



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

(k, l) -núcleos en generalizaciones de
torneos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

PRESENTA:
ELOISA NATALIA VALDEZ RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Valdez
Apellido materno	Rodríguez
Nombre(s)	Eloisa Natalia
Teléfono	55447598
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	303815404

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dra.
Nombre(s)	Mucuy-kak del Carmen
Apellido paterno	Guevara
Apellido materno	Aguirre

5. Datos del sinodal 3

Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez

6. Datos del sinodal 4

Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez

7. Datos del trabajo escrito.

Título	(k, l) -núcleos en generalizaciones de torneos
Número de páginas	68 p.
Año	2011

A mi familia, Patricio y César.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Conceptos básicos	2
1.2. Teoremas base	4
2. Núcleos	17
2.1. Núcleos	17
3. (k, l)-Núcleos	27
3.1. Familias de digráficas con (k, l) -núcleo	27
3.2. Resultados previos	35
4. Digráficas 3-cuasitransitivas	39
4.1. Digráficas 3-cuasitransitivas	39
5. Digráficas conexas localmente semicompletas	47
5.1. Digráficas conexas localmente semicompletas	47
5.2. (k, l) -Núcleos para digráficas conexas localmente semicompletas	50
5.3. (k, l) -Núcleos para digráficas conexas localmente semicompletas lineales	54
6. Conclusiones	63
Índice alfabético	67

Capítulo 1

Introducción

El siguiente trabajo es una solución a problemas de distribución en Teoría de Gráficas, se trabajará con algunas familia de digráficas con características específicas. Estas digráficas pueden modelar una infinidad de situaciones o problemas, como la distribución de un bien en una población o un flujo eléctrico en un circuito. Se demostrará que se pueden encontrar un conjunto de puntos en la digráfica tal que se pueda asegurar que estos puntos cumplen con características predeterminadas de proximidad tanto entre los puntos seleccionados como los diferentes puntos de la digráfica. Se demostrarán en algunos casos que con agregar una condición extra dependiendo del tipo de digráfica se podrá asegurar que, no importa la proximidad o lejanía que se necesite entre dichos puntos, se podrá garantizar la existencia de ellos. Además, sin agregar condiciones se verificará a partir de que proximidad o lejanía entre los puntos mismos y los demás puntos de la digráfica se garantiza la existencia de éstos.

Comenzaremos el primer capítulo con los conceptos básicos y teoremas base de Teoría de Gráficas. En el segundo capítulo demostraremos la existencia de núcleos en algunas digráficas, de los cuales, en el tercer capítulo extenderemos algunos de esos resultados a (k, l) -núcleos y demostraremos también su existencia para otras digráficas. En el cuarto capítulo demostraremos condiciones para que digráficas 3-transitivas y 3-cuasitransitivas tengan núcleo y en el quinto capítulo demostraremos que las digráficas conexas localmente semicompletas y localmente semicompletas lineales tienen k -núcleo, para diferentes valores de k . Por último haremos un recuento de los resultados importantes en las conclusiones del capítulo 6.

1.1. Conceptos básicos

Nuestro campo de trabajo serán las digráficas, generalmente denotadas por D , que consisten en un conjunto finito no vacío de vértices $V(D)$ y un conjunto de pares ordenados de vértices (u, v) llamados flechas, $A(D)$, con vértice u distinto del vértice v , sin tener flechas repetidas o múltiples. Para una flecha (u, v) el primer vértice será llamado cola y el segundo cabeza, diremos que la flecha sale del vértice u y entra al vértice v , también podemos decir que el vértice u domina al vértice v y lo denotamos por $u \rightarrow v$, y análogamente el vértice v absorbe al vértice u . Decimos que un vértice v incide en una flecha a si v es la cola o la cabeza de a , de la misma manera la flecha a incide en el vértice v . El orden de una digráfica es la cardinalidad del conjunto de vértices, el cual siempre será finito, $|V(D)|$; el tamaño de una digráfica es la cardinalidad del conjunto de flechas, $|A(D)|$. La digráfica trivial es aquella de orden 1, y por lo tanto es un solo vértice sin flechas.



Figura 1.1: La figura D' es un ejemplo de las flechas que no se permiten en una digráfica, es decir, flechas múltiples y lazos, la figura D es la digráfica que resulta al borrar las flechas prohibidas.

El ex-grado (in-grado) de un vértice v , es el número de flechas que salen (entran) de v , y es denotado por $d^+(v)$, $(d^-(v))$. La in-vecindad de un vértice v , es el conjunto de vértices los cuales son absorbidos por v el cual generalmente es denotado por $N^-(v)$, de esta manera la ex-vecindad de un vértice v es el conjunto de vértices los cuales absorben al vértice v , que denotaremos por $N^+(v)$; en la digráfica D de la Figura 1.1 el vértice v_1 es de ex-grado 1 e in-grado 2, del cual su in-vecindad es $\{v_2, v_4\}$ y su ex-vecindad es $\{v_3\}$.

Decimos que un vértice u es adyacente a un vértice v si existe una (u, v) flecha o una (v, u) flecha en D , al tener cualquiera de las dos flechas o ambas diremos que u es adyacente a v y el vértice v es adyacente a u . Una flecha (u, v) que pertenece a $A(D)$ es llamada una S_1S_2 -flecha cuando el vértice u pertenece a S_1 y el vértice v pertenece a S_2 , donde S_1, S_2 son subconjuntos de los vértices de D .

Una digráfica H es subdigráfica de D si $V(H) \subseteq V(D)$; $A(H) \subseteq A(D)$, y cada flecha en $A(H)$ tiene a sus extremos en $V(H)$; si cada flecha de $A(D)$ con sus dos extremos en $V(H)$ está en $A(H)$, decimos que H es una subdigráfica inducida de D ; si los vértices de H son los mismos que los vértices de D decimos que H es una subdigráfica generadora. Una flecha (u, v) que pertenece a $A(D)$ es llamada asimétrica (respectivamente simétrica) si la flecha (v, u) no pertenece a $A(D)$, (respectivamente la flecha (v, u) pertenece a $A(D)$), en la digráfica D de la Figura 1.2 la v_3v_4 -flecha es simétrica con la v_4v_3 -flecha, el resto de las flechas de la digráfica son asimétricas. La parte asimétrica de una digráfica D (respectivamente parte simétrica de D), que será denotada por $Asym(D)$ (respectivamente $Sym(D)$), es la subdigráfica generadora formada a partir de las flechas asimétricas (simétricas) de D ; una digráfica D es llamada digráfica asimétrica si $Asym(D) = D$.

Un camino dirigido $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ en una digráfica D es una sucesión alternada de vértices y (x_i, x_{i+1}) flechas de D , con vértice inicial x_0 y vértice terminal x_n , también llamados extremos. Decimos que tenemos un camino dirigido cerrado cuando sus extremos son iguales, es decir, $x_0 = x_n$. Una trayectoria dirigida es un camino dirigido que no repite vértices; definimos una uv -trayectoria como una trayectoria dirigida con vértice inicial u y vértice final v . La longitud de un camino dirigido C , denotado por $\ell(C)$, es el número de flechas que recorre. Un camino dirigido generador de una digráfica D es aquel que contiene a todos los vértices de D . Un ciclo dirigido es una trayectoria dirigida (x_0, x_1, \dots, x_n) unión la flecha (x_n, x_0) , $n \geq 1$, cuando una digráfica no contiene ciclos decimos que es acíclica. Si tenemos un camino $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, entonces x_iCx_j , con $i < j$, denotará al subcamino dirigido de C , $x_iCx_j = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$; por comodidad nos referiremos a las definiciones anteriores sólo como caminos, trayectorias y ciclos. Sea D una digráfica y x_1, x_2, \dots, x_n una etiquetación de los vértices de D , se llama una etiquetación acíclica si para toda x_ix_j -flecha en D tenemos que $i < j$.

Una cuerda de un ciclo, llamémosle C , que pertenece a una digráfica D , es una flecha (i, j) que esta en $A(D) - A(C)$ tal que $1 < \ell(iCj) < \ell(C) - 1$ con $i, i + 1, \dots, j$ que pertenecen a $V(C)$; un polo de un ciclo C en D es el vértice terminal de una cuerda (i, j) de C , en la digráfica H' de la Figura 1.2 una cuerda del ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$ es la v_4v_2 -flecha. Cuando dos vértices estan unidos por una flecha que pertenece a un ciclo C diremos que son consecutivos en C . La unión de caminos, trayectorias, conjuntos, etc., será denotada por \cup , y la diferencia será denotada por \setminus . La distancia de u a v en una digráfica D es la longitud de la uv -trayectoria dirigida más corta, y se denota por $d(u, v)$, cuando no existe tal trayectoria en D decimos que la distancia es infinita. Entre las distancias de cualquier pareja de vértices distintos de D , el valor mayor es definido como el diámetro de la digráfica, denotado por $diam(D)$, de esta manera el diámetro de una digráfica puede ser infinito.

La digráfica dual de una digráfica D , denotada por \overleftarrow{D} , es la digráfica obtenida al cambiar de dirección todas las flechas de D . Sea H una subdigráfica de D , la contracción de H en D es una digráfica $D \setminus H$ con $V(D \setminus H) = \{h\} \cup \{V(D) - V(H)\}$, donde h es un vértice nuevo que no está en D , las flechas de x a otro vértice y en $D \setminus H$ son las mismas que en D , la flecha de x a h está en $D \setminus H$ si existe una flecha de x a v en D con v en H , del mismo modo la flecha de h a y está en $D \setminus H$ si la flecha de v a y está en D y v pertenece a H , para todo par de vértices distintos x, y en $V(D) - V(H)$. La contracción para conjuntos de vértices puede verse con la definición anterior como una subdigráfica que no contiene flechas la cual se convierte en un solo vértice.

1.2. Teoremas base

A continuación demostraremos teoremas sencillos pero básicos, los cuales estaremos usando como constante referencia a lo largo de este trabajo.

Proposición 1.2.1. *Si una digráfica D tiene un uv -camino, digamos T , con el vértice u distinto del vértice v entonces D tiene una uv -trayectoria.*

Demostración. La Proposición será demostrada por inducción sobre la longitud del camino T .

Sea la longitud del camino T igual a 1, como es un uv -camino implica que

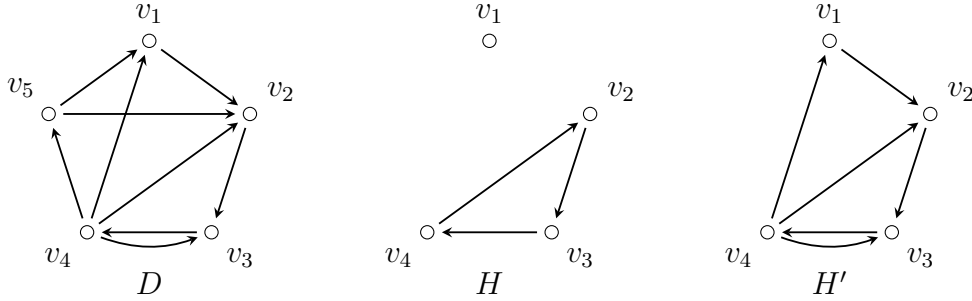


Figura 1.2: Una digráfica D , subdigráfica H de D y subdigráfica inducida H' de D .

$T = (u, v)$, es decir, que el camino es una uv -flecha y como u, v son vértices distintos, tenemos que es una uv -trayectoria.

Supongamos el resultado válido para $\ell(T) < n$, y lo demostraremos para $\ell(T) = n$.

Sea $T = (u, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, v)$ un uv -camino en D , si $x_i \neq x_j$ para toda $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ implicaría que el camino T es una uv -trayectoria. En otro caso tenemos que $x_i = x_j$ para alguna $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Sea $T_1 = x_i T x_j$ y consideremos el uv -camino $T_2 = (u T x_i) \cup (x_j T v)$, como $\ell(T_1) \geq 2$ eso implica que $\ell(T_2) < n$ y por hipótesis inductiva T_2 contiene una uv -trayectoria. ■

Proposición 1.2.2. *Sea una digráfica D que contiene un camino cerrado C que pasa por el vértice u entonces D contiene un ciclo que pasa por el vértice u .*

Demostración. La Proposición será demostrada por inducción sobre la longitud del camino cerrado C .

Como C es un camino cerrado tenemos que su longitud es al menos dos, si $\ell(C) = 2$, $C = (x_1, u, x_1)$, claramente C sólo repite x_1 , y por lo tanto C es un ciclo que pasa por u .

Supongamos el resultado válido para $\ell(C) < n$. Por demostrar para $\ell(C) = n$.

Sea $C = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ camino cerrado tal que $x_i = u$ para alguna i que esta entre $\{1, 2, \dots, n\}$ con $\ell(C) = n$. Si no existe $x_i \in C$ tal que $x_i = x_j$ para algunas $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$; entonces C es un ciclo que pasa por u .

De otra manera tomamos $x_i = x_j$ para alguna $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$ el

primer vértice que se repite en C , y por lo tanto $C_1 = x_i C x_j$ es un ciclo, si $u \in C_1$, entonces C_1 es un ciclo que pasa por u . Si $u \notin C_1$, hacemos $C_2 = (x_1 C x_i) \cup (x_j C x_1)$ y como $\ell(C_1) \geq 2$ tenemos que $\ell(C_2) < n$ y por hipótesis inductiva C_2 contiene un ciclo que pasa por el vértice u . ■

Cuando trabajamos con digráficas acíclicas el siguiente teorema es bastante útil ya que a partir de un vértice de ex-grado o in-grado cero podremos construir o encontrar diferentes estructuras en nuestra digráfica.

Proposición 1.2.3. *Toda digráfica acíclica D tiene al menos un vértice x tal que su ex-grado es igual a cero.*

Demostración. Supongamos que no existe un vértice x en D tal que $d^+(x) = 0$. Tomamos una trayectoria $T = (x_0, x_1, \dots, x_t)$ de longitud máxima en D , por hipótesis sabemos que $d^+(x_t) \neq 0$, lo que implica que existe una $x_t v$ -flecha para algún vértice v en D , observemos que el vértice v no puede pertenecer a T , es decir que $v = x_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ ya que de otra manera podemos construir $C = x_i T x_t \cup \{v\}$ el cual es un ciclo de D , lo cual no puede suceder ya que D es acíclica. Hacemos entonces $T' = (x_0, x_1, \dots, x_t, v)$ una nueva trayectoria de D , pero $\ell(T') = \ell(T) + 1$ lo cual es una contradicción ya que elegimos a T como una trayectoria de longitud máxima de D . Por lo tanto existe al menos un vértice x_t en D tal que su ex-grado es igual a cero. ■

Corolario 1.2.4. *Toda digráfica acíclica D tiene al menos un vértice x tal que su in-grado es cero.*

Demostración. Consideremos la digráfica dual \overleftarrow{D} de D , observemos que \overleftarrow{D} es acíclica, por la Proposición 1.2.3 \overleftarrow{D} tiene un vértice x tal que su ex-grado es igual a cero, lo que implica que en la digráfica original D , el vértice x es de in-grado cero. ■

Teorema 1.2.5. *Toda subdigráfica de una digráfica acíclica es acíclica.*

Demostración. Sea D una digráfica acíclica, consideramos H subdigráfica de D . Supongamos que existe un C ciclo en H , como H es subdigráfica, por definición C está en D , lo cual no puede suceder, por lo tanto H es acíclica. ■

Teorema 1.2.6. *Todo camino dirigido cerrado C con longitud no congruente a 0 módulo k contiene un ciclo dirigido de longitud no congruente a 0 módulo k .*

Demostración. El Teorema será demostrado por inducción sobre la longitud del camino cerrado C .

Caso 1: Si tenemos que $k = 2$, entonces $\ell(C) = 3$ ya que $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ por hipótesis, de esta manera $C = (x_1, x_2, x_3, x_1)$ con $x_i \neq x_j$ para toda $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$, ya que si $x_i = x_j$ para alguna $i, j \in \{1, 2, 3\}$, tendríamos que C o no es un camino cerrado o $\ell(C) \neq 3$, por lo tanto $x_i \neq x_j$ para todo vértice en C y por lo tanto C es un ciclo con $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$.

Caso 2: $k \neq 2$. Entonces $\ell(C) = 2$. Claramente C es ciclo y $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, y por lo tanto C es el ciclo que buscamos.

Supongamos el resultado válido para $\ell(C) = m < n$. Por demostrar para $\ell(C) = n$.

Sea $C = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un camino dirigido cerrado de $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, con $\ell(C) = n$, si no existe x en C tal que $x = x_i = x_j$ para alguna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces C es el ciclo que buscamos.

De lo contrario tomamos x_i el primer vértice que se repite en C , sea $C_1 = x_i C x_i$ ciclo dirigido.

Si $\ell(C_1) \not\equiv 0 \pmod{k}$, C_1 es el ciclo buscado.

Si $\ell(C_1) \equiv 0 \pmod{k}$, tenemos que $x_i = x_j = x_l$ para alguna $j < l$, entonces hacemos un nuevo camino dirigido cerrado $C_2 = (x_1 C x_j) \cup (x_l C x_n)$, como $\ell(C) = \ell(C_1) + \ell(C_2)$ y tenemos que $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$ y $\ell(C_1) \equiv 0 \pmod{k}$, entonces podemos observar que $\ell(C_2) \not\equiv 0 \pmod{k}$, con $\ell(C_2) < n$, entonces por hipótesis inductiva C_2 contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$.

■

Una gráfica, que generalmente denotaremos por G es un par ordenado $(V(G), E(G))$, que consiste en un conjunto $V(G)$ de vértices y un conjunto $E(G)$ de parejas no ordenadas de vértices distintos de G . Para las gráficas definimos análogamente los conceptos anteriores con la observación de que no serán dirigidos en G . Una gráfica de líneas de G , denotada por $L(G)$, es la gráfica que tiene como vértices a las aristas de G , los cuales son adyacentes si tienen como aristas un vértice en común en G .

Si T_1, T_2 son trayectorias distintas de G y sólo inciden en un extremo común, entonces decimos que T_1 y T_2 son trayectorias adyacentes. La gráfica de

trayectorias de una gráfica G es la gráfica $T(G) = (V(T(G)), E(T(G)))$, cuyo conjunto de vértices es el conjunto de trayectorias de G cuya longitud es al menos uno y para h, k vértices de $V(T(G))$, la arista (h, k) está en $E(T(G))$ si y sólo si son trayectorias adyacentes en G . Denotamos la trayectoria $h = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ y el vértice h de $V(T(G))$ por el mismo símbolo.

Una digráfica D es unilateralmente conexa si para todo par de vértices u, v en $V(D)$, tenemos que existe un uv -camino o un vu -camino; decimos que es fuertemente conexa cuando para todo par de vértices u, v en $V(D)$, existe un uv -camino. Para una digráfica fuertemente conexa $D = (V, A)$, un subconjunto S de V es un conjunto separador si $D - S$ no es fuertemente conexa.

Una componente fuertemente conexa de D es una subdigráfica inducida máxima de D la cual es fuertemente conexa. Tenemos que $V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_t) = V(D)$ con D_i componente fuertemente conexa, y $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$ para toda $i \neq j$; cuando a una componente D_i no le entran flechas de ninguna otra componente D_j decimos que es una componente inicial, de la misma manera cuando no le salen hacia ninguna otra componente decimos que es una componente terminal. Observemos que una digráfica con sólo un vértice es fuertemente conexa. La digráfica de condensación o de componentes fuertemente conexas de D es obtenida al contraer las componentes fuertemente conexas de D y borrando todas las flechas paralelas obtenidas. La subdigráfica inducida por los vértices de un ciclo de D es fuertemente conexa y por lo tanto está contenida en una componente fuertemente conexa, entonces se deduce que la digráfica de condensación es acíclica, con al menos una componente inicial y una componte terminal.

