UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Generalizaciones de Núcleos y Operaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

FRANCISCO JAVIER PÉREZ TISCAREÑO

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MUCUY-KAK DEL CARMEN GUEVARA
AGUIRRE

2012

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Pérez
Tiscareño
Francisco Javier
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304176324

2. Datos del tutor
Dra.
Mucuy-kak del Carmen
Guevara
Aguirre

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Rita Esther
Zuazua
Vega

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Diego Antonio
González
Moreno

5. Datos del sinodal 3
Dra.
Diana
Avella
Alaminos

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Ilan Abraham
Goldfeder
Ortiz

7. Datos del trabajo escrito
Generalizaciones de Núcleos y Operaciones
91 p
2012

Agradecimientos

A Dios.

A mi papá y a mi mamá, ya que ellos me han impulsado y apoyado en todos los proyectos que he realizado a lo largo de mi vida.

A mis hermanos que siempre han estado a mi lado para darme animo.

A mi novia Natalia por todo el apoyo y consejos que me dio.

Quiero expresar con mucho cariño mi sincero agradecimiento a la Dra. Mucuy-Kak del Carmen Guevara Aguirre, por su paciencia y ayuda brindada al realizar este trabajo. También agradezco a mis sinodales quienes con sus críticas y sugerencia enriquecieron este trabajo.

Índice general

Introducción

El presente trabajo se basa en el análisis de núcleos, seminúcleos y (k, l)- núcleos en dos digráficas D_1 y D_2 y la relación que mantienen al hacer el producto directo, el producto cartesiano, el producto fuerte y el producto lexicográfico de D_1 y D_2 y viceversa, además de ver la relación de una digráfica D con su digráfica de líneas con respecto a que D tenga núcleos, seminúcleos y (k, l)- núcleos.

En el primer capítulo se proporcionan los conceptos básicos que resultan necesarios para el desarrollo de la presente tesis, y se presenta al lector la notación y lenguaje matemático de que se hará uso. Cabe mencionar que en este capítulo están las definiciones de los productos cartesiano, directo, fuerte y lexicográfico además de la digráfica de líneas.

En el segundo capítulo se presenta el concepto de núcleo y el de seminúcleo. Inmediatamente son probadas afirmaciones relacionadas con seminúcleos que nos ayudarán a encontrar núcleos. Además en este capítulo estudiamos los siguientes problemas:

1. Si D_1 y D_2 tienen núcleo entonces el producto directo, el producto cartesiano, el producto fuerte y el producto lexicográfico de D_1 y D_2 tendrán núcleos y viceversa.

2. Si D tiene núcleo entonces su digráfica de líneas tendrá núcleo y viceversa.

En el tercer capítulo estudiamos los siguientes problemas:

1. Si D_1 y D_2 tienen seminúcleo entonces el producto directo, el producto cartesiano, el producto fuerte y el producto lexicográfico de D_1 y D_2 tendrán seminúcleos y viceversa.

2. Si D tienen seminúcleo, entonces su digráfica de líneas tendrá seminúcleo y viceversa.

En el cuarto capítulo se presenta la definición de (k,l)-núcleo y estudiamos los siguientes problemas:

1. Si D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo entonces el producto directo, el producto cartesiano, el producto fuerte y el producto lexicográfico de D_1 y D_2 tendrán (k,l)-núcleos y viceversa.

2. Si D tienen (k,l)-núcleo, entonces su digráfica de líneas tendrá (k,l)-núcleo y viceversa.

En el último capítulo se define la digráfica parcial de líneas y vemos que si a D le pedimos ciertas condiciones podemos demostrar que si D tiene (k,l)-núcleo entonces su digráfica parcial de líneas va a tener un (k,l)-núcleo. También damos una generalización del producto cartesiano y del producto lexicográfico y vemos qué relación tienen con respecto al (k,l)-núcleo de las digráficas que vamos a operar.

Capítulo 1

Definiciones básicas

Vamos a introducir ahora los conceptos básicos que resultan necesarios para el desarrollo de la presente tesis, y se presenta al lector la notación y lenguaje matemático de que se hará uso. [2] [3]

Definición 1.1 *Una* **digráfica** *D consiste de un* **conjunto** *no vacío de objetos llamados* **vértices***, el cual denotamos por $V(D)$, junto con una colección de pares ordenados de distintos vértices llamadas* **flechas** *a las cuales denotamos por $F(D)$.*

En esta tesis trabajaremos con digráficas finitas, esto es $|V(D)| < \infty$.

Definición 1.2 *Si $f = \overrightarrow{uv} \in F(D)$, diremos que f* **incide desde** *$u \in V(D)$ e* **incide hacia** *$v \in V(D)$. En esta tesis también ocuparemos la notación uv-flecha si $\overrightarrow{uv} \in F(D)$. Además si $S \subseteq V(D)$ y $v \in V(D)$, $\overrightarrow{vS}$ nos dice que existe una vs-flecha para algún vértice $s \in S$.*

Definición 1.3 *Sea D una digráfica y $u \in V(D)$. El* **exgrado** *de un vértice u de la digráfica D es el número de flechas de D que inciden desde u el cual denotamos por δ^+_D. El* **ingrado** *de u es el número de flechas de D que inciden hacia u el cual denotamos por δ^-_D.*

Definición 1.4 *Sea D una digráfica y $x_0, x_n \in V(D)$. Un* **camino dirigido** *de x_0 a x_n en D, el cual denotamos por x_0x_n-camino dirigido, es una sucesión de vértices $C = (x_0, x_1, ..., x_n)$ tal que $\overrightarrow{x_ix_{i+1}} \in F(D)$ para cada $0 \leq i \leq n-1$.*

Definición 1.5 *Un* **camino cerrado dirigido***, es un camino dirigido que empieza y termina en el mismo vértice, es decir, $x_0 = x_n$.*

Definición 1.6 *Sea D una digráfica y $x_0, x_n \in V(D)$. Una* **trayectoria dirigida** *de x_0 a x_n en D, la cuál denotamos por x_0x_n-trayectoria dirigida, es un camino dirigido en el cual no se repiten vértices.*

Definición 1.7 *Un* **ciclo dirigido** *es una sucesión de vértices $C = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_0)$ donde $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$, $\overrightarrow{x_ix_{i+1}} \in F(D)$ con $0 \leq i \leq n-2$ y $\overrightarrow{x_{n-1}x_0} \in F(D)$.*

Definición 1.8 *Sea D una digráfica, $z \in V(D)$ y $S \subseteq D$. Existe una* **zS-trayectoria dirigida** *si para alguna $s \in S$ existe una zs-trayectoria dirigida. Una* **trayectoria dirigida** *de x_0 a x_n en una digráfica D, la cuál denotamos por x_0x_n-trayectoria dirigida, es un camino dirigido en el cual no se repiten vértices.*

Definición 1.9 *La* **longitud** *de un camino dirigido W, la trayectoria dirigida T, el ciclo dirigido C, es el número de flechas que lo forman denotado por $long(W), long(T)$, $long(C)$, respectivamente.*

Definición 1.10 *Sea D una digráfica y $x, y \in V(D)$. La* **distancia** *de x a y es la longitud de una xy-trayectoria dirigida de longitud mínima, la cual denotamos por $d_D(x, y)$.*

Notación. Sea $C = (x_1, ..., x_n)$ un camino dirigido en una digráfica D. Si $\alpha = \overrightarrow{ax_1} \in F(D)$ donde $a \in V(D)$, entonces $\alpha \cup C = (a, x_1, ..., x_n)$.

Definición 1.11 *Sea D una digráfica y $B \subseteq V(D)$. La* **subdigráfica $\overline{B}$ inducida** *por B es la digráfica con conjunto de vértices $V(\overline{B}) = B$ y $\overrightarrow{uv} \in F(\overline{B})$ donde $u, v \in B$ si y sólo si $\overrightarrow{uv} \in F(D)$.*

Notación. Sean D, D_1 y D_2 digráficas tales que $V(D) = V(D_1) \times V(D_2)$. Una **columna** i se define como $C_i = \{(\alpha, i) \in V(D) | \ \alpha \in V(D_1)\}$ con $i \in V(D_2)$.

Definición 1.12 *Dos digráficas D_1 y D_2 cualesquiera son* **isomorfas** *si y sólo si existe una función biyectiva $f : V(D_1) \to V(D_2)$ que preserve las adyacencias de sus vértices, es decir, v_1 es adyacente a v_2 si y sólo si $f(v_1)$ es adyacente a $f(v_2)$, y lo denotaremos como $D_1 \cong D_2$.*

Definición 1.13 *Sea D una digráfica.*

1. *Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es* **independiente** *si para cualesquiera dos vértices $u, v \in S$, no existen flechas entre ellos.*

2. *Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es* **absorbente** *si para cada $z \in V(D) \backslash S$ existe $\overrightarrow{zS} \in F(D)$.*

Definición 1.14 *Una digráfica D es* **bipartita** *si existe una partición de $V(D)$ en dos conjuntos independientes.*

Definición 1.15 *Sea $S \subseteq V$, decimos que S es un* **núcleo** *de D si*

1. *S es independiente.*

2. *S es absorbente.*

Definición 1.16 *Diremos que D es una* **digráfica núcleo perfecta** *si toda subdigráfica inducida de D posee un núcleo.*

Es evidente que si D es núcleo perfecta y D_0 es subdigráfica de D entonces D_0 es también núcleo perfecta.

Definición 1.17 *Sean D_1, D_2 digráficas. Se define el* **producto cartesiano** *de D_1 con D_2 denotado por $D_1 \square D_2$ como:*
$V(D_1 \square D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$.
$F(D_1 \square D_2) = \{\overrightarrow{(v_1, v_2)(v_1^*, v_2^*)} | \overrightarrow{v_1 v_1^*} \in F(D_1)$ *y* $v_2 = v_2^*$ *o* $\overrightarrow{v_2 v_2^*} \in F(D_2)$ *y* $v_1 = v_1^*\}$.

En la figura 1.1 se da un ejemplo del producto cartesiano.

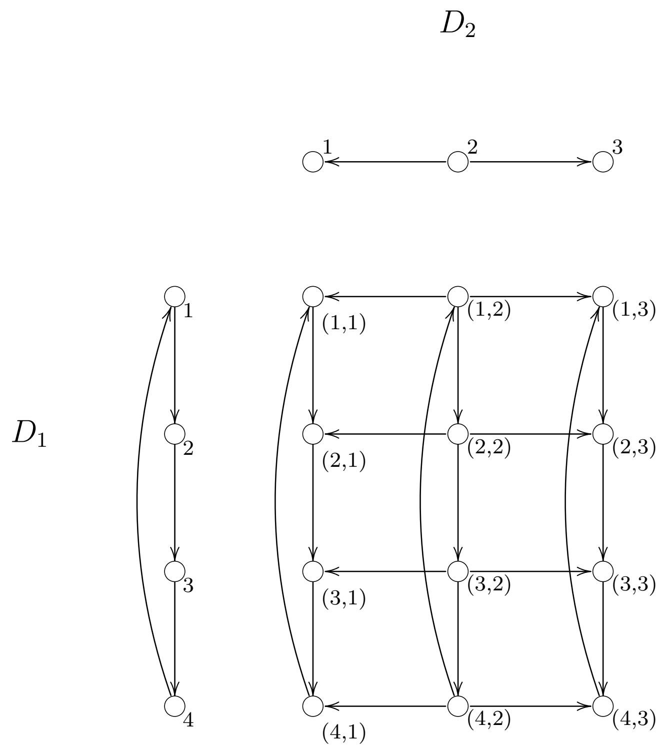

Figura 1.1: Ejemplo del producto cartesiano $D_1 \square D_2$.

Definición 1.18 *Sean D_1, D_2 digráficas. Se define el* **producto directo** *de D_1 y D_2 denotado por $D_1 \times D_2$ como:*
$V(D_1 \times D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$.
$F(D_1 \times D_2) = \{\overrightarrow{(v_1, v_2)(v_1^*, v_2^*)} | \overrightarrow{v_1 v_1^*} \in F(D_1)$ *y* $\overrightarrow{v_2 v_2^*} \in F(D_2)\}$.

En la figura 1.2 se muestra un ejemplo del producto directo.

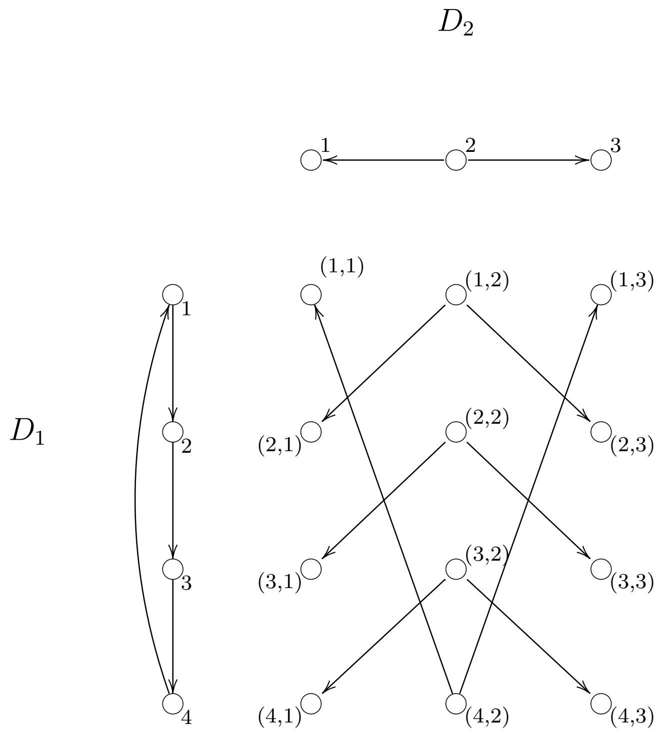

Figura 1.2: Ejemplo del producto directo $D_1 \times D_2$.

Definición 1.19 *Sean D_1, D_2 digráficas. Se define el* **producto fuerte** *de D_1 con D_2 denotado por $D_1 \boxtimes D_2$ como:*
$V(D_1 \boxtimes D_2) = V(D_1) \times V(D_2)$.
$F(D_1 \boxtimes D_2) = \{\overrightarrow{(v_1, v_2)(v_1^*, v_2^*)} | \overrightarrow{v_1 v_1^*} \in F(D_1)$ *y* $\overrightarrow{v_2 v_2^*} \in F(D_2)$ *o* $\overrightarrow{v_1 v_1^*} \in F(D_1)$ *y* $v_2 = v_2^*$ *o* $\overrightarrow{v_2 v_2^*} \in F(D_2)$ *y* $v_1 = v_1^*\}$.

En la figura 1.3 se muestra un ejemplo del producto fuerte.

Definición 1.20 *Sea H y D digráficas. Se define el* **producto lexicográfico** *de H con D denotado por $H[D]$ como:*

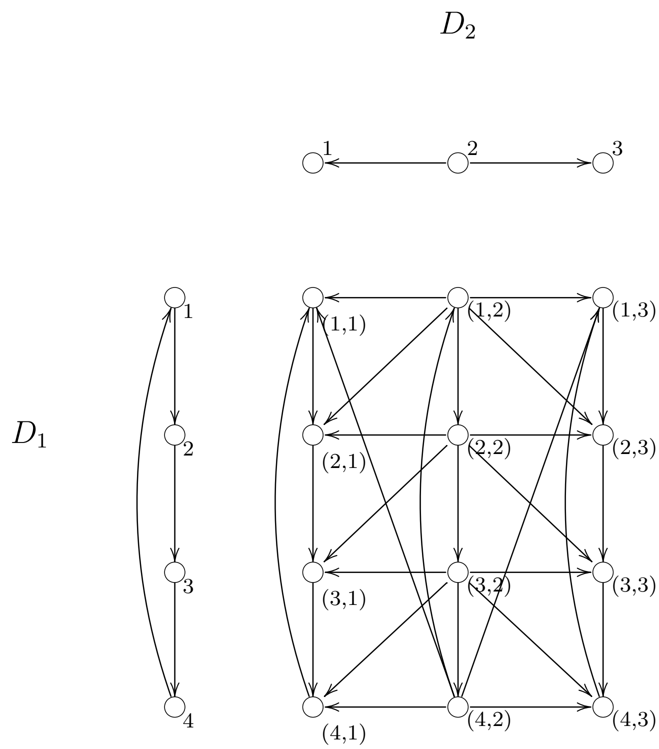

Figura 1.3: Ejemplo del producto fuerte $D_1 \boxtimes D_2$.

$V(H[D]) = V(D) \times V(H)$.
$F(H[D]) = \{\overrightarrow{(v_1, v_2)(v_1^*, v_2^*)} |$ *si* $v_2 = v_2^*$ *y* $\overrightarrow{v_1 v_1^*} \in F(D)$ *o* $\overrightarrow{v_2 v_2^*} \in F(H)\}$.

En la figura 1.4 se muestra un ejemplo del producto lexicográfico.

Definición 1.21 *Sea H un producto (cartesiano, directo, fuerte o lexicográfico) de dos digráficas, D_1 y D_2. Sea $H' \subseteq H$.*

Definimos la **proyección** *de H', $P_1(H')$, en D_1 como la subdigráfica en D_1 con:*

$V(P_1(H')) = \{x | (x, y) \in H'\}$.
$F(P_1(H')) = \{\overrightarrow{ab} | \overrightarrow{(a, c)(b, d)} \in F(H')\}$.

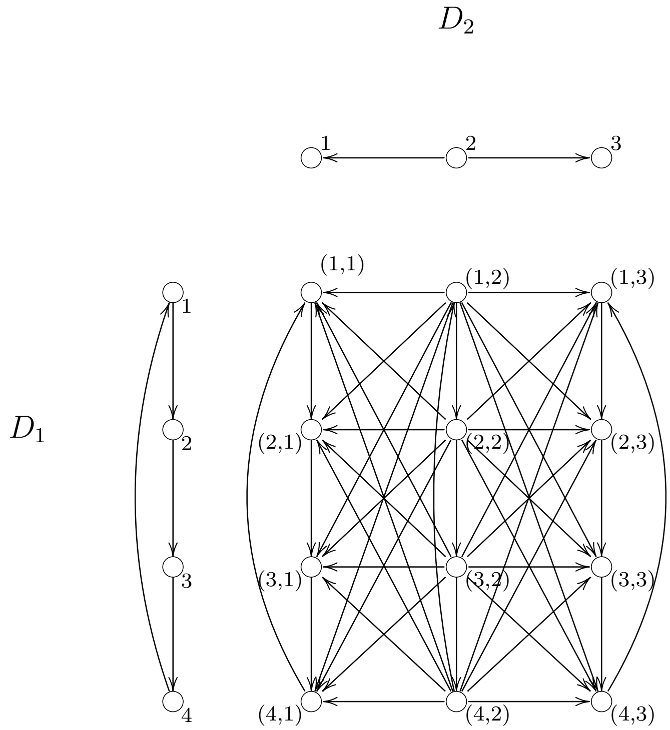

Figura 1.4: Ejemplo del producto lexicográfico $D_2[D_1]$.

Análogamente, se define la proyección de H'*,* $P_2(H')$*, en* D_2*.*

Definición 1.22 *Sea* D *una digráfica. Se define la* **digráfica de líneas***, denotada por* $L(D)$*, como:*
$V(L(D)) = \{(v_i, v_j)|\overrightarrow{v_i v_j} \in F(D)\}$.
$F(L(D)) = \{\overrightarrow{(v_i, v_j)(v_k, v_l)}|v_j = v_k\}$.

En la figura 1.5 se muestra un ejemplo de la digráfica de líneas.

Nota: Una flecha de x a y en la digráfica D la denotamos por $\overrightarrow{xy}$, mientras que un vértice en la digráfica de líneas lo denotamos por (x, y).

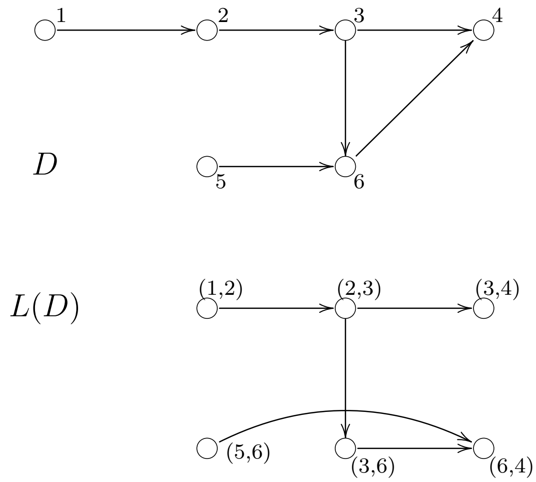

Figura 1.5: Ejemplo de la digráfica de líneas.

A continuación citaremos teoremas que nos ayudaran a lo largo de todo el trabajo. Lema de Zorn.

Lema 1.1 (Zorn) *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior contiene al menos un elemento maximal.*

Teorema 1.2 *Sea D una digráfica. Todo camino dirigido cerrado de longitud impar en D contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

Teorema 1.3 *Sea D una digráfica y $u, v \in V(D)$. Todo uv-camino dirigido en D de longitud n contiene una uv-trayectoria de longitud menor o igual a n.*

Capítulo 2

Núcleos

En este capítulo vamos a analizar si, sabiendo que las digráficas D_1 y D_2 tienen núcleo, entonces los productos entre D_1 y D_2 tendrán núcleo y viceversa. También analizaremos que si D tiene núcleo entonces su digráfica de líneas también tendrá núcleo y viceversa. Para los resultados relacionados con seminúcleos nos basamos en [4].

Definición 2.1 *Sea $S \subseteq V$, decimos que S es un* **núcleo** *de D si*

1. *S es independiente.*

2. *S es absorbente.*

Observemos que no toda digráfica tiene núcleo. Como ejemplo tomemos el ciclo dirigido de longitud 3, C_3, con vértices $1, 2, 3$. Véase figura 2.1. Tratemos de dar un núcleo. Como los tres vértices tienen exgrado 1, sin pérdida de generalidad, supongamos que el vértice 1 está en el núcleo y, como $\overrightarrow{31} \in F(C_3)$, 3 es absorbido por el vértice 1. Como $\overrightarrow{21} \notin F(C_3)$, el vértice 2 no es absorbido por el vértice 1, por lo que el vértice 2 tiene que estar en el núcleo. Esto no puede pasar, ya que como $\overrightarrow{12} \in F(C_3)$ no se satisface la independencia. Por lo tanto C_3 no tiene núcleo.

Primero daremos unos resultados que nos ayudarán a encontrar núcleos a partir de un concepto más débil.

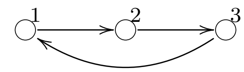

Figura 2.1: Digráfica que no tiene núcleo.

Definición 2.2 *Sea D una digráfica. Diremos que $S \subseteq V$ es* **seminúcleo** *de D si:*

1. *S es independiente.*

2. *Para cada flecha f que va de S a x (en virtud de la condición anterior, $x \in V - S$), existe una flecha f' que va de x a S.*

Claramente el conjunto $\{\emptyset\}$ es un seminúcleo. También notemos que no toda digráfica tiene seminúcleo diferente del conjunto $\emptyset$, por ejemplo un ciclo dirigido de longitud 3, el cual se muestra en la figura 2.2.

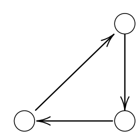

Figura 2.2: Digráfica que no tiene seminúcleo.

Observación: Sea D una digráfica, entonces todo núcleo N de la digráfica D es un seminúcleo de la digráfica D, ya que N es independiente y en particular para toda toda ab-flecha con $a \in N$, $b \in V(D) \backslash N$ como $b \notin N$ es absorbido por N, es decir existe bc-flecha, donde $c \in N$. Por lo tanto N es un seminúcleo de la digráfica D.

Así tenemos que los núcleos son seminúcleos pero no recíprocamente. En la figura 2.3 se muestra una digráfica D en la que el vértice 1 es un seminúcleo de D pero no es un núcleo. Además si queremos encontrar un núcleo, iniciamos con el vértice 1, el cual es de exgrado 0, por lo que debe de estar en el núcleo. El vértice 2 es absorbido por el vértice 1, así que no lo metemos al núcleo. Si metemos al núcleo el vértice 3, entonces 5 no está en el núcleo y tiene que estar 4 que es vecino de 3, por lo tanto 3 no está, así que 5 debe estar en el núcleo y 4 no, ya que es vecino de 5, lo que implica que el vértice 4 no es absorbido. Por lo tanto D no tiene núcleo.

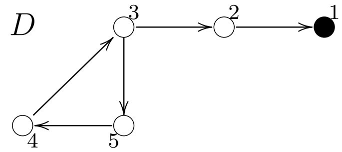

Figura 2.3: Digráfica con seminúcleo que no tiene núcleo.

Teorema 2.1 *Todo seminúcleo está incluido en un seminúcleo máximo.*

Demostración. Si D es finita, el teorema es obvio. Si D no es finita, es consecuencia directa del siguiente lema y del lema 1.1.

Lema 2.2 *El conjunto de seminúcleos de D, ordenado por la inclusión, está acotado superiormente.*

Demostración. Sea τ una cadena de seminúcleos de D, es decir, una colección de seminúcleos tal que si $S_1, S_2 \in \tau$, se tiene $S_1 \subseteq S_2$ o $S_2 \subseteq S_1$. Sea $U = \bigcup_{S \in \tau} S$

(a) U es independiente, ya que si existiera una flecha $f = \overrightarrow{v_1 v_2}$ con sus dos terminales en U, tendríamos $v_1 \in S_1 \in \tau$ para algún S_1 y $v_2 \in S_2 \in \tau$ para algún S_2. Luego $v_1, v_2 \in \max\{S_1, S_2\} \in \tau$ lo que es imposible, ya que S_1 y S_2 son seminúcleos por lo que son independientes.

(b) Si $f = \overrightarrow{sx}$ es una flecha que va de U a x, existe S tal que $s \in S \in \tau$. Como S es seminúcleo, existe una flecha $f^{'}$ que va de x a S y por consiguiente a U.

