



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA QUÍMICA – PROCESOS

SEGUNDO PROBLEMA DE STOKES CON PLACA CALENTADA PARA UN
MODELO FRACCIONARIO DEL FLUIDO DE SEGUNDO GRADO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
MILAGROS DEL CARMEN SANTOS MORENO

TUTOR
DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS
FACULTAD DE QUÍMICA UNAM

MÉXICO, D. F. MAYO DE 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Secretario: Dr. Alberto Tecante Coronel

Vocal: Dr. William Vicente y Rodríguez

1^{er}. Suplente: Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

2^{do}. Suplente: Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Química UNAM

TUTOR DE TESIS:

Ángel Enrique Chávez Castellanos

FIRMA

(Segunda hoja)

Agradecimientos

Al CONACyT, ya que la beca otorgada (No. de becario 235297) hizo posible la realización de este trabajo y de mis estudios de posgrado.

A mis padres, familia y amigos por el incondicional apoyo siempre.

A mi asesor, el Dr. Ángel Enrique Chávez por la confianza y paciencia.

Índice

Lista de Tablas	I
Lista de Figuras	II
Nomenclatura	III
Introducción	1
Objetivos	3
1. Fluido de Segundo Grado y Modelo Fraccionario del Fluido de Segundo Grado	4
<i>Fluido de Segundo Grado (FSG)</i>	<i>5</i>
<i>Generalizaciones del Fluido de Segundo Grado</i>	<i>7</i>
<i>Generalización Fraccionaria del FSG</i>	<i>10</i>
<i>Modelo Fraccionario del Fluido de Segundo Grado (MFFSG)</i>	<i>11</i>
2. Segundo problema de Stokes con placa calentada para el Modelo Fraccionario del Fluido de Segundo Grado. Planteamiento y Análisis Dimensional	13
<i>Planteamiento del SPS con placa calentada para el MFFSG</i>	<i>14</i>
<i>Tensor de esfuerzos en las ecuaciones de movimiento</i>	<i>17</i>
<i>Tensor de esfuerzos en la ecuación de energía</i>	<i>18</i>
<i>Análisis dimensional</i>	<i>19</i>
<i>Ecuación constitutiva (MFFSG)</i>	<i>20</i>

<i>Propuesta de homogeneización dimensional</i>	21
<i>Ecuación de movimiento</i>	23
<i>Ecuación de energía</i>	23
3. Solución de la ecuación de movimiento	25
<i>Solución de la ecuación de movimiento con dimensiones homogéneas</i>	25
<i>Solución mediante transformaciones integrales (Fourier y Laplace)</i>	26
<i>Solución mediante funciones de Green fraccionarias</i>	29
<i>Solución adimensional</i>	32
Casos límite	36
<i>Caso $\alpha=0$ (III) y fluido newtoniano (IV)</i>	38
<i>Caso $\alpha\neq 0$ (I) y FSG (II)</i>	40
<i>Evaluación de la solución con el MFFSG</i>	42
<i>Comentarios sobre la condiciones de frontera</i>	46
4. Ecuación de energía	48
<i>Forma adimensional de la ecuación de energía</i>	49
<i>Gradiente de velocidades</i>	50
<i>Solución de la ecuación de energía mediante funciones de Green</i>	51
5. Conclusiones	59
Bibliografía	61

Apéndices	65
1. Transformadas integrales y Funciones Mittag Leffler	65
2. Procedimiento de solución de la ecuación de movimiento mediante transformadas integrales, análogo al trabajo de Khan	67

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Generalizaciones más reportadas para el fluido de segundo grado.....	9
2. Antecedentes del empleo del modelo fraccionario del fluido de segundo grado para la solución de los problemas de Stokes.....	14
3. Magnitudes físicas y sus dimensiones.....	19
4. Comparación entre las soluciones obtenidas por métodos de transformación integral, funciones de Green y la solución adimensional respectivamente.....	35
5. Soluciones analíticas para el SPS con diferentes ecuaciones constitutivas.....	37
6. Gradientes de velocidad para el MFFSG, FSG y FN.....	52
7. Función $\psi(S,T)$ para diferentes ecuaciones constitutivas.....	58

Lista de figuras

Tabla	Página
1. Esquema del segundo problema de Stokes.....	14
2. Distribuciones de velocidad para diferentes órdenes de magnitud de ω/ν del fluido newtoniano y el caso especial del MFFSG ($\alpha=0$).....	39
3. Distribuciones de velocidad, a diferentes órdenes de magnitud del Wi , para el FSG y el caso especial del MFFSG ($\beta=1, \alpha \neq 0$).....	41
4. Distribuciones de velocidad respecto al tiempo para $(\alpha/\nu)\omega=0.15$ a diferentes posiciones espaciales.....	45
5. Comparación entre la solución que cumple la condición de adherencia y la que es válida para $y=0^+$	47

Nomenclatura

Propiedades del fluido

α	Primer coeficiente de esfuerzos normales dividido entre la densidad
α_1	Primer coeficiente de esfuerzos normales
α_2	Segundo coeficiente de esfuerzos normales
η	Coeficiente viscoso (fluidos no newtonianos)
μ	Viscosidad (del fluido newtoniano)
κ	Coeficiente de difusión térmica
ρ	Densidad
ν	Coeficiente difusivo de momentum (viscosidad cinemática)
C_p	Capacidad calorífica a presión constante

Constantes, Variables y Números adimensionales

π	Número Pi 3.141592...
ω	Frecuencia lineal del movimiento oscilatorio
ξ	Variable de posición en el espacio de Fourier
U	Velocidad adimensional
\mathcal{T}	Tiempo adimensional
Θ	Temperatura adimensional
Y	Variable espacial adimensional
S	Variable espacial escalada
h	Tamaño de paso empleado en la aproximación numérica
p	Presión
P	Presión dividida entre la densidad
$\Delta\theta$	Diferencia de temperaturas ($\theta_0 - \theta_b$)
q_y	Flux de energía
θ	Temperatura
θ_0	Temperatura de la superficie de la placa ($y=0$) a $t>0$
θ_b	Temperatura del sistema a $t=0$
t	Tiempo
V	Amplitud de la velocidad (movimiento oscilatorio)
x	Dirección de movimiento de la placa
y	Dirección de difusión de movimiento y energía
Wi	Número de Weissenberg ($\alpha\omega/\nu$)
De	Número de Débora (tiempo característico/tiempo de observación)
Ec	Número de Eckert ($V^2/\rho C_p$)
Pr	Número de Prandtl ($\eta C_p/\kappa$)
Re	Número de Reynolds ($\eta L V/\rho$)

Funciones, Vectores y Tensores

$\Gamma(\cdot)$	Función gamma
$E_{\phi,\psi}^{(k)}$	Derivada k de la función Mittag-Leffler de dos parámetros (ϕ, ψ)
$G(t')$	Función de Green de la variable t'
\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace
\mathcal{F}_s^{-1}	Transformada seno inversa de Fourier
$\underline{\underline{A}}_n$	Tensor n de Rivlin-Ericksen
A_{nij}	Componente ij del tensor n de Rivlin-Ericksen
$\underline{\underline{A}}_1$	Primer tensor de Rivlin-Ericksen
$\underline{\underline{A}}_2$	Segundo tensor de Rivlin-Ericksen
$\underline{\underline{D}}$	Tensor rapidez de deformación
$\underline{\underline{I}}_n$	Tensor identidad
$\underline{\underline{L}}$	Tensor gradiente de velocidades
$\underline{\underline{T}}$	Tensor de esfuerzos totales
T_{ij}	Componente ij del tensor de esfuerzos totales
$\underline{\underline{v}}$	Vector de velocidades
v_i	Componente i del vector de velocidades
g_i	Componente i (x, y o z) del vector aceleración de la gravedad
x_i	Componente del vector de posición
q_y	Componente y del flux de energía

Constantes y variables relacionadas a la derivada fraccionaria

β	Exponente fraccionario
τ	Constante temporal para homogeneizar dimensiones
t'	Variable temporal de convolución
s	Variable del espacio de Laplace
D_t^β	Derivada temporal de orden fraccionario

Introducción

El empleo y aplicación de fluidos que no presentan comportamiento newtoniano (lubricantes, polímeros, alimentos, etc.) y en especial de aquellos que exhiben propiedades viscoelásticas ha ido en aumento en las décadas recientes y, como consecuencia, el estudio del comportamiento de estos fluidos bajo ciertas condiciones de flujo, así como las soluciones de las ecuaciones de balance con ecuaciones constitutivas correspondientes, se ha vuelto relevante.

Las soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento son ampliamente estudiadas ya que permiten comprender situaciones físicas básicas, como herramientas para plantear y resolver otros problemas que involucren flujos de mayor complejidad física (cuya solución analítica no sea posible) y como criterio de comparación para los resultados obtenidos con métodos de solución aproximados [1].

El fluido de segundo grado es el modelo diferencial más simple capaz de describir algunos efectos de viscoelasticidad no lineal (diferencia de esfuerzos normales) [4] y, con la ecuación de movimiento permite obtener algunas soluciones exactas [1]. Sin embargo, existen restricciones que acotan el modelo a ciertos materiales y situaciones de flujo [5], por lo que para extender su aplicación o generalizarlo se han empleado diferentes métodos; uno de ellos es el denominado modelo fraccionario, que consiste en remplazar la derivada temporal por una derivada temporal de orden fraccionario logrando así describir con mayor exactitud ciertos fenómenos de viscoelasticidad lineal y no lineal [6].

El segundo problema de Stokes (SPS) ha sido clasificado como un problema con solución exacta [40] y tiene aplicaciones en diversas áreas como química, biomedicina, reología, micro y nanotecnología. Por ejemplo, en microfluídica se emplean bombas impulsadas por esfuerzos de corte como alternativa para producir flujos rápidos a través de canales, sin la necesidad de ejercer presiones elevadas [33,34], y los fenómenos que ocurren en estos dispositivos pueden ser descritos inicialmente con el SPS, para posteriormente refinar la descripción física añadiendo o quitando algunas restricciones al sistema; en reología y reometría puede servir como conocimiento básico de pruebas oscilatorias en geometrías rectangulares.

En este trabajo se estudia el SPS con placa calentada para un modelo fraccionario del fluido de segundo grado con la finalidad de acrecentar el acervo de soluciones exactas de los problemas más relevantes y con aplicación en la mecánica de fluidos y reología, comprobar la validez del modelo fraccionario y observar la influencia de la derivada fraccionaria en las ecuaciones constitutivas y en las soluciones.

El trabajo desarrollado se divide en cinco capítulos. En el capítulo 1 se introducen conceptos básicos sobre el fluido de segundo grado (FSG) y sus generalizaciones, haciendo énfasis en el modelo fraccionario del FSG. En el siguiente capítulo se realiza una descripción más amplia del SPS y se reducen las ecuaciones de movimiento y energía con la ecuación constitutiva seleccionada, así como el respectivo análisis dimensional. En el capítulo 3 se aborda la ecuación de movimiento, se resuelve y analizan resultados, mientras que en el cuarto capítulo se desarrollan las expresiones para el balance de energía. Las conclusiones se muestran en el capítulo 5.

Objetivos

General

Obtener la solución exacta del segundo problema de Stokes con placa calentada para un fluido viscoelástico descrito por el Modelo Fraccionario del Fluido de Segundo Grado (MFFSG) y compararla con los casos límite de este modelo: el fluido newtoniano y el

fluido de segundo grado.

Específicos

Para cumplir con el objetivo general se desarrollan los siguientes puntos:

1. Realizar el análisis dimensional de las ecuaciones resultantes del balance de movimiento y energía, ya que la consistencia dimensional es indispensable para obtener una solución adecuada
2. Emplear herramientas del cálculo fraccionario, transformaciones integrales y funciones de Green para obtener una solución analítica de la ecuación de movimiento y validar la solución mediante la reproducción de los casos límite seleccionados
3. Analizar el significado físico del valor del exponente fraccionario de la derivada, ya que es el elemento que hace cambiar la ecuación constitutiva del FSG y por tanto es indispensable revisar su impacto en la distribución de temperatura
4. Analizar la ecuación de energía y obtener una expresión, para la distribución de temperaturas del sistema mediante funciones de Green, que permita comprender el efecto de la viscoelasticidad en la transferencia de energía.

Capítulo 1

Fluido de Segundo Grado y Modelo Fraccionario del Fluido de Segundo Grado

Los fluidos no newtonianos adquirieron dicha denominación debido a que su comportamiento no sigue la ley de viscosidad de Newton [1] y, por tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes. Estos fluidos han sido clasificados de acuerdo a diversos criterios, sin embargo, uno de los más empleados es aquel que los divide según la variación de la velocidad de deformación, en:

- a) Fluidos independientes del tiempo, también denominados fluidos puramente viscosos, inelásticos o fluidos newtonianos generalizados. Son aquellos en los cuales la viscosidad es dependiente de la velocidad de deformación (y no del tiempo) como los fluidos dilatantes o adelgazantes [2,3]
- b) Fluidos dependientes del tiempo. Son aquellos en los que la viscosidad depende también de la duración del esfuerzo y de la historia de las deformaciones (materiales tixotrópicos o reopécticos)
- c) Fluidos viscoelásticos. Exhiben características viscosas y elásticas, es decir, pueden mostrar recuperación elástica parcial posterior a la deformación. La respuesta del material depende no solamente de su estructura o respuesta viscoelástica, si no de las condiciones de flujo al que es sujeto.

En algunos casos, los materiales existentes presentan más de uno o combinaciones de los comportamientos mencionados en la clasificación anterior (su complejidad estructural supera las abstracciones realizadas en cualquier clasificación), sin embargo, se debe identificar cuál de ellos es el dominante y establecer las consideraciones necesarias para que sólo uno de ellos pueda representar con buena exactitud las características y el flujo del fluido [2].

El objeto de estudio de este trabajo se limita a los fluidos viscoelásticos debido a que muchos de los materiales de interés práctico (polímeros fundidos, fluidos biológicos como sangre o líquido sinovial, etc.) exhiben características viscoelásticas [2], además de que a partir de las ecuaciones constitutivas empleadas para éstos se pueden obtener algunas soluciones exactas.

Las ecuaciones constitutivas son aquellas que relacionan adecuadamente el esfuerzo aplicado con la rapidez de deformación [36] del fluido. Pueden clasificarse, bajo la teoría del medio continuo, de acuerdo a cómo se expresa matemáticamente el esfuerzo en:

- a) Modelos Integrales. El esfuerzo se encuentra de forma explícita [4] y depende fuertemente de la historia de las deformaciones (efectos de memoria) del material [5]
- b) Modelos de rapidez o cambio. Estas ecuaciones incluyen al menos la primera derivada temporal del esfuerzo, éste no se encuentra de forma explícita y depende fuertemente de la historia de las deformaciones (efectos de memoria) del material [4]
- c) Modelos Diferenciales. El esfuerzo se encuentra de forma explícita y sólo una pequeña parte de la historia de las deformaciones lo influye [5], por tanto, se considera que sólo es función de la velocidad de deformación y de un número finito de sus derivadas temporales [6].

La ecuación más general en los modelos diferenciales supone que el esfuerzo es función de los tensores A_n de Rivlin-Ericksen [37], los cuales representan los gradientes de desplazamiento, velocidad y aceleración en un material isotrópico al tiempo t . El fluido de segundo grado (FSG) pertenece al grupo de las ecuaciones diferenciales de Rivlin-Ericksen y es una de las más empleadas [1] debido a su sencillez y capacidad de predecir algunos efectos viscoelásticos no lineales.

Fluido de Segundo Grado (FSG)

Esta ecuación relaciona el tensor de esfuerzos de Cauchy (simétrico) con la deformación mediante los tensores de Rivlin-Ericksen, para un fluido incompresible e isotrópico.