Teorema 1.2.7. *Todo vértice v de una digráfica D tiene una trayectoria a una componente terminal de D .*

Demostración. Sea D digráfica y S_1, S_2, \dots, S_t componentes fuertemente conexas de D . Sea v en S_i si S_i es una componente terminal, entonces el vértice es la trayectoria. Si S_i no es una componente terminal, sabemos existe una $S_i S_{i+1}$ -flecha para alguna otra componente, si S_{i+1} no es componente terminal sabemos existe una flecha hacia otra componente; como la digráfica de condensación es acíclica implica que las flechas entre componentes llevan una sola dirección, además como la digráfica es finita sabemos que encontraremos una componente S_{t-1} la cual tendrá una flecha hacia S_t componente terminal.

Supongamos entonces que tenemos las $S_i S_{i+1}$ -flechas para $i = 1, \dots, t-1$, con S_t componente terminal. Sean $v_{i_2}, v_{i+1_1}, v_{i+1_2}, \dots, v_{t-1_1}, v_{t-1_2}, v_{t_1}$, los vértices de D tal que tenemos la $v_{j_2} v_{j+1_1}$ -flecha, con v_{j_2} en S_j y v_{j+1_1} en S_{j+1} , para $j = i, i+1, \dots, t-1$. Como entre cualquier par de vértices de la misma componente conexa existe una trayectoria entre ellos, hacemos: vv_{i_2} -trayectoria = T_i , $v_{i+1_1} v_{i+1_2}$ -trayectoria = T_{i+1} , ..., $v_{t-1_1} v_{t-1_2}$ -trayectoria = T_{t-1} . Construimos $T = vT_i v_{i_2} v_{i+1_1} T_{i+1} v_{i+1_2} \dots v_{t-1_1} T_{t-1} v_{t-1_2} v_{t_1}$ una vv_{t_1} -trayectoria con v_{t_1} que pertenece a una componente terminal de D . ■

Teorema 1.2.8. *Sea una digráfica D fuertemente conexa no trivial, entonces D tiene al menos un ciclo.*

Demostración. Sean $u, v \in V(D)$, como D es fuertemente conexa entonces sabemos que existe un uv -camino y un vu -camino. Por la proposición 1.2.1 sabemos que ese uv -camino contiene una uv -trayectoria, digamos T_1 y análogamente también tiene una vu -trayectoria = T_2 . Consideramos $C = T_1 \cup T_2$, el cual es un camino dirigido cerrado, y por la Proposición 1.2.2 tenemos que C contiene un ciclo. ■

Una digráfica D es p -partita si existe una partición V_1, V_2, \dots, V_p de los vértices de D , con $V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq p$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, para $1 \leq i < j \leq p$ y $\bigcup_{i=1}^p V_i = V(D)$, y para toda flecha la cabeza y la cola están en diferentes conjuntos de la partición, cuando $p = 2$ decimos que la digráfica es bipartita. Decimos entonces que una digráfica D es cíclicamente k -partita si existe una partición de $V(D)$, $V(D) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ en k conjuntos independientes, es decir, para cualquier par de vértices en el mismo conjunto no existe una flecha entre ellos, y tenemos que toda flecha de D es de la forma $V_i V_{i+1} \pmod{k}$.

Una digráfica D de orden n es redonda si podemos etiquetar a los vértices v_1, v_2, \dots, v_n tal que para cada v_i tenemos $N^+(v_i) = \{v_{i+1}, \dots, v_{i+d^+(v)}\}$ y $N^-(v_i) = \{v_{i-d^-(v_i)}, \dots, v_{i-1}\}$ módulo n ; nos referiremos a esta manera de etiquetar a los vértices como una etiquetación redonda.

Teorema 1.2.9. *Si D es fuertemente conexa entonces todo ciclo dirigido tiene longitud equivalente a 0 módulo k si y sólo si D es cíclicamente k -partita.*

Demostración. Sea $v \in V(D)$, hacemos una partición basándonos en las distancias de los demás vértices respecto a v , es decir, $V_i = \{u \in V(D) | d(v, u) \equiv i \pmod{k}\}$, para $0 \leq i \leq k-1$.

Por hipótesis todo ciclo dirigido es de longitud congruente a 0 módulo k , y sabemos que existe al menos un vértice x tal que $d(v, x) = k-1$, pues D es fuertemente conexa, lo que implica que al menos tenemos un ciclo dirigido en D , teniendo así que el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ es un sistema completo de representantes módulo k .

Supongamos que existe $u \in V(D)$ tal que $u \in V_i \cap V_j$ para alguna i, j .

Por construcción de V_i, V_j tenemos que existe C_1 un vu -camino dirigido de longitud $\equiv i \pmod{k}$ y C_2 un vu -camino dirigido de longitud $\equiv j \pmod{k}$. Sabemos que existe un uv -camino dirigido, digamos T , por ser D fuertemente conexa.

Por el Teorema 1.2.6 todo camino dirigido cerrado de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ contiene un ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$.

Pero $C_1 \cup T$ y $C_2 \cup T$ son caminos dirigidos cerrados, y por la observación anterior tenemos que: $\ell(C_1 \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ y $\ell(C_2 \cup T) \equiv 0 \pmod{k}$ de otra forma D tendría un ciclo de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ lo cual no puede suceder por hipótesis. Entonces $\ell(C_1 \cup T) = \ell(C_1) + \ell(T) \equiv i + \ell(T) \equiv 0 \pmod{k}$, de lo cual se sigue que $\ell(T) \equiv -i \pmod{k}$.

Análogamente, $\ell(T) \equiv -j \pmod{k}$ y por lo tanto $-i \equiv -j \pmod{k}$ entonces $i \equiv j \pmod{k}$ lo cual implica que $i = j$.

Si $V_i = \emptyset$ para algún $0 \leq i \leq k-1$ implicaría que D sería acíclica lo cual no puede ocurrir por el Teorema 1.2.8 pues D es fuertemente conexa y por lo tanto tenemos que $V_i \neq \emptyset$ para toda $0 \leq i \leq k-1$.

Como D es fuertemente conexa, tenemos que para cada $u \in V(D)$, existe una vu -trayectoria dirigida. Y por construcción tenemos que $d(v, u) \equiv i \pmod{k}$

para algún $0 \leq i \leq k-1$, y por lo tanto se puede ver que $\bigcup_{i=0}^{k-1} V_i = V(D)$.

Sea $(u, w) \in A(D)$, como $\{V_i\}_{i=0}^{k-1}$ es una partición, supongamos entonces que $u \in V_i, w \in V_j$, para algunos $0 \leq i, j \leq k-1$. Por ser D fuertemente conexa, podemos afirmar que existe un wv -camino dirigido, llámémosle C , y como $u \in V_i$, se sigue que existe un vu -camino dirigido, digamos T_1 con $\ell(T_1) \equiv i \pmod{k}$, y como $w \in V_j$ entonces existe también un vw -camino dirigido, digamos T_2 , con $\ell(T_2) \equiv j \pmod{k}$. Observemos que $T_1 \cup (u, w) \cup C$ es un camino dirigido cerrado entonces se puede afirmar que $\ell(T_1 \cup (u, w) \cup C) \equiv 0 \pmod{k}$; y como cualquier flecha es de longitud 1 y

conocemos la equivalencia de la longitud de la T_1 trayectoria sustituyendo en la ecuación tenemos que $\ell(T_1) + 1 + \ell(C) \equiv (i + 1) + \ell(C) \equiv 0 \pmod{k}$, así despejando podemos ver que $\ell(C) \equiv -(i + 1) \pmod{k}$.

Por otro lado como $C \cup T_2$ es un camino dirigido cerrado se puede ver que $\ell(C \cup T_2) \equiv 0 \pmod{k}$ entonces se sigue que $\ell(C) + \ell(T_2) \equiv 0 \pmod{k}$, y como tenemos la equivalencia de la longitud de T_2 podemos sustituir en la ecuación lo que nos da que $\ell(C) + j \equiv 0 \pmod{k}$, así despejando y sustituyendo lo de la ecuación anterior se sigue que $\ell(C) \equiv (-j) \equiv -(i + 1) \pmod{k}$, lo cual es igual a $j \equiv i + 1 \pmod{k}$, y por lo tanto $j = i + 1$.

Por lo tanto cualquier flecha (u, w) en D es de la forma $V_i V_{i+1}$, queda demostrado que D es cíclicamente k -partita si D es fuertemente conexa y todo ciclo dirigido tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$.

Sea D cíclicamente k -partita, con V_1, V_2, \dots, V_k partición. Todo ciclo dirigido empieza y acaba en un mismo vértice, y por lo tanto en una misma clase de la partición, como D es cíclicamente k -partita, las flechas son de la forma $V_i V_{i+1} \pmod{k}$ entonces la única manera de regresar a la misma clase de la partición es recorrer las otras $k - 1$ clases de la partición y por lo tanto la longitud de todo ciclo de D es múltiplo de k . ■

Corolario 1.2.10. *Sea D una digráfica fuertemente conexa, D es bipartita si y sólo si D no contiene un ciclo impar.*

Demostración. Sea D una digráfica fuertemente conexa, si D es bipartita entonces es fácil ver que D no contiene un ciclo impar ya que si lo tuviera implicaría que un vértice de D está en los dos conjuntos de la partición lo cual no puede suceder. Si D no contiene un ciclo impar, por el Teorema 1.2.9 D es cíclicamente 2-partita, y por lo tanto D es bipartita. ■

Una orientación de una digráfica D es una subdigráfica de D obtenida a partir de ella al borrar exactamente una flecha entre el vértice x y el vértice y , para cada par de vértices con distintos tales que tenemos tanto la flecha (x, y) como la flecha (y, x) en D . Una digráfica D es completa si para cada par de vértices distintos x, y de D , la flecha (x, y) y la flecha (y, x) están en D .

Una biorientación de una gráfica G es una digráfica D obtenida a partir de G reemplazando cada arista (x, y) de la gráfica G por la flecha (x, y) o la flecha (y, x) o ambas; una orientación de G es reemplazar cada arista de G por sólo una flecha. Recíprocamente, dada una digráfica D , existe una única

gráfica $UG(D)$ tal que $V(UG(D)) = V(D)$ y tal que $uv \in E(UG(D))$ si y sólo si $(u, v) \in A(D)$ o $(v, u) \in A(D)$; a $UG(D)$ se le conoce como la gráfica subyacente de D . Una gráfica completa G es aquella que para todo par de vértices distintos de G , son adyacentes. Una digráfica semicompleta es una biorientación de una gráfica completa. Una biorientación completa de una gráfica G , denotada por $\overset{\leftrightarrow}{G}$, es una biorientación D de G tal que si la flecha (x, y) está en $A(D)$ implica que la flecha (y, x) está en $A(D)$. Decimos que una gráfica G es conexa cuando la biorientación de G es fuertemente conexa. Una arista e de G es puente cuando $G - \{e\}$ no es conexa.

Teorema 1.2.11. *Sea D una digráfica fuertemente conexa tal que $UG(D)$ no tiene puentes, entonces D tiene una orientación fuertemente conexa.*

Demostración. Sea D fuertemente conexa con (x, y) flecha simétrica. Sea $D' = D - \{(x, y), (y, x)\}$, si D' es fuertemente conexa entonces $D - (x, y)$ y $D - (y, x)$ son fuertemente conexas. Si no, como $xy \in E(UG(D))$ no es un puente, entonces D' es conexa y por lo tanto su condensación también es conexa. Como D es fuertemente conexa, la condensación de D' tiene una única componente inicial S_i y una única componente terminal S_t , de otra manera, $D = D' + \{(x, y), (y, x)\}$ no sería fuertemente conexa, contradiciendo nuestra hipótesis. Además, sin pérdida de generalidad, necesariamente $y \in V(S_i)$ y $x \in V(S_t)$, de otra manera, D no sería fuertemente conexa. Pero por el Lema 1.2.7, existe una yx -trayectoria en D' , por lo tanto, $D - \{(y, x)\}$ es una orientación fuertemente conexa de D . Si (x, y) era la única flecha simétrica de D , ya terminamos. De otro modo, podemos usar un razonamiento inductivo para terminar la demostración. ■

Como el teorema anterior habla de una digráfica D tal que su gráfica subyacente no tiene puentes el siguiente corolario es inmediato.

Corolario 1.2.12. *Toda digráfica semicompleta D fuertemente conexa tiene una orientación fuertemente conexa.*

Una digráfica D es localmente interior(exterior) semicompleta si para todo vértice v de D , la in-vecindad (ex-vecindad) de v induce una digráfica semicompleta, por comodidad llamaremos a D una digráfica local-in(local-out). De esta manera una digráfica D es localmente semicompleta si es tanto local-in como local-out semicompleta. Una digráfica D es local-in (local-out) semicompleta lineal, si para todo par de vértices adyacentes x, y , cada vértice

en la in-vecindad (ex-vecindad) de x y cada vértice en la in-vecindad (ex-vecindad) de y , o son adyacentes o son el mismo vértice. Una digráfica es localmente semicompleta lineal si para todo par de vértices adyacentes x, y , todo in-vecino z de x es adyacente a cada in-vecino w de y , ($z \neq w$), y cada ex-vecino u de x es adyacente a cada ex-vecino v de y , ($u \neq v$).

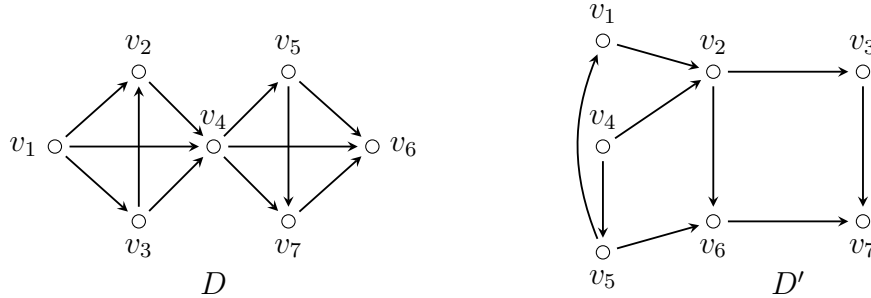


Figura 1.3: Una digráfica D localmente semicompleta y una digráfica D' localmente semicompleta lineal.

Una digráfica D es llamada torneo cuando para todo par de vértices u, v , tenemos que u, v son adyacentes con exactamente una flecha entre ellos, el cual puede ser también definido como una orientación de una gráfica completa. Una digráfica localmente semicompleta que no tiene 2-ciclos la definiremos como torneo local.

Teorema 1.2.13. *Todo torneo T , tiene una trayectoria generadora.*

Demostración. Demostraremos el Teorema por inducción sobre n .

Si $n = 2$, entonces por ser torneo, sabemos que los vértices v_1, v_2 en T son adyacentes, así que supongamos sin pérdida de generalidad que existe la flecha (v_1, v_2) y por lo tanto tenemos una trayectoria generadora $C = (v_1, v_2)$.

Supongamos el resultado válido para toda $k < n$, y sea T un torneo con n vértices, consideramos $T_1 = T \setminus \{v\}$ para algún vértice v de T . Sabemos por hipótesis inductiva que T_1 tiene una trayectoria generadora, $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$. Nos fijamos en las flechas incidentes en v de T . Si para v_0 tenemos una flecha (v, v_0) , hacemos $C_1 = ((v, v_0) \cup C)$, el cual es trayectoria generadora de T . Supongamos entonces que tenemos la flecha (v_0, v) , verificamos las adyacencias de los siguientes vértices de acuerdo al orden de aparición en C y para el primer vértice $v_i \in C$ tal que tenemos una flecha

(v, v_i) , hacemos el camino $C_2 = (v_0 C v_{i-1} \cup (v_{i-1}, v) \cup (v, v_i) \cup v_i C v_{n-1})$, el cual es una trayectoria generadora de T . Si para todo $v_i \in C$ tenemos que la flecha es (v_i, v) , hacemos $C_3 = C \cup (v_{n-1}, v)$, trayectoria generadora de T . Y por lo tanto todo torneo T tiene una trayectoria generadora. ■

Teorema 1.2.14. *Sea T un torneo fuertemente conexo de orden $n \geq 3$. Para todo vértice x de T y para todo entero $k = 3, 4, \dots, n$, existe un k -ciclo en T que contiene al vértice x .*

Demostración. Sea x un vértice de un torneo T fuertemente conexo con $n \geq 3$. Probaremos el resultado por inducción sobre k .

Como T es fuertemente conexo tenemos que $N^+(x) = O$ y $N^-(x) = I$ son no vacíos, de lo cual por ser T torneo fuertemente conexo sabemos que existe un vértice $y \in O$ y $z \in I$ tal que hay una yz -flecha; construimos $C = (x, y, z, x)$ 3-ciclo de T que contiene a x .

Sea $C = (x_0, x_1, \dots, x_t)$ un ciclo en T con $x = x_0 = x_t$ para $t = 3, 4, \dots, n - 1$. Probaremos que T tiene un $(t + 1)$ -ciclo que pasa por x . Si existe un vértice y en $V(T) - V(C)$ tal que domina a un vértice en C y es dominado por un vértice en C , entonces es fácil ver que existe un subíndice i tal que $x_i \rightarrow y$, y también $y \rightarrow x_{i+1}$, de lo cual construimos $C' = x_0 C x_i y x_{i+1} C x_t$ un $(t + 1)$ -ciclo de T que contiene a x . Por lo tanto podemos asumir que todo vértice que no esta en C o domina a todo vértice en C o es dominado por todo vértice de C . Construimos dos subconjuntos, R formado por todos los vértices de $V(T) - V(C)$ que dominan a $V(C)$ y S formado por el resto. Como T es fuertemente conexo tanto S como R son no vacíos y además existe al menos una sr -flecha con s en S y el vértice r que pertenece a R , hacemos $C' = x_0 s r x_2 C x_t$ un $(t + 1)$ -ciclo de T que contiene a x . ■

Corolario 1.2.15. *Sea D una digráfica semicompleta fuertemente conexa de orden $n \geq 3$. Para todo vértice x de D y para todo entero $k = 3, 4, \dots, n$, existe un k -ciclo en D que contiene al vértice x .*

Demostración. Sea D digráfica semicompleta fuertemente conexa de orden $n \geq 3$, por el Corolario 1.2.12 D tiene una orientación fuertemente conexa, digamos D' , observemos que D' es un torneo, ya que entre cualesquiera par de vértices de D existe exactamente una flecha, entonces por el Teorema 1.2.14 tenemos que para todo vértice en D' y para todo entero $k = 3, 4, \dots, n$, existe un k -ciclo en D' que contiene a x . Como D' es subdigráfica generadora de D , entonces tenemos que para todo vértice x de D y $k = 3, 4, \dots, n$, existe un k -ciclo en D que contiene a x . ■

El ex-grado mínimo de una digráfica D , denotado por $\delta^+(D)$, es el mínimo valor de los ex-grados de los vértices de D , es decir, $\delta^+(D) = d^+(v)$ tal que $d^+(v) \leq d^+(x)$ para todo vértice x de D . A continuación demostraremos un resultado que nos servirá más adelante para probar la existencia de k -núcleos en torneos redondos fuertemente conexos.

