UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

Σ-Productos y σ-Productos de Grupos Topológicos

T E S I N A
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Enrique Vargas Betancourt

DIRECTOR DE LA TESINA: Ángel Tamariz Mascarúa
FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

MÉXICO, D. F. MAYO DE 2013.

$\Sigma-$Productos y $\sigma-$Productos de Grupos Topológicos

Enrique Vargas Betancourt

Mayo 2013

Contenido

Introducción

La teoría de grupos topológicos tiene sus inicios en los trabajos de Sophus Lie durante la segunda mitad del siglo XIX pero es hasta la década de los 20-es del siglo XX que gracias a Otto Schreier (1901-1929) se presenta la definición formal de grupo topológico y recibe este nombre, algunos de los primeros matemáticos que contribuyeron al desarrollo de la teoría de grupos topológicos fueron A. D. Alexandroff, N. Bourbaki, M. I. Graev, S. Kakutani, E. Van Kampen, A. N. Kolmogorov, A. A. Markov, and L. S. Pontryagin. Estas estructuras surgen de la idea de relacionar la operación algebraica dentro de un grupo con la continuidad de funciones dentro de los espacios topológicos logrando de esta manera fusionar la teoría de grupos con la topología general. En la actualidad existe una gran cantidad de resultados que han venido a beneficiar tanto a la teoría algebraica como a la topológica, por ejemplo en la parte algebraica los teoremas de estructura que han permitido la descripción de la estructura de los grupos abelianos localmente compactos.

Dentro de la matemática en general los productos cartesianos juegan un papel muy importante y el caso del álgebra topológica no es la excepción, pues al trabajar con productos de grupos topológicos se obtienen una serie de resultados interesantes con respecto a sus propiedades. Además, muchos ejemplos interesantes de grupos topológicos con propiedades no triviales son definidos de esta manera, es por eso que en este trabajo se presentan algunos hechos básicos de productos topológicos de grupos topológicos, semigrupos topológicos y sobre todo de los llamados $\sum-$productos y $\sigma-$productos pues basándonos en ellos podemos construir ejemplos no triviales de grupos topológicos con propiedades verdaderamente asombrosas, por ejemplo si consideramos a $D = \{0, 1\}$ y hacemos $M = \sigma D^\tau$ el $\sigma-$producto de τ copias de D con τ un cardinal no numerable entonces M es un grupo topológico no metrizable, no compacto, Fréchet-Urysohn y $\sigma-$compacto.

Este trabajo consta de 4 capítulos. En el primer capítulo se establecen los conceptos, definiciones y algunos ejemplos de grupos topológicos así como los resultados más relevantes dentro estas estructuras, pues se habla de la homogeneidad de los grupos topológicos y del hecho de que en un producto de grupos topológicos arbitrarios definiendo adecuadamente la operación se tiene de nuevo una estructura de grupo topológico completamente relacionada con los grupos factores. El capítulo 2 se enfoca en la propiedades que tienen las vecindades de la identidad en el caso de grupos (semigrupos) topológicos pues existen muchas propiedades topológicas que para los grupos (semigrupos) topológicos basta que sean analizadas únicamente en vecindades de la identidad, esto nos llevará a presentar uno de los teoremas más importantes de esta teoría que establece que todo grupo topológico es un espacio regular. En el capítulo 3 se presentan conceptos y resultados de topología general que no son exclusivos de la teoría de grupos topológicos pero que servirán de base para el desarrollo del último capítulo pues son conceptos que de alguna manera extienden las propiedades de espacios primero y segundo numerables, uno de los teoremas más fuertes que relaciona estos conceptos con los grupos topológicos es el que establece que todo grupo topológico compacto con estrechez numerable es metrizable. El último capítulo inicia con las definiciones de $\sum -$productos y $\sigma-$productos para después presentar una serie de resultados y ejemplos de estos tipos de espacios que relacionan las propiedades mencionadas en el capítulo anterior, uno de los resultado básicos en este capítulo es el hecho de que tanto el $\sum -$producto como el $\sigma-$producto de grupos topológicos son subgrupos topológicos densos del producto topológico pues es a partir de esto de donde se desencadenan muchas de las propiedades que se analizarán en este tipo de productos.

Capítulo 1

Grupos y semigrupos topológicos.

El concepto abstracto de grupo topológico fue introducido en 1925 y llamado así en 1927 [4] y [5]. Sabemos que todo conjunto permite que se le de una topología, pero cuando queremos aprovechar la presencia de una estructura de grupo, debemos de alguna manera relacionar la operación del grupo con la topología.

En esta sección sólo vamos a dar una introducción a los grupos topológicos proporcionando algunas definiciones, ejemplos y resultados básicos, aclaramos que en todos los espacios que trabajaremos estamos suponiendo que satisfacen el axioma de separación T_1. Existen varias formas de relacionar las estructuras algebraica y topológica lo que implica que tengamos diversas definiciones como:

Definición 1.0.1 *Un **Semigrupo topológico derecho** consiste de un semigrupo S y una topología $\mathcal{T}$ sobre S tal que para todo $a \in S$, la acción derecha*

$$\varrho_a : S \longrightarrow S$$

definida por $\varrho_a(s) = s \cdot a$, donde "$\cdot$" es la operación de semigrupo, es continua.

De manera análoga si en la definición anterior consideramos la acción izquierda $\lambda_a : S \longrightarrow S$ en lugar de ϱ_a podemos definir un **semigrupo topológico izquierdo**, si un semigrupo es tanto topológico derecho como izquierdo diremos que es un **semigrupo semitopológico** o si en ves de semigrupos pedimos que sean grupos entonces tenemos un **grupo topológico derecho** y un **grupo topológico izquierdo** respectivamente, si se cumplen las dos condiciones a la vez diremos que es un **grupo semitopológico**.

Definición 1.0.2 *Un **semigrupo topológico** consiste de un semigrupo S y una topología $\mathcal{T}$ sobre S tal que la multiplicación en S, vista como una función de $S \times S$ a S es continua donde $S \times S$ está provisto de la topología producto.*

Es sencillo ver que el conjunto denotado por $S(X,X)$ que consiste de todas las funciones del conjunto X en él mismo con operación la composición de funciones es un semigrupo. Veamos ahora lo que sucede si a este conjunto lo dotamos de una topología. Sea X un espacio topológico y sea $S_p(X,X)$ el semigrupo $S(X,X)$ con la topología de la convergencia puntual. Cabe mencionar que esta topología tiene como base $\mathcal{B}$ a los conjuntos de la forma

$$O(x_1,...,x_n,U_1,...,U_n) = \{f \in S(X,X) : f(x_i) \in U_i \;\; i = 1,...,n\}$$

donde x_i son puntos distintos de X y $U_1,...,U_n$ son conjuntos abiertos no vacíos en X, para algún $n \in \mathbb{N}$. Con estas definiciones estamos ya en posibilidades de presentar el siguiente teorema que nos sirve como un ejemplo de lo presentado anteriormente.

Teorema 1.0.1 *Para cualquier espacio topológico X, $S_p(X,X)$ es un semigrupo topológico derecho. Más aun, para toda $f \in S(X,X)$, la acción izquierda λ_f de f sobre $S(X,X)$ es continua si y sólo si la función $f : X \to X$ es continua.*

Demostración. Sean $f, g \in S(X,X)$ tomemos $K \subset X$ finito. Hacemos $H = f(K)$ y para cada $x \in K$ tomamos una vecindad abierta O_x de $gf(x)$ en X. Ahora sea V el conjunto de todas las $h \in S(X,X)$ tales que $h(x) \in O_x$ para cada $x \in K$. Consideramos ahora a U como el conjunto de todas las funciones $g' \in S(X,X)$ tales que $g'f(x) \in O_x$ para cada $f(x) \in H$. Entonces V es una vecindad abierta de gf en $S_p(X,X)$, y U es una vecindad abierta de g en $S(X,X)$ tal que $\rho_f(U) \subset V$, esto significa que ρ_f es continua y por lo tanto $S_p(X,X)$ es un semigrupo topológico derecho.

Consideremos ahora la acción izquierda λ_f para alguna $f \in S(X,X)$. Sea $a \in X$ un punto arbitrario y $V \subset X$ abierto no vacío. Tenemos entonces que

$$\lambda_f^{-1}[O(a,V)] = \{g \in S(X,X) : f(g(a)) \in V\} = \left\{g \in S(X,X) : g(a) \in f^{-1}(V)\right\}$$

Pero si suponemos que f es continua entonces el conjunto $\lambda_f^{-1}[O(a,V)]$ es abierto en $S_p(X,X)$ y como los conjuntos de la forma $O(a,V)$ forman una subbase para la topología de $S_p(X,X)$ se concluye que la acción λ_f es continua.

Por otro lado si suponemos que la función f es discontinua. Entonces podemos encontrar un punto $a \in X$ y una vecindad abierta V_0 de $f(a) = b$ en X tal que $f(U)\backslash V_0 = \emptyset$ para cada vecindad U de a. Pero si tomamos la función identidad 1_X tenemos que $f = \lambda_f 1_X$ esta en $O(a,V_0)$. Si tomamos un abierto básico arbitrario $O = O(x_1,...,x_n,U_1,...,U_n)$ de 1_X en $S(X,X)$ donde los puntos $x_1,...,x_n$ son distintos. Entonces $x_i \in U_i$ para cada $i \leq n$. Pero la imagen de $\lambda_f(O)$ no es un subconjunto de $O(a,V_0)$, por lo que λ_f no es continua. ■

Para finalizar con nuestro ejemplo de semigrupo topológico presentamos el siguiente corolario.