Se expresa matemáticamente de la siguiente forma

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \eta\underline{\underline{A}}_1 + \alpha_1\underline{\underline{A}}_2 + \alpha_2\underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{A}}_1 \quad (1)$$

del lado izquierdo de la ecuación se expresa el tensor de esfuerzos totales, mientras que del lado derecho, el primer término representa la presión que es un esfuerzo normal, por lo que se encuentra multiplicada por el tensor identidad para asegurar que contribuya únicamente a los esfuerzos normales; el término es negativo debido a la convención de signos (los esfuerzos de compresión son negativos) [7]. El segundo término se refiere a la contribución viscosa del

material, siendo η la viscosidad; los términos sucesivos representan el comportamiento no newtoniano del fluido; los módulos materiales α_1 y α_2 generalmente son referidos como coeficientes de las diferencias de esfuerzos normales [5]. Los tensores $\underline{\underline{A}}_1$ y $\underline{\underline{A}}_2$ son los primeros dos de la serie de tensores de Rivlin-Ericksen [5]; el primero representa el doble del tensor rapidez de deformación ($\underline{\underline{D}}$) que corresponde a la parte simétrica del tensor gradiente de velocidades ($\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{L}}$) y se expresa como

$$\underline{\underline{A}}_1 = 2\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T = \nabla \underline{\underline{v}} + \nabla \underline{\underline{v}}^T \quad (2)$$

mientras el segundo tensor de Rivlin-Ericksen $\underline{\underline{A}}_2$, que representa el cambio del gradiente de velocidad en el espacio, en la dirección del movimiento, y la deformación del medio, se expresa de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{A}}_2 = \frac{D}{Dt} \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{A}}_1 \right) + \underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_1 \quad (3)$$

En la ecuación (1) es posible observar que los primeros dos términos del lado derecho son prácticamente iguales a los del modelo del fluido newtoniano, es por ello que algunos autores [10, 11, 26] la consideran una expansión de este fluido hasta el segundo orden, cuyos términos adicionales representan las desviaciones debidas a los efectos elásticos. Desde este punto de vista, el modelo se denomina fluido de segundo orden, además se considera que los módulos materiales η, α_1, α_2 son constantes, que no dependen de los invariantes del tensor gradiente de velocidades y se encuentran a partir de datos experimentales [9]. Por lo tanto, se considera que el fluido de segundo grado presenta funciones materiales dependientes del movimiento del fluido (funciones lineales y no lineales del tensor rapidez de deformación y de los invariantes del gradiente de velocidades) y de las condiciones termodinámicas.

Otra de las características del fluido de segundo grado es que está sometido a ciertas restricciones importantes:

1. Compatibilidad termodinámica. Para que se cumpla la desigualdad de Clausius-Duhem (expresión matemática para la segunda ley de la termodinámica para sistemas en el continuo), se requiere que los módulos materiales tengan los siguientes valores:
 $\eta \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ [5]

2. El flujo debe ser lo suficientemente lento. Es decir, bajas velocidades, amplitudes pequeñas y con variaciones de velocidad pequeñas [4]
3. La historia de las deformaciones del material. Es decir, las deformaciones que ocurrieron en un pasado lejano deben tener una influencia menor que las del pasado reciente sobre el esfuerzo actual (memoria no permanente) [25].

Respetando las restricciones es posible obtener resultados comparables con modelos más complejos (ej. Oldroyd), tanto con el fluido de segundo grado como con fluido de segundo orden [5, 6]. Sin embargo, con la finalidad de que estos modelos reproduzcan con mayor fidelidad las situaciones de flujo, se han empleado algunos métodos para mejorarlos o generalizarlos y así, ampliar su aplicabilidad.

Generalizaciones del Fluido de Segundo Grado

Algunos de los comportamientos más recurrentes en los procesos con fluidos viscoelásticos que se desean reproducir con las ecuaciones constitutivas, son el aumento o disminución de la viscosidad respecto al esfuerzo, la dependencia de los esfuerzos normales con la rapidez de deformación y los efectos de memoria del material.

Existen dos formas principales de generalizar el modelo de FSG, la primera consiste en modificar los coeficientes materiales (viscosidad y coeficientes de diferencias de esfuerzos normales) y la segunda en el empleo del cálculo fraccionario. En la Tabla 1 se exponen algunas de las generalizaciones más reportadas en la bibliografía [5].

El empleo del cálculo fraccionario en viscoelasticidad es considerado como un método “empírico” de descripción de propiedades viscoelásticas de los materiales. Se ha demostrado que esta generalización permite una descripción más exacta, que los modelos convencionales, de ciertos fenómenos de viscoelasticidad lineal y no lineal, como:

- a) Procesos de relajación y recuperación, que pueden ser descritos adecuadamente con un número bajo de parámetros de ajuste
- b) Comportamientos de relajación no exponenciales

- c) Movimientos aleatorios (microbrownianos) de las moléculas en la descripción fenomenológica de medios viscoelásticos [10, 11, 13, 14,30]

El modelo fraccionario del fluido de segundo grado es uno de los modelos más flexibles para describir fenómenos viscoelásticos [5], así como para obtener soluciones exactas que permitan analizar física y matemáticamente situaciones de flujo.

Tabla1. Generalizaciones más reportadas para el fluido de segundo grado

Modelo	Modificación/Generalización	Ecuación	Observaciones
<p>Fluido Generalizado</p> <p>Tipo I (FSGGTI)</p> <p>Tipo II (FSGGTII)</p>	<p>Se sustituye el término de viscosidad en el FSG por un modelo constitutivo capaz de predecir el aumento o disminución de la viscosidad, en este caso, la ley de la potencia generalizada.</p>	$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \eta\Pi^{m/2} \underline{\underline{A}}_1 + \alpha_1 \underline{\underline{A}}_2 + \alpha_2 \underline{\underline{A}}_1^2$ $\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \Pi^{m/2} \left(\eta \underline{\underline{A}}_1 + \alpha_1 \underline{\underline{A}}_2 + \alpha_2 \underline{\underline{A}}_1^2 \right)$ <p>donde $\Pi = \frac{1}{2} tr(\underline{\underline{A}}_1^2)$ y $tr =$ traza del tensor</p>	<p>El valor de m define si existe adelgazamiento ($m < 0$) o espesamiento ($m > 0$) del fluido [8,10]</p> <p>Estos modelos han sido utilizados para describir algunas interacciones de fluidos de estructura más compleja como lodos de carbono [5,11].</p>
<p>Con el modelo de viscosidad variable</p>	<p>Incluye la dependencia de la viscosidad respecto a la temperatura (θ) y la concentración (ϕ).</p>	$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \eta(\theta, \phi) \Pi^{m_1/2} \underline{\underline{A}}_1 + \alpha_1 \underline{\underline{A}}_2 + \alpha_2 \underline{\underline{A}}_2^2$ $\eta(\theta, \phi) = \eta_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}} \right)^{-2.5} e^{\gamma(\theta - \theta_0)}$	<p>Fluidos como la lava basáltica o compuestos fundidos siguen la relación Einstein-Roscoe para la viscosidad, la cual es mostrada en la ecuación. También puede emplearse en fluidos donde la disipación viscosa es significativa (lubricantes, polímeros, etc.) [9].</p>
<p>Tipo III (FSGGTIII)</p>	<p>Dependencia de los esfuerzos normales con el gradiente de velocidades.</p>	$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \mu \Pi^{m_1/2} \underline{\underline{A}}_1 + \Pi^{m_2/2} (\alpha_1 \underline{\underline{A}}_2 + \alpha_2 \underline{\underline{A}}_1^2)$	<p>Puede reducirse al modelo del fluido de Boger cuando $m_1=0$, asimismo, los modelos FSGGTI y FSGGTII son casos especiales de éste [5].</p>
<p>Con la función de viscoplasticidad</p>	<p>Introduce un esfuerzo de cedencia con la función de viscoplasticidad de Shulman.</p>	$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + M (\mu \underline{\underline{A}}_1 + \alpha_1 \underline{\underline{A}}_2 + \alpha_2 \underline{\underline{A}}_1^2)$ $M = \left[\tau_0^{1/n} + (\mu A)^{1/m} \right]^n \Pi^{-1/2}$	<p>Este modelo es utilizado en cálculos de caídas de presión en molduras de diversas geometrías [5,10].</p>
<p>Modelo Fraccionario (MFFSG)</p>	<p>Incluye algunos efectos de memoria y variación de la viscosidad.</p>	<p>La ecuación (1) mantiene la forma, el cambio es en el tensor $\underline{\underline{A}}_2$</p> $\underline{\underline{A}}_2 = \left(D_t^\beta \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{A}}_1 \right) + \underline{\underline{A}}_1 \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{A}}_1$	<p>Puede representar eficientemente el comportamiento de los módulos de almacenamiento o pérdida en flujos cortantes simples, en geometrías rectangulares y cilíndricas [12,18,19,21].</p>

Generalización Fraccionaria del FSG

El concepto de derivada fraccionaria ha sido estudiado desde hace más de doscientos años [20], sin embargo, ha ganado importancia recientemente debido a que se ha demostrado que estas derivadas son útiles para la descripción espacial o temporal de ciertos fenómenos físicos [17, 18, 22]. Las derivadas temporales fraccionarias se emplean en viscoelasticidad debido a que se considera que éstas incluyen efectos de memoria del material [23].

Existen diferentes definiciones para las derivadas fraccionarias temporales, siendo las más empleadas las de Riemann-Liouville de límite inferior igual a cero (R-L) y Caputo [15, 16]. En las ecuaciones (4) y (5) se expresan respectivamente las derivadas temporales fraccionarias de la función $f(t)$

$$D_t^\beta f(t) = \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1-m}} f(\tau) d\tau \quad (4)$$

$${}^c D_t^\beta f(t) = \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1-m}} d\tau \quad (5)$$

En ambas definiciones se debe cumplir que el exponente fraccionario cumpla con las siguientes características: $\beta \in \mathbb{R}_+$, así como $\beta > 0$ y $(m-1) < \beta < m$. Estas expresiones son las más generales, frecuentemente, en viscoelasticidad, se define $m=1$.

$\Gamma(z)$ representa la función gamma, la cual posee propiedades muy útiles para el manejo y desarrollo matemático de las ecuaciones diferenciales fraccionarias y está definida de la siguiente manera [15]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \quad \text{para toda } z \in \mathbb{R} \quad (6)$$

La ecuación (4) es una de las primeras expresiones desarrolladas para este tipo de derivadas, por tanto, se ha utilizado con mayor frecuencia en diferentes áreas ya que es considerada como una generalización razonable de la derivada “clásica” y un operador lineal continuo con respecto a β [24]. Sin embargo, esta definición presenta algunas desventajas para la interpretación física de los fenómenos a describir; por ejemplo, la derivada de una constante

no es igual a cero y que para las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario (β) se requieren un número de condiciones iniciales igual β^* ; el cual es el valor del menor número entero mayor que el valor de β . A pesar de estas características, es innegable el hecho de que la introducción de la derivada temporal R-L a un sistema de ecuaciones, tiene un impacto en la física del problema y que proporciona una aproximación más adecuada a algunas situaciones reales [17, 23, 27].

Por otro lado, la derivada de Caputo es utilizada para describir sistemas dinámicos con memoria a largo plazo y su principal ventaja es que las condiciones iniciales se mantienen en la misma forma que en las ecuaciones diferenciales de orden entero correspondientes, sin embargo suelen ser más restrictivas matemáticamente que las derivadas de R-L, ya que requieren la integrabilidad absoluta de las derivadas de orden m de la función $f(\tau)$, y a que sólo presentan consistencia superior de orden fraccionario [15,17,24]. A pesar de las diferencias existentes entre ambas derivadas, algunos estudios [23,24] concluyen que cuando las condiciones iniciales de las ecuaciones son homogéneas, el valor de ambas coincide.

En mecánica de fluidos y reología se ha utilizado la derivada de R-L con mayor frecuencia [5,8,10,11,19,21] que la de Caputo, esto puede explicarse de acuerdo a las fuertes restricciones matemáticas de la derivada de Caputo, a que en gran parte de los problemas a estudiar se presenta la condición inicial igual a cero y que puesto que en fenómenos de viscoelasticidad el exponente fraccionario tiene los valores $0 \leq \beta \leq 1$; el número de condiciones iniciales suficientes es igual a uno y esta condición es la homogénea[23]. Por dichas razones, en el presente trabajo también se empleará la derivada R-L, además de que será posible apreciar similitudes o diferencias con otros estudios.

Modelo Fraccionario del Fluido de Segundo Grado (MFFSG)

En este modelo se sustituye la derivada temporal por una de orden fraccionario (R-L) en el segundo tensor de Rivlin-Ericksen, quedando como

$$\underline{\underline{A_2}} = \left(D_t^\beta \underline{\underline{A_1}} + \underline{\underline{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{A_1}} \right) + \underline{\underline{A_1}} \cdot \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{A_1}} \quad (7)$$

Expresando la derivada temporal fraccionaria en términos de (4) y el tensor $\underline{\underline{A}}_1$ en notación indicial, con la finalidad de observar con mayor claridad la diferencia que existe entre la ecuación del FSG y el MFFSG, se obtiene

$$D_t^\beta A_{ij} = \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} A_{ij} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\beta} A_{ij}(\tau) d\tau \quad (8)$$

Es importante resaltar que con el MFFSG es posible recuperar dos casos especiales, el fluido newtoniano (cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ o $\alpha_1=0$ y $\beta=1$) y el FSG (cuando $\beta=1$), que se vuelven indispensables para validarlo y comparar los resultados obtenidos [21,28].

El valor de β , generalmente en el intervalo $0 \leq \beta \leq 1$, es de gran relevancia en este modelo debido a que la velocidad y el esfuerzo dependen fuertemente de él, provocando que se puedan describir algunos fenómenos de flujo como el adelgazamiento o engrosamiento de la viscosidad [13,18,21,28].

Los efectos de memoria descritos por esta generalización están vinculados a la integral y derivada fraccionaria de R-L, ya que su definición es equiparable a un modelo de relajación de esfuerzo para un material viscoelástico (tipo no exponencial) y para una dinámica restringida a tiempos positivos, es decir, el esfuerzo y la deformación son nulos a tiempos menores o igual a cero [31,32]. De acuerdo a estas ideas, es posible decir que los efectos de memoria no son tan restrictivos para el MFFSG.

Capítulo 2

Segundo Problema de Stokes con placa calentada para el MFFSG. Planteamiento y Análisis Dimensional

El Segundo Problema de Stokes (SPS) describe el movimiento de un fluido que se encuentra inicialmente en reposo sobre una placa plana lo suficientemente larga (“de longitud infinita”) para que los efectos de borde entre el fluido y la superficie no se consideren. En cierto instante, la placa se moverá con oscilaciones unidireccionales, armónicas y de amplitud constante sobre su propio plano, induciendo el movimiento del fluido [33,40].

El SPS ha sido clasificado como un problema con solución exacta y tiene aplicaciones en diversas áreas como química, biomedicina, micro y nanotecnología. Por ejemplo, en microfluídica se emplean bombas impulsadas por esfuerzos de corte como alternativa para producir flujos rápidos a través de canales, sin la necesidad de ejercer presiones elevadas [33,34]. Los fenómenos que ocurren en estos dispositivos pueden ser descritos inicialmente con el SPS y posteriormente refinar la descripción añadiendo o quitando algunas restricciones al sistema.

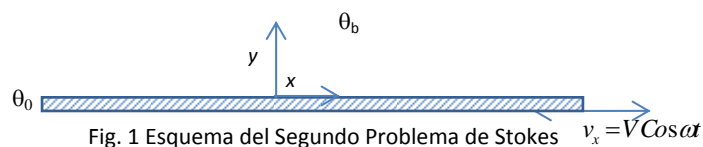
Este problema de Stokes ha sido ampliamente estudiado para fluidos newtonianos y algunos modelos no newtonianos (especialmente viscoelásticos lineales) [33]; sin embargo, para el FSG y MFFSG no existe tanta información y ésta se reduce, aún más, cuando se considera que la temperatura de la placa es distinta que la del fluido, es decir, un proceso no isotérmico. En la tabla 2 se enlistan los trabajos realizados con el MFFSG y el movimiento de una placa plana infinita, donde se observa que el estudio de este problema ha adquirido reciente atención. Los desarrollos más importantes sobre estos temas se han llevado a cabo principalmente en países de oriente, han empleado los operadores R-L y como herramienta de solución las transformadas de Fourier y Laplace. En la mayoría de los trabajos se proporciona un enfoque meramente matemático, sin darle énfasis al análisis físico del fenómeno.

Tabla 2. Antecedentes del empleo del modelo fraccionario del fluido de segundo grado para la solución de los problemas de Stokes

<i>Autor(es)</i>	<i>País (es)</i>	<i>Contribución</i>	<i>Año</i>
Tan, Xu [14]	China	Movimiento de una placa plana (Primer Problema de Stokes) en un fluido de segundo grado generalizado	2002
Khan, Nadeem, Hayat [13]	Pakistán/EUA	Movimientos no estacionarios de un fluido de segundo grado generalizado - Primer problema de Stokes - Movimientos en placas planas con gradientes de presión	2005
Shen, Tan, Zhao, Masouka [38]	China, Japón	El problema de Rayleigh-Stokes (primer problema de Stokes) para un modelo fraccionario del fluido de segundo grado calentado	2006
Khan, Ali, Qi [21]	Pakistán, China	Soluciones exactas para flujos oscilatorios de un modelo fraccionario del fluido de segundo grado. - Segundo Problema de Stokes - Flujo entre dos platos paralelos debido al movimiento de uno de ellos - Flujo debido a un gradiente de presión oscilatorio	2009
Khan, Wang [39]	Pakistán, China	Flujo entre dos placas paralelas y un plato perpendicular de un fluido de segundo grado generalizado con derivada fraccionaria	2009

Planteamiento del SPS con placa calentada para el MFFSG

Se considera un fluido viscoelástico inicialmente en reposo y con temperatura θ_b sobre una placa plana infinita a temperatura θ_0 (Figura 1), en el instante t_i la placa comienza a oscilar sobre su mismo eje y el fluido se mueve gradualmente.