Por lo tanto U es un seminúcleo. Véase la figura 2.4. ■

Lema 2.3 *Sea S un seminúcleo de D y sean $B = \{v \in V(D) \setminus S \mid$ no existe flecha de v a $S\}$ y S' un seminúcleo de la subdigráfica $\overline{B}$. Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D.*

Demostración. Por demostrar que $S \cup S'$ es independiente. Sea f una flecha de u a v con $u, v \in S \cup S'$. Entonces tenemos los siguientes casos:

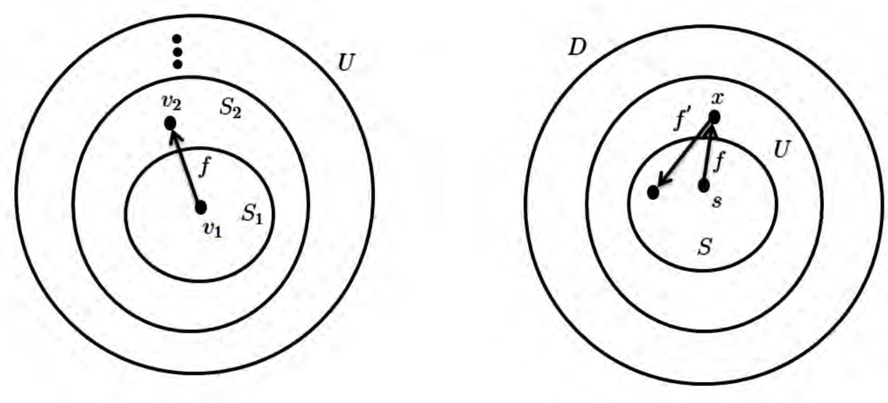

Figura 2.4: La figura de la izquierda ilustra el inciso (a) mientras la figura de la derecha el inciso (b).

(a) $u \in S$ y $v \in S$.

(b) $u \in S'$ y $v \in S'$.

(c) $u \in S'$ y $v \in S$.

(d) $u \in S$ y $v \in S'$.

(a) y (b) no pueden darse ya que S y S' son independientes. (c) es imposible por como está definido B, ya que $S' \subseteq$ B. Para terminar, si (d) se cumpliera, existiría otra flecha de v a S, por ser S seminúcleo, lo cual no se cumple por la definición de B. Por lo tanto $S \cup S'$ es independiente.

Así para demostrar que $S \cup S'$ es seminúcleo sólo falta ver que para toda flecha que sale de $S \cup S'$ a un vértice v, entonces existe una flecha de v a $S \cup S'$.

Sea f una flecha de $S \cup S'$ a x. Si $x \in A = V(D) \backslash (S \cup B)$, entonces existe una flecha f' de x a S ya que $x \notin B$ y por lo tanto hay una flecha de x a $S \cup S'$. Si $x \notin A$, f necesariamente sale de S', ya que si f sale de S y por ser S seminúcleo de D existiría una flecha de x a S, lo cual no es posible porque $x \in B$. Además tenemos que f llega a $B \backslash S$ y por ser S' seminúcleo de $\overline{B}$, existe una flecha f' de x a S' y por lo tanto de x a $S \cup S'$. Así que se cumple (b). Véase la figura 2.5.

Por lo tanto $S \cup S'$ es seminúcleo de D. ■

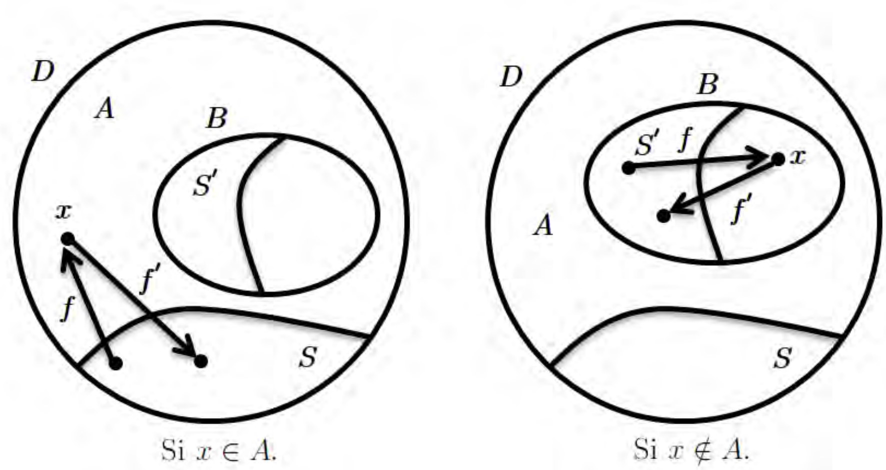

Figura 2.5: Aquí se muestra la condición (b).

Gracias al lema anterior podemos tener el siguiente lema.

Lema 2.4 *Si $B_0, B_1, ..., B_n, B_{n+1}$ y $S_0, S_1, ..., S_n$ son dos sucesiones de subconjuntos de $V(D)$ de una digráfica D tales que:*

I. $B_0 = V(D), B_n \neq \emptyset, B_{n+1} = \emptyset$.

II. *S_i es seminúcleo de la subdigráfica de D inducida por B_i para $i = 0, ..., n$.*

III. $B_{i+1} = \{x \in B_i |$ *no existe flecha de x a S_i*$\}, i = 0, ..., k$.

entonces $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ es núcleo de D_0.

Demostración. Iniciamos con $B_0 = V(D)$ y S_0 un seminúcleo de $\overline{B_0}$, es decir de D. Sea B_1 el conjunto de vértices no absorbidos por S_0 y sea S_1 un seminúcleo de $\overline{B_1}$. Por el lema 2.3 tenemos que $S_0 \cup S_1$ es un seminúcleo de $\overline{B_0}$.

Ahora consideremos a los conjuntos B_0 y $S_0 \cup S_1$ y sea B_2 el conjunto de vértices que no son absorbidos por $S_0 \cup S_1$ y sea S_2 un seminúcleo de $\overline{B_2}$ y por el lema 2.3 tenemos que $(S_0 \cup S_1) \cup S_2$ es un seminúcleo de B_0.

Consideremos a los conjuntos B_0 y $A = (S_0 \cup S_1 \cup S_2)$ y sea B_3 el conjunto de vértices que no son absorbidos por A y sea S_3 un seminúcleo de $\overline{B_3}$ y por el lema 2.3 tenemos que $A \cup S_3$ es un seminúcleo de B_0.

Seguimos con este procedimiento hasta que exista n tal que $B_{n+1} = \emptyset$ y por el lema 2.3, $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ es un seminúcleo de B_0.

Ahora demostraremos que $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ es un núcleo de B_0. Como $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ es un seminúcleo de B_0 entonces es independiente. Así sólo falta demostrar que $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ es absorbente. Supongamos que $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ no es absorbente, es decir, existe un vértice v tal que no existe una flecha de v a $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$. Entonces $v \in B_{n+1}$, lo cual es una contradicción, ya que $B_{n+1} = \emptyset$. Por lo tanto $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ es absorbente.

Así tenemos que $\bigcup_{i=0}^{n} S_i$ es núcleo de D. ■

Teorema 2.5 *Si toda subdigráfica inducida de D tiene seminúcleo, entonces D posee al menos un núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica tal que toda subdigráfica inducida tenga seminúcleo. Sea S un seminúcleo máximo por contención de D y $B = \{v \in V(D) \backslash S \mid$ no existe flecha de v a $S\}$.

Si $B \neq \emptyset$, existiría un seminúcleo $S_1 \neq \emptyset$ de la subdigráfica inducida por B. Así $S \cup S_1$ sería un seminúcleo de D por el lema 2.3 y contendría a S lo que contradice la maximalidad de S. Por lo tanto $B = \emptyset$ y S es núcleo. ■

Teorema 2.6 *Si D es finita y no posee ciclos impares entonces D contiene un seminúcleo.*

Demostración. Definamos en $V(D)$ las relaciones $\sim$ y $\lesssim$:

(a) $v^* \lesssim v$ si y sólo si existe en D un camino dirigido de v a v^*

(b) $v \sim v^*$ si y sólo si $v \lesssim v^*$ y $v^* \lesssim v$

Afirmamos que $\lesssim$ es transitiva y reflexiva. Claramente es reflexiva ya que hay un camino dirigido de x a x de longitud cero. Por demostrar $\lesssim$ es transitiva, es decir, si $a \lesssim b$ y $b \lesssim c$, entonces $a \lesssim c$. Como $a \lesssim b$, existe camino dirigido C de b a a y como $b \lesssim c$ existe un camino dirigido C_1 de c a b, así tenemos que $C_1 \cup C$ es un camino dirigido de c a a, es decir, $a \lesssim c$.

Afirmamos que $\sim$ es relación de equivalencia. Claramente es reflexiva, ya que $x \lesssim x$. También $\sim$ es simétrica, ya que si $x \sim y$ entonces $x \lesssim y$ y $y \lesssim x$ y esto también nos dice que $y \sim x$. Por demostrar que $\sim$ es transitiva, es decir, si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$. Como $x \sim y$, entonces $x \lesssim y$ y $y \lesssim x$ y como $y \sim z$, entonces $y \lesssim z$ y $z \lesssim y$. Como $x \lesssim y$ y $y \lesssim z$, entonces $x \lesssim z$ pues $\lesssim$ es transitiva. Análogamente tenemos $x \gtrsim z$. Por lo tanto $x \sim z$.

Sea $m_0 \in V(D)$ un elemento mínimo con respecto a $\lesssim$, es decir, $m \lesssim m_0$ implica que $m \sim m_0$, y $M = \{m \in V | m \sim m_0\}$. Si se toma $S = \{m \in M|$ existe un camino dirigido de longitud par de m_0 a $m\}$ e $I = \{m \in M|$ existe un camino dirigido de longitud impar de m_0 a $m\}$, entonces tenemos:

(a) $m_0 \in S$.

(b) $S \cap I = \emptyset$ pues si existiera $s \in S \cap I$, habría un camino dirigido de m_0 a s de longitud par, C_1, otro de longitud impar, C_2, y además otro de s a m_0, C_3, por ser $m_o \sim s$ (no sabemos si su longitud es par o impar). Luego existiría en D un camino dirigido cerrado de longitud impar (ya que dependiendo de la longitud de s a m_0 nos tomamos el camino de m_0 a s de longitud par o impar) y por lo tanto, un ciclo impar y ésto es una contradicción con la hipótesis. Véase la figura 2.6.

Ahora obsérvese lo siguiente:

I. Todas las flechas de D que salen de elementos de S llegan a I, ya que si $x \in S$ es porque existe un camino dirigido, C_1, de longitud par de m_0 a x y si existe

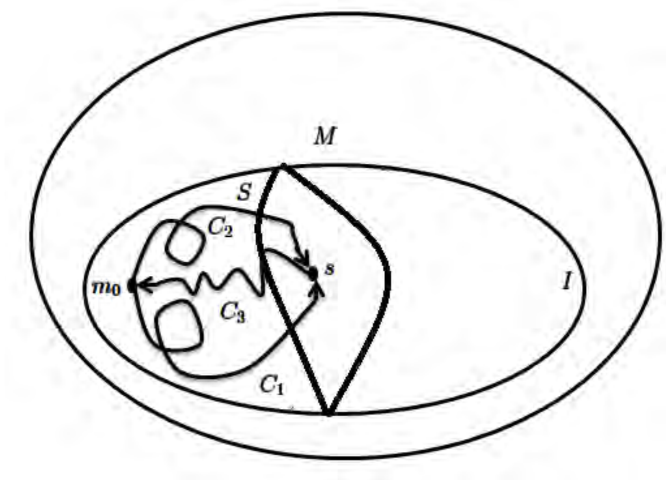

Figura 2.6: Muestra los caminos dirigidos en D, de donde se obtiene un ciclo impar.

una flecha de x a y, entonces hay un camino dirigido de m_0 a y de longitud impar, por lo tanto $y \in I$. Véase la figura 2.7. Por lo tanto S es independiente.

II. También tenemos que de cada vértice de I sale alguna flecha hacia S. Sea $x \in I$, entonces existe un camino dirigido, C_1, de longitud impar de m_0 a x y como $x \sim m_0$ tenemos que existe un camino dirigido $C = (x, v_1, ..., m_0)$ de x a m_0 y como hay una flecha que sale de x a v_1, entonces existe un camino dirigido de longitud par de m_0 a v_1, de aquí tenemos que $v_1 \in S$. Por lo tanto tenemos que S absorbe a I. Véase la figura 2.7.

De aquí se sigue que S es seminúcleo de D, pues ya vimos que S es independiente y además que cada flecha que sale de S llega a I y S absorbe a I. ■

Corolario 2.7 *(Teorema de Richardson). Si D es una digráfica finita y no posee ciclos impares entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Demostraremos que las digráficas bipartitas son núcleo perfectas. Como toda subdigráfica de una bipartita es bipartita, basta probar que cada digráfica

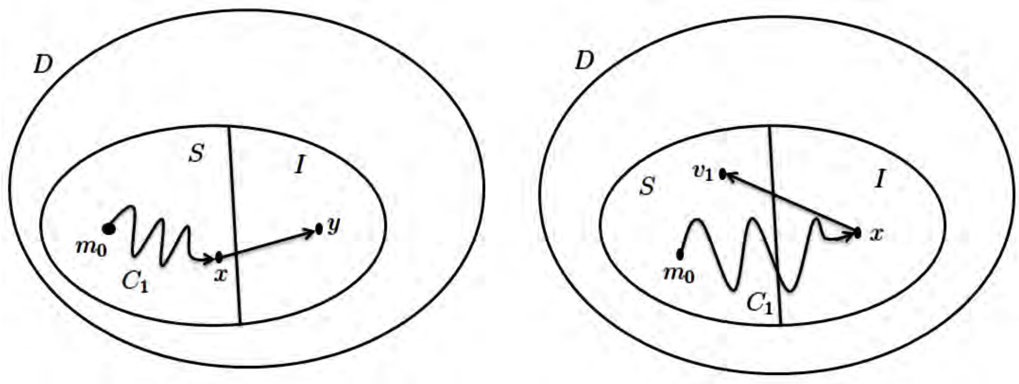

Figura 2.7: La figura de la izquierda ejemplifica la observación I y la de la derecha ejemplifica la observación II.

bipartita contiene al menos un seminúcleo. Si existe algún vértice $v \in V(D)$ del cual no salen flechas, {v} es un seminúcleo. Si no es ese el caso, sea (V_1, V_2) una descomposición de $V(D)$ en conjuntos independientes ajenos. Ahora demostremos que V_1 es absorbente. Sea $x \notin V_1$, entonces $x \in V_2$ y como de x sale una flecha y V_2 es independiente, entonces esa flecha llega a V_1 por lo tanto x es absorbido por V_1. Por lo que V_1 es núcleo ya que V_1 lo tomamos independiente y es absorbente, análogamente se muestra que V_2 es núcleo. Así V_1 y V_2 son núcleos de D, en particular seminúcleos.

■

2.1. Producto Directo

Ya teniendo los conocimientos sobre seminúcleos demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 2.8 *Sean D_1 y D_2 digráficas con núcleo, entonces el producto directo de D_1 con D_2 tiene núcleo.*

Demostración. Sean N_1 y N_2 núcleos de D_1 y D_2, respectivamente. Sea $S = N_1 \times N_2$.

Afirmación: S es un seminúcleo de $D_1 \times D_2$.

Por demostrar que S es independiente. Sean $(v_1, v_2), (v_1^*, v_2^*) \in S$. Tenemos que $\overrightarrow{v_1 v_1^*} \notin F(D_1)$ y $\overrightarrow{v_2 v_2^*} \notin F(D_2)$ ya que, $v_1, v_1^* \in N_1$ y $v_2, v_2^* \in N_2$. Por lo tanto $\overrightarrow{(v_1, v_2)(v_1^*, v_2^*)} \notin F(D_1 \times D_2)$, así que S es independiente.

Sea $x = (x_1, x_2) \in V(D_1 \times D_2) \backslash S$ y supongamos que hay flecha de S a x. Por demostrar que existe una flecha de x a S.

Sea $(y_1, y_2) \in S$ tal que $f = \overrightarrow{(y_1, y_2)(x_1, x_2)} \in F(D_1 \times D_2)$. Así que $f_1 = \overrightarrow{y_1 x_1} \in F(D_1)$ y $f_2 = \overrightarrow{y_2 x_2} \in F(D_2)$. Como $y_1 \in N_1$, entonces $x_1 \notin N_1$ ya que N_1 es núcleo. Por lo tanto existe una flecha f_1' de x_1 a N_1, $f' = \overrightarrow{x_1 n_1} \in D_1$, para algún $n_1 \in N_1$. Análogamente existe $f_2' = \overrightarrow{x_2 n_2} \in D_2$, para algún $n_2 \in N_2$. De f_1' y f_2' tenemos que existe la flecha $\overrightarrow{(x_1, x_2)(n_1, n_2)} \in D_1 \times D_2$ y ésta es la flecha que buscábamos ya que $(n_1, n_2) \in S$.

Por lo tanto S es seminúcleo de $D_1 \times D_2$.

Sea $B = (N_1 \times N_2') \cup (N_1' \times N_2)$ con $N_1' = V(D_1) \backslash N_1$ y $N_2' = V(D_2) \backslash N_2$.

Por demostrar que B es el conjunto de vértices que no son absorbidos por S. Sea $x = (u, v) \in B$ y supongamos que existe una flecha de (u, v) a $y = (n_1, n_2) \in N_1 \times N_2 = S$. Como $x \in B$, entonces $x \in N_1 \times N_2'$ o $x \in N_1' \times N_2$.

Si $x \in N_1 \times N_2'$, entonces $u \in N_1$ y $v \in N_2'$ y como existe la xy-flecha, entonces tenemos que existe $\overrightarrow{u n_1} \in F(D_1)$ pero ésto no es posible ya que $u, n_1 \in N_1$. Análogamente si $x \in N_1' \times N_2$

Ahora probaremos que todos los vértices que no son absorbidos por S están en B. Supongamos que existe $(a, b) \in V(D_1 \times D_2)$ que no es absorbido por S y que no está en B. Observemos que para que pase ésto $a \in N_1'$ y $b \in N_2'$, de otra manera (a, b) estaría en S o en B. Como $a \notin N_1$ y N_1 es núcleo de D_1, entonces a es absorbido por algún $c \in N_1$ y como $b \notin N_2$ y N_2 es núcleo de D_2, entonces b es absorbido por algún $d \in N_2$. Por la definición de producto directo existe $\overrightarrow{(a, b)(c, d)} \in F(D_1 \times D_2)$ con $(c, d) \in S$, por lo tanto (a, b) es absorbido por S, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no hay flechas de B a S.

Por demostrar que $\overline{B}$ es bipartita. Basta con demostrar que $(N_1 \times N_2')$ y $(N_1' \times N_2)$ son independientes.

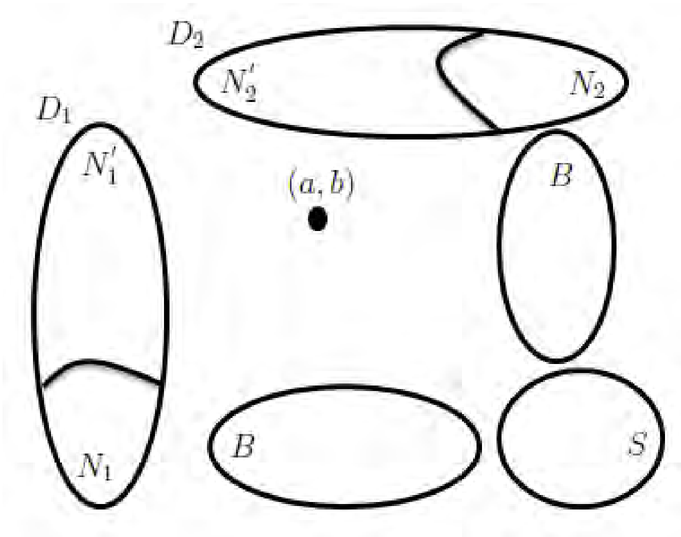

Figura 2.8: Muestra como se ve el conjunto B

Demostraremos que $(N_1 \times N_2')$ es independiente. Supongamos que $(N_1 \times N_2')$ no es independiente, es decir, sean $(u, v), (u^*, v^*) \in N_1 \times N_2'$ y que existe $\overrightarrow{(u, v)(u^*, v^*)} \in F(D_1 \times D_2)$. Como existe esta flecha, $\overrightarrow{uu^*} \in F(D_1)$ pero ésto no es posible ya que $u, u^* \in N_1$.

Por lo tanto $(N_1 \times N_2')$ es independiente.

Por demostrar que $(N_1' \times N_2)$ es independiente. Es análogo al anterior.

Entonces $\overline{B}$ es bipartita por lo tanto tiene núcleo N, y como todo núcleo es seminúcleo, N es un seminúcleo. Entonces por el lema 2.3, $N \cup S$ es núcleo de $D_1 \times D_2$.

■

Si tenemos que el producto directo de dos digráficas D_1, D_2 tiene núcleo, no necesariamente cada digráfica tiene núcleo. Daremos un contraejemplo.

Sea D_1 un ciclo dirigido de longitud 3 y D_2 una trayectoria dirigida de longitud 2. Se puede ver en la figura 2.9 que el producto directo $D_1 \times D_2$ tiene como núcleo

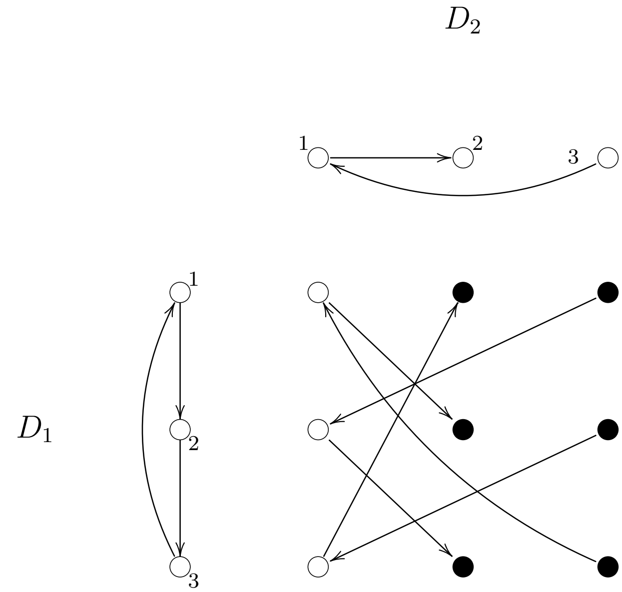

Figura 2.9: Contraejemplo de dos digráficas tal que su producto directo tiene núcleo pero al menos una no tiene núcleo.

al conjunto de vértices negros, pero D_1 no tiene núcleo, véase figura 2.1.

2.2. Producto Fuerte.

Ahora analizaremos nuestro problema para el producto fuerte, es decir, si las digráficas D_1 y D_2 tienen núcleo, entonces el producto fuerte de D_1 con D_2 tiene núcleo y viceversa.

Teorema 2.9 *Sean D_1 y D_2 digráficas con núcleo, entonces el producto fuerte de D_1 y D_2 tiene núcleo.*

Demostración. Sean N_1 y N_2 núcleos de D_1 y D_2, respectivamente.

Afirmación: $N_{D_1 \boxtimes D_2} = \{(n_1, n_2) | n_1 \in N_1 \text{ y } n_2 \in N_2\}$ es un núcleo de $D_1 \boxtimes D_2$.

Por demostrar que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es absorbente. Sea $(x, y) \notin N_{D_1 \boxtimes D_2}$, es decir, $x \notin N_1$ o $y \in N_2$.

I. Si $x \notin N_1$ entonces es absorbido por N_1, es decir, existe $\overrightarrow{xn} \in F(D_1)$ para algún $n \in N_1$.

   a) Si $y \in N_2$, entonces por la definición del producto fuerte $D_1 \boxtimes D_2$ existe $\overrightarrow{(x,y)(n,y)} \in F(D_1 \boxtimes D_2)$, por lo tanto (x, y) es absorbido por $(n, y) \in N_{D_1 \boxtimes D_2}$.

   b) Si $y \notin N_2$, entonces es absorbido por $m \in N_2$, es decir, existe $\overrightarrow{ym} \in F(D_2)$. Y por la definición de $D_1 \boxtimes D_2$, existe $\overrightarrow{(x,y)(n,m)} \in F(D_1 \boxtimes D_2)$. Y como $(n, m) \in N_{D_1 \boxtimes D_2}$, entonces (x, y) es absorbido.

II. Si $y \notin N_2$ y $x \in N_1$. Como $y \notin N_2$, entonces existe $\overrightarrow{ym} \in F(D_2)$ para algún $m \in N_2$. Por la definición de $D_1 \boxtimes D_2$ existe $\overrightarrow{(x,y)(x,m)} \in F(D_1 \boxtimes D_2)$, así (x, y) es absorbido.

Por demostrar que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es independiente. Supongamos que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ no es independiente, es decir, sean $(a, b), (c, d) \in N_{D_1 \boxtimes D_2}$, lo cual implica que $a, c \in N_1$ y $b, c \in N_2$, y supongamos que existe $f = \overrightarrow{(a,b)(c,d)} \in F(D_1 \boxtimes D_2)$. Como existe la flecha f y por la definición del producto fuerte $D_1 \boxtimes D_2$ tenemos 3 casos:

I. $\overrightarrow{ac} \in F(D_1)$ y $\overrightarrow{bd} \in F(D_2)$, pero ésto es imposible ya que $a, c \in N_1$ y $b, c \in N_2$.

II. $\overrightarrow{ac} \in F(D_1)$ y $b = d$, lo cual es una contradicción, ya que $a, c \in N_1$.

III. $\overrightarrow{bd} \in F(D_2)$ y $a = c$. Así tenemos una contradicción, ya que $b, c \in N_2$.

Por lo tanto $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es independiente. Con lo que queda demostrado que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es un núcleo de $D_1 \boxtimes D_2$. ■

Pero al analizar nuestro problema acerca de si la existencia de un núcleo para $D_1 \boxtimes D_2$ implica la existencia de núcleos en D_1 y D_2 no logramos demostrarlo ni dar un contraejemplo.