Corolario 1.0.1 *Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El espacio X es discreto.*

2. *$S_p(X,X)$ es un semigrupo semitopológico.*

3. *$S_p(X,X)$ es un semigrupo topológico.*

Demostración. Veamos primero que 1 implica 2. Si X es discreto entonces toda función de X en X es continua y por el teorema anterior $S_p(X,X)$ es un semigrupo semitopológico.

Por otro lado si $S_p(X,X)$ es un semigrupo semitopológico entonces λ_f es continua para todo $f: X \to X$ y por el teorema anterior tenemos pues que toda $f: X \to X$ es continua y como los conjuntos unipuntuales en X son cerrados, el espacio X debe de ser discreto por lo que 2 implica 1. Es obvio que 3 implica 2. Finalmente probemos que 1 implica 3. En efecto, verifquemos que la operación es continua, considere $(f,g) \in S_p(X,X) \times S_p(X,X)$, y sea

$$O = O(x_1, ..., x_n, U_1, ..., U_n)$$

un abierto básico de $f \circ g$, definimos el producto

$$O_1 \times O_2 = O(g(x_1), ..., g(x_n), U_1, ..., U_n) \times O(x_1, ..., x_n, g^{-1}(U_1), ..., g^{-1}(U_n))$$

note que el producto anterior es un abierto de $S_p(X,X) \times S_p(X,X)$ pues $g^{-1}(U_i)$ es un abierto para cada $i = 1, ..., n$ ya que g es continua por ser X discreto, en consecuencia $O_1 \times O_2$ está bien definido. Ahora sea $(h_1, h_2) \in O_1 \times O_2$ por construcción $h_1 \circ h_2$ cumple que $h_1(h_2(x_i)) \in U_i$. En consecuencia $h_1 \circ h_2 \in O$, así la operación es continua pues $f \circ g \in \cdot(O_1, O_2) \subset O$. Por lo tanto $S_p(X,X)$ es un semigrupo topológico. ■

Veamos ahora la definición de grupo topológico, esta manera de intersectar la teoría de grupos con la topología genera una estructura muy compleja, por un lado el lograr que una topología haga continuas las operaciones de grupo no es nada sencillo, en cambio una vez logrado esto se generan una gran riqueza de propiedades y resultados inesperados y elegantes en un espacio topológico arbitrario.

Definición 1.0.3 *Un **grupo topológico** G es un grupo provisto de una topología tal que las operaciones de multiplicación*

$$\mu : G \times G \longrightarrow G,\ \mu(g,h) = g \cdot h$$

e inversión

$$i : G \longrightarrow G,\ i(g) = g^{-1}$$

son funciones continuas, donde de nuevo "$\cdot$" es la multiplicación de grupo. Así las estructuas algebraica y topológica de G no son independientes.

Es fácil comprobar que la condición de continuidad de ambas funciones μ e i equivale a la condición de continuidad de la función "división" $\upsilon : G \times G \longrightarrow G$, dada por $\upsilon(g,h) = gh^{-1}$.

Es importante observar que la continuidad de estas funciones es independiente una de la otra, pues existen casos en los que solo una de las dos funciones es continua, cuando esto suceda diremos que el grupo es **paratopológico** si μ es continua y **cuasitopológico** si i es continua, veamos ejemplos de estos casos.

Ejemplo 1.0.1 *Sea $\mathcal{T}$ la topología sobre $\mathbb{R}$ con base consistente de los conjuntos $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Con esta topología y la suma usual, $\mathbb{R}$ es un grupo paratopológico, pero $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es grupo topológico dado que la función inversión no es continua. Veamos esto a detalle, Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sea V un abierto en $\mathbb{R}$ tal que $x + y \in V$, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $[x + y - \epsilon, x + y + \epsilon) \subset V$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ y sean $V_1 = [x - \delta, x + \delta)$ y $V_2 = [y - \delta, y + \delta)$ tenemos pues que si $z \in V_1$ y $w \in V_2$ claramente $z + w \in V$, esto es, $\mu(V_1 \times V_2) \subset V$, y $V_1 \times V_2$ es un abierto que contiene a (x, y), por tanto μ es continua. Para ver que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es grupo topológico, sea $1 \in \mathbb{R}$ y sea $U = \left[1, \frac{3}{2}\right)$ ahora $i(1) = -1$ y para cualquier abierto V que contiene a -1 existe un básico $[a, b)$ tal que $a \leq -1 < b$ y $[a, b) \subset V$, pero si x es tal que $-1 < x < b$ entonces $-x < 1$, esto es $i(x) \notin U$ por lo que $i(V) \nsubseteq U$, esto implica que i no es continua. Este grupo paratopológico es llamado la recta de Sorgenfrey.*

Ejemplo 1.0.2 *Sea G un grupo infinito arbitrario y $\mathcal{T}$ todos los subconjuntos de G que tienen complemento finito. Entonces G no es un grupo paratopológico, pero si es un grupo cuasitopológico. Consideremos la acción derecha $\varrho_a : G \to G$ es fácil probar que ϱ_a es una biyección entonces si $g \in G$ para cualquier vecindad abierta U que contenga a $g \cdot a$ tenemos que $\varrho_a^{-1}(U)$ tiene comlemento finito, es decir, $\varrho_a^{-1}(U)$ es abierto y claramente $g \in \varrho_a^{-1}(U)$, para la acción izquierda se utiliza un argumento similar, y hasta el momento hemos probado que G es un grupo semitopológico, ahora también es sencillo probar que la función inversión es biyectiva dado que para cada elemento del grupo existe sólo un inverso lo que implica que si $g \in G$ y U es una vecindad abierta de g^{-1} entonces $U^{-1} = \left\{x^{-1} \in G : x \in U\right\}$ es también abierto, por lo que i es continua, es decir G es un grupo cuasitopológico. Veamos ahora que la función μ no es continua, tenemos que también en $G \times G$ un conjunto es abierto si su complemento es finito, tomemos pues el punto $(e, h) \in G \times G$ con $h \neq e$, $\mu(e, h) = h$ y sea $U = G \setminus \{e\}$ el cual claramente es abierto y contiene a h, además $(\mu^{-1}(U))^c = \{(g, f) \in G \times G : gf = e\}$ es obviamente no finito lo que implica que $\mu^{-1}(U)$ no es abierto en $G \times G$, por tanto μ no es continua, y G no es grupo paratopológico. Además G con esta topología es un espacio T_1 pero no es Hausdorff.*

Ahora presentamos algunos ejemplos de grupos topológicos, demostraremos algunas de las afirmaciones ya que las demas son demasiado triviales o en algunos casos son subespacios de algún otro.

1. Si G es un grupo arbitrario con la topología discreta, entonces G es un grupo topológico llamado grupo discreto.

2. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual y la operación de suma es un grupo topológico.

Sabemos que la topología usual de $\mathbb{R}$ es la generada por las vecindades básicas $\{B_\epsilon(x) : x \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0\}$, donde $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \epsilon\}$. No vamos a demostrar aquí que $\mathbb{R}$ es un grupo algebraico si no que lo daremos por hecho, veamos solo que las funciones i, μ son continuas. Sea $x \in \mathbb{R}$ y V un abierto con $-x \in V$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(-x) \subset V$; entonces $x \in B_\in(x)$ y se tiene que $i(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon(-x) \subset V$, lo que prueba que i es continua. De manera similar, sean $x, y \in \mathbb{R}$ fijos y V un abierto tal que $x + y \in V$, y existe $\epsilon > 0$ con $B_\in(x + y) \subset V$. Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. En este caso $x \in B_\delta(x)$, $y \in B_\delta(y)$ y $\mu(B_\delta(x), B_\delta(y)) \subset B_\epsilon(x + y)$ puesto que $|z + w - (x + y)| \leq |z - x| + |w - y|$, por lo que la suma es una función continua.

3. Sea $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo de las matrices invertibles de orden n con elementos reales, y como operación de grupo la multiplicación de matrices. Si dotamos a $GL(n, \mathbb{R})$ de la topología heredada como subespacio del espacio euclideano $\mathbb{R}^{n^2}$, entonces $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico.

Al igual que en el ejemplo anterior aquí no demostraremos el hecho de que $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo algebraico, sólo analizaremos la continuidad de la función división, como $GL(n, \mathbb{R})$ es un subespacio del espacio euclideano real de dimensión n^2, entonces su topología es generada por la métrica:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j} - b_{i,j}|^2}$$

para cualesquier $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j}) \in GL(n, \mathbb{R})$, es sencillo ver que la función $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ es continua, pues los elementos de la matriz producto son sumas de productos de los elementos de A y de B. Entonces el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico.

4. El círculo unitario $S^1 \subset \mathbb{C}$ es un grupo topológico con la multiplicación de números complejos.

5. Sea $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ este también es un grupo topológico llamado el grupo especial lineal.

6. El grupo ortogonal $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$ donde A^t es la matriz transpuesta de A y la matriz I es la identidad.

7. El grupo especial ortogonal $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$

Los ejemplos 5,6 y 7 no sólo son grupos topológicos sino que además son subgrupos topológicos del grupo $GL(n, \mathbb{R})$.

