



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS TEÓRICO Y SIMULACIÓN  
COMPUTACIONAL DE LAS  
VIBRACIONES EN UNA MEMBRANA  
CIRCULAR

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**F Í S I C O**

PRESENTA:

**MAURICIO GARCÍA VERGARA**

DIRECTORA DE TESIS:

**DRA. LUCÍA MEDINA GÓMEZ**



Ciudad Universitaria

2012



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Hoja de Datos del Jurado

Alumno: García  
Vergara  
Mauricio  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
303175719

Tutor: Dra.  
Lucía  
Medina  
Gómez

1<sup>er</sup> Sinodal: Dr.  
Guillermo  
Ramírez  
Santiago

2<sup>o</sup> Sinodal: Dra.  
Clara Eugenia  
Garza  
Hume

3<sup>er</sup> Sinodal: M. en C.  
Mirna  
Villavicencio  
Torres

4<sup>o</sup> Sinodal: Dra.  
Silvia Sandra  
Hidalgo  
Tobón

Trabajo escrito: Análisis teórico y simulación computacional  
de las vibraciones en una membrana circular.  
pp. 82  
2012



Este trabajo forma parte del proyecto DGPA-PAPIME 102809 Experimento Teoría y Simulación: La Teoría y su Relación con los Datos Experimentales y se desarrolló en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) bajo la dirección de la Dra. Lucía Medina Gómez. Además de contar parcialmente con el apoyo del proyecto PAPIIT IN-1884-3.



A mis padres.

Blanca Vergara Antonio y Modesto García Rojas





El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos.

*Jean-Baptiste-Joseph Fourier*

Después de las series de Fourier, otras series han entrado en el dominio del análisis y lo han hecho por la misma puerta, siendo imaginadas desde el punto de vista de las aplicaciones.

*Henri Poincaré*

Considero un poco inútil la lectura de largos tratados en análisis puro: un número muy grande de métodos pasa a la vez frente a nuestros ojos. Es trabajando en las aplicaciones que debemos estudiarlos; uno juzga ahí su utilidad y valora la manera de hacer uso de ellos.

*Joseph-Louis de Lagrange*



# Agradecimientos

*A mis abuelitos, Bruno, Cecilia, Agustín y Tomasa: Por quererme y cuidarme; aquí en la tierra y desde el cielo. Ustedes son mis ángeles.*

*A mis padres, Modesto y Blanca: Por su amor, confianza y apoyo. Gracias por iluminar cada día de mi vida. Todo lo bueno que hay en mí es debido a ustedes.*

*A mis hermanos, Mónica y Ricardo: Espero algún día tener la inteligencia, la fuerza y la valentía que ustedes tienen. Los admiro mucho y los quiero aún más.*

*A mi amiga y mentora la Doctora Lucía Medina: Por compartir su conocimiento, gentileza, confianza, paciencia y buen humor. Por ayudarme a redescubrir la belleza de la física y las matemáticas. Por confiar en mí para ser su ayudante. Usted cambió mi vida, profesora. Gracias a usted, soy una mejor persona y nunca se lo podré agradecer lo suficiente.*

*Al Doctor Guillermo Ramírez: Por su ayuda, consejos as como por permitirme colaborar con usted y mostrarme un mundo que no conoca.*

*A mis Sinodales: M. en C. Mirna Villavicencio, Dra Clara Garza y Dra Silvia Hidalgo, por su paciencia al revisar mi tesis y brindarme sus valiosas observaciones y comentarios.*

*A mi familia de Física, Migue, Nadia, Gil, Cuauh, Rafa, Joss, Giovanni, Aitor, Gisela y Talía: Simplemente, no lo hubiera podido lograr sin ustedes. Gracias por su amistad, inteligencia y por nunca dejarme solo. Espero que aunque vayamos a contramarea, nuestro barco nunca se hunda. h*