Lema 1.2.16. *Si R es un torneo local redondo de orden α con $\delta^+(R) = k$ entonces $\text{diam}(R) \leq \lfloor \frac{\alpha}{k} \rfloor$.*

Demostración. Sea R torneo local redondo de orden α con etiquetación redonda $v_1, v_2, \dots, v_\alpha$. Como $\delta^+(R) = k$, sabemos que al menos tenemos la $v_1 v_{1+k}$ -flecha, por ser R redonda. Por el mismo razonamiento tenemos la $v_{1+k} v_{1+2k}$ -flecha, y en general las flechas de la forma $(v_{1+jk}, v_{1+(j+1)k})$ con $j = 0, 1, \dots, i-1$. Sea v_{1+ik} vértice de R tal que no existe $v_{1+(i+1)k}$ vértice con tal subíndice, lo que implica que $\alpha - (i+1)k \leq k$, y por $\delta^+(R)$ tenemos la $v_{1+ik} v_\alpha$ -flecha. Lo que implica que se necesitan a lo más $i+1$ flechas para llegar de v_1 a α , lo que implica que $d(v_1, v_\alpha) \leq i$, donde i es el mayor entero para el cual ik cabe en α , es decir, $\lfloor \frac{\alpha}{k} \rfloor = i$, como v_1, v_α fueron tomados lo más alejados posible, tenemos que $\text{diam}(R) \leq \lfloor \frac{\alpha}{k} \rfloor$. ■

Corolario 1.2.17. *Si R es un torneo local redondo de orden α con $\delta^-(R) = k$ entonces $\text{diam}(R) \leq \lfloor \frac{\alpha}{k} \rfloor$.*

Demostración. Basta considerar la digráfica dual de R y aplicar el Lema 1.2.16. ■

Definimos ahora algunas operaciones entre digráficas:

- Una composición de una digráfica D con vértices $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, con G_1, G_2, \dots, G_n digráficas ajenas por vértices dos a dos, denotada por $D[G_1, G_2, \dots, G_n]$, como la digráfica L con conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_n)$ y conjunto de flechas $\left(\bigcup_{i=1}^n A(G_i) \right) \cup \{(g_i, g_j) | g_i \in V(G_i), g_j \in V(G_j), (v_i, v_j) \in A(D)\}$, observemos que en la composición de dos digráficas, $D_2[D_1]$, D_1 funcionará como las G_i 's digráficas de la definición anterior.
- El producto cartesiano o producto cuadro de dos digráficas D_1, D_2 es la digráfica denotada por $D_1 \square D_2$, la cual tiene por conjunto de vértices

al producto del conjunto de vértices de D_1 por el conjunto de vértices de D_2 , y conjunto de flechas $A(D_1 \square D_2) = \{((x', y'), (x, y))\}$, con flecha (x', x) de D_1 y la condición $y' = y$ o flecha (y', y) de D_2 y la condición $x' = x$.

- El producto normal o producto fuerte de dos digráficas, D_1, D_2 , denotada como la digráfica $D_1 \boxtimes D_2$, con conjunto de vértices $V(D_1 \boxtimes D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$, y la flecha $((x', y'), (x, y))$ pertenece al conjunto de flechas $A(D_1 \boxtimes D_2)$ si y sólo si la flecha (x', x) pertenece a $A(D_1)$ y se cumple la condición de que $y' = y$, ó la flecha (y', y) pertenece a $A(D_2)$ y se cumple que $x' = x$, o la flecha (x', x) pertenece a $A(D_1)$ y la flecha (y', y) pertenece a $A(D_2)$.
- El producto tache de dos digráficas D_1, D_2 , como la digráfica denotada por $D_1 \times D_2$, con conjunto de vértices $V(D_1) \times V(D_2)$, y la flecha $((x', y'), (x, y))$ pertenece a $A(D_1 \times D_2)$ si se cumple que la flecha (x', x) pertenece a $A(D_1)$ y la flecha (y', y) pertenece a $A(D_2)$.
- El producto débil de dos digráficas, D_1, D_2 , es la digráfica denotada por $D_1 \vee D_2$, con conjunto de vértices $V(D_1 \vee D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$, y la flecha $((x', y'), (x, y))$ pertenece a $A(D_1 \vee D_2)$ si se cumple que la flecha (x', x) pertenece a $A(D_1)$ y la flecha (y', y) no pertenece a $A(D_2)$, o se cumple que la flecha (x', x) no pertenece a $A(D_1)$ y la flecha (y', y) pertenece a $A(D_2)$.

Cuando tenemos una expresión de la forma $D_1 \diamond D_2 \diamond D_3 \diamond \dots \diamond D_n$, decimos que denota el producto de n digráficas definidas como $D_1 \diamond \dots \diamond D_n = (D_1 \diamond \dots \diamond D_{n-1}) \diamond D_n$, donde \diamond se refiere a algunas de las operaciones antes mencionadas: $[]$, \times , \vee , \square , \boxtimes .

Sea una digráfica D de orden n , definimos la digráfica extendida como la composición de D con n conjuntos de vértices independientes, cuando tenemos un ciclo extendido las etiquetas se toman módulo k ; esto es, tenemos que las flechas son de la forma $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_k \rightarrow V_1$ y no hay más flechas en este ciclo extendido. Observemos que el ciclo extendido es cíclicamente k -partito.

Capítulo 2

Núcleos

2.1. Núcleos

Un conjunto de vértices Q es independiente o estable en D si para todo par de vértices $x, y \in Q$, x no es adyacente a y en D . Un conjunto de vértices P es absorbente en D si para todo vértice x que no pertenece a P , existe un vértice y que pertenece a P tal que existe la xy -flecha en D .

Decimos que una digráfica D tiene núcleo N cuando existe un subconjunto $N \subset V(D)$ que es tanto independiente como absorbente. Una digráfica D es núcleo perfecta si para cada subgráfica inducida H de D , H tiene núcleo; una digráfica es núcleo imperfecta si no es núcleo perfecta, decimos que una digráfica D es núcleo imperfecta crítica si D es núcleo imperfecta pero toda subdigráfica inducida propia de D es núcleo perfecta. Un seminúcleo de D es un subconjunto $S \subset V(D)$ que es independiente y cumple que si tenemos una flecha del conjunto S hacia algún vértice x en $V(D)$ denotada por (S, x) entonces existe una flecha del vértice al conjunto S , (x, S) .

Teorema 2.1.1. *Toda trayectoria T tiene un único núcleo.*

Demostración. El Teorema será demostrado por inducción sobre la longitud de la trayectoria T .

Si $\ell(T) = 1$ entonces $T = (u, v)$ y se puede ver que $N = \{v\}$ es el único núcleo de T , ya que es independiente por ser un solo vértice, y absorbe a otro vértice de la gráfica u , por la uv -flecha.

Supongamos el resultado válido para $\ell(T) < k$. Sea $T = v_0, v_1, \dots, v_k$, consideramos $T' = v_1 T v_k$, como $\ell(T) < k$ ya que le quitamos un vértice a T ,

tenemos por hipótesis inductiva que T' tiene un único núcleo digamos N . Sea v_i el primer vértice que aparece en T' tal que v_i pertenece a N ; si $v_i = v_1$ entonces N es núcleo único de T ya que sólo faltaba verificar que v_0 quedara absorbido y como tenemos la v_0v_1 -flecha en T tenemos que cumple esta condición, y como N ya era absorbente y no le estamos agregando nada no afecta su independencia. Si $v_i \neq v_1$ entonces $N' = N \cup \{v_0\}$ es el único núcleo de T ya que se tiene que agregar v_0 al núcleo, podemos observar que no afecta independencia ya que sólo tenemos la v_0v_1 -flecha en T y v_1 no pertenece a N y todos los demás vértices ya quedaban absorbidos por N . Por lo tanto toda trayectoria T tiene un único núcleo. ■

A continuación con una demostración similar a la anterior puede demostrarse un resultado más fuerte para digráficas acíclicas, el cual será utilizado más adelante.

Teorema 2.1.2. *Toda digráfica acíclica D tiene núcleo.*

Demostración. El Teorema será demostrado por inducción sobre n . Si D es la digráfica trivial es claro que el único vértice es núcleo de D . Si $V(D) = \{u, v\}$ nos fijamos en las flechas de D , si no contiene ninguna hacemos $N = \{u, v\}$ el cual es independiente y absorbente y por lo tanto núcleo de D , si D contiene flechas sólo puede contener una digamos la uv -flecha, ya que si no D contendría un ciclo lo cual no puede suceder ya que D es acíclica, y por lo tanto hacemos $N = \{v\}$ conjunto independiente y absorbente y por lo tanto núcleo de D . Supongamos el resultado válido para $|V(D)| = k < n$. Sea una digráfica D de orden n . Como D es acíclica sabemos por el Corolario 1.2.4 que D contiene al menos un vértice de in-grado cero digamos v . Consideramos $D' = D \setminus \{v\}$, D' tiene núcleo por hipótesis inductiva digamos N , si existe una vx -flecha en D con x que pertenece a N entonces N es núcleo de D ya que sólo faltaba verificar que v quedara absorbido. Si no existe tal flecha hacemos un nuevo subconjunto $N' = N \cup \{v\}$ el cual es independiente ya que por hipótesis N lo es y no existe vx -flecha por suposición ni xv -flecha ya que $d^-(v) = 0$, con x que pertenece a N , y como N absorbe a todo vértice que no está en N excepto a v tenemos que N' es absorbente e independiente y por lo tanto N' es núcleo único de D . ■

Teorema 2.1.3. *Todo ciclo de longitud par tiene 2 núcleos distintos.*

Demostración. Consideremos C ciclo de longitud par, es decir, $\ell(C) = 2k$ para alguna k número natural, digamos $C = x_0, x_1, \dots, x_{2k}$. Hacemos una partición de los vértices de la siguiente manera: $X = \{x_i | i = 2n, n \in \{0, 1, \dots, k\}\}$ y $Y = \{x_i | i = 2n + 1, n \in \{0, 1, \dots, k - 1\}\}$. Claramente X es distinto de Y . Afirmamos que X, Y son núcleos distintos de C . Sea un vértice x_p tal que no pertenece a X . Por construcción de X implica que $p = 2n + 1$ para alguna $n \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$. Tomamos x_{p+1} en C , por observación anterior tenemos que $p + 1 = (2n + 1) + 1$, así se sigue que $p + 1 = 2(n + 1)$ y por lo tanto x_{p+1} pertenece a X ; entonces x_p es absorbido por X . Tomamos x_i, x_j en X , como C es ciclo podemos suponer sin pérdida de generalidad que $i < j$, lo cual implica que $i + 2t = j$ para alguna $t \in \{1, \dots, k - 2\}$, se sigue que $d(i, j) \geq 2$ para todo par de vértices en X , y por lo tanto X es independiente. El caso para Y es análogo, y por lo tanto C tiene 2 núcleos distintos. ■

Para los ciclos impares el resultado no es cierto, pues al intentar construir un núcleo algún vértice del ciclo no quedará absorbido o se perderá la independencia en el conjunto construido. Podemos observar que pedir que una digráfica tenga seminúcleo es un resultado más débil, sin embargo en algunos casos a partir de un seminúcleo podremos construir núcleos o demostrar resultados más fuertes.

Proposición 2.1.4. *Todo núcleo de D es seminúcleo de D .*

Demostración. Sea N núcleo de D , por ser N núcleo es claro que N es un conjunto independiente, si existe una flecha (u, v) con $u \in N$, sabemos que v es absorbido por algún $w \in N$ pues N es núcleo de D , entonces tenemos una flecha (v, w) , y por lo tanto N es seminúcleo de D . ■

Para una digráfica semicompleta, basta pedir una condición respecto a las flechas de un vértice para garantizar la existencia de un núcleo.

Proposición 2.1.5. *Una digráfica D semicompleta tiene núcleo si y sólo si existe un vértice v en D que absorbe a todos los demás a distancia 1.*

Demostración. Sea D semicompleta, con núcleo N . Como para todo par de vértices u, v en D son adyacentes, por ser D semicompleta, la cardinalidad de N es 1, pues N tiene que ser independiente, esto es, existe un vértice v en D que absorbe a todos los demás a distancia 1.

Sea v un vértice en D que absorbe a todos los demás a distancia 1, entonces $N = \{v\}$ es núcleo de D . ■

Una digráfica bipartita semicompleta es una digráfica bipartita para la cual entre cualesquiera par de vértices que pertenecen a diferentes clases de la partición existe al menos una flecha entre ellos.

Lema 2.1.6. *Toda digráfica bipartita semicompleta D tiene núcleo.*

Demostración. Sea D digráfica bipartita semicompleta con X, Y bipartición de D . Si tenemos un vértice y_i de D tal que $d^+(y_i) = 0$ con y_i sin pérdida de generalidad en Y , entonces Y es núcleo de D ya que y_i absorbe a todos los vértices de X pues D es semicompleta, y por definición de bipartición Y es independiente. Si no existe vértice y_i en D tal que su exgrado sea igual a cero, nos fijamos en una clase de la partición digamos X , como para todo vértice en Y su exgrado es al menos uno tenemos que existe al menos una yx -flecha para alguna x en X , y por lo tanto X absorbe a todo vértice en Y y X es independiente por definición, de lo cual se sigue que X es núcleo de D , del mismo modo Y es núcleo de D . ■

Una digráfica transitiva es tal que si tenemos dos flechas consecutivas, es decir (x, y) y (y, z) flechas con x, y, z vértices distintos entonces también tenemos la xz -flecha.

Teorema 2.1.7. *Sea D digráfica transitiva y vértices distintos x, y de D , si existe xy -trayectoria en D entonces D contiene la xy -flecha.*

Demostración. Sea D transitiva con xy -trayectoria, digamos T . Probaremos el resultado por inducción sobre $\ell(T)$. Si $\ell(T) = 1$, entonces $T = xy$, lo cual implica que D contiene la xy -flecha. Si $\ell(T) = 2$, entonces $T = x, x_1, y$, como tenemos xx_1 -flecha y x_1y -flecha de T , por ser D transitiva tenemos que existe la xy -flecha en D . Supongamos el resultado válido para $\ell(T) < k$. Sea $T = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$, con $x_0 = x$, $x_k = y$ de D , consideremos a $T' = x_0Tx_{k-1}$, como $\ell(T') < k$, entonces por hipótesis inductiva existe la x_0x_{k-1} -flecha, además tenemos la $x_{k-1}x_k$ -flecha en T , entonces por ser D transitiva, tenemos la x_0x_k -flecha, es decir, la xy -flecha en D . ■

Corolario 2.1.8. *Sea D digráfica transitiva fuertemente conexa, entonces D es completa.*

Demostración. Como D es fuertemente conexa, para todo u, v vértices de D tenemos la uv -trayectoria, por el Teorema 2.1.7 tenemos que existe la uv -flecha. Como también tenemos la vu -trayectoria por ser D fuertemente conexa, tenemos análogamente la vu -flecha. Por lo tanto D es completa. ■

Lema 2.1.9. *Sea un vértice v de D digráfica transitiva entonces v pertenece a una componente terminal S_t o $v \mapsto S_t$.*

Demostración. Sea v vértice de D tal que v pertenece a S_i componente no terminal, sabemos por el Teorema 1.2.7 que existe una vv_t -trayectoria para todo v_t en S_t componente terminal, por el Teorema 2.1.7 tenemos que existe vv_t -flecha para todo v_t en S_t , por lo tanto $v \mapsto S_t$. ■

Corolario 2.1.10. *Todo torneo transitivo tiene núcleo.*

Demostración. Sea un torneo T , sabemos por el Teorema 1.2.13 que tiene una trayectoria generadora $C = (v_0, \dots, v_n)$, por el Teorema 2.1.7 tenemos las $v_i v_n$ -flechas para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Por lo tanto v_n absorbe a todos los demás vértices a distancia 1, lo que implica que $N = \{v_n\}$ es núcleo de T . ■

La siguiente demostración es similar a la demostración para la existencia de núcleos en digráficas semicompletas, con la observación de que en torneos basta encontrar un vértice de ex-grado cero, lo cual no necesariamente es cierto para digráficas semicompletas, ya que éstas pueden tener flechas simétricas entre dos vértices.

Lema 2.1.11. *Todo torneo T tiene núcleo si y sólo si existe un vértice v de T tal que $d^+(v) = 0$.*

Demostración. Sea un torneo T con núcleo N , es claro que el núcleo es un vértice digamos v , como entre todo par de vértices existe exactamente una flecha por ser T torneo, entonces se sigue que $d^+(v) = 0$ ya que si existiera una vx -flecha para algún vértice x de T tendríamos que x no sería absorbido por v , y v es núcleo de T .

Sea T torneo tal que existe un vértice v de T tal que $d^+(v) = 0$, por ser torneo sabemos que entre cualquier par de vértices existe una flecha, entonces para todo x en T distinto de v , sabemos que tenemos la xv -flecha, y por lo tanto todo vértice queda absorbido por v y entonces $N = \{v\}$ es núcleo de T . ■

En la siguiente demostración se utiliza un resultado anterior y además se construye un núcleo a partir de un seminúcleo, este lema se utilizará más adelante en esta sección para demostrar un resultado de digráficas bipartitas.

Lema 2.1.12. *Una digráfica D es núcleo perfecta si y sólo si toda subdigráfica inducida tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Sea D núcleo perfecta, lo cual implica que toda subdigráfica inducida tiene núcleo, y por lo tanto por la Proposición 2.1.4 toda subdigráfica inducida tiene seminúcleo no vacío.

Supongamos que toda subdigráfica inducida tiene seminúcleo no vacío. Sea H subdigráfica inducida de D , sabemos que existe seminúcleo no vacío de H , digamos S . Supongamos que S es seminúcleo de cardinalidad máxima de H , es decir, si existe S' tal que S' es seminúcleo de H , entonces $|S'| \leq |S|$. Si S absorbe a todo vértice v que no pertenece a S de H , entonces S es núcleo de H . Sean v_1, \dots, v_k los vértices que no son absorbidos por S y no pertenecen a él. Consideramos la subdigráfica inducida por estos vértices, llamémosla H' . Sabemos que H' tiene seminúcleo no vacío. Sea S_1 tal seminúcleo, entonces tenemos que $S \cup S_1$ es seminúcleo de H , pues S_1 no es absorbido por S , y si tuvieramos la SS_1 -flecha por ser S seminúcleo tendríamos también la S_1S -flecha lo cual no puede suceder ya que S_1 está formado por los vértices que no son absorbidos por S , y por lo tanto $S \cup S_1$ es independiente y para toda flecha (S, x) de algún vértice $x \in V(H)$, sabemos que existe la flecha (x, S) pues S es seminúcleo de H y para toda flecha (S_1, x) tenemos la flecha (x, S_1) si x no era absorbido por S o tenemos la flecha (x, S) si ya lo era. Pero $|S \cup S_1| > |S|$, pues S_1 es no vacío, lo cual resulta una contradicción pues S era seminúcleo de cardinalidad máxima de H .

Esto implica que S es núcleo de H , y por lo tanto D es núcleo perfecta. ■

La siguiente observación se demuestra reduciendo una subdigráfica inducida hasta encontrar una subdigráfica núcleo imperfecta crítica.

Observación 2.1.13. Toda digráfica D sin núcleo contiene como inducida una digráfica núcleo imperfecta crítica.