Las consideraciones generales del problema son:

- Coordenadas rectangulares
- fluido incompresible
- movimiento oscilatorio de amplitud pequeña (lento)
- modelo fraccionario (R-L) del fluido de segundo grado
- transporte unidireccional de movimiento y energía (en dirección y)
- campo de velocidades no estacionario, no homogéneo $\underline{v} = \underline{v}(y, t)$

- $\theta = \theta(y, t)$
- propiedades físicas constantes $\eta \neq \eta(\theta), \rho \neq \rho(\theta), \kappa = \kappa(\theta)$
- el fluido sigue la ley de Fourier (conducción de energía)
- el flujo se da por arrastre (fuerzas externas despreciables)

Se expresan las ecuaciones resultantes, sujetas a las restricciones, de continuidad, movimiento y energía.

Al ser un fluido incompresible y sólo existir movimiento de la placa en dirección x , la ecuación de continuidad (9) se reduce a la ecuación (9.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = 0 \quad (9.1)$$

Los componentes de la ecuación de movimiento (10) se reducen a los mostradas en (10.1)-(10.3) debido a que el campo de velocidades sólo tiene componente en dirección x y transporte en dirección y

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (10)$$

Componente x :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y} \quad (10.1)$$

Componente y :

$$0 = \frac{\partial \Gamma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial y} \quad (10.2)$$

Componente z :

$$0 = \frac{\partial \Gamma_{zy}}{\partial y}$$

La energía se transfiere en dirección y y sigue la ley de Fourier, por lo que la ecuación de balance de energía (11) se reduce a (11.1)

$$\rho Cp \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) = T_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (11)$$

$$\rho Cp \frac{\partial \theta}{\partial t} = T_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad (11.1)$$

Para conocer el sistema de ecuaciones a resolver, se debe determinar e introducir la ecuación constitutiva, ecuación (1), en las de balance. Por tanto, se desarrolla y expresa el tensor de esfuerzos:

$$\underline{\underline{T}} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 \\ \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Escribiendo los componentes normales (12.1) y los tangenciales (12.2)

$$T_{xx} = -p + \alpha_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 ; \quad T_{yy} = -p + (2\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (12.1)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} + \alpha_1 D_t^\beta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) ; \quad T_{yz} = T_{zy} = 0 \quad (12.2)$$

Los componentes de la ecuación de movimiento involucran la divergencia del tensor de esfuerzos, la cual es causante de la aceleración del fluido [35,43]. En las ecuaciones (13.1 - 13.3) se expresan estas derivadas, incluyendo la consideración de que el flujo es por arrastre (no existen gradientes de presión en ninguna dirección)

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_1 D_t^\beta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left((2\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (13.3)$$

Tensor de esfuerzos en las ecuaciones de movimiento.

Sustituyendo las ecuaciones (12 – 13) en las de movimiento, se obtiene

$$\text{Componente } x: \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \alpha_1 D_t^\beta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (14.1)$$

$$\text{Componente } y: \quad 0 = \frac{1}{\rho} (2\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (14.2)$$

Considerando las restricciones termodinámicas del FSG ($\alpha_1 + \alpha_2 = 0$), las ecuaciones (14) se reducen a:

$$\text{Componente } x: \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \alpha_1 D_t^\beta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (14.4)$$

$$\text{Componente } y = 0 \quad (14.5)$$

Los componentes de la ecuación de movimiento proporcionan valiosa información física, sin embargo, la única que describe qué es lo que pone en movimiento al fluido es la ecuación (14.4), por lo tanto, es la que se requiere resolver para obtener el campo de velocidades en el fluido. El término del lado izquierdo de esta ecuación representa la aceleración del fluido, mientras los términos del lado derecho indican que el cambio del sistema se debe a un proceso difusivo, que cuenta en el primer término con una parte viscosa, siendo el segundo término una contribución elástica. En esta última se observa la presencia de una derivada cruzada que permite describir el desarrollo de fenómenos difusivos en procesos transitorios de fluidos viscoelásticos.

Tensor de esfuerzos en la ecuación de energía.

Introduciendo el componente tangencial de la ecuación constitutiva y la ley de Fourier en la ecuación (11), se obtiene

$$\rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \alpha_1 \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (15)$$

La derivada fraccionaria sigue siendo un operador lineal, por lo tanto, es posible realizar la derivada del producto

$$\left(\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right)$$

y la ecuación (15) se puede expresar como:

$$\frac{\partial(\rho C_p \theta)}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{2} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (15.1)$$

La ecuación (15.1) es el balance de energía para el SPS con el MFFSG, donde el término del lado izquierdo indica cómo varía la concentración de energía respecto al tiempo, mientras que los términos del lado derecho indican la disipación de energía, el primero debido a las propiedades viscosas; el segundo a la respuesta elástica del fluido y por último, la transferencia de energía por difusión (conducción). Retomando el segundo término, se hace notar la presencia de una derivada cruzada que representa el desarrollo del fenómeno disipativo en un proceso transitorio del fluido viscoelástico.

Las expresiones (14.7 y 15.1) pueden clasificarse de la misma manera que las ecuaciones diferenciales de orden entero, por tanto, éstas son diferenciales parciales lineales, no homogéneas, de orden fraccionario respecto al tiempo (EDPF-LNH). Ambas expresiones forman un sistema de ecuaciones semi acoplado por la velocidad, por lo que para conocer las

distribuciones de velocidad y temperatura, primero se debe resolver la ecuación de movimiento para posteriormente sustituir la solución en la ecuación de energía.

De acuerdo a Podlubny [42] es posible hacer una clasificación de los métodos más empleados en la solución de EDF y EDPF de acuerdo a si las ecuaciones son lineales o no. Las primeras se resuelven, con mayor frecuencia, mediante transformaciones integrales (Fourier, Laplace, Mellin) o funciones de Green fraccionarias; mientras que para las no lineales se emplean otros métodos, como los homotópicos o numéricos.

Análisis dimensional

Comprobar la homogeneidad dimensional de las ecuaciones que describen un fenómeno físico es indispensable, ya que ésta es indicadora de la consistencia entre las matemáticas y la física del problema, así como un medio útil para verificar que se realizaron operaciones correctas durante el desarrollo matemático [41].

Para facilitar la comprensión y lectura del análisis dimensional del SPS con el MFFSG, en la Tabla 3 se enlistan las dimensiones básicas (de acuerdo al Sistema Internacional de Unidades) de las magnitudes físicas involucradas en las ecuaciones de balance obtenidas.

Tabla3. Magnitudes físicas y sus dimensiones.

<i>Magnitud física</i>	<i>Símbolo dimensional</i>
Longitud, Área, Volumen	L, L^2, L^3
Tiempo	t
Masa	M
Fuerza	$M L / t^2$
Energía	$M L^2 / t^2$
Temperatura	θ

Primeramente se analizan las dimensiones de cada término del MFFSG y posteriormente las de la ecuación de movimiento (14.7) y de energía (15.1).

Ecuación constitutiva (MFFSG)

Se expresa al tensor de esfuerzos en notación indicial:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta A_{ij} + \alpha_1 A_{2ij} + \alpha_2 A_{ip} A_{pj} \quad (16)$$

y sus dimensiones

$$T_{ij} [=] \frac{M}{L t^2} \quad p [=] \frac{M}{L t^2} \quad \eta A_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) [=] \frac{M}{L t^2} \quad (16.1)$$

Previo al siguiente término de la ecuación, es necesario introducir las dimensiones de la derivada fraccionaria, siguiendo la definición dada en la ecuación (4)

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} f(t) [=] \frac{1}{(t)^m} \frac{T}{(t)^{\beta+1-m}} = \frac{1}{t^\beta} \quad (17)$$

posteriormente las del segundo tensor de Rivlin-Ericksen, dado en la ecuación (7), del cual se expresan anticipadamente las dimensiones de los últimos términos y después el que involucra a la derivada temporal fraccionaria (17)

$$A_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} A_{ij} [=] \frac{1}{t^2} \quad (18.1)$$

$$v_k \frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij} [=] \frac{1}{t^2} \quad (18.2)$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} A_{ij} [=] \frac{1}{t^\beta} \frac{1}{t} [=] \frac{1}{t^{\beta+1}} \quad (18.3)$$

La expresión (18.3) tiene dimensiones de orden fraccionario $(-\beta-1)$ que la convierten en un término no homogéneo dimensionalmente respecto a los anteriores. Sin embargos, se recupera la homogeneidad dimensional cuando $\beta=1$ (FSG).

Es importante señalar que en la mayoría de los estudios realizados para modelos viscoelásticos fraccionarios (como los mencionados en la Tabla 2) se elude el análisis dimensional, ya que el énfasis principal está dado al desarrollo matemático. Por tanto, una de las principales aportaciones del presente trabajo reside en la elaboración del análisis, así como en la propuesta de homogeneización de dimensiones y sus efectos en la solución del problema.

Propuesta de homogeneización dimensional

Recientemente algunos autores [44,45,46] han desarrollado un método matemático denominado Procedimiento de Incorporación Fraccionaria (*Fractional Embedding Procedure*, FEP por sus siglas en inglés) empleado con mayor frecuencia para formulaciones variacionales de sistemas lagrangianos con derivadas fraccionarias temporales tipo R-L, en los que se considera que sólo existe un exponente fraccionario. Esta metodología está considerada como parte de una teoría global de sistemas dinámicos denominada Teorías de incorporación de sistemas dinámicos (Embedding theories of dynamical systems) que también se ha desarrollado para procesos estocásticos.

De acuerdo con Inizan [45] existen tres metodologías mediante las que se pueden homogeneizar dimensionalmente las ecuaciones de orden fraccionario:

- Constantes Fraccionarias. Se preserva la homogeneidad de las dimensiones asociando los términos fraccionarios a alguna constante del sistema de ecuaciones, por ejemplo, algunas propiedades físicas, etc.
- Adimensionalización temporal. Se introduce una constante temporal que modifica las variables lagrangianas y adimensionaliza todas las expresiones temporales
- Elección de un operador con dimensiones homogéneas. Se introduce una constante temporal de orden fraccionaria que mantenga las dimensiones enteras de la derivada

fraccionaria, por lo que las soluciones y los operadores fraccionarios mantienen las dimensiones del tiempo t .

Las dos últimas técnicas introducen a la ecuación una constante temporal, la cual condiciona la dinámica del sistema y, por tanto, la ecuación diferencial de orden fraccionario debe ser caracterizada por el exponente fraccionario (β) y la constante temporal (τ). Respecto al significado físico de esta constante se dice está determinado por el problema a resolver, es decir, el contexto en donde se planteen las ecuaciones, y tiene igual importancia física que la de las constantes de la ecuación inicial.

Con base en las ideas mencionadas en los puntos anteriores y disminuyendo considerablemente la rigurosidad matemática presentada en [44,45], se propone introducir una constante temporal con exponente fraccionario que homogeneice la derivada fraccionaria y solucione el problema de inconsistencia dimensional presentado en la expresión (18.3). El orden fraccionario de esta constante debe preservar la homogeneidad inicial de la ecuación y estar igualmente definido para todos los operadores en donde esté involucrado [45].

Se seleccionó $\tau^{\beta-1}$ como la constante temporal con exponente fraccionario que permitirá la consistencia dimensional de las ecuaciones carentes de ésta. Se definen las expresiones (17) y (18.3) como:

$$\tau^{\beta-1} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} f(t) [=] \frac{t^{\beta-1}}{t^m} \frac{t}{t^{\beta+1-m}} = \frac{1}{t} \quad (19)$$

$$\tau^{\beta-1} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} A_{1ij} [=] \frac{1}{t} \frac{1}{t} [=] \frac{1}{t^2} \quad (20)$$

Por lo tanto, el segundo tensor Rivlin-Ericksen será:

$$A_{2ij} = \tau^{\beta-1} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} A_{1ij} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} A_{1ij} + A_{1kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} A_{1kj} \quad (21)$$

Esta propuesta permite que el tensor de esfuerzos cumpla con el criterio de homogeneidad deseado. En lo siguiente, continuará el análisis de las ecuaciones de balance para confirmar la consistencia dimensional del SPS con el MFFSG.

Ecuación de movimiento

Considerando la propuesta realizada, la ecuación (14.4) se expresa como:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \tau^{\beta-1} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (23)$$

Cada término de la ecuación debe tener dimensiones de aceleración, corroborándolo:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} [=] \frac{L/t}{t} = \frac{L}{t^2} \quad (23.a)$$

$$\frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} [=] \frac{M}{Lt} \frac{L^3}{M} \left(\frac{L/t}{L^2} \right) = \frac{L}{t^2} \quad (23.b)$$

$$\frac{\alpha_1}{\rho} \tau^{\beta-1} \frac{\partial}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) [=] \frac{M/L}{M/L^3} \frac{1}{t} \left(\frac{L/t}{L^2} \right) = \frac{L}{t^2} \quad (23.c)$$

Ecuación de energía

Reescribiendo la ecuación de energía (15.1) debido a la introducción del operador homogéneo fraccionario:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho C_p} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\rho C_p} \tau^{\beta-1} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 - \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (24)$$

Cada término de la ecuación (24) debe satisfacer las dimensiones expresadas en (24.1), ya que este balance expresa cómo se modifica la temperatura del sistema de acuerdo al transcurso del tiempo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} [=] \frac{\theta}{t} \quad (24.a)$$

Analizando los términos del lado derecha de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{\nu}{Cp} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 [=] \frac{L^2}{t} \frac{M \theta}{M L^2 / t^2} \left(\frac{L/t}{L} \right)^2 = \frac{\theta}{t} \quad (24.b)$$

$$\frac{\alpha}{Cp} \tau^{\beta-1} D_i^\beta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 [=] L^2 \frac{M \theta}{M L^2 / t^2} \frac{1}{t} \left(\frac{L/t}{L} \right)^2 = \frac{\theta}{t} \quad (24.c)$$

$$\frac{k}{\rho Cp} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \frac{L^3}{M} \frac{ML^2}{t^2} / \theta \cdot t \cdot L \left(\frac{\theta}{L^2} \right) = \frac{\theta}{t} \quad (24.d)$$

Se comprueba que el sistema de ecuaciones a resolver es consistente dimensionalmente.

Capítulo 3

Solución a la ecuación de Movimiento

La ecuación de movimiento para el SPS con un MFFSG proporciona información de cómo se mueve el fluido viscoelástico debido a un proceso difusivo inducido por una placa que oscila. En este apartado se resuelve la ecuación (23) y se muestra la solución de la ecuación (14.7), con el objetivo de compararlas y así comprobar la importancia de la homogeneidad dimensional de las ecuaciones.

Solución de la ecuación de movimiento con dimensiones homogéneas

Se presenta la EDPF a resolver

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\right) = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \tau^{\beta-1} D_t^\beta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \quad (23)$$

Cuyas condiciones inicial y de frontera están definidas por:

Condición inicial homogénea (placa en reposo)

$$v_x(y, 0) = 0 \quad (C.I)$$

Condiciones de frontera

de primera clase o Dirichlet (placa en movimiento oscilatorio)

$$v_x(0, t) = V \cos(\omega t) \quad (C.F1)$$

de segunda clase o Neumann (no existe flujo de momentum en un lugar muy alejado de la placa)

$$\frac{\partial v_x(y \rightarrow \infty, t)}{\partial y} = 0 \quad (C.F2)$$

Para resolver esta ecuación se utilizaron transformaciones integrales y funciones de Green, con la finalidad de observar las diferencias presentes entre ellas.

Solución mediante transformaciones integrales (Fourier y Laplace)

Las transformadas de Laplace se emplean con frecuencia para resolver problemas de valor inicial de EDF, mientras que las de Fourier para problemas con valores en la frontera [42], por lo tanto, se utiliza la de Laplace para transformar el tiempo y la de Fourier para la parte espacial.