*A mi familia de Matemáticas, Jonás, José, Mario, Javier, Alfonso, y César: Los empecé a conocer dándoles clase, pero al final soy yo el que ha aprendido más de ustedes. Gracias por su amistad, y por mostrarme con su ejemplo que la inteligencia y el trabajo duro siempre tienen su recompensa.*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>xv</b>
<b>Introducción</b>	<b>xvii</b>
<b>1. Deducción de la ecuación de onda</b>	<b>3</b>
<b>2. Solución de la ecuación de Helmholtz</b>	<b>7</b>
2.1. Solución de la Ecuación Angular . . . . .	8
2.1.1. Ortogonalidad de la solución angular . . . . .	8
2.1.2. Norma cuadrada de la solución angular . . . . .	9
2.2. Solución de la Ecuación Radial . . . . .	10
2.2.1. Ortogonalidad de la solución radial . . . . .	13
2.2.2. Norma cuadrada de la solución radial . . . . .	15
2.3. Solución de la ecuación de Helmholtz . . . . .	16
<b>3. Solución de la ecuación de onda</b>	<b>21</b>
3.1. El Método de expansión en eigenfunciones . . . . .	22
3.2. Obteniendo los coeficientes utilizando Ortogonalidad . . . . .	23
3.2.1. Ejemplo . . . . .	25
3.3. Representación compleja de la solución a la ecuación de onda .	28
<b>4. Aproximación a la solución de la ecuación de onda usando sumas finitas</b>	<b>33</b>
4.1. Acotando el error . . . . .	33
4.1.1. Cota para la condición de Dirichlet . . . . .	36

---

4.1.2. Cota para la condición de Neumann . . . . .	37
4.1.3. Cota para la condición de Robin . . . . .	40
4.2. Error cuadrático medio . . . . .	42
4.2.1. Desigualdad de Bessel . . . . .	43
4.2.2. Identidad de Parseval . . . . .	44
<b>5. Análisis de la solución a la ecuación de onda</b>	<b>47</b>
5.1. Resultados de la simulación . . . . .	47
5.2. La Solución como Ondas Viajeras . . . . .	49
5.2.1. Patrones en espiral . . . . .	50
<b>A. La función Gama y el factorial</b>	<b>57</b>
<b>B. Solución de la ecuación de Bessel</b>	<b>59</b>
<b>C. Fórmulas de recurrencia para la función de Bessel</b>	<b>63</b>
<b>D. Expresión asintótica de la función de Bessel</b>	<b>67</b>
<b>E. Código del programa en lenguaje C</b>	<b>73</b>
<b>F. Ondas Viajeras</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

---

# Análisis teórico y simulación computacional de las vibraciones en una membrana circular.

Tesis

## Resumen

Mauricio García Vergara

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

En este trabajo se realizó un análisis teórico detallado e implementación numérica de la solución de la ecuación de onda en coordenadas polares bajo las siguientes condiciones de frontera: *i*) Dirichlet *ii*) Neumann y *iii*) Robin. En cuanto al caso *i*), este es totalmente conocido y desarrollado en varias referencias y libros de texto, *v. gr.* [7] y [11], siendo el caso de la membrana vibrante con fronteras fijas; sin embargo las condiciones de frontera restantes no han sido analizadas.

Una característica importante en relación a las condiciones de frontera analizadas es que las funciones solución de la ecuación de onda son ortogonales, especialmente, las bases Bessel-Fourier. Lo anterior implica que cualquier función  $f(r, \theta)$ , en este caso las condiciones iniciales, deben estar representadas en el espacio solución Bessel Fourier, para ello es necesario calcular las normas de estas funciones bajo cada una de las condiciones de frontera. Resolviendo la ecuación de Helmholtz utilizando el método de separación de variables fue posible calcular estas normas.

Mediante una representación compleja de la solución encontrada, pudimos acotar el error de aproximar una función  $f(r, \theta)$  haciendo uso de sumas finitas. Esto nos llevó a probar la Desigualdad de Bessel y la Identidad de Parseval en coordenadas polares. Esta demostración no se encuentra reportada en la literatura sobre el tema *v. gr.* [6] y [13].