Demostración. Sea D digráfica sin núcleo, si todas sus subdigráficas inducidas propias tienen núcleo entonces D es núcleo imperfecta crítica. Si no, tomamos una subdigráfica inducida propia sin núcleo y la denotamos por D_1 . Si toda subdigráfica inducida de D_1 tiene núcleo entonces D_1 es la subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica buscada, si no, tomamos D_2 la subdigráfica inducida propia de D_1 que no contiene núcleo y definimos recursivamente a D_{i+1} alguna subdigráfica inducida propia de D_i que no contenga núcleo, si D_i no contiene tal subdigráfica hacemos $D_{i+1} = D_i$. Como son subdigráficas inducidas propias, sabemos que en algún subíndice tendremos que $D_j = D_{j+1} = D_{j+2} = \dots$, con D_j de orden a lo menos 2, de lo cual tenemos

que a partir de D_{j-1} toda subdigráfica inducida propia tiene núcleo, y por lo tanto D_{j-1} es núcleo imperfecta crítica la cual está contenida en D . ■

Demostraremos a continuación otro resultado, el cual nos garantiza la existencia de un seminúcleo para una digráfica bipartita.

Teorema 2.1.14. *Toda digráfica bipartita D tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Caso 1: Existe al menos un vértice v en D tal que $d^+(v) = 0$. Hacemos $S = \{v_i | d^+(v_i) = 0, v_i \in V(D)\}$. Claramente S es seminúcleo de D , pues es independiente y no hay flechas que salgan de S y es no vacío pues por hipótesis existe al menos un vértice $v \in S$.

Caso 2: Para todo vértice v de D tenemos que $d^+(v) \geq 1$. Sea X, Y la bipartición de D . Entonces X es independiente y no vacío por definición de partición, y para toda flecha (X, y_i) , por ser partición sabemos que $y_i \in Y$, y tenemos que por hipótesis $d^+(y_i) \geq 1$, y como no puede existir en D una flecha (y_i, y_j) con $y_j \in Y$, tenemos que necesariamente es una flecha (y_i, x_i) , para alguna $x_i \in X$, y por lo tanto tenemos que X es seminúcleo no vacío de D . En este caso tenemos análogamente que Y es seminúcleo no vacío de D . ■

Debido a los resultados anteriores podemos ver que es inmediata la siguiente demostración, la cual nos da un resultado más fuerte de las digráficas bipartitas.

Corolario 2.1.15. *Toda digráfica bipartita es núcleo perfecta.*

Demostración. Por el Lema 2.1.12 y el Teorema 2.1.14 se deduce la demostración de este corolario. ■

El siguiente resultado es una demostración de [1] la cual nos da una característica de las digráficas núcleo imperfectas críticas la cual nos ayudará a definir la estructura de las digráficas sin ciclos impares.

Teorema 2.1.16. *Toda digráfica D núcleo imperfecta crítica es fuertemente conexa.*

Demostración. Supongamos que D no es fuertemente conexa, hacemos su digráfica de condensación y como es acíclica sabemos por la Proposición 1.2.3 que tiene componentes terminales, entonces tomamos T componente

fuertemente conexa terminal de D y sea S_1 núcleo de T . Como D no tiene núcleo por hipótesis tenemos que el conjunto $M = V(D) - N^-[S_1]$ es no vacío. Como D es núcleo imperfecta crítica, lo cual implica que $D[M]$ tiene núcleo S_2 . El conjunto $S_1 \cup S_2$ es independiente ya que ninguna flecha va de S_1 a S_2 por definición de componente terminal y ninguna flecha va de S_2 a S_1 por construcción de M . Claramente todo vértice que no esta en $S_1 \cup S_2$ queda absorbido por su núcleo local S_1 o S_2 . Por lo tanto $S_1 \cup S_2$ es núcleo de D lo cual es una contradicción ya que D es núcleo imperfecta crítica de lo cual se puede deducir que D es fuertemente conexa. ■

A través de los teoremas anteriores hemos construido una base para la cual el siguiente resultado se puede seguir sencillamente.

Teorema 2.1.17. *Si una digráfica D no contiene ciclos impares, D tiene núcleo.*

Demostración. Supongamos que D no tiene núcleo, entonces por la observación 2.1.13 D contiene un núcleo imperfecta crítica digamos D' y por el Teorema 2.1.16 tenemos que D' es fuertemente conexa y como D no contiene ciclos impares por el Teorema 1.2.9 se puede deducir que D' es cíclicamente 2-partita, es decir, D' es bipartita, y por el Corolario 2.1.15 D' es núcleo perfecta lo cual es una contradicción pues D' es núcleo imperfecta crítica. Por lo tanto D tiene núcleo. ■

Corolario 2.1.18. *Sea D digráfica tal que para todo ciclo C de D , C tiene una flecha simétrica, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Sea H subdigráfica inducida de D . Consideremos $H' = \text{Asym}(H)$, como H' no tiene flechas simétricas, H' no tiene ciclos, lo que implica por la Proposición 1.2.3 que H' contiene al menos un vértice de ex-grado cero, digamos v . Hacemos $S = \{v\}$ en H' . Observemos que si v no es de ex-grado cero en H , implica que las flechas de $A(H) \setminus A(H')$ que inciden en v son simétricas. Por lo tanto para toda Sx -flecha, como es simétrica tenemos también la xS -flecha. Por lo tanto S es seminúcleo no vacío de H , y por el Lema 2.1.12 D es núcleo perfecta y por lo tanto D tiene núcleo. ■

Se ha demostrado en [6] que si todo ciclo impar $C = (x_1, \dots, x_{2n+1}, x_1)$ en una digráfica D tiene al menos 2 cuerdas de la forma $(x_i, x_{i+2}), (x_{i+1}, x_{i+3})$, entonces D tiene núcleo. En [5] se verifica que si en todo ciclo impar de D

tiene al menos dos flechas simétricas, entonces D tiene núcleo. Se ha probado en [16] que si todo ciclo C de longitud impar en una digráfica D tiene 2 flechas cuyos polos son consecutivos en C entonces D es núcleo-perfecta.

Se ha probado en [14] que en una gráfica G , con $T(G)$ gráfica de trayectorias de G y D una orientación de $T(G)$ tal que todo triángulo dirigido es simétrico, si todo ciclo impar $\vec{C} = (0, 1, \dots, n-1, 0)$ de D cuyas $\ell(\vec{C}) \geq 5$ tienen una cuerda (i, j) tal que al menos una de las dos propiedades se cumple:

1. Si $j \notin i-2, i+2$ ó
2. Si $j \in i-2, i+2$ entonces otra cuerda de \vec{C} , digamos (r, s) , entonces D tiene núcleo.

Capítulo 3

(k, l) –Núcleos

3.1. Familias de digráficas con (k, l) -núcleo

Sea D una digráfica, un conjunto de vértices $N \subset V(D)$ es (k, l) -núcleo si es k -independiente, es decir, que para todo par de vértices x, y que están en N , $d(x, y) \geq k$, y es l -absorbente, es decir, para todo vértice x que no pertenece a N , existe un vértice y en N tal que $d(x, y) \leq l$, si k es el mayor número y l es el menor número para los cuales las condiciones se cumplen, entonces N es llamado un (k, l) -núcleo fuerte; sea N un (k, l) -núcleo de una digráfica D , entonces por definición tenemos que N es también un (k_0, l_0) -núcleo de D donde $k_0 \leq k$, y $l_0 \geq l$. Decimos que una digráfica D que tiene (k, l) -núcleo es (k, l) -núcleo mínima si al remover una flecha cualquiera de la digráfica D la digráfica resultante ya no contiene un (k, l) -núcleo. Decimos que una digráfica tiene k -núcleo cuando tiene un $(k, k - 1)$ -núcleo.

Demostraremos a continuación diversos resultados, en general, la existencia de (k, l) -núcleos para diferentes digráficas.

Teorema 3.1.1. *Toda digráfica D tiene $(2, 2)$ -núcleo.*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre n .

Si $n = 1$, entonces $\{v\}$ es $(2, 2)$ -núcleo para $D = \{v\}$.

Supongamos el resultado válido para todo $k < n$. Sean D una digráfica con $|V(D)| = n$ y x en $V(D)$. Consideramos $D \setminus (N^-(x) \cup \{x\}) = D_1$, si $D_1 = \emptyset$ entonces D tiene $(2, 2)$ -núcleo = $\{x\}$. En otro caso tenemos por hipótesis

inductiva que D_1 tiene $(2, 2)$ -núcleo N , pues $|V(D_1)| < n$. Tenemos dos casos.

Caso 1: Existe al menos una flecha (x, y) en D tal que $y \in N$, entonces N es $(2, 2)$ -núcleo de D , pues x queda absorbido a distancia 1 y su in-vecindad queda absorbida a distancia 2.

Caso 2: No existe una flecha (x, y) en D tal que $y \in N$, entonces hacemos $N' = N \cup \{x\}$, claramente N' es 2-independiente ya que x esta al menos a distancia 2 de algún $x_i \in N$ por hipótesis y N es 2-independiente pues es $(2, 2)$ -núcleo de D_1 , además para toda $x_i \in D_1$ tal que x_i no pertenece a N , x_i queda absorbido a distancia menor o igual que 2 por N y la in-vecindad de x queda absorbida a distancia 1, por lo tanto, N' es $(2, 2)$ -núcleo de D . ■

En la sección anterior se demostró que una digráfica acíclica tiene núcleo, a continuación extendemos la demostración para probar el resultado para k -núcleos, con $k \geq 2$.

Teorema 3.1.2. *Toda digráfica acíclica D tiene k -núcleo con $k \geq 2$.*

Demostración. El resultado se probará por inducción sobre n . Sea D digráfica acíclica, si D es la digráfica trivial $\{v\}$, es claro que $\{v\}$ es k -núcleo para toda $k \geq 2$. Si $V(D) = \{u, v\}$, tenemos dos casos, si $|A(D)| = 0$ entonces hacemos $N = \{u, v\}$ el cual claramente es k -independiente ya que no existen flechas en D para $k \geq 2$, y $(k - 1)$ -absorbente ya que no quedan vértices sin ser absorbidos; si $|A(D)| = 1$, supongamos que tenemos la uv -flecha, hacemos $N = \{v\}$ k -núcleo de D ya que claramente es k -independiente y $(k - 1)$ -absorbente ya que absorbe a u a distancia 1, para $k \geq 2$. Supongamos el resultado válido para $|V(D)| = k < n$. Por demostrar para $|V(D)| = n$. Como D es acíclica tenemos por el Corolario 1.2.4 que existe un vértice v de D tal que $d^-(v) = 0$. Consideramos $D' = D \setminus \{v\}$, por hipótesis inductiva D' tiene k -núcleo N , si existe un vértice x en N tal que $d(v, x) \leq k - 1$, entonces N es k -núcleo de D . Si para todo vértice x de N tenemos que $d(v, x) \geq k$, hacemos $N' = N \cup \{v\}$, el cual es k -independiente, y para todo vértice que no está en N' queda $(k - 1)$ -absorbido por N , y por lo tanto N' es k -núcleo de D . ■

Recordemos que el diámetro de una digráfica es el mayor valor de las distancias entre dos vértices distintos de la digráfica. Cuando esta distancia está acotada podemos contruir a partir de esto un (k, l) -núcleo.

Teorema 3.1.3. *Si $\text{diam}(D) \leq l$ entonces D tiene (k, l) -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Como $\text{diam}(D) \leq l$ sabemos que no existe un vértice x en D tal que $d^+(x) = 0$ ya que si no $\text{diam}(D)$ sería infinito. Entonces tenemos que para todo vértice x en D , $d^+(x) \neq 0$. Afirmamos que todo vértice de D es (k, l) -núcleo de D . Sea x en D , como para todo vértice y de D , $d(y, x) \leq l$, tenemos que x es l -absorbente y como x es k -independiente con $k \geq 2$ implica que $N = \{x\}$ es (k, l) -núcleo de D , para todo vértice x de D . ■

Teorema 3.1.4. *Toda digráfica transitiva D tiene (k, l) -núcleo, para $k \geq 2$, $l \geq 1$.*

Demostración. Sean S_1, \dots, S_t componentes terminales de D . Tomamos v_1, \dots, v_t vértices de D con v_i que corresponde a una S_i componente terminal y cada vértice corresponde a una componente terminal distinta.. Hacemos $N = \{v_1, \dots, v_t\}$. Sea x vértice de D tal que x no pertenece a N . Supongamos que x pertenece a S_i componente terminal, como S_i es fuertemente conexa tenemos que existe xv_i -trayectoria con v_i en N , como D es transitiva entonces por Teorema 2.1.7 existe xv_i -flecha. Si x pertenece a S_j componente no terminal, entonces, por Teorema 1.2.7 existe una xv_i -trayectoria con v_i en S_i componente terminal, en particular existe una xv_i -trayectoria con v_i en S_i que pertenece a N , como D es transitiva entonces por Teorema 2.1.7 existe xv_i -flecha, y por lo tanto x es absorbido por N a distancia 1. Sean v_i en S_i , v_l en S_l con v_i, v_l en N , v_i, v_l son k -independientes ya que si existiera $v_i v_l$ -flecha implicaría que S_i no es componente terminal o que pertenecen a la misma componente lo cual no puede suceder ya que sólo tomamos un vértice por cada componente terminal. Por lo tanto N es (k, l) -núcleo de D , para $k \geq 2$, $l \geq 1$. ■

La siguiente demostración se sigue a partir de una restricción respecto a los vértices de ex-grado cero de una digráfica cíclicamente k -partita.

Teorema 3.1.5. *Si D es cíclicamente k -partita y todos sus vértices de ex-grado cero pertenecen a la misma clase de equivalencia implica que D tiene k -núcleo, a saber, la clase que contiene a estos vértices.*

Demostración. Sea V_i la clase de la partición tal que si $d^+(v) = 0$, entonces $v \in V_i$. Sea $x \in V_j \neq V_i$, sabemos que existe una flecha (x, x_1) , pues si no $d^+(x) = 0$, como $x \in V_j$, tenemos que $x_1 \in V_{j+1}$ por ser D

cíclicamente k -partita, e inductivamente podemos observar que existe una flecha (x_r, x_{r+1}) con $x_{r+1} \in V_i$. Esto implica que para todo vértice x en $D \setminus \{V_i\}$, existe una xy -trayectoria dirigida con $y \in V_i$ de longitud a lo más $k - 1$, además V_i es k -independiente ya que por estructura de cíclicamente k -partita para regresar a una misma clase de la partición es a través de trayectorias de longitud módulo k , y por lo tanto V_i es k -núcleo de D . ■

El siguiente corolario se demuestra con una idea similar al teorema anterior, la restricción para la digráfica sin embargo es distinta, se pide que la digráfica sea fuertemente conexa para que así no contenga vértices de ex-grado cero y además que la longitud de sus ciclos sea congruente a cero módulo k , así todas las clases de la partición serán k -núcleos de la digráfica.

Corolario 3.1.6. *Si D es fuertemente conexa y todo ciclo dirigido tiene longitud congruente a 0 módulo k , entonces D tiene k -núcleo.*

Demostración. Como todo ciclo dirigido tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$, tenemos por Teorema 1.2.9 que D es cíclicamente k -partita. Sea D_1, D_2, \dots, D_k la k -partición de D . Como D es fuertemente conexa tenemos por la Proposición 1.2.3 que D no tiene vértices de ex-grado cero, de lo cual se sigue que por el Teorema 3.1.5 todo D_i es k -núcleo de D . Sean x, y en D_i , como son elementos de un conjunto independiente y las flechas de D son de la forma $D_i D_{i+1}$, tenemos que se tiene que recorrer las $k - 1$ clases distintas de lo que se sigue que $d(x, y) \geq k$ y por lo tanto D_i es k -independiente; tomamos ahora un vértice z que no pertenece a D_i , por argumentación anterior $d(z, D_i) \leq k - 1$, y por lo tanto D_i es $(k - 1)$ -absorbente. De lo cual se sigue que D tiene k -núcleo. ■

Hemos definido en la primera sección diferentes productos de digráficas, a continuación demostramos condiciones para que una composición de digráficas tenga (k, l) -núcleo utilizando resultados demostrados previamente en [18].

Teorema 3.1.7. *Sean $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k - 1$ enteros. La digráfica $D' = D[H_1, \dots, H_n]$ tiene (k, l) -núcleo = N^* si y sólo si D tiene (k, l) -núcleo = N tal que $N^* = \cup_{i \in I} N_i$, donde $I = \{i | x_i \in N\}$ y N_i pertenece a H_i y para todo i en I .*

1. N_i es un (k, l) -núcleo de H_i si el vértice correspondiente x_i no pertenece a un ciclo de longitud menor o igual que $k - 1$ en D ó

2. $|N_i| = 1$ tal que contiene un vértice de H_i , si el vértice correspondiente x_i pertenece a un ciclo de longitud menor o igual que l en D ó
3. $|N_i| = 1$ tal que contiene un vértice l -absorbente de H_i en otro caso.

Demostración. Sean $k \geq 2, 1 \leq l \leq k - 1$. Etiquetamos los vértices de D' de manera que el primer subíndice corresponde al H_i que pertenece, el cual a su vez, corresponde a un vértice v_i en D , Sea N^* un (k, l) -núcleo de D' . Denotamos a $N = \{x_i \in V(D) | N^* \cap H_i \neq \emptyset\}$. Demostraremos que N es (k, l) -núcleo de D . Sean x_i, x_j en N , con $i \neq j$, lo que implica que existen x_{p_i}, x_{q_j} en N^* , de lo cual se sigue que $d(x_i, x_j) \geq k$ pues $d(x_{p_i}, x_{q_j}) \geq k$ en D' , y por lo tanto N es k -independiente en D .

Sea x_j que no pertenece a N , entonces para todo x_{j_r} en H_j , x_{j_r} no pertenece a N^* pero como N^* es (k, l) -núcleo tenemos que existe x_{i_s} en N^* , con $i \neq j$, tal que $d(x_{j_r}, x_{i_s}) \leq l$, y como x_i pertenece a N tenemos que $d(x_j, x_i) \leq l$ en D , entonces N es l -absorbente y por lo tanto N es (k, l) -núcleo de D . La definición de N implica que $N^* = \cup_{i \in I} N_i$, donde $I = \{i | x_i \in N\}$.

Consideremos los siguientes casos:

Caso I.1. Todo ciclo C de longitud menor o igual a $k - 1$ en D tenemos que $C \cap \{x_i\} = \emptyset$, con x_i vértice correspondiente a H_i en D . Demostraremos que N_i es (k, l) -núcleo de H_i .

Sabemos que N_i es k -independiente ya que N^* es k -independiente, y como $l \leq k - 1$ entonces para cada $j \in I$, con $j \neq i$, tenemos que $d(x_i, x_j) \geq k \geq l + 1$ en D , entonces no existe una trayectoria $T = x_i, \dots, x_j$ en D tal que $\ell(T) \leq l$, además $C \cap \{x_i\} = \emptyset$ para todo x_i en H_i con C de longitud menor o igual que $k - 1$ en D y como $l \leq k - 1$ tenemos que para todo ciclo C de longitud menor o igual que l en D tenemos que $C \cap \{x_i\} = \emptyset$ entonces N_i es l -absorbente en H_i y por lo tanto N_i es (k, l) -núcleo de H_i en este caso.