Debido a que el problema se define en un dominio espacial semiinfinito, se aplica la transformada seno de Fourier (TF)

$$F(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(y) \text{sen}(\xi y) dy \quad (\text{TF})$$

a cada término de la ecuación (23)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial v_x}{\partial t} \text{sen}(\xi y) dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} v \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \text{sen}(\xi y) dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \alpha \tau^{\beta-1} D_t^\beta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \text{sen}(\xi y) dy \quad (24)$$

y se sustituye la condición de frontera, tal que se obtiene la ecuación diferencial ordinaria fraccionaria en el espacio de Fourier:

$$\frac{d v_x(\xi, t)}{dt} = (v + \alpha \tau^{\beta-1} D_t^\beta) \left(-\xi^2 v_x(\xi, t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \cos(\omega t) \right) \quad (24.1)$$

Se requiere realizar la derivada temporal fraccionaria (R-L) de $\cos(\omega t)$ previo a transformar al espacio de Laplace [15]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \cos(\omega t) &= \omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\omega t) - \omega^\beta \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(\omega t) \\ &= \omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega t\right)\end{aligned}\quad (25)$$

Sustituyendo la derivada fraccionaria en la expresión (24), aplicando la transformada de Laplace, considerando (C.F1) y factorizando, se obtiene el campo de velocidades en el espacio de Fourier y Laplace:

$$\begin{aligned}\bar{v}_x(\xi, s) &= \left(\frac{1}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} v\xi V \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \\ &\quad \left(\frac{1}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta}\right) \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]\end{aligned}\quad (26)$$

Antes de aplicar las transformadas inversas de Laplace y Fourier, para conocer el campo de velocidades en las variables deseadas, se expande en serie de Taylor (alrededor de cero) el común denominador de la ecuación (26)

$$\frac{1}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}}$$

Por lo tanto (26) se reescribe como:

$$\begin{aligned}\bar{v}_x(\xi, s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} v\xi \frac{1}{s^2 + \omega^2} \left\{ v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta + 1}}{(s^{1-\beta} + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}} + \right. \\ &\quad \alpha\xi\tau^{\beta-1} \left[\omega^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta + 1}}{(s^{1-\beta} + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. \left. \omega^{\beta+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (26.1)$$

O bien, expresando

$$\frac{1}{\xi} \left(\frac{v\xi^2}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} \right) = \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{s + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} \right)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{v}_x(\xi, s) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \frac{V}{s^2 + \omega^2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta + 1}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2 s^{-\beta})^{k+1}} + \right. \\ & \alpha \xi \tau^{\beta-1} \left[\omega^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta + 1}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2 s^{-\beta})^{k+1}} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) - \right. \\ & \left. \left. \omega^{\beta+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2 s^{-\beta})^{k+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (26.2)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, así como las propiedades de la derivada de la función Mittag-Leffler (Apéndice 1) y el teorema de Convulación (donde * es el operador de convolución), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{v}_x(\xi, t) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} V \left(v\xi + \alpha \xi \omega^\beta \tau^{\beta-1} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \cos(\omega t) * t^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi}} V \alpha \xi \omega^{\beta+1} \tau^{\beta-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \operatorname{sen}(\omega t) * t^k \left[E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) \right] \end{aligned} \quad (26.3)$$

regresando al dominio espacial, se obtiene:

$$\begin{aligned} v(y, t) = & \frac{2V}{\pi} \int_0^t \int_0^t \left\{ \operatorname{sen}(\xi y) \left(v\xi + \alpha \xi \omega^\beta \tau^{\beta-1} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \cos(\omega(t-t')) t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t'^{1-\beta}) \right\} dt' d\xi \\ & - \frac{2}{\pi} \alpha \xi \omega^{\beta+1} \tau^{\beta-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) V \int_0^t \int_0^t \left\{ \operatorname{sen}(\xi y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \operatorname{sen}(\omega(t-t')) t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t'^{1-\beta}) \right\} dt' d\xi \end{aligned} \quad (27)$$

La ecuación anterior representa el campo de velocidades no homogéneo (unidireccional), no estacionario para el SPS con MFFSG. En la solución intervienen, además de la posición y el tiempo (y, t) , las variables t' y ξ . La primera es una medida del tiempo, resultante de expresar el teorema de convolución en su forma integral. La variable ξ proviene de la definición de la

transformada de Fourier y tiene dimensiones inversas a la posición (y). Aún no se ha definido el valor o interpretación física de la constante temporal fraccionaria.

Con el auge del cálculo fraccionario en las décadas recientes, se han desarrollado nuevas métodos de solución de EDO y EDP de orden fraccionario que pueden disminuir el empleo de tantas herramientas algebraicas como las empleadas en esta sección. Por lo tanto, se aborda en lo siguiente las funciones de Green fraccionarias para resolver nuevamente la ecuación (23) y comparar las soluciones obtenidas por ambos métodos.

Solución mediante funciones de Green fraccionarias

Las funciones de Green son ampliamente utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) no homogéneas de valor inicial. Este método de solución se ha extendido exitosamente para las ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF) no homogéneas de coeficientes constantes [42], donde las soluciones se obtienen con ayuda de las transformadas de Laplace o Fourier combinadas con la función Mittag-Leffler [47].

Una EDF de tres términos (no homogénea) con condición inicial no homogénea, como la expresada en la ecuación (28), puede ser resuelta mediante funciones de Green, siendo la solución la expresión mostrada en la ecuación (29)

$$a_0 D_t^\alpha y(t) + b_0 D_t^\beta y(t) + cy(t) = f(t) \quad (28)$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^n b_k \Psi_k(t) + \int_0^t G(t-t') f(t') dt' \quad (29)$$

donde el primer término introduce las condiciones iniciales no homogéneas de la ecuación diferencial fraccionaria no homogénea (28)

$$b_k = \left[{}_0 D_t^{\sigma_k - 1} y(t) \right]_{t=0} \quad (29.1)$$

$$\Psi_k(t) = {}_0D_t^{\sigma_n - \sigma_k} G(t) \quad (29.2)$$

Generalmente se emplean transformaciones integrales (Laplace) para obtener las funciones de Green, obteniendo:

$$G(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k t^{\alpha(k+1)-1} E_{\alpha-\beta, \alpha+\beta k}^{(k)} \left(-\frac{b}{a} t^{\alpha-\beta}\right) \quad (30)$$

Como se ha mencionado, estas ecuaciones son útiles para resolver EDF ordinarias, es decir que su única variable sea el tiempo, para lograr que la ecuación (23) sea ordinaria, se empleó la transformada de Fourier. Este procedimiento fue realizado en la expresión (23.2) de la solución anterior y con base en (28) se reescribe la expresión, obteniendo:

$$\frac{dv_x(\xi, t)}{dt} + \alpha \tau^{\beta-1} \xi^2 D_t^\beta v_x(\xi, t) + v \xi^2 v_x(\xi, t) = f(t) \quad (31)$$

donde

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V [v \cos(\omega t) + \alpha \tau^{\beta-1} D_t^\beta \cos(\omega t)] \quad (31.1)$$

El primer término de la solución propuesta por funciones de Green se vuelve cero, ya que este problema presenta condición inicial homogénea; por lo tanto, la expresión (29), resulta:

$$y(t) = \int_0^t G(t-t') f(t') dt' \quad (32)$$

La cual puede reescribirse, con las variables de este problema, de la siguiente manera:

$$v_x(\xi, t) = \int_0^t G(t') f(t-t') dt' \quad (33)$$

Donde la ecuación (30) y la función $f(t-t')$, para este caso, son:

$$G(t') = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)} (-\alpha \tau^{\beta-1} \xi^2 t'^{\beta-1}) \quad (33.1)$$

$$f(t-t') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \left[v \cos(\omega(t-t')) + \alpha \tau^{\beta-1} \omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega(t-t')\right) \right] \quad (33.2)$$

Introduciendo las ecuaciones (33.1) y (33.2) en la solución mediante FG, se obtiene el siguiente campo de velocidades (todavía en el espacio de Fourier):

$$v_x(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \xi V \left\{ v \cos(\omega(t-t')) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \tau^{\beta-1} \xi^2 t'^{\beta-1}) dt' \right. \\ \left. + \alpha \tau^{\beta-1} \omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega(t-t')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \tau^{\beta-1} \xi^2 t'^{\beta-1}) dt' \right\} \quad (34)$$

Regresando la expresión anterior al dominio del espacio físico:

$$v_x(y, t) = \frac{2}{\pi} V \int_0^t \int_0^y \left\{ \xi v \operatorname{sen}(\xi y) \operatorname{Cos}(\omega(t-t')) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \tau^{\beta-1} \xi^2 t'^{\beta-1}) \right\} dt' d\xi \\ + \frac{2}{\pi} V \int_0^t \int_0^y \left\{ \alpha \xi \tau^{\beta-1} \omega^\beta \operatorname{sen}(\xi y) \operatorname{Cos}\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega(t-t')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \tau^{\beta-1} \xi^2 t'^{\beta-1}) \right\} dt' d\xi \quad (35)$$

La ecuación anterior representa el campo de velocidades no homogéneo (unidireccional), no estacionario para el SPS con MFFSG obtenido mediante funciones de Green. Al igual que en la ecuación (27) en ésta también intervienen, además de la posición y el tiempo (y, t) , las variables t' y ξ . La primera representa una variable temporal de la función de Green, la cual permite que ésta sólo dependa del tiempo transcurrido $(t-t')$, mientras que la ξ la variable espacial de Fourier.

Esta solución se obtiene de manera más directa y rápida que la solución mediante transformaciones integrales y se señala que es necesario conocer conceptos relacionados con las funciones de Green.

La identificación de las variables características del sistema, así como de los números adimensionales presentes en las ecuaciones, es básica para tener mayor comprensión de los fenómenos físicos que ocurren, además de simplificar las condiciones de frontera y las soluciones; por lo que se desarrolla este procedimiento en la sección siguiente, empleando las funciones de Green fraccionarias como método de obtención de la solución.

Solución adimensional

Definiendo las variables características (velocidad, tiempo y posición) y adimensionales para la ecuación de movimiento:

$$U = \frac{v_x}{V}; \quad T = \omega t; \quad Y = y \left(\frac{\omega}{V} \right)^{1/2} \quad (36.1-36.3)$$

Se emplea como velocidad característica la constante V de la (C.F1), que representa la amplitud del movimiento oscilatorio de la placa y la frecuencia es asociada a la variable temporal característica. Para el espacio se utiliza una longitud que está determinada por el proceso difusivo en términos de la frecuencia, por lo que se define como la relación entre la variable disipativa del sistema y el tiempo característico de éste, que a su vez se asocia a la capa límite (inverso de su orden de magnitud).

Anteriormente no se definió qué valor y significado físico tendría la constante temporal con exponente fraccionario que homogeneiza las dimensiones de las ecuaciones. Ahora, una vez definida la frecuencia del movimiento oscilatorio de la placa, como tiempo característico del sistema, se plantea que se le relacione con la constante temporal. Esta frecuencia característica posee gran importancia física, ya que delimita la aplicación del FSG y MFFSG (bajas frecuencias), así como el comportamiento del fluido que está definido por el movimiento de la placa. Sin embargo, la frecuencia *per se* no puede ser empleada como constante temporal ya que no brinda las dimensiones adecuadas a la derivada fraccionaria, por

lo tanto, se propone emplear al inverso de ésta para homogeneizar las dimensiones y realizar los cálculos requeridos.

Considerando al inverso de la frecuencia como constante temporal y adimensionalizando la ecuación de movimiento (23) se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\alpha_1}{\eta} \omega \frac{\partial^\beta}{\partial T^\beta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (37)$$

En el segundo término del lado derecho está presente un factor que afecta la derivada cruzada, el cual puede ser visto como una relación temporal o una escala de tiempo del proceso, ya que incluye el tiempo cacterístico del fluido ($\alpha_1/\eta = \alpha/\nu$) y un tiempo característico del proceso (ω), esta relación entre tiempos es conocida como número de Weissenberg (Wi). Este número adimensional y el número de Débora (De), que relaciona el tiempo característico del fluido es uno de los más importantes en reología ya que determina el comportamiento del fluido.

Considerando la ecuación anterior y resolviéndola mediante funciones de Green, se obtiene el siguiente campo de velocidades adimensional:

$$U(Y, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi \operatorname{sen}(\xi Y) \cos((T - T')) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi \\ + \frac{2}{\pi} Wi \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi \operatorname{sen}(\xi Y) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2} + (T - T')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi \quad (38)$$

Es importante resaltar que la variable del espacio de Fourier (ξ), en este caso, también es adimensional, ya que la transformada se realiza sobre la variable que es adimensional.

Con la finalidad de comparar las soluciones obtenidas hasta ahora, éstas se enlistan en la Tabla 4, donde ya se considera al inverso de la frecuencia como la constante temporal de orden fraccionario.

En la tabla 4 se muestra que las soluciones contienen sumas infinitas, integrales definidas y funciones especiales, es por ello que obtener una expresión cerrada para ellas resulta improbable. Por tanto, inicialmente se abordan algunas formas reducidas (o casos límite) de las soluciones, con la finalidad, además de validar la solución, de analizar el comportamiento de éstas cuando son simplificadas y adquirir experiencia en el procedimiento de solución. Los casos a analizar son el FSG ($\beta=1$) y el newtoniano ($\beta=1, \alpha=0$).

Tabla4. Comparación entre las soluciones obtenidas por métodos de transformación integral, ecuación (27), funciones de Green, ecuación (35) y la solución adimensional respectivamente, ecuación(38).

Comentarios	Soluciones obtenidas para el campo de velocidades
<p>Estas distribuciones de velocidades son equivalentes si se considera que en el segundo término, $\cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega(t-t')\right)$ puede escribirse como: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$</p>	$v_x(y,t) = \frac{2V}{\pi} \int_0^t \int_0^t \left\{ \operatorname{sen}(\xi y) \left(v\xi + \alpha\xi\omega \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \cos(\omega(t-t')) t'^k E_{1-\beta,1+\beta k}^{(k)}(-\alpha\xi^2 \omega^{1-\beta} t'^{1-\beta}) \right\} dt' d\xi$ $- \frac{2V}{\pi} \alpha\xi\omega \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \int_0^t \int_0^t \left\{ \operatorname{sen}(\xi y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \operatorname{sen}(\omega(t-t')) t'^k E_{1-\beta,1+\beta k}^{(k)}(-\alpha\xi^2 \omega^{1-\beta} t'^{1-\beta}) \right\} dt' d\xi$ <hr/> $v_x(y,t) = \frac{2}{\pi} V \int_0^t \int_0^t \left\{ \xi v \operatorname{sen}(\xi y) \cos(\omega(t-t')) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t'^k E_{1-\beta,1+\beta k}^{(k)}(-\alpha\omega^{1-\beta} \xi^2 t'^{\beta-1}) \right\} dt' d\xi$ $+ \frac{2}{\pi} V \int_0^t \int_0^t \left\{ \alpha\xi\omega \operatorname{sen}(\xi y) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega(t-t')\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t'^k E_{1-\beta,1+\beta k}^{(k)}(-\alpha\omega^{1-\beta} \xi^2 t'^{\beta-1}) \right\} dt' d\xi$
<p>Tiene la misma estructura que las anteriores y si se regresa a la forma dimensional puede obtenerse la misma solución.</p>	$U(Y,T) = \frac{2}{\pi} \int_0^T \int_0^T \left\{ \xi \operatorname{sen}(\xi Y) \cos((T-T')) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta,1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi$ $+ \frac{2}{\pi} Wi \int_0^T \int_0^T \left\{ \xi \operatorname{sen}(\xi Y) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + (T-T')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta,1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi$

Casos límite

El MFFSG puede reducirse cuando el valor de β es igual a uno. Una vez establecido el valor de este exponente se obtienen dos casos límite, dependiendo del valor de α , el FSG y el fluido newtoniano.

Para $\beta=1$ la solución obtenida para el MFFSG, mediante FG, se reduce a:

$$v_x(y,t) = \int_0^\infty \int_0^t \frac{2\xi \operatorname{sen}(y\xi) \left(v \cos[\omega(t-t')] - \alpha \omega \operatorname{sen}[\omega(t-t')] \right) \exp\left[-\frac{v\xi^2 t'}{1+\alpha\xi^2} \right]}{\pi(1+\alpha\xi^2)} dt' d\xi \quad (39)$$

Las derivadas de la función Mittag-Leffler se redujeron a exponenciales que disminuyen la dificultad del argumento de las integrales. Sin embargo, esta distribución de velocidades tampoco tendrá forma cerrada ya que sólo la integral temporal presenta solución analítica. A pesar de esto, se compara la expresión reducida del caso límite ($\beta=1$) con la solución reportada para el problema resuelto con el modelo del FSG sin generalizar [46], así como con el fluido newtoniano. Lo anterior se expresa en la tabla 5, la cual muestra que todas las soluciones presentan flujos oscilatorios en dirección “y” y con frecuencias específicas, debido a la naturaleza del movimiento de la placa.

En la tabla 5 se comparan los casos especiales del MFFSG con las soluciones para los dos fluidos distintos. Se observa que la obtenida resolviendo el segundo problema de Stokes para un FSG (II) y el caso límite presentado (I), tienen una expresión matemática similar y se considera que las diferencias pueden surgir debido a que las soluciones expresadas en [46] fueron obtenidas mediante transformaciones integrales y durante el desarrollo de éstas se recurren a pasos algebraicos distintos, así como a alguna expansión en serie de Taylor que modifican la forma final de la expresión. Respecto al fluido newtoniano es muy evidente la diferencia entre las expresiones matemáticas del caso límite (III) y la solución directa (IV), sin

embargo ambas se compararán cualitativa y cuantitativamente mediante las distribuciones gráficas más adelante presentadas.