2.3. Producto Cartesiano

Al estudiar nuestro problema para el producto cartesiano, es decir, encontrar un núcleo en el producto cartesiano de las digráficas D_1 y D_2, sabiendo que D_1 y D_2 tienen núcleo y viceversa, llegamos a las siguientes conclusiones:

Si D_1 y D_2 tienen núcleo no necesariamente el producto cartesiano $D_1 \square D_2$ va a tener núcleo. En la figura 2.10 tenemos dos digráficas D_1 con $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F(D) = \{\overrightarrow{41}, \overrightarrow{31}, \overrightarrow{21}, \overrightarrow{24}\}$ y D_2 una trayectoria de longitud dos, las cuales tienen como núcleo al conjunto de vértices negros en cada digráfica. Ahora en $D_1 \square D_2$ vemos que el vértice (1,3) por ser de exgrado cero debe de estar en el núcleo, entonces los vértices (2,3), (3,3), (4,3) y (1,2) son absorbidos y por lo tanto no están en el núcleo. El vértice (1,1) ésta en el núcleo, ya que la única flecha que le sale es hacia el (1,2) el cual ya es absorbido, por lo que al agregar dicho vértice éste absorbe a los vértices (2,1), (3,1) y (4,1). Así sólo nos quedan los vértices (2,2), (3,2) y (4,2), pero estos vértices nos inducen un ciclo de longitud tres, el cual no tiene núcleo. Por lo tanto $D_1 \square D_2$ no tiene núcleo.

También tenemos que si $D_1 \square D_2$ tiene núcleo no necesariamente las digráficas D_1 y D_2 tienen núcleo. En la figura 2.11 tenemos dos digráficas D_1 y D_2, ambas son ciclos dirigidos de longitud tres. Los vértices negros en $D_1 \square D_2$ forman un núcleo de $D_1 \square D_2$, ya que claramente son independientes y el vértice $(1, 1)$ absorbe a los vértices $(1, 3)$ y $(3, 1)$, el vértice $(2, 2)$ absorbe a los vértices $(2, 1)$ y $(1, 2)$, el vértice $(3, 3)$ absorbe a los vértices $(3, 2)$ y $(2, 3)$ por lo que absorben a todos los vértices blancos. Pero D_1 no tiene núcleo.

Cuando se tenga productos cartesianos no vamos a tener información sobre si el núcleo se preserva al operar, de igual manera si conocemos que el producto tiene núcleo no podemos asegurar que las digráficas a las cuales les aplicamos el producto van a tener núcleo.

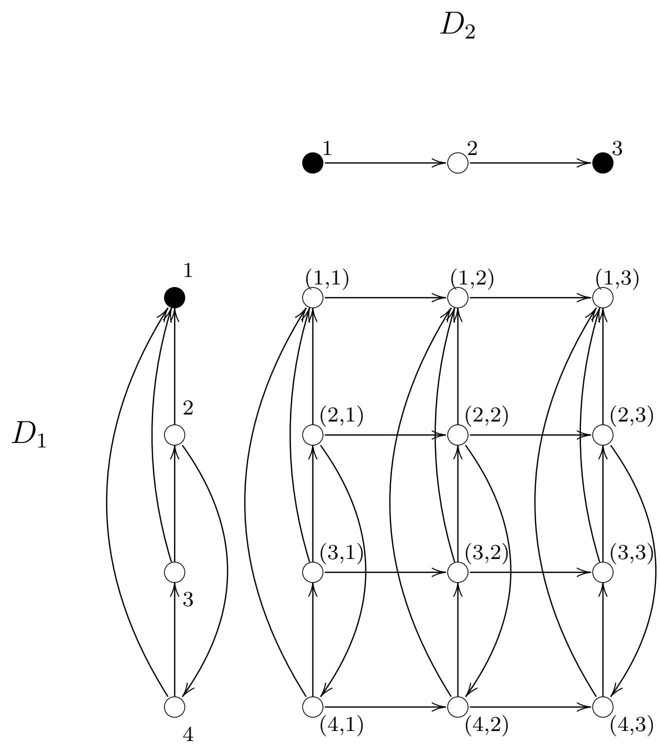

Figura 2.10: Cada digráfica tiene núcleo pero el producto cartesiano no.

2.4. Producto Lexicográfico

Ahora nos enfocaremos en el producto lexicográfico.

Teorema 2.10 *Sean H y D digráficas. Entonces H y D tienen núcleo si y sólo si $H[D]$ tiene núcleo.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sean N_H y N_D el núcleo de H y D, respectivamente
Afirmación: $S = \{(v, w) \in V(H[D]) | v \in N_D \text{ y } w \in N_H\}$ es el núcleo de $H[D]$.

Por demostrar que S es absorbente. Sea $x = (a, b) \notin S$, es decir, $a \notin N_D$ o $b \notin N_H$. Si $b \notin N_H$ entonces existe $\overrightarrow{by} \in F(H)$ para algún $y \in N_H$, por lo tanto existe $\overrightarrow{(a, b)(v, y)} \in F(H[D])$ para todo $v \in V(D)$, en particular para alguna $n \in N_D$. Así tenemos que $(n, y) \in S$, de donde concluimos que (a, b) es absorbido por S. Si

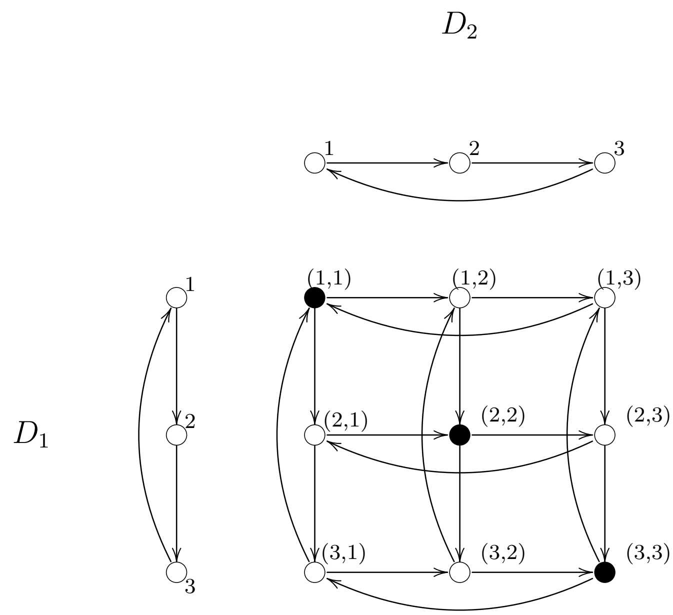

Figura 2.11: El producto cartesiano tiene núcleo pero sus factores no tienen.

$a \notin N_D$, implica que $\overrightarrow{az} \in F(D)$ para algún $z \in N_D$. Si $b \in N_H$, entonces existe la flecha $\overrightarrow{(a,b)(z,b)} \in F(H[D])$ donde $(z,b) \in S$, por lo tanto (a,b) es absorbido por S. Y si $b \notin N_H$, entonces estamos en el caso anterior.

Por demostrar que S es independiente. Supongamos que S no es independiente. Sean $(a,b),(c,d) \in S$, por lo que $a,c \in N_D$ y $b,d \in N_H$, y supongamos que existe $\overrightarrow{(a,b)(c,d)} \in F(H[D])$. Así que tenemos dos opciones para nuestros vértices:

I. $b = d$ y $\overrightarrow{ac} \in F(D)$ lo cual no es posible, ya que $a,c \in N_D$.

o

II. $\overrightarrow{bd} \in F(H)$ que también es imposible, pues $b,d \in N_H$.

Así S es independiente. Por lo tanto S es núcleo de $H[D]$.

$\Leftarrow]$ Sea $N_{H[D]}$ el núcleo de $H[D]$. Primero demostremos que H tiene núcleo.

Afirmación: $N_H = \{b|(a,b) \in N_{H[D]}\}$.

Por demostrar que N_H es independiente. Sean $x, y \in N_H$ con $x \neq y$, es decir, existen $(a,x),(b,y) \in N_{H[D]}$, y supongamos que existe una flecha $f = \overrightarrow{xy} \in F(H)$. De la definición del producto lexicográfico y la existencia de f se sigue que $\overrightarrow{(a,x)(b,y)} \in F(H[D])$ lo cual es una contradicción, ya que ambos vértices están en el núcleo de $H[D]$.

Por demostrar que N_H es absorbente. Sea $x \notin N_H$, como $x \notin N_H$ tenemos que $(a,x) \notin N_{H[D]}$ para toda $a \in V(D)$ por lo que (a,x) es absorbido por $N_{H[D]}$, es decir, existe una flecha $f = \overrightarrow{(a,x)(n_1 n_2)} \in F(H[D])$ con $(n_1,n_2) \in N_{H[D]}$, así $n_2 \in N_H$. Como existe f y de la definición del producto lexicográfico tenemos dos casos:

I. $x = n_2$ y $\overrightarrow{an_1} \in F(D)$. Este caso no es posible, ya que por un lado tenemos que $x \notin N_H$ y $n_2 \in N_H$ y por otro lado tenemos que $x = n_2$, lo cual es una contradicción.

II. $\overrightarrow{xn_2} \in F(H)$. Ésto nos dice que x es absorbido por N_H, ya que $n_2 \in N_H$. Véase figura 2.12.

Por lo tanto N_H es núcleo de H.

Ahora demostremos que D tiene núcleo. Sea $C_i = \{(a,i) \in V(H[D]) | i \in V(H)\}$ la columna i tal que $C_i \cap N_{H[D]} \neq \emptyset$. Sea $C = H[D]\overline{C_i}$. Sabemos que $C \cong D$, así basta con encontrar un núcleo para C y terminamos.

Afirmación: $A = N_{H[D]} \cap C_i$ es núcleo de C.

Por demostrar que A es independiente. Como $A \subset N_{H[D]}$, entonces A es independiente.

Ahora demostraremos que A es absorbente. Sea $(a,i) \in V(C) \backslash A$. Como $(a,i) \notin A$ tenemos que $(a,i) \notin N_{H[D]}$ por lo que es absorbido por $(n_1,n_2) \in N_{H[D]}$, es decir, $\overrightarrow{(a,i)(n_1,n_2)} \in F(H[D])$, y de la definición de $F(H[D])$ tenemos dos casos:

I. $n_2 = i$. Ya terminamos, ya que $(n_1, n_2 = i) \in A$. Por lo tanto (a,i) es absorbido por A. Véase figura 2.13.

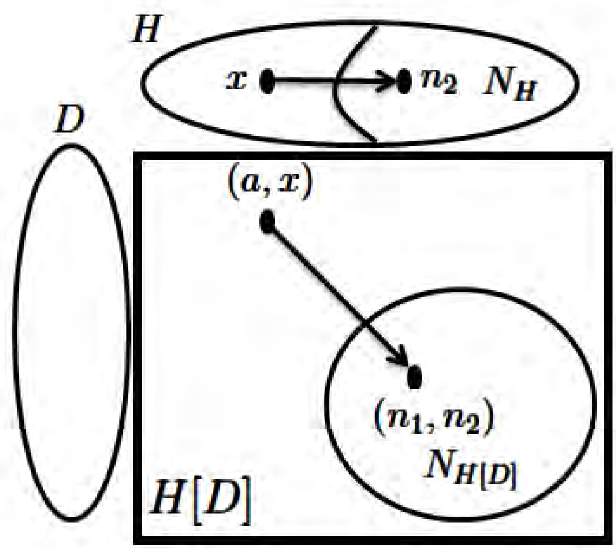

Figura 2.12: Muestra que x es absorbido por N_H.

II. $n_2 \neq i$. Entonces tenemos que $\overrightarrow{in_2} \in F(H)$ y como $C_i \cap N_{H[D]} \neq \emptyset$ existe $(x, i) \in A$. Por la definición de $F(H[D])$ existe $\overrightarrow{(x, i)(n_1, n_2)} \in F(H[D])$ lo cual es una contradicción, ya que ambos vértices están en el núcleo de $H[D]$. Por lo tanto este caso no puede pasar. Véase figura 2.13.

Así tenemos que A es absorbente. Por lo tanto A es núcleo de C. ■

2.5. Digráficas de Líneas

Por último analizaremos la digráfica de líneas. Recordemos de la definición 1.22 que una flecha f, en D que va del vértice a al vértice b la denotamos por $f = \overrightarrow{ab} \in F(D)$ y al vértice en $L(D)$ inducido por f lo denotamos por $(a, b) \in V(L(D))$.

Teorema 2.11 *Sea D una digráfica, entonces D tiene núcleo si y sólo si su digráfica de líneas tiene núcleo.*

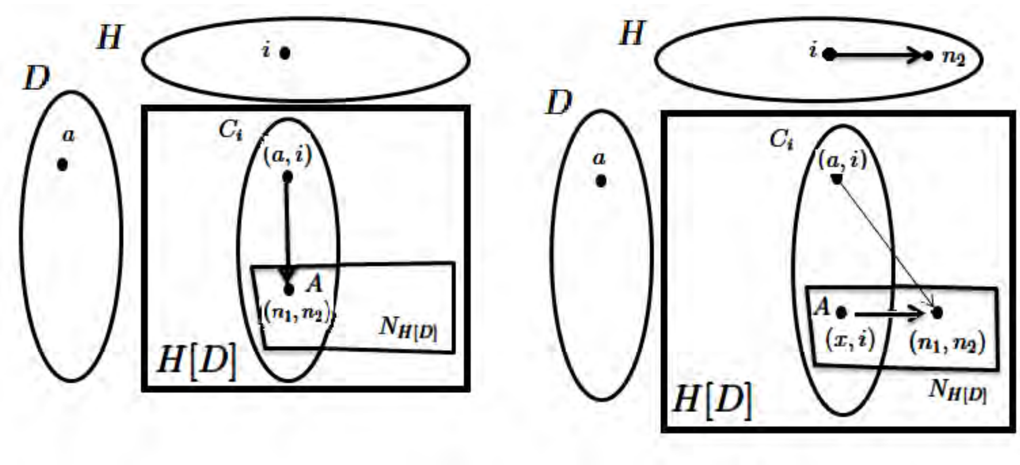

Figura 2.13: A la izquierda se ilustra el caso I y a la derecha el caso II. del teorema 2.10

Demostración. $\Rightarrow$] Sea N_D un núcleo de D. **Afirmación:** $N_{L(D)} = \{(x,n) \in V(L(D))| \; n \in N_D\}$ es un núcleo de $L(D)$. Por demostrar que $N_{L(D)}$ es absorbente.

Sea $(v_1, v_2) \notin N_{L(D)}$ con $\overrightarrow{v_1 v_2} \in F(D)$, es decir, $v_2 \notin N_D$ entonces existe $\overrightarrow{v_2 n} \in F(D)$ para algún $n \in N_D$. Por lo que existe $\overrightarrow{(v_1,v_2)(v_2,n)} \in F(L(D))$ y como $(v_2, n) \in N_{L(D)}$ tenemos que (v_1, v_2) es absorbido por $N_{L(D)}$. Véase la figura 2.14.

Ahora demostraremos que $N_{L(D)}$ es independiente.

Supongamos que $N_{L(D)}$ no es independiente, es decir, sean $(x,n),(y,m) \in N_{L(D)}$, así $n, m \in N_D$ y supongamos que $\overrightarrow{(x,n)(y,m)} \in F(L(D))$. De aquí tenemos que $\overrightarrow{xn}, \overrightarrow{ym} \in F(D)$. Además tenemos que $n = y$, por lo tanto $\overrightarrow{nm} \in F(D)$, lo cual es una contradicción, ya que $n, m \in N_D$ que es independiente. Por lo tanto $N_{L(D)}$ es independiente.

Con lo que queda demostrado que $N_{L(D)}$ es núcleo de $L(D)$.

$\Leftarrow$] Sea $N_{L(D)}$ un núcleo en $L(D)$.

Afirmación: $N_D = \{x \in V(D)| \text{ para todo } y \in N^+(x), (x,y) \notin N_{L(D)}\}$ es núcleo de D.

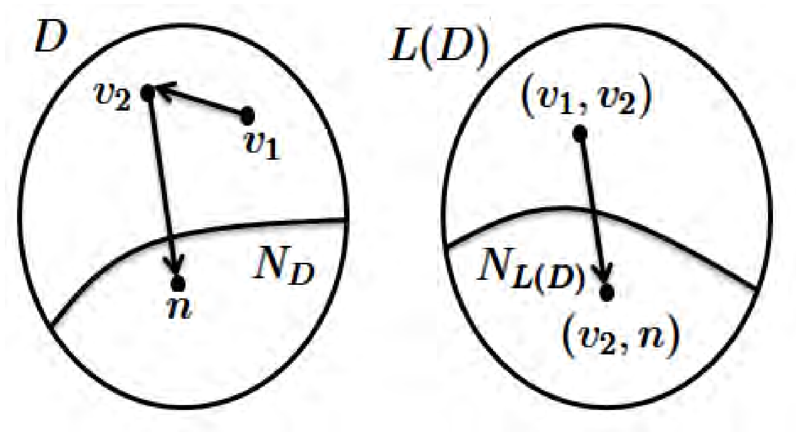

Figura 2.14: $N_{L(D)}$ es absorbente.

Por demostrar que N_D es independiente. Sean $\alpha, \beta \in N_D$. Así que $(\alpha, x) \in V(L(D)) \setminus N_{L(D)}$ para toda $x \in N^+(\alpha)$ y $(\beta, y) \in V(L(D)) \setminus N_{L(D)}$ para toda $y \in N^+(\beta)$. Supongamos que existe $\overrightarrow{\alpha\beta} \in F(D)$, por lo que existe $(\alpha, \beta) \in V(L(D))$. Como $(\alpha, \beta) \notin N_{L(D)}$, entonces es absorbido por algún $(\beta, \lambda) \in N_{L(D)}$, lo cual es una contradicción, ya que como $\beta \in N_D$ entonces $(\beta, \lambda) \notin N_{L(D)}$. Por lo tanto $\overrightarrow{\alpha\beta} \notin F(D)$. Así tenemos que N_D es independiente.

Por demostrar que N_D es absorbente. Sea $\alpha \notin N_D$, entonces existe $(\alpha, x) \in N_{L(D)}$. Además para todo $\lambda_i \in V(D)$ tal que $(x, \lambda_i) \in V(L(D))$ tenemos que $(x, \lambda_i) \notin N_{L(D)}$, ya que si existiera $(x, \lambda) \in N_{L(D)}$ tendríamos $\overrightarrow{(\alpha, x)(x, \lambda)} \in F(L(D))$ lo cual es una contradicción ya que ambos vértices están en $N_{L(D)}$. Así tenemos que $x \in N_D$, por lo tanto α es absorbido por $x \in N_D$. Con lo que queda demostrado que N_D es absorbente.

Por lo tanto N_D es núcleo de D. ■

Observemos que tanto el producto lexicográfico como la digráfica de líneas se comportan de una manera bonita, ya que si sabemos que las digráficas tienen núcleo entonces en el producto lexicográfico o en la digráfica de líneas podemos asegurar la existencia de núcleo y viceversa.

Capítulo 3

Seminúcleos

En este capítulo relajaremos las condiciones pidiendo hipótesis más débiles. Nuestro problema ahora consiste en encontrar seminúcleos, es decir, nos vamos a preguntar si siempre que tengamos que las digráficas tienen seminúcleos, entonces los productos o la digráfica de líneas tendrán seminúcleo. También analizaremos el recíproco, si el producto o la digráfica de líneas tienen seminúcleo, entonces las digráficas originales tendrán un seminúcleo.

3.1. Producto Directo

Primero analizaremos nuestro problema para el producto directo.

Teorema 3.1 *Sean D_1 y D_2 digráficas con seminúcleo, entonces el producto directo de D_1 y D_2 tiene seminúcleo.*

Demostración. Sean S_{D_1} y S_{D_2} seminúcleos de D_1 y D_2, respectivamente.

Afirmación: $S_{D_1} \times S_{D_2} = \{(a,b) \in V(D_1 \times D_2) | a \in S_{D_1} \text{ y } b \in S_{D_2}\}$ es seminúcleo de $D_1 \times D_2$.

Por demostrar que $S_{D_1} \times S_{D_2}$ es independiente. Sean $(a,b),(c,d) \in S_{D_1} \times S_{D_2}$, entonces, $a,c \in S_{D_1}$ y $b,d \in S_{D_2}$. Así que $\overrightarrow{ac} \notin F(D_1)$ y $\overrightarrow{bd} \notin F(D_2)$, por lo que $\overrightarrow{(a,b)(c,d)} \notin F(D_1 \times D_2)$. Por lo tanto $S_{D_1} \times S_{D_2}$ es independiente.

Ahora supongamos que existe una flecha $f = \overrightarrow{(s_1,s_2)(n,m)}$ donde $(s_1,s_2) \in S_{D_1} \times S_{D_2}$ y $(n,m) \notin S_{D_1} \times S_{D_2}$. Por demostrar que existe una flecha de (n,m) a $S_{D_1} \times S_{D_2}$. Como existe la flecha f, tenemos que $\overrightarrow{s_1 n} \in F(D_1)$ y $\overrightarrow{s_2 m} \in F(D_2)$, por lo que $n \notin S_{D_1}$ y $m \notin S_{D_2}$ por la independencia de S_i. Como s_1, s_2 están en seminúcleos, entonces existen las flechas $\overrightarrow{ns_1^*} \in F(D_1)$ con $s_1^* \in S_{D_1}$ y $\overrightarrow{ms_2^*} \in F(D_2)$ con $s_2^* \in S_{D_2}$. Y por la definición de $D_1 \times D_2$ existe $\overrightarrow{(n,m)(s_1^*,s_2^*)} \in F(D_1 \times D_2)$. Así tenemos que existe una flecha de (n,m) a $S_{D_1} \times S_{D_2}$.

Por lo tanto $D_1 \times D_2$ tiene seminúcleo. ■

Si el producto directo de las digráficas D_1 y D_2 tiene seminúcleo, entonces no necesariamente tanto D_1 como D_2 van a tener seminúcleo. Para dar un ejemplo de esto veamos la figura 2.9 donde la digráfica D_1 es un ciclo dirigido de longitud tres y D_2 una trayectoria dirigida de longitud dos. Se puede ver que el producto directo $D_1 \times D_2$ tiene como núcleo al conjunto de vértices negros, el cual es un seminúcleo, pero D_1 no tiene seminúcleo.

3.2. Producto Fuerte

Ahora analicemos el producto fuerte.

Teorema 3.2 *Sean D_1 y D_2 digráficas con seminúcleo, entonces el producto fuerte de D_1 y D_2 tiene seminúcleo.*

Demostración. Sean S_{D_1} y S_{D_2} seminúcleos de D_1 y D_2, respectivamente.

Afirmación: $S_{D_1 \boxtimes D_2} = \{(a,b) \in V(D_1 \boxtimes D_2) | a \in S_{D_1} \text{ y } b \in S_{D_2}\}$ es un seminúcleo de $D_1 \boxtimes D_2$.

Por demostrar que $S_{D_1 \boxtimes D_2}$ es independiente. Sean $(a,b),(c,d) \in S_{D_1 \boxtimes D_2}$, es decir, $a,c \in S_{D_1}$ y $b,d \in S_{D_2}$, entonces $\overrightarrow{ac} \notin F(D_1)$ y $\overrightarrow{bd} \notin F(D_2)$, por lo tanto $\overrightarrow{(a,c)(b,d)} \notin F(D_1 \boxtimes D_2)$. Así tenemos que $S_{D_1 \boxtimes D_2}$ es independiente.

Ahora supongamos que existe una flecha $f = \overrightarrow{(s_1,s_2)(n,m)}$ donde $(s_1,s_2) \in S_{D_1 \boxtimes D_2}$ y $(n,m) \notin S_{D_1 \boxtimes D_2}$. Por demostrar que existe una flecha de (n,m) a $S_{D_1 \boxtimes D_2}$. De la existencia de f tenemos tres casos:

I. $\overrightarrow{s_1 n} \in F(D_1)$ y $\overrightarrow{s_2 m} \in F(D_2)$. Este caso es inmediato, ya que $D_1 \boxtimes D_2 \supset D_1 \times D_2$. Notemos que nuestro seminúcleo que proponemos para el producto fuerte y directo es el mismo.

II. $\overrightarrow{s_1 n} \in F(D_1)$ y $s_2 = m$. Como $s_1 \in S_{D_1}$ y $n \notin S_{D_1}$, existe una flecha de n a S_{D_1}, es decir, $\overrightarrow{ns_1'} \in F(D_1)$ con $s_1' \in S_{D_1}$. Así tendremos que $\overrightarrow{(n,m)(s_1',s_2)} \in F(D_1 \boxtimes D_2)$, donde $(s_1',s_2) \in S_{D_1} \boxtimes S_{D_2}$.

III. $\overrightarrow{s_2 m} \in F(D_2)$ y $s_1 = n$. Este caso es análogo al anterior.

Por lo tanto existe una flecha de (n,m) a $S_{D_1 \boxtimes D_2}$. ■

Al analizar nuestro problema cuando el producto fuerte de las digráficas D_1 con D_2 tiene seminúcleo no logramos demostrar que D_1 y D_2 tuvieran seminúcleo, ni logramos dar un contraejemplo.

3.3. Producto Cartesiano

En el capítulo anterior habíamos visto que si D_1 y D_2 tienen núcleo no necesariamente $D_1 \square D_2$ tiene núcleo. Ahora demostraremos un resultado que nos asegura la existencia de seminúcleos en el producto cartesiano.

Teorema 3.3 *Sean D_1 y D_2 digráficas. Si D_1 y D_2 tienen seminúcleo, entonces el producto cartesiano de D_1 y D_2 tiene seminúcleo.*

Demostración.

Sean S_{D_1} y S_{D_2} seminúcleos de D_1 y D_2 respectivamente.