Definición 1.0.4 *Sea G un espacio topológico, decimos que G es un espacio* ***homogéneo*** *si para cualesquiera dos puntos del espacio existe un homeomorfismo del espacio en si mismo que envía un punto en el otro.*

Quizá la primer ventaja que se obtiene al trabajar con grupos topológicos es que la operación de grupo hace indistinguibles las propiedades locales en el grupo desde el punto de vista de la topología pues es muy sencillo probar que todo grupo topológico es tanto un grupo topológico derecho como un grupo topológico izquierdo, es decir que las funciones traslación son homeomorfismos de G en si mismo, y lo mismo sucede con la función inversión, es decir un grupo topológico siempre es un grupo cuasitopológico.

Cualquier grupo topológico G es homogéneo pues dados $g_1, g_2 \in G$ existe un homeomorfismo φ tal que $\varphi(g_1) = g_2$, en efecto tenemos a φ como la traslación izquierda por $g_2 g_1^{-1}$. En virtud de la homogeneidad, para probar que G satisface cierta propiedad local bastará probarlo para un punto, en particular para el elemente identidad e de G. Así por ejemplo, es suficiente que $\{e\}$ sea abierto o cerrado o bien tenga una base de vecindades numerable, para que G sea discreto, o T_1, o satisfaga el primer axioma de numerabilidad respectivamente. Para dos subconjuntos U y V de un grupo topológico G usaremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} UV &= \{uv : u \in U, \quad v \in V\} \\ V^{-1} &= \{v^{-1} : v \in V\} \\ UV^{-1} &= \{uv^{-1} : u \in U, \quad v \in V\} \\ V^2 &= \{v_1 v_2 : v_1, v_2 \in V\} \end{aligned}$$

En el siguiente teorema nos restringimos al caso de grupos topológicos, pero se tienen resultados similares para los semigrupos topológicos, grupos paratopológicos y grupos cuasitopológicos.

Teorema 1.0.2 . *Supongamos que $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de grupos topológicos, e_α el elemento neutro de G_α para todo $\alpha \in A$, $G = \Pi_{\alpha \in A} G_\alpha$ el producto cartesiano, con la topología de Tychonoff para el producto y la operación en el producto definida coordenada a coordenada. G es un grupo topológico, con elemento neutro $e = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$.*

Demostración. Sea $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ y $y = (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ elementos arbitrarios de G y O una vecindad de $z = xy^{-1}$ en G. Si $z = (z_\alpha)_{\alpha \in A}$, por como definimos el producto es claro que $z_\alpha = x_\alpha y_\alpha^{-1}$ para cada $\alpha \in A$. Como G tiene la topología de Tychonoff podemos encontrar elementos distintos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ en el conjunto de indices A y una vecindad abierta W_{α_k} del punto z_{α_k} en el grupo G_{α_k}, para cada $k = 1, 2, ..., n$ tal que $W = \Pi_{\alpha \in A} W_\alpha \subset O$, donde $W_\alpha = W_{\alpha_k}$ si $\alpha = \alpha_k$ para algún $k \leqslant n$, $W_\alpha = G_\alpha$ en los otros casos.

Como G_{α_k} es un grupo topológico, entonces existen vecindades abiertas U_{α_k} y V_{α_k} de x_{α_k} y y_{α_k}, respectivamente, en G_α tal que $U_{\alpha_k} V_{\alpha_k}^{-1} \subset W_{\alpha_k}$. También aquí, hacemos $U_\alpha = V_\alpha = G_\alpha$ para cada $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. Entonces los conjuntos $U = \Pi_{\alpha \in A} U_\alpha$ y $V = \Pi_{\alpha \in A} V_\alpha$ son vecindades abiertas de x y y respectivamente en el grupo producto G. Se sigue inmediatamente de la definición de los conjuntos U y V que $UV^{-1} \subset W \subset O$, por tanto la función división es continua y G es un grupo topológico. ■

Veamos ejemplos en los que aplicamos el teorema anterior, los cuales también nos servirán para presentar algunas propiedades en el último capítulo.

Ejemplo 1.0.3 *Sea S^1 el grupo del círculo entonces $\left(S^1\right)^\tau$, el producto topológico de τ copias de S^1,es un grupo topológico compacto y Hausdorff.*

Ejemplo 1.0.4 *Denotemos por D el grupo discreto de dos elementos $\{0, 1\}$. Sea D^τ el producto topológico de τ copias del grupo D. Entonces D^τ es un* *grupo topológico. Notemos que en este grupo* $a^2 = e$ *para cada* $a \in D^\tau$*, esto es, cada elemento de* D^τ *es su propio inverso. A tales grupos se les llama booleanos.*

Ejemplo 1.0.5 *Sea* G *un grupo topológico y sea* X *un espacio topológico. Consideremos el conjunto de todas las funciones continuas de* X *en* G *con la operación definida coordenada a coordenada y la topología de convergencia puntual. Este objeto, denotado por* $C_p(X, G)$ *es un grupo topológico.*

Capítulo 2

Sistemas de vecindades de la identidad.

Una de las características principales de los grupos (semigrupos) topológicos, es que el estudio de algunas propiedades topológicas basta analizarlo en vecindades de la identidad para que se cumplan en todo el espacio. Tal riqueza se debe fundamentalmente a la continuidad de las traslaciones, pues un sistema de vecindades para un punto g en G se puede ver como un sistema de vecindades de e tasladado por ρ_g. Éste y otros resultados serán analizados a lo lagro de la siguiente sección. Probaremos, por ejemplo, que un homorfismo definido en un grupo topológico derecho (izquierdo) es una función continua si lo es en la identidad. El resultado más importante de esta sección será probar que todo grupo topológico es un espacio regular.

Proposición 2.0.1 *Sea G un grupo topológico derecho y g cualquier elemento de G, entonces:*

a) *La traslasión derecha ρ_g de G por g es un homeomorfismo del espacio G en el mismo.*

b) *Para cada base $\mathcal{B}_e$ de e en el espacio G, la familia $\mathcal{B}_g = \{Ug : U \in \mathcal{B}_e\}$ es una base de g en G.*

Demostración. Claramente $a)$ implica $b)$. Entonces sólo veamos la demostración de $a)$ para lo que es necesario observar primero que en un grupo topológico derecho toda traslación derecha es una biyección continua. Pues $\rho_g \circ \rho_{g^{-1}}$ es la función identidad y entonces la función inversa de ρ_g es también continua, por tanto ρ_g es un homomorfismo de G en el mismo. ■

Corolario 2.0.2 *En todo grupo semitopológico G, todas las traslaciones izquierdas y derechas son homeomorfismo.*

Corolario 2.0.3 *Supongase que un subgrupo H de un grupo topológico derecho G (o izquierdo) contiene un subconjunto abierto no vacío de G. Entonces H es abierto en G.*

Demostración. Sea U dicho subconjunto abierto de G y sea $b \in U$, hacemos $V = \rho_{b^{-1}}(U) = Ub^{-1}$, por 2.0.1 tenemos que V es un abierto que contiene a e_G. Para todo $a \in H$, tenemos que el conjunto $\rho_a(V) = Va$ es abierto en G y $a \in Va$. Entonces, el conjunto $H = \bigcup_{a \in H} Va$ es abierto en G. ■

La siguiente proposición es un resultado muy importante en la teoría de los grupos topológicos debido a la fuerza que la da a las funciones que son continuas en el elemento identidad.

Proposición 2.0.2 *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos topológicos derechos (izquierdos). Si f es continua en el elemento neutro e_G de G, entonces f es continua.*

Demostración. Sólo probaremos el resultado para grupos topológicos izquierdos, la prueba para grupos topológicos derechos es análoga. Sea x en G un elemento arbitrario, y supongamos que O es una vecindad abierta de $y = f(x)$ en H. Dado que la traslasión izquierda λ_y es un homeomorfismo de H, entonces existe una vecindad abierta V del elemento neutro e_H en H tal que $yV \subset O$. Ahora, de la continuidad de f en e_G se sigue que $f(U) \subset V$, para alguna vecindad abierta U de e_G en G. De nuevo, como λ_x es un homeomorfismo de G en el mismo, el conjunto xU es una vecindad abierta de x en G, y tenemos que $f(xU) = yf(U) \subset yV \subset O$. Entonces, f es continua en al punto $x \in G$. ■

Proposición 2.0.3 *Todo subgrupo abierto H de un grupo topológico derecho G (izquierdo) es cerrado en G.*

Demostración. Sea $\gamma = \{Ha : a \in G\}$ la familia de todas las clases laterales derechas de H en G, entonces γ es una cubierta abierta disjunta de G. Por lo tanto, todo elemento de γ es cerrado en G. En particular, $H = He$ es cerrado en G. De manera análoga se argumenta para el caso en que G es un grupo topológico izquierdo. ■

Un resultado sencillo que se obtiene de manera inmediata de la proposición 2.0.1 y del corolario 2.0.2 es el siguiente.