Analizando la solución a la ecuación de onda, encontramos que cada uno de los modos normales de una membrana circular puede verse como la superposición de dos ondas viajeras que se desplazan en dirección angular en sentidos contrarios, las cuales giran cada vez más rápido conforme se incrementa el número del armónico. Más aún, al emplear la aproximación asintótica es posible observar un fenómeno mucho más complejo: Cuatro ondas que se desplazaban en las direcciones radial y angular. El programa en lenguaje C que elaboramos nos permitió obtener las gráficas de estas ondas que muestran un patrón en espiral. La superposición de estas ondas en espiral nos muestra cuatro deflexiones de membranas que indican fenómenos de torsión, los cuales reproducen cualitativamente el comportamiento de la membrana circular a un menor costo computacional.





# Introducción

Una de las ecuaciones más estudiadas en la Física es la ecuación de onda, en particular el caso en una dimensión (cuerda vibrante) es el que se aborda con mayor detalle llegando generalmente a las soluciones de D’Alambert y en Series de Fourier. Posteriormente se generaliza el resultado a dos y tres dimensiones en coordenadas cartesianas. En la naturaleza no es siempre conveniente utilizar coordenadas cartesianas y para fenómenos con geometría circular es preferible utilizar coordenadas polares, donde las soluciones están dadas en términos de funciones de Bessel de primer tipo.

En coordenadas polares, el caso que se considera generalmente es el de una membrana fija en sus bordes, es decir, la función que modela este fenómeno es cero en la frontera, a esto se le llama condición de Dirichlet homogénea. Sin embargo, existen distintos fenómenos que no pueden modelarse así, como es el caso de las pequeñas perturbaciones en la superficie del agua contenida en un vaso. Aquí, no hay movimiento en la dirección radial para los puntos que se encuentran en la frontera; ésta es una condición de Neumann homogénea. La combinación lineal de las condiciones de Dirichlet y Neumann recibe el nombre de condición de Robin.

Por otro lado, la simulación computacional es una poderosa herramienta en la investigación actual, ya que al modificar distintos parámetros podemos plantear diversos escenarios y probar ciertas hipótesis, que posteriormente deben ser confirmadas experimentalmente. No obstante, al pasar de la solución puramente matemática a la implementación numérica se tiene como consecuencia que siempre hay un cierto error entre las soluciones. Calcular y acotar el error es fundamental para poder simular el fenómeno eficazmente.

Los objetivos de este trabajo son: Resolver la ecuación de onda bidimensional en coordenadas polares para las tres condiciones de frontera Dirichlet, Neumann y Robin, así como encontrar una forma de estimar el error cuando aproximamos una función  $f(r, \theta)$  mediante sumas finitas y finalmente elaborar un programa que nos permita visualizar las vibraciones bajo distintas condiciones de frontera.

---

La estructura de la tesis es la siguiente: En el capítulo 1 se deduce la ecuación de onda en dos dimensiones, así como su representación en coordenadas polares. Las herramientas matemáticas que se utilizarán, se encuentran en el capítulo 2. En el capítulo 3 se resuelve la ecuación de onda mediante el método de expansión en eigenfunciones. La forma de aproximar una función en coordenadas polares viene en el capítulo 4. El capítulo 5 muestra los resultados obtenidos mediante el programa de simulación y una nueva forma de interpretar la solución a la ecuación de onda. Finalmente se presentan las conclusiones.





# Capítulo 1

## Deducción de la ecuación de onda

En este capítulo nos enfocaremos en el análisis de las fuerzas que actúan sobre una membrana, así como su descripción matemática obteniendo la ecuación que modela las vibraciones en la membrana.

Sea una membrana rectangular flexible, homogénea y restringida a desplazamientos verticales, sin ofrecer resistencia a doblarse. Denotemos  $u(x, y, t)$  al desplazamiento vertical del punto  $(x, y)$  en la membrana a un tiempo  $t$ . Ahora consideremos una porción  $ABCD$  muy pequeña de la membrana como se muestra en la Figura 1.1. Como la tensión total a través del interior de la