Afirmación: $S = \{(a,b) \in V(D_1 \Box D_2) | a \in S_1$ y $b \in S_2\}$.

Primero demostraremos que S es independiente. Sean $(a,b),(c,d) \in S$, así tenemos que $a, c \in S_{D_1}$ y $b, d \in S_{D_2}$. Como S_{D_1} y S_{D_2} son seminúcleos, son independientes, lo cual implica que $\overrightarrow{ac} \notin F(D_1)$ y $\overrightarrow{bc} \notin F(D_2)$. Así que $\overrightarrow{(a,b)(c,d)} \notin F(D_1 \Box D_2)$. Por lo tanto S es independiente.

Sea $(m,n) \in S$, es decir, $m \in S_{D_1}$ y $n \in S_{D_2}$ y supongamos que existe $f = \overrightarrow{(m,n)(x,y)} \in F(D_1 \Box D_2)$ con $(x,y) \notin S$. Por demostrar que existe $\overrightarrow{(x,y)S} \in F(D_1 \Box D_2)$.

Como existe la flecha f y de la definición de producto cartesiano tenemos dos casos:

I. $\overrightarrow{mx} \in F(D_1)$ y $n = y$. Como $m \in S_{D_1}$, entonces existe $\overrightarrow{xm'} \in F(D_1)$ donde $m' \in S_{D_1}$ y como $n = y$ tenemos que existe $\overrightarrow{(x,y)(m',n)} \in F(D_1 \Box D_2)$.

II. $\overrightarrow{ny} \in F(D_2)$ y $m = x$. Como $n \in S_{D_1}$, entonces existe $\overrightarrow{yn'} \in F(D_1)$ donde $n' \in S_{D_2}$ y como $m = x$ tenemos que existe $\overrightarrow{(x,y)(m,n')} \in F(D_1 \Box D_2)$.

Por lo tanto S es seminúcleo. ■

Ahora nos preguntamos si siempre que el producto cartesiano $D_1 \Box D_2$ tiene seminúcleo entonces D_1 y D_2 van a tener seminúcleo. Ésto es falso y para ver un contraejemplo veamos la figura 2.11 en la que tenemos dos digráficas D_1 y D_2, ambas digráficas ciclos dirigidos de longitud tres. Los vértices negros en $D_1 \Box D_2$ forman un núcleo de $D_1 \Box D_2$ por lo que también forman un seminúcleos, pero D_1 no tiene seminúcleo.

3.4. Producto Lexicográfico

Sigamos nuestro análisis con el producto lexicográfico.

Teorema 3.4 *Sean D y H digráficas. Entonces D y H tienen seminúcleo si y sólo si el producto lexicográfico $H[D]$ tiene seminúcleo.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sean S_D y S_H seminúcleos de D y H, respectivamente.

Afirmación: $S_{H[D]} = \{(x, y) \in V(H[D]) | x \in S_D$ y $y \in S_H\}$ es un seminúcleo de $H[D]$.

Por demostrar que $S_{H[D]}$ es independiente. Sean $(v_1, v_2), (v_3, v_4) \in S_{H[D]}$ ésto nos dice que $v_1, v_3 \in S_D$ y $v_2, v_4 \in S_H$, entonces $\overrightarrow{v_1v_3} \notin F(D)$ y $\overrightarrow{v_2v_4} \notin F(H)$. Así que $\overrightarrow{(v_1, v_2)(v_3, v_4)} \notin F(H[D])$. Por lo tanto $S_{H[D]}$ es independiente.

Sea $(a, b) \in S_{H[D]}$, es decir, $a \in S_D$, $b \in S_H$ y supongamos que existe $f = \overrightarrow{(a, b)(c, d)} \in F(H[D])$ donde $(c, d) \notin S_{H[D]}$. Por demostrar que existe una flecha de (c, d) a $S_{H[D]}$. Por la existencia de f tenemos dos casos:

I. $b = d$ y $\overrightarrow{ac} \in F(D)$. Como $\overrightarrow{ac} \in F(D)$, $c \notin S_D$. Así que $\overrightarrow{cs} \in F(D)$ para alguna $s \in S_D$, ya que $a \in S_D$ y S_D es seminúcleo. Así tenemos que existe $\overrightarrow{(c, d)(s, d)} \in F(H[D])$ de donde $(s, d) \in S_{H[D]}$ ya que $d = b \in S_H$.

II. $\overrightarrow{bd} \in F(H)$. Como $d \notin S_H$, ya que $b \in S_H$ y $b, d \in F(H)$, entonces existe $\overrightarrow{ds} \in F(H)$ donde $s \in S_H$, por lo tanto existe $\overrightarrow{(c, d)(a, s)} \in F(H[D])$ de donde $(a, s) \in S_{H[D]}$.

Por lo tanto $S_{H[D]}$ es un seminúcleo de $H[D]$.

$\Leftarrow$] Sea $S_{H[D]}$ un seminúcleo de $H[D]$.

Afirmación: $S_H = \{b | (a, b) \in S_{H[D]}\}$ es un seminúcleo de H.

Por demostrar que S_H es independiente. Sean $x, y \in S_H$ con $x \neq y$, es decir, existe $a, b \in V(D)$ tal que $(a, x), (b, y) \in S_{H[D]}$.Ya que $S_{H[D]}$ es seminúcleo $\overrightarrow{(a, x)(b, y)} \notin F(H[D])$, entonces $\overrightarrow{xy} \notin F(H)$.

Ahora supongamos que existe una flecha de $f = \overrightarrow{sx} \in F(H)$, donde $s \in S_H$ y $x \notin S_H$. Por demostrar que existe una flecha de x a S_H.

Como $s \in S_H$, entonces existe $s_d \in V(D)$ tal que $(s_d, s) \in S_{H[D]}$. Ya que $x \notin S_H$ para toda $\alpha \in V(D), (\alpha, x) \notin S_{H[D]}$. Además por la existencia de f y la definición del producto lexicográfico $\overrightarrow{(s_d, s)(\alpha, x)} \in F(H[D])$ para toda α. Por lo tanto existe $\overrightarrow{(\alpha, x)(s_d^*, s^*)} \in F(H[D])$ con $(s_d^*, s^*) \in S_{H[D]}$, así que $s^* \in S_H$. Por la definición de las flechas tenemos dos opciones a) $x = s^*$ y $\overrightarrow{\alpha s_d^*} \in F(D)$ o b)$\overrightarrow{xs^*} \in F(H)$. a) no es posible, ya que como $x = s$ se tendría que $s, x \in S_H$. Así tenemos que pasa b), por lo que existe una flecha de x a S_H. Por lo tanto S_H es un seminúcleo de H.

Para encontrar un seminúcleo de D hagamos lo siguiente: Sea C_i una columna de $H[D]$ tal que tenga vértices del seminúcleo de $S_{H[D]}$. La digráfica inducida por C_i denotada por C es isomorfa a D. Si encontramos un seminúcleo en C, tendríamos un seminúcleo para D. Por demostrar que $S_C = \{S_{H[D]} \cap C_i\}$ es seminúcleo de C. Claramente S_C es independiente, ya que es un subconjunto de vértices de $S_{H[D]}$. Por demostrar que si existe $f = \overrightarrow{(a,i)(b,i)} \in F(C)$ donde $(a, i) \in S_C$ y $(b, i) \notin S_C$, entonces existe $\overrightarrow{(b,i)S_C}$-flecha. Como existe f, debe de existir $f_1 = \overrightarrow{(b,i)(d,h)} \in F(H[D])$ donde $(d, h) \in S_{H[D]}$, por definición de seminúcleo. $(d, h) \in S_C$, de lo contrario tenemos $i \neq h$ por lo que $\overrightarrow{ih} \in F(H)$, así existe $\overrightarrow{(a,i)(d,h)} \in F(H[D])$, lo cual no es posible ya que ambos vértices están en S_C. Por lo tanto $(d, h) \in S_C$. Por lo que queda demostrado que C tiene seminúcleo. ■

3.5. Digráfica de Líneas

Para terminar el capítulo estudiaremos nuestro problema en las digráfica de líneas.

Teorema 3.5 *Sea D una digráfica, entonces D tiene seminúcleo si y sólo si la digráfica de líneas, $L(D)$, tiene seminúcleo.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea S un seminúcleo de D.

Afirmación: $S_{L(D)} = \{(x, y) \in V(L(D)) | y \in S\}$ es seminúcleo de $L(D)$.

Por demostrar que $S_{L(D)}$ es independiente. Sean $(x, \alpha), (y, \beta) \in S_{L(D)}$, es decir, $\alpha, \beta \in S$. Supongamos que existe $\overrightarrow{(x,\alpha)(y,\beta)} \in F(L(D))$, entonces $\alpha = y$, ésto no es posible ya que $\overrightarrow{\alpha\beta} = \overrightarrow{y\beta} \notin F(D)$ porque son vértices del seminúcleo S. Por lo tanto $S_{L(D)}$ es independiente.

Ahora supongamos que existe $f = \overrightarrow{(x,\alpha)(\alpha,y)} \in F(L(D))$ donde $(x,\alpha) \in S_{L(D)}$ y $(\alpha,y) \notin S_{L(D)}$. Por demostrar que existe $\overrightarrow{(\alpha,y)S_{L(D)}}$-flecha en $F(L(D))$. Como $\overrightarrow{\alpha y} \in F(D)$ con $\alpha \in S$, $y \notin S$ y sabiendo que S es un seminúcleo, entonces existe $\overrightarrow{ys} \in F(D)$ donde $s \in S$. Por lo tanto existe $\overrightarrow{(\alpha,y)(y,s)} \in F(L(D))$ donde $(y,s) \in S_{L(D)}$.

$\Longleftarrow$] Sea $S_{L(D)}$ un seminúcleo de $L(D)$.

Afirmación: $S_D = \{b|(a,b) \in S_{L(D)}\}$ es un seminúcleo de D.

Por demostrar que S_D es independiente. Sean $x, y \in S_D$, es decir, existe (α, x), $(\beta, y) \in S_{L(D)}$ y supongamos que $\overrightarrow{xy} \in F(D)$. Así tenemos que $(x,y) \in V(L(D))$ y $\overrightarrow{(\alpha,x)(x,y)} \in F(L(D))$. Podemos observar que $(x,y) \notin S_{L(D)}$, por lo que existe $\overrightarrow{(x,y)(y,d)} \in F(L(D))$ donde $(y,d) \in S_{L(D)}$. Pero $\overrightarrow{(\beta,y)(y,d)} \in F(L(D))$ lo cual contradice que $S_{L(D)}$ es independiente.

Ahora supongamos que existe $(b,\alpha) \in F(D)$ con $\alpha \notin S_D$ y $b \in S_D$. Por demostrar que existe $\overrightarrow{\alpha S_D}$-flecha. Como $\overrightarrow{b\alpha} \in F(D)$, $(b,\alpha) \in V(L(D))$. Como $b \in S_D$ tenemos que existe $(a,b) \in S_{L(D)}$, así $\overrightarrow{(a,b)(b,\alpha)} \in F(L(D))$ y como $(a,b) \in S_{L(D)}$ y $S_{L(D)}$ es seminúcleo existe $\overrightarrow{(b,\alpha)(\alpha,s)} \in F_{L(D)}$ donde $(\alpha,s) \in S_{L(D)}$, es decir, $s \in S_D$, así tenemos que $\overrightarrow{\alpha s} \in F(D)$. Por lo tanto existe una flecha de α a S_D. ■

Capítulo 4

(k,l)-Núcleos

En este capítulo centraremos nuestra atención en una generalización del concepto de núcleo el cual se llama (k,l)-núcleo. Nuestro problema será encontar un (k,l)-núcleo en el producto de D_1 y D_2 o en la digráfica de líneas $L(D)$ sabiendo que D_1,D_2 y D tienen (k,l)-núcleo. También analizaremos el recíproco, si el producto de D_1 y D_2 o la digráfica de líneas $L(D)$ tienen (k,l)-núcleo, entonces D_1,D_2 y D tendrán (k,l)-núcleo.

Definición 4.1 *Sea D una digráfica.*

I. *Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es* ***k*-independiente***, si para cualesquiera dos vértices $u, v \in S$, con $u \neq v$, $d_D(u,v) \geq k$.*

II. *Un conjunto $S \subseteq V(D)$ es* ***l*-absorbente***, si para cada $z \in (V(D) \backslash S)$ existe una zS-trayectoria de longitud menor o igual que l, por lo que $d_D(z,S) \leq l$.*

Definición 4.2 *Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$. S es un* **$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})$-núcleo** *de D si*

I. *S es k-independiente.*

II. *S es l-absorbente.*

Observación: Un núcleo es un $(2,1)$-núcleo.

4.1. Producto Cartesiano

Con esta operación vamos a tener que si las digráficas D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo no necesariamente el producto cartesiano de D_1 con D_2 tiene (k,l)-núcleo. En la figura 2.10 tenemos dos digráficas D_1 con $V(D) = \{1,2,3,4\}$ y $F(D) = \{\overrightarrow{41}, \overrightarrow{31}, \overrightarrow{21}, \overrightarrow{24}\}$ y D_2 una trayectoria de longitud dos, las cuales tienen como núcleo, es decir $(2,1)$-núcleo, al conjunto de vértices negros en cada digráfica. Ya habíamos visto que $D_1 \square D_2$ no tiene núcleo, es decir no tienen un $(2,1)$-núcleo.

También tenemos que si $D_1 \square D_2$ tiene (k,l)-núcleo no necesariamente las digráficas D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo. En la figura 2.11 tenemos dos digráficas D_1 y D_2, ambas son ciclos dirigidos de longitud tres. Un núcleo de $D_1 \square D_2$ está formado por los vértices negros en $D_1 \square D_2$, pero recordemos que un núcleo es un $(2,1)$-núcleo, así $D_1 \square D_2$ tiene un $(2,1)$-núcleo. Pero D_1 no tiene núcleo, es decir, no tiene un $(2,1)$-núcleo.

4.2. Producto Directo

Al analizar nuestro problema para el producto directo, es decir, encontrar un (k,l)-núcleo en el producto de D_1 y D_2 sabiendo que D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo y viceversa, vamos a tener que si el producto directo de D_1 con D_2 tiene (k,l)-núcleo no necesariamente las digráficas D_1 y D_2 tendrán (k,l)-núcleo. Para dar un ejemplo de esto veamos la figura 2.9 donde la digráfica D_1 es un ciclo dirigido de longitud tres y D_2 una trayectoria dirigida de longitud dos. Se puede ver que el conjunto de vértices negros en el producto directo $D_1 \times D_2$ es un núcleo, por lo que es un $(2,1)$-núcleo. Pero D_1 no tiene núcleo, es decir, D_1 no tiene un $(2,1)$-núcleo.

Pero si D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo, no llegamos a una conclusión, ya que no se logró demostrar que $D_1 \times D_2$ tuviera (k,l)-núcleo, ni se logró dar un contraejemplo.

4.3. Producto Fuerte

Nos preguntamos nuestro problema para el producto fuerte, es decir, si las digráficas D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo, entonces el producto fuerte de D_1 con D_2 tiene (k,l)-núcleo y viceversa.

Teorema 4.1 *Si las digráficas D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo, entonces el producto fuerte de D_1 con D_2 tiene (k,l)-núcleo.*

Demostración. Sean N_{D_1} y N_{D_2} (k,l)-núcleos de D_1 y D_2, respectivamente.

Afirmación: $N_{D_1 \boxtimes D_2} = \{(n_i, n_j) | n_i \in N_{D_1}$ y $n_j \in N_{D_2}\}$ es un (k,l)-núcleo de $D_1 \boxtimes D_2$.

Por demostrar que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es l-absorbente. Sea $(a,b) \notin N_{D_1 \boxtimes D_2}$, es decir, $a \notin N_{D_1}$ ó $b \notin N_{D_2}$:

I. Si $a \notin N_{D_1}$, entonces existe una trayectoria dirigida $T_{D_1} = (a, x_1, ..., x_{m-1}, n_1)$ en D_1 donde $n_1 \in N_{D_1}$ y de longitud $m \leq l$. Si además $b \in N_{D_2}$, entonces en $D_1 \boxtimes D_2$ existe una trayectoria dirigida $T_{D_1 \boxtimes D_2} = ((a,b), (x_1, b), ..., (x_{m-1}, b), (n_1, b))$ en $D_1 \boxtimes D_2$ donde $(n_1, b) \in N_{D_1 \boxtimes D_2}$ de longitud $m \leq l$. Por lo tanto (a,b) es l-absorbido por $N_{D_1 \boxtimes D_2}$. Véase la figura 4.1. Pero si $b \notin N_{D_2}$, entonces b es l-absorbido por N_{D_2}, es decir, existe una trayectoria dirigida $T_{D_2} = (b, y_1, ..., y_{n-1}, n_2)$ en D_2 donde $n_2 \in D_2$ de longitud $n \leq l$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \leq n$, entonces por la definición del producto fuerte, existe una trayectoria dirigida $T_{D_1 \boxtimes D_2} = ((a,b), (x_1, y_1), ..., (n_1, y_m))$. Como $(y_m, y_{m+1}), ..., (y_{n-1}, n_2) \in F(D_2)$, entonces existe la trayectoria dirigida $T^*_{D_1 \boxtimes D_2} = ((a,b), (x_1, y_1), ..., (n_1, y_m), (n_1, y_{m+1}), ..., (n_1, n_2))$ con $(n_1, n_2) \in N_{D_1 \boxtimes D_2}$ de longitud $n \leq l$. Por lo tanto (a,b) es l-absorbido por $N_{D_1 \boxtimes D_2}$. Véase la figura 4.2.

II. Si $a \in N_{D_1}$ entonces $b \notin N_{D_2}$. Así que b es l-absorbido por N_{D_2}, es decir, existe en D_2 una trayectoria dirigida $T_{D_2} = (b, y_1, ..., y_{n-1}, n_2)$ donde $n_2 \in N_{D_2}$ y de longitud $n \leq l$. Entonces por la definición del producto fuerte, existe

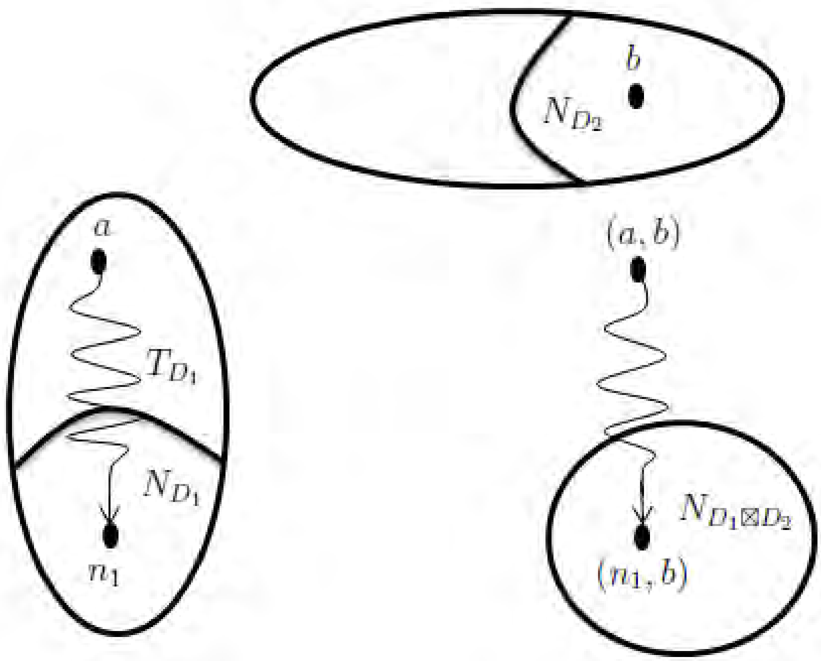

Figura 4.1: Ejemplifica la l-absorbencia en el caso de que $a \notin N_{D_1}$y $b \in N_{D_2}$.

una trayectoria dirigida $T_{D_1 \boxtimes D_2} = ((a,b),(a,y_1),...,(a,y_{n-1}),(a,n_2))$ con $(a,n_2) \in N_{D_1 \boxtimes D_2}$ de longitud $n \leq l$. Por lo tanto (a,b) es l-absorbido por $N_{D_1 \boxtimes D_2}$.

Así queda demostrado que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es l-absorbente.

Ahora demostraremos que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es k-independiente. Sean $(a,b),(c,d) \in N_{D_1 \boxtimes D_2}$, es decir, $a,c \in N_{D_1}$ y $b,d \in N_{D_2}$. Supongamos que existe una trayectoria dirigida $T_{D_1 \boxtimes D_2} = ((a,b),(x_1,y_1),...,(x_{n-1},y_{n-1}),(c,d))$ en $D_1 \boxtimes D_2$ de longitud $n < k$. Sean $P_1(T_{D_1 \boxtimes D_2})$ y $P_2(T_{D_1 \boxtimes D_2})$, las proyecciones de $T_{D_1 \boxtimes D_2}$ sobre D_1 y D_2 respectivamente, véase la definición 1.21. Así $P_1(T_{D_1 \boxtimes D_2}) = C_1 = (a,x_1,...,x_{n-1},c)$ y $P_2(T_{D_1 \boxtimes D_2}) = C_2 = (b,y_1,...,y_{n-1},d)$. Notemos que C_1 y C_2 son caminos dirigi-

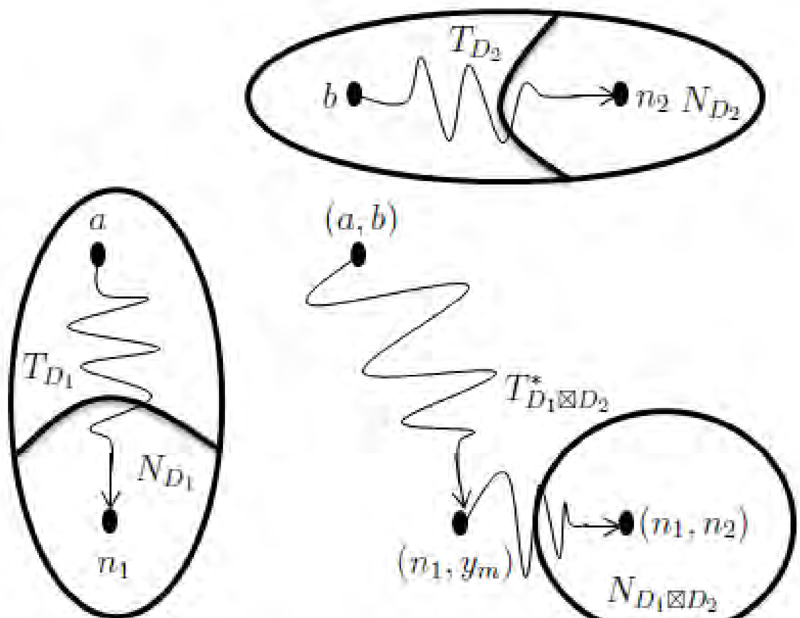

Figura 4.2: Ejemplifica la l-absorbencia en el caso de que $a \notin N_{D_1}$y $b \notin N_{D_2}$.

dos y ambos de longitud $n \leq k$ y estos caminos contienen trayectorias dirigidas T_{C_1} y T_{C_2} de longitud menor o igual a n. Lo cual es una contradicción, ya que $a, c \in N_{D_1}$, $b, d \in N_{D_2}$ y N_{D_1}, N_{D_2} son (k, l)-núcleos, por lo que son k-independientes. Por lo tanto $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es k-independiente.

Por lo que $N_{D_1 \boxtimes D_2}$ es (k, l)-núcleo de $D_1 \boxtimes D_2$.

■

Al analizar nuestro problema cuando el producto fuerte de D_1 con D_2 tiene (k, l)-núcleo no logramos demostrar que D_1 y D_2 tenían (k, l)-núcleo, ni logramos dar un contraejemplo.

4.4. Producto Lexicográfico

Ahora toca el turno de analizar el producto lexicográfico. Sean H y D digráficas. Si H y D tienen (k,l)-núcleo no necesariamente el producto lexicográfico $H[D]$ tiene (k,l)-núcleo. En la figura 4.3 tenenos dos digráficas D y H las cuales tienen un $(4,2)$-núcleo, $N_D = \{2,6\}$ y $N_H = \{1,5\}$, respectivamente. Demostraremos que en el producto lexicográfico de H con D no vamos a tener un $(4,2)$-núcleo. Supongamos que existe un $(4,2)$-núcleo, $N_{H[D]}$, en $H[D]$. El vértice $(6,1)$ tiene que estar en $N_{H[D]}$ por ser de exgrado cero y éste 2-absorbe a los vértices $(5,1),(4,1),(i,2),(i,3)$ con $i = 1,2,3,4,5,6$. El vértice $(3,1)$ no puede estar en $N_{H[D]}$, ya que $d_{H[D]}((3,1)(6,1)) = 3$, por lo que debe de ser 2-absorbido por algún vértice en $N_{H[D]}$. Notemos que los únicos vértices que 2-absorben al vértice $(3,1)$ y que están a distancia mayor o igual a 4 con el vértice $(6,1)$ son $(2,1)$ y $(1,1)$. Metemos a $N_{H[D]}$ el vértice $(2,1)$. Este vértice 2-absorbe a los vértices $(3,1)$ y $(1,1)$. Observemos que los vértices de la forma $(i,4)$ con $i = 1,2,3,4,5,6$ no pueden agregarse a $N_{H[D]}$, ya que $d_{H[D]}((i,4),\{(6,1),(2,1)\}) = 3$. Por lo que tenemos que buscar un tercer vértice que los 2-absorba ya que tampoco los absorbe el $(2,1)$. Podemos elegir algún vértice de la forma $(i,5)$ o de la forma $(i,6)$ con $i = 1,2,3,4,5,6$. Elijamos al vértice $(2,5)$ para agregarlo a $N_{H[D]}$. El vértice $(2,5)$ 2-absorbe a los vértices $(3,5),(1,5),(i,4),(i,6)$ con $i = 1,2,3,4,5,6$. Así sólo nos quedan los vértices $(4,5),(5,5),(6,5)$, pero $d_{H[D]}((i,5)(2,5)) = 3$ con $i = 4,5,6$, por lo que no los podemos agregar al $(4,2)$-núcleo pero no son 2-absorbidos. Nótese que algo análogo pasa si incluimos $(1,1)$ en vez del $(2,1)$ o si incluimos $(i,5)$ ó $(i,6)$ en lugar de $(2,5)$. Por lo cual $H[D]$ no tiene un $(4,2)$-núcleo.