Caso I.2. Todo ciclo C de longitud menor o igual que $k - 1$ en D tenemos que $C \cap \{x_i\} \neq \emptyset$; entonces N_i contiene exactamente un vértice x_{i_r} de H_i , lo que implica que N_i es k -independiente en H_i . Como $l \leq k - 1$ y para todo x_j en N , con $j \neq i$, tenemos que $d(x_i, x_j) \geq k \geq l + 1$ en D , entonces no existe trayectoria $T = x_i, \dots, x_j$ de longitud menor o igual que l . Como suponemos que existe C de longitud menor que k en D que contiene a x_i existen varios subcasos:

Caso I.2.1. La longitud de C es menor o igual que l en D tal que C contiene a x_i , de lo cual por [18] se sigue que $|N_i| = 1$, es decir, $N_i = \{x_{i_r}\}$ con x_{i_r} vértice arbitrario de H_i .

Caso I.2.2. La longitud de C es menor o igual que l y C no contiene a x_i , además existe C' ciclo de D de longitud mayor que $l+1$ y menor que $k-1$ tal que C' contiene a x_i , tenemos por [18] que N_i es l –absorbente de H_i . Como $|N_i| = 1$, tenemos que $N_i = \{x_{i_t}\}$ donde x_{i_t} es un vértice l –absorbente de H_i .

Caso II. Sea N un (k, l) –núcleo de D . Sea $I = \{i | x_i \in N^*\}$ y N_i que cumpla las condiciones del Teorema. Demostraremos que $N^* = \cup_{i \in I} N_i$ es un (k, l) –núcleo de D' . Sean $x_{i_p} \neq x_{j_q}$ en N^* .

Caso II.1. Sea x_{i_p} que pertenece a N_i y x_{j_q} pertenece a N_j con $i \neq j$. Como x_i, x_j pertenecen a N y como N es k –independiente, por [18] tenemos que $d_D(x_i, x_j) = d_{D'}(x_{i_p}, x_{j_q}) \geq k$.

Caso II.2. Sean x_{i_p}, x_{i_q} que pertenecen a N_i para alguna i en I . Como N_i contiene al menos 2 vértices y por suposición N_i es (k, l) –núcleo de H_i , entonces $d(x_{i_p}, x_{i_q}) \geq k$ en H_i . Supongamos que $d(x_{i_p}, x_{i_q}) < k$ en las H_i 's. Si $k = 2$, es una contradicción a la k –independencia de N_i en H_i . Si $k \geq 3$, entonces existe una trayectoria $T = x_{i_p}, \dots, x_{i_q}$ en D' de longitud menor a k tal que al menos un vértice de T no pertenece a H_i lo que implica que existe un ciclo C en D de longitud menor que k que contiene al vértice x_i y por Teorema N_i contiene exactamente un vértice de H_i lo que es una contradicción a la suposición de que x_{i_p}, x_{i_q} pertenecen a N_i .

Tomando los dos casos anteriores tenemos que para x_{i_p}, x_{j_q} en N^* cumplen que $d(x_{i_p}, x_{i_q}) \geq k$ en D' , lo que implica que N^* es k –independiente en D' . Demostraremos ahora que N^* es l –absorbente en D' . Consideremos los siguientes casos:

Caso II.3. Sea x_{j_p} con j que no pertenece a I lo que implica que x_j no pertenece a N . Entonces como N es l –absorbente en D tenemos que existe i en I tal que x_i pertenece a N y $d(x_j, x_i) \leq l$ en D lo que implica que existe x_{i_q} en N^* tal que $d(x_{j_p}, x_{i_q}) \leq l$.

Caso II.4. Sea x_{j_p} que no pertenece a N^* , con j que pertenece a I . Si N_j es (k, l) –núcleo de H_j , entonces N_j es l –absorbente en H_j , entonces $d(x_{j_q}, N_j) \leq l$ en H_j , lo que implica que $d(x_{j_q}, N^*) \leq l$ en D' . Si N_j contiene exactamente un vértice de H_j entonces por suposición del teorema existe en D un ciclo C que contiene al vértice x_j de longitud menor o igual que l , lo que implica que existe en D' una trayectoria $T = x_{j_p}, \dots, N_j$ con $\ell(T) \leq l$, de lo cual tenemos que $d(x_{j_p}, N_j) \leq l$. Si $|N_j| = 1$ tal que contiene un vértice de H_j l –absorbente entonces por definición de l –absorbente tenemos que $d(x_{j_p}, N_j) \leq l$ en H_j . Entonces $d(x_{j_p}, N^*) \leq l$ en D' . Se sigue que N^* es l –absorbente en D' .

En cualquier caso tenemos que N^* es un (k, l) -núcleo de D' . ■

Se ha definido el in-grado de un vértice, definimos ahora el in-grado máximo de una digráfica como $\Delta^-(D) = d^-(v)$ tal que para todo vértice x distinto de v tenemos que $d^-(x) \leq d^-(v)$, es decir, es igual al mayor in-grado de los vértices de D . Para digráficas semicompletas se ha demostrado una condición para que tengan núcleo, a continuación se demuestra que toda digráfica semicompleta tiene k -núcleo para $k \geq 3$.

Teorema 3.1.8. *Toda digráfica semicompleta tiene k -núcleo, a saber el conjunto $N = \{v\}$ tal que $d^-(v) = \Delta^-(D)$ para $k \geq 3$.*

Demostración. Sea D digráfica semicompleta con $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Tomamos v_i que pertenece a $V(D)$ tal que $d^-(v_j) \leq d^-(v_i)$ para todo vértice $v_j \neq v_i$ con v_j en $V(D)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $N^-(v_i)$ la in-vecindad de v_i . Supongamos que existe un vértice v_j en $V(D)$ tal que v_j no pertenece a $N^-(v_i)$, entonces tenemos la $v_i v_j$ -flecha porque D es semicompleta. Si tenemos una $v_j N^-(v_i)$ -flecha en $A(D)$ entonces v_j es absorbido por v_i a distancia 2; supongamos que no existe una $v_j N^-(v_i)$ -flecha, esto implicaría que tenemos todas las $N^-(v_i) v_j$ -flechas por ser D semicompleta, y además tenemos la $v_i v_j$ -flecha por observación anterior, se sigue que $d^-(v_j) \geq N^-(v_i) + 1$ y como $N^-(v_i) = d^-(v_i)$ por definición, entonces $d^-(v_j) > d^-(v_i)$, lo cual es una contradicción, de esta manera se sigue que existe una $v_j N^-(v_i)$ -flecha, y por lo tanto para todo vértice v_j que no esta en la in-vecindad de v_i , v_j es absorbido por v_i a distancia 2. Como v_i es un vértice, v_i es independiente y por lo tanto v_i es k -núcleo de D digráfica semicompleta para $k \geq 3$. ■

Corolario 3.1.9. *Sea D digráfica semicompleta tal que no contiene C_3 , entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Sea D semicompleta, por el Teorema 3.1.8 D tiene 3-núcleo $N = \{v_i\}$ tal que $d^-(v_i) = \Delta^-(D)$, supongamos que existe v_j en D tal que v_j no es absorbido por N , es decir, que v_j no pertenece a $N^-(v_i)$, como D es semicompleta sabemos que tenemos la $v_i v_j$ -flecha, además como D no contiene C_3 tenemos también las $N^-(v_i) v_j$ -flechas, lo que implica que $d^-(v_j) = d^-(v_i) + 1$ lo cual no puede suceder ya que $d^-(v_i) = \Delta^-(D)$. Por lo tanto N es núcleo de D . ■

A continuación definimos el concepto de T -digráfica y demostramos un resultado que será utilizado más adelante: si tenemos H_1 y H_3 digráficas sin flechas, H_2 la digráfica trivial y H_4 una digráfica semicompleta, y hacemos H la digráfica con conjunto de vértices $V(H_1) \cup V(H_2) \cup V(H_3) \cup V(H_4)$, y conjunto de flechas $A(H_4) \cup \{(u, v) : u \in V(H_3) \cup V(H_4), v \in V(H_1)\} \cup \{(x, y) : x \in V(H_4), y \in V(H_3)\} \cup \{(z, w) : z \in V(H_2), w \in V(H_3)\}$, donde H_1, H_2, H_3, H_4 son ajenas por vértices dos a dos, donde $V(H_3)$ o $V(H_4)$ puede ser vacío, y se añaden flechas de $V(H_2)$ a $V(H_1) \cup V(H_4)$ en H para que nuestra gráfica resultante sea fuertemente conexa y el vértice en H_2 es adyacente a cada vértice en $H_1 \cup H_4$, entonces nos referiremos a nuestra digráfica resultante como una T -digráfica.

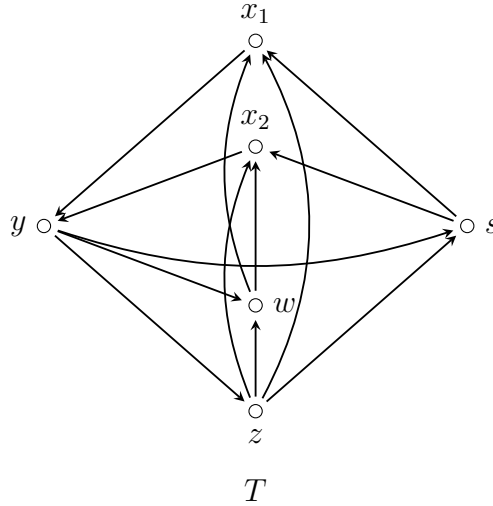


Figura 3.1: Una T -digráfica con T -partición ($H_1 = \{x_1, x_2\}$, $H_2 = \{y\}$, $H_3 = \{s, w\}$, $H_4 = \{z\}$).

Recordemos que una digráfica D local-in es aquella tal que la in-vecindad de todo vértice de D induce una digráfica semicompleta. Se ha demostrado en [19] que una digráfica fuertemente conexa local-in puede ser sólo de 4 formas. Con un resultado anterior y la siguiente demostración iremos caracterizando para los diferentes casos cuando estas digráficas tienen k -núcleo.

Lema 3.1.10. *La subdigráfica H_2 es k -núcleo para cualquier T -digráfica, con $k \geq 3$.*

Demostración. Sea D una T -digráfica. Sabemos por como esta definida una T -digráfica que $H_3 \rightarrow H_1$, $H_4 \rightarrow H_1$, $H_4 \rightarrow H_3$, $H_2 \rightarrow H_3$. Además, el vértice en H_2 , llamémosle v_2 , tiene que ser adyacente a todo vértice en H_1 , de tal manera que D sea fuertemente conexa, esto implica que para todo vértice v en H_1 , tenemos necesariamente una flecha (v, v_2) , pues si solo hubiera una flecha (v_2, v) no puede ser que D sea fuertemente conexa, así tenemos que $H_1 \rightarrow H_2$. Esto implica que todo vértice en H_1 queda absorbido a distancia 1 por v_2 , y como para todo vértice $u \in V(H_3) \cup V(H_4)$ hay una flecha (u, v) , con $v \in V(H_1)$, tenemos todo vértice en $H_3 \cup H_4$ queda absorbido a distancia 2. Y por lo tanto H_2 es un k -núcleo para toda T -digráfica con $k \geq 3$. ■

Para que una T -digráfica tenga núcleo basta pedir que para algún vértice $v \in H_1$, exista también una flecha (v_2, v) , y así H_1 es independiente y absorbe a todo vértice $v \notin H_1$ a distancia 1, y por lo tanto H_1 es núcleo de la T -digráfica. A continuación demostraremos un resultado con una demostración muy similar a la anterior para la digráfica dual de la T -digráfica.

Lema 3.1.11. Sea \overleftarrow{T} digráfica dual de una T -digráfica, entonces \overleftarrow{T} tiene k -núcleo para $k \geq 3$.

Demostración. Sea \overleftarrow{T} digráfica dual de una T -digráfica. Lo que implica que tenemos $H_1 \rightarrow H_3$, $H_1 \rightarrow H_4$, $H_3 \rightarrow H_4$, además por el Lema 3.1.10 tenemos que $H_2 \rightarrow H_1$ en la digráfica dual. Además por el Teorema 3.1.8 tenemos que para toda digráfica semicompleta H_4 , H_4 tiene k -núcleo para $k \geq 3$ digamos N . Es claro que todo vértice v de H_4 que no pertenece a N queda absorbido a distancia 2. Por otro lado H_1, H_3 quedan absorbidos por N a distancia 1, y como para H_2 tenemos que $H_2 \rightarrow H_1$ y que $H_1 \rightarrow H_4$ tenemos que H_2 queda absorbido por N a distancia 2. Es claro que N es independiente ya que es un solo vértice. Por lo tanto N es k -núcleo de \overleftarrow{T} , para $k \geq 3$. ■

3.2. Resultados previos

A continuación mencionamos resultados para digráficas con (k, l) -núcleos demostrados anteriormente principalmente en artículos.

Para productos de digráficas se ha demostrado en [20] el siguiente resultado. Sea un conjunto de digráficas fuertemente conexas $\{D_i\}_{i=1}^n$, con $N_i = (k_i, l_i)$ -núcleo de D_i respectivamente. Construimos un nuevo conjunto

$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$ el cual está contenido en $V(D_1) \times V(D_2) \times \dots \times V(D_n)$ que es el conjunto de vértices del producto cartesiano (\square), del producto normal (\boxtimes), del producto tache (\times), del producto débil (\vee) y del cual el conjunto de vértices de la composición (\square) está contenido, de D_1, D_2, \dots, D_n . Se ha probado en [20] que para $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ tiene un $(2, 2)$ -núcleo, para $D_1 \square D_2 \square \dots \square D_n$ tiene un $(\min\{k_i, i = 1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n l_i)$ -núcleo, para $D_1 \boxtimes D_2 \boxtimes \dots \boxtimes D_n$ tiene un $(\min\{k_i, i = 1, \dots, n\}, \max\{l_i, i = 1, \dots, n\})$ -núcleo. Para $D_n[D_{n-1}[\dots[D_1]\dots]]$ tiene un $(\min\{k_i, d_{D_j}(J_j); i = 1, \dots, n, j = 2, \dots, n\}, \max\{l_i, i = 1, \dots, n\})$ -núcleo, donde $d_{D_j}(J_j) = \min\{d_{D_j}(y)\}$ y $d_{D_j}(y)$ denota la longitud del ciclo de menor longitud que contiene a y en D_j ; y para $D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_n$ tiene un $(2, 2)$ -núcleo.

Hemos demostrado que una digráfica acíclica tiene k -núcleo para $k \geq 2$, mencionamos un resultado que muestra condiciones para que digráficas con ciclos contengan k -núcleos. Se ha demostrado en [3] que si una digráfica fuertemente conexa D tiene a lo más un ciclo dirigido, llamémosle C , de longitud $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, con $C = (x_1, \dots, x_{nk+r}, x_1)$, con $n \geq 1$, $k \geq 2$, $0 < r < k$, y tenemos $r + 1$ flechas de la forma $(x_i, x_{i+r+1}), (x_{i+1}, x_{i+r+2}), \dots, (x_{i+r}, x_{i+2r+1})$, para alguna i fija, con $1 \leq i \leq nk + r$, entonces D tiene k -núcleo; además, para cualquier digráfica D sin ciclos de longitud $\ell(C) \not\equiv 0 \pmod{k}$, con $k \geq 2$, basta verificar que para cada una de las subdigráficas fuertemente conexas máximas por contención, llamémosle H_i 's, con $i = 1, \dots, p$ donde $p \geq 1$ de D , se cumple que o existe exactamente un vértice x que pertenece a H_i tal que la cardinalidad de su in-vecindad más la cardinalidad de su ex-vecindad es mayor o igual a 3, o si existen dos vértices x, x' pertenecientes a H_i tal que la cardinalidad de la in-vecindad de x más la cardinalidad de la ex-vecindad de x es mayor o igual a 3, con el mismo caso para x' , pasa que la distancia de x a x' es igual a 0 \pmod{k} , entonces podemos afirmar que D tiene k -núcleo.

Además en [21] se demuestra que si D es una digráfica fuertemente conexa sin ciclos de longitud $nk + r$, para $n \geq 1, k \geq 2$ y $0 < r < k$, entonces D tiene k -núcleo. Por otro lado se ha probado en [16] que para toda digráfica fuertemente conexa tal que todo ciclo dirigido tiene longitud $\equiv 0 \pmod{k}$ $k \geq 2$, entonces D tiene k -núcleo. Además en [7] está demostrado que una digráfica D tal que $Asym(D)$ es fuertemente conexa y tenemos que todo ciclo dirigido de longitud $\not\equiv 0 \pmod{k}$ tiene al menos 2 flechas simétricas entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 2$.

Por otro lado se ha probado en [14] que para una gráfica G , $L(G)$ su gráfica de líneas y D una orientación de $L(G)$ tal que $Asym(D)$ es fuertemente conexa y cada triángulo dirigido tiene 2 flechas simétricas, y tenemos que cada ciclo de D , $\vec{C} = (0, 1, \dots, n-1, 0)$ con $\ell(\vec{C}) \not\equiv 0 \pmod{k}$ tiene una cuerda (i, j) tal que al menos se cumple una de las siguientes propiedades:

1. $j \notin i-2, i+2$ o
2. Si $j \in i-2, j+2$, entonces existe otra cuerda de \vec{C} , digamos (r, s) , tal que $(r, s) \neq (j, i)$, entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 3$.

En este último teorema observemos que si pedimos que (\vec{C}) tenga 2 cuerdas, cumple con la hipótesis y por lo tanto D tiene k -núcleo para $k \geq 3$.

Se ha probado en [11] que para un torneo m -partito $T = (V_1, V_2, \dots, V_m)$, T tiene k -núcleo para toda $m \geq 2$, $k \geq 4$; si todo ciclo dirigido de longitud 4 en T intersecta 4 clases diferentes de T , entonces T tiene 3-núcleo para todo $m \geq 2$. Como corolario también se demuestra el mismo resultado para una digráfica m -partita semicompleta.

Estas últimas observaciones serán utilizadas más adelante para demostrar otros resultados.

Capítulo 4

Digráficas 3-cuasitransitivas

4.1. Digráficas 3-cuasitransitivas

Una digráfica D es transitiva cuando para todo par de flechas (x, y) , (y, z) de D tal que el vértice x es distinto al vértice z tenemos que la xz -flecha también pertenece a D ; una digráfica D es k -transitiva si para toda trayectoria dirigida (v_0, v_1, \dots, v_k) de longitud k de D , la flecha (v_0, v_k) está en D . Una digráfica D es cuasitransitiva si para toda terna de vértices distintos x, y, z de D tal que las flechas (x, y) , (y, z) están en D tenemos que existe al menos una flecha entre x y el vértice z . Una digráfica D es k -cuasitransitiva si para toda trayectoria (v_0, v_1, \dots, v_k) de longitud k de D , la flecha (v_0, v_k) ó la flecha (v_k, v_0) está en D .

Observemos que toda digráfica transitiva es cuasitransitiva, en general una digráfica k -transitiva es k -cuasitransitiva, además las digráficas semicompletas son digráficas cuasitransitivas y en algunos casos transitivas. Se ha probado en el Teorema 3.1.4 que una digráfica transitiva tiene (k, l) -núcleo, en [10] se demuestra que las digráficas cuasitransitivas tienen (k, l) -núcleo para $k \geq 4$, $l \geq 3$ ó $k = 3$, $l = 2$.

Definimos a C_3^* , como la digráfica con conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ y con conjunto de flechas $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_1, v_3)\}$ y C_3^{**} el triángulo con dos flechas simétricas.