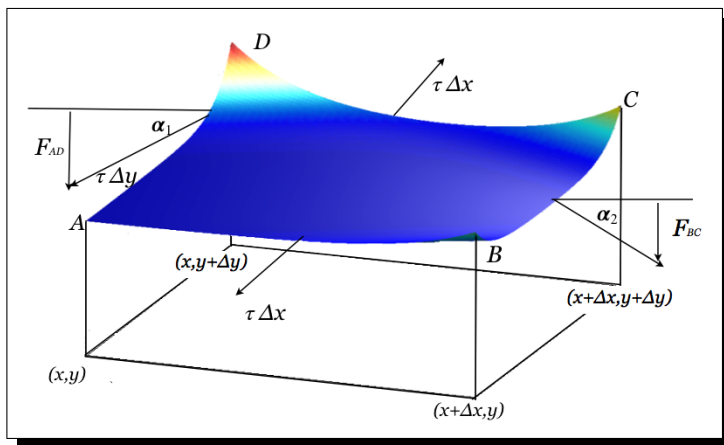


Figura 1.1: Diagrama de fuerzas sobre una porción de la membrana,

membrana es nula, necesitamos considerar solamente las tensiones a lo largo

de sus cuatro lados. En cada uno de los lados, la tensión produce una fuerza neta que apunta hacia el exterior de la membrana perpendicular a la frontera y tangente a la membrana.

Ahora consideremos el lado  $AD$ . La fuerza neta en este lado tiene magnitud  $\tau\Delta y$ , donde  $\tau$  es la constante de tensión por unidad de longitud. Dado que sólo estamos considerando desplazamientos verticales, únicamente debemos tomar en cuenta la componente vertical de la fuerza neta, esto nos da

$$F_{AD} \approx \tau\Delta y \sin \alpha_1,$$

y considerando desplazamientos muy pequeños en esa dirección tenemos  $\sin \alpha_1 \approx \tan \alpha_1$ , entonces

$$F_{AD} \approx \tau\Delta y \tan \alpha_1,$$

además usando que la tangente es la derivada parcial en la dirección  $x$  y considerando la orientación del ángulo  $\alpha_1$  se tiene:

$$F_{AD} \approx -\tau\Delta y u_x(x, y, t), \quad (1.1)$$

y de la misma manera para el lado  $CB$

$$F_{CB} \approx \tau\Delta y u_x(x + \Delta x, y, t). \quad (1.2)$$

Por tanto, la resultante vertical de las componentes de la tensión en  $AD$  y  $CB$  es aproximadamente

$$F_{AD} + F_{CB} \approx \tau u_y(x + \Delta x, y, t)\Delta y - \tau u_y(x, y, t)\Delta y; \quad (1.3)$$

así también para  $AB$  y  $DC$

$$F_{AB} + F_{DC} \approx \tau u_y(x, y + \Delta y, t)\Delta x - \tau u_y(x, y, t)\Delta x. \quad (1.4)$$

Por otro lado, utilizando la Segunda Ley de Newton podemos escribir la componente vertical de la fuerza total que actúa en la membrana como

$$F_T = \rho\Delta x\Delta y u_{tt}(x, y, t), \quad (1.5)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa por unidad de área de la membrana,  $\Delta x\Delta y$  la unidad de área y  $u_{tt}(x, y, t)$  la aceleración.

Igualando la fuerza total dada por la ecuación (1.5) con (1.3) y (1.4) se tiene

$$\begin{aligned} \rho\Delta x\Delta y u_{tt}(x, y, t) = & \tau u_y(x, y + \Delta y, t)\Delta x - \tau u_y(x, y, t)\Delta x \\ & + \tau u_x(x + \Delta x, y, t)\Delta y - \tau u_x(x, y, t)\Delta y. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho u_{tt}(x, y, t) = & \tau \frac{u_y(x, y + \Delta y, t) - u_y(x, y, t)}{\Delta y} \\ & + \tau \frac{u_x(x + \Delta x, y, t) - u_x(x, y, t)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $\Delta x$  y  $\Delta y$  tienden a 0 se tiene finalmente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.6)$$

donde  $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$ , es la velocidad de propagación de la onda.

