{1}{2^n}\right]$ tal que $\pi_n((p_k)_{k=1}^{\infty}) = p_n$. Sea $f : \displaystyle\prod_{m=1}^{\infty}[0,1]_m \to \prod_{m=1}^{\infty}[0,\frac{1}{2^m}]$ definida como $f((t_m)_{m=1}^{\infty}) = (\frac{1}{2^m}t_m)_{m=1}^{\infty}$.. Veremos que f es un homememomorfismo, para ello basta con mostrar que f es biyectiva y continua, pues la función f entra en un espacio compacto y sale de un espacio Hausdorff. Para esto, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\prod_{m=1}^{\infty}[0,1]_m & \xrightarrow{f} & \displaystyle\prod_{m=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{2^m}\right] \\
\downarrow{\scriptstyle\pi'_n} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_n} \\
[0,1]_n & \xrightarrow{h_n} & [0,\frac{1}{2^n}]
\end{array}.$$

Tomemos $(t_m)_{m=1}^{\infty} \in \prod_{m=1}^{\infty} [0,1]_m$ tal que $f((t_m)_{m=1}^{\infty}) = (\frac{1}{2^m} t_m)_{m=1}^{\infty}$. Observemos que para cualquier sucesión $(t_k)_{k=1}^{\infty} \in \prod_{m=1}^{\infty} [0,1]_m$ bajo la proyección π'_n nos queda $\pi'_n((t_k)_{k=1}^{\infty}) = t_n$ y esto bajo h_n nos da $\frac{1}{2^n} t_n$. Sea $(t_k)_{k=1}^{\infty} \in \prod_{m=1}^{\infty} [0,1]_m$, vemos que $\pi_n \circ f((t_k)_{k=1}^{\infty}) = \frac{1}{2^n} t_n$, aplicando la función f nos queda, $f((t_k)_{k=1}^{\infty}) = \left(\frac{1}{2^k} t_k\right)_{k=1}^{\infty}$ y bajo la proyección π_n tenemos $\pi_n\left(\left(\frac{1}{2^k} t_k\right)\right) = \frac{1}{2^n} t_n$. De esto se sigue que $h_n \circ \pi'_n = \pi_n \circ f$, entonces el diagrama conmuta. Como $h_n \circ \pi'_n$ es continua, esto implica que $\pi_n \circ f$ es continua. Por tanto, f es continua.

Veamos que f es biyectiva. Para probar que f es inyectiva, sean $(a_k)_{k=1}^{\infty}, (b_k)_{k=1}^{\infty} \in \prod_{k=1}^{\infty} [0,1]_k$ tales que $f((a_k)_{k=1}^{\infty}) = f((b_k)_{k=1}^{\infty})$, esto implica que $\left(\frac{a^k}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{b^k}{2^k}\right)_{k=1}^{\infty}$, pero esto es $((a_k)_{k=1}^{\infty}) = ((b_k)_{k=1}^{\infty})$ Por tanto, f es inyectiva.

Probaremos que f es suprayectiva. Sea $(s_k)_{k=1}^{\infty} \in \prod_{k=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{2^k}\right]$, observemos que $s_k \in [0, \frac{1}{2^k}]$, de donde $2^k s_k \in [0,1]_k$. Lo cual implica que, $f((2^k s_k)_{k=1}^{\infty}) = (s_k)_{k=1}^{\infty}$. Entonces, f es suprayectiva. Por tanto, f es un homeomorfismo. □

Como una consecuencia del teorema punto fijo de Brouwer (Teorema 1.1.8) y del Lema 1.1.11 tenemos:

Teorema 1.1.12. *El cubo de Hilbert tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por el Lema 1.1.11, podemos suponer que $Q = \prod_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Sea $A = \big\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q \mid x_n = 0 \text{ si } n \geq N+1\big\}$. Entonces A es homeomorfo a $\prod_{n=1}^{N} \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$. Definimos las siguientes funciones, $f : Q \to Q$ dada por: $f(x_1, ..., x_N, 0....) = (y_1, ..., y_N, y_{N+1}, ...)$ y

$\widehat{f}: \prod_{n=1}^{N}\left[0, \frac{1}{2^n}\right] \to \prod_{n=1}^{N}\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ como: $\widehat{f}(x_1, ..., x_N) = (y_1, ..., y_N)$. Claramente, $\widehat{f}$ es continua. Por el Teorema 1.1.8, existe $(a_1, ..., a_N) \in \prod_{n=1}^{N}\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ tal que $\widehat{f}(a_1, ..., a_N) = (a_1, ..., a_N)$. Sea $a^* = (a_1, ..., a_N, 0, ...)$. Entonces $f(a^*) = (a_1, ..., a_N, a_{N+1}, ...)$. De donde $\rho(a^*, f(a^*)) \leq \big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\big)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, por el Lema 1.1.10, Q tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

La noción de función universal, que definiremos a continuación, generaliza a la propiedad del punto fijo.

Definición 1.1.13. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es *universal*, si para cualquier función continua $g : X \to Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.

Los siguientes tres resultados nos dan algunas consecuencias de la definición de función universal.

Teorema 1.1.14. *Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es una función universal entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) f es suprayectiva;

(2) Y tiene la propiedad del punto fijo.

Demostración. (1) Sean $y \in Y$ y $g : X \to Y$ dada por $g(x) = y$ para toda $x \in X$, note que g es continua. Como f es universal, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = g(x_0) = y$. Por tanto, f es suprayectiva.

(2) Sea $h : Y \to Y$ una función continua. Consideremos la siguiente función continua $h \circ f : X \to Y$. Como f es universal, existe $x \in X$ tal que $h(f(x)) = f(x)$. Por tanto, Y tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Teorema 1.1.15. *Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es una función continua entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si X_0 es un subespacio de X y la restricción de f a X_0, $f|_{X_0} : X_0 \to Y$, es universal entonces f es universal.

(2) Si Z es un espacio métrico y $g : Y \to Z$ es una función continua tal que $g \circ f : X \to Z$ es universal, entonces g es universal.

Demostración. (1) Sea $g : X \to Y$ una función continua. Como $f|_{X_0}$ es universal, existe $x_0 \in X_0$ tal que $(f|_{X_0})(x_0) = (g|_{X_0})(x_0)$. Esto implica que $f(x_0) = g(x_0)$. Por tanto, f es universal.

(2) Sea $h : Y \to Z$ una función continua. Como $g \circ f$ es universal, existe $x \in X$ tal que $g \circ f(x) = h \circ f(x)$. De donde $g(f(x)) = h(f(x))$. Por tanto, g es universal. □

Teorema 1.1.16. *Si X es un espacio métrico, conexo y $f : X \to [0,1]$ es una función continua y suprayectiva entonces f es universal.*

Demostración. Sea $g : X \to [0,1]$ una función continua. Sean

$$A = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$$

y

$$B = \{x \in X \mid g(x) \leq f(x)\}.$$

Como f es suprayectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$. Esto implica que $f(x_0) \leq g(x_0)$. Por tanto, $x_0 \in A$. Análogamente, existe $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = 1_x$ y se tiene que $g(x_1) \leq f(x_1)$. Por tanto, $x_1 \in B$.

De esta forma tenemos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Además, por la tricotomía en [0,1], resulta que $X = A \cup B$. Como f y g son continuas, A y B son cerrados en X. Como X es conexo y $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$. Por tanto, si $x \in A \cap B$ entonces $f(x) = g(x)$. □

Como consecuencia de los Teoremas 1.1.14 y 1.1.16 se tiene el siguiente resultado que ya conocíamos.

Corolario 1.1.17. *El intervalo $[0,1]$ tiene la propiedad del punto fijo.*

A continuación definiremos los conceptos de retracto y retracto absoluto, los cuales serán utilizados posteriormente.

Definición 1.1.18. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto cerrado de X. Decimos que A *es un retracto de* X si existe una función continua $r : X \to A$ tal que

$r(a) = a$, para todo elemento $a \in A$. A la función r se le llama *retracción*. Diremos que X *es un retracto absoluto* si cada vez que Z sea un espacio métrico y $f : X \to Z$ sea un encaje de X en Z, tal que $f(X)$ es cerrado en Z, se tiene que $f(X)$ es un retracto de Z.

Teorema 1.1.19. *El ser un retracto absoluto es un invariante topológico.*

Demostración. Sean X un retracto absoluto, Y un espacio homeomorfo a X y $h : X \to Y$ un homeomorfismo. Sean Z un espacio métrico y $f : Y \to Z$ un encaje tal que $f(Y)$ es cerrado en Z. Como h es un homeomorfismo y f es un encaje, se tiene $f \circ h : X \to Z$ es un encaje. Como X es un retracto absoluto, existe $r : Z \to f \circ h(X)$ tal que $r(w) = w$, para toda $w \in f \circ h(X)$. Como $f \circ h(X) = f(Y)$, podemos concluir que $f(Y)$ es un retracto de Z. Por tanto, Y es un retracto absoluto. □

Teorema 1.1.20. *El intervalo* $[0, 1]$ *es un retracto absoluto.*

Demostración. Sean Z un espacio métrico y $h : [0, 1] \to Z$ un encaje, donde $h([0, 1])$ es cerrado. Definimos $h([0, 1]) = K$. Como h es un encaje, existe $h^{-1} : K \to [0, 1]$, la función inversa de h. Por el Teorema de extensión de Tietze, extendemos h^{-1} a una función continua, $f : Z \to [0, 1]$. Consideremos la siguiente composición, $h \circ f : Z \to K$; Notemos que para cada $z \in K$, $(h \circ f)(z) = (h \circ h^{-1})(z) = z$. De donde, $h \circ f$ es una retracción. Por tanto, $[0, 1]$ es un retracto absoluto. □

La noción de homotopía es muy importante, ya que nos da la sensación de movimiento dentro de los espacios.

Definición 1.1.21. Sean X y Y espacios métricos. Una *homotopía entre* X *y* Y es una función continua $G : X \times [0, 1] \to Y$. Si $g : X \to Y$ y $f : X \to Y$ son funciones continuas, diremos que f *y* g *son homotópicas* si existe una homotopía $G : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $G((x, 0)) = f(x)$ y $G((x, 1)) = g(x)$, para todo punto $x \in X$.

Definición 1.1.22. Sea X un espacio métrico. Decimos que X es *contraíble* si la función identidad de X, $1_X : X \to X$, es homotópica a una función constante.

Teorema 1.1.23. *Tanto* $\mathbb{R}^n$ *como* $[0, 1]^n$*, con* $n \in \mathbb{N}$*, y el cubo de Hilbert,* Q *son contraíbles.*

Demostración. Veamos que $\mathbb{R}^n$ es contraíble. Sea $G : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ dada por $G((x, t)) = (1 - t)x$. Entonces G es continua. Si $t = 0$ entonces $G((x, 0)) = x$ y, si $t = 1$ entonces $G((x, 1)) = 0$. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ es contraíble.

De manera similar se prueba que $[0, 1]^n$ y Q son contraíbles. □

Notación 1.1.24. El símbolo S^1 denotará a la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, con centro en el origen.

Definición 1.1.25. Sea X un espacio métrico. Decimos que X *tiene la propiedad* (b) si para cualquier función continua $f : X \to S^1$ se tiene que f es homotópica a una función constante.

Observación 1.1.26. Cuando un espacio métrico tiene la propiedad (b), a veces, también se dice que X *es contraíble con respecto a* S^1.

Teorema 1.1.27. *Todo espacio contraíble tiene la propiedad* (b).

Demostración. Sea X un espacio contraíble. Consideremos una contracción $H \times [0,1] \to X$ tal que $H((x,0)) = x$ y $H((x,1)) = p$ para toda $x \in X$ y alguna $p \in X$. Sea $f : X \to S^1$ una función continua. Consideremos la siguiente función:

$$f \circ H : X \times [0,1] \to S^1.$$

Notemos que $f \circ H((x,0)) = f(x)$ y $f \circ H((x,1)) = f(p)$ para toda $x \in X$. Por tanto, todo espacio contraíble tiene la propiedad (b). $\square$

Definición 1.1.28. Sea X un espacio métrico y conexo. Decimos que X es *unicoherente* si cada vez que $X = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos cerrados y conexos, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si todo subconjunto conexo de X es unicoherente.

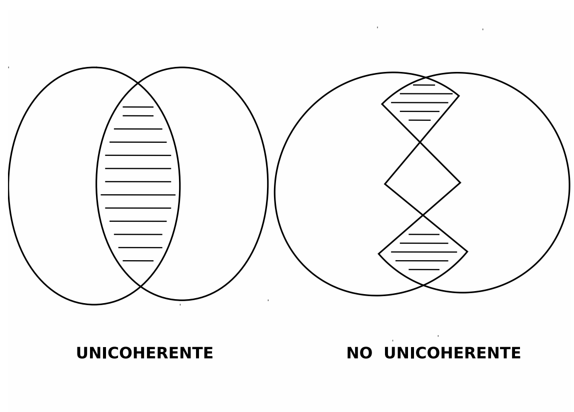

Figura 1.1

Con respecto a esta definición tenemos que [0,1] es unicoherente, en cambio S^1 no lo es.

Una demostración del siguiente resultado puede ser encontrada en [39, Teorema 7.3, pág. 227].

Teorema 1.1.29. *Si X es un espacio métrico y conexo con la propiedad (b) entonces X es unicoherente.*

Definición 1.1.30. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es *monótona* si para cualquier subconjunto conexo B de Y se tiene que $f^{-1}(B)$ es conexa.

Una prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [20, Teorema 2, pág. 434].

Teorema 1.1.31. *Sean X y Y espacios métricos. Si X tiene la propiedad (b) y $f : X \to Y$ es una función monótona entonces Y tiene la propiedad (b).*

1.2. Espacios Cocientes

Aquí definiremos una forma de construir espacios nuevos basándonos en espacios conocidos. Esto se hace "identificando" o "pegando", de una manera adecuada, ciertos subconjuntos de nuestro espacio original.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio métrico. Una *descomposición* de X es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos y ajenos dos a dos cuya unión es X.

Definición 1.2.2. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Definimos $X/\mathcal{G}$ como el conjunto cuyos elementos son los elementos de la descomposición $\mathcal{G}$. A $X/\mathcal{G}$ lo llamamos el *espacio cociente*. La función $q : X \to X/\mathcal{G}$ que asocia a cada punto $x \in X$ el único elemento G de $\mathcal{G}$ tal que $x \in G$, se llama la *función cociente*.

A continuación definiremos una topología para los espacios cociente.

Definición 1.2.3. Sean X un espacio métrico, $\mathcal{G}$ una descomposición de X y $q : X \to X \diagup \mathcal{G}$ la función cociente. Entonces la topología:

$$\{\mathcal{U} \subset \mathcal{G} \mid q^{-1}(\mathcal{U}) \text{ es un abierto en } X\}$$

es llamada la *topología cociente* para $X \diagup \mathcal{G}$.

Observación 1.2.4. Notemos que, si el espacio cociente tiene la topología cociente entonces la función cociente es continua. Además, un subconjunto $\mathcal{U}$ de $X \diagup \mathcal{G}$ es abierto (cerrado) en $X \diagup \mathcal{G}$ si y sólo si $q^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto (cerrado) en X.

Un ejemplo importante del espacio cociente es el cono de un espacio:

Definición 1.2.5. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G} = \{\{(x,t)\} \mid x \in X \text{ y } t \in [0,1)\} \cup \{X \times \{1\}\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es una descomposición de $X \times [0,1]$. El *cono* (topológico) de X, denotado por $Cono(X)$, es el espacio cociente $X \times [0,1] \diagup \mathcal{G}$. Sea $q : X \times [0,1] \to Cono(X)$ la función cociente. Al elemento $q(X \times \{1\}$ del $Cono(X)$ se le llama *vértice del cono* y se le denota por v_X. Al subconjunto $q(X \times \{0\}$ del $Cono(X)$ se le llama *la base del cono* y se denota por $B(X)$.

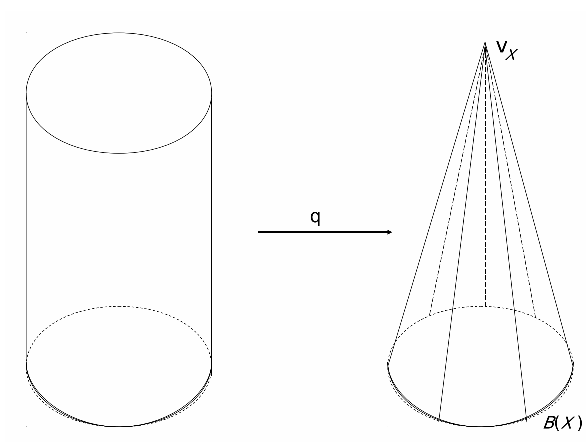

Figura 1.2: Cono topológico

Una propiedad importante que tienen los conos es que son contraíbles:

Teorema 1.2.6. *Si X es un espacio métrico entonces $Cono(X)$ es contraíble.*

Demostración. Sea $F : (X \times [0,1]) \times [0,1] \to X \times [0,1]$ definida por:

$$F\left((x,t),s\right) = (x, s + (1-s)t)$$

Claramente F es continua. Notemos que para toda $(x,t) \in X \times [0,1]$,

$$F\left((x,t),0\right) = (x,t)$$

y

$$F\left((x,t),1\right) = (x,1).$$

Sea $q : X \times [0,1] \to Cono(X)$ la función cociente. Consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{tikzcd}
& (X \times [0,1]) \times [0,1] & \\
\mathsf{Cono}\,(X) \times [0,1] \arrow[ur, "q \times \mathsf{I}_{[0,1]}"] \arrow[rr, "\mathsf{H}"'] & & \mathsf{Cono}\,(X) \arrow[ul, "q \circ F"']
\end{tikzcd}$$

Figura 1.3

Notemos que para cada $(\chi, s) \in Cono(X) \times [0,1]$, $q \circ F$ es constante en $(q \times 1_{[0,1]})^{-1}(\chi, s)$. Por [36, 3.22], existe una función continua:

$$H : Cono(X) \times [0,1] \to Cono(X)$$

tal que $H \circ (q \times 1_{[0,1]}) = q \circ F$. Observemos que H cumple con que $H(\chi, 0) = \chi$ y $H(\chi, 1) = v_X$ para toda $\chi \in Cono(X)$, donde v_X es el vértice de $Cono(X)$. Por tanto, $Cono(X)$ es contraíble. $\square$

Aunque en esta sección aún no hablamos de continuos, daremos la definición y se probará el siguiente resultado:

Definición 1.2.7. Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo. Un *subcontinuo* es un continuo el cual está contenido en un espacio. Diremos que un continuo es *no degenerado* si tiene más de un punto.