Teorema 4.2 *Sean H y D digráficas. Si el producto lexicográfico $H[D]$ tiene (k,l)-núcleo, entonces H y D tienen (k,l)-núcleo.*

Demostración. Sea $N_{H[D]}$ un núcleo en $H[D]$. Primero demostremos que H tiene (k,l)-núcleo.

Afirmación: $N_H = \{b \in V(H) | (a,b) \in N_{H[D]}\}$ es un (k,l)-núcleo de H.

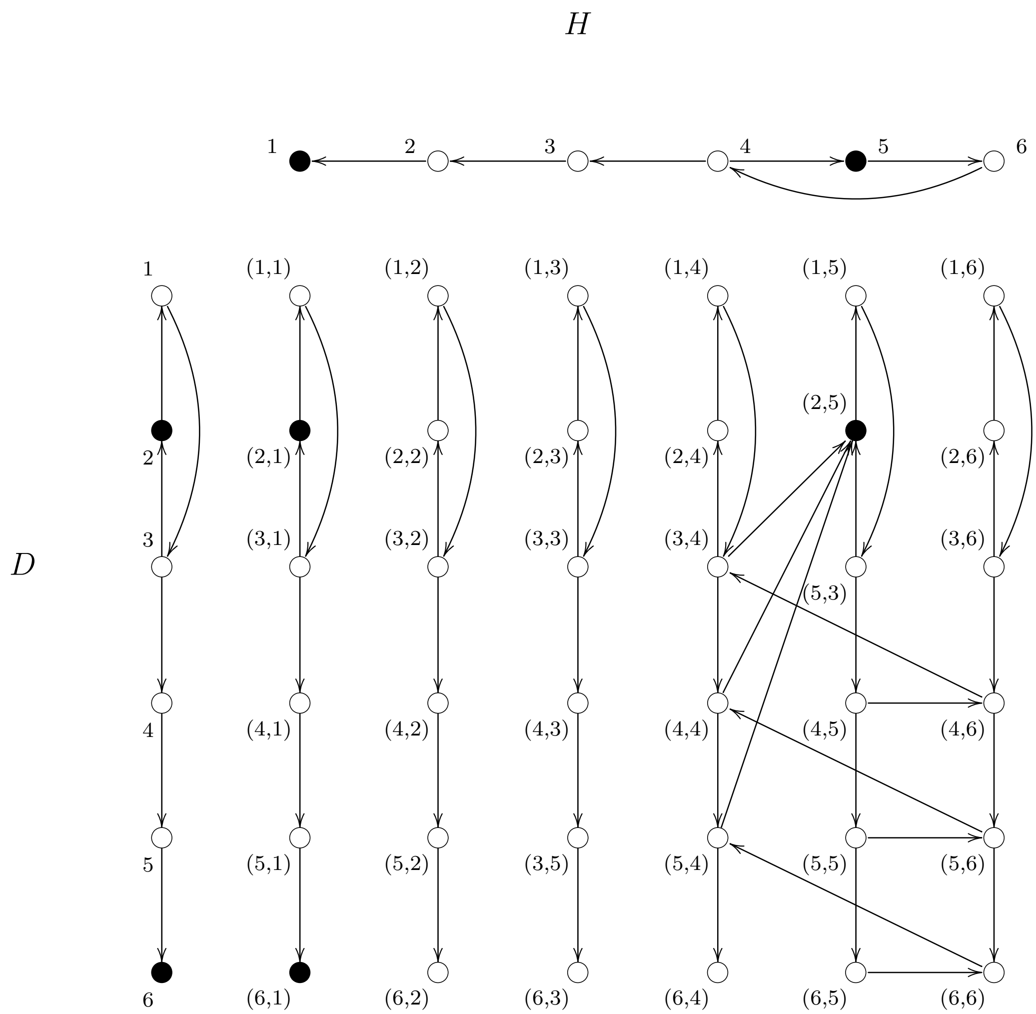

Figura 4.3: H y D tienen un (4,2)-núcleo pero el producto lexicográfico de H con D no tiene. En H[D] nos faltaron aristas por poner.

Primero demostraremos que N_H es k-independiente. Supongamos que N_H no es k-independiente. Sean $a, b \in N_H$ y $T_H = (a, x_1, ..., x_{n-1}, b)$ una trayectoria dirigida en H de longitud $n < k$. $a, b \in N_H$ implica que $(c, a), (d, b) \in N_{H[D]}$. Por la definición de $H[D]$ y la existencia T_H, existe $T_{H[D]} = ((c, a), (y_1, x_1), ..., (y_{n-1}, x_{n-1}), (d, b))$ una trayectoria dirigida en $H[D]$ de longitud $n \leq k$. Esto es una contradicción, ya que $(c, a), (d, b) \in N_{H[D]}$ y $N_{H[D]}$ es k-independiente.

Por lo tanto N_H es k-independiente.

Ahora demostraremos que N_H es l-absorbente. Sean $b \notin N_H$. Por demostrar que b es l-absorbido por N_H. Como $b \notin N_H$ implica que para toda $x \in V(D)$ se tiene que $(x, b) \notin N_{H[D]}$. Así (x, b) es l-absorbido, es decir, existe $T_{H[D]} = ((x, b), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (c, d))$ con $(c, d) \in N_{H[D]}$ una trayectoria dirigida en $H[D]$ de longitud $n \leq l$. Sea $P_1(T_{H[D]})$ la proyección de $T_{H[D]}$ en H. Así $P_1(T_{H[D]}) = C = (b, y_1, ..., y_{n-1}, d)$ es un camino dirigido de longitud $n \leq l$. Observemos que $(c, d) \in N_{H[D]}$ implica que $d \in N_H$. Sabemos que C contiene una bd-trayectoria dirigida T_H de longitud $m \leq n \leq l$. Por lo tanto b es l-absorbido por N_H. Véase la figura 4.4. Por lo tanto N_H es l-absorbente.

Por lo que N_H es (k, l)-núcleo de H.

Ahora demostremos que D tiene (k, l)-núcleo. Sea C_i una columna tal que $A \neq \emptyset$ donde $A = \{C_i \bigcap N_{H[D]}\}$.

Afirmación: $N_D = \{a | (a, i) \in A\}$ es un (k, l)-núcleo de D.

Demostración. Primero veamos que N_D es k-independiente. Sean $a, b \in N_D$ y supongamos que no es k-independiente, es decir, existe una trayectoria dirigida $T_D = (a, x_1, ..., x_{n-1}, b)$ en D de longitud $n < k$. Así existe una trayectoria dirigida $T_{H[D]} = ((a, i), (x_1, i), ..., (x_{n-1}, i)\ (b, i))$ en $H[D]$ de longitud $n < k$, lo cual es una contradicción ya que $(a, i), (b, i) \in A$ y por ser $A \subset N_{H[D]}$ y $N_{H[D]}$ es un conjunto$k$-independiente, entonces $d_{H[D]}((a, i), (b, i)) \geq k$.

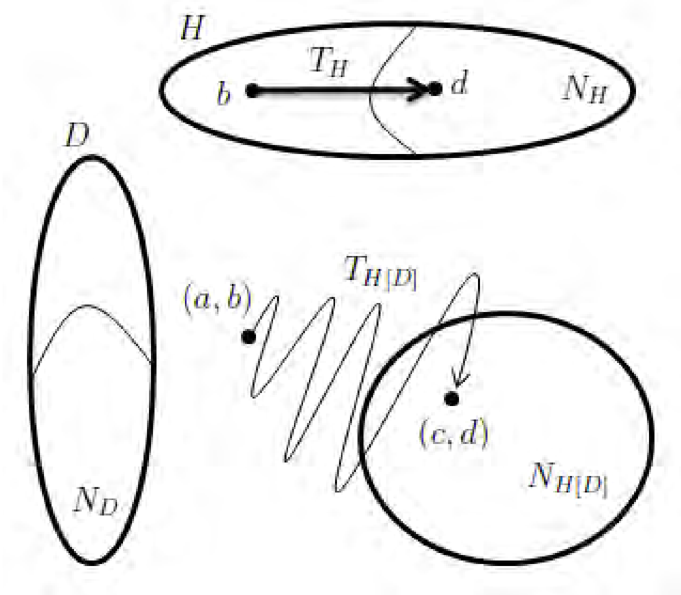

Figura 4.4: Descripción de la l-absorbencia de N_H.

Ahora demostraremos que N_D es l-absorbente. Sea $a \notin N_D$ lo que implica que $(a,i) \notin N_{H[D]}$ por lo que es l-absorbido por $N_{H[D]}$. Así existe $T_{H[D]} = ((a,i),(x_1,y_1),...,(x_{n-1}\ ,y_{n-1}),(c,d))$ con $(c,d) \in N_{H[D]}$ una trayectoria dirigida en $H[D]$ de longitud $n \leq l$. Supongamos que $(c,d) \notin A$. Sea $(n,i) \in A$, ya que $\overrightarrow{(a,i)(x_1,y_1)} \in F(H[D])$, existe una flecha $f = \overrightarrow{(n,i)(x_1,y_1)} \in F(H[D])$. Así tenemos $T' = ((n,i),(x_1,y_1),...,(x_{n-1},y_{n-1}),(c,d))$ una trayectoria dirigida en $H[D]$ de longitud $n \leq l$. Esto es una contradicción ya que $(n,i),(c,d) \in N_{H[D]}$ y $N_{H[D]}$ era un conjunto k-independiente donde $l < k$. Por lo tanto $(c,d) \in A$. Sea $P_1(T_{H[D]})$ la proyección de $T_{H[D]}$ en D. Así $P_1(T_{H[D]}) = (a,x_1,...,x_{n-1},c)$ es un camino dirigido de longitud $n \leq l$, el cual contiene una trayectoria dirigida de a a c de longitud $m \leq n \leq l$. Observemos que como $(c,d) \in A$ implica que $c \in N_D$. Así tenemos que a es l-absorbido por N_D. Véase la figura 4.5. Por lo que N_D es l-absorbente.

Por lo tanto N_D es (k,l)-núcleo de D. ∎

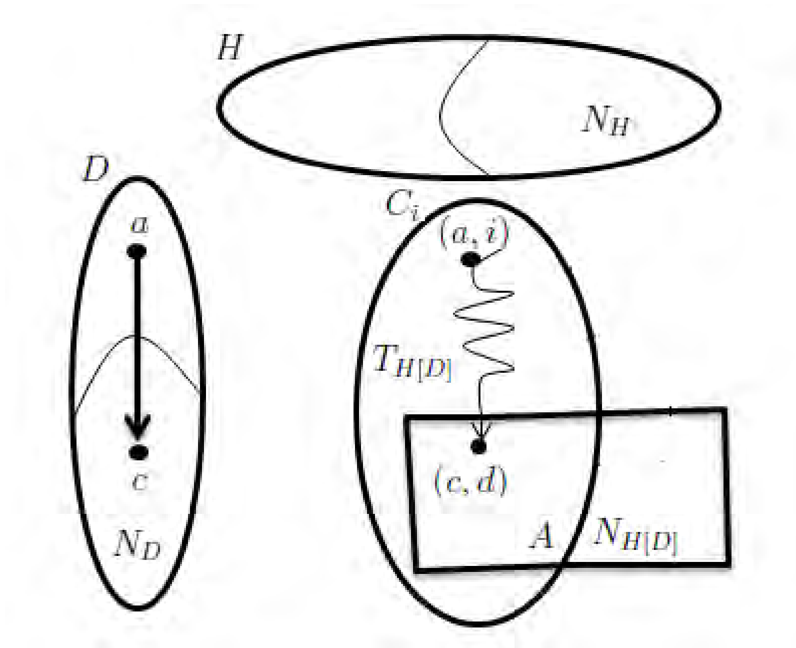

Figura 4.5: Descripción de la l-absorbencia de N_D.

4.5. Digráfica de Líneas

Para terminar con este capítulo estudiaremos nuestro problema para la digráfica de líneas.

Teorema 4.3 *Sea D una digráfica. Si D tiene (k,l)-núcleo, entonces la digráfica de líneas $L(D)$ tiene (k,l)-núcleo.*

Demostración. Sea N_D núcleo de D.

Afirmación: $N_{L(D)} = \{(x,y) \in V(L(D)) | y \in N_D\}$ es un núcleo de $L(D)$.

Demostremos que $N_{L(D)}$ es l-absorbente. Sea $\alpha \notin N_{L(D)}$ donde $\alpha = (a,b)$ con $a, b \in V(D)$. Lo que implica que $b \notin N_D$. Por lo cual es l-absorbido por N_D, es decir, existe $T_D = (b, x_1, ..., x_{s-1}, n)$ con $n \in N_D$, una trayectoria dirigida en D con longitud $s \leq l$. Por lo tanto en $L(D)$ existe $T_{L(D)} = ((b, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{s-1}, n))$ una trayectoria dirigida en $L(D)$ de longitud $s-1$. Observemos que $(x_{s-1}, n) \in N_{L(D)}$, ya que $n \in N_D$. Además sabemos que existe el vértice $\alpha = (a, b)$, por lo que podemos formar una nueva trayectoria dirigida $T'_{L(D)} = \alpha \cup T_{L(D)}$ y como sólo le agregamos una flecha tiene longitud s. Entonces α es l-absorbido por $N_{L(D)}$, ya que $s \leq l$. Por lo tanto $N_{L(D)}$ es l-absorbente. Véase la figura 4.6.

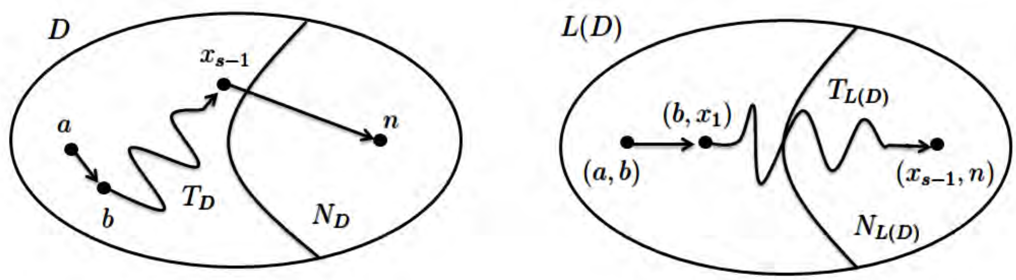

Figura 4.6: Descripción de la l-absorbencia de $N_{L(D)}$.

Ahora demostraremos que $N_{L(D)}$ es k-independiente.

Supongamos que $N_{L(D)}$ no es k-independiente. Sean $(a, b), (c, d) \in N_{L(D)}$, lo cual implica que $b, d \in N_D$, y supongamos que existe $T_{L(D)} = ((a, b), (b, x_1), ..., (x_{n-1}, d) = (c, d))$ una trayectoria dirigida en $L(D)$ de longitud $n < k$. Por lo que en D existe $T_D = (a, b, x_1, ..., x_{n-1} = c, d)$ una trayectoria dirigida de longitud $n+1$. De T_D obtenemos una trayectoria dirigida $T'_D = (b, x_1, ..., x_{n-1} = c, d)$, la cual fue obtenida al quitar la primer flecha de T_D, por lo que T'_D tiene longitud $n < k$. Por lo tanto $d(b, d) \leq n < k$, lo cual es una contradiccón, ya que $b, d \in N_D$ y N_D es k-independiente. Véase la figura 4.7. Entonces $N_{L(D)}$ es k-independiente.

Así queda demostrado que $N_{L(D)}$ es (k, l)-núcleo. ■

Definición 4.3 *El* **cuello** *de una digráfica D es la longitud del ciclo dirigido de longitud mínima en D.*

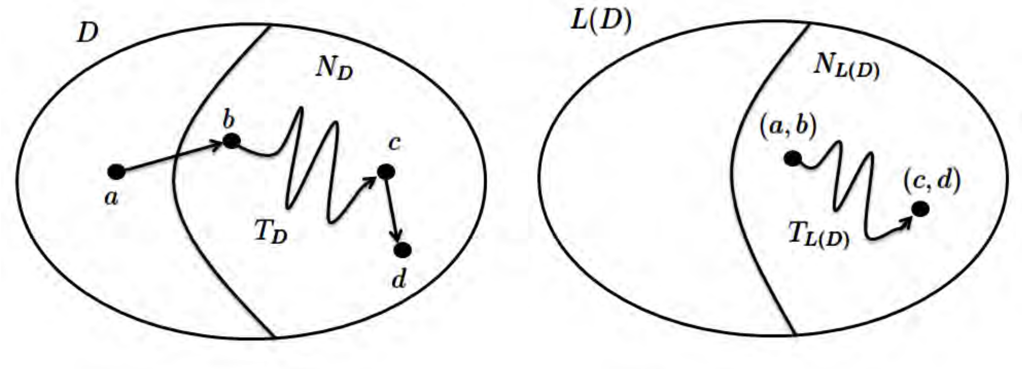

Figura 4.7: Descripción de k-independencia de $N_{L(D)}$.

Para obtener el recíproco del teorema 4.3 es necesario pedir algunas condiciones a la digráfica. Para eso vamos a necesitar el siguiente lema:

Lema 4.4 *Sea D una digráfica con cuello $g > l$ donde $1 \leq l < k$ y sea $N_{L(D)}$ un (k, l)-núcleo de la digráfica de líneas $L(D)$. Si $(u, v) \in N_{L(D)}$ entonces $(x, v) \in N_{L(D)}$ para toda $\overrightarrow{xv} \in F(D)$.*

Demostración. Sea $(u, v) \in N_{L(D)}$ y supongamos que $(x, v) \notin N_{L(D)}$, entonces es l-absorbido por $N_{L(D)}$, es decir, existe una trayectoria dirigida $T_{L(D)} = ((x, v), (v, \alpha_1), ..., (\alpha_{n-1}, y))$ con $(\alpha_{n-1}, y) \in N_{L(D)}$ y longitud $n < l$. Como $(u, v), (v, \alpha_1) \in V(L(D))$ tenemos que existe $f = \overrightarrow{(u, v)(v, \alpha_1)} \in F(L(D))$. Cambiamos la primer flecha de $T_{L(D)}$ por f y tenemos una trayectoria dirigida $T'_{L(D)} = ((u, v), (v, \alpha_1), ..., (\alpha_{n-1}, y))$ de longitud $n \leq l < k$. Si $(u, v) \neq (a_{n-1}, y)$, entonces es una contradicción, ya que como $(u, v), (\alpha_{n-1}, y) \in N_{L(D)}$ sabemos que $d_{L(D)}((u, v), (\alpha_{n-1}, y) \geq k$. Por lo tanto $(x, v) \in N_{L(D)}$. Véase la figura 4.8.

Si $(\alpha_{n-1}, y) = (u, v)$, entonces existiría un ciclo dirigido $C = ((u, v)(v, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2)$ $, ..., (\alpha_{n-1}, y) = (u, v))$ de longitud $n \leq l$. Lo cual contradice que el cuello sea al menos $g > l$. Por lo tanto $(\alpha_{n-1}, y) \neq (u, v)$. Véase la figura 4.8. ∎

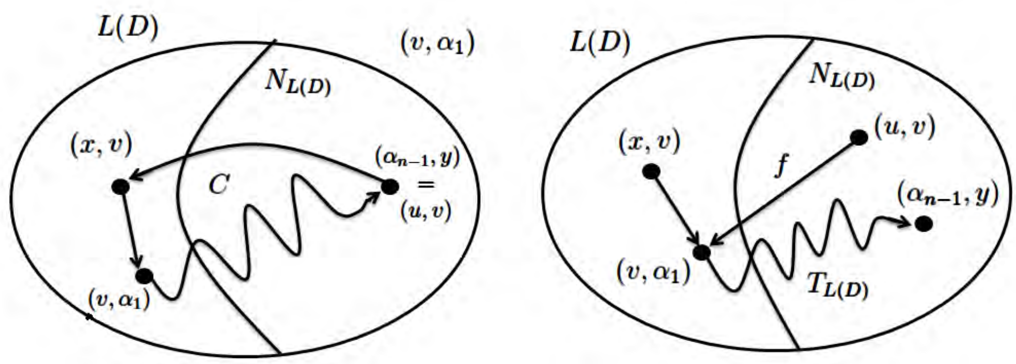

Figura 4.8: La figura de la izquierda ilustra cuando $(\alpha_{n-1}, y) = (u, v)$, mientras la figura de la derecha $(\alpha_{n-1}, y) \neq (u, v)$.

Teorema 4.5 *[5] Sea D una digráfica con cuello $g > l$, donde $l \leq k$ y el ingrado mínimo en D es al menos 1. D tiene (k,l)-núcleo si y sólo si la digráfica de líneas $L(D)$ tiene (k,l)-núcleo.*

Demostración.ón.

$\Longrightarrow$] Es un caso particular del teorema 4.3.

$\Longleftarrow$] Sea $N_{L(D)}$ el núcleo de $L(D)$.

Afirmación: $N_D = \{y | (x,y) \in N_{L(D)}\}$ es núcleo de D.

Por demostrar que N_D es absorbente. Sea $y \notin N_D$. Por demostrar que y es l-absorbido por N_D. Como $y \notin N_D$ implica que $(x,y) \notin N_{L(D)}$, por lo que es l-absorbido, es decir, existe una trayectoria dirigida $T_{L(D)} = ((x,y), (y,\alpha_1), ..., (\alpha_{s-1}, n))$ con $(\alpha_{s-1}, n) \in N_{L(D)}$ por lo que $n \in N_D$ y de longitud $s \leq l$. Pero de la trayectoria dirigida $T_{L(D)}$ obtenemos $T_D = (x, y, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1}, n)$ una trayectoria dirigida en D de longitud $s+1$, por lo que podemos encontrar $T'_D = (y, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1}, n)$ de longitud $s \leq l$ y como $n \in N_D$ entonces y es l-absorbido por N_D. Véase la figura 4.9.

Ahora demostremos que N_D es k-independiente.

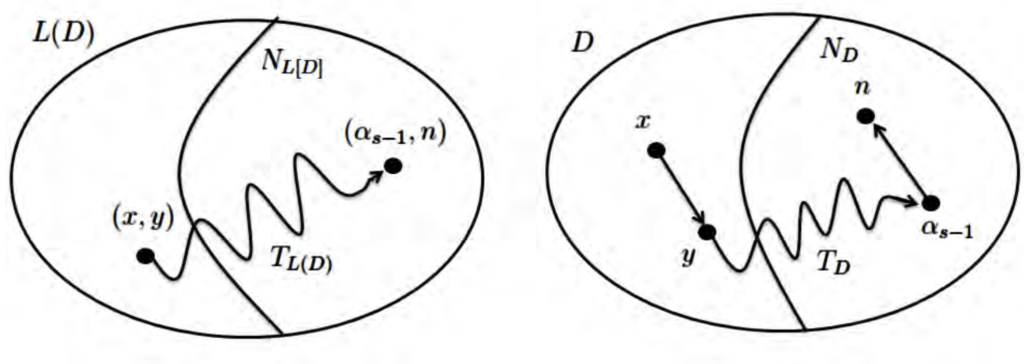

Figura 4.9: Descripción de la l-absorbencia de N_D.

Supongamos que N_D no es k-independiente. Sean $a, b \in N_D$ y supongamos que existe $T_D = (a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b)$ una trayectoria dirigida de longitud $n < k$. Además como $b \in N_D$, entonces existe $(z, b) \in N_{L(D)}$ para algún $z \in V(D)$ y por el lema 4.4 $(x_{n-1}, b) \in N_{L(D)}$. Así tenemos que $T_{L(D)} = ((a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b))$ es una trayectoria dirigida en $L(D)$ de longitud $n - 1$. Como $a \in N_D$ existe $(w, a) \in N_{L(D)}$ así tenemos una trayectoria dirigida $T'_{L(D)} = (w, a) \cup T_{L(D)}$ de longitud $n < k$, por lo tanto $d_{L(D)}((w, a), (x_{n-1}, b)) \leq n < k$. Esto es una contradicción, ya que como $(w, a), (x_{n-1}, b) \in N_{L(D)}$, entonces $d_{L(D)}((w, a), (x_{n-1}, b)) \geq k$. Véase la figura 4.10. Por lo tanto N_D es k-independiente. ■

Definición 4.4 *Sea D una digráfica y $S \subseteq V(D)$. S es un* ***k*-núcleo** *de D si*

I. *S es k-independiente.*

II. *S es $(k-1)$-absorbente.*

Corolario 4.6 *Sea D una digráfica con cuello $g > k-1$ donde $l \leq k-1$ y el ingrado mínimo en D es al menos uno. D tiene k-núcleo si y sólo si la digráfica de líneas, $L(D)$, tiene k-núcleo.*

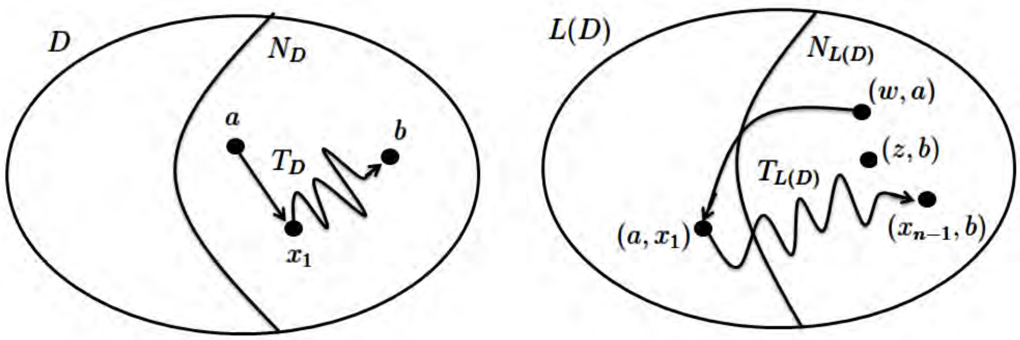

Figura 4.10: Descripción de la k-independencia de N_D.