Corolario 2.0.4 *Todo grupo topológico derecho G, en particular, todo grupo semitopológico es un espacio homogéneo.*

Demostración. Si tomamos elementos arbitrarios $x, y \in G$ y hacemos $z = x^{-1}y$, tenemos pues que $\rho_z(x) = xz = xx^{-1}y = y$, y como la proposición 2.0.1 nos dice que ρ_z es un homeomorfismo, entonces G es un espacio homogéneo. El corolario 2.0.2 es usado para el caso de grupos semitopológicos. ■

Por otro lado, si solo tenemos un semigrupo topológico, este no necesariamente es homogéneo aunque tenga elemento identidad y sea abeliano, como lo mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.0.6 *Sea $I = [0,1]$ el intervalo unitario, y para todo $x, y \in I$, hagamos $xy = \max\{x, y\}$. Es muy sencillo verificar que I con la topología usual y con este producto es un semigrupo topológico abeliano que tiene como elemento identidad a el cero. Sin embargo, I no es un espacio homogéneo ya que no existe un homeomorfismo de I en el mismo que envíe al 0 en el $\frac{1}{2}$.*

Hasta el momento una de las propiedades mas importantes que hemos mencionado sobre los grupos topológicos es la de la homegeneidad, ya que cualquier vecindad de $g \in G$ es de la forma gV o Vg con V una vecindad de e, lo que hace que las vecindades de la identidad jueguen un papel primordial dentro del estudio de los grupos topológicos, lo que que nos motiva a hacer la siguiente pregunta. Dado un grupo topológico G, ¿cuáles son las propiedades que tiene una base abierta de la identidad e de G?, la respuesta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 2.0.3 *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una base abierta de e en G.Entonces:*

i) *Para todo $U \in \mathcal{U}$, existe un elemento $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$;*

ii) *Para todo $U \in \mathcal{U}$, existe un elemento $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$;*

iii) *Para todo $U \in \mathcal{U}$, y $x \in U$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $Vx \subset U$;*

iv) *Para todo $U \in \mathcal{U}$, y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$;*

v) *Para todos $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$;*

vi) $\{e\} = \bigcap \mathcal{U}$.

Inversamente, si G es un grupo, y $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de G que satisfacen las condiciones $i) - vi)$. Entonces la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ sobre G, la cual lo hace un espacio T_1. Con esta topología G es un grupo topológico, y la familia $\{aU : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la misma topología sobre G.

Demostración. Si G es un grupo topológico, entonces i) y ii) se siguen inmediatamente de la continuidad de las funciones multiplicación e inversión. La propiedad iii) es una consecuencia de la continuidad de la traslasión izquierda en G. De la misma manera como las funciones $x \mapsto ax$ y $ax \mapsto axa^{-1}$ son homeomorfismos de G se cumple iv). La propiedad v) es clara del hecho de que $\mathcal{U}$ es una base abierta y la propiedad vi) también se obtiene del hecho de que $\mathcal{U}$ es una base de vecindades abiertas de la identidad y de que el grupo G es un espacio T_1.

Para demostrar la otra parte, consideremos $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G tal que las condiciones i)-vi) se cumplen. Sea pues $\mathcal{T}$ la familia de todos los subconjuntos W de G que satisfacen que para todo $x \in W$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $Ux \subset W$.

1. $\mathcal{T}$ es una topología en G

   Es sencillo verificar que $\bigcup \gamma \in \mathcal{T}$ para cualquier subfamilia γ de $\mathcal{T}$. Sean ahora $W_1, W_2 \in \mathcal{T}$, y hagamos $W = W_1 \cap W_2$, debemos de probar que $W \in \mathcal{T}$. Sea pues $x \in W$. Existen $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1 x \subset W_1$ y $U_2 x \subset W_2$, ahora, del inciso v) se sigue que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset U_1 \cap U_2$. Por lo que $Ux \subset W_1 \cap W_2 = W$, entonces $W \in \mathcal{T}$, y por lo tanto $\mathcal{T}$ es una topología sobre G.

2. $Ux \in \mathcal{T}$, para cada $x \in G$ y cada $U \in \mathcal{U}$.

   Sea $y \in Ux$. Entonces $yx^{-1} \in U$, usando la propiedad iii), existe un elemento $V \in \mathcal{U}$ tal que $Vyx^{-1} \subset U$, de donde se sigue que $Vy \subset Ux$, por lo que $Ux \in \mathcal{T}$.

3. La familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$. Entonces, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{U}}$.

4. La multiplicación en G es continua con respecto a la topología T.

   Sean a, b elementos arbitrarios de G, y O cualquier elemento de $\mathcal{T}$ tal que $ab \in O$. Entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $Wab \subset O$, para probar la continuidad, basta con encontrar $U, V \in \mathcal{U}$ tales que $UaVb \subset Wab$ o, lo que es equivalente, $UaV \subset Wa$, lo cual a su vez es equivalente a decir que $U(aVa^{-1}) \subset W$. Veamos pues como escogemos U, V. Primero, utilizando i) escogemos $U \in \mathcal{U}$ tal que $U^2 \subset W$, luego usando el inciso v) escogemos $V \in \mathcal{U}$ tal que $aVa^{-1} \subset U$. Entonces de la manera en que se eligieron U y V, tenemos que $U(aVa^{-1}) \subset U^2 \subset W$, lo que implica que $UaVb \subset Wab$. Por lo que la multiplicación en G es continua con respecto a la topología $\mathcal{T}$. En particular toda las traslaciones derechas de G son continuas, y el espacio es homogéneo.

5. $bV \in \mathcal{T}$, para todo $b \in G$ y $V \in \mathcal{U}$.

   Sea $y \in bV$. Debemos encontrar $U \in \mathcal{U}$ tal que $Uy \subset bV$. Ahora $b^{-1}y \in V$. Por iii), existe un elemento $W \in \mathcal{U}$ tal que $Wb^{-1}y \subset V$. y de iv) se sigue que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $b^{-1}Ub \subset W$. Por lo tanto, $b^{-1}Ubb^{-1}y \subset V$, esto es, $b^{-1}Uy \subset V$, y $Uy \subset bV$, por lo que $bV \in \mathcal{T}$.

6. La función de G en G dada por $i(x) = x^{-1}$ es continua con respecto a la topología $\mathcal{T}$.

   Por el inciso iii) debemos sólo mostrar que el conjunto $a^{-1}U^{-1} \in \mathcal{T}$ para todo $a \in G$ y $U \in \mathcal{U}$, como $i(Ua) = a^{-1}U^{-1}$. Por el punto 5, es suficiente verificar que $U^{-1} \in \mathcal{T}$. Tomamos un punto arbitrario $x \in U^{-1}$. Entonces $x^{-1} \in U$, iii) implica que $Vx^{-1} \subset U$ para algun $V \in \mathcal{U}$. Ahora aplicando ii) podemos escoger $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^{-1} \subset V$. Entonces $W^{-1}x^{-1} \subset Vx^{-1} \subset U$, de donde se sigue que $xW = (W^{-1}x^{-1})^{-1} \subset U^{-1}$. De nuevo, por el punto 5, xW es una vecindad abierta de x en $(G, \mathcal{T})$, y concluimos que U^{-1} es un elemento de $\mathcal{T}$, lo que prueba el punto 6.

Finalmente, vi) y la homogeneidad de G implica que la topología $\mathcal{T}$ satisface el primer axioma de separación.

■

Teorema 2.0.4 *Todo grupo topológico G tiene una base abierta de la identidad que consiste de vecindades simétricas.*

Demostración. Para una vecindad abierta arbitraria U de la identidad e en G, sea $V = U \cap U^{-1}$. Entonces, $V = V^{-1}$, el conjunto V es una vecindad abierta de e, y $V \subset U$. ■

Teorema 2.0.5 *Todo grupo topológico G es un espacio regular.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de la identidad e en G. Por i) del teorema 2.0.3 y el teorema 2.0.4 existe una vecindad abierta V de e tal que $V^{-1} = V$ y $V^2 \subset U$. Entonces si $x \in \overline{V}$, tenemos que $Vx \cap V \neq \varnothing$. Por lo tanto, $a_1 x = a_2$ para algunos a_1, a_2 en V, y $x = a_1^{-1} a_2 \in V^{-1}V = V^2 \subset U$. Esto implica que $\overline{V} \subset U$. Como G es un espacio homogéneo y por el corolario 2.0.4 tenemos pues que G es regular. ■

Ejemplo 2.0.7 *Sea G un grupo abstracto y sea $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos normales de G cerrados bajo las intersecciones finitas y tale que $\{e\} = \bigcap \mathcal{F}$, entonces la familia de todos los conjuntos de la forma Hx, donde $H \in \mathcal{F}$ y $x \in G$, es una topología $\mathcal{T}$ sobre G, esto se sigue del teorema 2.0.3, ademas con esta topología G es cero-dimensional, ya que para cada $H \in \mathcal{F}$ tenemos que es abierto y cerrado a la vez, pues el complemento de H es la unión de clases laterales disjuntas de H.*

Capítulo 3

Estrechez en productos topológicos

En esta sección vamos a presentar algunos resultados que nos serán de gran utilidad en las secciones posteriores, iniciaremos con algunos hechos sobre productos de espacios topológicos los cuales comunmente no se trabajan en un curso básico de topología, aunque juegan un papel muy importante en el estudio de productos de grupos topológicos y subgrupos topológicos, algunas de estas definiciones tratan de extender varios conceptos muy conocidos de la topología general tales como ser primero numerable, segundo numerable o separable. Vamos a conciderar algunas propiedades topológicas definidas en términos de la cerradura de un espacio y estudiaremos el comportamiento de estas propiedades sobre el producto de espacios topológicos.