Definición 1.2.8. Un continuo X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos puntos x y y de X existe un arco α, contenido en X, cuyos puntos extremos son x y y.

Lema 1.2.9. *Sea Z un continuo arcoconexo. Si x_1, $x_2 \in Cono(Z)$ entonces $Cono(Z) \setminus \{x_1, x_2\}$ es arcoconexo*

Demostración. Para la demostración se hará dos casos:

Si $x_1 \in Z \times \{0\}$ y $x_2 \in Z \times \{t\}$ para alguna $t \in (0, 1)$. Claramente se tiene que $Cono(Z) \setminus \{x_1, x_2\}$ es arcoconexo, esto por ser Z un continuo con dicha propiedad.

El otro caso es que x_1 y x_2 estén en el mismo nivel. Supongamos que $x_1, x_2 \in Z \times \{t\}$ para alguna $t \in (0, 1)$. Sea $x_3 \in X \times \{t\}$ tal que $x_3 \neq x_2 \neq x_1$, tomamos un punto $y \in Z \times \{0\}$ de tal forma que damos un arco, α, de y a x_3 y este no toca a x_1 ni x_2, posteriormente extendemos a α hasta el vértice del cono. Por tanto $Cono(Z) \setminus \{x_1, x_2\}$ es arcoconexo. □

Otro ejemplo importante de espacio cociente es la suspensión de un espacio:

Definición 1.2.10. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G} = \{\{(x, t)\} \mid x \in X \text{y } t \in (0, 1)\} \cup \{X \times \{0\}\} \cup \{X \times \{1\}\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es una descomposición de $X \times [0, 1]$. La *suspensión topológica de* X, denotada $Sus(X)$, es el espacio cociente $X \times [0, 1] / \mathcal{G}$. A los elementos $\{X \times \{0\}\}$ y $\{X \times \{1\}\}$ se le llama los *vértices de la suspensión* y se les denota por v^- y v^+, respectivamente.

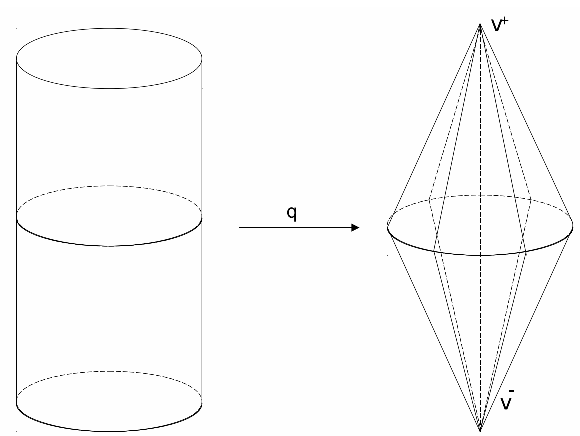

Figura 1.4: Suspensión topológica

Observación 1.2.11. En general la suspensión de un espacio métrico no es contraíble. Por ejemplo, $Sus(S^1)$ es homeomorfa a la esfera de dimensión dos, $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid ||x|| = 1\}$, la cual no es contraíble.

La siguiente definición nos habla del tipo de descomposiciones que requeriremos para obtener las propiedades necesarias en los espacios que estudiaremos en este trabajo.

Definición 1.2.12. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es una *descomposición semicontinua superiormente* si dados $G \in \mathcal{G}$ y un abierto U de X tal que $G \subset U$, existe un abierto V de X tal que $G \subset V$ y si $G' \in \mathcal{G}$ es tal que $G' \cap V \neq \emptyset$, entonces $G' \subset U$.

Teorema 1.2.13. *Si X es un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{G}$ es una descomposición semicontinua superiormente.

(2) La función cociente $q : X \to X/\mathcal{G}$ es una función cerrada; i.e., manda subconjuntos cerrados de X en subconjuntos cerrados de $X/\mathcal{G}$.

(3) Si U es un subconjunto abierto de X y $W_U = \bigcup\{G \in \mathcal{G} \mid G \subset U\}$, entonces W_U es un subconjunto abierto de X.

(4) Si D es un subconjunto cerrado de X y $K_D = \bigcup\{G \in \mathcal{G} \mid G \cap D \neq \emptyset\}$, entonces K_D es un subconjunto cerrado de X.

Demostración. Supongamos (1) probaremos (2). Supongamos que $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente, veremos que q es cerrada. Sea C un cerrado de X. Hay que ver que $q(C)$ es un cerrado de $X/\mathcal{G}$. Basta mostrar que $q^{-1}(q(C))$ es cerrado de X, lo cual es equivalente a probar que $X \setminus q^{-1}(q(C))$ es abierto. Sean $x \in X \setminus q^{-1}(q(C))$ y $G_x \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G_x$. Sea $U = X \setminus C$. Notemos que $G_x \subset U$. Como $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente entonces existe un abierto V tal que $G_x \subset V$ y si $G \in \mathcal{G}$ con $G \cap V \neq \emptyset$ entonces $G \subset U$. Afirmamos que $V \cap q^{-1}(q(C)) = \emptyset$. Sea $z \in V \cap q^{-1}(q(C))$. Entonces existe $c \in C$ tal que $q(c) = q(z)$. Esto implica que $G_z = G_c$. Como $G_z \cap V \neq \emptyset$, se tiene que $G_z \subset U$. Como $G_z = G_c$ y $c \in C$, esto implica que $G_z \cap C \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $X \setminus q^{-1}(q(C))$ es abierto en X y $q^{-1}(q(C))$ es cerrado.

Mostraremos (3) suponiendo (2). Supongamos que $q : X \to X/\mathcal{G}$ es cerrada. Sea U un abierto de X. Entonces $X \setminus U$ es un cerrado de X. Como q es cerrada entonces $q(X \setminus U)$ es un cerrado de $X/\mathcal{G}$. De donde se obtiene que, $q^{-1}(X/\mathcal{G} \setminus q(X \setminus U))$ es un abierto de X. Afirmamos que $q^{-1}(X/\mathcal{G} \setminus q(X \setminus U)) = W_U$. Si $x \in q^{-1}(X/\mathcal{G} \setminus q(X \setminus U))$, entonces $q(x) \in X/\mathcal{G} \setminus q(X \setminus U)$. De esto se sigue que, $q^{-1}(q(x)) \subset X \setminus q^{-1}(q(X \setminus U)) \subset$

$X \setminus (X \setminus U) = U$. Entonces $x \in W_U$. La otra contención es inmediata. Por tanto, W_U es un abierto de X.

Supongamos (3) veremos (4). Sea C un cerrado de X. Entonces $X \setminus C$ es un abierto de X. Esto implica que $W_{X\setminus C}$ es abierto de X. Afirmamos que $K_C = X \setminus W_{X\setminus C}$. Sean $x \in X \setminus W_{X\setminus C}$ y $G_x \in \mathcal{G}$, tal que $x \in G_x$. De esto se sigue que, $G_x \nsubseteq X \setminus C$, lo cual implica que $G_x \cap C \neq \emptyset$. Por tanto, $X \setminus W_{X\setminus C} \subset K_C$. Sean $x \in K_C$ y $G_x \in \mathcal{G}$, tales que $x \in G_x$ y $G \cap C \neq \emptyset$. De esto se sigue que, $x \in G \cap C$, lo cual implica que $x \in C$, de aquí tenemos que $G_x \subset C$, lo cual es equivalente a $G_x \subset X \setminus (X \setminus C)$. Entonces, $x \in X \setminus W_{X\setminus C}$. Por tanto, $K_C = X \setminus W_{X\setminus C}$.

Supongamos (4) mostraremos (1). Sean $G \in \mathcal{G}$ y U un abierto de X tal que $G \subset U$. Notemos que $X \setminus U$ es cerrado, de esto se sigue que $K_{X\setminus U}$ es un cerrado de X. Sea $V = X \setminus K_{X\setminus U}$. Entonces $G \subset V \subset U$. Además, si $G' \in \mathcal{G}$ y $G' \cap V \neq \emptyset$, entonces $G' \subset U$. Por tanto, se satisface (1). □

Corolario 1.2.14. *Si X es un espacio métrico y $\mathcal{G}$ es una descomposición semicontinua superiormente de X entonces los elementos de $\mathcal{G}$ son subconjuntos cerrados de X.*

Demostración. Sean $x \in X$, $G_x \in \mathcal{G}$ con $x \in G_x$. Como $\{x\}$ es cerrado en X y $q(\{x\})$ es cerrado en $X/\mathcal{G}$ ya que q es cerrada (Teorema 1.2.13). Entonces $q^{-1}q(\{x\}) = G_x$ es cerrado en X. □

1.3. Continuos

En esta sección definiremos la clase de espacios en la que estamos interesados; esto es, la clase de los continuos. También presentaremos las propiedades que necesitaremos posteriormente.

Definición 1.3.1. Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo el cual está contenido en un espacio métrico. Diremos que un continuo es *no degenerado* si tiene más de un punto.

A continuación presentaremos algunos ejemplos de continuos.

Definición 1.3.2. Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo [0,1]. A las imágenes de $\{0\}$ y $\{1\}$, bajo un homeomorfismo, les llamaremos los *puntos extremos* del arco.

Definición 1.3.3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una *n-celda* es un espacio homeomorfo a $[0,1]^n$.

Definición 1.3.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. La *esfera unitaria de dimensión n en* $\mathbb{R}^{n+1}$, denotada como S^n, es el conjunto:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}.$$

Definición 1.3.5. Sea $n > 2$. Decimos que un continuo X es un *n-odo simple*, si existen un punto v de X, llamado *vértice*, y n subarcos A_1,...,A_n de X tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ y $A_j \cap A_k = \{v\}$ si $j \neq k$.

Definición 1.3.6. Si $W = \left\{ \left(x, \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1 \right\}$, entonces $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(W)$ es un continuo llamado *la curva sinoidal del topólogo*.

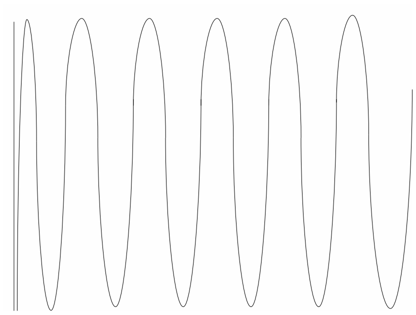

Figura 1.5: Curva sinoidal del topólogo

Lema 1.3.7. *Sean X es un espacio métrico y compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Si U es un abierto de X tal que $\cap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U$, para todo $n \geq N$.*

Demostración. Sea U un abierto de X tal que $\cap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$. Entonces $X \setminus U$ es cerrado. Como $\cap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, de esto se sigue, por las leyes de De Morgan, que $X \setminus U \subset \cup_{n=1}^{\infty}(X \setminus X_n)$. Como X es compacto, entonces $X \setminus U$ es compacto. De donde existen n_1,...,$n_p \in \mathbb{N}$ tales que $X \setminus U \subset \cup_{j=1}^{p}(X \setminus X_{n_j})$. Sea $N = \text{máx}\{n_1,...,n_p\}$. Entonces $\cup_{j=1}^{p}(X \setminus X_{n_j}) = X \setminus X_N$. Por tanto, $X_N \subset U$. $\square$

Una manera muy utilizada para construir continuos nos la da el siguiente resultado:

Teorema 1.3.8. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tal que $X_{n+1} \subset X_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $X = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$ entonces X es un continuo.*

Demostración. Sea $X = \cap_{n=1}^{\infty} X_n$. Como cada X_n es un continuo, tenemos que, en particular, cada X_n es un cerrado de X_1. Como X_1, es compacto, por la propiedad de la intersección finita, $X \neq \emptyset$ y es compacto. Ahora veremos que X es conexo. Supongamos que X no es conexo. Entonces $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados, no vacíos y ajenos de X. Sean U y V abiertos y ajenos de X_1, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Por el Lema 1.3.7, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset U \cup V$. De donde $X_n = (X_n \cap U) \cup (X_n \cap V)$. Como $A \cup B = X \subset X_n$, se tiene que $X_n \cap U \neq \emptyset$ y $X_n \cap V \neq \emptyset$, pero esto implica que X_n no es conexo, lo cual es una contradicción. Por tanto, X es conexo. □

El Teorema 1.3.8 nos permite dar los siguientes ejemplos de continuos.

Definición 1.3.9. *La curva universal de Sierpiński.* Empezamos dividiendo el cuadrado $S_0 = [0,1] \times [0,1]$ en nueve cuadrados congruentes y tomamos $S_1 = S_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Análogamente, dividimos cada uno de los restantes ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes, y llamamos S_2 al continuo que se obtiene al quitar el interior de cada uno de los ocho cuadrados centrales. Continuando de esta manera, definimos S_3, S_4, etc. Sea $\mathcal{S} = \cap_{n=1}^{\infty} S_n$, entonces $\mathcal{S}$ es un continuo, (Teorema 1.3.8) llamado la curva universal de Sierpński.

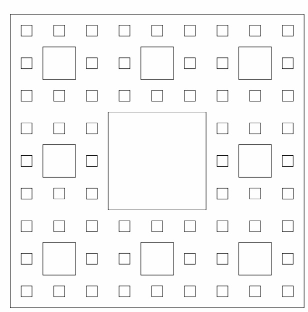

Figura 1.6: Curva universal de Sierpiński

Definición 1.3.10. *La curva universal de Menger.* Consideremos primero al cubo $M = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dividamos cada una de las caras de M en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero a través del interior de cada cuadrado central, lo que nos da un continuo M_1. Dividamos cada uno de los restantes cuarenta y ocho cuadrados en nueve cuadrados congruentes y hagamos un agujero a través del interior de los cuadrados centrales, de esta manera obtenemos un continuo M_2. Repetimos este proceso para obtener continuos M_n. De esta manera definimos $\mathcal{M} = \cap_{n=1}^{\infty} M_n$, el cual es un continuo, (Teorema 1.3.8) llamado la curva universal de Menger.

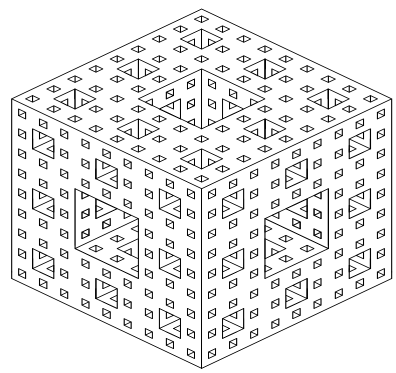

Figura 1.7: Curva de Menger

Lo siguiente será definir algunas propiedades que tienen los continuos.

Definición 1.3.11. Sean X un continuo y p un punto de X. Decimos que X es *conexo en pequeño en* p si para cualquier abierto U de X tal que $p \in U$, existe un abierto V de X tal que $p \in V \subset U$ y para cualquier punto $z \in V$, existe un subconjunto conexo C_z de X tal que $\{x, z\} \in C_z \subset U$.

El siguiente resultado nos proporciona dos definiciones equivalentes a la conexidad en pequeño en un punto.

Teorema 1.3.12. *Si X es un continuo y p es un punto de X entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es conexo en pequeño en p.

(2) Para cada subconjunto cerrado F de X tal que $F \subset X \setminus \{p\}$, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus F$.

(3) Para cada subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset U$.

Demostración. Supongamos (1) probaremos (2). Sean $p \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tal que $F \subset X \setminus \{p\}$ y $U = X \setminus F$. Entonces U es un abierto de X y $p \in U$. Por ser X métrico, existe un abierto R de X tal que $p \in R \subset Cl_X(R) \subset U$. Como X es conexo en pequeño en p, existe un subconjunto abierto V de X tal que $p \in V \subset R$ y si $x \in V$ entonces existe un subconjunto conexo C_x tal que $\{p, x\} \subset C_x \subset R$. Sea $W = Cl_X(\cup_{x \in V} C_x)$. Observemos que W es un subcontinuo de X, $V \subset W \subset Cl_X(R) \subset U$. Por tanto, W cumple con lo requerido y (2) se satisface.

Supongamos que (2) se satisface y mostraremos (3). Sean $p \in X$ y U un abierto de X tal que $p \in U$. Sea $F = X \setminus U$, se tiene que F es un cerrado de X y $p \notin F$. Como (2) se satisface, existe un continuo W de X tal que $p \in W \subset X \setminus F = U$. Por tanto, (3) se cumple.

Veremos que (1) se cumple suponiendo (3). Sean $p \in X$ y U un abierto de X tal que $p \in U$. Como (3) se cumple, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in W \subset U$. Sea $V = Int_X(W)$. Con esto, se cumple (1). $\square$

Definición 1.3.13. Sean X un continuo y p un punto de X. Decimos que X es *localmente conexo en p* si para todo abierto U de X tal que $p \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. Decimos que X es *localmente conexo* si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 1.3.14. Este continuo es un ejemplo de un continuo que es conexo en pequeño en el punto p, pero no es localmente conexo en el punto p.

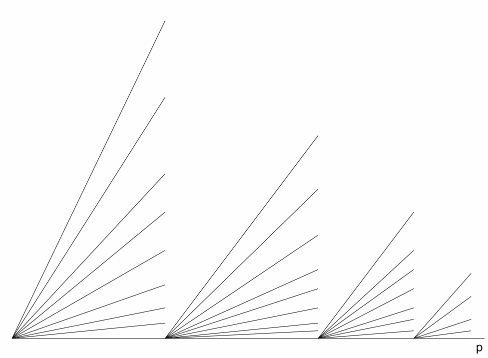

Figura 1.8

Notemos que sólo definimos la conexidad en pequeño puntualmente, la razón está dada por el siguiente teorema:

Teorema 1.3.15. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Demostración. Claramente, si X es localmente conexo, entonces X es conexo en pequeño en todos sus puntos.

Supongamos que X es conexo en pequeño en todos sus puntos. Sean U un abierto de X y C una componente de U. Hay que ver que C un es abierto en X. Sea $p \in C$. Como X es conexo en pequeño en p, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset U$ (Teorema 1.3.12). Notemos que W es un subconjunto conexo de U, $W \cap C \neq \emptyset$ y C es una componente de U. Entonces $W \subset C$. Por tanto, p es un punto interior de C. Así, C es abierto en X. Por lo tanto, X es localmente conexo. $\square$

Definición 1.3.16. Un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios H y K de X tales que $X = H \cup K$. Decimos que X es *hereditariamente descomponible* si todos sus subcontinuos no degenerados son descomponibles.