A la suma de las segundas derivadas parciales se le llama Laplaciano y se denota por  $\nabla^2$ . Nosotros vamos a trabajar con una membrana circular, por lo que es necesario realizar un cambio, de coordenadas cartesianas a polares; así la ecuación de onda se escribe como [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right). \quad (1.7)$$





## Capítulo 2

# Solución de la ecuación de Helmholtz

Para resolver la ecuación de onda dada por (1.7) generalmente se utiliza directamente el método de separación de variables [7] [11], el cual consiste en separar una ecuación diferencial parcial en ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de una variable. Sin embargo, nosotros procederemos primero resolviendo la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares esta ecuación modela únicamente el comportamiento espacial y posteriormente en el Capítulo 3 mostraremos cómo utilizar esta solución para, mediante el método de expansión en eigenfunciones [3], resolver la ecuación de onda.

Consideremos la ecuación de Helmholtz en una región circular para  $\Phi(r, \theta)$  dada por

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\lambda^2 \Phi, \quad (2.1)$$

con  $0 \leq r \leq a$  y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , bajo alguna de las siguientes condiciones homogéneas a la frontera

$$\Phi(a, \theta) = 0 \quad \text{Cond. de Dirichlet}, \quad (2.2)$$

$$\Phi_r(a, \theta) = 0 \quad \text{Cond. de Neumann}, \quad (2.3)$$

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} + \eta \Phi(a, \theta) = 0 \quad \text{Cond. de Robin}, \quad (2.4)$$

donde  $\mu$  y  $\eta$  son dos constantes reales.

Sabemos que es posible resolver (2.1) con alguna de estas condiciones de frontera utilizando el método de separación de variables. Si consideramos a  $\Phi(r, \theta)$  como

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.1) se tiene

$$\Theta R'' + \frac{1}{r} \Theta R' + \frac{1}{r^2} \Theta'' R = -\lambda^2 \Theta R,$$

y dividiendo entre  $R\Theta$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2.$$

Reescribiendo la expresión anterior, es posible ver que

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}. \quad (2.6)$$

Notemos que el miembro izquierdo de (2.6) depende únicamente de  $r$ , mientras que el miembro derecho lo hace de  $\theta$ . Para que esta igualdad se mantenga es necesario que ambos miembros sean iguales a una constante que llamaremos  $n^2$ , es decir

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = n^2,$$

lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

$$\Theta'' + n^2 \Theta = 0, \quad (2.7)$$

$$r^2 R'' + r R' + R(\lambda^2 r^2 - n^2) = 0. \quad (2.8)$$

## 2.1. Solución de la Ecuación Angular

La ecuación (2.7) describe el comportamiento angular de la membrana, por lo que ésta debe ser  $2\pi$  periódica, es decir debe cumplir  $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ , considerando esta propiedad, la ecuación (2.7) tiene como solución [5]

$$\Theta_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad (2.9)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , es decir  $n$  son los valores propios de las funciones  $\sin n\theta$  y  $\cos n\theta$ , por lo que existe un número infinito de soluciones de la ecuación (2.7).

### 2.1.1. Ortogonalidad de la solución angular

Ahora, podemos analizar algunas características de las soluciones obtenidas en (2.9).

Sean  $\Theta_n$  y  $\Theta_m$  dadas por (2.9), con  $m \neq n$ , que satisfacen (2.7), entonces

$$\Theta_n'' + n^2 \Theta_n = 0, \quad (2.10)$$

$$\Theta_m'' + m^2 \Theta_m = 0. \quad (2.11)$$

Multiplicando (2.10) por  $-\Theta_m$  y (2.11) por  $\Theta_n$

$$-\Theta_m \Theta_n'' - n^2 \Theta_m \Theta_n = 0,$$

$$\Theta_n \Theta_m'' + m^2 \Theta_n \Theta_m = 0,$$

y sumando ambas expresiones se tiene

$$\Theta_n \Theta_m'' - \Theta_m \Theta_n'' + (m^2 - n^2) \Theta_n \Theta_m = 0. \quad (2.12)$$

Notemos que

$$\frac{d}{d\theta} [\Theta_n \Theta_m' - \Theta_m \Theta_n'] = \Theta_n \Theta_m'' - \Theta_m \Theta_n''. \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.13) en (2.12) e integrando de 0 a  $2\pi$

$$\begin{aligned} (n^2 - m^2) \int_0^{2\pi} \Theta_n \Theta_m d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} [\Theta_n \Theta_m' - \Theta_m \Theta_n'] d\theta, \\ &= (\Theta_n' \Theta_m - \Theta_m \Theta_n')_0^{2\pi}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

como  $m \neq n$  se tiene

$$\int_0^{2\pi} \Theta_n \Theta_m d\theta = 0,$$

es decir las soluciones forman una base ortogonal.