Tabla 5. Soluciones analíticas para el SPS con diferentes ecuaciones constitutivas

<i>Ecuación constitutiva</i>	<i>Campo de velocidades para el SPS</i>
<p>I. MFFSG con $\beta=1$ (caso límite: FSG)</p>	$v_x(y,t) = \frac{2}{\pi} V \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^2 + [\alpha \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)]}{(v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2))^2} \xi \operatorname{sen}(y \xi) d\xi +$ $\frac{2}{\pi} V \omega \operatorname{sen}(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{\xi \operatorname{sen}(y \xi)}{v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2} d\xi -$ $\frac{2}{\pi} V \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^3 + \alpha \omega^2 \xi (1 + \alpha \xi^2)}{v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2} \operatorname{sen}(y \xi) \exp\left[-\frac{v \xi^2 t}{1 + \alpha \xi^2}\right] d\xi$
<p>II. FSG [46]</p>	$v_x(y,t) = V \cos(\omega t) - \frac{2}{\pi} V \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 (1 + \alpha \xi^2)}{\xi (v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2)} \operatorname{sen}(y \xi) d\xi +$ $\frac{2}{\pi} V \omega \operatorname{sen}(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{\xi \operatorname{sen}(y \xi)}{(v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2)} d\xi -$ $\frac{2}{\pi} V \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^3 + \alpha \omega^2 \xi (1 + \alpha \xi^2)}{(v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2)} \operatorname{sen}(y \xi) \exp\left[-\frac{v \xi^2 t}{1 + \alpha \xi^2}\right] d\xi$
<p>III. MFFSG con $\beta=1, \alpha=0$ (caso límite: Newtoniano)</p>	$v_x(y,t) = \frac{2}{\pi} V \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^2}{(v^2 \xi^4 + \omega^2)} \xi \operatorname{sen}(y \xi) d\xi +$ $\frac{2}{\pi} V \omega \operatorname{sen}(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{v \xi}{v^2 \xi^4 + \omega^2} \operatorname{sen}(y \xi) d\xi -$ $\frac{2}{\pi} V \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^3}{v^2 \xi^4 + \omega^2} \operatorname{sen}(y \xi) \exp[-v \xi^2 t] d\xi$
<p>IV. Fluido Newtoniano [40]</p>	$v_x(y,t) = V \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y - \omega t\right)$

Para resolver las integrales espaciales (que no presentan solución analítica) expresadas en las soluciones de la tabla anterior, se empleó un método numérico incorporado al paquete de cómputo *Mathematica6*, que consiste en una aproximación mediante expansión de polinomios (denominado método oscilatorio de integración [52]). Las soluciones son reportadas gráficamente con la finalidad de ilustrar con mayor claridad las distribuciones de

velocidad, que fueron obtenidas para distintos órdenes de magnitud de las propiedades del fluido (elásticas y viscosas) y de frecuencia, que pretenden representar diversos materiales y situaciones de flujo.

En la figura 2 se presentan las distribuciones de la velocidad (normalizada v/V) en el espacio a diferentes tiempos ($t_n = n\pi/4\omega$; $n=1,8$). En las figuras 2 y 3 se comparan las distribuciones para los casos especiales del MFFSG con el fluido newtoniano y el de segundo grado.

Caso $\alpha=0$ (III) y fluido newtoniano (IV)

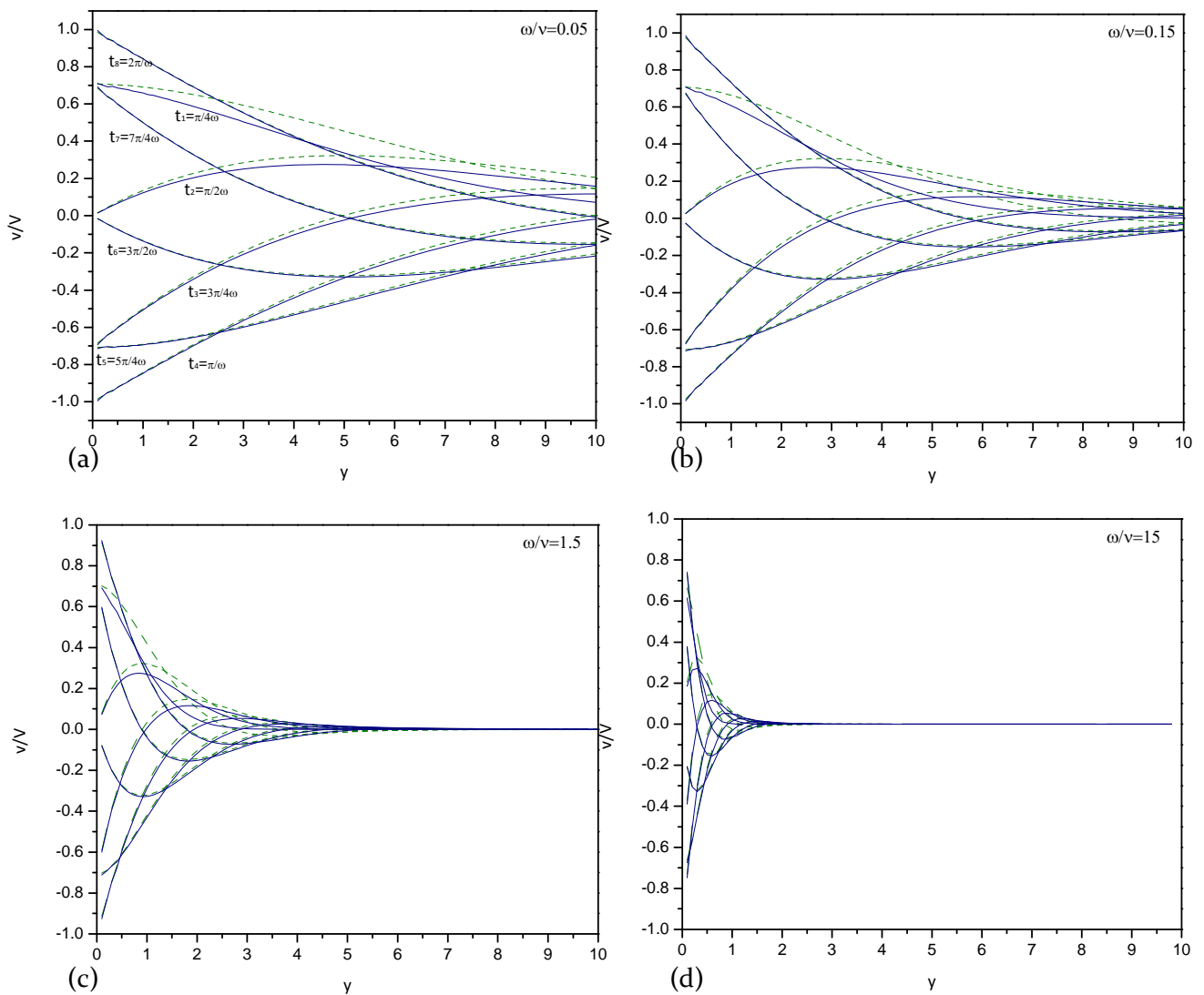
Para obtener esta solución se trabajó sobre la expresión (I) mostrada en la tabla 5, a la cual se asignó el valor de $\alpha=0$.

En la figura 2 se muestra cómo se distribuye la velocidad a diferentes coeficientes difusivos y amplitudes; para el fluido newtoniano se presentan con líneas punteadas de color verde, mientras que la del caso $\alpha=0$, con líneas continuas de color azul. Ambas soluciones presentan, cualitativamente el mismo comportamiento, en el cual la amplitud máxima de la velocidad es la del movimiento oscilatorio a $y=0$ ($v/V=1$), éste se transfiere desde la placa hasta una distancia en el eje "y", denominada capa límite. La presencia de valores negativos de la velocidad se debe a la naturaleza oscilatoria del movimiento de la placa (coseno) y a la localización del sistema coordenado en la placa (para despreciar los efectos de borde). En el caso de las distribuciones que inician con valores positivos de velocidad, se presenta un valor mínimo valor negativo para después aumentar hasta cero; mientras que las que inician en valores negativos, presentan un valor máximo positivo que después desciende hasta cero, esta es una oscilación debido a que la placa tiene este tipo de movimiento.

Se comparan las distribuciones del fluido newtoniano y las del caso especial $\alpha=0$, donde las mayores diferencias cuantitativas se presentan en los primeros tiempos (t_1, t_2, t_3), que pueden considerarse los más cercanos al inicio del movimiento (t_0). El valor máximo de las diferencias entre ambas distribuciones es de 31% y aparece en el $t_1 = \pi/4\omega$. Se considera que dichas diferencias se incrementan en el tiempo más pequeño debido a que el modelo del FSG y el

MFFSG tienen como restricción bajas frecuencias, por lo que si éstas se asocian al tiempo, los modelos presentarán mejor resultado a tiempos largos.

La relación ω/ν (con dimensiones de $1/L^2$) se emplea ya que en este caso especial la parte elástica del fluido es despreciable y por tanto, se resalta al proceso difusivo empleando una variable característica (inverso de la longitud al cuadrado) asociada a él. Es apreciable que al aumentar el orden de magnitud de la relación ω/ν , la transferencia de movimiento se reduce respecto a la posición perpendicular a la placa; por lo que a que a bajas frecuencias y grandes viscosidades la difusión de momento es mayor y la capa límite aumenta.



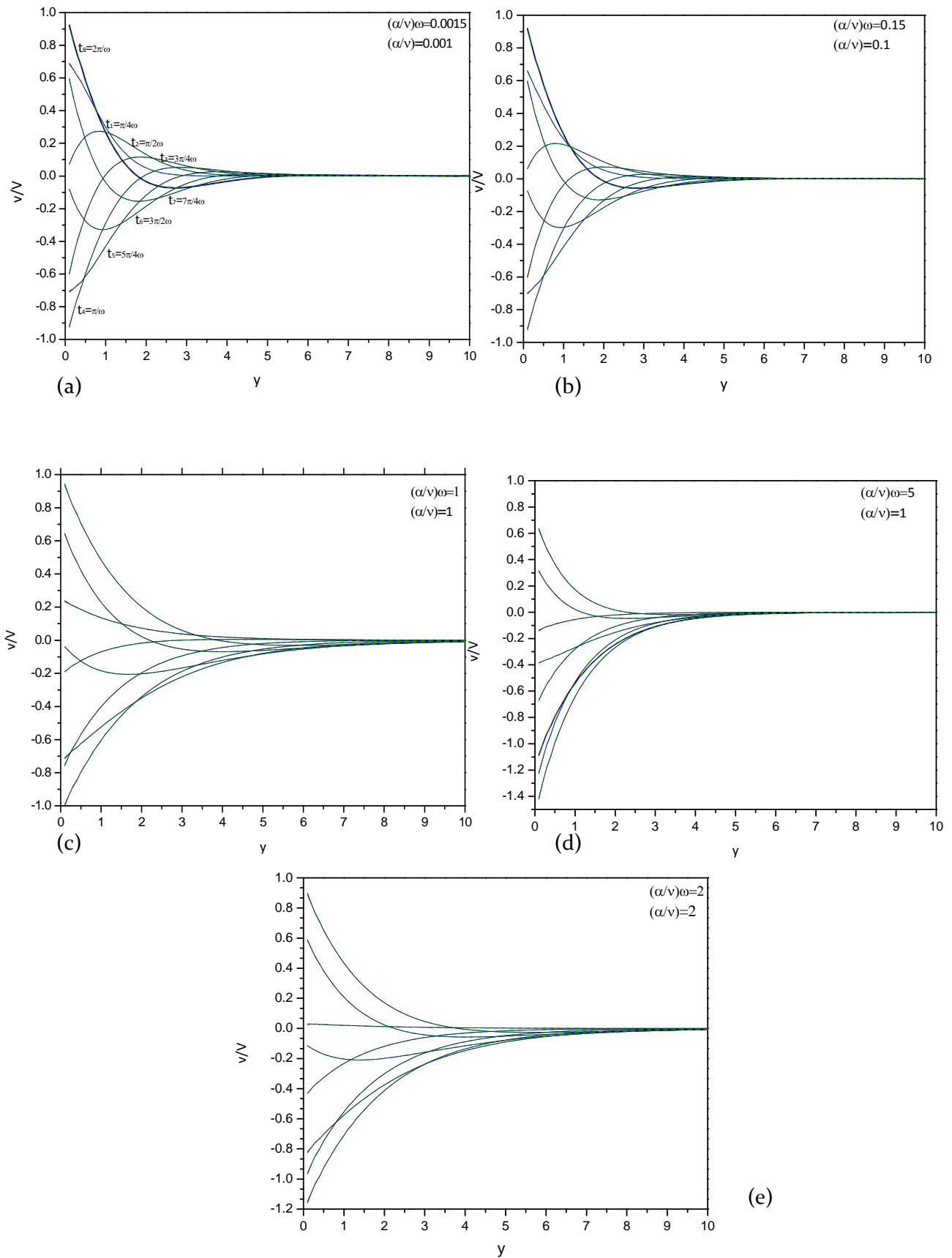
Figs. 2(a)-3(d) Distribuciones de velocidad para diferentes órdenes de magnitud de la relación ω/ν del fluido newtoniano y el caso especial del MFFSG ($\alpha=0$).

Caso $\alpha \neq 0$ (I) y FSG (II)

La relación temporal adimensional $(\alpha/\nu)\omega$ es empleada para hacer el análisis entre las distribuciones debido a que el número de Wi es uno de los principales referentes de viscoelasticidad ($Wi \sim 1$), por lo que manteniendo esta relación cercana a uno, lo cual asegurará que exista consistencia con la física del problema, es decir, que sea un material viscoelástico. Cabe señalar que dentro de este número adimensional está involucrado el tiempo característico del material, por lo que también puede referirse a distintos materiales cuando éste varía.

De las figuras 3(a)-3(e), si el número de Wi es de magnitud pequeña la parte viscosa del fluido tiene mayor contribución que la elástica, por tanto, las distribuciones de velocidad son cualitativamente comparables a las del fluido newtoniano. Por otro lado, cuando el Wi se incrementa y los efectos elásticos tienen más significancia, el comportamiento cualitativo de las distribuciones se aleja ligeramente de las del fluido newtoniano, sin cambiar demasiado ya que el fenómeno difusivo es el dominante en ambos casos. Se observa también que los valores de la velocidad disminuyen y el valor de la capa límite aumenta respecto al fluido newtoniano, por lo que este comportamiento se considera causa de la viscoelasticidad de los materiales.

A pesar de tratarse de fluidos diferentes, se observan similitudes en el comportamiento cualitativo de las distribuciones mostradas en el caso anterior y éste, como la existencia de la capa límite y de una amplitud máxima para la velocidad. Las diferencias sustanciales se presentan en el análisis que se realiza para este caso, los valores de la capa límite y las diferencias cuantitativas entre las soluciones del FSG y el caso especial, ya que éstas son prácticamente iguales, con una diferencia máxima del 1%, en todos los Wi presentados en la figura 3.



Figs. 3 (a)-3(e). Distribuciones de velocidad, a diferentes órdenes de magnitud (ascendentes) del Wi , para el FSG y el caso especial del MFFSG ($\beta=1, \alpha \neq 0$).

Para la obtención de las distribuciones de velocidad en los casos límite, a pesar de las simplificaciones generadas al asignar el valor de $\beta=1$, fue necesario emplear un método numérico para resolver la integral de la variable espacial (transformada inversa de Fourier), por lo que las soluciones del MFFSG sin simplificaciones, mostradas en la tabla 4, resultan integrales poco manejables desde el punto de vista analítico, lo que sugiere que deben resolverse mediante integración numérica, o bien, encontrar una metodología alternativa que facilite la obtención de valores para la velocidad.

Las unidades para la posición y el tiempo son generales, es decir, no se emplearon en específico o del sistema internacional o del cegesimal para realizar los cálculos y las gráficas. Por lo tanto, se recomienda que al emplear este modelo para un fluido específico, se cuide que las unidades, así como las dimensiones, sean consistentes.

Evaluación de la solución con el MFFSG

Con la finalidad de enfocar los esfuerzos en el análisis de resultados para el MFFSG y no emplear a fondo algún método de integración numérica, se propone un método alternativo para obtener los valores numéricos de las distribuciones de velocidad; el cual consiste en retomar la ecuación diferencial ordinaria (31) obtenida mediante una transformación integral, expresar las derivadas de la velocidad con la definición de límite y posteriormente realizar la transformada inversa de Fourier mediante un método numérico sencillo, lo cual será una aproximación básica de las distribuciones, pero permitirá observarlas y así poder analizar este modelo de manera más sencilla.