Definición 1.3.17. Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Decimos que X es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Definición 1.3.18. Un continuo X es *arcoconexo* si para cualesquiera dos puntos y y y de X existe un arco α, contenido en X, cuyos puntos extremos son x y y. Decimos que X es *localmente arcoconexo* si dado un abierto U de X y dos puntos x y y en X, existe un arco α en U cuyos puntos extremos son x y y.

Definición 1.3.19. Dado un continuo X, sea A un subcontinuo de X, decimos que A es un *continuo terminal* si dado otro subcontinuo B de X tal que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \subset B$ o $B \subset A$.

1.4. Hiperespacios

Aquí damos la definición de los principales hiperespacios asociados a un continuo y presentamos algunas de sus propiedades.

Definición 1.4.1. Dado un continuo X, definimos sus *hiperespacios* como los siguientes conjuntos:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\};$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\};$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

A $C_n(X)$ se le llama el *n-ésimo hiperespacio de* X y a $F_n(X)$ se le llama el *n-ésimo producto simetrico de X*. A $C_1(X)$ se le acostumbra denotar por $C(X)$.

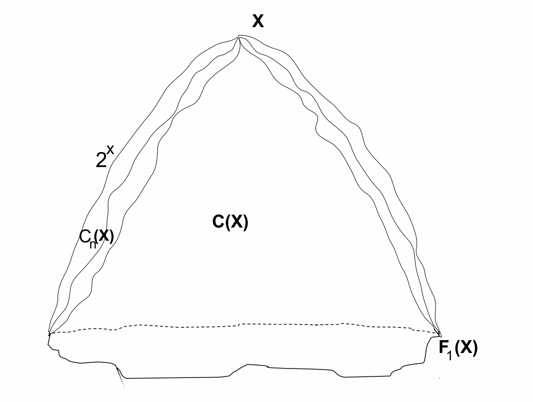

Figura 1.9: Hiperespacios

Observación 1.4.2. Notemos que si $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$F_n(X) \subset C_n(X);$$

$$C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$$

y que:

$$F_n(X) \subset F_{n+1}(X).$$

En el siguiente teorema le definiremos una métrica a 2^X, así tendremos que los hiperespacios son espacios continuos.

Teorema 1.4.3. *Si X es un continuo con métrica d entonces la función $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida por:*

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid A \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(B) \text{ y } B \subset \mathcal{V}_\varepsilon^d(A)\}$$

es una métrica para 2^X, la cual es llamada la métrica de Hausdorff.

Demostración. Para ver que $\mathcal{H}$ es una métrica, probaremos lo siguiente.

1. Veamos que $\mathcal{H}(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in A$. Como $\mathcal{H}(A, B) = 0$ y $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) \leq \varepsilon$. Esto implica que $a \in Cl_X(B)$. De donde, $a \in B$, pues B es cerrado. Análogamente si $b \in B$, entonces $b \in A$. Por tanto, $A = B$. Claramente si $A = B$ entonces $\mathcal{H}(A, B) = 0$.

2. El hecho $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(B, A)$, es inmediato de la definición.

3. Mostraremos que $\mathcal{H}(A, C) \leqslant \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.
Sean A, B y $C \in 2^X$ y $\eta > 0$. Sean $M_A = \mathcal{H}(A, B) + \frac{\eta}{2}$ y $M_B = \mathcal{H}(B, C) + \frac{\eta}{2}$. Ahora, observemos que $A \subset \mathcal{V}^d_{M_A}(B)$ y $B \subset \mathcal{V}^d_{M_B}(C)$. Entonces, dado $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \mathcal{H}(A, B) + \frac{\eta}{2}$. Análogamente, dado $b \in B$, existe $c \in C$ tal que $d(b, c) < \mathcal{H}(B, C) + \frac{\eta}{2}$. De esto se sigue que $d(a, c) < \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C) + \eta$. Definimos $N = \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C) + \eta$, entonces $A \subset \mathcal{V}^d_N(C)$, siguiendo este mismo argumento, tenemos que $C \subset \mathcal{V}^d_N(A)$. Como η fue arbitraria, por la definición de $\mathcal{H}$ tenemos, $\mathcal{H}(A, C) \leqslant \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$. $\square$

Definición 1.4.4. Sean X un continuo y $U_1, ..., U_m$ una colección finita de subconjuntos no vacíos de X. Definimos:

$$\langle U_1, ..., U_m \rangle = \{A \in 2^X \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_j \text{ y } A \cap U_j \neq \emptyset \text{ para cada } j \in \{1, ..., m\}\}.$$

Sea

$\mathbb{B} = \{\langle U_1, ..., U_m \rangle \mid U_1, ..., U_m$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de X y $m \in \mathbb{N}\}$.

Una demostración del siguiente resultado se puede encontrar en [34, (0.13)].

Teorema 1.4.5. *Si X es un continuo y $\mathbb{B}$ es la familia dada en la Definición 1.4.4 entonces $\mathbb{B}$ es una base para una topología de 2^X, llamada Topología de Vietoris.*

El siguiente teorema nos dice que la topología inducida por la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris coinciden, una prueba está en [34, (0.11)].

Teorema 1.4.6. *Si X es un continuo entonces la topología inducida por la métrica de Hausdorff en 2^X y la topología de Vietoris coinciden.*

Definición 1.4.7. Sean X un continuo y A y B dos elementos de 2^X. Un *arco de orden de A a B* es una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y para cualesquiera dos elementos t y s de $[0,1]$ tales que $s < t$ se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para que existan arcos de orden en 2^X [34, (1.8)].

Teorema 1.4.8. *Sean X un continuo y A y B dos elementos de 2^X. Entonces existe un arco de orden de A a B si y sólo si $A \subset B$ y toda componente de B intersecta a A.*

Como consecuencia del Teorema 1.4.8 tenemos:

Corolario 1.4.9. *Sean X un continuo y A y B dos elementos de $C(X)$. Entonces existe un arco de orden de A a B si y sólo si $A \subset B$.*

Usando arcos de orden se demuestra el siguiente teorema (véase [34, (1.13)]) y [26, 1.8.12]).

Teorema 1.4.10. *Si X es un continuo entonces 2^X y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n(X)$ son continuos arcoconexos.*

Teorema 1.4.11. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Sean d una métrica para X y D_n la métrica para X^n definida como sigue:

$$D_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \text{máx}\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n, y_n)\}.$$

Consideremos la siguiente función:

$$g_n : X^n \to F_n(X)$$

definida como:

$$g_n((x_1, ..., x_n)) = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Probaremos que g_n es continua y suprayectiva. Sean $\varepsilon > 0$ y $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in X^n$ tales que $D_n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \text{máx}\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n, y_n)\} < \varepsilon$, de esto se sigue que, $d(x_j, y_j) < \varepsilon$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Además, se tiene que, $x_j \in g_n((y_1, ..., y_n))$ y $y_j \in g_n((x_1, ..., x_n))$. Esto implica que:

$$g_n((x_1, ..., x_n)) \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(g_n((y_1, ..., y_n)))$$

y que:

$$g_n((y_1, ..., y_n)) \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(g_n((x_1, ..., x_n))).$$

De donde se tiene que:

$$\mathcal{H}(g_n((x_1, ..., x_n)), g_n((y_1, ..., y_n))) < \varepsilon.$$

Por tanto, g_n es continua.

La suprayectividad de g_n es clara. Como X^n es un continuo, por lo antes probado, se tiene que $F_n(X)$ es un continuo. □

Ahora daremos la definición de la *propiedad de Kelley* y, posteriormente, presentaremos algunos resultados que la involucran.

Definición 1.4.12. Decimos que un continuo X tiene la *propiedad de Kelley en un punto* a de X si para cada $\varepsilon > 0$, existe un numero $\delta > 0$, que depende de ε y a, tal que para cualquier punto b de X con $d(a, b) < \delta$ y para cada subcontinuo A de X tal que $a \in A$, existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$. Un continuo X tiene la *propiedad de Kelley* si la tiene en cada uno de sus puntos. A δ se le conoce como *un número de Kelley.*

Lema 1.4.13. *Sea X un continuo que tiene la propiedad de Kelley. Si $\mathcal{W}$ es un subcontinuo de $C(X)$ tal que no contiene a X e $Int_{C(X)}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$ entonces $\cup\mathcal{W} \in C(X)$ e $Int_X(\cup\mathcal{W}) \neq \emptyset$.*

Demostración. Notemos primero que, por [34, (1.49)], se cumple que $\cup\mathcal{W} \in C(X)$. Sean $A \in Int_{C(X)}(\mathcal{W})$, $a \in A$ y escojamos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}^{\mathcal{H}}_\varepsilon(A) \subset Int_{C(X)}(\mathcal{W})$. Sea $\delta > 0$ un número de Kelley para la ε dada. Claramente $A \subset \cup\mathcal{W}$. Sea $b \in \mathcal{V}^d_\delta(a)$. Como X tiene la propiedad de Kelley , existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(B, A) < \varepsilon$. De lo anterior se sigue que $B \in \mathcal{W}$. De donde, $B \subset \cup\mathcal{W}$. En particular, $b \in \cup\mathcal{W}$. Por tanto, $\mathcal{V}^d_\delta(a) \subset \cup\mathcal{W}$ e $Int_X(\cup\mathcal{W}) \neq \emptyset$. □

El siguiente teorema nos dice que X es el único punto de conexidad local de $C(X)$, siendo X un continuo indescomponible con la propiedad de Kelley.

Teorema 1.4.14. *Si X es un continuo indescomponible que tiene la propiedad de Kelley entonces X es el único punto de $C(X)$ en el cual es localmente conexo.*

Demostración. Usando arcos de orden, Corolario 1.4.9, es fácil ver que dada $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}_{\varepsilon}^{\mathcal{H}}(X)$ es arcoconexa. Supongamos que $C(X)$ es localmente conexo en $A \neq X$. Como $C(X)$ es localmente conexo en A, existe un subcontinuo $\mathcal{W}$ de $C(X)$ tal que $A \in Int_{C(X)}(\mathcal{W})$ y $\cup\mathcal{W} \neq X$. Por el Lema 1.4.13, $\cup\mathcal{W} \in C(X)$ e $Int_X(\cup\mathcal{W}) \neq \emptyset$. Lo cual implica que X es descomponible [26, 1.7.20]. □

Una demostración del siguiente resultado se obtiene de [34, (1.176)], [26, 6.2.4] y [24, Teorema 8].

Teorema 1.4.15. *Si X es un continuo entonces lo siguiente se cumple:*
(1) 2^X es unicoherente;
(2) $C_n(X)$ es unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$;
(3) $F_n(X)$ es unicoherente para cada $n \geq 3$.

Para una demostración del siguiente resultado véase [34, 1.92] y [26, 6.1.4].

Teorema 1.4.16. *Si X es un continuo entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
(1) X es localmente conexo;
(2) $C_n(X)$ es localmente conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$;
(3) 2^X es localmente conexo.

Teorema 1.4.17. *Si X es un continuo entonces $C(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo si y sólo si X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que $C(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo y que X no es localmente conexo. Entonces existe un punto p en el cual X no es conexo en pequeño, Teorema 1.3.15. En consecuencia, existe $\delta > 0$ tal que si V es una vecindad de p y $V \subset \mathcal{V}_{\delta}^{d}(p)$ entonces V no es conexo.

Sean V una vecindad de p tal que $Cl_X(V) \subset \mathcal{V}_{\delta}^{d}(p)$ y A' la componente de $Cl_X(V)$ que tiene a p. Entonces, por [39, 12.1, p.18] tenemos que:

1. $p \in A'$;
2. $A' \subset \mathcal{V}_{\delta}^{d}(p)$;

3. Existen un subcontinuo A de A' y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $A_n \cap A = \emptyset$. De hecho, ningún A_n está contenido en la componente de $\mathcal{V}_\delta^d(p)$ que tiene a p.

Como $A \in \langle \mathcal{V}_\delta^d(p) \rangle \cap (C(X) \setminus F_1(X))$ y $C(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo, existe un abierto conexo W de $C(X) \setminus F_1(X)$ tal que $A \in W \subset Cl_{C(X)}(W) \subset \langle V_\delta^d(p) \rangle \cap (C(X) \setminus F_1(X))$.

Como $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in W$ si $n \geq N$. Entonces $Z = \bigcup Cl_{C(X)}(W)$ es un subcontinuo de X ([34, (1.49)]) contenido en $\mathcal{V}_\delta^d(p)$ y que contiene a A_n para cada $n \geq N$. Lo cual es una contradicción, pues los A_n están contenidos en diferentes componentes de $\mathcal{V}_\delta^d(p)$. Por tanto, X es localmente conexo.

Ahora supongamos que X es localmente conexo. Notemos que $C(X) \setminus F_1(X)$ es abierto y conexo en $C(X)$. Ya que si $A \in C(X) \setminus F_1(X)$, por el Corolario 1.4.9, existe un arco de orden $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = X$. Es claro que $\alpha([0,1]) \cap F_1(X) = \emptyset$.

Por el Teorema 1.4.16, $C(X)$ es localmente conexo. De donde, por [36, 8.26], $C(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo. □

A continuación definiremos una herramienta que ha resultado fundamental para el estudio de los hiperespacios.

Definición 1.4.18. Sean X un continuo y $\mathcal{L} \in \{2^X, C_n(X), F_n(X)\}$. Una *función de Whitney para* $\mathcal{L}$ es una función continua $\mu : \mathcal{L} \to [0,1]$ tal que:
(1) $\mu(X) = 1$;
(2) Si A y B son dos elementos de $\mathcal{L}$ y $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$;
(3) $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$.

Observación 1.4.19. Las funciones de Whitney fueron definidas originalmente por H. Whitney. En [34, (0.50)] se pueden encontrar varias construcciones de una función de Whitney para 2^X.

Teorema 1.4.20. *Si X es un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney entonces μ es monótona y abierta (i.e., μ manda abiertos de $C(X)$ en abiertos de $[0,1]$).*

Demostración. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Veamos que μ es abierta. Sean $P \in C(X)$, $\varepsilon > 0$, $K \in \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)$ y $x \in K$. Veremos que μ es abierta.

Consideremos un arco de orden α_K que va de $\{x\}$ a X tal que $K \in \alpha_K$. Observemos que, $\alpha_K \cap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)$ es un abierto de α_K y que $\mu|_{\alpha_K}$ es un homeomorfismo. Entonces $\mu(\alpha_K \cap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P))$ es un abierto de $[0,1]$. Notemos que

$$\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P) = \bigcup_{K \in \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)} \left(\alpha_K \bigcap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)\right).$$

Aplicándole la función μ, nos queda:

$$\mu(\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)) = \mu\left(\bigcup_{K \in \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)} \left(\alpha_K \bigcap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)\right)\right) = \bigcup_{K \in \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)} \mu\left(\alpha_K \bigcap \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P)\right),$$

pero cada conjunto de la unión es un abierto de $[0,1]$. Entonces, $\mu(\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(P))$ es abierto en $[0,1]$. Por tanto, μ es abierta.

Veamos que μ es monótona. Sea $t \in [0,1]$. Nos fijamos en $\mu^{-1}(t)$. Notemos que, $\mu([t,1])$ es arcoconexo, pues para cada $S \in \mu([t,1])$ podemos encontrar un arco de orden en $C(X)$ que va de S hasta X. De manera similar se ve que, $\mu([0,t])$ es conexo. Como $C(X)$ es unicoherente, Teorema 1.4.15, $C(X) = \mu([t,1]) \cup \mu([0,t])$ y $\mu([t,1]) \cap \mu([0,t]) = \mu^{-1}(t)$, $\mu^{-1}(t)$ es conexo. Por tanto, μ es monótona. $\square$

Capítulo 2

El Hiperespacio Suspensión

2.1. Definición y Ejemplos

Aquí introducimos los espacios que serán nuestro objeto de estudio, los hiperespacios suspensión. El Profesor Sam B. Nadler, Jr. los definió en 1979 [35] para presentar una familia de continuos tipo-disco con la propiedad del punto fijo. Aunque propiamente no es un hiperespacio le llama así por la similitud con la suspensión topológica (Teorema 2.2.9).

Definición 2.1.1. Dado un continuo X, definimos el *hiperespacio suspensión de* X, denotado por $HS(X)$, como: $HS(X) = C(X) \diagup F_1(X)$ con la topología cociente.

Observación 2.1.2. Notemos que dado un continuo X, $HS(X)$ no es, realmente, un hiperespacio, ya que $HS(X)$ no es un subconjunto de la potencia de X. El Profesor Nadler le dio este nombre a este espacio por su semejanza a una suspensión topológica (véase Teorema 2.2.9).

Notación 2.1.3. Sea X un continuo. Entonces $q_X : C(X) \to HS(X)$ denotará a la función cociente, $T_X = q_X(X)$ y F_X representará al punto $q_X(F_1(X))$. Notemos que q_X es monótona.

Teorema 2.1.4. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ es un continuo arcoconexo.*

Demostración. Por el Teorema 1.4.10, $C(X)$ es un continuo arcoconexo. Como q_X es una función continua y $q_X(C(X)) = HS(X)$, $HS(X)$ es arcoconexo. □

Observación 2.1.5. Si X es un continuo entonces $C(X) \setminus F_1(X)$ y $C(X) \setminus (F_1(X) \cup \{X\})$ son homeomorfos a $HS(X) \setminus \{F_X\}$ y a $HS(X) \setminus \{F_X, T_X\}$, respectivamente, usando la restricción apropiada de q_X.

Ahora damos los modelos de hiperespacios para algunos continuos, empezaremos describiendo $F_2[0,1]$, pues este nos servirá para el Teorema 2.2.14.