### 2.1.2. Norma cuadrada de la solución angular

Al multiplicar la ecuación (2.10) por  $\Theta_n$  tenemos que

$$\Theta_n \Theta_n'' + n^2 \Theta_n^2 = 0. \quad (2.14)$$

y puesto que

$$n^2 \Theta_n^2 = (\Theta_n')^2 - \frac{d}{d\theta} [\Theta_n \Theta_n']. \quad (2.15)$$

Integrando de 0 a  $2\pi$  resulta

$$\begin{aligned} n^2 \int_0^{2\pi} \Theta_n^2 d\theta &= - \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} [\Theta_n \Theta_n'] d\theta + \int_0^{2\pi} (\Theta_n')^2 d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} (\Theta_n')^2 d\theta - (\Theta_n \Theta_n')_0^{2\pi}, \\ &= \int_0^{2\pi} (\Theta_n')^2 d\theta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como  $\Theta'_n = n(B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta)$  entonces

$$\int_0^{2\pi} (\Theta'_n)^2 d\theta = n^2 \int_0^{2\pi} [B_n^2 \cos^2 n\theta + A_n^2 \sin^2 n\theta - 2A_n B_n \sin n\theta \cos n\theta] d\theta, \quad (2.17)$$

por otro lado

$$\int_0^{2\pi} \Theta_n^2 d\theta = \int_0^{2\pi} [A_n^2 \cos^2 n\theta + B_n^2 \sin^2 n\theta + 2A_n B_n \sin n\theta \cos n\theta] d\theta. \quad (2.18)$$

Entonces sumando  $n^2 \int_0^{2\pi} \Theta_n^2 d\theta$  en ambos miembros de la ecuación (2.16) se tiene

$$2n^2 \int_0^{2\pi} \Theta_n^2 d\theta = \int_0^{2\pi} [n^2 \Theta_n^2 + (\Theta'_n)^2] d\theta,$$

y sustituyendo (2.17) y (2.18) en la expresión anterior

$$\begin{aligned} 2n^2 \int_0^{2\pi} \Theta_n^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} n^2 A_n^2 (\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta) d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} n^2 B_n^2 (\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta) d\theta \\ &= n^2 (A_n^2 + B_n^2) \int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

es decir

$$\int_0^{2\pi} \Theta_n^2 d\theta = (A_n^2 + B_n^2) \pi. \quad (2.20)$$

Por tanto

$$\int_0^{2\pi} \Theta_n \Theta_m d\theta = (A_n^2 + B_n^2) \delta_{nm} \pi. \quad (2.21)$$

Para el caso de  $n = 0$  se tiene que  $\Theta_0 = A_0$  y

$$\int_0^{2\pi} \Theta_0^2 d\theta = 2\pi A_0^2. \quad (2.22)$$

## 2.2. Solución de la Ecuación Radial

La ecuación (2.8) se conoce como la ecuación paramétrica de Bessel [10] cuya solución

$$R(r) = J_n(\lambda r), \quad (2.23)$$

es la función de Bessel de primer tipo de grado  $n$  dada por (Apéndice B)

$$J_n(\lambda r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2k+n}. \quad (2.24)$$

La función de Bessel es una función armónica, como se muestra la Figura 2.1 ;estas soluciones presentan un comportamiento oscilante cuya amplitud va decayend a medida que  $r$  tiende a infinito (Apéndice D). Además, si comparamos con la Figura 2.2 podemos advertir que a medida que aumenta el índice  $n$ , el primer máximo de la función de Bessel se recorre hacia la derecha. El parámetro  $\lambda$  depende directamente de las condiciones de frontera dadas