El corolario anterior se puede mejorar quitando la condición de que el ingrado mínimo en D es al menos uno y aún el resultado es cierto.

Teorema 4.7 *Sea D una digráfica con cuello $g > k-1$ donde $l \leq k-1$, entonces D tiene k-núcleo si y sólo si la digráfica de líneas $L(D)$ tiene k-núcleo.*

Demostración.

$\Longrightarrow$] Caso particular del teorema 4.3.

$\Longleftarrow$] Sea $N_{L(D)}$ un k-núcleo de $L(D)$.

Afirmación: $N_D = \{n_i|(x_i, n_i) \in N_{L(D)}\} \cup \{x_i|\delta^-_D(x_i) = 0$ y $d_{L(D)}((x_i, x_j), N_{L(D)}) = k-1$ para toda x_j exvecino de x_i $\}$ es k-núcleo de D.

Denotaremos por $A = \{n_i|(x_i, n_i) \in N_{L(D)}\}$ y por $B = \{x_i|\delta^-_D(x_i) = 0$ y $d_{L(D)}((x_i, x_j)\ ,\ N_{L(D)}) = k-1\}$.

Demostraremos que N_D es $(k-1)$-absorbente. Sea $b \notin N_D$, entonces $b \notin A$ y $b \notin B$. Así tendremos los siguientes casos:

I. Si $b \notin A$ y $\delta^-(b) \neq 0$. Como $\delta^-(b) \neq 0$, existe $x_i \in V(D)$ tal que $\overrightarrow{x_i b} \in F(D)$. Por lo que en $L(D)$, $(x_i, b) \in V(L(D)) \backslash N_{L(D)}$, por lo tanto (x_i, b) es $(k-1)$-absorbido, es decir, existe una trayectoria dirigida $T_{L(D)} = ((x_i, b), (b, \alpha_1), ..., (\alpha_{n-1}\ , y))$ donde $(\alpha_{n-1}, y) \in N_{L(D)}$. De aquí tenemos que $y \in N_D$ y además

$T_{L(D)}$ tiene longitud $n \leq k-1$. De $T_{L(D)}$ obtenemos $T_D = (x_i, b, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, y)$ una trayectoria dirigida en D de longitud $n+1$. Pero si eliminamos el primer vértice de T_D, obtenemos $T'_D = (b, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, y)$ una trayectoria dirigida de longitud $n \leq k-1$. Por lo tanto, b es $(k-1)$-absorbido. Véase la figura 4.11.

II. $b \notin A$, $\delta^-(b) = 0$ y $d_{L(D)}((x_i, x_j), N_{L(D)}) \neq k-1$.

a) Si $b \notin A$, $\delta^-(b) = 0$ y $d_{L(D)}((x_i, x_j), N_{L(D)}) < k-1$. Como $d_{L(D)}((b, x_j), N_{L(D)}) < k-1$ existe $(\alpha_n - 1, y) \in N_{L(D)}$ tal que hay una trayectoria dirigida $T_{L(D)} = ((b, x_j), (x_j, \alpha_1), ..., (\alpha_{n-1}, y))$ de longitud $n < k-1$, por lo que en D existe una trayectoria dirigida $T_D = (b, x_j, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, y)$ de longitud $n+1 \leq k-1$. Por lo tanto b es $(k-1)$-absorbido por N_D, ya que como $(\alpha_n - 1, y) \in N_{L(D)}$ implica que $y \in A \subset N_D$. Véase la figura 4.12.

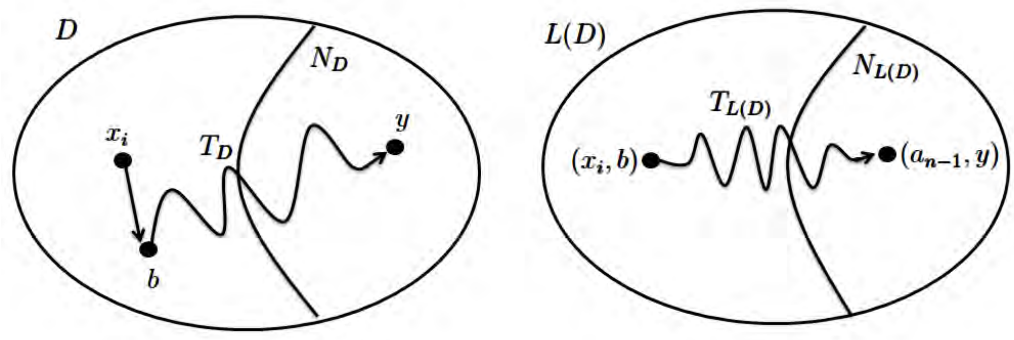

Figura 4.11: Caso a) de la *Demostración*.ón del Teorema 4,7.

b) Si $b \notin A$, $\delta^-(b) = 0$ y $d_{L(D)}((x_i, x_j),\ N_{L(D)}) > k-1$. Como $d_{L(D)}((b, x_j)$ $, N_{L(D)}) > k-1$, entonces (b, x_j) no es $(k-1)$-absorbido por $N_{L(D)}$. Así $(b, x_j) \in N_{L(D)}$, de donde $x_j \in N_D$. Como $(b, x_j) \in N_{L(D)}$ tenemos que existe $\overrightarrow{bx_j} \in F(D)$, es decir, b es 1-absorbido por N_D y como $1 \leq k-1$, b es $(k-1)$-absorbido.

Por lo tanto N_D es $(k-1)$-absorbente.

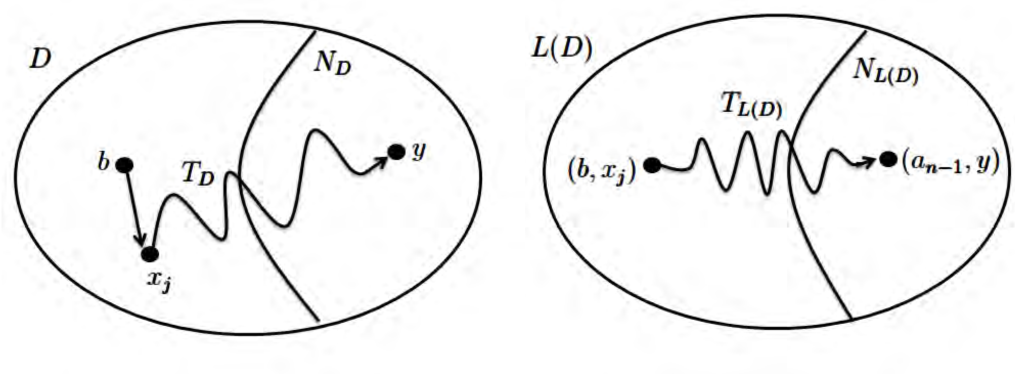

Figura 4.12: Caso b) de la *Demostración*.ón del Teorema 4,7.

Ahora demostraremos que N_D es k-independiente. Supongamos que N_D no es k-independiente, es decir, sean $x, y \in N_D$ tales que existe una trayectoria dirigida $T_D = (x, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, y)$ de longitud $n < k$. Así tendremos los siguientes casos:

I. Si $x, y \in A$. Como existe T_D, en $L(D)$ existe una trayectoria dirigida $T_{L(D)} = ((x, \alpha_1)(\alpha_1, \alpha_2), ..., (\alpha_{n-1}, y))$. Sabemos que $y \in N_D$ por lo que existe $(z, y) \in N_{L(D)}$ para algún $z \in V(D)$, entonces por el lema 4.4 tenemos que $(\alpha_{n-1}, y) \in N_{L(D)}$. Además tenemos que la longitud de $T_{L(D)}$ es $n-1$. También tenemos que $x \in N_D$, por lo que existe $(r, x) \in N_{L(D)}$ para algún $r \in V(D)$. Ahora construyamos una trayectoria dirigida $(r, x) \cup T_{L(D)}$ en $L(D)$ de longitud $n < k$ lo cual es una contradicción, ya que como $(r, x), (\alpha_{n-1}, y) \in N_{L(D)}$ tenemos que $d_{L(D)}((r, x), (\alpha_{n-1}, y)) \geq k$. Véase la figura 4.13.

II. Si $y \in A$ y $x \in B$. Como existe T_D entonces en $L(D)$ existe una trayectoria dirigida $T_{L(D)} = ((x, \alpha_1)(\alpha_1, \alpha_2), ..., (\alpha_{n-1}, y))$ de longitud $n-1 < k-1$. Como $y \in A$ tenemos que $(a, y) \in N_{L(D)}$ para algún $a \in V(D)$ y al aplicar el lema anterior tenemos que $(\alpha_{n-1}, y) \in N_{L(D)}$, ésto es una contradicción, ya que $d_{L(D)}((x, \alpha_1), N_{L(D)}) = k-1$.

III. Si $y \in B$. Este caso no es posible, ya que como existe la trayectoria dirigida T_D

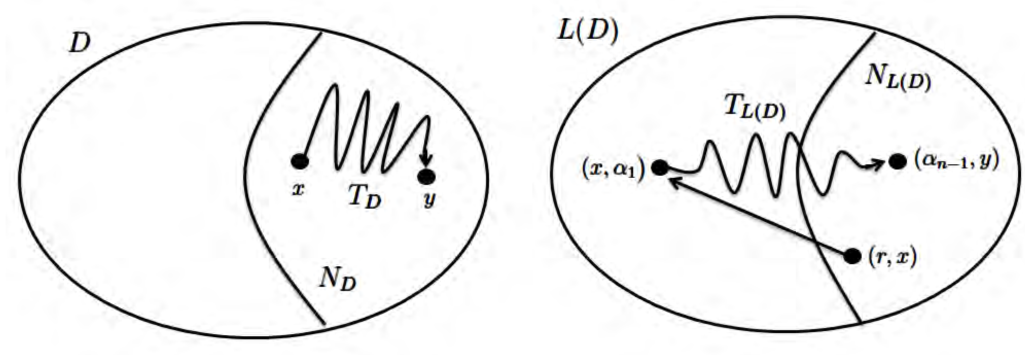

Figura 4.13: Descripción del caso a) en la prueba de la k-independencia en el Teorema 4,7.

y por lo tanto la flecha $\overrightarrow{\alpha_{n-1}y} \in D$, lo cual implica que $\delta_D^-(y) \neq 0$.

Por lo tanto N_D es k-independiente.

Por lo tanto N_D es k-núcleo. ■

Capítulo 5

(k,l)-Núcleos en generalizaciones de operaciones en digráficas

En este capítulo analizaremos la existencia de (k,l)-núcleos en las generalizaciones de la digráfica de líneas, del producto cartesiano y del producto lexicográfico. Para este capítulo tamamos como referencia [1] y [6].

5.1. Digráfica Parcial de Líneas

Sea D una digráfica y $x \in V(D)$ denotamos por $\omega^-(x)$ al conjunto de flechas que tienen a x como terminal, es decir, $\omega^-(x) = \{\overrightarrow{ux} \in F(D)\}$. Así el ingrado de x es $\delta^-(x) = |\omega^-(x)|$. También si $U \subseteq V$, definimos $\omega^-(U) = \{\overrightarrow{xy} \in F(D) | y \in U$ y $x \notin U\}$. Dado un conjunto de flechas $\Omega \subseteq F(D)$, las cabezas de Ω son los vértices en el conjunto $H(\Omega) = \{y | (x,y) \in \Omega\}$.

Ahora definiremos una generalización de la digráfica de líneas, a la cual llamaremos digráfica parcial de líneas.

Sea $D = (V,F)$ una digráfica y consideremos un subconjunto de flechas $F' \subseteq F$

y una función $\phi : F \to F'$ tales que:

I. El conjunto de cabezas de $\emptyset \neq F'$ es $H(F') = V$.

II. La función ϕ fija los elementos de F', así que $\phi|_{F'} = id$, la función identidad, y para cada vértice $j \in V$, $\phi(\omega^-(j)) \subset \omega^-(j) \cap F'$, esto es que la función ϕ manda flechas con cabeza j a flechas de F' con cabeza j.

Así por I., $|V| \leq |F'| \leq |F|$. Notemos que la existencia de dicho subconjunto F' garantiza que $\delta^-(i) \geq 1$ para cada $i \in V$. Entonces la digráfica parcial de líneas de D, denotada por $\mathcal{L}_{(F',\phi)}D$ (pero como en el contexto es claro quien es (F', ϕ), la denotaremos sólo por $\mathcal{L}D$), es la digráfica con el conjunto de vértices $V(\mathcal{L}D) = F'$ y el conjunto de flechas es $F(\mathcal{L}D) = \{(ij, \phi(jk)) | \overrightarrow{jk} \in F \text{ y } \overrightarrow{ij} \in F'\}$.

Observación. Si $F' = F$, entonces $\phi = id$ y la digráfica parcial de líneas es la digráfica de líneas.

En la figura 5.1 daremos un ejemplo de una digráfica G con 12 flechas y su digráfica parcial de líneas con $|F'| = 9$ vértices. Las flechas que no están en F' son las que están punteadas, además tenemos que $\phi(\overrightarrow{12}) = \overrightarrow{42}$, $\phi(\overrightarrow{34}) = \overrightarrow{54}$ y $\phi(\overrightarrow{65}) = \overrightarrow{25}$.

En el capítulo anterior demostramos que la digráfica de líneas tiene (k,l)-núcleo si y sólo si D tiene (k,l)-núcleo y D cumple ciertas condiciones. Ahora demostraremos un resultado análogo para la digráfica parcial de líneas.

Teorema 5.1 *Sean k y l dos números naturales tales que $1 \leq l < k$ y sea D una digráfica, con ingrado mínimo por lo menos uno y cuello por lo menos $l+1$. Entonces D tiene (k,l)-núcleo si y sólo si cualquier digráfica parcial de líneas $\mathcal{L}D$ tiene un (k,l)-núcleo.*

Demostración. Sea F' y ϕ que satisfagan los requerimientos de la digráfica parcial de líneas, así que $\mathcal{L}_{(F',\phi)}D = \mathcal{L}D$.

$\Longrightarrow$] Supongamos que D tiene un (k,l)-núcleo N.

Afirmación: $\omega^-(N) \cap F'$ es un (k,l)-núcleo de $\mathcal{L}D$.

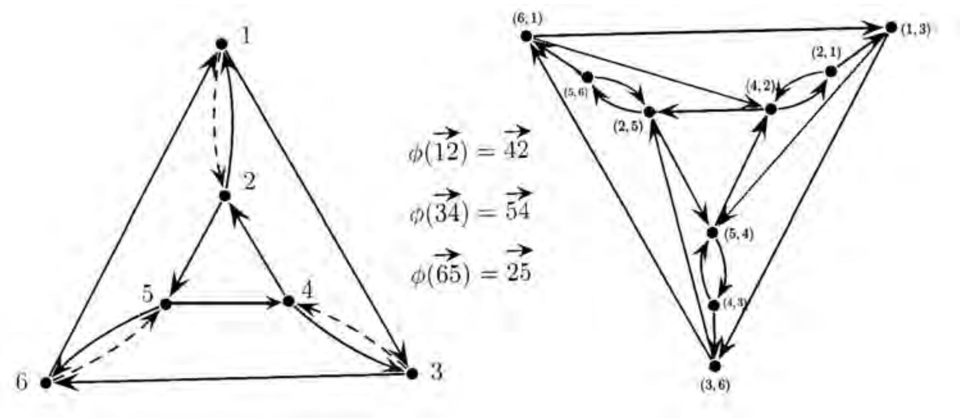

Figura 5.1: A la izquierda se muestra la digráfica G y a la derecha la digráfica parcial de líneas con respecto a F' y ϕ

Demostraremos primero que $\omega^-(N) \cap F'$ es k-independiente. Sean $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{cd} \in \omega^-(N) \cap F'$ tal que $d_{LD}((a,b),(c,d)) = t$. Observemos que $d_D(b,d) \geq k$ porque $b, d \in N$. Por definición de ϕ, cualquier trayectoria dirigida de longitud mínima de (a,b) a (c,d) en $\mathcal{L}D$ es de la forma $T = ((a,b), \phi(\overrightarrow{bb_1}), \phi(\overrightarrow{b_1b_2}), ..., \phi(\overrightarrow{b_{t-1}b_t}) = (c,d))$, donde $b_i \in V(D)$ y $\overrightarrow{bb_1}, \overrightarrow{b_ib_{i+1}} \in F(D)$, $i = 1, ..., t-1$. Pero $\phi(b_{t-1}b_t) = (\alpha, b_t)$, entonces $b_t = d$. Así tenemos un camino $C = (b, b_1, ..., b_t = d)$ de b a d de longitud t en D. Ésto significa que $t \geq d_D(b,d) \geq k$. Por lo tanto $\omega^-(N) \cap F'$ es k-independiente.

Ahora demostraremos que $\omega^-(N) \cap F'$ es l-absorbente, es decir, $d_{\mathcal{L}D}((u,v), \omega^-(N) \cap F') \leq l$ para toda $(u,v) \in V(\mathcal{L}D) \backslash \omega^-(N) \cap F'$. Sea $(u,v) \in V(\mathcal{L}D) \backslash \omega^-(N) \cap F'$. Notemos que $v \notin N$, ya que si $v \in N$ tenemos que $(u,v) \in \omega^-(N) \cap F'$. Entonces existe $z \in N$ tal que $d_D(v,z) \leq l$, porque N es (k,l)-núcleo de D. Sea $d_D(v,z) = d$ y consideremos una trayectoria dirigida de longitud mínima $T = (v, v_1, v_2, ..., v_{d-1}, v_d = z)$ en D de v a z. Por lo tanto $C = ((u,v), \phi(\overrightarrow{vv_1}), ..., \phi(\overrightarrow{v_{d-1}z}))$ es un camino dirigido en $\mathcal{L}D$ de (u,v) a $\phi(\overrightarrow{v_{d-1}z})$ de longitud d. Véase la figura 5.2. Observemos que $\phi(v_{d-1}z) \in \omega^-(N) \cap F'$ porque $z \in N$. Ésto significa que $d_{\mathcal{L}D}(uv, \omega^-(N) \cap F') \leq d_{\mathcal{L}D}(uv, \phi(v_{d-1}z)) \leq d = d_D(v,z) \leq l$. Con lo que queda demostrado que $\omega^-(N) \cap F'$ es l-absorbente.

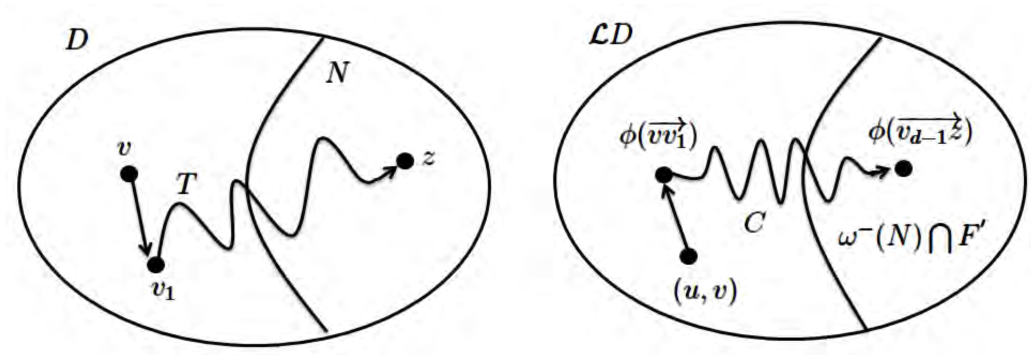

Figura 5.2: La existencia de $(u, v)\phi(vv_1) \in C$ se debe a que $vv_1 \in F(D) \subset T \subset F(D)$ y $\phi(v_iv_{i+1})\phi(v_{i+1}v_{i+2}) \in C$, ya que, $v_{i+1}v_{i+2} \in F(T) \subset F(D)$ para $i = 1, 2, ...d-1, d$.

$\Longleftarrow$] Supongamos que K es un (k, l)-núcleo de $\mathcal{L}D$.

Afirmación: El conjunto de las cabezas, $H(K)$, es un (k, l)-núcleo de D.

Demostraremos primero que $H(K)$ es k-independiente. Sea $u, v \in H(K)$ tal que $d_D(u, v) = d$. Por demostrar que $d \geq k$. Por la definición de $H(K)$ existen dos flechas $\overrightarrow{u_1u}, \overrightarrow{v_1v} \in F(D)$ tales que $(u_1, u), (v_1, v) \in K$, por lo tanto $d_{\mathcal{L}D}((u_1, u), (v_1, v)) \geq k$, ya que K es (k, l)-núcleo de $\mathcal{L}D$. Ahora consideremos una trayectoria dirigida de longitud mínima $(u, x_1, ..., x_{d-1}, v)$ en D de u a v con longitud d y el correspondiente camino que genera $((u_1, u), \phi(\overrightarrow{ux_1}), ..., \phi(\overrightarrow{x_{d-1}v}))$ en $\mathcal{L}D$ de longitud d. Vamos a estudiar dos casos de acuerdo con que $\phi(\overrightarrow{x_{d-1}v}) \notin K$ o $\phi(\overrightarrow{x_{d-1}v}) \in K$.

I. Si $\phi(\overrightarrow{x_{d-1}v}) \notin K$, entonces existe una trayectoria $(\phi(\overrightarrow{x_{d-1}v}), \phi(\overrightarrow{vy_1}), ..., \phi(\overrightarrow{y_{s-1}y_s}))$ de longitud $s \leq l$ de $\phi(\overrightarrow{x_{d-1}v})$ a algún vértice $\phi(\overrightarrow{y_{s-1}y_s}) \in K$. Véase la figura 5.3. Esto nos da una trayectoria $((v_1, v), \phi(\overrightarrow{vy_1}), ..., \phi(\overrightarrow{y_{s-1}y_s}))$ de $(v_1, v) \in K$ a $\phi(\overrightarrow{y_{s-1}y_s}) \in K$ de longitud s. Observemos que $(v_1, v) \neq \phi(\overrightarrow{vy_1})$, ya que, de otro modo, $y_1 = v$ y se tendría que $\overrightarrow{vy_1} \in F(D)$, es decir, en D tendríamos un lazo pero D no tiene lazos. Así $d_{\mathcal{L}D}((v_1, v), \phi(\overrightarrow{y_{s-1}y_s})) \leq s \leq l < k$, ésto contradice la k-independencia de K. Entonces $(v_1, v) = \phi(\overrightarrow{y_{s-1}y_s})$. Véase la figura 5.3. En este caso tenemos un ciclo dirigido $((v_1, v), \phi(\overrightarrow{vy_1}), ..., \phi(\overrightarrow{y_{s-1}y_s}) = (v_1, v))$ de longitud s en $\mathcal{L}D$, entonces podemos encontrar un ciclo dirigido $(v_1, v, y_1, ..., y_{s-2}, v_1)$ de longitud $s \leq l$ en D. Ésto implica que D tiene cuello a lo más $s \leq l$, esto es una contradicción con la hipótesis, ya que, el cuello es por lo menos $l + 1$.

II. Si $\phi(x_{d-1}v) \in K$, tenemos que $d_{\mathcal{L}D}((u_1, u), \phi(\overrightarrow{x_{d-1}v})) = d \geq k$, ya que K es un (k, l)-núcleo.

Así queda demostrado que $H(K)$ es k-independiente.

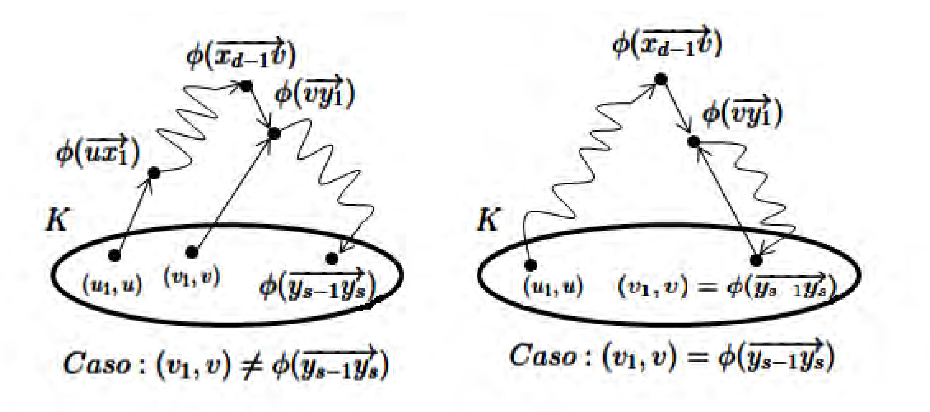

Figura 5.3: La figura de la izquierda ilustra el caso cuando $(v, v_1) \neq \phi(y_{s-1}y_s)$ mientras la figura de la derecha el caso cuando $(v_1, v) = \phi(y_{s-1}y_s)$.