Definición 3.0.5 *Definimos la **estrechez** de un punto x en un espacio topológico X como el mínimo cardinal $\tau \geqslant \omega$ con la propiedad de que si $x \in \overline{P}$, $P \subseteq X$, existe $Q \subset P$ tal que $x \in \overline{Q}$ y $|Q| \leqslant \tau$ y la denotaremos por $t(x, X)$. La estrechez del espacio X es el supremo de todas las $t(x, X)$ para $x \in X$ y será denotado por $t(X)$.*

Como ejemplos podemos observar que los espacios primero numerables tienen estrechez numerable, más aun los espacios Fréchet-Urysohn y los espacios secuenciales también tienen estrechez numerable.

Otras definiciones que están relacionadas de manera natural con la de estrechez son las siguientes.

Definición 3.0.6 *Decimos que la G_δ-**estrechez** de un espacio X no es mayor que τ, y lo denotamos por $get(X) \leqslant \tau$, si cada ves que un punto $x \in X$ que pertencece a la cerradura de $\bigcup \gamma$, donde γ es una familia de conjuntos G_δ en X, entonces existe una subfamilia η de γ tal que x está en la cerradura de $\bigcup \eta$ y $|\eta| \leqslant \tau$. Si bajo los mismos supuestos acerca de x y γ existe un subconjunto M de $\bigcup \gamma$ tal que $x \in \overline{M}$ y $|M| \leqslant \tau$ decimos que la δ-**estrechez** de X no es mayor que τ y lo denotamos por $t_\delta(X) \leqslant \tau$.*

Una observación interesante con respecto a lo anterior es el hecho de que si la estrechez de X es numerable entonces la δ-estrechez de X es numerable, y si la δ-estrechez de X es numerable entonces la G_δ-estrechez de X también es numerable. Otro resultado que es muy sencillo y que relaciona estas definiciones es el caso en el que todos los puntos del espacio son G_δ, aquí la familia γ de la definición anterior de la G_δ-estrechez y de la δ-estrechez puede consistir de conjuntos unipuntuales, y en este caso $get(X) = t_\delta(X) = t(X)$.

Si notamos las definiciones hasta ahora trabajadas se aplican a cualquier espacio topológico. Veámos a continuación algunos conceptos que son exclusivos de los espacios producto.

Definición 3.0.7 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$, definimos un ω-**cubo** en X como cualquier subconjunto B de X que pueda representarse como el producto $B = \Pi_{\alpha\in A} B_\alpha$, donde B_α es un subconjunto no vacío de X_α y el conjunto $A_B = \{\alpha \in A : B_\alpha \neq X_\alpha\}$ es numerable, al conjunto A_B lo llamaremos el **núcleo** del ω-cubo B. Sea ahora $X_K = \Pi_{\alpha\in K} X_\alpha$ para algún subconjunto no vacío K de A, denotemos por p_K la proyección natural de X sobre X_K. Si B es un ω-cubo con núcleo K tal que la imagen $p_K(B)$ sobre la proyección consiste solo de un punto, decimos que B es un ω-**cubo elemental**.*

El siguiente lema es un resultado topológico que nos servirá para probar la proposición 3.0.4.

Lema 3.0.1 *Supongase que $f : X \to Y$ es una función continua y abierta de un espacio X sobre un espacio Y, $x \in X$, $B \subset Y$, y $f(x) \in \overline{B}$. Entonces $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. En particular, $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$.*

Demostración. Sea $y = f(x)$, y sea O una vecindad abierta de x. Entonces $f(O)$ es una vecindad abierta de y. Por tanto, $f(O) \cap B \neq \emptyset$ y, entonces, $O \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. De aqui se sigue que $x \in \overline{f^{-1}(B)}$, y la igualdad $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$ es ahora evidente. ■

Proposición 3.0.4 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos tales que la estrechez de $X_K = \Pi_{\alpha\in K} X_\alpha$ es numerable para cada subconjunto numerable K de A, y sea $X = \Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$ el producto topológico. Entonces para la familia γ de ω-cubos en X y para cualquier punto $x \in \overline{\bigcup \gamma}$, existe una subfamilia numerable η de γ tal que $x \in \overline{\bigcup \eta}$.*

Demostración. Vamos a definir por inducción una sucesión creciente de subconjuntos numerables A_n de A y una sucesión de subfamilias numerables γ_n de γ de la siguiente manera. Sea A_0 un subconjunto numerable no vacío de A. Asumimos que para cada $n \in \omega$, un conjunto numerable $A_n \subset A$ está ya definido, y hacemos $K = A_n$. Por el supuesto de que, $t(X_K) \leqslant \omega$. Entonces existe una subfamilia numerable γ_n de γ tal que $p_K(x)$ está en la cerradura del conjunto $\bigcup\{p_K(V) : V \in \gamma_n\}$ en el espacio X_K. Ahora hacemos $A_{n+1} = A_n \cup \bigcup\{A_B : B \in \gamma_n\}$. El paso inductivo está completo.

Sea $M = \bigcup\{A_n : n \in \omega\}$ y $\eta = \bigcup\{\gamma_n : n \in \omega\}$. Claramente, η es una subfamilia numerable de γ. Sea H la cerradura de $\bigcup\eta$. Tenemos que mostrar que $x \in H$, esto es, tenemos que verificar que cualquier abierto canónico O_1 de x en X tiene un punto en común con H. Claramente, $p_S^{-1}p_S(O_1) = O_1$ para algún conjunto finito $S \subset A$. Sea $F = S \cap M$ y $O = p_F^{-1}p_F(O_1)$. Entonces $x \in O_1 \subset O = p_F^{-1}p_F(O)$ se sigue pues de la definición de M y η que $\bigcup\eta = p_M^{-1}p_M(\bigcup\eta)$ y como la proyección p_M de X sobre X_K es abierta y $H = \overline{\bigcup\eta}$, el lema 3.0.1 implica que $p_M^{-1}p_M(H) = H$. Por lo tanto las condiciones $O \cap H \neq \varnothing$ y $O_1 \cap H \neq \varnothing$ son equivalentes.

Como la sucesión $\{A_n : n \in \omega\}$ es creciente, existe $n \in \omega$ tal que $F \subset A_n$. Por la elección de γ_n, el punto $p_F(x)$ esta en la cerradura del conjunto $\bigcup\{p_F(V) : V \in \gamma_n\}$ en el espacio X_F. Entonces existe un punto $z \in \bigcup\gamma_n \subset \bigcup\eta$ tal que $p_F(z) \in p_F(O)$. Se sigue que $z \in O \cap \bigcup\eta$, por tanto $x \in H$. ■

Proposición 3.0.5 *Sea $\{X_a : a \in A\}$ una familia de espacios topológicos tal que la $G_\delta-$estrechez de $X_K = \Pi_{\alpha\in K}X_\alpha$ es numerable, para cualquier subconjunto numerable K de A, y sea $X = \Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ el producto topológico. Entonces, para cualquier familia γ de conjuntos G_δ en X y para cualquier punto x en la cerradura de $\bigcup\gamma$, existe una subfamilia numerable η de γ tal que $x \in \overline{\bigcup\eta}$, esto es, $get(X) \leq \omega$.*

Demostración. Para cada punto y en $\bigcup\gamma$ existe un conjunto G_δ canónico B en X tal que $y \in B \subset \bigcup\gamma$. Por lo tanto podemos asumir que γ consiste de conjuntos G_δ canónicos en X. Apoyándonos de la demostración de la proposición 3.0.4 podemos hacer una pequeña modificación, para concluir en el paso inductivo que existe una subfamilia numerable γ_n de γ tal que $p_K(x)$ esta en la cerradura del conjunto $\bigcup\{p_K(V) : V \in \gamma_n\}$ en el espacio X_K, ahora debemos mencionar que $p_K(V)$ es un ω-cubo del tipo G_δ en el espacio X_K para cada $V \in \gamma_n$, y aplicando el hecho de que la $G_\delta-$estrechez de X_K es numerable. ■

Como la clase de los espacios con una red numerable es cerrada bajo productos numerables y todo espacio con red numerable tiene estrechez numerable, la proposición 3.0.5 implica los siguientes corolarios.

Corolario 3.0.5 *Sea X el producto de alguna familia de espacios cada uno con una red numerable. Entonces la $G_\delta-$estrechez de X es numerable.*

Corolario 3.0.6 *El producto de cualquier familia de espacios primero numerables tiene $G_\delta-$estrechez numerable.*

Lema 3.0.2 *Sea $X = \Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ el producto topológico de una familia de espacios topológicos, γ una familia numerable de ω-cubos elementales en X, y $x \in \overline{\bigcup\gamma}$. Para cada B en γ, sea $y(B)$ cualquier punto de B tal que $y(B)_\alpha = x_\alpha$, para cada $\alpha \in A\backslash A_B$. Sea $M = \{y(B) : B \in \gamma\}$. Entonces M es numerable, $M \subset \bigcup\gamma$, y $x \in \overline{M}$.*

Demostración. Supongamos que U es una vecindad abierta básica del punto $x \in X$. Como $x \in \overline{\bigcup\gamma}$, entonces existe B en γ tal que $U \cap B \neq \varnothing$. Para cada

$\alpha \in A$, sea p_α la proyección de X sobre el factor X_α. Como B es un ω-cubo elemental, tenemos que $y(B)_\alpha \in p_\alpha(U)$, para cada $\alpha \in A_B$. Tomando en cuenta que $y(B)_\alpha = x_\alpha$ para cada $\alpha \in A \backslash A_B$, concluimos que $y(B) \in U \cap M$. Por lo tanto, $x \in \overline{M}$. ■