Retomando la definición de la enésima derivada [49]:

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t - mh) \quad (40)$$

donde $\binom{m}{n}$ representa el coeficiente binomial. Esta definición clásica de derivada puede ser generalizada para valores no enteros de n, incorporando a la función gamma en el coeficiente binomial y puede reescribirse de manera más adecuada como [49]:

$$D^\beta f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\beta} \sum_{m=0}^{\frac{t-t_0}{h}} (-1)^m \binom{\beta}{n} f(t-mh) \quad (40.1)$$

Introduciendo la ecuación (40.1) en la (23.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{m=0}^{\frac{t}{h}} (-1)^m \binom{1}{n} v_x(t-mh) + \alpha \tau^{\beta-1} \xi^2 \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\beta} \sum_{m=0}^{\frac{t}{h}} (-1)^m \binom{\beta}{n} v_x(t-mh) + \xi^2 v_x(\xi, t) \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \left[v \cos(\omega t) + \alpha \tau^{\beta-1} \omega^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega t\right) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Expandiendo el primer término de las sumas y sustituyendo la constante temporal, se obtiene:

$$\begin{aligned} v_x(\xi, t) (h^{-1} + \alpha \omega^{1-\beta} \xi^2 h^{-\beta} + v \xi^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \left[v \cos(\omega t) + \alpha \omega \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega t\right) \right] - \\ \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{m=1}^{\frac{t}{h}} (-1)^m \binom{1}{n} v_x(t-mh) - \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\beta} \sum_{m=1}^{\frac{t}{h}} (-1)^m \binom{1}{n} v_x(t-mh) \end{aligned} \quad (41.1)$$

Para los cálculos de los valores de velocidad (como función del tiempo y de la posición en el espacio de Fourier) se debe establecer un valor para h, el cual debe ser suficientemente pequeño para que esta definición de límite sea representativa. Este cálculo se realiza tantas veces como valores de ξ sean asignados.

Para obtener los valores representativos de la velocidad en el espacio real y el tiempo, es necesario realizar la transformada inversa seno de Fourier para los valores obtenidos. Esto fue realizado mediante la definición de integral a un tamaño de paso adecuado.

En la figura 4 se muestra la variación de la velocidad respecto al tiempo a diferentes posiciones espaciales y para tres valores distintos del exponente fraccionario ($\beta=0.2$, $\beta=0.5$ y $\beta=0.8$), con $(\alpha/\nu)\omega=0.15$. La velocidad, para diferentes posiciones espaciales en el fluido, sigue manteniendo la forma del movimiento oscilatorio (coseno) de la placa y conforme aumenta la distancia entre el fluido y la placa, la magnitud de la velocidad decrece, hasta que el movimiento cesa (lo cual confirma la existencia de la capa límite).

Se comparan las formas obtenidas para el MFFSG con las del FSG (línea discontinua) y fluido newtoniano (FN) (línea punteada) y se observa que, en general, la magnitud de la velocidad para el MFFSG es mayor que la del FSG y del FN. En todos los casos se observa que el valor de la amplitud de la velocidad a tiempos menores a tres es diferente al que de los tiempos restantes. Se observa que las velocidades del MFFSG en posiciones más cercanas a la placa ($y=0.1$) están en fase con las del FSG (excepto $\beta=0.2$) y FN, pero tienen menor amplitud. Conforme existe mayor distancia entre la placa y el fluido, el MFFSG empieza a desfasarse y a aumentar su amplitud respecto del FSG y al FN. También se observa que el MFFSG requiere mayor tiempo para que el comportamiento de la velocidad sea un movimiento periódico y que conforme β disminuye el tiempo requerido para lograrlo es el más largo.

Que el valor de la velocidad sea mayor para el MFFSG que para el FSG y el FN es compatible con la física, ya que el fluido newtoniano, al ser solamente viscoso, presenta mayor oposición a la transferencia de movimiento, mientras que el FSG y el MFFSG tienen características viscoelásticas que oponen menor resistencia que la viscosa. Esta situación es diferente cuando $y=0.1$ (muy cerca de la placa) en donde el FN y FSG tienen valores de velocidad mayores que el MFFSG, esto se puede atribuir al efecto de memoria que se incorpora con el exponente fraccionario, es decir, muy cerca de la fuente de movimiento el fluido “recuerda” con mayor fuerza su estado anterior (reposo), resultando que exista una oposición momentánea mayor.

Se observa, a través de las diferentes posiciones espaciales, que el valor del exponente fraccionario tiene un impacto importante en el comportamiento del fluido, conforme $\beta \rightarrow 0$, la magnitud de la velocidad aumenta y cuando $\beta \rightarrow 1$, disminuye. Por lo tanto, se puede deducir que el significado del exponente se relaciona con la disipación del movimiento, o directamente

con los efectos de memoria, que pueden ser más fuertes cuando beta tiene un valor pequeño (ver la ecuación (4)).

La última figura (posición más alejada de la placa) muestra que la capa límite es mayor en el MFFSG que en el FSG y FN (MMFSG>FSG>FN) y que dentro del MFFSG la capa límite es mayor cuando $\beta \rightarrow 0$.

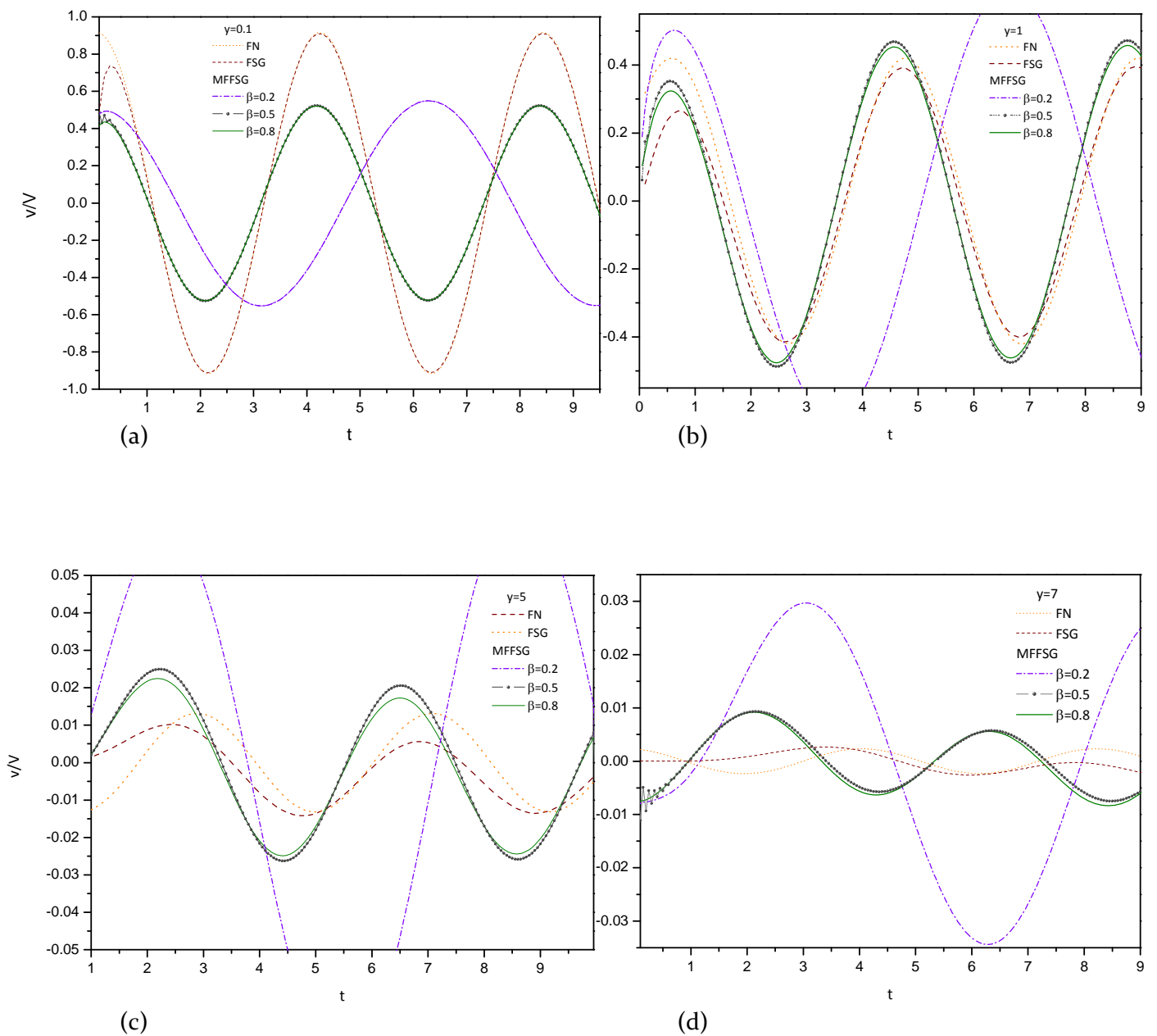


Fig 4(a)-4(d). Distribuciones de velocidad respecto al tiempo para $(\alpha/\nu)\alpha=0.15$ a diferentes posiciones espaciales ($\gamma=0.1, \gamma=1, \gamma=5, \gamma=7$)

Comentarios sobre las condiciones de frontera

Cuando se obtienen soluciones a las ecuaciones de balance es de gran importancia comprobar que las condiciones inicial y de frontera se cumplan, ya que es una forma más de validar la expresión. En el caso de las soluciones aquí obtenidas, es evidente que la condición inicial se cumple, cuando la placa está en reposo ($t=0$) el fluido también se encuentra en reposo. Respecto a la condición de frontera (de adhesión), con las soluciones dadas no es posible reproducirla; ya que las soluciones mostradas involucran el producto de una función seno de y , por lo que cuando $y=0$, la velocidad es también igual a cero.

Con base en el trabajo de Khan et al [21] se desarrolla (ver Apéndice 2) un procedimiento de solución mediante transformadas integrales, con pequeñas modificaciones respecto al elaborado previamente, con la finalidad de poner la solución en términos similares a la encontrada por estos autores y que aparentemente cumple la condición de frontera. La expresión resultante es:

$$\begin{aligned}
 v(y,t) = & V \cos(\omega t) - \\
 & \frac{2}{\pi} V \int_0^t \int_0^t \frac{\text{sen}(\xi y)}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k \cos(\omega(t-t')) t'^{k-1} E_{1-\beta, \beta k}^{(k)}(-\alpha \xi^2 \omega^{1-\beta} t'^{1-\beta}) dt' d\xi - \\
 & \frac{2}{\pi} V \alpha \omega^{1-\beta} \int_0^t \int_0^t \xi \text{sen}(\xi y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k \cos(\omega(t-t')) t'^{k-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta+\beta k}^{(k)}(-\alpha \xi^2 \omega^{1-\beta} t'^{1-\beta}) dt' d\xi + \\
 & \frac{2}{\pi} \alpha V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \int_0^t \int_0^t \xi \text{sen}(\xi y) \left[\cos\left(\omega(t-t') + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(\alpha \xi^2 \omega^{1-\beta} t'^{1-\beta}) dt' d\xi
 \end{aligned} \tag{42}$$

La ecuación (42) se diferencia de las presentadas en la tabla 4 en el primer término, que posibilita el cumplimiento de la condición de frontera, sin embargo, al realizar algunos cálculos para la solución propuesta, se observan diferencias importantes.

En la figura 5, se presentan las distribuciones de velocidad obtenidas con la ecuación (42) y con el caso (I) de la tabla 5, de color rojo oscuro y verde respectivamente. La tendencia (cualitativamente) de las distribuciones es similar, pero con un desfase en el valor de velocidades, por lo que cuantitativamente existe una variación muy significativa entre los resultados. Ahora bien, analizando las distribuciones presentadas, es indudable el hecho de

que la condición de frontera se cumple, sin embargo, el resto de los valores de velocidad a lo largo del eje vertical son mayores que la velocidad de la placa y no existe la presencia de la capa límite, estas características no describen la física del problema y por tanto, impiden que la solución sea válida en todo el eje vertical. Sin embargo, si se elimina el primer término, se obtienen nuevamente los valores expedidos por la solución de la tabla 5, por tanto, esta solución sólo es válida en $y=0$. Esto se debe a que en la nueva solución, ahora no se cumple la condición inicial, ya que la expresión (42) mostraría que a tiempo cero ya existe un movimiento V en el sistema, afirmando la validez de ésta a $y=0$.

Con base en lo anterior, es importante resaltar que las soluciones presentadas en la tabla 5 son válidas para valores de $y>0$ o $y=0^+$, es decir, en una posición muy cercano a la placa ($y=0$) pero no específicamente sobre la placa. Se afirma que son válidas para el resto de la escala espacial ($y\geq 0^+$) dado que las distribuciones (figuras 3 y 4) describen adecuadamente la física del problema y se reducen a los casos del FSG y fluido newtoniano.

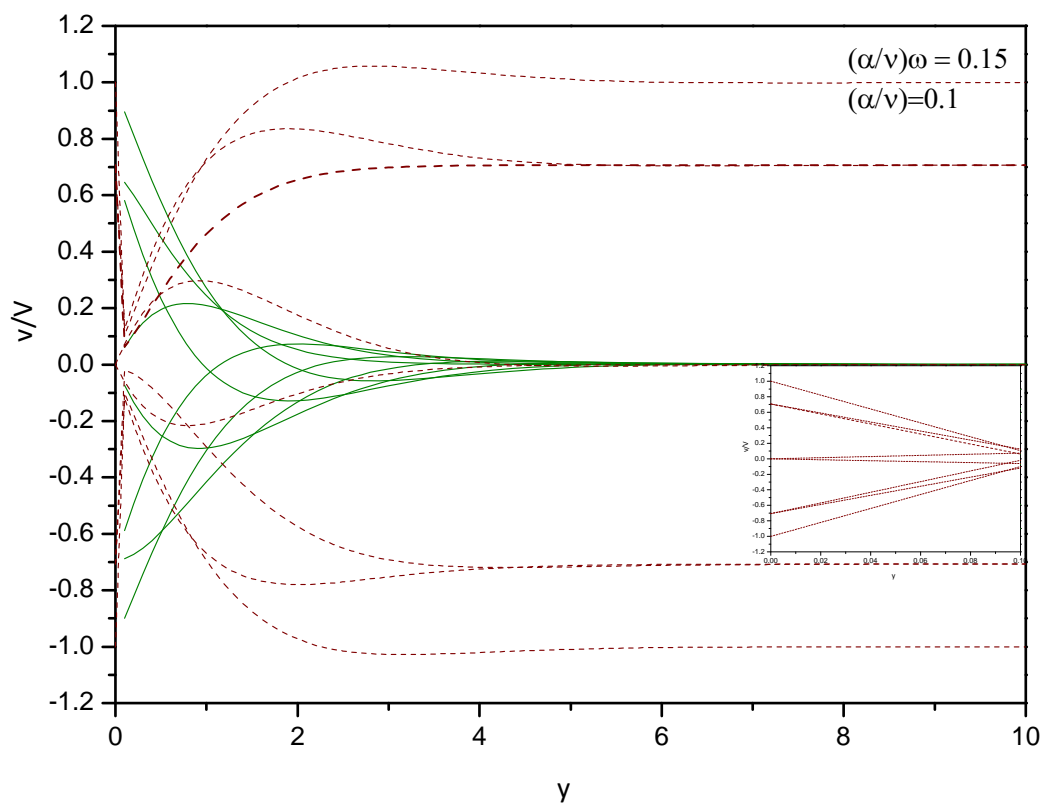


Fig.5 Comparación entre la solución que cumple la condición de adherencia y la que es válida para $y=0^+$

Capítulo 4

Ecuación de Energía

El balance de energía para el SPS con el MFFSG sujeto a las consideraciones correspondientes proporciona información sobre el proceso difusivo de ésta, que ocurre en el fluido viscoelástico, inducido por el movimiento oscilatorio de una placa calentada, así como del impacto de las propiedades viscoelásticas del fluido (α , η) en el transporte.