Ejemplo 2.1.6. Si X es $[0,1]$ entonces su hiperespacio $F_2([0,1])$ es de la siguiente forma. Consideremos los elementos de $F_2([0,1])$ de la forma $\{a,b\}$, donde se permite que $a=b$, esto para incluir los elementos de un sólo punto. Definimos la siguiente función: $\gamma : F_2(X) \to \mathbb{R}^2$ como, $\gamma(\{a,b\}) = (\min\{a,b\}, \max\{a,b\})$. Claramente, γ es continua. Además, cada conjunto $\{a,b\}$ está determinado de manera única. Ahora notemos que $0 \leq \min\{a,b\} \leq \max\{a,b\} \leq 1$, y cualquier pareja de la forma (x,y) con $0 \leq x \leq y \leq 1$ es igual a $\gamma(\{x,y\})$, por lo que la imagen de γ es exactamente el triángulo $T = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

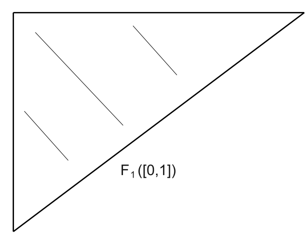

Figura 2.1: $F_2([0,1])$

Ejemplo 2.1.7. Si X es $[0,1]$ entonces su hiperespacio $C(X)$ está definido de la siguiente forma $C([0,1]) = \{[a,b] \subset [0,1] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Consideremos el siguiente conjunto, $E = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Sea $h : C(X) \to E$ dada por $h([a,b]) = (a,b)$ el cual es un homeomorfismo. Con esto, podemos concluir que $C(X)$ es una 2-celda como se muestra en la Figura **??**.

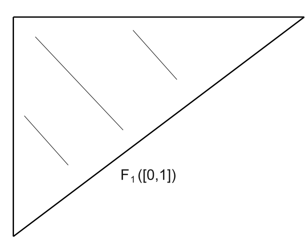

Figura 2.2: $C([0,1])$

Notemos que $F_1([0,1])$ es la hipotenusa del triángulo. De modo que, al identificarlo a un punto nos da una 2-celda. Por tanto, $HS(X)$ es una 2-celda.

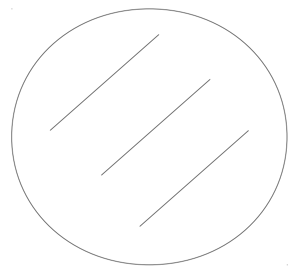

Figura 2.3: $HS([0,1])$

Ejemplo 2.1.8. Consideremos la circunferencia unitaria S^1. Para determinar el hiperespacio de la circunferencia, $C(S^1)$, notemos que, la circunferencia tiene como subcontinuos a los conjuntos que forman un sólo punto, los subarcos y S^1 mismo. Cada subarco A está determinado por su punto medio $m(A)$ y por su longitud $l(A)$. Con esto, podemos definir una función que nos represente todos los puntos de la circunferencia. Sea $f : C(S^1) \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(A) = \begin{cases} \left(1 - \left[\dfrac{l(A)}{2\pi}\right]\right) \cdot m(A), & \text{si } A \neq S^1; \\ (0,0), & \text{si } A = S^1; \end{cases}$$

Con esta función, podemos representar a todos los subcontinuos de la circunferencia, por ejemplo; los continuos de un sólo punto van a dar a la orilla de S^1, S^1 va a dar al origen y los subarcos que tienen una longitud predeterminada y fija constituyen una circunferencia con centro en el origen. De aquí, tenemos un modelo para $C(S^1)$, el cual es el disco unitario.

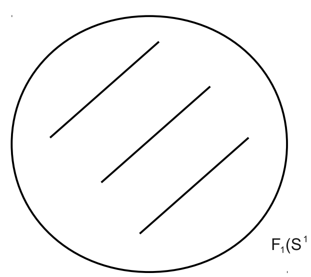

Figura 2.4: $C(S^1)$

Notemos que la orilla de la circunferencia es $F_1(S^1)$. Por lo que, al identificarlo a un punto lo que nos queda es una 2-esfera

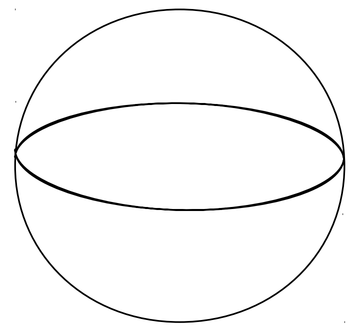

Figura 2.5: $HS(S^1)$

Ejemplo 2.1.9. Sea X un triodo simple. Una forma sencilla de visualizar este continuo es como la unión de tres segmentos que sólo se intersectan en el origen de $\mathbb{R}^3$ y tienen longitud uno. Llamemos L_1, L_2 y L_3 a los tres segementos y v al origen. Observemos que hay dos clases de subcontinuos en X, los subcontinuos que tienen a v y los que no lo tienen. Consideremos un subcontinuo K que contenga a v, definimos $M_n = K \cap L_n$ para $n \in \{1, 2, 3\}$. Entonces, cada M_n es un subcontinuo de L_n que contiene a v. Sea k_n la longitud de M_n. De manera que a K podemos asignarle (k_1, k_2, k_3) en $\mathbb{R}^3$. Notemos que, cada longitud de k_n puede variar de 0 a 1, entonces la imagen de esta asociación es una 3-celda. Ahora veamos cómo son los subcontinuos que no contienen a v, pero éstos son arcos. Por el Ejemplo 2.1.7, sabemos que forman una 2-celda. Con esto, determinamos que $C(X)$ del triodo simple nos queda de la siguiente forma:

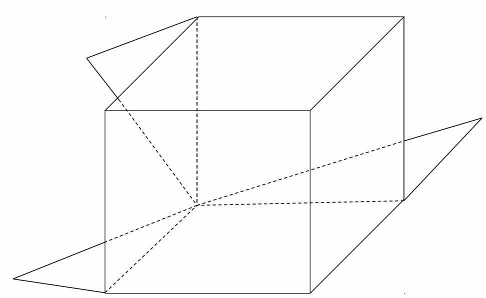

Figura 2.6: $C(X)$

Observemos que, las hipotenusas representan a $F_1(X)$. Al identificar $F_1(X)$ a un punto nos queda una figura muy parecida.

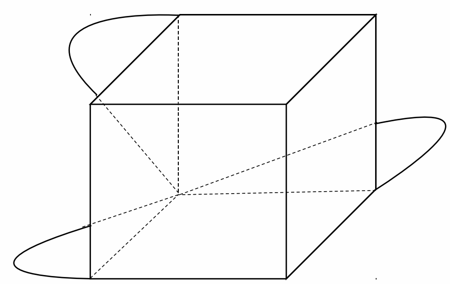

Figura 2.7: $HS(X)$

Con esto podemos concluir que, $C(X)$ es homeomorfo a $HS(X)$.

Ejemplo 2.1.10. Si $X = Cl_X\left(\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\right\}\right)$ entonces $C(X)$ es homeomorfo al $Cono(X)$ [19, 7.0].

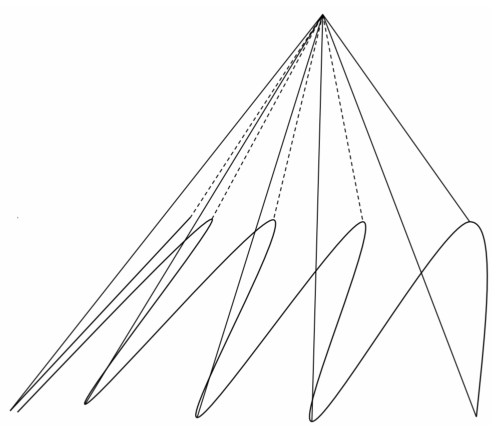

Figura 2.8: $C(X)$

Existe un homeomorfismo de $Cono(X)$ en $C(X)$ que manda a la base del cono en $F_1(X)$ (Teorema 2.2.9). Entonces al tomar el cociente $C(X)/F_1(X)$ nos queda que $HS(X)$ es homeomorfo a $Sus(X)$.

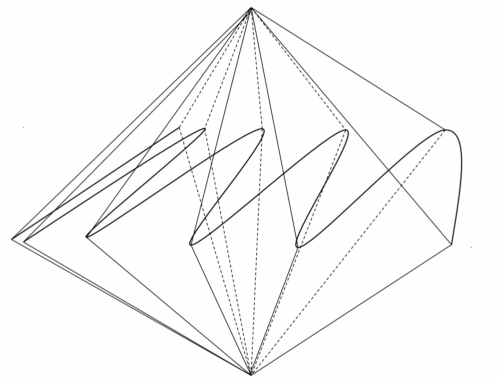

Figura 2.9: $HS(X)$

Nuestro siguiente objetivo es estudiar el hiperespacio suspensión de los abanicos suaves. Para esto, primero daremos la definición de dendroide.

Definición 2.1.11. Un *dendroide* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. Definimos el *orden* de un punto p en un dendroide X, $ord(p, X)$, como el número de arco componentes de $X \setminus \{p\}$. Un punto p de un dendroide X es de *ramificación* si $ord(p, X) \geq 3$. Un *punto extremo* de un dendroide X es un punto de orden 1, $E(X)$ denota al conjunto de todos los puntos extremos de un dendroide X .

Ejemplo 2.1.12. El siguiente dendroide es el llamado *peine*, el cual denotamos por X. En este ejemplo tenemos una infinidad de puntos de ramificación. El espacio se define como:

$$X = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right)$$

}

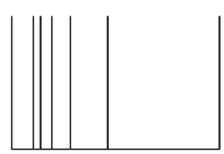

Figura 2.10: Peine

Definición 2.1.13. Un *abanico*, F, es un dendroide con un único punto de ramificación. El único punto de ramificación de un abánico F es llamado *el vértice de* F, y lo denotaremos por τ. Una *pata* de F es el único arco en F que va de τ a algún punto extremo de F.

Ejemplo 2.1.14. *El abanico armónico* se define de la siguiente forma. Sea $F = \{1\} \times (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^2$ y $v = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. El abanico armónico es la unión de todos los segmentos rectilíneos que van de v a cada uno de los puntos de F.

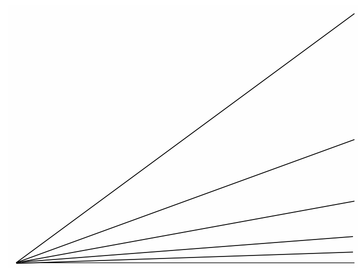

Figura 2.11: Abanico armónico

Notación 2.1.15. Dado un punto x en un punto F, $\overline{\tau x}$ denota al único arco en F que va de τ a x.

Definición 2.1.16. Dado un subconjunto cerrado A de un abanico F, sea $C_A(F) = \{K \in C(F) \mid A \subset K\}$. Si $A = \{p\}$ escribiremos $C_p(F)$ en vez de $C_{\{p\}}(F)$.

Definición 2.1.17. Sea F un abanico con vértice τ. Definimos *la parte de dimensión 2 de* $C(F)$ como:

$$T[C(F)] = \bigcup_{e \in E(F)} C(\overline{\tau e})$$

$T[C(F)]$ [30, 3.1]. Una cosa que podemos observar es que $C(\overline{\tau e})$ es una 2-celda, Ejemplo 2.1.7.

Observación 2.1.18. $C(\overline{\tau e}) \cap C(\overline{\tau e'}) = \{\{\tau\}\}$ si y sólo si $e \neq e'$. Para ver que esto ocurre, notemos que si $e = e'$ entonces $\overline{\tau e} = \overline{\tau e'}$, de donde $C(\overline{\tau e}) = C(\overline{\tau e'})$. Si $e \neq e'$, entonces los arcos $\overline{\tau e}$ y $\overline{\tau e'}$ son distintos. Como F es un abanico, $\overline{\tau e} \cap \overline{\tau e'} = \{\tau\}$. De donde se obtiene que $C(\overline{\tau e}) \cap C(\overline{\tau e'}) = \{\{\tau\}\}$.

Definición 2.1.19. Decimos que un abanico F es *suave* si dada una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de puntos de F que converge a un punto x, entonces la sucesión de arcos $\{\overline{\tau x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge al arco $\overline{\tau x}$, con respecto a la métrica de Hausdorff.

Teorema 2.1.20. *Si F es un abanico suave, entonces $HS(F)$ es homeomorfo a $C(F)$.*

Demostración. Por [10, Teorema 3.1], tenemos que $C(F) = C_\tau(F) \cup T[C(F)]$, donde $C_\tau(F)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert o $[0,1]^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Notemos que:

$$F_1(F) = \bigcup_{e \in E(F)} F_1(\overline{\tau e}) \subset \bigcup_{e \in E(F)} \partial(C(\overline{\tau e})) \subset T(C(F)).$$

Sea $e \in E(F)$. Observemos que, por el Ejemplo 2.1.7, $C(\overline{\tau e})$ es una 2-celda y $F_1(\overline{\tau e}) \subset \partial C(\tau e)$. De aquí se sigue que $T[C(F)]/F_1(F)$ es homeomorfo a $T[C(F)]$. Como $F_1(F) \cap C_\tau(F) = \{\{\tau\}\}$, tenemos que $HS(F)$ es homeomorfo a $C_\tau(F) \cup [T[C(F)]/F_1(F)]$. Entonces $HS(F)$ es homeomorfo a $C(F)$. □

2.2. Propiedades Generales

Lema 2.2.1. *Sean X un continuo y $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Si $\mathcal{U}$ es un abierto de $C(X)$ tal que $F_1(X) \subset \mathcal{U}$ entonces existe $t > 0$ tal que $\mu^{-1}([0,t]) \subset \mathcal{U}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de $C(X)$ tal que $F_1(X) \subset \mathcal{U}$. Supongamos que para cualquier $t > 0$ pasa que $\mu^{-1}([0,t]) \nsubseteq \mathcal{U}$. Consideremos una sucesión decreciente $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a 0.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n \in \mu^{-1}([0,t_n]) \setminus \mathcal{U}$. Como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $A \in C(X) \setminus \mathcal{U}$. Como μ es continua, $A_n \in \mu^{-1}([0,t_n])$ y $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, se tiene que $\mu(A) = 0$. De donde, $A \in F_1(X)$. Lo cual es una contradicción, pues $F_1(X) \subset \mathcal{U}$. □

Teorema 2.2.2. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ es localmente arcoconexo en T_X y en F_X. Más aún, cualquier vecindad de F_X en $HS(X)$ contiene curvas cerradas simples que pasan por F_X.*

Demostración. Sea U un abierto en $HS(X)$ tal que $F_X \in U$, esto implica que $F_1(X) \subset q_X^{-1}(U)$. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Por el Lema 2.2.1, existe $t > 0$ tal que $\mu^{-1}([0,t]) \subset q_X^{-1}(U)$, aplicando la función q_X, nos queda $q_X(\mu^{-1}([0,t])) \subset U$. Notemos que $\mu^{-1}([0,t])$ es un abierto conexo saturado de $C(X)$ que contiene a $F_1(X)$. De donde, $q_X(\mu^{-1}([0,t])$ es un abierto conexo de $HS(X)$ que tiene a F_X y está contenido en U. Por tanto, $HS(X)$ es localmente arcoconexo en F_X.

Sean V un abierto en $HS(X)$ tal que $T_X \in V$. Consideremos al conjunto abierto $q_X^{-1}(V)$ en $C(X)$. Como las funciones de Whitney llegan hasta X, entonces, para alguna $t > 0$ tenemos que $\mu^{-1}([t,1]) \subset q_X^{-1}(V)$, de esto se sigue que, $q_X(\mu^{-1}([t,1])) \subset V$. Por tanto, $HS(X)$ es localmente arcoconexo en T_X.

Sean $t \in (0,1)$ y $K \in \mu^{-1}(t)$. Como $t > 0$, entonces K es no degenerado. Así podemos tomar dos puntos distintos a_1 y a_2 en K. Dada $j \in \{1,2\}$, sea $\alpha_j : [0,1] \to C(X)$ un arco de orden tal que $\alpha_j(0) = \{a_j\}$ y $\alpha_j(1) = K$. Sea $\beta_j : [0,1] \to HS(X)$ definida como $\beta_j = q_X \circ \alpha_j$, $j \in \{1,2\}$. Observemos que $\beta_j(0) = F_X$ y $\beta_j(1) = q_X(K)$, $j \in \{1,2\}$. De donde $\beta_1([0,1]) \cup \beta_2([0,1])$ contiene una curva cerrada simple que pasa por F_X. $\square$

Teorema 2.2.3. *Si X es un continuo y $\chi \in HS(X) \setminus \{T_X, F_X\}$ entonces $HS(X) \setminus \{T_X, \chi\}$ es arcoconexo.*

Demostración. Sea $\chi' \in HS(X) \setminus \{T_X, F_X, \chi\}$. Mostraremos que existe un arco que une a χ' con F_X contenido es $HS(X) \setminus \{T_X, \chi\}$. Sean $A = q_X^{-1}(\chi)$ y $A' = q_X^{-1}(\chi')$.

Sean $a' \in A' \setminus A$ (si $A' \subset A$, tomamos cualquier punto a' de A'). Por el Corolario 1.4.9, existe un arco de orden, $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{a'\}$ y $\alpha(1) = A'$. Observemos que, por construcción, $\{X, A\} \cap \alpha([0,1]) = \emptyset$. Esto implica que $q_X \circ \alpha : [0,1] \to HS(X)$ es un arco tal que $q_X \circ \alpha(0) = F_X$, $q_X \circ \alpha(1) = \chi$ y $\{T_X, \chi\} \cap (q_X \circ \alpha([0,1])) = \emptyset$. $\square$

Teorema 2.2.4. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ tiene la propiedad (b). En particular, $HS(X)$ es unicoherente.*

Demostración. Sea $q_X : C(X) \to HS(X)$ la función cociente. Se sabe que $C(X)$ tiene la propiedad (b) [39, pág. 226]. Como q_X es monótona (Notación 2.1.3), por el Teorema 1.1.31, $HS(X)$ tiene la propiedad (b). Por Teorema 1.1.29, $HS(X)$ es unicoherente. $\square$

El siguiente lema nos da una métrica para ciertos espacios cociente.