Teorema 3.0.6 *Supongase que $\{X_a : a \in A\}$ es una familia de espacios primero numerables, y sea $X = \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$ el producto topológico de dicha familia. Entonces la $\delta-$estrechez de X es numerable.*

Demostración. Sea δ una familia arbitraria de conjuntos G_δ en X y x un punto en la cerradura de $\bigcup \gamma$. Como el producto de calquier familia numerable de espacios primero numerables es primero numerable, todo elemento de γ es la unión de una familia de $\omega-$cubos elementales en X. Por lo tanto, podemos asumir que γ consiste de $\omega-$cubos elementales. Por el corolario 3.0.6, la $G_\delta-$estrechez de X es numerable. Por lo tanto, existe una subfamilia η de γ tal que $x \in \overline{\bigcup \eta}$. Como η consiste de $\omega-$cubos elementales, el lema 3.0.2 implica que existe un subconjunto numerable M de $\bigcup \eta$ tal que $x \in \overline{M}$. Y como $M \subset \bigcup \gamma$. Entonces, $t_\delta(X) \leq \omega$. ■

Usando el hecho de que todo espacio de Hausdorff con una red numerable tiene seudocarácter numerable se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.0.7 *Sea X el producto de alguna familia de espacios de Hausdorff cada uno de los cuales tiene una red numerable. Entonces la $\delta-$estrechez de X es numerable.*

Presentamos ahora un ejemplo en el cual se muestran grupos topológicos con $G_\delta-$estrechez numerable o $\delta-$estrechez numerable que pueden tener estrechez arbitrariamente grande.

Ejemplo 3.0.8 *Para cada cardinal infinito τ, existe un grupo topológico G compacto y abeliano tal que la $\delta-$estrechez de G es numerable, pero $t(G) \geq \tau$. Sea $D = \{0, 1\}$ el grupo discreto de dos elementos, el grupo compacto abeliano $G = D^\tau$ tiene $\delta-$estrechez numerable, esto se obtiene del teorema 3.0.7. Veamos que $t(G) \geq \tau$. Si es necesario podemos asumir que τ es regular, es decir, la cofinalidad de τ es igual a τ. Denotemos por $\overline{0}$ el punto de G tal que todas sus coordenadas son ceros, esto es, el elemento identidad de G. Para todo ordinal $\beta < \tau$, sea un elemento $x_\beta \in G$ definido de la siguiente manera $x_\beta(\alpha) = 0$ si $\alpha < \beta$ y $x_\beta(\alpha) = 1$ en otro caso. Es sencillo verificar que $\overline{0}$ se encuentra en la cerradura del conjunto $X = \{x_\beta : \beta < \tau\}$. Para deducir la desigualdad deseada $t(G) \geq \tau$, es suficicente ver que $\overline{0}$ no está en la cerradura de Y, para cada $Y \subset X$ con $|Y| < \tau$. Como τ es un cardinal regular, para cada subconjunto $Y \subset X$ existe $\alpha < \tau$ tal que la desigualdad $\beta < \alpha$ se cumple para cada $x_\beta \in Y$. Por lo que $x_\beta(\alpha) = 1$ para todo $x_\beta \in Y$ y por lo tanto $\overline{0}$ no está en la cerradura de Y en G.*

Para finalizar esta sección veamos un par de resultado que aunque no hablan de los espacios producto, son de gran importancia y nos servirán para demostrar algunas proposiciones en la siguiente sección.

Teorema 3.0.8 *[**R. Engelking**] Si G es un grupo topológico compacto no metrizable con peso τ, entonces el espacio D^{τ} es homeomorfo a un subespacio de G.*

La demostración de este teorema puede consultarse en [1], teorema 4.2.1.

Corolario 3.0.7 *Todo grupo topológico compacto G con estrechez numerable es metrizable.*

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces por el teorema anterior, G contiene una copia topológica del espacio D^{ω_1}. Es fácil verificar que la estrechez de D^{ω_1} es no numerable. Entonces la estrechez de G es no numerable, lo cual es una contradicción. ■

Capítulo 4

Σ-Productos y σ-Productos

Muchos ejemplos importantes de grupos topológicos son definidos como subgrupos de productos de grupos topológicos muy simples, para ver esto vamos a introducir y a estudiar algunos subespacios de productos topológicos de espacios topológicos.

Definición 4.0.8 *Supongase que $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos, $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es el producto topológico de la familia η, para $x, b \in X$ el conjunto $\{\alpha \in A : x_\alpha \neq b_\alpha\}$ es llamado el **soporte** de x con respecto a b, y lo denotaremos por $sop_b x$.*

Definición 4.0.9 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ el producto topológico de la familia η y b un punto en X . Entonces el Σ-producto de η con base en b es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $sop_b x$ es numerable.*

De manera similar se define el σ-producto de η con base en b como el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que $sop_b x$ es finito, claramente el σ-producto es un subespacio de el Σ-producto y ambos son subespacios de X. Un hecho muy simple pero muy importante dentro de los Σ-productos y los σ-productos es el siguiente.

Proposición 4.0.6 *Sea $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de grupos topológicos, e_α el elemento neutro de G_α, y $G = \prod \{G_\alpha : \alpha \in A\}$. Entonces el Σ-producto que denotaremos por $\Sigma\Pi\eta$ y el σ-producto denotado por $\sigma\Pi\eta$ con base en el punto $e = (e_\alpha)_{\alpha \in A}$ son subgrupos topológicos densos del grupo topológico G.*

Demostración. La demostración se hará sólo para el caso de el σ-producto, sean $Y = \sigma \prod \eta$ y U un abierto básico en X , entonces U es da la forma $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \times \Pi X_{\alpha \in A \setminus \{1,2,...,n\}}$ con $U_i \neq \varnothing$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tomemos pues $y_i \in U_i$ para cada i y escogemos $y_\alpha = e_\alpha$ para todo $\alpha \in A \setminus \{1, 2, ..., n\}$ entonces formamos el punto $y = (y_1, y_2, ..., y_n, \Pi y_\alpha) \in X$, es claro que $sop_e y$ es finito lo que implica que $y \in Y \cap U$ por lo tanto Y es denso en X, observemos que el mismo argumento se puede aplicar a $\Sigma\Pi\eta$, el hecho de que sea subgrupo es inmediato. ■

En lo siguiente cuando se considere el Σ-producto o el σ-producto de alguna familia de grupos topológicos, vamos a asumir que el punto base es el elemento neutro del producto.

La proposición anterior es una muestra de la importancia del estudio de estos espacios y sirve como motivación para analizar algunas otras propiedades topológicas de los Σ-productos y los σ-productos de familias de espacios topológicos y grupos topológicos. Veamos algunos resultados interesantes sobre Σ-productos que relacionan la estrechez de algunos productos con la de el Σ-producto.

Teorema 4.0.9 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ el producto topológico de la familia η, b un punto en X. Supongamos también que, para cada subconjunto numerable C de A, la estrechez del espacio producto $\prod \{X_\alpha : \alpha \in C\}$ es numerable. Entonces la estrechez de el Σ-producto $\Sigma\Pi\eta$ con punto base b es también numerable.*

Demostración. Llamemos $Y = \Sigma\Pi\eta$ y tomemos un punto $y \in Y$, consideremos el conjunto $P \subset Y$ tal que $y \in \overline{P}$. Podemos suponer que $b \notin P$. Hacemos $S = sop_b y$ y $K_p = sop_b p \cup S$, para cada $p \in P$. Entonces K_p es un subconjunto de A, no vacío y numerable. Sea también B_p un ω-cubo elemental en X con núcleo K_p tal que $p \in B_p$. Sea $\gamma = \{B_p : p \in P\}$, es claro que $P \subset \bigcup \gamma$. Por lo tanto, $y \in \overline{\bigcup \gamma}$. Se sigue de la proposición 3.0.4 que existe un subconjunto numerable M de P tal que $y \in \overline{\bigcup \{B_p : p \in M\}}$. Ahora para cada $p \in M$, escogemos un punto $z(p) \in B_p$ tal que $z(p)_\alpha = y_\alpha$ para cada $\alpha \in A \backslash K_p$. Como $S \subset K_p$ para cada $p \in M$, tenemos que $z(p) = p$. Por lo tanto el lema 3.0.2 implica que $y \in \overline{M}$. ■

Como concecuencia de este teorema y del hecho de que el producto numerable de espacios primero numerables es primero numerable tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.0.8 *El Σ-producto de una familia de espacios primero numerables es un espacio con estrechez numerable.*

Como todo espacio metrizable es primero numerable entonces este resultado también se da para los espacios metrizables.

Definición 4.0.10 *Una **red** en un espacio topológico X es una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tales que todo conjunto abierto no vacío en X es la unión de elementos de $\mathcal{N}$*

Una red es casi lo mismo que una base; la diferencia consiste en que los miembros de la red no son abiertos necesariamente. En particular, toda base es una red. Un ejemplo de red para un espacio X es $\{\{p\} : p \in X\}$.

Definición 4.0.11 *Un espacio X es llamado **cósmico** si tiene una red numerable.*

Por ejemplo es obvio que todos los espacios segundo numerables, al igual que imagenes continuas de espacios segundo numerables, son espacios cósmicos. Entonces también al igual que en el corolario anterior tenemos como consecuencia del teorema 4.0.9 el siguiente resultado.

Corolario 4.0.9 *El Σ-producto de una familia de espacios cósmicos es un espacio con estrechez numerable.*

Presentamos ahora un lema y una serie de resultados que se derivan de él, los cuales son de utilidad en el estudio de los Σ-productos.