Si D es una digráfica fuertemente conexa 3-transitiva, se ha probado en [15] que D es de la forma:

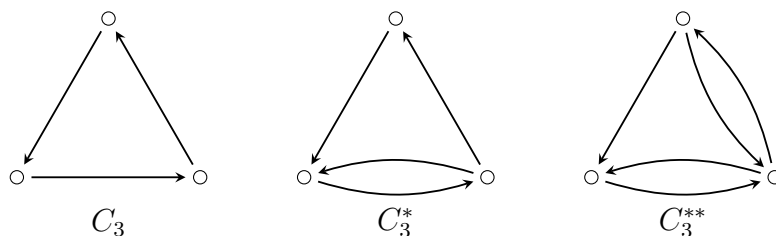


Figura 4.1: Casos de digráficas fuertemente conexas 3-transtivas

1. Una digráfica completa
2. Una digráfica bipartita completa
3. C_3 , C_3^* , C_3^{**} . Figura 4.1

Para una componente fuertemente conexas S de una digráfica D 3-transitiva que pertenece al Caso 3, puede ser vista como una digráfica que contiene una subdigráfica isomorfa a C_3 , también se probó que para cualquier vértice v de D que pueda ser alcanzado por S implica que tenemos la Sv -flecha en D , además que cuando tenemos una Xv -flecha en una digráfica bipartita completa 3-transitiva implica que $X \rightarrow v$.

Teorema 4.1.1. *Sea D digráfica 3-transitiva, entonces D tiene núcleo si y sólo si las componentes terminales fuertemente conexas de D no son isomorfas a C_3 .*

Demostración. Sea D digráfica 3-transitiva y supongamos que una componente terminal S es isomorfa a C_3 , sean $\{v_0, v_1, v_2\}$ los vértices de S y sean $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0)\}$ las flechas de S . Como para todo v_i de S sólo puede ser absorbido por otro v_j de S ya que S es componente terminal podemos ver que S no tiene núcleo y por lo tanto D no tiene núcleo lo cual es una contradicción a la hipótesis, por lo tanto S no puede ser isomorfa a C_3 .

Probaremos el regreso por inducción sobre el número de componentes fuertemente conexas. Sea una componente fuertemente conexas S_t , si es completa es fácil verificar que cualquier vértice es núcleo de S_t ; si es una digráfica bipartita completa, las clases de la partición son núcleos de ella; S_t no puede ser C_3 por hipótesis, si es C_3^* el vértice en el cual incide la flecha simétrica y absorbe al otro vértice por flecha del ciclo es núcleo de S_t , y si es C_3^{**} el vértice

en el cual inciden las dos flechas simétricas es núcleo de ella. Supongamos el resultado válido para n componentes fuertemente conexas de D . Sea D con $n + 1$ componentes fuertemente conexas y sus componentes terminales no isomorfas a C_3 . Nos fijamos en una componente inicial S , por hipótesis inductiva $D - S$ tiene núcleo N ; S puede ser una bipartita completa, un solo vértice ó contiene una subdigráfica isomorfa a C_3 . Si S es un sólo vértice digamos v y el vértice v es absorbido por N entonces N es núcleo de D , si v no es absorbido por N entonces $N_0 = N \cup \{v\}$ es núcleo de D ya que v es la componente inicial y N_0 es independiente. Si S contiene a C_3 , tenemos que para todo vértice v de D tal que v puede ser alcanzado por S implica que tenemos la Sv -flecha, y por el Teorema 1.2.7 sabemos que para todo vértice u de D , en particular u que pertenece a S , existe una uS_t -trayectoria, con S_t componente terminal, lo que implica que $S \mapsto S_t$ con S_t componente terminal de D , pero como S_t es terminal al menos un vértice de S_t está en N y por lo tanto S es absorbido por N . Si S es una digráfica bipartita completa tenemos 3 casos. Sea (X, Y) bipartición de S , si ni X ni Y es absorbida por N entonces consideramos $N \cup X$, como S es componente inicial tenemos que toda flecha entre X y N es una XN -flecha lo cual implicaría que $X \rightarrow N$ contradiciendo la suposición, y por lo tanto $N \cup X$ es independiente, y como X absorbe a Y porque S es bipartita completa tenemos que $N \cup X$ es núcleo de D . Si un vértice x de X es absorbido por N entonces por la observación anterior tenemos que N absorbe a X , supongamos entonces que Y no es absorbido por N , pero por argumentación anterior no puede existir una yN -flecha con vértice y que pertenece a Y , pero entonces $N \cup Y$ es independiente y absorbente en D y por lo tanto núcleo de D ; el caso en el que Y es absorbido y X no es absorbido es análogo. Finalmente S es absorbido por N entonces N es núcleo de D . Por lo tanto D tiene núcleo. ■

Sea D una digráfica fuertemente conexa 3-cuasitransitiva de orden n . Se ha probado en [9] que D es de la forma:

1. Una digráfica semicompleta.
2. Una digráfica bipartita semicompleta.
3. Una digráfica isomorfa a F_n . Figura 4.2

Lema 4.1.2. *Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva. Para un par de vértices x, y de D si existe una xy -trayectoria de longitud impar entonces x y el vértice y son adyacentes.*

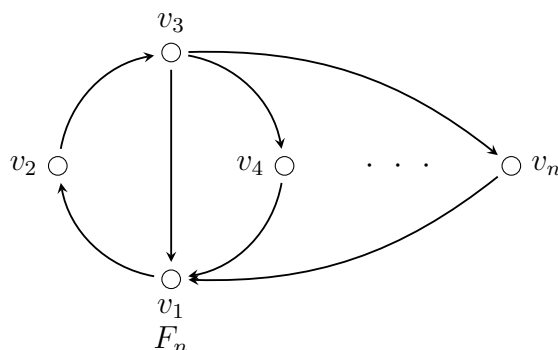


Figura 4.2: Digráfica fuertemente conexa 3-cuasitransitiva F_n

Demostración. Sea $T = x_0x_1\dots x_{2k+1}$ una xy -trayectoria donde $x_0 = x$ y $x_{2k+1} = y$. Si $k = 0$ se sigue el resultado por la T trayectoria. Como D es 3-cuasitransitiva entonces x_i y x_{i+3} son adyacentes para $i = 0, 1, \dots, 2k - 2$, entonces cuando $k = 1$ queda verificado. Para $k \geq 2$ será demostrado por inducción sobre k . Suponemos por inducción que toda trayectoria de longitud impar menor que $2k$ implica que los extremos son adyacentes, de lo cual se sigue que x_0 y x_{2k-1} son adyacentes. Si $x_0 \rightarrow x_{2k-1}$ entonces $x_0 \rightarrow x_{2k-1} \rightarrow x_{2k} \rightarrow x_{2k+1}$ implica que x_0, x_{2k+1} son adyacentes, asumimos entonces que $x_{2k-1} \rightarrow x_0$, observemos que x_{2k-2}, x_{2k+1} son adyacentes, si $x_{2k+1} \rightarrow x_{2k-2}$ tenemos que $x_{2k+1} \rightarrow x_{2k-1} \rightarrow x_0$, lo que implica que x_0 y x_{2k+1} son adyacentes. Ahora podemos asumir que $x_{2k-2} \rightarrow x_{2k+1}$ entonces $T' = x_0x_1\dots x_{2k-2}x_{2k+1}$ es una trayectoria de longitud $2(k-1) + 1$, entonces por hipótesis inductiva tenemos que x_0 y x_{2k+1} son adyacentes y por lo tanto los vértices x, y de D son adyacentes. ■

Lema 4.1.3. *Sea D' una subdigráfica fuertemente conexa no trivial de una digráfica 3-cuasitransitiva D . Para cualquier vértice v en $V(D) - V(D')$, si existe una trayectoria entre v y D' , entonces v y D' son adyacentes.*

Demostración. Como la digráfica dual de una 3-cuasitransitiva es una digráfica 3-cuasitransitiva entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una trayectoria entre v y D' . Sea $T = vx_1\dots x_k$ la trayectoria más corta de v a D' . Si k es impar entonces por el Lema 4.1.2 sabemos que v y D' son adyacentes. Supongamos entonces que k es par. Como D' no es trivial y es fuertemente conexa entonces existe un vértice u de $V(D') - \{x_k\}$

tal que $x_k \rightarrow u$. Como $T' = Tu$ es una vu -trayectoria de longitud impar tenemos por el Lema 4.1.2 la vu -flecha y por lo tanto v y D' son adyacentes. ■

Teorema 4.1.4. *Una digráfica 3-cuasitransitiva D tiene núcleo si y sólo si todas sus componentes terminales tienen núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica 3-cuasitransitiva con núcleo N y componentes terminales $S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_k}$. Por definición de componente terminal sabemos que no hay una $S_{t_i}S_j$ -flecha con S_j alguna componente fuertemente conexa de D . Sea una S_{t_i} y hacemos $N_{t_i} = N \cap V(S_{t_i})$. Claramente N_{t_i} es núcleo de S_{t_i} ya que para cualesquiera dos vértices de N_{t_i} son no adyacentes por N ser núcleo y si suponemos que un vértice v de S_{t_i} no es absorbido por N_{t_i} implicaría que no es absorbido por N ya que S_{t_i} es terminal. Por lo tanto todas las componentes terminales de D tienen núcleo.

Tomamos ahora una digráfica D tal que todas sus componentes terminales tienen núcleo. Demostraremos el resultado por inducción sobre las componentes. Si D es fuertemente conexa entonces D es una sola componente, que es terminal, y por hipótesis D tiene núcleo. Supongamos que para toda D con n componentes, D tiene núcleo. Sea D con $n + 1$ componentes fuertemente conexas, nos fijamos en una componente inicial S y consideramos $D' = D - S$ por hipótesis inductiva D' tiene núcleo N . Consideramos D , como antes mencionado, si S no es trivial, S puede ser de 3 formas, podemos suponer además que S esta conectada a al menos otra componente ya que si no S no sería inicial. Como sabemos hay una flecha entre S y otra componente digamos S_1 , supongamos que S es trivial. Verificamos si para $N^+(S)$ existe un vértice en N , si es el caso entonces N es núcleo de D ya que todos los vértices son absorbidos, si no existe tal flecha, hacemos un nuevo conjunto $N_0 = N \cup \{S\}$ el cual claramente es independiente ya que S es trivial, y absorbente y por lo tanto núcleo.

Sea S tal que $S \rightarrow S_1$ con S_1 componente terminal trivial. Sea N núcleo de $D - S$, es claro que S_1 pertenece a N ya que S_1 es una componente terminal y es trivial. Si S es semicompleta, como es fuertemente conexa sabemos por el Corolario 1.2.15 que para todo $k = 3, 4, \dots, n$ y por cualquier vértice v de S pasa un k -ciclo, etiquetamos los vértices de S respecto al n -ciclo = C que pasa por el vértice v_n tal que tenemos la $v_n S_1$ -flecha. Si S es de orden impar, por el Lema 4.1.2, tenemos las $v_i S_1$ -flechas con i impar ya que hay una $v_i C S$ -trayectoria de orden impar, y por lo tanto con éstas flechas tenemos también $v_j S_1$ -trayectorias de orden impar con j par y por lo tanto

las $v_j S_1$ -flechas, entonces S_1 absorbe a S y como S_1 es independiente por ser trivial, tenemos que N es núcleo de D . Si S es semicompleta de orden 2, y tenemos las $v_1 S_1$ -flecha y la $v_2 S_1$ -flecha entonces N es núcleo de D ; si sólo tenemos la $v_2 S_1$ -flecha hacemos $N = S_1 \cup \{v_1\}$ el cual claramente es núcleo de D . Si S es semicompleta de orden par mayor a 2, por el Corolario 1.2.15 podemos tomar un ciclo que pase por v_n , de longitud n , digamos $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ ciclo de S , tal que tenemos la flecha (v_n, S_1) ; para i par y por la existencia de la $v_i S_1$ -trayectoria impar por el Lema 4.1.2 tenemos las $v_1 S_1$ -flechas. Sean v_1, v_3 de S , como S es semicompleta sabemos que está la $v_1 v_3$ -flecha ó la $v_3 v_1$ -flecha ó ambas. Si S contiene la $v_1 v_3$ -flecha, como también esta la $v_3 v_4$ -flecha y la $v_4 S_1$ -flecha por ser D 3-cuasitransitiva y S componente inicial sabemos que también esta la $v_1 S_1$ -flecha. Si S contiene la $v_3 v_1$ -flecha, entonces como también esta la $v_1 v_2$ -flecha y la $v_2 S_1$ -flecha, tenemos por argumentación anterior la $v_3 S_1$ -flecha. Supongamos sin pérdida de generalidad tenemos la $v_1 S_1$ -flecha, tomamos ahora el vértice v_{n-1} y sabemos por C que tenemos la $v_{n-1} v_n$ -flecha y la $v_n v_1$ -flecha y por lo tanto la $v_{n-1} S_1$ -flecha, si tomamos ahora v_{n-3} es claro que tenemos la $v_{n-3} S_1$ -flecha, repitiendo el paso recursivamente implica que también están las $v_j S_1$ -flechas para j impar y por lo tanto S_1 absorbe a S y así N es núcleo de D .

Si S es bipartita semicompleta con bipartición (X, Y) y S_1 trivial, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que tenemos la $x S_1$ -flecha con x en X . Como S es fuertemente conexa sabemos que hay una trayectoria entre cualesquiera par de vértices, en particular para el vértice x_i y el vértice x de X la cual claramente es de longitud par por ser S bipartita, lo que implica que hay una $x_i S_1$ -trayectoria de longitud impar y por lo tanto por el Lema 4.1.2 $X \mapsto S_1$, si existiera también una $y S_1$ -flecha para algún vértice y de Y entonces análogamente $Y \mapsto S_1$ y por lo tanto S_1 absorbe a S y tenemos que N es núcleo de D , si no existiera tal flecha hacemos $N' = N \cup Y$ el cual claramente es núcleo de D pues N es independiente, no existe NY -flecha ya que Y , el cual es independiente, pertenece a una componente inicial y por suposición no tenemos la $Y S_1$ -flecha, y S queda absorbido por N .

Si S es isomorfa a F_n tenemos 4 casos. Sabemos que al menos existe una flecha de S hacia S_1 . Si suponemos que tenemos la $v_1 S_1$ -flecha, entonces como tenemos las (v_3, v_4) , (v_4, v_1) , (v_1, S_1) flechas por ser 3-cuasitransitiva y S componente inicial tenemos también la $v_3 S_1$ -flecha, lo que implica que como tenemos las (v_2, v_3) , (v_3, v_1) , (v_1, S_1) flechas también tenemos la $v_2 S_1$ -flecha y análogamente por las (v_i, v_1) , (v_1, v_2) (v_2, S_1) flechas tenemos la $v_i S_1$ -flecha para $i = 4, \dots, n$. Si suponemos que tenemos la $v_2 S_1$ -flecha, como están las

(v_i, v_1) , (v_1, v_2) , (v_2, S_1) flechas tenemos la $v_i S_1$ -flecha para $i = 4, \dots, n$; como tenemos las (v_3, v_1) , (v_1, v_2) , (v_2, S_1) flechas implica que tenemos la $v_3 S_1$ -flecha, y como también están las (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , (v_3, S_1) flechas está la $v_1 S_1$ -flecha. Si suponemos que tenemos la $v_i S_1$ -flecha para $i = 4, \dots, n$, como tenemos las $(v_2 v_3)$, (v_3, v_i) , (v_i, S_1) flechas entonces tenemos la $v_2 S_1$ -flecha, como tenemos las (v_j, v_1) , (v_1, v_2) , (v_2, S_1) con $j \neq i$ entonces $v_j S_1$, como tenemos las (v_3, v_1) , (v_1, v_2) , (v_2, S_1) flechas entonces tenemos la $v_3 S_1$ -flecha, como tenemos las (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , (v_3, S_1) flechas entonces tenemos la $v_1 S_1$ -flecha. Como en cualquier caso S_1 absorbe a S , entonces N es núcleo de D .

Supongamos ahora que S_1 es no trivial. Consideramos las componentes a las que esta conectada S , digamos S_1, \dots, S_t como S_1 es no trivial, $D - S$ es no trivial, observemos que para cualquier vértice v de S por el Teorema 1.2.7 tenemos que existe la $v S_i$ -trayectoria para S_i componente terminal, entonces por el Lema 4.1.3 v y S_i son adyacentes y como v esta en una componente inicial entonces tenemos que $S \mapsto S_i$, como S_i es componente terminal para algún vértice v de S_i tenemos que v pertenece a N , ya que si no S_i no sería absorbido por N núcleo de D' , lo que implica que S es absorbido por N y por lo tanto N es núcleo de D . ■

En el siguiente corolario se utiliza el resultado anterior para así sólo verificar las componentes terminales de la subdigráfica de D .

Corolario 4.1.5. *Sea D digráfica 3-cuasitransitiva, D es núcleo perfecta si y sólo si toda subdigráfica semicompleta es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D núcleo perfecta, entonces toda subdigráfica inducida tiene núcleo, en particular las subdigráficas inducidas de las digráficas semicompletas contenidas en D , lo que implica que toda subdigráfica semicompleta de D es núcleo perfecta.

Sea H subdigráfica de D y sea S_t componente terminal de H , S_t no puede ser F_n ya que F_n contiene como subdigráfica inducida a C_3 la cual no tiene núcleo y por lo tanto no es núcleo perfecta, si S_t es bipartita semicompleta tenemos por el Lema 2.1.6 que S_t tiene núcleo, y si S_t es semicompleta tenemos por hipótesis que S_t es núcleo perfecta, lo que implica por el Teorema 4.1.4 que H tiene núcleo y por lo tanto D es núcleo perfecta. ■

Capítulo 5

Digráficas conexas localmente semicompletas

5.1. Digráficas conexas localmente semicompletas

Una digráfica localmente semicompleta D es redonda factorizable si existe un torneo localmente redondo R con $r \geq 2$ vértices tales que $D = R[S_1, \dots, S_r]$, donde cada S_i es una digráfica semicompleta fuertemente conexa. Decimos que $R[S_1, \dots, S_r]$ una descomposición redonda de D .

Sea D una digráfica conexa localmente semicompleta que no es fuertemente conexa y sean D_1, \dots, D_p el etiquetamiento acíclico de sus componentes fuertemente conexas, entonces D puede ser descompuesta en $r \geq 2$ subdigráficas inducidas semicompletas D'_1, D'_2, \dots, D'_r como:

$$D'_1 = D_p, \lambda_1 = p, \lambda_{i+1} = \min\{j \mid N^+(D_j) \cap V(D'_i) \neq \emptyset\}$$

$$\text{y } D'_{i+1} = D[V(D_{\lambda_{i+1}}) \cup V(D_{\lambda_{i+1}+1}) \cup \dots \cup V(D_{\lambda_i-1})].$$

La secuencia única D'_1, D'_2, \dots, D'_r es llamada la descomposición semicompleta de D .

En [1] se demuestra el siguiente teorema que caracteriza a las digráficas conexas locales semicompletas.