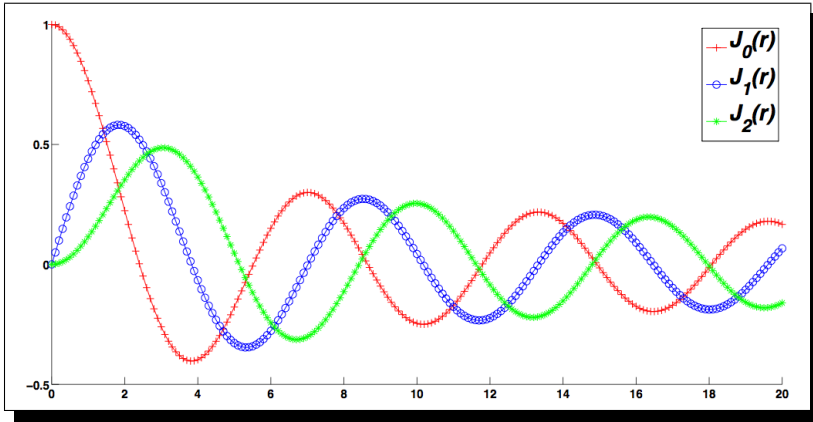


Figura 2.1: Funciones de Bessel  $J_0(r)$ ,  $J_1(r)$  y  $J_2(r)$

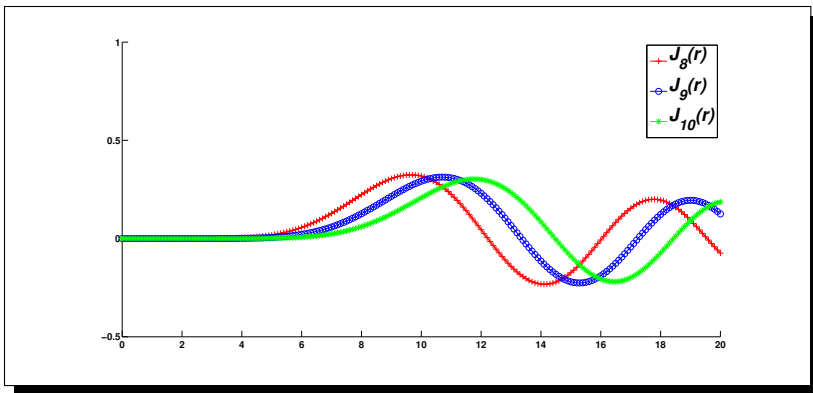


Figura 2.2: Funciones de Bessel  $J_8(r)$ ,  $J_9(r)$  y  $J_{10}(r)$

por las ecuaciones (2.2)-(2.4).

### i) Condición de Dirichlet

La condición de frontera de Dirichlet dada por (2.2) significa que la función radial evaluada en  $r = a$  es cero, no hay movimiento en la membrana, es decir  $R(a) = J_n(\lambda a) = 0$ , por lo que  $\lambda = \lambda_{nj} = \frac{\alpha_{nj}}{a}$ , donde  $\alpha_{nj}$  son las raíces de la función de Bessel de orden  $n$ . Podemos observar en la Figura 2.3 cómo al tomar  $\lambda_{nj} = \frac{\alpha_{nj}}{a}$  estamos escalando la función de Bessel con cada uno de sus ceros.

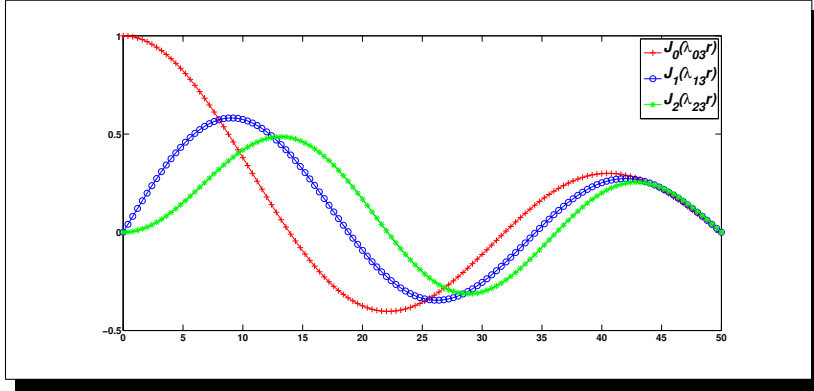


Figura 2.3: Funciones de Bessel sujetas a la condición de Dirichlet con  $a = 50$ .