Lema 4.0.3 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ y $b \in X$. Para cada subconjunto numerable M de $Y = \Sigma\Pi\eta$ con base en b, la cerradura de M en Y coincide con la cerradura de M en X y es naturalmente homeomorfo a un subespacio cerrado del producto topológico de alguna subfamilia numerable de η.*

Demostración. Sea $K = \bigcup \{sop_b x : x \in M\}$. Entonces K es un subconjunto numerable de A y claramente, para cualquier y en la cerradura de M en X, tenemos que $y_\alpha = b_\alpha$ para cada $\alpha \in A \backslash K$. Por lo tanto la cerradura de M en X está contenida en Y y es homeomorfa a la cerradura de $p_K(M)$ en $X_K = \prod \{X_\alpha : \alpha \in K\}$, donde $p_K{:}X \longrightarrow X_K$ es la proyección; la restricción de p_K a la cerradura de M en X es el homeomorfismo natural que deseábamos. ■

Como ya lo mencionamos las siguientes 4 proposiciones son inmediatas a partir de este lema.

Proposición 4.0.7 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, X el producto y $b \in X$. Supongamos que para cada subconjunto numerable C de A, el espacio $\prod \{X_\alpha : \alpha \in C\}$ es Fréchet-Urysohn. Sea $Y = \Sigma\Pi\eta$ con base en b. Entonces, para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y es también Fréchet-Urysohn.*

Proposición 4.0.8 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios metrizables, $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ y $b \in X$. Si $Y = \Sigma\Pi\eta$ con base en b, entonces para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y es metrizable.*

Proposición 4.0.9 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios compactos, $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ y $b \in X$. Sea $Y = \Sigma\Pi\eta$ en b. Entonces para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y es compacto.*

Proposición 4.0.10 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios primero numerables, X el producto y $b \in X$. Sea $Y = \Sigma\Pi\eta$ con base en b. Entonces, para cada subconjunto numerable M de Y, la cerradura de M en Y es primero numerable.*

Un resultado mas general que la proposición 4.0.7 es el que presentamos a continuación.

Teorema 4.0.10 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ y $b \in X$. Supongamos que para cada subfamilia numerable ξ de η, el producto $\Pi\xi$ es un espacio Fréchet-Urysohn. Entonces $Y = \Sigma\Pi\eta$ con base en b es también Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sea $Z \subset Y$, $y \in Y$, y $y \in \overline{Z}$. Tenemos que todo espacio Fréchet-Urysohn tiene estrechez numerable. Entonces Y tiene estrechez numerable, por el teorema 4.0.9, por lo tanto existe un subconjunto numerable M de Z tal que $y \in \overline{M}$. Sin embargo la cerradura de M en Y es Fréchet-Urysohn, por la proposición 4.0.7. Se sigue pues que existe alguna sucesión de puntos de M que convergen a y. Entonces, el espacio Y es Fréchet-Urysohn. ■

De este teorema podemos obtener algunos otros resultados sencillos, podemos mencionar por ejemplo que el Σ-producto de una familia de espacios primero numerables es Fréchet-Urysohn o por ejemplo sabemos que el producto de espacios compactos es compacto entonces podemos también concluir que el Σ-producto de una familia de espacios compactos es numerablemente compacto, o más aun la cerradura de cualquier subconjunto numerable del Σ-producto en el Σ-producto es compacto, y como un corolario de lo anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.0.10 *El Σ-producto de una familia de espacios compactos primero numerables es un espacio numerablemente compacto Fréchet-Urysohn.*

Otro hecho que relaciona el producto de una familia de espacios topológicos con el Σ-produto con respecto a un cierto tipo de densidad es el siguiente.

Proposición 4.0.11 *Sea $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod \eta$ y $b \in X$, Entonces el Σ-producto $\Sigma\Pi\eta = Y$ con base en b es G_δ-**denso**, es decir, cualquier conjunto G_δ no vacío intersecta a Y.*

Demostración. Sea P la unión de una familia no vacía de ω-cubos, entonces P es un conjunto G_δ no vacío en X. Sin embargo cada ω-cubo intersecta a Y. Por lo tanto, $P \cap Y \neq \varnothing$. ■

Teorema 4.0.11 *Sea A un conjunto no numerable tal que, para cada $\alpha \in A$, G_α es un grupo topológico compacto metrizable que contiene al menos dos puntos. Sea $G = \Pi_{\alpha\in A} G_\alpha$ el producto de los grupos topológicos G_α. Entonces el Σ-producto $H = \Sigma\Pi_{\alpha\in A} G_\alpha$ es un subgrupo topológico de G numerablemente compacto, Fréchet-Urysohn, no compacto y no metrizable.*

Demostración. Como A es no numerable, entonces H es un subconjunto propio de G, sin embargo H es denso en G, entonces H no es cerrado en G. Como el espacio G es Hausdorff, se sigue que el subespacio H es no compacto. Por el corolario 4.0.10 H es numerablemente compacto y Fréchet-Urysohn. Como H no es compacto, y todo espacio numerablemente compacto metrizable es compacto, concluimos que H no es metrizable, el hecho de que H es un subgrupo topológico de G ya se había probado en la primer sección. ■

Se puede ver en el corolario 3.0.7 que todo grupo topológico compacto con estrechez numerable es metrizable, entonces, la cardinalidad de tal grupo no excederá la potencia del continuo. Sin embargo, las cardinalidades de grupos numerablemente compactos con estrechez numerable (o bien grupos numerablemente compactos Fréchet-Urysohn) no son acotadas como lo muestra el teorema anterior. Veamos un ejemplo de lo que nos dice este teorema.

Ejemplo 4.0.9 *Sea A un conjunto no numerable:*

a) *Para cada $\alpha \in A$, sea $G_\alpha = S^1$ el grupo del círculo. Entonces el Σ-producto $\Sigma\Pi_{\alpha\in A}G_\alpha$ es denotado por $\Sigma\left(S^1\right)^A$. Por el teorema anterior, $\Sigma\left(S^1\right)^A$ es un grupo topológico numerablemente compacto, no metrizable, Fréchet-Urysohn que no es compacto.*

b) *De la misma manera, si $G_\alpha = D$ para cada $\alpha \in A$, donde $D = \{0,1\}$, entonces el Σ-producto $\Sigma\Pi_{\alpha\in A}G_\alpha$ es denotado por ΣD^A. Por el teorema 4.0.11, ΣD^A es un grupo topológico numerablemente compacto, no metrizable, Fréchet-Urysohn, el cual no es compacto, es fácil ver que los grupos D^A, y ΣD^A son cero-dimensionales.*

Hasta el momento sólo hemos presentado resultados acerca de los Σ-productos, sin embargo existen también una serie de resultados de gran importancia acerca de los σ-productos de productos de grupos topológicos.

Proposición 4.0.12 *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, sea $X = \Pi_{\alpha\in A}X_\alpha$ el espacio producto y sea también $Y \subset X$ el correspondiente σ-producto con base en un punto $b \in X$. Entonces Y es la unión de una familia numerable $\{Y_n : n \in \omega\}$ de subespacios cerrados Y_n de X tal que $Y_0 = \{b\}$, y para cada $n \in \omega$, $Y_n \subset Y_{n+1}$ y $Y_{n+1}\backslash Y_n$ admite una cubierta abierta disjunta λ_n tal que cada $U \in \lambda_n$ es homeomorfo a un subespacio abierto de el producto de una subfamilia de $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.*

Demostración. Para cada $y \in Y$, solo una cantidad finita de coordenadas y_α son distintas de las correspondientes coordenadas b_α de b. Denotemos por $r(y)$ el número de coordenadas de un punto $y \in Y$ distintas de las de b. Sea $Y_n = \{y \in Y : r(y) \leqslant n\}$, para cada $n \in \omega$. Entonces, claramente, $Y = \cup_{n\in\omega}Y_n$, donde cada Y_n es cerrado en el espacio producto X.

Para cada $n \in \omega$, hacemos $U_n = Y_n\backslash Y_{n-1}$, el conjunto de todos los subconjuntos finitos de A de cardinalidad n. Dado $K \in B_n$, sea W_K el conjunto de todos los $y \in Y$ tales que $\{\alpha \in A : y_\alpha \neq b_\alpha\} = K$. Claramente, W_K es abierto en Y_n, $W_K \cap W_L = \varnothing$, para cualesquiera K, L distintos en B_n, y $U_n = \bigcup \lambda_n$, donde $\lambda_n = \{W_K : K \in B_n\}$. Es también claro que cada W_K es homeomorfo a un subespacio abierto de $\Pi_{\alpha\in K}X_\alpha$. $\blacksquare$

Proposición 4.0.13 *El σ-producto de una familia de espacios σ-compactos es σ-compacto.*

Demostración. Veamos primero un caso mas sencillo, el σ-producto de una familia de espacios compactos es σ-compacto, esto se sigue como corolario de la proposición anterior y del hecho de que el producto de una familia de espacios compactos es compacto. Sea pues $\eta = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios σ-compactos. Entonces, para cada $\alpha \in A$, $X_\alpha = \cup_{n\in\omega} X_{\alpha,n}$ donde cada $X_{\alpha,n}$ es compacto. Podemos también asumir que $X_{\alpha,i} \subset X_{\alpha,j}$ siempre que i sea menor que j. Sea b cualquier punto en el producto de la familia η, y Y el σ-producto de η en b. Podemos asumir que $b_\alpha \in X_{\alpha,0}$, para cada $\alpha \in A$. En efecto, $b_\alpha \in X_{\alpha,k}$ para algún $k \in \omega$, y podemos poner a $X_{\alpha,k}$ en el papel de $X_{\alpha,0}$ cambiando la numeración.