Lema 2.2.5. *Sean (Y,d) y Z continuos. Si A es un subcontinuo de Y y B es un subcontinuo de Z entonces existe una métrica ρ para Y/A tal que $(Y/A, \rho)$ es homeomorfo a Y/A con la topología cociente. Más aún, si $\varepsilon > 0$ y $f : Y \to Z$ es una función continua tal que $f(A) = B$ y $\text{diám}(f^{-1}(f(y))) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$ entonces la función $f^* : Y/A \to Z/B$ dada por $f^*([y]) = [f(y)]$, donde $[\cdot]$ representa una clase de equivalencia, es continua y $\text{diám}((f^*)^{-1}(f^*([y]))) < \varepsilon$ para toda $[y] \in Y/A$.*

Demostración. Sea $\Gamma_A = \{\{y\} \cup A \mid y \in Y\}$. Notemos que Γ_A es un subconjunto de 2^X, con la métrica de Hausdorff, $\mathcal{H}$. Definimos $g : Y/A \to \Gamma_A$ como:

$$g([y]) = \{y\} \cup A$$

para cada $[y] \in Y/A$. Es fácil ver que g es continua. De hecho, g es un homeomorfismo. Definimos $\rho : (Y/A) \times (Y/A) \to [0, \infty)$ como

$$\rho([y_1], [y_2]) = \mathcal{H}(g([y_1]), g([y_2]))$$

para cualesquiera dos elementos $[y_1]$ y $[y_2]$ de Y/A. Como g es un homeomorfismo, ρ es una métrica tal que $(Y/A, \rho)$ es homeomorfo a Y/A con la topología cociente.

Sean $\varepsilon > 0$ y $f : Y \to Z$ una función continua que cumple que, $f(A) = B$ y $\text{diám}(f^{-1}(f(y))) < \varepsilon$ para toda $y \in Y$. Veremos que f^* satisface que:

$$\text{diám}((f^*)^{-1}(f^*([y]))) < \varepsilon$$

para toda $[y] \in Y/A$. Sean $[y_1]$ y $[y_2]$ dos elementos de $(f^*)^{-1}(f^*([y]))$. Veremos que $\rho([y_1], [y_2]) < \varepsilon$. Para esto, basta ver que $\{y_1\} \cup A \subset \mathcal{V}^{\rho}_{\varepsilon}(\{y_2\} \cup A)$ y que $\{y_2\} \cup A \subset \mathcal{V}^{\rho}_{\varepsilon}(\{y_1\} \cup A)$. Probaremos que $\{y_1\} \cup A \subset \mathcal{V}^{\rho}_{\varepsilon}(\{y_2\} \cup A)$, la otra inclusión se demuestra de manera similar. Primero supongamos que $f^*([y]) = f^*([y_1]) = [b]$, con $b \in B$. Esto implica que $[f(y_1)] = B$. Como $f(A) = B$, existe $a_1 \in A$ tal que $f(a_1) = f(y_1)$. Como $\text{diám}(f^{-1}(f(y_1))) < \varepsilon$, se tiene que $d(a_1, y_1) < \varepsilon$. De donde $\{y_1\} \cup A \subset \mathcal{V}^{\rho}_{\varepsilon}(\{y_2\} \cup A)$ (bajo la hipótesis de que $f^*([y_1]) = [b]$, con $b \in B$). Supongamos ahora que $f^*([y]) \neq [b]$ para ninguna $b \in B$. En este caso, $f^*([y]) = [f(y)] = \{f(y)\}$. En consecuencia, como $\text{diám}(f^{-1}(f(y))) < \varepsilon$, $d(y_1, y_2) < \varepsilon$. Por tanto, $\{y_1\} \cup A \subset \mathcal{V}^{\rho}_{\varepsilon}(\{y_2\} \cup A)$ (suponiendo que $f^*([y]) \neq [b]$ para ninguna $b \in B$). $\square$

Observación 2.2.6. Sea X un continuo. El Lema 2.2.5 puede ser utilizado para definir una métrica en $HS(X)$ de la siguiente manera. Sea:

$$\mathcal{F}(X) = \{F_1(X) \cup \{A\} \mid A \in C(X)\}.$$

Observemos que $\mathcal{F}(X) \subset C_2(C(X))$. Definimos $\xi : HS(X) \to \mathcal{F}(X)$ como:

$$\xi(\chi) = F_1(X) \cup (q_X)^{-1}(\chi).$$

Entonces ξ es un homeomorfismo. Ahora, definimos:

$$\rho_X : HS(X) \times HS(X) \to [0, \infty)$$

como:

$$\rho(\chi_1, \chi_2) = \mathcal{H}^2(\xi(\chi_1), \xi(\chi_2)),$$

donde $\mathcal{H}^2$ es la métrica de Hausdorff para $C_2(C(X))$, inducida por la métrica de Hausdorff en $C(X)$. Entonces ρ_X es una métrica.

Definición 2.2.7. Un continuo X es un *continuo C-H* si $C(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$.

La demostración del siguiente resultado escapa a los objetivos de este trabajo, una prueba de él se puede encontrar en [12, Teorema 6.5].

Teorema 2.2.8. *Si X es un continuo C-H de dimensión finita entonces existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(X)$ tal que $h(F_1(X))$=$B(X)$.*

El siguiente teorema justifica la definición del hiperespacio suspensión.

Teorema 2.2.9. *Si X es un continuo C-H de dimension finita, entonces $HS(X)$ es homeomorfo a $Sus(X)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.8, sabemos que existe un homeomorfismo $h : C(X) \to Cono(X)$ tal que $h(F_1(X)) = B(X)$. Por [9, 7.7, pág. 17], existe una única función $h^* : HS(X) \to Sus(X)$ tal que $h^* \circ q_X = q \circ h$, donde $q : Cono(X) \to Sus(X)$ es la función cociente que identifica a $B(X)$ en un sólo punto. Notemos que h^* es continua [9, 4.3, pág. 126]. Para ver que h^* es biyectiva, tomamos $a \neq b$. Hay que ver que $h^*(a) \neq h^*(b)$. Como $a \neq b$, entonces $q_X^{-1}(a) \neq q_X^{-1}(b)$ y, como h es inyectiva, resulta que $h(q_X^{-1}(a)) \neq h(q_X^{-1}(b))$ de esto se sigue que $q(h(q_X^{-1}(a))) \neq (h(q_X^{-1}(b)))$. Por tanto, h^* es inyectiva. Para ver que h^* es suprayectiva. Sea $k \in Sus(X)$. Entonces existe $r \in Cono(X)$ tal que $q(r) = k$. Como h es suprayectiva, entonces existe $t \in C(X)$ tal que $h(t) = r$. De donde $h^*(q_X(t)) = q(h(t)) = q(r) = k$. Por tanto, h^* es suprayectiva. Entonces h^* es biyectiva y, por tanto, $HS(X)$ es homeomorfo a $Sus(X)$. □

Una demostración del siguiente Teorema se puede encontrar en [12].

Teorema 2.2.10. *Si X es un continuo entonces se tiene que $dim(C(X)) < \infty$ si y sólo si* $\dim(HS(X)) < \infty$. *Más aún,* $\dim(C(X)) = \dim(HS(X))$.

Teorema 2.2.11. *Sea X un continuo. Si Z es un continuo de dimensión finita tal que $Cono(Z)$ es homeomorfo a $HS(X)$ entonces X es hereditariamente descomponible y X no contiene subcontinuos no degenerados, propios y terminales. Además Z es arcoconexo.*

Demostración. Sea $h : HS(X) \to Cono(Z)$ un homeomorfismo. Como ningún punto de $HS(X)$ lo desconecta por arcos, ninguno de los puntos de $Cono(Z)$ lo desconecta por arcos. En consecuencia, Z es arcoconexo.

Supongamos que X contiene un subcontinuo indescomponible A. Como $Cono(Z)$ tiene dimensión finita [34, (8.1)], en consecuencia, $HS(X)$ también tiene dimensión finita. De donde, $\dim(HS(X)) = \dim(C(X))$, Teorema 2.2.10. Así, $C(X) \setminus \{A\}$ no es arcoconexo [31, 3.4]. Lo que implica que $HS(X) \setminus \{q_X(A), F_X\}$ no sea arcoconexo (véase el Teorema 2.2.3). Por consiguiente, $Cono(Z) \setminus \{h(q_X(A)), h(F_X)\}$ no es arcoconexo, lo cual contradice el Lema 1.2.9. Por tanto, X es hereditariamente descomponible.

Ahora supongamos que X contiene un subcontinuo no degenerado, propio y terminal B. Entonces $C(X) \setminus \{B\}$ no es arcoconexo [34, Teorema (11.5)]. Repitiendo el argumento del párrafo anterior, obtenemos, nuevamente, una contradicción al Lema 1.2.9. Por tanto, X no contiene subcontinuos no degenerados, propios y terminales. □

Teorema 2.2.12. *Si X es un continuo contraíble, entonces $HS(X)$ es contraíble.*

Demostración. Como X es contraíble, existe una homotopía $R : X \times [0, 1] \to X$ tal que $R(x, 0) = x$ y $R(x, 1) = q_{x_0}$ para toda $x \in X$ y alguna $q_{x_0} \in X$.

Sea:

$$G : C(X) \times [0, 1] \to C(X)$$

definida como:

$$G(A, t) = R(A \times \{t\}).$$

Observemos que $G(A, 0) = A$, $G(A, 1) = \{q_{x_0}\}$ para toda $A \in C(X)$ y si $A \in F_1(X)$ entonces $G(A, t) \in F_1(X)$ para cada $t \in [0, 1]$. Además, claramente, G es continua. Sea:

$$K : HS(X) \times [0, 1] \to HS(X)$$

dada por:

$$K(\chi, t) = \begin{cases} q_X(G(q_X^{-1}(\chi, t))), & \text{si } \chi \neq F_X; \\ F_X, & \text{si } \chi = F_X. \end{cases}$$

Notemos que K es continua [9, 4.3, pág. 126]. Además, $K(\chi, 0) = \chi$ y $K(\chi, 1) = F_X$ para todo $\chi \in HS(X)$. Por tanto, $HS(X)$ es contraíble. $\square$

Observación 2.2.13. Notemos que, en general, $HS(X)$ no es contraíble. Por ejemplo, si X es la circunferencia unitaria, por Ejemplo 2.1.8, $HS(X)$ es la esfera unitaria S^2, la cual no es contraíble.

Teorema 2.2.14. *Sea X un continuo de dimensión finita. Entonces $HS(X)$ es homeomorfo a $F_2(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a* $[0,1]$.

Demostración. Si X es homeomorfo a [0,1] entonces tanto $HS(X)$ como $F_2(X)$ son 2-celdas, Ejemplos 2.1.6 y 2.1.7. De donde se tiene que $HS(X)$ es homeomorfo a $F_2(X)$.En consecuencia, X es arcoconexo [8, Lema 2.2].

Supongamos que $HS(X)$ es homeomorfo a $F_2(X)$. Como X tiene dimensión finita, por la demostración de [8, Lema 3.1], tenemos que $\dim(F_2(X)) \leq 2 \dim(X)$. Como $HS(X)$ es homeomorfo a $F_2(X)$, $\dim(HS(X)) < \infty$. Por el Teorema 2.2.10, $\dim(HS(X)) = \dim(C(X))$. De lo anterior se sigue que $\dim(X) = 1$ [23, Teorema 2.1]. De donde, por [11, Teorema 1], $2 \leq \dim(C(X)) = \dim(HS(X)) = \dim(F_2(X)) \leq 2$. Por tanto, $\dim(C(X)) = \dim(HS(X)) = 2$. Ahora, por [38, Teorema 1], X es atriodico. Como $HS(X)$ es arcoconexo, Teorema 2.1.4, $F_2(X)$ es arcoconexo.

Supongamos ahora, que X no es unicoherente. Entonces existe una función $f : F_2(X) \to S^1$, tal que f no es homotópica a una función constante [18, 1.5]. De donde, $F_2(X)$ no tiene la propiedad (b). Por otra parte, como $HS(X)$ tiene la propiedad (b), Teorema 2.2.4, $F_2(X)$ tiene la propiedad (b); así obtenemos una contradicción. Por tanto, X es unicoherente. De esta forma tenemos que, por el Teorema de Sorgenfrey [36, Teorema 11.34], X es irreducible. Por tanto, como X es irreducible y arcoconexo, tenemos que X es homeomorfo a $[0, 1]$. $\square$

Teorema 2.2.15. *Sea X un continuo de dimension finita. Si $n \geq 3$ entonces $F_n(X)$ no es homeomorfo a $HS(X)$.*

Demostración. Sea $n \geq 3$ y supongamos que $F_n(X)$ es homeomorfo a $HS(X)$. Como X tiene dimensión finita, por la demostración de [8, Lema 3.1], tenemos que $\dim(F_n(X)) \leq n \dim(X)$. Como $HS(X)$ es homeomorfo a $F_n(X)$, $\dim(HS(X)) < \infty$. Como $\dim(HS(X)) = \dim(C(X))$, Teorema 2.2.10, se tiene que $\dim(X) = 1$ [23, Teorema 2.1]. Por tanto, $\dim(F_n(X)) \leq n$. Además, como X tiene dimensión finita, $\dim(F_n(X)) = \dim(X^n) < \infty$ [37, 22.12]. Por otra parte, como $\dim(X) = 1$, por [16, p. 197], $\dim(X^n) \geq n$. De donde, $n = \dim(F_n(X)) = \dim(HS(X)) = \dim(C(X))$.

Por [38, Teorema 1], X no puede contener $(n+1)$-odos. Por consiguiente, por [24, Teorema 11], X contiene un arco libre. Esto implica que $C(X)$ y, por consiguiente, $HS(X)$ contiene un subconjunto de dimensión 2, el cual tiene interior no vacío. Pero $F_n(X)$ no contiene subconjuntos de dimensión 2 con interior diferente del vacío. Por tanto, $F_n(X)$ no es homeomorfo a $HS(X)$. $\square$

Capítulo 3

Aposindesis

En este capítulo se demuestra que dado un continuo X entonces $HS(X)$ es aposindético.

3.1. Definición y Ejemplos

Comenzaremos con la definición de aposindesis.

Definición 3.1.1. Decimos que un continuo X es *aposindético en x con respecto a y*, si existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{y\}$. Diremos que X es *aposindético en x* si es aposindético en x con respecto a cualquier punto y distinto de x. Finalmente, X es *aposindético* si es aposindético en cualquier punto de X.

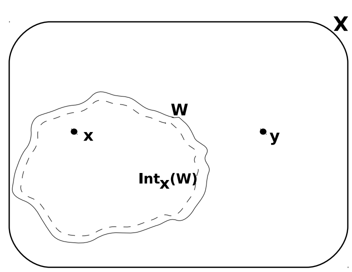

Figura 3.1: Aposindesis

Ejemplo 3.1.2. Es fácil ver que los continuos localmente conexos son aposindéticos. De hecho, por el Teorema 1.3.12, se tiene que el concepto de aposindesis es una generalización de la conexidad en pequeño.

Definición 3.1.3. Un continuo X es *finitamente aposindético* si dados un subconjunto finito F de X y un punto $x \in X$ que no está en F, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus F$.

Definición 3.1.4. Decimos que un continuo X es *aposindético por cerrados de dimensión cero en* x si para cualquier subconjunto cerrado de dimensión cero Z de X tal que $x \notin Z$, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus Z$. Decimos que X es *aposindético por cerrados de dimensión cero* si lo es en cada uno de sus puntos.

Definición 3.1.5. Un continuo X es *colocalmente conexo* si dados un punto $x \in X$ y un abierto U de X tales que $x \in U$, entonces existe un abierto V de X tal que $x \in V \subset U$ y $X \setminus V$ es conexo.

Lema 3.1.6. *Si X es un continuo colocalmente conexo entonces X es aposindético.*

Demostración. Sean x, $y \in X$ tales que $x \neq y$ y U un abierto de X tal que $x \in U$. Como X es colocalmente conexo, existe V un abierto de X tal que $x \in V$, $V \subset Cl_X(V) \subset U$ y $X \setminus V$ es conexo. Notemos que $x \neq y$, esto implica que $y \in X \setminus V$. Observemos que $X \setminus V$ es un subcontinuo de X y $y \in Int(X \setminus V) \subset X \setminus V \subset X \setminus \{x\}$. Por tanto, como fue para cualesquiera dos puntos de X, se tiene que X es aposindético. □

Ejemplo 3.1.7. Como un ejemplo de un continuo colocalmente que no es localmente conexo, tenemos a la suspensión sobre el conjunto de Cantor.

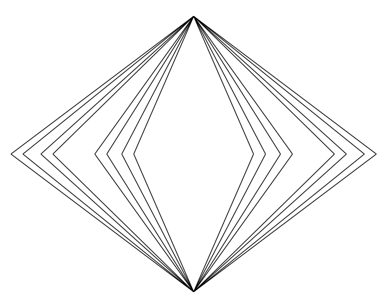

Figura 3.2: Suspensión de Cantor

3.2. Aposindesis en $HS(X)$

En esta parte, probamos que para cualquier continuo X, el hiperespacio suspensión, $HS(X)$, es colocalmente conexo, aposindético, finitamente aposindético y aposindético por cerrados de dimensión cero.

Teorema 3.2.1. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ es colocalmente conexo.*

Demostración. Sea $A \in HS(X)$. Consideremos tres casos:

Caso 1. $A = F_X$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $U_\varepsilon = \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(F_1(X))$. Notemos que $\{q_X(U_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ es una base de abiertos de F_X en $HS(X)$.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y sea $B \in HS(X) \setminus q_X(U_\varepsilon)$. Notemos que $q_X^{-1}(B) \in C(X) \setminus U_\varepsilon$.

Sea β un arco de orden que va de $q_X^{-1}(B)$ a X. Observemos que $\beta \subset C(X) \setminus U_\varepsilon$. Así que $q_X(\beta)$ es un arco que une a B con T_X en $HS(X) \setminus q_X(U_\varepsilon)$.

Caso 2. $A = T_X$.

Para cada $\varepsilon > 0$, sea $W_\varepsilon = \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(X)$. Tenemos que $\{q_X(W_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ es una base de abiertos de T_X en $HS(X)$.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y sea $C \in HS(X) \setminus q_X(W_\varepsilon)$. Notemos que $q_X^{-1}(C) \in C(X) \setminus W_\varepsilon$.

Sean $c \in q_X^{-1}(C)$ y γ un arco de orden que va de $\{c\}$ a $q_X^{-1}(C)$. Entonces $q_X(\gamma)$ es un arco que une a C con F_X en $HS(X) \setminus q_X(W_\varepsilon)$.

Caso 3. $A \in HS(X) \setminus \{T_X, F_X\}$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $T_\varepsilon = \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(q_x^{-1}(A))$. Entonces $\{q_X(T_\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ es una base local de abiertos alrededor de A.