Teorema 5.1.1. *Una digráfica D conexa local semicompleta es de exactamente una de las 3 formas:*

1. D es redonda factorizable con una única factorización dada por $D =$

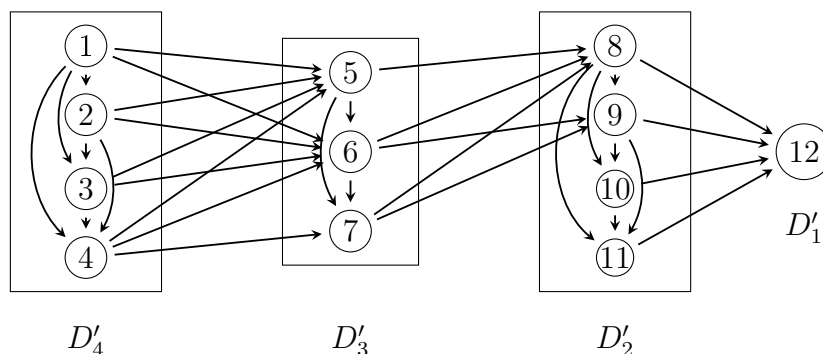


Figura 5.1: Ejemplo de la descomposición semicompleta de una digráfica D .

$R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$, donde R es un torneo local redondo con $\alpha \geq 2$ vértices y D_i es una digráfica fuertemente conexa semicompleta para toda $i = 1, 2, \dots, \alpha$.

2. D no es redonda factorizable ni semicompleta y tiene una estructura tal que satisface que:

a) Existe un mínimo conjunto separador S tal que $D - S$ no es una semicompleta y para cada S , $D[S]$ es semicompleta y la descomposición semicompleta de $D - S$ tiene exactamente 3 componentes semicompletas D'_1, D'_2, D'_3 ;

b) Existen enteros α, β, μ, ν con $\lambda_2 \leq \alpha \leq \beta \leq p - 1$ y $p - 1 \leq \mu \leq \nu \leq p + q$ tal que:

$$N^-(D_\alpha) \cap V(D_\mu) \neq \emptyset \text{ y } N^+(D_\alpha) \cap V(D_\nu) \neq \emptyset$$

$$\text{ó } N^-(D_\mu) \cap V(D_\alpha) \neq \emptyset \text{ y } N^+(D_\mu) \cap V(D_\beta) \neq \emptyset.$$

Donde D_1, D_1, \dots, D_p y D_{p+1}, \dots, D_{p+q} son los etiquetamientos acíclicos de las componentes fuertemente conexas de $D - S$ y $D[S]$ respectivamente y D_{λ_2} es la componente inicial de D'_2 .

3. D es semicompleta no redonda factorizable.

Definimos un producto de digráficas con respecto a una lista de digráficas k -partitas $D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}$ etiquetando sobre los vértices de una digráfica arbitraria D , con conjunto de vértices $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ para así obtener una nueva digráfica k -partita, denotada por $K = D[D_{v_1}, D_{v_2}, \dots, D_{v_n}]^P$, una

P -composición. Escogemos $P(D_{v_i}) = (V_1^i, V_2^i, \dots, V_k^i)$ una partición ordenada de D_{v_i} , para cada D_{v_i} . El producto tiene a $V(K) = \cup_{i=1}^k (V(D_{v_i}) \times i)$ como conjunto de vértices, $P = (\cup_{i=1}^n (V_1^i \times \{i\}), \cup_{i=1}^n (V_2^i \times \{i\}), \dots, \cup_{i=1}^n (V_k^i \times \{i\}))$ como k -partición ordenada y $(u, i), (v, j)$ que están en $V(K)$ son adyacentes si y sólo si

1. $i = j$ y $u \rightarrow v$ en D_{v_i} ó
2. $i \neq j$, u en V_p^i , v en V_q^j con $p \neq q$, y $v_i \rightarrow v_j$ en D .

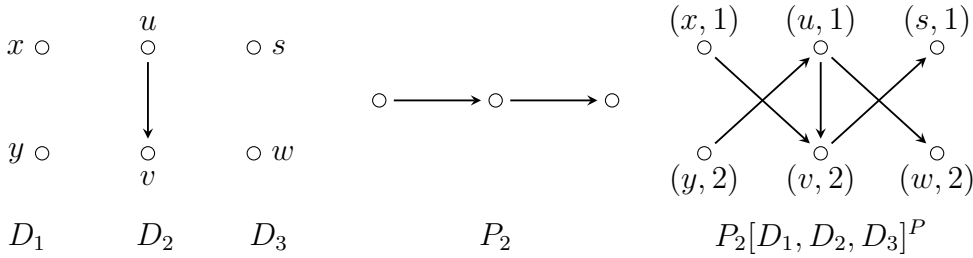


Figura 5.2: P -composición de P_2 con biparticiones $D_1 = (V_1^1 = \{x\}, V_2^1 = \{y\})$, $D_2 = (V_1^2 = \{u\}, V_2^2 = \{v\})$, $D_3 = (V_1^3 = \{s\}, V_2^3 = \{w\})$.

Denotamos E_i el conjunto independiente de $i \geq 1$ vértices, entonces $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ es la composición sobre un 3-ciclo con una flecha simétrica y conjuntos independientes de vértices. En [8] se demuestra el siguiente teorema que caracteriza a las digráficas conexas localmente semicompletas lineales.

Teorema 5.1.2. *Si una digráfica D es conexa localmente semicompleta lineal entonces D es de la forma:*

1. *Subdigráfica de una extensión de una flecha.*
2. *Extensión de una trayectoria dirigida o ciclo dirigido extendido.*
3. *Subdigráfica de la digráfica completa de 3 vértices.*
4. $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$.
5. $TT_3[E_1, E_n, E_1]$, donde TT_3 es el torneo transitivo de 3 vértices.

6. *Bipartita semicompleta subdigráfica de $\vec{P}_2[E_{m_0}, \vec{C}_2[E_1, E_{m_2}], E_{m_3}]^P$, si $m_2 > 1$, entonces la bipartición de la P -composición es $P = (E_1, E_{m_0} \cup E_{m_2} \cup E_{m_3})$ y \vec{P}_2 es una trayectoria de longitud 2.*
7. *Digráfica $\vec{P}_2[E_{m_0}, D', E_{m_3}]^P \leq D \leq TT_3[E_{m_0}, D', E_{m_2}]^P$, donde \leq denota la relación de las subdigráficas, D' es una digráfica bipartita semicompleta (la cual puede no tener flechas).*
8. *$\vec{P}_2[E_1, D', E_1]$ con D' digráfica semicompleta.*
9. *Una digráfica bipartita semicompleta.*
10. *Una digráfica semicompleta.*

5.2. (k, l) –Núcleos para digráficas conexas localmente semicompletas

A continuación probaremos en los diferentes casos de las digráficas conexas localmente semicompletas que (k, l) –núcleo podemos encontrar.

Lema 5.2.1. *Sea D redonda factorizable con una única factorización dada por $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$, donde R es un torneo local redondo tal que R no es fuertemente conexo con $\alpha \geq 2$ vértices y D_i es una digráfica fuertemente conexa semicompleta para toda $i = 1, 2, \dots, \alpha$ entonces D tiene k –núcleo para $k \geq 3$.*

Demostración. Sea D redonda factorizable, como D es una composición sobre un torneo local redondo que no es fuertemente conexo, tenemos que R es acíclico y por el Teorema 3.1.2 R tiene k –núcleo para $k \geq 2$. Por otro lado como cada D_i es una digráfica semicompleta por el Teorema 3.1.8 sabemos que D_i tiene k –núcleo para $k \geq 3$. Y por el Teorema 3.1.7 tenemos que D tiene k –núcleo para $k \geq 3$. ■

Lema 5.2.2. *Sea D redonda factorizable con una única factorización dada por $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$, donde R es un torneo local redondo fuertemente conexo con $\alpha \geq 2$ vértices y D_i es una digráfica fuertemente conexa semicompleta para toda $i = 1, 2, \dots, \alpha$ y sea $l = \lfloor \frac{\alpha}{m} \rfloor$, $\delta^+(R) = m$, entonces D tiene $(k, l + 1)$ –núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Sea D redonda factorizable, tal que $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$, sabemos por Lema 1.2.16 que $diam(R) \leq \lfloor \frac{\alpha}{m} \rfloor$ para $\delta^+(R) = m$, entonces para todo par de vértices x, y de D sabemos que la distancia entre ellos será a lo más $diam(R) + 1$ ya que si x pertenece a D_i , y a D_j , avanzando sobre las flechas de R tenemos que $d(x, y) \leq diam(R)$, si x, y pertenecen a D_i y tenemos que $d(x, y) > diam(R) + 1$ en D_i , podemos avanzar sobre las flechas de R y regresar a cualquier vértice de D_i en a lo más $diam(R) + 1$ y por lo tanto $d(x, y) \leq diam(R) + 1$ en D . Por lo tanto $diam(D) \leq diam(R) + 1$, es decir $diam(D) \leq l + 1$. Por otro lado, se ha demostrado en Teorema 3.1.3, que para toda digráfica D , si $diam(D) \leq l'$ entonces D tiene (k, l') -núcleo, como $l' \leq l + 1$, de lo cual se sigue que D tiene $(k, l + 1)$ -núcleo para $k \geq 2$, $l = \lfloor \frac{\alpha}{m} \rfloor$. ■

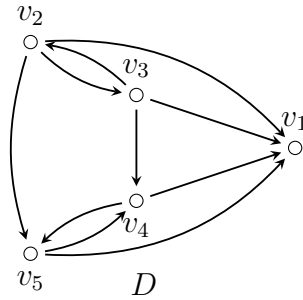


Figura 5.3: Una digráfica $D = R[D_1, \dots, D_\alpha]$ redonda factorizable donde R es un torneo local redondo y $D_1 = \{v_1\}$, $D_2 = \{v_2, v_3\}$, $D_3 = \{v_4, v_5\}$ digráficas fuertemente conexas semicompletas.

A continuación enunciamos un lema demostrado en [1], el cual utilizaremos en la demostración siguiente.

Lema 5.2.3. *Si una digráfica localmente semicompleta fuertemente conexa no es semicompleta, entonces existe un conjunto separador mínimo $S \subset V(D)$ tal que $D - S$ no es semicompleta. Si D_1, D_2, \dots, D_p es el etiquetamiento acíclico de las componentes fuertemente conexas de D y D'_1, D'_2, \dots, D'_r es la descomposición semicompleta de $D - S$ entonces $r \geq 3$, $D[S]$ es semicompleta y $D_p \mapsto S \mapsto D_1$.*

Lema 5.2.4. *Sea D no redonda factorizable ni semicompleta con la estructura descrita en el Teorema 5.1.1 Caso 2, entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 4$.*

Demostración. Sea D no redonda factorizable ni semicompleta, con descomposición semicompleta de $D - S$, D'_1, D'_2, D'_3 , las cuales son subgráficas inducidas semicompletas, por el Teorema 3.1.8 sabemos tienen k -núcleo para $k \geq 3$. Por otro lado tenemos por el Lema 5.2.3 que $D_p \mapsto S \mapsto D_1$ y además S es semicompleta. Como por construcción de la descomposición semicompleta tenemos que D_p pertenece a D'_1 y D_1 pertenece a D'_3 , tenemos que $D'_1 \mapsto S$ y $S \rightarrow D'_3$. Observemos que $d(D'_2, D'_1) = 1$, $d(D'_3, D'_1) = 2$, $d(S, D'_1) = 3$, ya que por construcción de la descomposición semicompleta tenemos las flechas de las D_i 's en D'_3 a la primera componente de D'_2 , y de la misma forma tenemos las flechas de las componentes de D'_2 hacia la primera y única componente de D'_1 , que es D_p , donde p es la etiqueta máxima en la etiquetación acíclica de $D - S$ y por lo tanto $D_p = D'_1$. De lo cual se sigue que el k -núcleo de D'_1 es k -núcleo de D para $k \geq 4$. ■

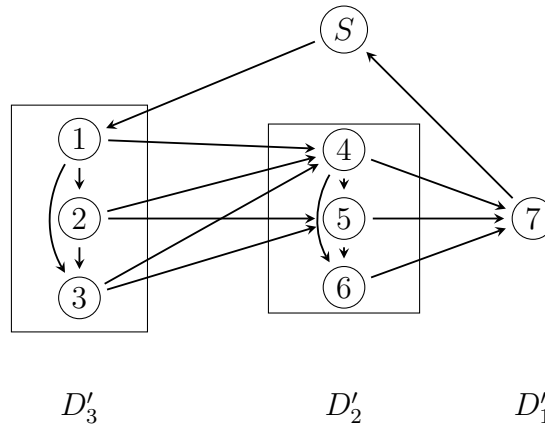


Figura 5.4: Digráfica no redonda factorizable ni semicompleta con la estructura descrita en el Teorema 5.1.1 Caso 2.

Lema 5.2.5. *Toda digráfica semicompleta no redonda factorizable tiene k -núcleo para $k \geq 3$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.8 tenemos v_i que pertenece a $V(D)$ tal que $d^-(v_j) \leq d^-(v_i)$ para todo vértice $v_j \neq v_i$ con v_j en $V(D)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ es un k -núcleo de D . ■

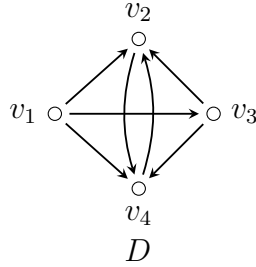


Figura 5.5: Una digráfica D semicompleta no redonda factorizable.

El siguiente lema se sigue de los resultados demostrados en esta sección.

Lema 5.2.6. *Sea una digráfica D conexa localmente semicompleta tiene k -núcleo para $k \geq 3$ si es redonda factorizable o semicompleta no redonda factorizable y tiene k -núcleo para $k \geq 4$ en otro caso.*

Corolario 5.2.7. *Sea digráfica D conexa localmente semicompleta, si todo ciclo de D tiene longitud menor o igual a k entonces D tiene k -núcleo, para $k \geq 2$.*

Demostración. Basta verificar dos casos para cuando $k = 2$. Si D es redonda factorizable con una única factorización dada por $D = R[D_1, D_2, \dots, D_\alpha]$, donde R es un torneo local redondo tal que R no es fuertemente conexo con $\alpha \geq 2$ vértices y D_i es una digráfica fuertemente conexa semicompleta, tenemos que como D_i es fuertemente conexa $|V(D_i)| \geq 2$ ya que de otra forma D contendría un ciclo de mayor longitud, lo que implica que D_i contiene un vértice que absorbe al otro a distancia 1 y por lo tanto D_i tiene núcleo $N = \{v_i\}$, y como D es una composición sobre un torneo local redondo que no es fuertemente conexo, tenemos que R es acíclico y por el Teorema 3.1.2 R tiene k -núcleo para $k \geq 2$ y por lo tanto D tiene núcleo. El caso R fuertemente conexo para $k = 2$ no existe pues R no permite ciclos de longitud 2. De la misma manera el caso queda anulado para $k = 2, 3$, para D no redonda factorizable ni semicompleta y que tiene la estructura descrita en el

Teorema 5.1.1 Caso 2, ya que siempre contiene un ciclo de longitud 4. Para D semicompleta no redonda factorizable y como no puede contener a C_3 tenemos por el Corolario 3.1.9 D tiene núcleo, y como los demás casos quedan verificados en el Lema 5.2.6, tenemos que D tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

5.3. (k, l) -Núcleos para digráficas conexas localmente semicompletas lineales

A continuación demostraremos para los casos del Teorema 5.1.2 cuando tienen k -núcleo.

Lema 5.3.1. *Toda subdigráfica H de una extensión de una flecha tiene k -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Como toda subdigráfica de una extensión de una flecha es acíclica, se ha probado en el Teorema 3.1.2 que H tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

Lema 5.3.2. *Toda trayectoria extendida T tiene k -núcleo, para $k \geq 2$.*

Demostración. Sea T una trayectoria extendida, como T es acíclica tenemos que por el Teorema 3.1.2 T tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

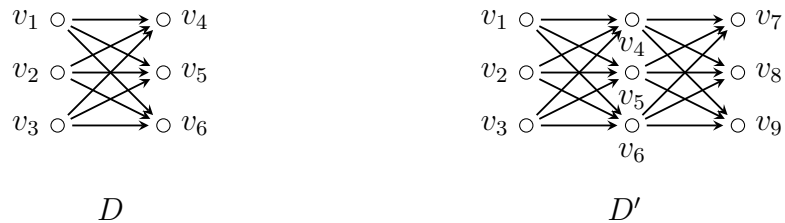


Figura 5.6: Una extensión de una flecha D y una trayectoria extendida D .

Lema 5.3.3. *Toda digráfica D ciclo extendido de longitud k , tiene n -núcleo con $n|k$.*

Demostración. Observemos que D es cíclicamente k -partita, sean D_1, D_2, \dots, D_k las clases de D , como k es múltiplo de n podemos construir $N = \{D_n, D_{2n}, \dots, D_{ln}\}$ con $ln = k$, claramente N es núcleo de D ya que cada D_i está formada por un conjunto independiente de vértices, cada D_i en N absorbe a distancia $n - 1$ por propiedades de digráficas cíclicamente k -partitas, y entre ellas están a distancia n por construcción de N ; esta construcción la podemos hacer para cada divisor de k . Por lo tanto D tiene n -núcleo con $n|k$. ■

Lema 5.3.4. *Toda subdigráfica H de la digráfica completa de 3 vértices D tiene k -núcleo para $k \geq 2$ cuando $C_3 \neq H$ y k -núcleo con $k \geq 3$ cuando $H = C_3$.*

Demostración. Sea D subdigráfica de la digráfica completa de 3 vértices. Tomamos v_1 que pertenece a $V(D)$, si no existe $v_1 \neq v_2$ tal que v_2 pertenece a $V(D)$ tenemos que $\{v_1\}$ es núcleo de D y por lo tanto 3-núcleo de D . Si $V(D) = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 \neq v_2$, nos fijamos en la cardinalidad de $A(D)$, si $|A(D)| = 0$ tenemos que $N = \{v_1, v_2\}$ es núcleo ya que es independiente porque la subdigráfica no tiene flechas y no queda ningún vértice sin ser absorbido, entonces se sigue que N es 3-núcleo de D . Si $|A(D)| = 1$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que tenemos la v_1v_2 -flecha y por lo tanto es fácil de ver que $\{v_2\}$ es núcleo de D y así 3-núcleo de D ; si $|A(D)| = 2$ nuestra subdigráfica queda definida y tenemos las flechas (v_1, v_2) y (v_2, v_1) , lo que implica que tanto $\{v_1\}$ como $\{v_2\}$ son núcleos de D .