En la ecuación (42) se presenta la ecuación resultante del balance de energía, en la cual se incluye al inverso de la frecuencia característica como la constante temporal que homogeneiza las dimensiones de la ecuación (15.1). Del lado izquierdo, se expresan los términos que involucran a la variable dependiente de interés, la temperatura; mientras que del lado derecho están los términos de disipación de energía debido a las propiedades viscosas y la respuesta elástica al movimiento del fluido, respectivamente.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\eta}{\rho C_p} + \frac{\alpha_1}{\rho C_p} \omega^{1-\beta} D_t^\beta \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (42)$$

Esta ecuación debe cumplir con la condición inicial y de frontera, definidas por las consideraciones físicas y expresadas matemáticamente de la siguiente manera:

$$\theta(y, 0) = \theta_b \quad \text{Condición inicial} \quad (C.IE)$$

Condiciones de frontera

de primera clase o Dirichlet (temperatura de la placa)

$$\theta(0, t) = \theta_0 \quad (C.FE1)$$

de segunda clase o Neumann (no existe flujo de energía en un lugar muy alejado de la placa)

$$\frac{\partial \theta(y \rightarrow \infty, t)}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.FE2})$$

Forma adimensional de la ecuación de energía

Empleando las variables adimensionales del capítulo anterior y adicionando la de la temperatura

$\Theta = \frac{\theta - \theta_o}{\theta_b - \theta_o}$, se obtiene una forma adimensional para la ecuación (42) que se expresa como:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) = Ec \left(1 + Wi \frac{\partial^\beta}{\partial T^\beta} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \quad (43)$$

Donde

$$Ec = \frac{V^2}{Cp \Delta \theta} = \frac{\rho V^2}{\rho Cp (\theta_o - \theta_b)} ; \quad (43.1)$$

$$Pr = \frac{\eta Cp}{k}; \quad Wi = \frac{\alpha}{\nu} \omega \quad (43.2-43.3)$$

Con condición inicial y de frontera:

$$\Theta(Y, 0) = 0 \quad (\text{C.IE-A})$$

$$\Theta(0, T) = 1 \quad (\text{C.FE1-A})$$

$$\frac{\partial \Theta(y \rightarrow \infty, T)}{\partial Y} = 0 \quad (\text{C.FE2-A})$$

La presencia del número de Prandtl (Pr) y el número de Eckert (Ec) son esperados para este tipo de procesos de transferencia de energía, ya que mediante éstos se comparan los procesos difusivos de momento y energía (Pr) y qué tanto se transfiere la energía debido al movimiento (energía cinética) o qué tanto se concentra (Ec). Asimismo, resulta interesante observar la

existencia del producto de los números adimensionales Wi y Ec , el cual resalta que las propiedades viscoelásticas del fluido impactan la transferencia de energía en el sistema, esto se aprecia mejor arreglando las variables de ese producto adimensional, de la siguiente forma:

$$Wi Ec = \frac{\alpha}{\nu} \omega \frac{\rho V^2}{\rho C_p \Delta T} = \frac{\rho \nu L}{\eta} \frac{\alpha \omega \rho V / L}{\rho C_p \Delta T} \quad (44)$$

En este nuevo acomodo del producto de los números Wi y Ec , se encuentra de forma explícita el número de Reynolds (Re), que es representativo de la relación de las escalas temporales difusiva y convectiva, el cual está multiplicando a una relación de energías, la del numerador puede asociarse a la energía del fluido viscoelástico durante el movimiento, mientras que el denominador a la concentración de energía del sistema; es decir, cuánta energía se transfiere en el flujo del fluido viscoelástico.

Gradiente de velocidades

Debido a que la ecuación de energía y la de movimiento forman un sistema de ecuaciones semi acoplado por la velocidad, es necesario conocer el gradiente de velocidades del fluido para comenzar a resolver la ecuación de energía, el cual puede expresarse de manera sencilla considerando que la integral impropia es convergente (comprobado en los resultados obtenidos en el capítulo anterior). En la ecuación (45) y (46) se expresan los gradientes de velocidad generales, en su forma dimensional y adimensional respectivamente; mientras que en la tabla 6, los gradientes de velocidad de los casos especiales abordados en el capítulo anterior.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y} &= \frac{2}{\pi} V \int_0^\infty \int_0^t \left\{ \xi^2 v \cos(\xi y) \cos(\omega(t-t')) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \omega^{1-\beta} \xi^2 t'^{\beta-1}) \right\} dt' d\xi \\
&+ \frac{2}{\pi} V \int_0^\infty \int_0^t \left\{ \alpha \xi^2 \omega \cos(\xi y) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + \omega(t-t')\right) \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} (v \xi^2)^k t'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-\alpha \omega^{1-\beta} \xi^2 t'^{\beta-1}) \right\} dt' d\xi
\end{aligned}
\tag{45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial Y} U(Y, T) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos(\xi Y) \cos((T-T')) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi \\
&+ \frac{2}{\pi} Wi \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos(\xi Y) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + (T-T')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi
\end{aligned}
\tag{46}$$

Se ha elegido resolver la forma adimensional de la ecuación de energía dado que ésta implica la condición inicial y una de frontera homogéneas, lo que será muy apreciado en los procedimientos y medios de solución.

Las distribuciones de velocidad (Tabla 5) y los gradientes de velocidad (Tabla 6) obtenidos para el MFFSG y FSG podrían describirse entre sí como movimientos oscilatorios desfasados, dado que la estructura matemática de ambos es similar, cambiándose la función coseno por la función seno. A pesar de que los términos involucrados en las expresiones son funciones especiales, sumas e integrales impropias, y que éstos limiten la posibilidad de obtener una solución analítica de forma cerrada, el simple hecho de desarrollar y analizar la ecuación de energía para este problema, resulta una aportación importante ya que existen pocos trabajos [33] que aborden el balance de energía, incluso para fluidos newtonianos.

Tabla 6. Gradiente de velocidades para el MFFSG y sus casos especiales, FSG y FN .

<i>Ecuación constitutiva</i>	<i>Gradiente de velocidades</i>
<p>I. MFFSG con $\beta=1$ (caso límite: FSG)</p>	$\frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y} = \frac{2}{\pi} V \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^2 + [\alpha \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)]}{(v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2)} \xi^2 \cos(y \xi) d\xi + \frac{2}{\pi} V v \omega \operatorname{sen}(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \operatorname{Cos}(y \xi)}{v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2} d\xi -$ $\frac{2}{\pi} V \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^3 + \alpha \omega^2 \xi (1 + \alpha \xi^2)}{v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2} \xi \cos(y \xi) \exp\left[-\frac{v \xi^2 t}{1 + \alpha \xi^2}\right] d\xi$
<p>II. FSG [46]</p>	$\frac{\partial v_x(y,t)}{\partial y} = -\frac{2}{\pi} V \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 (1 + \alpha \xi^2)}{(v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2)} \cos(y \xi) d\xi + \frac{2}{\pi} V v \omega \operatorname{sen}(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \operatorname{Cos}(y \xi)}{(v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2)} d\xi -$ $\frac{2}{\pi} V \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^4 + \alpha \omega^2 \xi^2 (1 + \alpha \xi^2)}{(v^2 \xi^4 + \omega^2 (1 + \alpha \xi^2)^2)} \cos(y \xi) \exp\left[-\frac{v \xi^2 t}{1 + \alpha \xi^2}\right] d\xi$
<p>III. MFFSG con $\beta=1, \alpha=0$ (caso límite: Newtoniano)</p>	$\frac{\partial}{\partial y} v_x(y,t) = \frac{2}{\pi} V \cos(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^2}{(v^2 \xi^4 + \omega^2)} \xi^2 \cos(y \xi) d\xi + \frac{2}{\pi} V \omega \operatorname{sen}(\omega t) \int_0^{\infty} \frac{v \xi^2}{v^2 \xi^4 + \omega^2} \cos(y \xi) d\xi -$ $\frac{2}{\pi} V \int_0^{\infty} \frac{v^2 \xi^4}{v^2 \xi^4 + \omega^2} \cos(y \xi) \exp[-v \xi^2 t] d\xi$
<p>IV. Fluido Newtoniano [40]</p>	$\frac{\partial}{\partial y} v_x(y,t) = V \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \left(\operatorname{sen}\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) - \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \right)$

Solución de la ecuación de energía mediante funciones de Green

Una vez desarrollada la expresión para el gradiente de velocidades, éste se introduce en la ecuación (43) y se obtiene la ecuación de energía correspondiente:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) = Ec \left(1 + Wi \frac{\partial^\beta}{\partial T^\beta} \right) \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos(\xi Y) \cos((T - T')) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi + \frac{2}{\pi} Wi \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos(\xi Y) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + (T - T')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi \right)^2 \quad (47)$$

La parte no homogénea de la EDP contiene la derivada fraccionaria, la cual debe efectuarse sobre el gradiente de velocidades elevado al cuadrado. Dado que el objetivo de este trabajo es obtener una solución analítica y realizar un análisis del fenómeno físico, éste se enfoca en obtener alguna expresión general que permita entender que comportamiento térmico presenta el MFFSG, ya que la obtención de una forma cerrada para esta solución resulta muy complicado.

Con la finalidad de obtener una ecuación que no contenga escalares que multipliquen las derivadas de la ecuación (47), se introduce la variable S , la cual tiene la siguiente forma:

$$S = Y \sqrt{Pr} \quad (48)$$

La ecuación (48) es una variable espacial escalada ya que al multiplicar el espacio por un múltiplo del número de Pr , se hace énfasis en la importancia en la relación entre los procesos difusivos, tanto de momento como térmico, así como en sus respectivas capas límite, que son las distancias

que caracterizan a estos sistemas. Por lo tanto, si el Pr es de gran magnitud la escala espacial hará referencia al proceso de difusión de momentum, ya que la capa límite hidrodinámica será mayor que la térmica, y viceversa si el Pr es pequeño.

Introduciendo la variable S en (47), se obtiene:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial S^2} \right) = Ec Pr \left(1 + Wi \frac{\partial^\beta}{\partial T^\beta} \right) \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos\left(\frac{\xi S}{\sqrt{Pr}}\right) \cos(T - T') \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi + \frac{2}{\pi} Wi \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos\left(\frac{\xi S}{\sqrt{Pr}}\right) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + (T - T')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi \right]^2 \quad (49)$$

O bien:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial S^2} = \psi(S, T) \quad (50)$$

donde

$$\psi(S, T) = Ec Pr \left(1 + Wi \frac{\partial^\beta}{\partial T^\beta} \right) \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos\left(\xi \frac{S}{\sqrt{Pr}}\right) \cos((T - T')) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi + \frac{2}{\pi} Wi \int_0^\infty \int_0^T \left\{ \xi^2 \cos\left(\xi \frac{S}{\sqrt{Pr}}\right) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + (T - T')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi \right]^2 \quad (50.1)$$

Una vez simplificada la ecuación (49) en la (50) es posible observar que, más allá de las funciones especiales, integrales y derivada fraccionaria involucradas en la parte no homogénea, ésta puede representarse como una función de las variables independientes. Con base en los métodos de solución de EDP no homogéneas conocidos, en especial el de funciones de Green para las ecuaciones de energía unidireccional en medios semiinfinitos [51], se puede escribir que:

$$\Theta(S, T) = \int_0^T \int_0^\infty G(T') \psi(Y, T') dY dT' + \int_0^T \int_0^\infty G(T') \Theta(Y, 0) dY dT' - \int_0^T -A(T') \frac{\partial G(0, T')}{\partial Y} dT' \quad (51)$$

Siendo la función de Green y su derivada:

$$G(T') = \frac{1}{\sqrt{4\pi(T-T')}} \left(\exp\left[\frac{(S-Y)^2}{4(T-T')}\right] - \exp\left[-\frac{(S+Y)^2}{4(T-T')}\right] \right) \quad (51.1)$$

$$\frac{\partial G(0, T')}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{4\pi(T-T')}} \left(\frac{S}{(T-T')} \exp\left[-\frac{S^2}{4(T-T')}\right] \right) = \frac{S}{2\sqrt{\pi}(T-T')^{3/2}} \exp\left[-\frac{S^2}{4(T-T')}\right] \quad (51.2)$$

Las ecuaciones (51.1-51.2) cumplen con las condiciones de frontera ($Y=S=0$) ya que ambas son iguales a cero al aplicarlas.

Por lo tanto, la distribución de temperaturas puede quedar representada como:

$$\Theta(Y, T) = \int_0^T \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi(T-T')}} \left(\exp\left[\frac{(S-Y)^2}{4(T-T')}\right] - \exp\left[-\frac{(S+Y)^2}{4(T-T')}\right] \right) \psi(Y, T') dY dT' + \int_0^T \frac{S}{2\sqrt{\pi}(T-T')^{3/2}} \exp\left[-\frac{S^2}{4(T-T')}\right] dT' \quad (52)$$

Sustituyendo el valor de la función ψ en la solución anterior, se obtiene:

$$\Theta(S, T) = EcPr \int_0^T \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi(T-T')}} \left(\exp\left[-\frac{(S-Y)^2}{4(T-T')}\right] - \exp\left[-\frac{(S+Y)^2}{4(T-T')}\right] \right) \times \left(1 + Wi \frac{\partial^\beta}{\partial T'^\beta} \right) \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^t \left\{ \xi^2 \cos\left(\frac{\xi Y}{\sqrt{Pr}}\right) \cos(T-T') \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi + \frac{2}{\pi} Wi \int_0^\infty \int_0^t \xi^2 \left\{ \cos\left(\frac{\xi Y}{\sqrt{Pr}}\right) \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} + (T-T')\right) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\xi^2)^k T'^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(-Wi \xi^2 T'^{1-\beta}) \right\} dT' d\xi \right]^2 + \int_0^T \frac{S}{2\sqrt{\pi}(T-T')^{3/2}} \exp\left[-\frac{S^2}{4(T-T')}\right] dT' \quad (53)$$

La ecuación (52) es una solución general para la EDP parabólica, unidireccional, no homogénea, con una condición de frontera no homogénea de primer tipo. En la función $\psi(Y, T)$ se encuentra la información particular del sistema abordado, por lo cual, a partir de esta ecuación es posible obtener las soluciones para los casos abordados en el capítulo anterior, las cuales se muestran en la tabla 7.

La solución general de la EDP no homogénea presenta dos términos, el primero corresponde a la parte no homogénea de la EDP y el segundo a la solución homogénea con la condición de frontera correspondiente. Por lo tanto, es posible decir que las dos contribuciones principales de la distribución describen el decaimiento de la temperatura máxima (la de la placa) en el eje vertical, debido a un proceso difusivo de transferencia de energía y a la respuesta del tipo de fluido en ese fenómeno de difusión transitorio; este comportamiento indica que sólo existe transferencia de energía en una región específica de fluido y por tanto, una capa límite térmica.

Para el MFFSG, la primera parte de la ecuación (53) representa la contribución de la respuesta viscoelástica a la distribución térmica del sistema en un punto determinado (dada por la función de Green). Cabe resaltar que con el término $(1 + Wi D_t^\beta)$ es posible hacer un símil de la ecuación constitutiva adimensional de Maxwell, lo que permite analizar qué tanto impacta la respuesta viscoelástica a la distribución térmica, es decir, si la rapidez de cambio del gradiente de velocidad es grande o el $Wi \rightarrow \infty$, la derivada temporal fraccionaria dominará el término y por tanto, la viscoelasticidad del fluido impactará altamente la distribución de temperaturas. Por otro lado, si la rapidez de cambio es despreciable o el $Wi \rightarrow 0$, la respuesta viscoelástica del fluido tendrá un impacto casi nulo, ya que el fluido presentará un comportamiento similar al newtoniano. El valor del exponente fraccionario de la derivada permite confirmar que la viscoelasticidad y el movimiento del material tendrá un papel determinante en el proceso de difusión de energía,

cuando $\beta \rightarrow 0$ el gradiente de velocidad será el factor que afecte con mayor fuerza el proceso difusivo, mientras que para $\beta \rightarrow 1$ será la rapidez de cambio del gradiente de velocidad quien influenciará la difusión.

Con esta solución analítica, ecuación (52), se ha analizado brevemente el efecto no newtoniano o viscoelástico en la transferencia de energía (además, puede ser extendida a cualquier tipo de fluido no newtoniano).

Se reconoce que la obtención de gráficas de distribución de temperatura ilustrarían explícitamente el comportamiento del fluido, sin embargo, con lo presentado en este trabajo es posible inferir, sin involucrar técnicas computacionales o métodos numéricos, cómo se distribuirá la temperatura con sólo con analizar las ecuaciones obtenidas, por lo que se considera que es una aportación muy valiosa en el área de mecánica de fluidos no newtonianos y reología.

Tabla 7. Forma que adquiere la función $\psi(S, T)$ para diferentes ecuaciones constitutivas y algunos casos especiales del MFFGS.