Ahora demostremos que $H(K)$ es l-absorbente en D. Sea $z \in V(D) \backslash H(K)$. Por la definición de F', existe una flecha $(u, z) \in F'$. Como $z \in V(D) \backslash H(K)$ tenemos que $z \notin H(K)$, entonces $(u, z) \notin K$, por lo que es l-absorbido por K, es decir, existe una trayectoria $T = ((uz), \phi(\overrightarrow{zz_1}), ..., \phi(\overrightarrow{z_{s-1}z_s}))$ en $\mathcal{L}D$ de longitud $s \leq l$ de (u, z) a un vértice $\phi(\overrightarrow{z_{s-1}z_s}) \in K$. Pero $\phi(\overrightarrow{z_{s-1}z_s}) = (\alpha, z_s) \in K$ por lo que $z_s \in H(K)$. Así hemos dado una trayectoria $T' = (z, z_1, ..., z_s)$ de z a $z_s \in H(K)$ de longitud a lo más $s \leq l$ en D. Véase la figura 5.4. Por lo tanto $H(K)$ es l-absorbente en D. $\blacksquare$

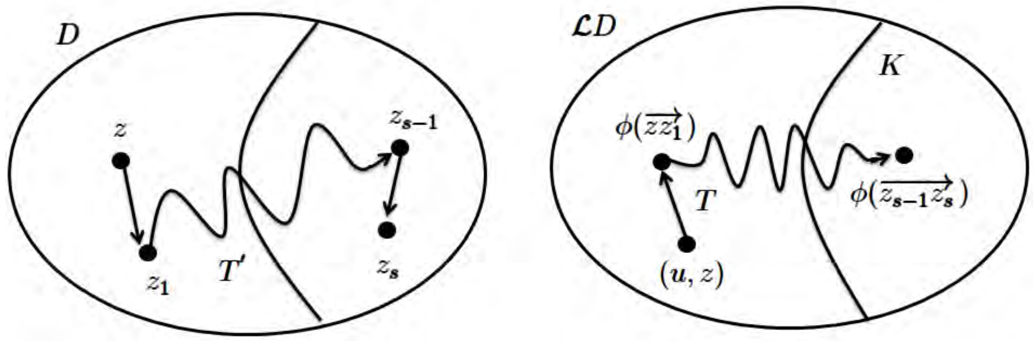

Figura 5.4: Descripción de la absorbencia de $H(K)$.

Corolario 5.2 *Sea D una digráfica con ingrado mínimo por lo menos uno. Entonces D tiene núcleo si y sólo si cualquier digráfica parcial de líneas $\mathcal{L}D$ tiene núcleo.*

Demostración. Recordemos que un núcleo es un $(2,1)$-núcleo, además como en D no hay lazos, tenemos que el cuello es por lo menos es $2 = l + 1$. Por lo que la demostración es un caso particular del teorema 5.1.

■

5.2. Producto Cartesiano Generalizado

Definición 5.1 *Sea X una digráfica con un cojunto de vértices $V(X) = \{x_1, ..., x_s\}$. Sean $D_1, D_2, ..., D_S$ digráficas de orden n con vértices $V(D_i) = V = \{y_1, ..., y_n\}$, $i = 1, 2, ..., s$.*

El **producto cartesiano generalizado** *de la digráfica X y la secuencia de digráficas $D_1, D_2, ..., D_s$ es la digráfica $X \times (D_1, ..., D_s)$ tal que $V(X \times (D_1, ..., D_s)) = V(X) \times V$ y $F(X \times (D_1, ..., D_s)) = \{\overrightarrow{(x_i, y_p)(x_j, y_q)} | \overrightarrow{y_p y_q} \in F(D_i)$ y $x_i = x_j$ o $\overrightarrow{x_i x_j} \in F(X)$ y $y_p = y_q\}$.*

Observemos que si ponemos $D_i = D$, para toda $i = 1, ..., s$, obtenemos el producto cartesiano de X y D.

Para ver un ejemplo del producto cartesiano generalizado véase la figura 5.5.

A continuación demostraremos un lema, el cual es muy importante ya que nos va a ayudar a encontrar un (k,l)-núcleo para $X \times (D_1, ..., D_s)$.

Lema 5.3 *Sean $(x_i, y_p), (x_j, y_q)$ dos vértices diferentes arbitrarios de $V(X \times (D_1, ..., D_s))$. Entonces $\alpha \leq d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p), (x_j, y_q)) \leq \beta$, con*

$$\alpha = \begin{cases} d_X(x_i, x_j) & \text{para } i \neq j \text{ y } p = q \\ d_X(x_i, x_j) + 1 & \text{para } i \neq j \text{ y } p \neq q \\ \text{mín}\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_{D_0}(y_p, y_q) + 2\} & \text{para } i = j \text{ y } p \neq q \end{cases}$$

$\beta = d_X(x_i, x_j) + \text{mín}\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_{D_j}(y_p, y_q)\}$,
donde D_0 denota la digráfica definida de la siguiente forma: $V(D_0) = V = \{y_1, ..., y_n\}$ y $\overrightarrow{y_p y_q} \in F(D_0)$ si y sólo si existe $1 \leq i \leq s$ tal que $\overrightarrow{y_p y_q} \in F(D_i)$. Obsérvese que $F(D_0)$ es la unión de las proyecciones de D_i, para toda i.

Demostración. Sean $(x_i, y_p), (x_j, y_q)$ dos vértices arbitrarios en $V(X \times (D_1, ..., D_s))$. Por la definición de $X \times (D_1, ..., D_s)$ es claro que $d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p), (x_j, y_q)) \leq d_X(x_i.x_j) +$ mín $\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_{D_j}(y_p, y_q)\} = \beta$, ya que si observamos la figura 5.6, notamos que hay al menos dos trayectorias de (x_i, y_p) a (x_j, y_q) y la longitud de dichas trayectorias sólo difieren en la longitud de las trayectoria de y_p a y_q en D_i y D_j.

Ahora para demostrar lo que nos falta del lema consideremos los tres casos:

I. $i \neq j$ y $p = q$. Sea $d_X(x_i, x_j) = n$, es decir, existe una trayectoria $T = (x_i, v_1, ..., v_{n-1}, x_j)$ en X de longitud n. De la trayectoria T y de la definición de $X \times (D_1, ..., D_s)$ obtenemos una trayectoria $T' = ((x_i, y_p), (v_1, y_p), ..., (v_{n-1}, y_p), (x_j, y_q))$ de longitud n. Así tenemos que $d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p)(x_j, y_q)) = n$, ya que si existiera una $(x_i, y_p)(x_j, y_q)$-trayectoria de longitud menor a n, al proyectarla sobre X tendríamos una $x_i x_j-$trayectoria de longitud menor a n, lo cual no es posible porque $d_X(x_i, x_j) = n$.

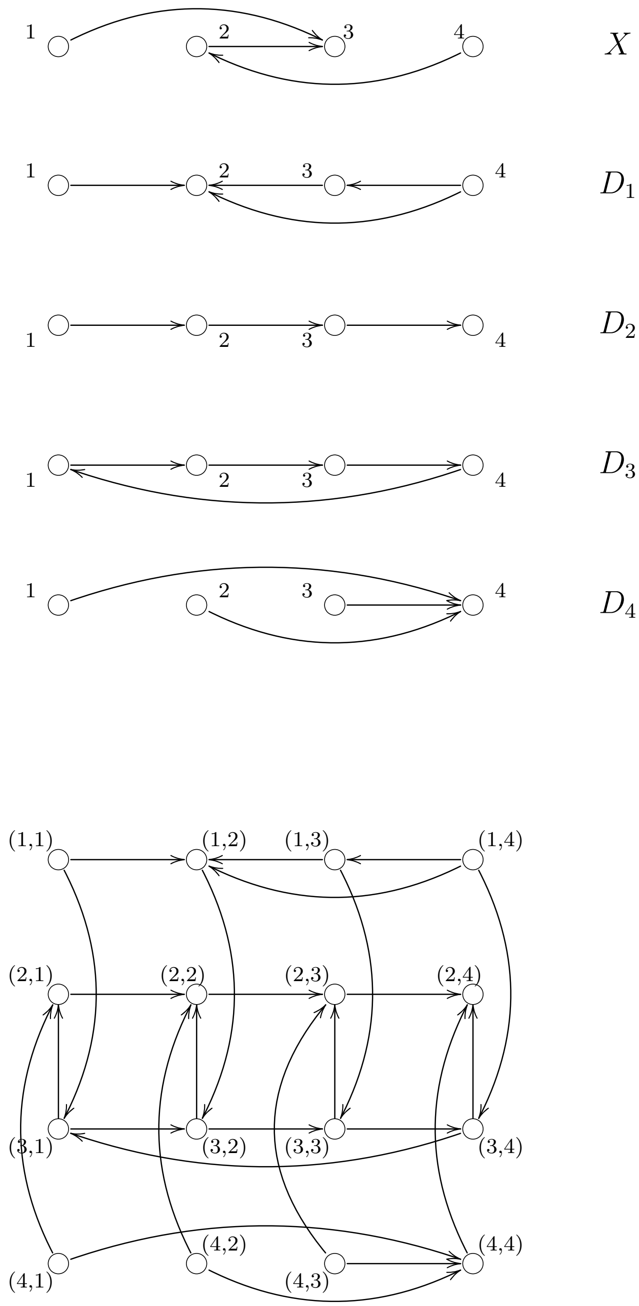

Figura 5.5: Ejemplo del producto cartesiano generalizado de X con D_1, D_2, D_3, D_4.

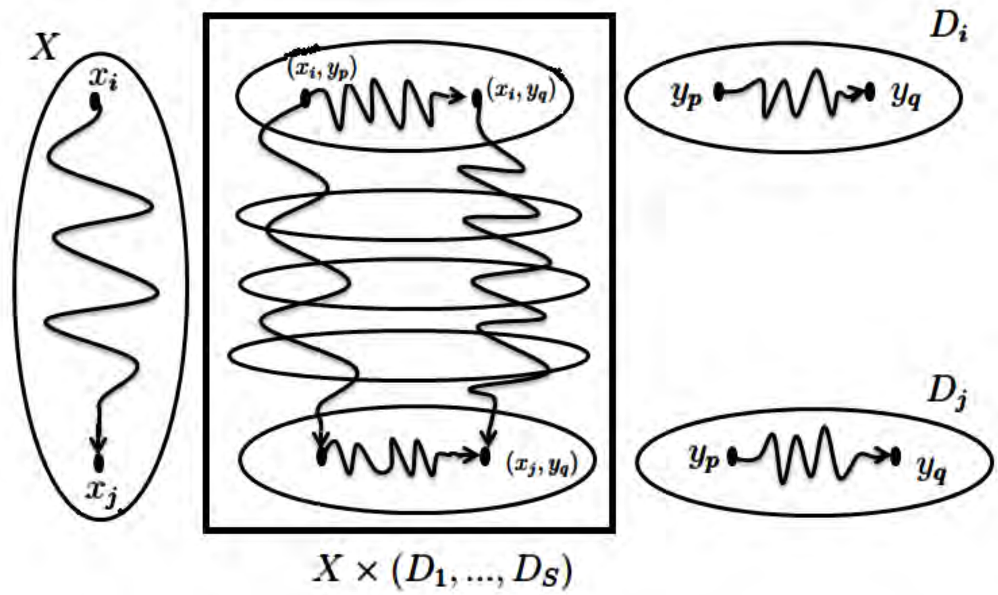

Figura 5.6: Bosquejo de la demostración del Lema 5,3.

II. $i \neq j$ y $p \neq q$. Sea $d_X(x_i, x_j) = n$, es decir, existe una trayectoria dirigida $T = (x_i, v_1, ..., v_{n-1}, x_j)$ en X de longitud n. Notemos que toda $(x_i, y_p)(x_j, y_q)$-trayectoria dirigida debe de contener una copia de la trayectoria dirigida T. Así es claro que $d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p), (x_j, y_q)) > d_X(x_i, x_j)$ y la igualdad no se da ya que $y_p \neq y_q$. Por lo tanto $d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p), (x_j, y_q)) \geq d_X(x_i, x_j) + 1$. Véase la figura 5.6.

III. $i = j$ y $p \neq q$. Primero observemos que si tenemos una flecha $\overrightarrow{y_l y_s}$ que pertenece a una $y_p y_q$-trayectoria dirigida en D_0, entonces la $\overrightarrow{(x_k, y_l)(x_k, y_s)}$-flecha pertenece a al menos a una $(x_i, y_p)(x_i, y_q)$-trayectoria dirigida en $X \times (D_1, ..., D_s)$.

Sea γ una $y_p y_q$-trayectoria dirigida de longitud mínima en D_0. Tenemos las siguientes opciones:

a) Si todas las preimagenes (bajo la proyección) de flechas de γ están en D_i

tenemos que $d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p), (x_i, y_q)) = d_{D_0}(y_p, y_q) = d_{D_i}(y_p, y_q) \geq$ mín $\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_{D_0}(y_p, y_q) + 2\}$. Véase la figura 5.7.

b) Si existe$\overrightarrow{y_t y_m} \in \gamma$ tal que su preimagen $\overrightarrow{y_t y_m} \in D_k$ con $k \neq i$. Existe una trayectoria dirigida $T = ((x_i, y_p), (x_i, y_{p+1}), ..., (x_i, y_t)(x_{i+1}, y_t), ..., (x_k, y_t),$ $(x_k, y_m), ..., (x_{i+1}, y_m), (x_i, y_m), (x_i, y_{m+1}), ..., (x_i, y_q))$ de longitud mínima en $X\times$ $(D_1, ..., D_s)$. Véase la figura 5.7.

Tenemos que:

$d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p), (x_i, y_q)) = long(T)$
$\geq d_{D_0}(y_p, y_t) + d_{D_k}(y_t, y_m) + d_{D_0}(y_m, y_q) + 2$
$= d_{D_0}(y_p, y_t) + d_{D_0}(y_t, y_m) + d_{D_0}(y_m, y_q) + 2$
$= d_{D_0}(y_p, y_q) + 2.$

Observemos que la igualdad se da cuando $\overrightarrow{y_t y_m} \in D_k$ con $k = i + 1$. Notemos que si hay más de una flecha en γ que no esté en D_i se sigue manteniendo la desigualdad, ya que por cada flecha que no esté puedo sumar dos, ésto es porque tengo que cambiar de la copia de D_i a la copia D_k.

Finalmente $d_{X\times(D_1,...,D_s)}((x_i, y_p), (x_i, y_q)) \geq$mín$\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_{D_0}(y_p, y_q) + 2\}$.

Con lo que queda demostrado el lema. ■

Definición 5.2 *Sea $A \subset V(X)$, $A = \{x_1, ..., x_t\}$, para $1 \leq t \leq s$. Por el producto cartesiano de A y la secuencia de conjuntos $B_1, ..., B_s$ nos referimos a un conjunto de la forma $A \otimes (B_1, ..., B_s)$ de la forma $A \otimes (B_1, ..., B_s) = \cup_{j=1}^{t} \{x_j\} \times B_j$.*

Teorema 5.4 *Si J_i es un (k_i, l_i)-núcleo de la digráfica D_i, con $k_i \geq 2, l_i \geq 1$ para $i = 1, ..., s$ y J_0 es un (k_0, l_0)-núcleo de la digráfica X con $k_0 \geq 2, l_0 \geq 1$, entonces el conjunto $J = J_0 \otimes (J_1, ..., J_s)$ es un (k, l)-núcleo de la digráfica $X \times (D_1, ..., D_s)$, donde:*

$$k = \begin{cases} \textit{mín}\{k_0, \textit{mín}\{k_i |\ \textit{existe } x_i \in J_0\}\}, & \textit{si para cada } x_i \in J_0, |J_i| = 1. \\ \textit{mín}\{k_0, t+2, \textit{mín}\{k_i |\ \textit{existe } x_i \in J_0\}\}, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

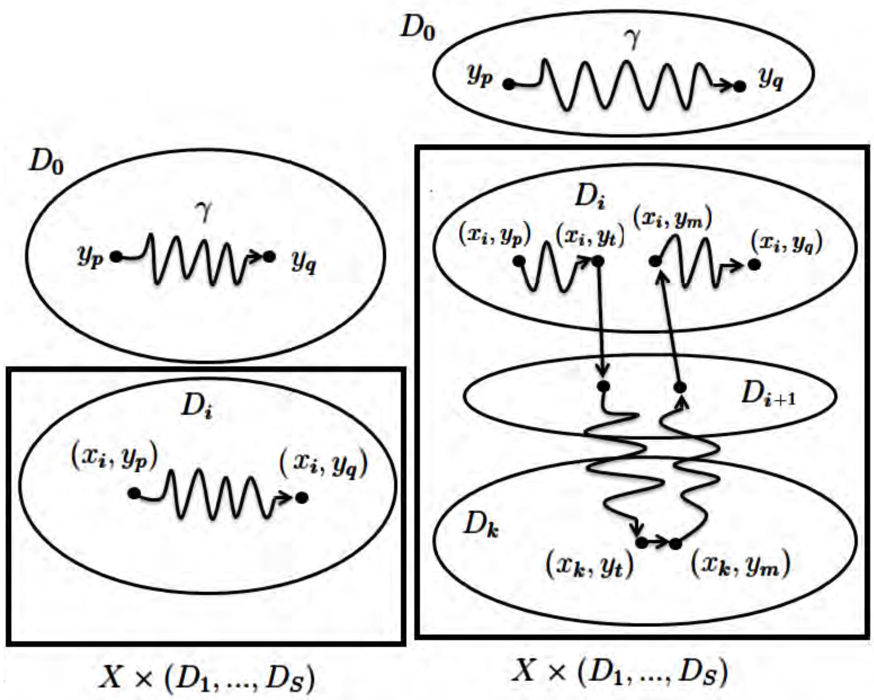

Figura 5.7: La figura de la izquierda ilustra el inciso III.a) de la demostración del lema 5,3, mientras la figura de la derecha el inciso III.b)

con $t = \text{mín}\{d_{D_0}(y_p, y_q) | y_p \neq y_q,$ *con* $y_p, y_q \in J_i$ *y* $x_i \in J_0\}$ *y* $l = l_0 + \text{máx}\{l_i |$ *existe* $x_i \in J_0\}$.

Demostración. Primero demostraremos la k-independencia del conjunto J. Sean $(x_m, y_r), (x_j, y_f) \in J$ dos vértices distintos. Por la definición de J tenemos que $x_m, x_j \in J_0$, $y_r \in J_m$ y $y_f \in J_j$. Consideremos los siguientes casos:

I. $m \neq j$ y $r = f$. Como $x_m, x_j \in J_0$, $d_X(x_m, x_j) \geq k_0$. Por el lema 5.3 tenemos $d_{X\times(D_1,\ldots,D_x)}((x_m, y_r), (x_j, y_f)) \geq d_X(x_m, x_j) \geq k_0 \geq k$.

II. $m \neq j$ y $r \neq f$. Por el lema 5.3 tenemos que $d_{X\times(D_1,\ldots,D_x)}((x_m, y_r), (x_j, y_f)) \geq k_0 + 1 > k$.

III. $m = j$ y $r \neq f$. Por la definición de J se sigue que $y_r, y_f \in J_m$ y $d_{D_m}(y_r, y_f) \geq k_m$. Y del lema 5.3 tenemos que:

$d_{X\times(D_1,\ldots,D_x)}((x_m, y_r), (x_j, y_f)) \geq \text{mín}\{d_{D_m}(y_r, y_f), d_{D_0}(y_r, y_f) + 2\}$

$\geq \text{mín}\{k_m, d_{D_0}(y_r, y_f) + 2\}$ (ya que $y_r, y_f \in J_m$ y J_m es k_m-independiente)

$\geq \text{mín}\{\{\text{mín}\{k_i|\text{existe } x_i \in J_0\}, d_{D_0}(y_r, y_f) + 2\}$ (ya que $k_m \geq$mín$\{k_i\}$)

$\geq$mín$\{$mín$\{k_i|$existe $x_i \in J_0\}$, mín $\{d_{D_0}(y_p, y_q) + 2|y_p \neq y_q$ con $y_p, y_q \in J_i, x_i \in J_0\}\}$ (ya que $d_{D_0}(y_r, y_f) \geq d_{D_0}(y_p, y_q)$)

$=$mín$\{$mín$\{k_i|$existe $x_i \in J_0\}, t + 2\} = k$.

Notemos que del caso (a) y (b) obtenemos que $d_{X\times(D_1,\ldots,D_x)}((x_m, y_r), (x_j, y_f)) \geq k_0 \geq$ mín $\{k_0,$ mín $\{k_i|$ existe $x_i \in J_0\}\}$. Además, si para toda $x_i \in J_0, |J_i| = 1$, observemos que el tercer caso no se tendría, ya que, $r \neq f$ implica $y_r \neq y_f$, con $y_r, y_f \in J_m$, por lo que $|J_m| \neq 1$. Así vamos a tener que:

$$k = \begin{cases} \text{mín}\{k_0,\text{mín}\{k_i|\text{ existe } x_i \in J_0\}\}, \text{ si para cada } x_i \in J_0,\ |J_i| = 1. \\ \text{mín}\{k_0, t + 2, \text{ mín } \{k_i|\text{existe } x_i \in J_0\}\}, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora demostraremos que J es l-absorbente en $X \times (D_1, \ldots, D_s)$. Sea $(x_m, y_r) \notin J$. Tenemos los siguientes casos:

I. Si $x_m \in J_0$, se tiene que $y_r \notin J_m$. Tenemos que existe $y_f \in J_m$, $y_r \neq y_f$, tal que $d_{D_m}(y_r, y_f) \leq l_m$. Como $(x_m, y_f) \in J$, aplicando el lema 5.3 tenemos que:

$d_{X\times(D_1,\ldots,D_s)}((x_m, y_r), (x_m, y_f)) \leq d_X(x_m, x_m)+\text{mín}\{d_{D_m}(y_r, y_f), d_{D_m}(y_r, y_f)\} = d_{D_m}(y_r, y_f) \leq l_m \leq \text{máx}\{l_i|\text{existe } x_i \in J_0\} \leq \text{máx}\{l_i|\text{existe } x_i \in J_0\} + l_0 = l$.

II. $x_m \notin J_0$. Por ser J_0 un (k_0, l_0)-núcleo de X, existe un $x_j \in J_0$ tal que $d_X(x_m, x_j) \leq l_0$. Sabemos que D_j tiene un (k_j, l_j)-núcleo, J_j. Si $y_r \notin J_j$, existe $y_f \in J_j$ tal que $d_{D_j}(y_r, y_f) \leq l_j$, por lo tanto $(x_j, y_f) \in J$. Al aplicar el lema 5.3 tenemos que:

$d_{X\times(D_1,\ldots,D_x)}((x_m, y_r), (x_j, y_f)) \leq d_X(x_m, x_j)+\text{mín}\{d_{D_m}(y_r, y_f), d_{D_j}(y_r, y_f)\}$

$\leq l_0+$ mín$\{d_{D_m}(y_r, y_f), l_j\}$ (ya que $d_X(x_m, x_j) \leq l_0$ y $d_{D_j}(y_r, y_f) \leq l_j$)

$\leq l_0 + l_j$ (ya que mín $\{d_{D_m}(y_r, y_f), l_j\} \leq l_j$)

$\leq l_0+$ máx $\{l_i |$existe $x_i \in J_0\} = l$.

Ahora supongamos que $y_r \in J_j$. Ésto implica que $(x_j, y_r) \in J$. Aún mas, $d_{X\times(D_1,\ldots,D_s)}((x_m, y_r), (x_j, y_r)) \leq d_X(x_m, x_j) \leq l_0 \leq l$.

Por lo que el teorema fue demostrado.

■

En el capítulo anterior vimos que si las digráficas D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo, no necesariamente el producto cartesiano de D_1 con D_2 tiene (k,l)-núcleo, pero gracias al teorema anterior podremos encontrar un (k', l')-núcleo para $D_1 \Box D_2$, el cual depende del (k,l)-núcleo de D_1 y D_2.

Corolario 5.5 *Sean D_1 y D_2 digráficas con (k,l)-núcleo, entonces el producto cartesiano de D_1 con D_2 tiene (k, l')-núcleo, donde $l' = 2l$.*

Demostración. Sean $D_i = D_2$ para toda $i = 1, ..., s$, donde $s = |V(X)|$ y $X = D_1$. Como las digráficas D_1 y D_2 tienen (k,l)-núcleo, al aplicar el teorema anterior vamos a tener que el producto cartesiano de D_1 con D_2, $D_1 \Box D_2$, tiene un (k', l')-núcleo donde:

$$k' = \begin{cases} \text{mín}\{k, \text{mín}\{k| \text{ existe } x_i \in J_0\}\} = k, \text{ si para cada } x_i \in J_0, |J_i| = 1. \\ \text{mín}\{k, t+2, \text{mín}\{k| \text{existe } x_i \in J_0\} = k\}, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

y $l' = l+$máx$\{l\} = l + l = 2l$ por lo que $l' = 2l$ y $k' = k$.

■

En la figura 2.10 tenemos dos digráficas D_1 con $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F(D) = \{\overrightarrow{41}, \overrightarrow{31}, \overrightarrow{21}, \overrightarrow{2,4}\}$ y D_2 una trayectoria de longitud dos, las cuales tienen como núcleo, es decir $(2,1)$-núcleo, al conjunto de vértices negros en cada digráfica. Entonces el producto cartesiano de D_1 con D_2, $D_1 \times D_2$, tiene un (k', l')-núcleo donde $l' = 2(1) = 2$ y $k' = 2$, el cual es $\{(1,1),(1,3)\}$.

5.3. Producto Lexicográfico Generalizado

Definición 5.3 *Sea X una digráfica con un cojunto de vértices $V(X) = \{x_1, ..., x_s\}$. Sean $D_1, D_2, ..., D_s$ digráficas de orden n con vértices $V(D_i) = V = \{y_1, ..., y_n\}$, $i = 1, 2, ..., s$. El***producto lexicográfico generalizado** *de la digráfica X y la secuencia de digráficas $D_1, D_2, ..., D_s$ es la digráfica $X[D_1, ..., D_s]$ tal que $V(X[D_1, ..., D_s]) = V \times V(X)$ y $F(X[D_1, ..., D_s]) = \{\overrightarrow{(y_p, x_i)(y_q, x_j)} | x_i = x_j$ y $\overrightarrow{y_p y_q} \in F(D_i)$ o $\overrightarrow{x_i x_j} \in F(X)\}$.*

Observemos que si $D_i = D$ para toda $i = 1, ..., s$, obtenemos el producto lexicográfico de X y D, denotado $X[D]$.

Para ver un ejemplo del producto lexicográfico generalizado véase la figura 5.8.

A continuación demostraremos un lema, el cual es muy importante ya que nos va a ayudar a encontrar un (k, l)-núcleo para $X[D_1, ..., D_s]$.