En el caso que $V(D) = \{v_1, v_2, v_3\}$, cuando $|A(D)| = 0$ por el caso anterior tenemos que $N = \{v_1, v_2, v_3\}$ es 3-núcleo de D . Cuando $|A(D)| = 1$, suponemos la v_1v_2 -flecha, podemos ver que $N = \{v_2, v_3\}$ es 3-núcleo de D . Si $|A(D)| = 2$, tenemos tres casos, cuando tenemos las $(v_1, v_2), (v_2, v_3)$ flechas es claro que $N = \{v_3\}$ es 3-núcleo de D ; si tenemos las $(v_1, v_2), (v_2, v_1)$ flechas tanto $N_1 = \{v_1, v_3\}$ como $N_2 = \{v_2, v_3\}$ son 3-núcleos de D , si tenemos las flechas $(v_1, v_2), (v_3, v_2)$ se puede observar que $N = \{v_2\}$ es 3-núcleo de D . Si $|A(D)| = 3$, podemos tener el caso del 3-ciclo para el cual cualquier vértice es 3-núcleo de D ; podemos tener las flechas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3)$ en el cual tomamos $N = \{v_3\}$ 3-núcleo de D . Si tenemos las flechas $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_1)$ es claro que $N = \{v_3\}$ es 3-núcleo de D . Si $|A(D)| = 4$, podemos tener el 3-ciclo con una flecha simétrica en el cual por las mismas razones cualquier vértice de D es 3-núcleo de D ; si tenemos dos flechas simétricas es fácil ver que cualquier vértice es 3-núcleo de D . Para los casos $|A(D)| = 5$ y

$|A(D)| = 6$ cualquier vértice es 3-núcleo de D por argumentos anteriores. Por lo tanto cualquier subdigráfica de la digráfica completa de 3 vértices tiene 2-núcleo cuando es diferente a C_3 y 3-núcleo cuando lo es. ■

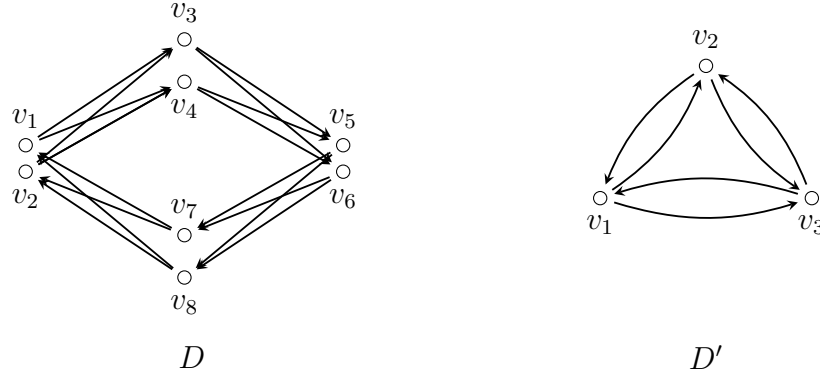


Figura 5.7: Un ciclo extendido D y la digráfica completa D' de 3 vértices.

Lema 5.3.5. *La digráfica $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ tiene k -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Sea v'_3 el vértice E_1 de la composición $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ que le corresponde a v_3 en C_3^* . Afirmamos que $N = \{v'_3\}$ es núcleo de $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$. Sea v'_1 el vértice E_1 de $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ que le corresponde a v_1 en C_3^* , por construcción de C_3^* tenemos la v_1v_3 -flecha y por lo tanto en $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ tenemos la $v'_1v'_3$ -flecha. Sea v'_2 un vértice de E_n en $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$, como en C_3^* tenemos la v_2v_3 -flecha, por definición de composición implica que en $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ tenemos la $v'_2v'_3$ -flecha. Como v'_3 es un vértice, v'_3 es independiente y por lo tanto $N = \{v'_3\}$ es núcleo y por lo tanto es 3-núcleo de $C_3^*[E_1, E_n, E_1]$. ■

Lema 5.3.6. *La digráfica $TT_3[E_1, E_n, E_1]$, con TT_3 torneo transitivo de 3 vértices tiene k -núcleo con $k \geq 2$.*

Demostración. Sea $TT_3[E_1, E_n, E_1]$, como es transitivo por argumento en el Corolario 2.1.10 tenemos que $d^+(E_i) = 0$, para algún E_i , $i = 1, n$, lo cual implica que E_i es núcleo de $TT_3[E_1, E_n, E_1]$, ya que es independiente por definición, y por otro lado como es torneo para todo vertice v_j que no pertenece a E_i , existe la v_jv_i -flecha con v_i que pertenece a E_i ya que $d^+(v_i) = 0$. Por lo tanto $TT_3[E_1, E_n, E_1]$ tiene k -núcleo con $k \geq 2$. ■

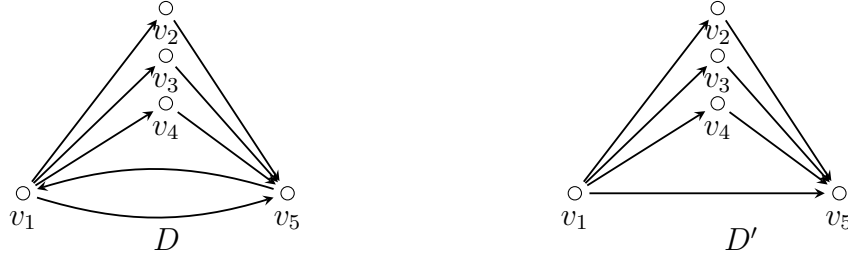


Figura 5.8: Una digráfica $D = C_3^*[E_1, E_n, E_1]$ y una digráfica $D' = TT_3[E_1, E_n, E_1]$.

Lema 5.3.7. *Toda digráfica bipartita semicompleta tiene núcleo.*

Demostración. Sea D digráfica bipartita semicompleta con X, Y bipartición de D . Por el Lema 2.1.6 D tiene núcleo. ■

Observación 5.3.8. *Toda digráfica bipartita semicompleta D tiene k -núcleo para $k \geq 4$.*

Demostración. Se ha mencionado en la sección 3.2, que este resultado se ha demostrado en [11], y por lo tanto D tiene k -núcleo para $k \geq 4$. ■

Lema 5.3.9. *Sea D digráfica bipartita semicompleta subdigráfica de $\vec{P}_2[E_{m_0}, \vec{C}_2[E_1, E_{m_2}], E_{m_3}]^P$, si $m_2 > 1$ entonces la bipartición de la P -composición es $P = (E_1, E_{m_0} \cup E_{m_2} \cup E_{m_3})$ y \vec{P}_2 es una trayectoria de longitud 2, entonces tiene k -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Como D es una digráfica bipartita semicompleta por el Lema 2.1.6 D tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

Lema 5.3.10. *Sea digráfica $\vec{P}_2[E_{m_0}, D', E_{m_2}]^P \leq D \leq TT_3[E_{m_0}, D', E_{m_2}]^P$, donde \leq denota la relación de las subdigráficas, D' es una digráfica bipartita semicompleta (la cual puede no tener flechas), entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Sea D digráfica que cumple la hipótesis, sabemos que E_{m_0}, E_{m_2} tienen núcleo ya que son conjuntos independientes, además D' también



Figura 5.9: Una digráfica D bipartita semicompleta y una P -composición D' bipartita semicompleta.

tiene núcleo por el Lema 2.1.6, por otro lado por el Lema 5.3.6 tenemos que TT_3 tiene núcleo. Como las flechas de la P -composición o son las flechas de E_{m_0}, E_{m_2}, D' o son las flechas de TT_3 en la composición con la restricción que tienen que ir a diferentes conjuntos de la P -partición, entonces es claro que E_{m_2} es k -núcleo de la P -composición de TT_3 para $k \geq 2$.

Sea ahora la P -composición sobre \vec{P}_2 , por argumentación anterior E_{m_0}, E_{m_2}, D' tienen núcleo, además por el Teorema 2.1.1 \vec{P}_2 tiene núcleo, es claro que $N = \{E_{m_2} \cup E_{m_0}\}$ es núcleo de la P -composición de P_2 , y $N' = \{E_{m_2}\}$ es k -núcleo de la P -composición para $k \geq 3$.

Basta verificar que flechas hay entre E_{m_0} y E_{m_2} en D . Si no existe ninguna flecha, entonces D tiene núcleo $N = \{E_{m_0} \cup E_{m_2}\}$ y k -núcleo $\{E_{m_2}\}$ para $k \geq 3$; si hay construimos $X = \{v_{0_i}\}$ con v_{0_i} en E_{m_0} tal que existe una $v_{0_i}v_{2_j}$ -flecha con v_{2_j} que pertenece a E_{m_2} en D y hacemos $N = \{E_{m_2} \cup (E_{m_0} - X)\}$ el cual claramente es núcleo de D , ya que solo estamos agregando los vértices que no son absorbidos por E_{m_2} los cuales son independientes por definición de E_{m_0} , para un k -núcleo de D con $k \geq 3$ tomamos el conjunto E_{m_2} el cual absorbe a todo vértice que no pertenece al k -núcleo de D a distancia a los más 2. Por lo tanto D tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

Lema 5.3.11. *Toda digráfica D semicompleta tiene k -núcleo para $k \geq 3$.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.8 tenemos que v_i que pertenece a $V(D)$ tal que $d^-(v_j) \leq d^-(v_i)$ para todo vértice $v_j \neq v_i$ con v_j en $V(D), i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ es un k -núcleo de D . ■

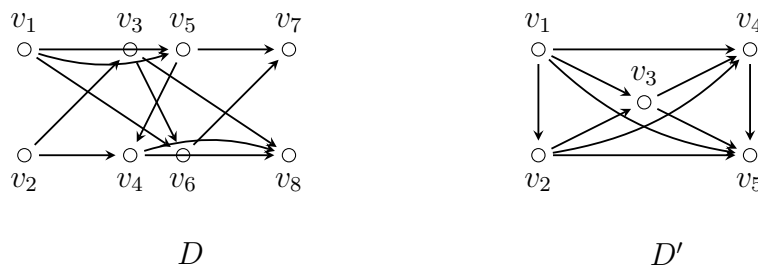


Figura 5.10: Una digráfica D que cumple las condiciones del Teorema 5.1.2 Caso 7 y una digráfica D' semicompleta.

Teorema 5.3.12. *Sea D digráfica conexa localmente semicompleta lineal entonces D tiene k -núcleo con $k \geq 3$ si D es semicompleta ó C_3 , D tiene n -núcleo si D es ciclo extendido de longitud k con $n|k$, D tiene núcleo o k -núcleo para $k \geq 4$ si D es bipartita semicompleta y D tiene k -núcleo para $k \geq 2$ en cualquier otro caso.*

Demostración. El resultado se sigue de los lemas de esta sección. ■

El siguiente colorario se sigue de una restricción para las digráficas localmente semicompletas lineales, para así poder garantizar la existencia de un k -núcleo para $k \geq 2$ en cualquier caso.

Corolario 5.3.13. *Sea D una digráfica localmente semicompleta lineal, si todo ciclo de D tiene longitud menor o igual a k , entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Basta verificar los casos para cuando D no tiene k -núcleo con $k = 2, k = 3$. Sea $k = 2$, como todo ciclo de D tiene longitud menor o igual a 2, D no es C_3 . Si D es semicompleta y no contiene a C_3 , por el Corolario 3.1.9 D tiene núcleo. Si D es un ciclo extendido de longitud 2, tenemos que $2|2$ y por lo tanto D tiene núcleo, los demás casos son inmediatos. Cuando $k = 3$, falta verificar para D bipartita semicompleta. Como antes mencionado en la sección 3.2 y demostrado en [11], cuando todo ciclo dirigido de D bipartita semicompleta no contiene ciclos de longitud 4 entonces tenemos que D tiene 3-núcleo. Como por el Teorema 5.3.12 los demás casos quedan verificados, tenemos que D tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

Observemos que las digráficas localmente semicompletas lineales son también digráficas local-in semicompletas lineal y local-out semicompletas lineales. Se ha probado en [19] que una digráfica D fuertemente conexas local-in semicompleta lineal es de la forma:

1. Semicompleta
2. Bipartita semicompleta
3. Ciclo extendido
4. T -digráfica

De lo cual podemos enunciar una serie de corolarios que para digráficas local-in y local-out se siguen inmediatamente de los teoremas demostrados anteriormente.

Corolario 5.3.14. *Una digráfica D fuertemente conexas local-in semicompleta lineal tiene n -núcleo si D es el ciclo extendido de longitud k y $n|k$, D tiene núcleo y k -núcleo para $k \geq 4$ si es bipartita semicompleta y D tiene k -núcleo para $k \geq 3$ en cualquier otro caso.*

Demostración. Por el Lema 3.1.10 y el Teorema 5.3.12 la demostración es inmediata. ■

Corolario 5.3.15. *Sea digráfica fuertemente conexas local-in semicompleta lineal D , si todo ciclo de D tiene longitud menor o igual a k , entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. Observemos que D no puede ser una T -digráfica para $k = 2, k = 3$ ya que T contiene un ciclo de longitud 4. Entonces por el Corolario 5.3.13 los demás casos quedan verificados y por lo tanto D tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

Además se ha probado en [19] que una digráfica D fuertemente conexas local-out semicompleta lineal es de la forma:

1. Semicompleta
2. Bipartita semicompleta
3. Ciclo extendido

4. Dual de T -digráfica

Corolario 5.3.16. *Una digráfica D fuertemente conexa local-out semicompleta lineal tiene n -núcleo si D es el ciclo extendido de longitud k y $n|k$, D tiene núcleo y k -núcleo para $k \geq 4$ si es bipartita semicompleta y D tiene k -núcleo para $k \geq 3$ en cualquier otro caso.*

Demostración. Por el Lema 3.1.11 y el Teorema 5.3.12 la demostración es inmediata. ■

Corolario 5.3.17. *Sea digráfica fuertemente conexa local-out semicompleta lineal D , si todo ciclo de D tiene longitud menor o igual a k , entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 2$.*

Demostración. La digráfica dual de una T -digráfica contiene un ciclo de longitud 4 y por lo tanto para $k = 2, k = 3$, D no puede ser \overleftarrow{T} , y por el Corolario 5.3.13 los demás casos quedan verificados y por lo tanto D tiene k -núcleo para $k \geq 2$. ■

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se encontraron condiciones suficientes para la existencia de (k, l) -núcleos en 3 familias de digráficas. En las digráficas 3-transitivas se demostró que si las componentes terminales no son isoformas a C_3 entonces la digráfica tiene núcleo, para las digráficas 3-cuasitransitivas basta pedir que sus componentes terminales tengan núcleo. En las digráficas conexas localmente semicompletas se demostró que tienen k -núcleo para $k \geq 3$ si son redondas factorizables o semicompletas, en otro caso tienen k -núcleo para $k \geq 4$; si adicionalmente se pide que para todo ciclo de la digráfica sea de longitud menor o igual a k entonces en cualquier caso la digráfica tiene k -núcleo para $k \geq 2$. En las digráficas conexas locales semicompletas lineales se demostró que D tiene k -núcleo con $k \geq 3$ si D es semicompleta ó C_3 , D tiene n -núcleo si D es ciclo extendido de longitud k con $n|k$, D tiene núcleo o k -núcleo para $k \geq 4$ si D es bipartita semicompleta y D tiene k -núcleo para $k \geq 2$ en cualquier otro caso; si adicionalmente se pide que todo ciclo de D sea de longitud menor o igual a k entonces D tiene k -núcleo para $k \geq 2$.

Los resultados antes mencionados son resultados originales y dada la dificultad de determinar si una digráfica tiene (k, l) -núcleo y de encontrarlo son de gran importancia los resultados generales y las condiciones fáciles de verificar como las demostradas en este trabajo.

Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen and G. Gutin. “Digraphs. Theory, Algorithms and Applications”, Springer-Verlag, (2002).
- [2] J. A. Bondy and Murty, U.S.R. “Graph Theory with Applications”, Elsevier North Holland, (1976).
- [3] D. Bród, A. Włoch and I. Włoch. *On the existence of $(k, k-1)$ -kernels in directed graphs*. Journal of Mathematics and its Applications, **28** (2006), 7-12.
- [4] Diestel, Reinhard “Graph Theory”, Springer, (2005).
- [5] P. Duchet. *Graphes noyau-parfaits*. Discrete Math **9** (1980), 93-101.
- [6] P. Duchet, H. Meyniel. *Une generalization du Theoreme de Richardson sur l'existence de noyaux dans ie graphes orientes*. Discrete Math. **43** (1983), 21-27.
- [7] Hortensia Galeana-Sánchez. *On the existence of (k, l) -kernels in digraphs*, Discrete Math. **5** (1990), 99-102.
- [8] Hortensia Galeana-Sánchez, Ilan A. Goldfeder. *A classification of arc-locally semicomplete digraphs* Electronic Notes in Discrete Mathematics, **34** (2009), 59-61.
- [9] Hortensia Galeana-Sánchez, Ilan A. Goldfeder, Isabel Urritia. *On the structure of strong 3-quasi-transitive digraphs* Discrete Mathematics, **310** (2010), 2495–2498.
- [10] Hortensia Galeana-Sánchez, Hernández Cruz César. *k -Kernels in generalizations of Transitive Digraphs* Discussiones Mathematicae Graph Theory **31(2)** (2011) 293–312.

-
- [11] Hortensia Galeana-Sánchez y César Hernández-Cruz. *k-Kernels in Multipartite Tournaments* AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics **8(2)** (2011), In press.
- [12] Hortensia Galeana-Sánchez y Laura Pastrana Ramírez. *Extending Digraphs to Digraphs with (without) k-Kernel*. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, **3** (2008), 229–243.
- [13] Hortensia Galeana-Sánchez y Laura Pastrana Ramírez. *k-Kernels in Orientations of the Line Graph*. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, **2** (2007), 1511–1525.
- [14] Hortensia Galeana-Sánchez y Laura Pastrana Ramírez. *Kernels and k-Kernels in Orientations of the Path Graph*. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, **5** (2010), 231–242.
- [15] César Hernandez Cruz. *3-Transitive Digraphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory, In press.
- [16] M. Kwasnik. *On (k, l)-Kernels on graphs and their products*. Ph. D. Dissertation, Wrocław 1980.
- [17] M. Richardson. *Solutions of irreflexive relations*. Annals of Math, **58** (1953), 573-580.
- [18] Waldemar Szumny, Andrzej Wloch, Iwona Wloch. *On (k, l)-Kernels in D-join of Digraphs*. Discussiones Mathematicae Graph Theory **27** (2007) 457-470.
- [19] Shiyong Wang, Ruixia Wang. *The structure of strong arc-locally in-semicomplete digraphs* Discrete Mathematics, **309** (2009), 6555–6562.
- [20] A. Włoch and I. Włoch. *(k, l)-Kernels in products of n digraphs*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Folia Scientarium Universitatis Technicae Resoviensis NR 134 Matematyka z. 15 (1995).
- [21] A. Włoch and I. Włoch. *On (k, l)-kernel minimal graphs*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Folia Scientarium Universitatis Technicae Resoviensis NR 127 Matematyka z. 15 (1994).

Índice alfabético

- (k, l) –núcleo, 27
- P –composición, 49
- T -digráfica, 34

- absorbente, 17
- acíclica, 3
- asimétrica, 3

- biorientación, 11
- bipartita semicompleta, 20

- cíclicamente k –partita, 9
- camino, 3
- componente fuertemente conexa, 8
- composición, 15
- contracción, 4
- cuasitransitiva, 39
- cuerda, 4

- digráfica, 2
- digráfica extendida, 16
- digráfica local-in(out), 12
- distancia, 4
- dual, 4

- ex-grado, 2
- ex-grado mínimo, 15
- ex-vecindad, 2

- fuertemente conexa, 8

- gráfica, 7

- gráfica de líneas, 7
- gráfica de trayectorias, 7
- gráfica subyacente, 12

- in-grado, 2
- in-grado máximo, 33
- in-vecindad, 2
- independiente, 17

- k -núcleo, 27

- localmente semicompleta, 12

- núcleo, 17
- núcleo imperfecta, 17
- núcleo perfecta, 17

- orientación, 11

- p -partición, 9
- producto cartesiano, cuadro, 15
- producto débil, 16
- producto normal, 16
- punto, 12

- redonda, 9
- redonda factorizable, 47

- seminúcleo, 17

- torneo, 13
- torneo local, 13
- transitiva, 39

trayectoria, 3

unilateralmente conexa, 8