Fijamos $\varepsilon > 0$ tal que $q_X(T_\varepsilon) \cap \{T_X, F_X\} = \emptyset$. Sea $E \in HS(X) \setminus q_X(T_\varepsilon)$, observemos que $q_X^{-1}(E) \in C(X) \setminus T_\varepsilon$. Si $q_X^{-1}(E) \nsubseteq q_X^{-1}(A)$ entonces cualquier arco de orden α que va de $q_X^{-1}(E)$ a X satisface que $\alpha \subset C(X) \setminus \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(q_X^{-1}(A))$. Entonces si α es un arco de orden que une a $q_X^{-1}(E)$ con X, se tiene que $q_X(\alpha)$ es un arco que une a E con T_X en $HS(X) \setminus q_X(T_\varepsilon)$.

Supongamos que $q_X^{-1}(E) \subset q_X^{-1}(A)$. Sean $e \in q_X^{-1}(E)$ y κ un arco de orden que une a $\{e\}$ con $q_X^{-1}(E)$. Entonces $\kappa \subset C(X) \setminus \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(q_x^{-1}(A))$ y, por tanto, $q_X(\kappa)$ es un arco que une a E con F_X en $HS(X) \setminus q_X(T_\varepsilon)$. □

Como consecuencia del Lema 3.1.6 y del Teorema 3.2.1, se sigue:

Corolario 3.2.2. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ es aposindético.*

Corolario 3.2.3. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ es un continuo finitamente aposindético.*

Demostración. Por Teorema 2.2.4, $HS(X)$ es unicoherente. Cualquier continuo aposindético y unicoherente es finitamente aposindético, [1, Corolario 1]. Por tanto, $HS(X)$ es finitamente aposindético. $\square$

A continuación, probaremos un resultado mucho más fuerte que los anteriores, que es la aposindesis por cerrados de dimensión cero de $HS(X)$.

Teorema 3.2.4. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ es aposindético por cerrados de dimensión cero.*

Demostración. Como $HS(X)$ es localmente conexo en T_X y en F_X, es fácil ver que $HS(X)$ es aposindético por cerrados de dimensión cero en T_X y en F_X.

Sean $\chi \in HS(X) \setminus \{T_X, F_X\}$ y Z un subconjunto cerrado de dimensión cero de $HS(X)$ tal que $\chi \notin Z$. Como Z es cerrado y $\chi \in HS(X) \setminus (Z \cup \{F_X\})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$Cl_{C(X)}\big(\mathcal{V}^{\mathcal{H}}_{\varepsilon}(q_X^{-1}(\chi))\big) \cap F_1(X) = \emptyset$$

y

$$Cl_{HS(X)}\big(q_X\big(Cl_{C(X)}\big(\mathcal{V}^{\mathcal{H}}_{\varepsilon}(q_X^{-1}(\chi))\big)\big)\big) \cap Z = \emptyset.$$

Sean $Z' = Z \setminus \{F_X\}$. Entonces $\dim(Z) \leq 0$ y $\mathcal{V}^{\mathcal{H}}_{\varepsilon}(q_X^{-1}(\chi)) \cap q^{-1}(Z') = \emptyset$. Por [33, Teorema 7], existe un subcontinuo M de $C(X)$ tal que $q_X^{-1}(\chi) \in Int_{C(X)}(W)$ y $W \cap q_X^{-1}(Z') = \emptyset$. Observemos que el único lugar en la demostración de [33, Teorema 7] en el cual se usa la hipótesis de que el conjunto de dimensión cero, Z, es cerrado es para construir un conjunto abierto alrededor del punto tal que la cerradura del abierto es ajena a Z. Para construir M sólo se utiliza el hecho de que $\dim(Z) \leq 0$. Notemos que M puede ser construido de tal forma que $M \cap F_1(X) = \emptyset$. En consecuencia, $q_X(M)$ es un subcontinuo de $HS(X)$ tal que $\chi \in Int_{HS(X)}(q_X(M))$ y $q_X(M) \cap Z' = \emptyset$.

Como $M \cap F_1(X) = \emptyset$, $F_X \notin q_X(M)$. Así que $q_X(M) \cap Z = \emptyset$. Por tanto, $HS(X)$ es aposindético por cerrados de dimensión cero. $\square$

Capítulo 4

Conexidad Local

En este capítulo presentaremos la equivalencia entre la conexidad local de un continuo y la de su hiperespacio suspensión. También mostraremos que tanto el arco como la curva cerrada simple tienen hiperespacios suspensión únicos. Veremos que el hiperespacio suspensión de un retracto absoluto es un retracto absoluto, presentaremos un ejemplo de un continuo localmente conexo sin arcos libres tal que su hiperespacio suspensión no es homeomorfo al cubo de Hilbert. También, probaremos que el hiperespacio suspensión del cubo de Hilbert es homeomorfo al cubo de Hilbert.

4.1. Propiedades Generales

Recordemos la siguiente:

Definición 4.1.1. Decimos que un continuo X es *localmente conexo en x* si para todo abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subset U$. Decimos que X es *localmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 4.1.2. Como ejemplos de continuos localmente conexos tenemos un arco, una curva cerrada simple, un toro, las esferas, la curva universal de Sierpiński y la curva universal de Menger.

Teorema 4.1.3. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $HS(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Si suponemos que X es localmente conexo, entonces por Teorema 1.4.16 $C(X)$ es localmente conexo, por tanto, $HS(X)$ es localmente conexo. Ahora si

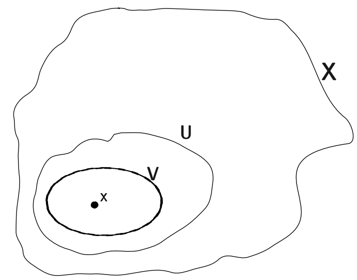

Figura 4.1: Localmente conexo

suponemos que $HS(X)$ es localmente conexo, entonces el conjunto abierto $HS(X) \setminus \{F_X\}$ es localmente conexo. Por la Observación 2.1.5, $HS(X) \setminus \{F_X\}$ es homeomorfo a $C(X) \setminus F_1(X)$, entonces $C(X) \setminus F_1(X)$ es localmente conexo y, por Teorema 1.4.17, se tiene que X es localmente conexo. □

Teorema 4.1.4. *Si X es un continuo entonces $HS(X)$ se puede encajar en $\mathbb{R}^2$ si y sólo si X es un arco.*

Demostración. Primero supongamos que $HS(X)$ es encajable en $\mathbb{R}^2$. Como $HS(X)$ es contraíble con respecto a S^1, Teorema 2.2.4, $HS(X)$ no separa a $\mathbb{R}^2$ [17, pág. 100]. Por el Corolario 3.2.2, $HS(X)$ es aposindético y, por [21, Teorema 1], $HS(X)$ es localmente conexo. Esto implica que X es localmente conexo, Teorema 4.1.3. Pero esto nos lleva a que $C(X)$ es localmente conexo [34, 1.92]. Por [34, 1.109] se afirma que X es una gráfica finita. Usando [34, (1.109) y (1.100)], se tiene que X es un arco o una curva cerrada simple, pero se sabe que el hiperespacio suspensión de una curva cerrada simple es un 2-esfera, Ejemplo 2.1.8, la cual no es encajable en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, X es un arco.

Ahora supongamos que X es un arco. Entonces, por Ejemplo 2.1.7, $HS(X)$ es una 2-celda. Por tanto, $HS(X)$ es encajable en $\mathbb{R}^2$. □

El siguiente teorema nos dice que un arco tiene un hiperespacio suspensión único.

Teorema 4.1.5. *Si X es un continuo tal que $HS(X)$ es homeomorfo a $HS([0,1])$ entonces X es homeomorfo a $[0,1]$.*

Demostración. Como $HS(X)$ es homeomorfo a $HS([0,1])$, se tiene que $HS(X)$ se puede encajar en el plano. Por tanto, se sigue del Teorema 4.1.4, X es homeomorfo a [0,1]. □

Los siguientes resultados involucran a continuos homogéneos, para ello, enunciaremos la definición.

Definición 4.1.6. Decimos que un continuo X es *homogéneo*, si para cada par de puntos $x,y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Definición 4.1.7. Sean X un continuo y A un arco de X, decimos que A es un *arco libre* de X, si A sin sus puntos extremos es un abierto en X.

Teorema 4.1.8. *Si X es un continuo tal que $HS(X)$ es homogéneo entonces X es un continuo localmente conexo sin arcos libres o X es una curva cerrada simple.*

Demostración. Supongamos que $HS(X)$ es homogéneo. Por el Teorema 2.2.2, $HS(X)$ es localmente conexo en T_X. Entonces, por su homogeneidad, $HS(X)$ es localmente conexo. Por Teorema 4.1.3, X es localmente conexo.

Ahora supongamos que X contiene un arco libre. Entonces la $\dim(HS(X)) = 2$. Como $HS(X)$ es localmente conexo y de dimensión finita, tenemos que X es una gráfica finita [34, 1.109]. Usando [34, (1.109) y (1.100)], se tiene que X es un arco o una curva cerrada simple. Como el hiperespacio suspension de un arco es una 2-celda, Ejemplo 2.1.7, la cual no es homogénea, entonces X es una curva cerrada simple. □

Corolario 4.1.9. *Si X es un continuo tal que $HS(X)$ es homogéneo y de dimensión finita entonces X es una curva cerrada simple.*

Demostración. Supongamos que $HS(X)$ es homogéneo, entonces por Teorema 4.1.8, X es un continuo localmente conexo sin arcos libres o es una curva cerrada simple. Supongamos que X es localmente conexo sin arcos libres, entonces $C(X)$ es homeomorfo a Q [7, Teorema 4.1]. Por tanto, $\dim(C(X)) = \infty$, lo que implica que $\dim(HS(X)) = \infty$, Teorema 2.2.10, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por tanto, X es una curva cerrada simple. □

El siguiente resultado muestra que una curva cerrada simple tiene hiperspacio suspensión único.

Teorema 4.1.10. *Si X es un continuo tal que $HS(X)$ es homeomorfo a $HS(S^1)$ entonces X es homeomorfo a S^1.*

Demostración. Como $HS(X)$ es homeomorfo a $HS(S^1)$, resulta que $HS(X)$ es homogéneo y tiene dimensión finita. Por tanto, por el Corolario 4.1.9, X es homeomorfo a S^1. □

4.2. Retractos Absolutos y el cubo de Hilbert

Definición 4.2.1. Sea $f : X \to Y$ una función entre continuos. Definimos *la función inducida* $C(f) : C(X) \to C(Y)$ entre sus hiperespacios como:

$$C(f)(A) = \{f(a) \mid a \in A, \text{ para cada } A \in C(X)\}.$$

Observemos que como $f(A) \in C(Y)$ para toda $A \in C(X)$, $C(f)$ está bien definida y por [34, 0.49] $C(f)$ es continua.

Definición 4.2.2. Dada una función continua $f : X \to Y$. La función inducida $HS(f) : HS(X) \to HS(Y)$ está dada por:

$$HS(f)(A) = \begin{cases} q_Y(C(f)(q_X^{-1}(A))), & \text{si } A \neq F_X; \\ F_Y, & \text{si } A = F_X; \end{cases}$$

esta función es llamada, *la función inducida entre el hiperespacio suspensión de* X *y el de* Y. Notemos que por [9, 4.3, pág. 126], $HS(f)$ es continua.

Lema 4.2.3. *Sean* X *un continuo y* Z *un subcontinuo de* X. *Si* $r : X \to Z$ *es una retracción entonces* $HS(r) : HS(X) \to HS(Z)$ *es una* r-*función.*

Demostración. Sea $r : X \to Z$ una retracción. La función inducida, $HS(r)$, está dada por:

$$HS(r)(A) = \begin{cases} q_Z(C(r)(q_X^{-1}(A))), & \text{si } A \neq F_X; \\ F_Z, & \text{si } A = F_X; \end{cases}$$

Ahora veamos que es una retracción, para ello tenemos dos casos:

Si $A \in HS(Z) \setminus \{F_Z\}$, entonces $q_Z^{-1}(A) \in C(Z) \setminus F_1(Z)$. Es fácil ver que $C(r)$ es una retracción. De aquí se sigue que, $C(r)^{-1}(q_Z^{-1}(A)) \in C(X) \setminus F_1(X)$. Entonces, aplicándole la función q_X, se tiene $q_X(C(r)^{-1}(q_Z^{-1}(A))) \in HS(X) \setminus \{F_X\}$, ahora aplicando la función $HS(r)$, nos queda: $HS(r)(A) = q_Z(C(r)(q_X^{-1}(q_X(C(r)^{-1}(q_Z^{-1}(A)))))) = q_Z(C(r)(C(r)^{-1}(q_Z^{-1}(A)))) = q_Z(q_Z^{-1}(A)) = A$.

Si $A = F_Z$, podemos dar un homeomorfismo h tal que para todo $\{z\} \in F_Z$ lo mande a F_X entonces $F_Z = F_X$. Por tanto, $HS(r)$ es una r-*función*. □

El siguiente teorema nos indica que el teorema de Curtis y Schori [7, Teorema 4.1], para el hiperespacio de subcontinuos de un continuo localmente conexo y sin arcos libres ya no es válido en el caso de los hiperespacios suspensión.

Teorema 4.2.4. *Existe un continuo localmente conexo y sin arcos libres X tal que $HS(X)$ no es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Demostración. Sean S^1 la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, $X = S^1 \times [0,1]$ y $r : X \longrightarrow S^1 \times \{0\}$ la función proyección. Entonces r es una retracción de X en $S^1 \times \{0\}$. Ahora, consideremos la función inducida $HS(r) : HS(X) \longrightarrow HS(S^1 \times \{0\})$, la cual es una retracción, Lema 4.2.3.

Por otro lado, tenemos que, $HS(S^1 \times \{0\})$ es una 2-esfera. Así que, $HS(X)$ no tiene la propiedad del punto fijo. Entonces, $HS(X)$ no es homeomorfo al cubo de Hilbert, pues el cubo de Hilbert si tiene la propiedad del punto fijo, Teorema 1.1.12. □

El teorema de Curtis y Schori se puede obtener agregando una hipótesis extra:

Teorema 4.2.5. *Si X es un continuo contraíble, localmente conexo y sin arcos libres entonces $HS(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert, Q.*

Demostración. Como X es un continuo localmente conexo sin arcos libres, entonces $C(X)$ es homeomorfo a Q [7, Teorema 4.1]. Ahora, como X es contraíble también $F_1(X)$ es contraíble. Entonces $F_1(X)$ tiene la forma de un punto [3, 5.5]. Esto implica que $C(X) \setminus F_1(X)$ es homeomorfo a $Q \setminus \{p\}$ para algún $p \in Q$ [6, 25.2]. Como $HS(X) \setminus \{F_X\}$ es homeomorfo a $C(X) \setminus F_1(X)$, entonces $Q \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $HS(X) \setminus \{F_X\}$; por tanto $HS(X)$ es homeomorfo a Q [5, 2.23]. □

Corolario 4.2.6. *Si X es el cubo de Hilbert entonces $HS(X)$ es homeomorfo al cubo de Hilbert.*

Demostración. Como Q es contraíble, Teorema 1.1.23, y Q es homeomorfo a $C(Q)$ [7, Teorema 4.1], $HS(X)$ es homeomorfo a Q por el Teorema 4.2.5. □

Teorema 4.2.7. *Si X es un continuo que es un retracto absoluto entonces $HS(X)$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos que X está encajado en el cubo de Hilbert Q [26, 1.1.16]. Como X es un retracto absoluto, existe una retracción $r : Q \to X$. Entonces la función inducida $HS(r) : HS(Q) \to HS(X)$ es una retracción, Lema 4.2.3. Como $HS(Q)$ es homeomorfo a Q, Teorema 4.2.6, $HS(X)$ es un retracto absoluto [20, Teorema 7, pág. 341]. □

Como los retractos absolutos tienen la propiedad del punto fijo [20, Teorema 11, pág. 343], tenemos lo siguiente:

Corolario 4.2.8. *Si X es un continuo que es un retracto absoluto, entonces $HS(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Capítulo 5

Continuos de semimargen suprayectivo cero

En este capítulo se mostrará que si tenemos una función continua y suprayectiva que va de un continuo X en un continuo Y que tiene semimargen suprayectivo cero entonces la función inducida a los hiperespacios suspensión es universal. Como una consecuencia de esto se darán algunos resultados relacionados con la propiedad del punto fijo.

5.1. Definición y Ejemplos

Daremos la definición de semimargen suprayectivo cero y probaremos que los continuos encadenables satisfacen esta propiedad.

Empezaremos recordando la definición de función universal.

Definición 5.1.1. Sean X y Y dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es *universal*, si para cualquier función continua $g : X \to Y$, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.

Proposición 5.1.2. *Si X es un espacio métrico entonces X tiene la propiedad del punto fijo si y sólo si la función identidad, 1_X, es universal.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad del punto fijo. Esto es, dada una función continua $f : X \to X$ existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Por definición de $I_X(x) = x$, se tiene que $I_X(x) = x = f(x)$. Por tanto, I_X es universal.

Ahora supongamos que I_X es universal. Entonces para toda función continua $g : X \to X$, existe $x \in X$ tal que $I_X(x) = g(x) = x$. Por tanto, X tiene la propiedad del punto fijo. □

Definición 5.1.3. Sean X y Y espacios métricos, $f : X \to Y$ una función continua y $\varepsilon > 0$. Decimos que f es una *ε-función* si diám$(f^{-1}(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$.

Definición 5.1.4. Decimos que un continuo X es *encadenable*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una ε-función $f_\varepsilon : X \to [0, 1]$.

Teorema 5.1.5. *Si X un continuo, Y es un continuo encadenable y $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entonces f es universal.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como Y es un continuo encadenable, existe una ε-función $f_\varepsilon : Y \to [0, 1]$. Observemos que la ε-función es universal, Teorema 1.1.16. Definimos $g : X \to [0, 1]$ dada por:

$$g = f_\varepsilon \circ f.$$

Por el Teorema 1.1.16, g es universal. Entonces por [14, Lema 1, pág 436], f es universal. □

Como consecuencia de los Teoremas 1.1.14 y 5.1.5 tenemos:

Corolario 5.1.6. *Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Notación 5.1.7. Dado un espacio métrico X, el conjunto:

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\},$$

es llamado la *diagonal de X*.