<i>Ecuación constitutiva</i>	$\psi(S, T)$
<p>I. MFFSG con $\beta=1$ (caso límite: FSG)</p>	$Ec Pr \left(1 + Wi \frac{\partial}{\partial T} \right) \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + 2Wi\xi^2 + (1 + Wi^2)\xi^4)} \exp\left(-\frac{T\xi^2}{1 + Wi\xi^2}\right) \xi^2 \cos\left(\frac{\xi S}{\sqrt{Pr}}\right) \times \left\{ -Wi - \xi^2 - Wi^2\xi^2 + \exp\left(\frac{T\xi^2}{1 + Wi\xi^2}\right) (Wi + \xi^2(1 + Wi^2)) \cos(T) + \text{sen}(T) \right\} d\xi \right]^2$
<p>II. FSG [46]</p>	$Ec Pr \left(1 + Wi \frac{\partial}{\partial T} \right) \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (Wi + \xi^2)^2} \xi^2 \cos\left(\frac{S}{\sqrt{Pr}} \xi\right) \left((Wi + \xi(Wi^2 + \xi)) \left[-\exp\left(-\frac{\xi^2 T}{1 + Wi\xi^2}\right) + \cos(T) \right] \right) d\xi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 (1 + (1 - \xi)Wi\xi)}{1 + (Wi + \xi^2)^2} \cos\left(\frac{S}{\sqrt{Pr}} \xi\right) \text{sen}(T) d\xi \right]^2$
<p>III. MFFSG con $\beta=1, \alpha=0$ (caso límite: Newtoniano)</p>	$Ec Pr \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\xi^2}{1 + \xi^4} \cos\left(\frac{\xi S}{\sqrt{Pr}}\right) \left(\xi^2 \cos(T) - \xi^2 \exp(-T\xi^2) + \text{sen}(T) \right) \right\} d\xi \right)^2$
<p>IV. Fluido Newtoniano [40]</p>	$\frac{Pr Ec}{2} \left(\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{Pr}} S\right) \left[\text{sen}\left(T - \frac{1}{\sqrt{2Pr}} S\right) - \cos\left(T - \frac{1}{\sqrt{2Pr}} S\right) \right] \right)^2$

Conclusiones

Se obtuvieron soluciones analíticas equivalentes, para la ecuación de movimiento, mediante transformaciones integrales y funciones de Green fraccionarias, las cuales se validaron y a su vez a la propuesta de homogeneización fraccionaria, ya que reprodujeron con gran exactitud los casos límite estudiados. Estas soluciones son válidas para valores de la escala espacial mayores a cero ($y=0^+$) y mostraron un error máximo de 31% respecto al fluido newtoniano y de 1% respecto al FSG.

Las distribuciones de velocidad obtenidas presentaron un valor máximo para la amplitud y una capa límite., la cual resultó ser mayor en el MFFSG que en el FSG y FN ($MMFSG > FSG > FN$) y dentro del MFFSG la capa límite es mayor cuando $\beta \rightarrow 0$. Se otorgó significado físico al exponente fraccionario de la derivada (que representa a un fluido diferente con cada valor de β), relacionándolo con la disipación del movimiento, o directamente con los efectos de memoria, que pueden ser más fuertes cuando beta tiene un valor pequeño.

Con el tratamiento dado a la ecuación de energía se obtuvo una solución analítica que puede ser extendida a cualquier tipo de fluido no newtoniano y con la cual se analizó, a pesar de no haber obtenido gráficas de la distribución de temperatura, el impacto de la viscoelasticidad en el proceso de transferencia de energía, de forma análoga a la ecuación de Maxwell.

En general, las soluciones exactas obtenidas para los balances de momento y energía del SPS para un MFFSG, así como el desarrollo y análisis desarrollado a partir de ellas, permiten corroborar que éstas son muy importantes para comprender situaciones físicas básicas, así

como medios para plantear y resolver otros problemas que involucren flujos de mayor complejidad física.

Bibliografía

- [1] Astarita G. and Marucci G. (1974) *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. Nueva York: McGraw-Hill
- [2] Chhabra R.P. and Richardson J.F. (1999) *Non-Newtonian Flow in the Process Industries - Fundamentals and Engineering Applications*. Oxford: Ed. Butterworth-Heinemann
- [3] Bird R.B., Curtis C.F., Armstrong R.C., Hassager O. (1987) *Dynamics of Polymeric Liquids* (2da Ed.), Nueva York: Wiley Interscience
- [4] Smith W., de Vries H. (1970) Rheological models containing fractional derivatives, *Rheologica Acta*, 9, 525-534
- [5] Massoudi M., Vaidya A. (2008) On some generalizations of the second grade fluid model, *Non Analysis: RWA*, 9, 1169-1183
- [6] Aksel N. (2002). A brief note from the editor on the "second order fluid", *Acta Mech.*, Note 157, 235-236
- [7] Deen W.M. (1998) *Analysis of Transport Phenomena*, Cambridge University Press
- [8] Massoudi M. and Phuoc T. X. (2001) Fully developed flow of a modified second grade fluid with temperature dependent viscosity. *Acta Mech.*, 150, 23-37
- [9] Massoudi M. and Phuoc T. X. (2004) Flow of a generalized second grade non-Newtonian fluid with variable viscosity. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 16, 529-538
- [10] Walicki E. and Walicka A. (2002) Convergent flows of molten polymers modeled by generalized second-grade fluids of power-law type. *Mech. of Comp. Mat.*, 38, 1
- [11] Gupta G. and Massoudi M. (1993) Flow of a generalized second grade fluid between heated plates. *Acta Mech.*, 99, 21-33.
- [12] Novikov V. V. and Voitsekhovskii K. V. (2000) Viscoelastic properties of fractal media. *J. App. Mech. and Tech. Physics*, 41, 1.
- [13] Khan M., Nadeem S. and Hayat T. (2005) Unsteady Motions of a Generalized Second-Grade Fluid, *Mathematical and Computer Modelling*, 41
- [14] Wen-Chang Tan and Xu Ming-Yu (2002) The impulsive motion of flat plate in a generalized second grade fluid, *Mech. Res. Comm.*, 29, 3-9
- [15] Loverro A. (2004) *Fractional Calculus: History, Definitions and applications for the engineer*, Revisión: Universidad de Notre Dame, disponible en: <http://www3.nd.edu/~msen/Teaching/UnderRes/FracCalc.pdf> [2011, Agosto]
- [16] Debnath L. (2004) A brief historical introduction to fractional calculus, *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech.*, 35 (4), 487-501

- [17] Tarasov V.E (2010) *Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. NonLinear Physical Science Series, Beijing: Higher Education Press, Londres: Springer
- [18] Kamran M., Imran M. and Athar M. (2010) Exact solutions for the unsteady rotational flow of a generalized second grade fluid through a circular cylinder. *Nonlinear Analysis: Model. Control*, 15(4), 437-444
- [19] Rogers L. (1983) Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations. *J.Rheol.*, 27(4), 351-372
- [20] Miller K.S.(1993) *An introduction to fractional calculus and fractional differential equations*, Nueva York: John Wiley & Sons
- [21] Khan M., Ali S.H and Qi H.(2009) Exact solutions for some oscillating flows of a second grade fluid with a fractional derivative model. *Math. Comput. Model.* 49, 1519-1530
- [22] Ford N.J and Simpson C. (2003) The numerical solution of fractional differential equations: speed vs accuracy, Manchester Centre for Computational Mathematics, Numerical Analysis Report 385.
- [23] Heymans N. and Podlubny I. (2006). Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives. *Rheol. Acta*, 45, 765-771
- [24] Li C. and Deng W.(2007) Remarks on fractional derivatives. *App.Math.Comp.*, 187, 777-784
- [25] Walters K.(1970) Relation between Coleman-Noll, Rivlin-Ericksen, Green-Rivlin and Oldroyd Fluids. *ZAMP*, 21, 592-600
- [26] Fosdick R.L. and Rajagopal K.R.(1979) Anomalous Features in the model of Second Order Fluids, *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 70
- [27] Moshrefi-Torbati M. and Hammond K.J. (1998) Physical and Geometrical Interpretation of Fractional Operators. *J.Franklin Inst.*, 335B (6), 1077-1086
- [28] Nazar M., Fetecau C. and Awam A.U (2010) A note on the unsteady flow of a generalized second grade fluid through a circular cylinder subject to a time-dependent shear stress, *Nonlinear Analysis RWA.*, 11, 2207–2214.
- [29] Imran M., Kamran M., Athar M., Zafar A.A. (2011). Taylor-Couette flow of a fractional second grade fluid in an annulus due to a time-dependent couple. *Nonlinear Anal. Model. Control*, 16 (1), 47-58.
- [30] Drozdov A.D. (1997) Fractional differential models in finite viscoelasticity. *Acta Mech.*, 124, 155-180
- [31] Dissado L.A. and Hill R.M. (1989) Memory functions for mechanical relaxation in viscoelastic materials. *J.Mat.Sc.*, 24, 375-380

- [32] Schiessel H., Metzler R., Blument A. and Nonnenmacher T.F. (1995) Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *J.Phys.A:Math.Gen.*, 28, 6567-6584
- [33] Ai L. and Vafai K. (2005) An investigation of Stokes second problem for non-newtonian fluids. *Num.Heat Transfer*, part A, 47, 955-980
- [34] Anderson M. (2008) Microfluidics, Chromatography, and Atomic-Force Microscopy. Capillary and shear effects are exploited to transport small quantities of liquid, *NASA tech Briefs*, NOP-4143, p.25, NASA's Jet Propulsion Lab., [en línea] Disponible en: http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20090020467_2008046433.pdf [2012, Febrero]
- [35] Currie I.G.(1974) *Fundamental mechanics of Fluids*, Mc-Graw-Hill, Inc.
- [36] Barnes H.A, Hutton J.F., Walters K. (1989) *An Introduction to Rheology. Rheology Series* (1ra. Ed.), Londres: Elsevier
- [37] Truesdell C. and Noll W. (2004) *The non-linear field theories of mechanics* (3era Ed.), Nueva York: Springer-Verlag
- [38] Shen F., Tan W., Zhao Y., Masouka T.(2006) The Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative model, *Nonlinear Analysis: RWA*, 7, 1072-1080
- [39] Khan M., Shaowei Wang (2009) Flow of a generalized second-grade fluid between two side walls perpendicular to a plate with a fractional derivative model, *Nonlinear Analysis: RWA*, 10, 203-208
- [40] Drazin P.G and Riley N. (2006) *The Navier-Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*, Cambridge: University Press
- [41] Fourier J. B (1822) *Théorie analytique de la chaleur*, p. 156 [recurso en línea] disponible en: http://books.google.com.mx/books?id=1TUVAAAAQAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=snippet&q=m%C3%A0me%20exposant%20dimensions&f=false [2012, Febrero]
- [42] Podlubny I. (1999) *Fractional Differential Equations. An introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 198, San Diego California: Academic Press
- [43] Aris R. (1989) *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Nueva York: Dover Publications
- [44] Cresson J. (2007) Fractional embedding of differential operators and Lagrangian systems, *J.Math.Phys*, 48, 033504, [recurso en línea] disponible en: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2483292> [2012, Mayo]

- [45] Inizan P. (2008) Homogeneous fractional embeddings, *J.Math.Phys.*, 49(8), 082901, [recurso en línea], disponible en: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2963497> [2012, Mayo]
- [46] Fetecau C. and Fetecau Corina (2005) Starting solutions for some unsteady unidirectional flows of a second grade fluid, *Int. J. Eng. Sc.*, 43, 781-789
- [47] Momani S. and Odibat Z.M.(2007) Fractional Green function for linear time-fractional inhomogeneous partial differential equations in fluid mechanics, *J. Appl. Math. & Comp.*, Vol. 24, No. 1 - 2, pp. 167 - 178
- [48] Spiegel R.M. (1998) *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas, Series Schaum*, México: McGraw Hill/ Interamericana Editores
- [49] [Recurso en línea], disponible en: <http://mathpages.com/home/kmath616/kmath616.htm> [2012, Julio]
- [50] Shantanu Das (2011) *Functional Fractional Calculus* (2da Ed.), Berlín: Springer-Verlag.
- [51] Haberman R. (2003) *Ecuaciones en derivadas parciales* (3ra Ed.), Madrid: Pearson Education
- [52] Wolfram Mathematica Documentation Center [recurso en línea], disponible en: <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html> [2012, Enero-Julio]

Apéndice 1

Transformadas integrales y Funciones Mittag Leffler

Las funciones Mittag Leffler y su derivada se expresan de la siguiente manera:

$$E_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\lambda n + \mu)} \quad (\text{A.1.1})$$

$$E_{\lambda,\mu}^k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)! z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \lambda k + \mu)} \quad (\text{A.1.2})$$

Se presentan las transformadas de Laplace y Fourier empleadas en una de las solución de la ecuación de movimiento [42,48,50].

Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) = \cos(\omega t) \quad (\text{A.1.3})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \text{sen}(\omega t) \quad (\text{A.1.4})$$

$$\mathcal{L}^{-1}(s f(s) - F(0)) = F'(t) \quad (\text{A.1.5})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(s^\beta f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\beta-k-1} f(t=0)\right) = \frac{d^\beta}{dt^\beta} F(t) \quad (\text{A.1.6})$$

$$\mathcal{L}^{-1}(f(s)g(s)) = \int_0^t F(t)G(t-t')dt' = F(t) * G(t) \quad (\text{A.1.7})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k!s^{\lambda-\mu}}{(s^\lambda \mp c)^{k+1}}\right) = t^{\lambda k + \mu - 1} E_{\lambda,\mu}^{(k)}(\pm c t^\lambda) \quad (\text{A.1.8})$$

Transformadas seno de Fourier

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(y) \quad (\text{A.1.9})$$

donde sign es la función signo, la cual está determinada por la siguiente

$$\text{sign}(y) = \begin{cases} -1 & y < 0 \\ 1 & 0 < y \end{cases} \quad (\text{A.1.10})$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}(\xi F(\xi)) = F'(y) \quad (\text{A.1.11})$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}(-\xi f(\xi)) = F'(y) \quad (\text{A.1.12})$$

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left(-\xi^2 f(\xi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi F(0)\right) = F''(y) \quad (\text{A.1.13})$$

Apéndice 2

Procedimiento de solución de la ecuación de movimiento mediante transformadas integrales, análogo al trabajo de Khan et al [21].

A partir de la ecuación (23.4):

$$\bar{v}_x(\xi, s) = \left(\frac{1}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \left(\frac{1}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} \right) \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] \quad (\text{A.2.1})$$

Reescribiendo el factor común como:

$$\frac{1}{\xi} \left(\frac{v\xi^2}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} \right) = \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{s + \alpha\xi^2 s^\beta}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2 s^\beta} \right) \quad (\text{A.2.2})$$

Y sustituyendo en (A.2.1) se obtiene:

$$\bar{v}_x(\xi, s) = \frac{1}{\xi v} \left(1 - \frac{s + \alpha\xi^2 s^\beta}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} V \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \left(\frac{1}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} \right) \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] \quad (\text{A.2.3})$$

Si se desarrolla el denominador como:

$$\frac{1}{s + v\xi^2 + \alpha\xi^2\tau^{\beta-1}s^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}} \quad (\text{A.2.4})$$

Y se introduce en la ecuación (A.2.3):

$$\bar{v}_x(\xi, s) = \frac{1}{\xi v} \sqrt{\frac{2}{\pi}} V \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{1-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \alpha \xi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}} \right] + \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2\tau^{\beta-1})^{k+1}} \quad (\text{A.2.5})$$

Se aplica la transformada inversa de Laplace a cada término

Segundo término

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{1-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + v\xi^2 \tau^{\beta-1})^{k+1}} \right\} = \cos(\omega t) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^{n-1} E_{1-\beta, \beta k}^{(n)} (-v\xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) \quad (\text{A.2.6})$$

Tercer término

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \alpha \xi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k}}{(s^{1-\beta} + \alpha \xi^2 s^{-\beta})^{k+1}} \right\} = \cos(\omega t) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^{k-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta+\beta k}^{(k)} (-\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) \quad (\text{A.2.7})$$

Cuarto término

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \text{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k \frac{k! s^{-\beta k - \beta}}{(s^{1-\beta} + \alpha \xi^2 \tau^{\beta-1})^{k+1}} \right\} = \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\omega t) - \text{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \text{sen}(\omega t) \right] * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)} (\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) \quad (\text{A.2.8})$$

El campo de velocidades en el espacio de Fourier y la escala temporal queda:

$$v(\xi, t) = \frac{1}{\xi V} \sqrt{\frac{2}{\pi}} V \cos(\omega t) - \cos(\omega t) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^{n-1} E_{1-\beta, \beta k}^{(n)} (-v\xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) - \cos(\omega t) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^{k-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta+\beta k}^{(k)} (-\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) + \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\omega t) - \text{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \text{sen}(\omega t) \right] * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)} (\alpha \xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) \quad (\text{A.2.9})$$

Finalmente, se aplica la transformada inversa de Fourier a la ecuación (A.2.9) para obtener la nueva forma de la solución:

$$\begin{aligned}
 v(\xi, t) = & V \cos(\omega t) - \\
 & \cos(\omega t) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^{n-1} E_{1-\beta, \beta k}^{(n)}(-v\xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) - \\
 & \cos(\omega t) * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^{k-\beta} E_{1-\beta, 1-\beta+\beta k}^{(k)}(-\alpha\xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta}) + \\
 & \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi V \tau^{\beta-1} \omega^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\omega t) - \operatorname{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(\omega t) \right] * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (v\xi^2)^k t^k E_{1-\beta, 1+\beta k}^{(k)}(\alpha\xi^2 \tau^{\beta-1} t^{1-\beta})
 \end{aligned}$$

(A.2.10)