Hacemos $\eta_n = \{X_{\alpha,n} : \alpha \in A\}$, y sea Y_n el σ-producto de η_n en el punto b, para cada $n \in \omega$. Tenemos que $Y = \cup_{n\in\omega} Y_n$. Sin embargo, cada Y_n es σ-compacto puesto que todos los elementos de η_n son compactos. ■

Como lo veremos en las demostraciones, los siguientes dos resultados se deducen inmediatamente de las proposiciones anteriores.

Proposición 4.0.14 *El producto y el Σ-producto de una familia arbitraria de grupos topológicos σ-compactos contiene un subgrupo denso σ-compacto.*

Demostración. Tenemos por la proposición anterior que el σ-producto de esta familia de grupos topológicos es σ-compacto y además por la proposición 4.0.6 es denso tanto en el Σ-producto como en el producto. ■

El siguiente resultado que se da en los espacios topológicos, supongamos que X es un espacio topológico y que $x \in X$. Sea $\mathcal{B}$ una base de X en el punto x, entonces definimos el carácter de X en x como la mínima cardinalidad de las bases de X en x y lo denotamos por $\chi(x, X)$.

Lema 4.0.4 *Si Y es un subespacio denso de un espacio regular X, entonces $\chi(y, Y) = \chi(y, X)$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base de X en el punto $y \in Y$, entonces la familia $\mathcal{B}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ es evidentemente una base de Y en y. Por tanto, $\chi(y, Y) \leq \chi(y, X)$. Por otro lado, sea $\mathcal{B}_Y$ para Y en el punto y tal que $|\mathcal{B}_Y| = \chi(y, Y)$. Para cada U en $\mathcal{B}_Y$, escojemos un conjunto abierto V_U en X tal que $V_U \cap Y = U$. Notemos que la familia $\mathcal{B} = \{V_U : U \in \mathcal{B}_Y\}$ es una base para X en el punto y. En efecto, tomemos una vecindad arbitraria O de y en X. Entonces existe una vecindad abierta W de y en X tal que $\overline{W} \subset O$. Como $\mathcal{B}_Y$ es base para Y en y, podemos encontrar $U \in \mathcal{B}_Y$ tal que $U \subset W \cap Y$. Como el conjunto Y es denso en X, $V_U \cap Y = U$ es denso en V_U. Entonces $\overline{V_U} = \overline{U} \subset \overline{W} \subset O$ y se sigue que $y \in V_U \subset O$. Esto prueba que la familia $\mathcal{B}$ es base de X en y, y es inmediato de la definición de $\mathcal{B}$ que $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}_Y| = \chi(y, Y)$, por tanto $\chi(y, X) \leq \chi(y, Y)$. ■

Ejemplo 4.0.10 *Sea $M = \sigma D^\tau$ el σ-producto de τ copias de el grupo booleano $D = \{0, 1\}$ donde τ es un cardinal no numerable. Entonces M es un grupo topológico σ-compacto, Fréchet-Urysohn, no compacto y no metrizable. En efecto como τ es no numerable y el carácter del espacio $\chi(D^\tau)$ es no numerable, entonces el espacio producto no puede contener un subespacio denso primero numerable (lema anterior), entonces el espacio M no es metrizable, y ahora* *como un subespacio de un Fréchet-Urysohn es también Fréchet-Urysohn y de las proposiciones anteriores se tiene lo deseado.*

Para finalizar con las propiedades de los σ-productos vamos a dar una definición que se utiliza en la última proposición sobre estos espacios.

Definición 4.0.12 *Sea X un espacio topológico el número cardinal mas pequeño m tal que toda cubierta abierta del espacio X tiene un refinamiento abierto de cardinalidad $\leqslant m$ es llamado el **número de Lindelöf** del espacio X y se denota por $l(X)$.*

Proposición 4.0.15 *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, y sea $X = \Pi_{i\in I} X_i$ el espacio producto tal que para todo subconjunto finito $J \subset I$, el subproducto $X_J = \Pi_{i\in J} X_i$ satisface $l(X_J) \leqslant \tau$. Entonces el σ-producto $\sigma(p) \subset X$, con la topología de los ω-cubos heredada de X y punto base p, satisface $l(\sigma(p)) \leqslant \tau$, para todo $p \in X$.*

Demostración. Para cada subconjunto no vacío $J \subset I$, hacemos

$$\sigma_J^* = \{x \in \sigma(p) : \pi_i(x) = \pi_i(p) \forall i \in I \backslash J\}$$

donde $\pi_i : X \longrightarrow X$ es la proyección, $i \in I$. Si J es finito, entonces $\sigma_J^* \cong X_J$, tal que $l(\sigma_J^*) \leqslant \tau$. Observe que si $J \subset I$ y $|J| \leqslant \tau$, entonces:

$$\sigma_J^* = \bigcup \{\sigma_K^* : K \subset J, |K| \leqslant \omega\}$$

Como la familia de subconjuntos finitos de J tiene cardinalidad $\leqslant \tau$, tenemos que $l(\sigma_J^*) \leqslant \tau$ para cada conjunto J.

Supóngase que γ es una cubierta abierta de $\sigma(p)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que todo elemento $V \in \gamma$ tiene la forma $V = U_V \cap \sigma(p)$, para algún ω-cubo abierto canónico U_V en X. Como existe un conjunto numerable $B(V) \subset I$ tal que $U_V = \pi_{B(V)}^{-1} \pi_{B(V)}(U_V)$.

Escojamos un elemento arbitrario W_0 de γ y hacemos $B_0 = B(W_0)$ y $\mu_0 = \{W_0\}$. Supóngase que para algún $n \in \omega$, tenemos definido un conjunto $B_n \subset A$ y una subfamilia μ_n de γ tal que $|B_n| \leqslant \tau$ y $|\mu_n| \leqslant \tau$. Como $l(\sigma_{B_n}^*) \leqslant \tau$, podemos encontrar una subfamilia μ_{n+1} de γ tal que $\sigma_{B_n}^* \subset \bigcup \mu_{n+1}$ y $\left|\mu_{n+1}\right| \leqslant \tau$. Ahora ponemos $B_{n+1} = B_n \cup \left\{B(V) : V \in \mu_{n+1}\right\}$. Esto termina nuestra construcción inductiva de la sucesión $\{B_n : n \in \omega\}$ y $\{\mu_n : n \in \omega\}$.

Considere el conjunto $B = \cup_{n=0}^{\infty} B_n$ y la subfamilia $\mu = \cup_{n=0}^{\infty} \mu_n$ de γ. Es claro que $|B| \leqslant \tau$ y $|\mu \leqslant \tau|$. Notemos que μ es cubierta de $\sigma(p)$. En efecto, sea $x \in \sigma(p)$. Denotamos por y a el elemento de $\sigma(p)$ tal que $\pi_i(y) = \pi_i(x)$ para cada $i \in B$ y $\pi_i(y) = \pi_i(p)$ para toda $i \in I \backslash B$. Entonces $K = \{i \in I : \pi_i(v) \neq \pi_i(p)\}$ es un subconjunto de B. Como $|K| \leqslant \omega$ y $B_0 \subset B_1 \subset ...$, existe $n \in \omega$ tal que $K \subset B_n$. Por lo tanto, $y \in \sigma_{B_n}^* \subset \bigcup \mu_{n+1}$ y, como , $y \in V$ para algún $V \in \mu_{n+1}$. Se sigue de nuestra construcción inductiva de $B(V) \subset B_{n+1} \subset B$ y, como $\pi_i(x) = \pi_i(y)$ para cada $i \in B$, cocluimos que $x \in U_v \cap \sigma(p) = V$. Así, $\sigma(p) = \bigcup \mu$. Esto prueba que el espacio $\sigma(p)$ satisface $l(\sigma(p)) \leqslant \tau$. ■

Como la topología de Tychonoff para el producto es mas débil que la de los ω-cubos obtenemos el siguiente resultado para el σ-producto.

Corolario 4.0.11 *Sea* $\{X_i : i \in I\}$ *una familia de espacios topológicos y sea* $X = \Pi_{i\in I} X_i$ *el espacio producto tal que para cada subconjunto finito* $J \subset I$*, el producto* $X_J = \Pi_{i\in J} X_i$ *satisface que* $l(X_J) \leqslant \tau$*. Entonces el* σ*-producto* $\sigma(p) \subset X$ *con punto base* p *y con la topología de subespacio satisface* $l(\sigma(p) \leqslant \tau$ *para todo* $p \in X$*.*

Bibliografía

[1] Arhangel ´skii A, Tkachenko M., *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mthematics, 2008.

[2] Dugundji J., *Topology,* Allyn and Barcón, 1966.

[3] Engelking R., *Ganeral Topology,* Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[4] James I.M., *History of Topology,* Elsevier Science B.V., 1999.

[5] Schreier O., *Die Verwandschaft stetiger Gruppen im grossen,* Abh. Math. Seminar der Hamburgischen Universität **5**, 233-244. 1927.

[6] Tkachenko M, Villegas L M, Hernández C, Rendón O J., *Grupos Topológicos,* UAM, 1997.