Lema 5.6 *Sean $(y_p, x_i), (y_q, x_j)$ dos vértices diferentes arbitrarios de $V(X[D_1, ..., D_s])$. Entonces*

$$d_{X[D_1,...,D_s]}((y_p, x_i), (y_q, x_j)) = \begin{cases} d_X(x_i, x_j) & \text{para } i \neq j \\ \text{mín}\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_X(x_i)\} & \text{para } i = j \end{cases}$$

donde $d_X(x_i)$ denota la longitud del ciclo dirigido más corto en X que incluye al vértice x_i.

Demostración. Sean $(y_p, x_i), (y_q, x_j)$ dos vértices arbitrarios en $V(X[D_1, ..., D_s])$ y consideremos dos casos:

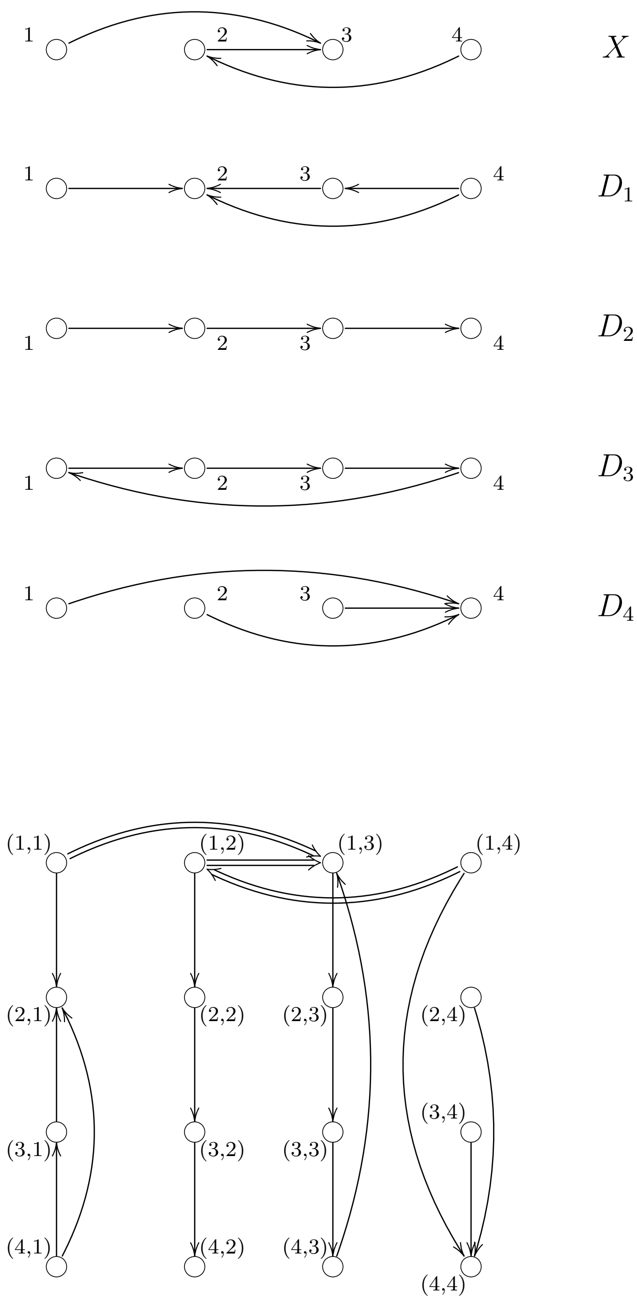

Figura 5.8: Se muestran las digráficas D_1, D_2, D_3, D_4 y X y un esquema del producto lexicográfico de X con D_1, D_2, D_3, D_4. Las flechas gordas indican que cada vértice de la columna que sale es invecino a los vértices de la columna donde llega la flecha. Por ejemplo los vértices $(i, 1)$ son invecinos de los vértices $(j, 3)$ con $i = j = 1, 2, 3, 4$.

I. $i \neq j$. Sea $d_X(x_i, x_j) = n$, entonces existe una trayectoria dirigida $T = (x_i, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_j)$ de longitud n. Así podemos construir en $X[D_1, ..., D_s]$ una trayectoria dirigida $T' = ((y_p, x_i), (y_p, a_1), ..., (y_p, a_{n-1},), (y_q, x_j))$ de longitud n. La trayectoria dirigida T' es de longitud mínima, ya que si existe una $(y_p, x_i)(y_q, x_j)$-trayectoria de longitud $m < n$ en $X[D_1, ..., D_S]$ al proyectarla sobre X encontraríamos un camino de longitud m, el cual contiene una trayectoria de longitud $l \leq m < n$. Esto no es posible porque $d_X(x_i, x_j) = n$. Notemos que si $d_X(x_i, x_j) = \infty$, entonces no existe una $(y_p, x_i)(y_q, x_j)$-trayectoria. Por lo que $d_{X[D_1,...,D_s]}((y_p, x_i), (y_q, x_j)) = \infty = d_X(x_i, x_j)$.

II. $i = j$. Analicemos los siguientes casos:

a) Si $d_{D_i}(y_p, y_q) = n \neq \infty$. Como $d_{D_i}(y_p, y_q) = n$, sea $T = (y_p, v_1, ..., v_{n-1}, y_q)$ una trayectoria dirigida de longitud mínima. En este caso tenemos la trayectoria dirigida $T' = ((y_p, x_i), (v_1, x_i), ..., (v_{n-1}, x_i)\ (y_q, x_i))$ de longitud n que se obtiene de T.

1) Si $d_X(x_i) = \infty$, quiere decir que no hay ciclos que contengan a x_i, por lo tanto T' es de longitud mínima. Véase la figura 5.9. De otra manera, si existiera una $(y_p, x_i)(y_q, x_i)$-trayectoria dirigida T'_1 de longitud $m < n$ al proyectarla sobre D_i obtendríamos una $y_p y_q$-trayectoria de longitud menor o igual a $m < n$. Lo cual no es posible por que $d_{D_i}(y_p, y_q) = n$.

2) Si $d_X(x_i) = n < \infty$, entonces tenemos un ciclo $C = (x_i, a_1, a_2, ..., a_{r-1}, x_i)$ de longitud mínima que pasa por x_i. Así tenemos la trayectoria T'' $= ((y_p, x_i), (w_1, a_1), ..., (w_{r-1}, a_{r-1}), (y_q, x_i))$ con $w_i \in V$. Obsérvese que $d_{X[D_1,...,D_s]}((y_p, x_i), (y_q, x_j)) = \text{mín}\{long(T'), long(T'')\} = d$. De lo contrario, se tiene una $y_p y_q$-trayectoria de longitud menor a d o un ciclo en x_i de longitud menor a d.

Así tenemos que $d_{X[D_1,...,D_s]}((y_p, x_i), (y_q, x_i)) = d_{D_i}(y_p, y_q)$.

b) Si $d_{D_i}(y_p, y_q) = \infty$ y $d_X(x_i) = r \neq \infty$. Como $d_X(x_i) = r$, sea $C = (x_i, u_1, ..., u_{r-1}, x_i)$ un ciclo dirigido de longitud mínima que contiene a x_i.

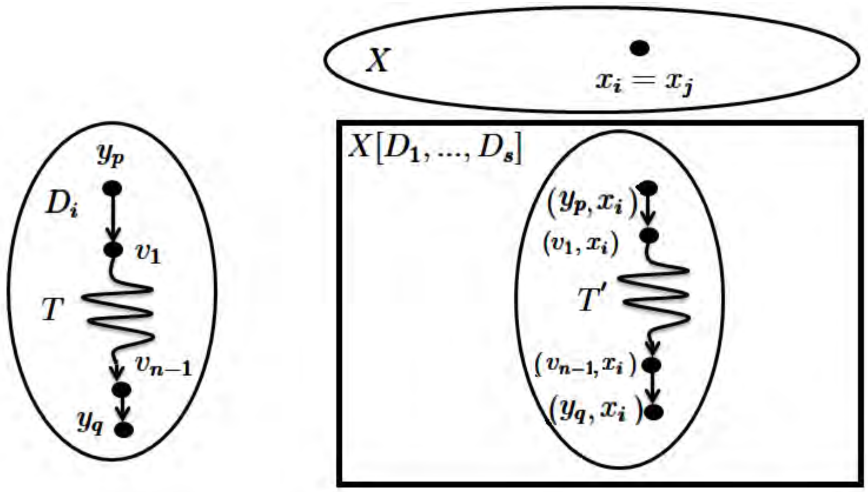

Figura 5.9: Ilustra el caso a).

En este caso tenemos que la trayectoria dirigida $C' = ((y_p, x_i), (z_1, u_1), ..., (z_{r-1}, u_{r-1}), (y_q,\ x_i))$ en $X[D_1, ..., D_s]$ de longitud r que se obtiene de C con $z_i \in V$, véase la figura 5.10, está trayectoria dirigida C' es de longitud mínima, ya que, si existiera una $(y_p, x_i)(y_q, x_i)$-trayectoria dirigida, C_1', de longitud $m < r$ al proyectarla sobre X obtendríamos un ciclo dirigido de longitud menor o igual a $m < r$. Lo cual no es posible, ya que, $d_X(x_i) = r$. Así tenemos que $d_{X[D_1,...,D_s]}((y_p, x_i), (y_q, x_i)) = d_X(x_i)$.

c) Si $d_{D_i}(y_p, y_q) = \infty$ y $d_X(x_i) = \infty$. En este caso no tendríamos manera de llegar de (y_p, x_i) a (y_q, x_i), así que la distancia es ∞.

Por lo tanto $d_{X[D_1,...,D_s]}((y_p, x_i), (y_q, x_i,)) = \text{mín}\{d_{D_i}(y_p, y_q), d_X(X_i)\}$.

Con lo que queda demostrado el lema. ■

Teorema 5.7 *Si J_i es un (k_i, l_i)-núcleo de la digráfica D_i, con $k_i \geq 2, l_i \geq 1$, $i = 1, ..., s$ y J_0 es un (k_0, l_0)-núcleo de la digráfica X con $k_0 \geq 2, l_0 \geq 1$, entonces el conjunto $J = (J_1, ..., J_s) \otimes J_0$ es un (k, l)-núcleo de la digráfica $X[D_1, ..., D_s]$,*

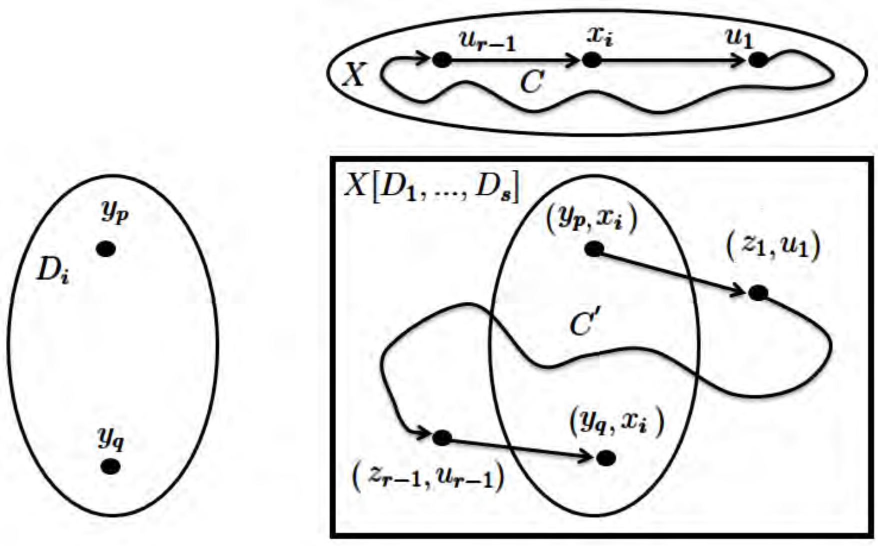

Figura 5.10: Ilustra el caso b).

donde:

$$k = mín\{k_0, d_x(J_0),\ mín\{k_i|\ existe\ x_i \in J_0\}\}$$

$$l = máx\{l_0,\ máx\{l_i|\ existe\ x_i \in J_0\}\}$$

$$donde\ d_x(J_0) = mín\{d_x(x_i)|\ existe\ x_i \in J_0\}.$$

Demostración. Sean $(y_r, x_m), (y_f, x_j) \in J$ dos vértices distintos, así $x_m, x_j \in J_0$, $y_r \in J_m$ y $y_f \in J_j$. Por lo que tendremos dos casos:

I. $m = j$. Ésto implica que $y_r, y_f \in J_m$. Aplicando el lema 5.6 tenemos:

$d_{X[D_1,...,D_s]}((y_r, x_m), (y_f, x_m)) =$mín$\{d_{D_m}(y_r, y_f), d_X(x_m)\}$

$\geq$ mín$\{k_m, d_X(x_m)\}$ (ya que $y_r, y_f \in J_m$ y J_m es k_m-independiente)

$\geq$ mín{mín$\{k_i|$ existe $x_i \in J_0\}$, mín$\{d_X(x_i)|$ existe $x_i \in J_0\}\}$ (ya que $k_m \geq$ mín$\{k_i\}$)

$=$ mín{mín$\{k_i|$ existe $x_i \in J_0\}, d_X(J_0)\}$

$\geq$ mín$\{k_0, d_X(J_0)$, mín$\{k_i|$ existe $x_i \in J_0\} = k$, donde $d_X(J_0) =$ mín$\{d_X(x_i)|$existe $x_i \in J_0\}$.

II. $m \neq j$. Evidentemente por el lema 5.6 tenemos $d_{X[D_1,\ldots,D_s]}((y_r, x_m), (y_f, x_j)) = d_X(x_m, x_j) \geq k_0 \geq k$.

De los dos casos anteriores obtenemos que $d_{X[D_1,\ldots,D_s]}((y_r, x_m), (y_f, x_j)) \geq$ mín$\{k_0$, $d_X(J_0)$, min $\{k_i|$existe $x_i \in J_0\} = k$. Por lo tanto J es k-independiente.

Supongamos que $(y_r, x_m) \notin J$. Así consideramos dos casos:

I. $x_m \in J_0$ y $y_r \notin J_m$. Como J_m es un (k_m, l_m)-núcleo de D_m y $y_r \notin J_m$ existe $y_f \in J_m$ tal que $d_{D_m}(y_r, y_m) \leq l_m$. Como $x_m \in J_0$ y $y_f \in J_m$, ésto nos implica que $(y_f, x_m) \in J$. Por el lema 5.6 tenemos:

$d_{X[D_1,\ldots,D_s]}((y_r, x_m), (y_f, x_m)) =$ mín$\{d_{D_m}(y_r, y_f), d_X(x_m)\} \leq l_m \leq$ máx$\{l_i|$existe $x_i \in J_0\} \leq l$.

II. $x_m \notin J_0$. Como J_0 es (k_0, l_0)-núcleo de la digráfica X, entonces existe $x_j \in J_0$ tal que $d_X(x_m, x_j) \leq l_0$.

Supongamos que $y_r \notin J_j$. Así existe $(y_f, x_j) \in J$ donde $y_f \in J_j$. Por el lema 5.6 tenemos que:

$d_{X[D_1,\ldots,D_s]}((y_r, x_m), (y_f, x_j)) = d_X(x_m, x_j) \leq l_0 \leq l$. Ahora si $y_r \in J_j$, entonces $(y_r, x_j) \in J$. Y por el lema 5.6, $d_{X[D_1,\ldots,D_s]}((y_r, x_m), (y_r, x_j)) = d_X(x_m, x_j) \leq l_0 \leq l$.

Con ésto queda demostrado el teorema. ■

Corolario 5.8 *Sean H y D digráficas con (k,l)-núcleos N_D y N_H, respectivamente, entonces el producto lexicográfico de D con H, tiene (k',l)-núcleo donde k' =mín$\{k,$ $d_H(N_H)\}$.*

Demostración. Sean $D = D_i$ para toda $i = 1, 2, ..., s$, donde $s = |V(X)|$ y $X = H$. Aplicando el teorema anterior a las digráficas D y H, ya que ambas tienen (k,l)-núcleo, tenemos que existe un (k',l')-núcleo donde:

$k' = \text{mín}\{k, d_H(N_H), \text{mín}\{k| \text{ existe } x_i \in N_H\}\} = \text{mín}\{k, d_H(N_H)\}$ y

$l' = \text{máx}\{l, \text{máx}\{l| \text{ existe } x_i \in N_H\}\} = l.$

■

Corolario 5.9 *Sean H y D digráficas con (k,l)-núcleos N_D y N_H, respectivamente, tales que para todo vértice $v \in N_H$ se tiene que $d_H(v) \geq k$ entonces el producto lexicográfico de D con H, tiene (k,l)-núcleo.*

Demostración. Del corolario anterior tenemos que existe un (k',l')-núcleo donde: $l' = l$ y $k' = \text{mín}\{k, d_H(N_H)\} = k$ (como $d_H(v) \geq k$ para todo vértice $v \in N_H$)

■

Recordemos que en el capítulo anterior vimos que si H y D tienen (k,l)-núcleo no necesariamente el producto lexicográfico de D con H, tiene (k,l)-núcleo. Pero sí podemos demostrar algo análogo para k-núcleos con ayuda del teorema 5.7 y de sus corolarios.

Teorema 5.10 *Sean H y D digráficas. Si H y D tienen k-núcleo entonces el producto lexicográfico de D con H, tiene k-núcleo.*

Demostración. Sean $N_D = \{y_1, ..., y_r\}$ y $N_H = \{x_1, ..., x_s\}$, k-núcleos de H y D, respectivamente. Como un k-núcleo es un $(k, k-1)$-núcleo, si para todo vértice

$v \in N_H$ se tiene que $d_H(v) \geq k$, entonces por el corolario 5.9 queda demostrado.

Supongamos que existe un vértice $v_i \in N_H$ tal que $d_H(v_i) < k$, de donde $d_H(v_i) \leq k-1$. Definamos los siguientes conjuntos:
$A = \{(a,b) \in V(H[D]) | a \in N_D,\ b \in N_H \text{ y } d_H(b) \geq k\}$ y
$B = \{(y_j,b) \in V(H[D]) | y_j \in N_D$, para algún j fijo, $b \in N_H$ y $d_D(b) < k\}$.
Véase la figura 5.11

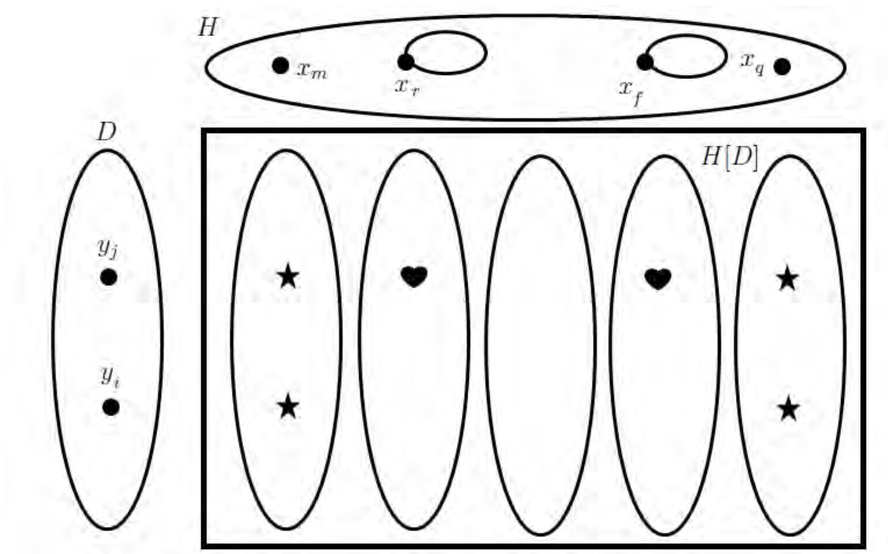

Figura 5.11: El k-núcleo de D esta formado por los vértices y_i y y_j mientras que el k-núcleo de H esta formado por los vértices x_m, x_r, x_f, x_q, donde $d_H(x_r) < k$ y $d_H(x_f) < k$. El conjunto A esta representado por los vértices en forma de estrella mientras que el conjunto B esta representado por los vértices en forma de corazón.

Afirmación: $N'_{H[D]} = A \cup B$ es un k-núcleo del producto lexicográfico de H con D.

Notemos que si $N_{H[D]}$ lo definimos como en el teorema 5.7 tenemos que $N'_{H[D]} \subset N_{H[D]}$ y como $N_{H[D]}$ es k-independiente, entonces $N'_{H[D]}$ es k-independiente. Por lo que sólo basta con demostrar que $N'_{H[D]}$ es $(k-1)$-absorbente para ver que es k-núcleo.

Sea $(a,b) \notin N'_{H[D]}$, demostraremos que es $(k-1)$-absorbido por $N'_{H[D]}$. Analicemos dos casos:

I. Si $(a,b) \notin N_{H[D]}$, por el teorema anterior (a,b) es $(k-1)$-absorbido por $N_{H[D]}$ $(k-1 = l = \text{máx } \{l, \text{máx}\{l| \text{ existe } x_i \in N_H\}\})$, es decir:

   $d_{H[D]}((a,b),(n_1,n_2)) \leq k-1$ para algún $(n_1,n_2) \in N'_{H[D]}$.

   Así tenemos dos casos:

   a) Si $(n_1,n_2) \in N'_{H[D]}$, (a,b) es $(k-1)$-absorbido por $N'_{H[D]}$.

   b) Si $(n_1,n_2) \notin N'_{H[D]}$, existe un vértice $(w,n_2) \in B \subseteq N'_{H[D]}$. Del lema 5.6 tenemos que:

$$d_{H[D]}((a,b),(w,n_2)) = \begin{cases} d_H(b,n_2) & \text{para } b \neq n_2 \\ \text{mín}\{d_D(a,w), d_H(n_2)\} & \text{para } b = n_2 \end{cases}$$

   1) Si $b = n_2$ tenemos que $d_{H[D]}((a,b),(w,n_2)) = \text{mín}\{d_D(a,w), d_H(n_2)\} \leq d_H(n_2) \leq k-1$.

   2) Si $b \neq n_2$ tenemos que $d_{H[D]}((a,b),(w,n_2)) = d_H(b,n_2)$ (por lema 5.6). Entonces $d_H(b,n_2) = d_{H[D]}((a,b),\ (n_1,n_2)) \leq k-1$. Aplicando nuevamente el lema 5.6, $d_{H[D]}((a,b),(w,n_2)) = d_H(b,n_2) \leq k-1$.

II. Si $(a,b) \in N_{H[D]} \backslash N'_{H[D]}$, existe un vértice $(c,b) \in B \subseteq N'_{H[D]}$. Del lema 5.6 tenemos que:

   $d_{H[D]}((a,b),(c,b)) = \text{mín}\{d_D(a,c), d_H(b)\} \leq d_H(b) \leq k-1$.

$\blacksquare$

Conclusiones

Como conclusiones podemos llenar la siguiente tabla:

	$D_1 \square D_2$	$D_1 \times D_2$	$D_1 \boxtimes D_2$	$H[D]$	$L(D)$
Núcleos	$\Rightarrow\times$ $\Leftarrow\times$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\times$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\dagger$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\checkmark$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\checkmark$
Seminúcleos	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\times$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\times$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\dagger$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\checkmark$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\checkmark$
(k,l)-Núcleos	$\Rightarrow\times$ $\Leftarrow\times$	$\Rightarrow\dagger$ $\Leftarrow\times$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\dagger$	$\Rightarrow\times$ $\Leftarrow\checkmark$	$\Rightarrow\checkmark$ $\Leftarrow\checkmark\star$

Donde:

- $\checkmark$Se demostró.
- $\times$ Se dio contraejemplo.
- $\dagger$No se logro decir nada.
- $\checkmark\star$ Se demostró pero bajo ciertas condiciones.

También en el producto lexicográfico demostramos que si H y D tienen k-núcleo entonces $H[D]$ tiene k-núcleo y en la digráfica de líneas logramos quitar una hipótesis y asegurar que D tiene k-núcleo si y sólo si su digráfica de líneas tiene k-núcleo.

Además también concluimos que:

- En la digráfica parcial de líneas concluimos que si k y l son dos números naturales tales que $1 \leq l < k$ y sea D una digráfica, con ingrado mínimo por lo menos uno y cuello por lo menos $l+1$. Entonces D tiene (k,l)-núcleo si y sólo si cualquier digráfica parcial de líneas $\mathcal{L}D$ tiene un (k,l)-núcleo.

- En el producto cartesiano generalizado concluimos que si J_i es un (k_i,l_i)-núcleo de la digráfica D_i, con $k_i \geq 2, l_i \geq 1$ para $i=1,...,s$ y J_0 es un (k_0,l_0)-núcleo de la digráfica X con $k_0 \geq 2, l_0 \geq 1$, entonces el conjunto $J = J_0 \otimes (J_1,...,J_s)$ es un (k,l)-núcleo de la digráfica $X \times (D_1,...,D_s)$.

- En el producto lexicográfico generalizado concluimos que si J_i es un (k_i,l_i)-núcleo de la digráfica D_i, con $k_i \geq 2, l_i \geq 1$, $i=1,...,s$ y J_0 es un (k_0,l_0)-núcleo de la digráfica X con $k_0 \geq 2, l_0 \geq 1$, entonces el conjunto $J = (J_1,...,J_s) \otimes J_0$ es un (k,l)-núcleo de la digráfica $X[D_1,...,D_s]$.

Bibliografía

[1] C. Balbuena, M. Guevara, *Kernels and partial line digraphs*, Appl. Math. Letters **23** (2010), 1218 – 1220.

[2] G.Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall, Third edition, California (1996).

[3] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1994.

[4] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una digráfica*, Anales del Instituto de Matemáticas,UNAM, **11** (1971), 55 – 62.

[5] L. Qin, S. Er-fang, Z. Min, *(k, I)-kernels in line digraphs*, Journal of Shanghai University (English Edition), **10(6)** (2006),484 – 486.

[6] A. Włoch, I. Włoch, *On (k,l)-kernels in generalized products*, Discrete Mathematics **164** (1997), 295 – 301.