Definición 5.1.8. Decimos que un continuo X tiene *semimargen suprayectivo cero* si para cada subcontinuo Z de $X \times X$ tal que $\pi_1(Z) = X$, se tiene que $Z \cap \Delta_X \neq \varnothing$, donde π_1 es la proyección de $X \times X$ al primer factor.

Teorema 5.1.9. *Un continuo Y tiene semimargen suprayectivo cero si y sólo si cualquier función continua y suprayectiva de un continuo X en Y es universal.*

Demostración. Supongamos que Y tiene semimargen suprayectivo cero. Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Consideremos otra función continua $g : X \to Y$. Definimos:

$$Z = \{(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

Observemos que Z es un subcontinuo de $Y \times Y$ y satisface que $\pi_1(Z) = Y$. Como Y tiene semimargen suprayectivo cero, entonces $Z \cap \Delta_Y \neq \emptyset$. De donde, existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Por tanto, f es universal.

Ahora, supongamos que toda función continua y suprayectiva en Y es universal. Sea Z un subcontinuo de $Y \times Y$ tal que $\pi_1(Z) = Y$. Notemos que, $\pi_1|_Z : Z \to Y$ es universal, por hipótesis. Consideremos la función proyección $\pi_2|_Z : Z \to Y$. Entonces π_1 y π_2 tienen un punto de coincidencia, es decir, existe un punto $z_0 \in Z$ tal que $\pi_1(z_0) = \pi_2(z_0)$. Esto implica que, $Z \cap \Delta_Y \neq \emptyset$. Por tanto, Y tiene semimargen suprayectivo cero. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 5.1.5 y 5.1.9, se tiene:

Teorema 5.1.10. *Si X es un continuo encadenable, entonces X tiene semimargen suprayectivo cero.*

Observación 5.1.11. Notemos que el inverso del Teorema 5.1.10 no es cierto [13].

5.2. Hiperespacios

Definición 5.2.1. Sean X un espacio métrico y conexo y A y B subconjuntos no vacíos de X. Decimos que un subconjunto cerrado H de X *corta débilmente a X entre A y B*, si cada vez que C sea un cerrado conexo de X que intersecta a A y B entonces C intersecta a H.

Definición 5.2.2. Decimos que un espacio métrico X es *s-conexo entre A y B* si cada vez A y B sean subcontinuos ajenos y H un subconjunto cerrado de X tal que H corta débilmente a X entre A y B, se tiene que alguna componente K de H, corta débilmente a X entre A y B. Diremos que X es *s-conexo*, si dados dos subcontinuos ajenos A y B de X es s-conexo entre A y B.

El siguiente resultado se puede encontrar en [32, Lema 1]

Teorema 5.2.3. *Si X es un espacio s-conexo, entonces X es unicoherente.*

Teorema 5.2.4. *Sean X y Y dos continuos y $f : X \to Y$ una función monótona. Si X es s-conexo entonces Y también es s-conexo.*

Demostración. Sean $f : X \to Y$ una función monótona, A y B dos subcontinuos disjuntos de Y y H subconjunto cerrado de Y tal que H corta débilmente a Y entre A y B. Como f es monótona, en particular, f es suprayectiva, de esto se tiene que $f^{-1}(H)$ corta débilmente a X entre $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$.

Como X es s-conexo, existe una componente K de $f^{-1}(H)$ tal que K corta débilmente a X entre $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$. Como f es una función suprayectiva, $f(f^{-1}(A)) = A$ y $f(f^{-1}(B)) = B$. Esto implica que, $f(K)$ corta débilmente a Y entre A y B. De donde, la componente de H que tiene a $f(K)$ corta débilmente a Y entre A y B. Por tanto, Y es s-conexo. $\square$

Una demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [4, Teorema 2.1]

Teorema 5.2.5. *Si X es un continuo entonces $C(X)$ es s-conexo.*

Teorema 5.2.6. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva de un continuo X a un continuo Y con semimargen suprayectivo cero. Entonces la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es universal.*

Demostración. Sean $g : C(X) \to C(Y)$ una función continua y $\mu : C(Y) \to [0, 1]$ una función de Whitney para $C(Y)$. Definimos:

$$\mathcal{L} = \{A \in C(X) \mid \mu(C(f)(A)) = \mu(g(A))\}.$$

Notemos que $\mathcal{L}$ es cerrado en $C(X)$. Como $C(f)$ es débilmente confluente, [34, 0.49.1], de esto se sigue que, $C(f)$ es suprayectiva. Por tanto, $\mu \circ C(f) : C(X) \to [0, 1]$ es universal, Teorema 1.1.16. Entonces $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Esto implica que existe $A \in C(X)$ tal que $\mu(C(f)(A)) = \mu(g(A))$. Por lo tanto, $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Veremos que $\mathcal{L}$ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$. Sea C un subcontinuo de $C(X)$ que intersecta a $F_1(X)$ y tiene a $\{X\}$. De esto se sigue que, $\mu(C(f)(C)) = [0, 1]$. Entonces $\mu \circ C(f)|_C : C \to [0, 1]$ es una función universal. Consideremos $\mu \circ g|_C : C \to [0, 1]$. Como $\mu \circ C(f)|_C$ es universal, existe $A \in C$ tal que $\mu(C(f)(A)) = \mu(g(A))$. Entonces, $\mathcal{L} \cap C \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{L}$ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$.

Por el Teorema 5.2.5, $C(X)$ es s-conexo. Entonces, existe una componente $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{K}$ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$. Afirmamos que existe $A \in \mathcal{K}$

tal que $C(f)(A) \subset g(A)$ o $g(A) \subset C(f)(A)$. Supongamos que no es cierto. Sea $\varepsilon > 0$ tal que para cada $A \in \mathcal{K}$ se tiene que $C(f)(A) \not\subseteq \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(g(A))$ y $g(A) \not\subseteq \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(C(f)(A))$. Definimos:

$$[A] = (C(f)(A) \times g(A)) \setminus (\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(g(A)) \times \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(C(f)(A)))$$

Por [15, Lema 3.1], se tiene que $[A]$ es un subcontinuo de $Y \times Y$ tal que $\pi_1([A]) = C(f(A))$ y $[A] \cap \Delta_Y = \emptyset$. Sea $M = \cup\{[A] \mid A \in \mathcal{K}\}$ el cual es un subcontinuo de $Y \times Y$, pues cada integrando de la componente $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $Y \times Y$. Observemos que, $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{K}\}$, sean $x \in X$ y β un arco de orden que va de $\{x\}$ a X en $C(X)$, como $\mathcal{K}$ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$, entonces $\mathcal{K} \cap \beta \neq \emptyset$, sea $D \in \mathcal{K} \cap \beta$, de donde $x \in D$. Por tanto, $X \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{K}\}$, la otra inclusión es inmediata. Como $\pi_1([A]) = C(f(A))$ y $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{K}\}$ esto implica que $\pi_1(M) = \cup\{C(f(A)) \mid A \in \mathcal{K}\} = C(f(\cup\{A \mid A \in \mathcal{K}\})) = C(f(X)) = Y$. Como para $A \in \mathcal{K}$ se tiene $[A] \cap \Delta_Y = \emptyset$ de esto se sigue que, $M \cap \Delta_Y = \emptyset$, lo cual es una contradicción, pues Y tiene semimargen suprayectivo cero. Entonces existe $A \in \mathcal{K}$ tal que $C(f)(A) \subset g(A)$ o $g(A) \subset C(f)(A)$, de donde $C(f)(A) = g(A)$, ya que $\mu(C(f)(A)) = \mu(g(A))$. Por tanto, $C(f)$ es universal. $\square$

Teorema 5.2.7. *Si X es un continuo, entonces $HS(X)$ es s-conexo.*

Demostración. Sea $q_X : C(X) \to HS(X)$ la función cociente. Por el Teorema 5.2.5, $C(X)$ es s-conexo. Como q_X es monótona (Notación 2.1.3), por el Teorema 5.2.4, se tiene que $HS(X)$ es s-conexo. $\square$

Teorema 5.2.8. *Si X es un continuo, Y es un continuo con semimargen suprayectivo cero y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva, entonces la función inducida $HS(f) : HS(X) \to HS(Y)$ es universal.*

Demostración. Sea $g : HS(X) \to HS(Y)$ una función continua, veremos que existe $A \in C(X)$ tal que $g(q_X(A)) = HS(f)(q_X(A))$.

Sean $\mu : C(Y) \to [0,1]$ una función de Whitney para $C(Y)$ y $\mu' : HS(Y) \to [0,1]$ definida por $\mu'(F_Y) = 0$ y $\mu'(B) = \mu(q_Y^{-1}(B))$ para cada $B \in HS(Y) \setminus \{F_Y\}$. Notemos que μ' es continua, pues es una composición de funciones continuas y $\mu'(B) = 0$ si y sólo si $B = F_Y$. Sea:

$$\mathcal{R} = \{A \in C(X) \mid \mu'(g(q_X(A))) = \mu'(HS(f)(q_X(A)))\}.$$

Notemos que $\mu' \circ HS(f) \circ q_X : C(X) \to [0,1]$ es continua y suprayectiva, por consiguiente universal, Teorema 1.1.16. Entonces existe $A \in C(X)$ tal que $\mu'(g(q_X(A))) =$

$\mu'(HS(f)(q_X(A)))$. Por tanto, $\mathcal{R}$ es un subconjunto cerrado, no vacío de $C(X)$.

Observemos que $\mathcal{R}$ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$. Para ver que esto pasa, sea $\mathcal{T}$ un subconjunto cerrado y conexo de $C(X)$ tal que $X \in \mathcal{T}$ y $F_1(X) \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$. Como ocurre esto, se tiene que:

$$\mu' \circ HS(f) \circ q_X(\mathcal{T}) = [0, 1];$$

lo que implica que:

$$\mu' \circ HS(f) \circ q_X|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \to [0, 1]$$

es una función universal, Teorema 1.1.16. En consecuencia, existe $B \in \mathcal{T}$ tal que $\mu'(g(q_X(B))) = \mu'(HS(f)(q_X(B)))$. De aquí se sigue que $B \in \mathcal{R}$. Por tanto, $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ y $\mathcal{R}$ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$.

Como $C(X)$ es s-conexo, Teorema 5.2.5, y $\mathcal{R}$ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$, entonces existe una componente Λ de $\mathcal{R}$ con la misma propiedad.

Ahora mostraremos algunas propiedades de Λ que nos ayudarán a demostrar el teorema.

(1) $X = \bigcup\{C \mid C \in \Lambda\}$. Sean $x \in X$ y γ un arco de orden que va de $\{x\}$ a X en $C(X)$. Como Λ corta débilmente a $C(X)$ entre $F_1(X)$ y $\{X\}$, entonces $\gamma \cap \Lambda \neq \emptyset$. Sea $C \in \gamma \cap \Lambda$ esto implica que $x \in C$. Por tanto, $X \subseteq \bigcup\{C \mid C \in \Lambda\}$. La otra inclusion es clara.

Otra cosa que es importante notar es que si $F_Y \in g(q_X(\Lambda))$ entonces $g(q_X(A)) = HS(f)(q_X(A))$ para alguna $A \in C(X)$. Para ver esto, supongamos que existe $A \in \Lambda$ tal que $g(q_X(A)) = F_Y$. Entonces $\mu'(g(q_X(A))) = 0$. Como $A \in \Lambda \subseteq \mathcal{R}$, tenemos que $0 = \mu'(g(q_X(A))) = \mu'(HS(f)(q_X(A)))$. Entonces $\mu'(HS(f)(q_X(A))) = 0$ si y sólo si $HS(f)(q_X(A)) = F_Y$. Por tanto $g(q_X(A)) = HS(f)(q_X(A))$.

Con esto ya tenemos que las funciones coinciden en F_X. Entonces hay que ver qué pasa en la parte de “arriba”, pero para llegar a eso antes se dará otra propiedad.

(2) Existe $A \in \Lambda$ tal que $f(A) \subset q_Y^{-1}(g(q_X(A)))$ o que $q_Y^{-1}(g(q_X(A)) \subset f(A)$. Supongamos que la afirmación no es cierta; esto es, para cada $A \in \Lambda$ se tiene que $f(A) \nsubseteq q_Y^{-1}(g(q_X(A)))$ y que $q_Y^{-1}(g(q_X(A))) \nsubseteq f(A)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de las funciones y la compacidad de Λ, se tiene que:

$$f(A) \nsubseteq \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(q_Y^{-1}(g(q_X(A))))$$

y que:
$$q_Y^{-1}(g(q_X(A))) \not\subseteq \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(f(A)).$$
Ahora, para cada $A \in \Lambda$, sea:
$$[[A]] = [f(A) \times q_Y^{-1}(g(q_X(A)))] \setminus [\mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(q_Y^{-1}(g(q_X(A)))) \times \mathcal{V}_\varepsilon^{\mathcal{H}}(f(A))].$$
Por [15, Lema 3.1], $[[A]]$ es un subcontinuo de $Y \times Y$ tal que $\pi_1([[A]]) = f(A)$ y $[[A]] \cap \Delta_Y = \emptyset$. Sea $M = \bigcup\{[[A]] \mid A \in \Lambda\}$. Notemos que M es un subcontinuo de $Y \times Y$, esto es claro porque cada $[[A]]$ también es un subcontinuo del producto. Sabemos que $\pi_1([[A]]) = f(A)$ y que $X = \bigcup\{A \mid A \in \Lambda\}$, entonces $\pi_1(M) = \bigcup\{f(A) \mid A \in \Lambda\} = f(\bigcup\{A \mid A \in \Lambda\}) = f(X) = Y$. Sabemos que para $A \in \Lambda$ $[[A]] \cap \Delta_Y = \emptyset$. De aquí se obtiene que $M \cap \Delta_Y = \emptyset$. Lo cual es una contradicción, pues Y tiene semimargen suprayectivo cero. Por tanto, existe $A \in \Lambda$ tal que $f(A) \subset q_Y^{-1}(g(q_X(A)))$ o $q_Y^{-1}(g(q_X(A))) \subset f(A)$.

Sea $A \in \Lambda$ como en (2). Como $\Lambda \subset \mathcal{R}$, se tiene que:
$$\mu'(g(q_X(A))) = \mu'(HS(f)(q_X(A))),$$
es decir, $\mu'(g(q_X(A))) = \mu'(q_Y(f(A)))$.

Por las definiciones de $HS(f)$ y de μ', tenemos que:
$$\mu'(g(q_X(A))) = \mu'(q_Y(f(A))),$$
de donde:
$$\mu(q_Y^{-1}(g(q_X(A)))) = \mu(q_Y^{-1}(q_Y(f(A)))) = \mu(f(A)).$$
Ahora, por la manera como escogimos a A y por propiedades de la funciones de Whitney, tenemos:
$$q_Y^{-1}(g(q_X(A))) = f(A)$$
y
$$g(q_X(A)) = q_Y^{-1}(f(A)).$$
Por la definición de $HS(f)$, se tiene que:
$$g(q_X(A)) = HS(f)(q_X(A)).$$
Por tanto, la función $HS(f)$ es universal. □

Como consecuencia de los Teoremas 1.1.14 y 5.2.8, obtenemos que:

Corolario 5.2.9. *Si Y es un continuo con semimargen suprayectivo cero, entonces $HS(Y)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Una consecuencia del Corolario 5.2.9 obtenemos una prueba diferente de [35, 3.1], esto es:

Corolario 5.2.10. *Si X es un continuo encadenable, entonces $HS(X)$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Capítulo 6

Continuos hereditariamente indescomponibles

En este capítulo se mostrará que los continuos hereditariamente indescomponibles tienen hiperespacio suspensión único.

6.1. Definición y Ejemplos

Empezaremos recordando las definiciones de continuos indescomponibles y hereditariamente indescomponibles.

Definición 6.1.1. Un continuo X es *indescomponible* si cada vez que a X se le puede ver como la unión de dos subcontinuos A y B de X, se tiene que $X = A$ o $X = B$. Decimos que X es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Ejemplo 6.1.2. Sea F el conjunto de Cantor y, para cada $n \geq 1$, consideremos al conjunto $G_n = \left\{x \in F \mid \left(\frac{2}{3^n}\right) \leq x \leq \left(\frac{1}{3^n}\right)\right\}$. Utilizando $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ como centro, constrúyase el conjunto de semicircunferencias con ordenada no negativa y teniendo a los puntos de F como puntos extremos. Para cada $n \geq 1$, los puntos $\left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{1}{3^n}\right)$ se utilizan como los centros de las semicircunferencias con ordenada no positiva y teniendo a los puntos de G_n como puntos extremos. El conjunto construido como la unión de todas estas semicircunferencias, para toda $n \geq 1$, es conocido como el *continuo de Knaster* y es un continuo indescomponible [20, pág. 213].

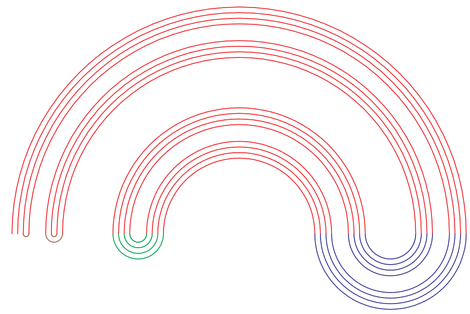

Figura 6.1: Continuo de Knaster

Definición 6.1.3. Una familia $\{U_1, ..., U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es una *cadena simple* en X si se tiene que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si y sólo si $|j - k| \leq 1$. A cada U_k se le llama *eslabón* de la cadena simple.

Definición 6.1.4. Sean X es un continuo y $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cadenas simples en X. C_{n+1} es un *refinamiento propio de* C_n si la cerradura de cada eslabón de C_{n+1} está contenida en algún eslabón de C_n.

Ejemplo 6.1.5. Presentaremos la construcción de un continuo indescomponible. Todo se llevará en el plano. Sean a, b y c tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^2$ y construyamos una cadena simple C_1 consistiendo de discos abiertos, de diámetro menor que uno, empezando en a, pasando por b y terminando por c. Dentro de C_1, construyamos una cadena simple C_2 de discos abiertos, de diámetro menor que un medio, que empiece en b, que pase por c y que termine en a, de tal forma de que C_2 sea un refinamiento propio de C_1. Dentro de C_2, contruyamos una tercera cadena simple C_3 de discos abiertos, de diámetro menor que un tercio, empezando en c, pasando por a y terminando en b, de tal manera que C_3 sea un refinamiento propio de C_2 (como lo muestra la figura **??**.

Todo el procedimiento comienza otra vez con una cadena simple C_4 que está contenida en C_3 y sigue el patrón $a - b - c$. En general, para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se contruyen cadenas simples: C_{3n+1} que sigue el patrón $a - b - c$; C_{3n+2} que sigue el patrón $b - c - a$ y C_{3n+3} que sigue el patrón $c - a - b$. Además, el diámetro de cada eslabón de C_l es menor que $\frac{1}{l}$, con $l \in \mathbb{N}$.

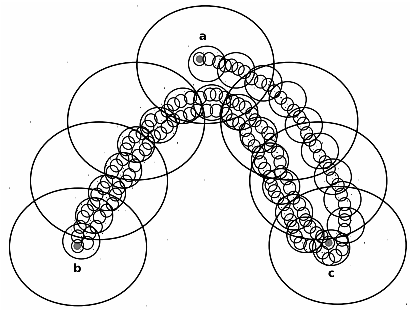

Figura 6.2: Continuo indescomponible

Para cada $l \in \mathbb{N}$, sean $K_l = \bigcup_{C \in C_l} Cl(C)$ y $X = \bigcap_{l=1}^{\infty} K_l$. Entonces X es un continuo indescomponible [27, págs. 33 y 34].

Ejemplo 6.1.6. El *pseudoarco* es un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible [2, Teorema 1].

El siguiente resultado nos muestra que los continuos indescomponibles con la propiedad de Kelley sólo podrían "compartir" su hiperespacio suspensión con continuos indescomponibles. Empezaremos recordando la definición de propiedad de Kelley.

Definición 6.1.7. Decimos que X tiene la *propiedad de Kelley en un punto a* de X si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, que depende de ε y a, tal que para cualquier punto b de X con $d(a,b) < \delta$ y para cada subcontinuo A de X tal que $a \in A$, existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $\mathcal{H}(A,B) < \varepsilon$. X tiene la *propiedad de Kelley* si la tiene en cada uno de sus puntos. A δ se le conoce como *un número de Kelley.*

Teorema 6.1.8. *Sean X y Y continuos, donde X es indescomponible con la propiedad de Kelley. Si $HS(X)$ es homeomorfo a $HS(Y)$, entonces Y es indescomponible.*

Demostración. Sea $h : HS(X) \to HS(Y)$ un homeomorfismo. Como X es indescomponible con la propiedad de Kelley, por el Teorema 1.4.14, X es el único punto de $C(X)$ en el cual es localmente conexo. De aquí se sigue que T_X y F_X son los únicos puntos de $HS(X)$ en los cuales $HS(X)$ es localmente conexo (Observación 2.1.5 y Teorema 2.2.2). De donde, $h(T_X^n)$ y $h(F_X^n)$ son los únicos puntos en los cuales $HS(Y)$ es localmente conexo. Como $HS(Y)$ siempre es localmente conexo en T_Y y en F_Y, Teorema 2.2.2, se tiene que $\{h(T_X), h(F_X)\} = \{T_Y, F_Y\}$. Como X es indescomponible, $HS(X) \setminus \{T_X, F_X\}$ no es arcoconexo [12, Teorema 3.3]. En consecuencia,

$HS(Y) \setminus \{h(T_X), h(F_X)\} = HS(Y) \setminus \{T_Y, F_Y\}$ no es arcoconexo. Por tanto, Y es indescomponible [12, Teorema 3.3]. □

6.2. Unicidad del hiperespacio suspensión

Lema 6.2.1. *Sean X un continuo hereditariamente indescomponible, Y un continuo tal que $HS(Y)$ es homeomorfo a $HS(X)$ y $h : HS(X) \to HS(Y)$ un homeomorfismo. Si B_1 y B_2 son dos elementos distintos de $C(X) \setminus F_1(X)$ tales que $B_1 \subset B_2$ entonces $q_Y^{-1}hq_X(B_1) \subset q_Y^{-1}hq_X(B_2)$.*

Demostración. Como X es hereditariamente indescomponible, $C(X)$ es únicamente arcoconexo [34, 1.61]. En consecuencia, se tiene que vecindades arbitrariamente pequeñas de T_X en $HS(X)$, que no contienen curvas cerradas simples. Además, como las vecindades arbitrariamente pequeñas de F_X y F_Y, si contienen curvas cerradas simples, Teorema 2.2.2, $h(T_X) = T_Y$ y $h(F_X) = F_Y$.

Sean $B_1, B_2 \in C(X) \setminus F_1(X)$ tales que $B_1 \subset B_2$ y α un arco de orden que va de $q_Y^{-1}hq_X(B_1)$ a Y en $C(Y)$. Entonces $q_X^{-1}h^{-1}q_Y(\alpha)$ es un arco que va de B_1 a X. Como este es el único arco en $C(X)$ que va de B_1 a X y además contiene a B_2, esto implica que $q_Y^{-1}hq_X(B_2) \in \alpha$.

Notemos que $q_X \mid_{C(X)\setminus F_1(X)}$, $h \mid_{HS(X)\setminus\{T_X,F_X\}}$ y $q_Y \mid_{C(Y)\setminus F_1(X)}$ son homeomorfismos. Como $B_1 \neq B_2$, entonces $q_Y^{-1}h^{-1}q_X(B_1) \neq q_Y^{-1}h^{-1}q_X(B_2)$.

Como α es un arco de orden. Entonces, $q_Y^{-1}hq_X(B_1) \subset q_Y^{-1}hq_X(B_2)$.

□

Lema 6.2.2. *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Si Y es un continuo tal que $HS(Y)$ es homeomorfo a $HS(X)$, entonces Y es hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Sean $h : HS(X) \to HS(Y)$ un homeomorfismo, $\mu : C(Y) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Sea $\mathcal{B} = q_X^{-1}h^{-1}q_Y(\mu^{-1}(t))$. Entonces queremos demostrar que $\mathcal{B}$ es un nivel de Whitney en $C(X)$.

Para esto, sean $x \in X$ y γ un arco de orden que va de $\{x\}$ a X, entonces hay que demostrar que $\mathcal{B} \cap \gamma \neq \emptyset$. Supongamos que no, $\mathcal{B} \cap \gamma = \emptyset$, esto implica que, $q_X(q_X^{-1}h^{-1}q_Y(\mu^{-1}(t)) \cap \gamma) = \emptyset$, $h^{-1}q_Y(\mu^{-1}(t)) \cap q_X(\gamma \setminus \{\{x\}\}) = \emptyset$, $h(h^{-1}q_Y(\mu^{-1}(t)) \cap$

$q_X(\gamma \setminus \{\{x\}\})) = \emptyset$, $q_Y(\mu^{-1}(t)) \cap hq_X(\gamma \setminus \{\{x\}\}) = \emptyset$, $q_Y^{-1}(q_Y(\mu^{-1}(t)) \cap hq_X(\gamma \setminus \{\{x\}\})) = \emptyset$, $(\mu^{-1}(t)) \cap q_Y^{-1}hq_X(\gamma \setminus \{\{x\}\}) = \emptyset$, lo cual es una contradicción [19, 23.8], por Lema 6.2.1, se tiene que, $\mathcal{B} \cap \gamma \neq \emptyset$.

Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subset B_2$ y supongamos que $B_1 \neq B_2$. Tenemos que

$$q_Y^{-1}hq_X(B_1), q_Y^{-1}hq_X(B_2) \in \mu^{-1}(t).$$

Por el Lema 6.2.1, $q_Y^{-1}hq_X(B_1) \subset q_Y^{-1}hq_X(B_2)$ y $q_Y^{-1}hq_X(B_1) \neq q_Y^{-1}hq_X(B_2)$ lo cual es una contradicción a [19, 23.8]. Como B_1 y B_2 están en el mismo nivel de Whitney, entonces $B_1 = B_2$.

Por tanto, $\mathcal{B}$ es un nivel de Whitney en $C(X)$. Como X es hereditariamente indescomponible, $\mu^{-1}(t)$ es hereditariamente indescomponible [34, 14.1]. Como $\mathcal{B}$ es homeomorfo a $\mu^{-1}(t)$, $\mathcal{B}$ es un continuo hereditariamente indescomponible. Por tanto, Y es hereditariamente indescomponible [34, 14.54]. □

Notación 6.2.3. Si X es un continuo hereditariamente indescomponible y α es un arco de orden en $C(X)$ con X como uno de sus puntos extremos, entonces al otro punto extremo de α se le denota como $ep(\alpha)$. Si $A \in C(X) \setminus \{X\}$ entonces α_A denota al arco de orden que va de A a X.

Lema 6.2.4. *Sea X un continuo y $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de arcos de orden que tienen a X como uno de sus puntos extremos. Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco de orden α, entonces la sucesión de puntos extremos $\{ep(\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $ep(\alpha)$.*

Demostración. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos de orden que tiene a X como uno de sus puntos extremos. Consideremos A_n, $B_n \in C(X)$ tales que $A_n \in \alpha_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos que converge a A y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión de puntos en $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a B tal que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} = \{ep(\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Observemos que como $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos extemos, se tiene que $B_n \subset A_n$. Esto implica que $B \subset A$. De aquí se sigue que, $B = ep(\alpha)$. □

Ya podemos probar el teorema principal de este capítulo:

Teorema 6.2.5. *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Si Y es un continuo tal que $HS(Y)$ es homeomorfo a $HS(X)$, entonces Y es homeomorfo a X.*

Demostración. Por el Lema 6.2.2, Y es hereditariamente indescomponible. Sea $h : HS(X) \to HS(Y)$ un homeomorfismo. Observemos que $h(T_X) = T_Y$ y $h(F_X) = F_Y$ por Lema 2.2.2. Ahora definimos la siguiente función $\widehat{h} : C(X) \to C(Y)$ como:

$$\widehat{h}(A) = \begin{cases} q_Y^{-1}hq_X(A), & \text{si } A \in C(X) \setminus F_1(X); \\ ep(q_Y^{-1}hq_X(\alpha_A \setminus \{A\})), & \text{si } A \in F_1(X); \end{cases}$$

Como X y Y son hereditariamente indescomponibles, $\widehat{h}$ está bien definida por Lema 6.2.1.

Ahora hay que ver que $\widehat{h}$ es inyectiva. Sean $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$ dos puntos distintos de $F_1(X)$. Entonces hay dos abiertos U_1, U_2 de $C(X)$ tales que $\{x_1\} \in U_1$, $\{x_2\} \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Entonces tenemos que $\alpha_{\{x_1\}} \cap U_2 = \emptyset$ y $\alpha_{\{x_2\}} \cap U_1 = \emptyset$. Esto implica que $q_X(\alpha\{x_1\}) \neq q_X(\alpha\{x_2\})$ y $ep(q_Y^{-1}hq_X(\alpha\{x_1\})) \neq ep(q_Y^{-1}hq_X(\alpha\{x_2\}))$. Por tanto $\widehat{h}$ es inyectiva.

Sea $\{y\} \in F_1(Y)$, tomemos $\{x\} \in F_1(X)$ tal que $\{x\} = ep(q_X^{-1}hq_Y(\alpha\{x_1\} \setminus \{y\}))$. Entonces se satisface que $\widehat{h}(\{x\}) = \{y\}$. Por tanto $\widehat{h}$ es suprayectiva.

Y finalmente hay que ver que $\widehat{h}$ es continua. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en $C(X)$ que converge a $\{x\}$. Observemos que la sucesión $\{\alpha_{A_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\alpha_{\{x\}}$.

Sean $\mu : C(Y) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in (0,1)$. Pero por el Lema 6.2.2 tenemos que $\mathcal{B} = ep(q_x^{-1}h^{-1}q_Y(\mu^{-1}(t)))$ es un nivel de Whitney en $C(X)$.

Sin perdida de generalidad, podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \notin \alpha_{A_n} \cap \mathcal{B}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea α'_{A_n} y α''_{A_n} los subarcos de α_{A_n} que van de $\alpha_{A_n} \cap \mathcal{B}$ a X y de A_n a $\alpha_{A_n} \cap \mathcal{B}$, respectivamente. Sean $\alpha'_{\{x\}}$ y $\alpha''_{\{x\}}$ los subarcos de $\alpha_{\{x\}}$ que van de $\alpha_{\{x\}} \cap \mathcal{B}$ a X y de $\{x\}$ a $\alpha_{\{x\}} \cap \mathcal{B}$, respectivamente.

Como $C(X)$ es únicamente arcoconexo [34, 1.61] tenemos que $\left\{\alpha'_{A_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\alpha'_{\{x\}}$. Por continuidad en $\widehat{h} = q_Y^{-1}hq_X$ en $C(X) \setminus F_1(X)$, entonces $\left\{\widehat{h}(\alpha'_{A_n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\widehat{h}(\alpha'_{\{x\}})$.

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\widehat{h}\big(\alpha'_{A_n}\big) \cap \widehat{h}\big(\alpha''_{A_n}\big) = \widehat{h}\big(\alpha'_{A_n} \cap \alpha''_{A_n}\big).$$

También notemos que:

$$\widehat{h}\big(\alpha'_{\{x\}}\big) \cap \widehat{h}\big(\alpha''_{\{x\}}\big) = \widehat{h}\big(\alpha'_{\{x\}} \cap \alpha''_{\{x\}}\big).$$

Por continuidad de $\widehat{h}$:

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{h}\big(\alpha'_{A_n}\big) \cap \widehat{h}\big(\alpha''_{A_n}\big) = \widehat{h}\big(\alpha'_{\{x\}} \cap \alpha''_{\{x\}}\big).$$

Como $C(Y)$ es únicamente arcoconexo, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{h}\big(\alpha_{A_n}\big) = \widehat{h}\big(\alpha_{\{x\}}\big),$$

por el Lema 6.2.4, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \widehat{h}(A_n) = \widehat{h}(\{x\})$. Entonces $\widehat{h}$ es un homeomorfismo.

Por tanto Y es homeomorfo a X. $\square$

Bibliografía

[1] D. E. Bennett, *Aposyndetic properties of unicoherent continua*, Pacific J. Math., 37 (1971) 585–589.

[2] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indescomposable continua*, Pacific J. Math., 1(1951), 43–51.

[3] K. Borsuk, *Theory of Shape*, Lectures, Fall, 1970, Lecture Notes Ser., vol.28, Aarhus Universitet, Matematisk Institut, 1973.

[4] J. Bustamante, R. Escobedo y F. Macías, *A fixed point theorem for Whitney blocks*, Topology Appl., 125(2002), 315–321.

[5] R. E. Chandler, *Hausdorff Compactifications*, Lecture Notes Pure Appl. Math., vol 23, Marcel Dekker, New York, 1976.

[6] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. Math., vol 28, American Mathematical Society, Providence, RI, 1976.

[7] D. W. Curtis, R. M. Schori, *Hyperespaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math., 101 (1978), 19–38.

[8] D. Curtis, N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl., 19 (1985), 251–260.

[9] J. Duguadji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[10] C. Eberhart, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Cones and Fans*, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979), 279–288.

[11] C. Eberhart, S. B. Nadler, Jr., *The dimension of certain hyperspaces*, Bull. Pol. Acad. Sci., 19 (1971), 1027–1034.

[12] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum*, Topology Appl., 138 (2004), 109–124.

[13] L. C. Hoehn, *A non-chainable plane continuum with span zero*, Fund. Math., 211 (2011), 149–174.

[14] W. Holsztyński, *Universal mappings and fixed point theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci., 15 (1967), 433–438.

[15] H. Hosokawa, *The span of hyperespaces*, Houston J. Math., 25 (1999), 35–41.

[16] W. Hurewicz, *Sur la dimension des produits cartésiens*, Annals of Math., 36 (1935), 194–197.

[17] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princenton University Press, Princenton , NJ, 1948.

[18] A. Illanes, *Multicoherence of symmetric products*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México, 25 (1985), 11–24.

[19] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr., *Hyperspace: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs Textbooks Pure Appl. Math., vol. 216, Marcel Dekker, New York, 1999.

[20] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, English transl., Academic Press, New York; PWN, Warsaw, 1968.

[21] F. B. Jones, *Concerning aposyndetic and non-aposyndetic continua*, Bull. Amer. Math. Soc., 58 (1952), 137–151.

[22] A. Lelek, *Disjoint mappings and the span of spaces*, Fund. Math., 55 (1964), 199–214.

[23] M. Levin, Y. Sternfeld, *The space of subcontinua of a 2-dimensional contunuum is infinitely dimensional*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 2771–2775.

[24] S. Macías, *On symmetric products of continua*, Topology Appl., 92 (1999), 173–182.

[25] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topology Appl., 138 (2004), 125–138.

[26] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman Hall/CRC, Taylor Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[27] S. Macías, Una introducción a la teoría de los continuos, en *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios* (R. Escobedo, S. Macías, H. Méndez, editores), Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos 31, (2006), 1–34.

[28] S. Macías, *On n-fold hyperspace suspension of continua*, Glasnik Mat., 41(61) (2006), 335–343.

[29] S. Macías, *On n-fold hyperspaces*, Glasnik Mat., 44(64) (2009), 479–492.

[30] S. Macías, S. B. Nadler, Jr., *Fans whose Hyperspace of subcontinua are cones*, Topology Appl., 126 (2002), 29–36.

[31] S. Macías, S. B. Nadler, Jr., *n-fold hyperspaces, cones and products*, Topology Proc., 26 (2001-2002), 255–270.

[32] M. M. Marsh, *s-connected spaces and the fixed point property*, Topology Proc. 8 (1983) 85–97.

[33] J. M. Martínez-Montejano, *Zero-dimensional closed set aposyndesis and hyperspaces*, Houston J. Math., 32 (2006), 1101–1105.

[34] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs Textbooks Pure Appl. Math., vol. 49, Marcel Dekker, New York, 1978. Reimpreso en aportaciones matemáticas, serie Textos No. 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[35] S. B. Nadler, Jr., *A Fixed Point Theorem for Hyperspace Suspensions*, Houston J. Math., 5 (1979), 125–132.

[36] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[37] S. B. Nadler, Jr., *Dimension theory: an introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos no. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[38] J. T. Rogers, Jr., *Dimension of hyperspaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci., Astrom. Phys., 20 (1972), 177–179.

[39] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., vol. 28, Amer Math. Soc., Providense, R. I., 1942.