### ii) Condición de Neumann

Para la condición dada por (2.3) se tiene que  $R'(a) = \lambda J'_n(\lambda a) = 0$ . Como  $\lambda \neq 0$  entonces  $J'_n(\lambda a) = 0$  y por tanto  $\lambda = \lambda_{nj} = \frac{\beta_{nj}}{a}$ , donde  $\beta_{nj}$  son las raíces de la derivada de la función de Bessel de orden  $n$ . La figura 2.4 nos muestra como en la frontera se encuentran los máximos y mínimos locales de la función de Bessel en  $r = a$ .

### iii) Condición de Robin

Para la condición de Robin dada por la ecuación (2.4)  $\lambda_{nj} = \frac{\gamma_{nj}}{a}$ , donde  $\gamma_{nj}$  son las raíces de la ecuación trascendente

$$\mu \frac{\gamma_{nj}}{a} J'_n(\gamma_{nj}) + \eta J_n(\gamma_{nj}) = 0.$$

En la Figura 2.5 se puede observar como la derivada de la función de Bessel bajo la condición de Robin, toma un valor intermedio entre las condiciones de Dirichlet y Neumann.

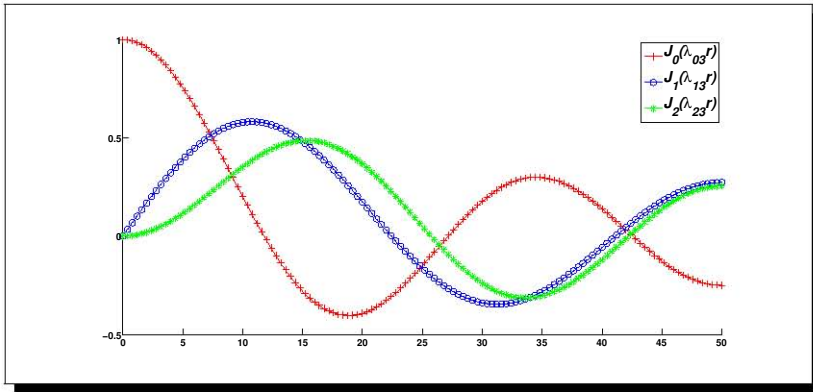


Figura 2.4: Funciones de Bessel sujetas a la condición de Neumann con  $a = 50$ .

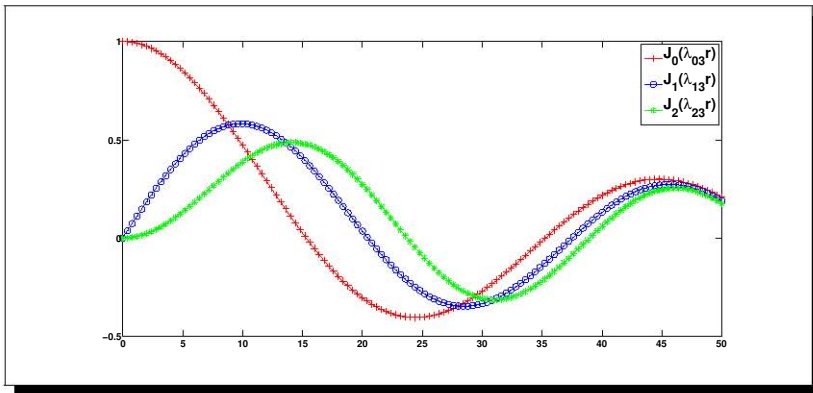


Figura 2.5: Funciones de Bessel sujetas a la condición de Robin con  $a = 50$ .

Resumiendo, para las tres condiciones de frontera se tiene que el parámetro  $\lambda_{nj}$  tiene la forma

$$\lambda_{nj} = \begin{cases} \frac{\alpha_{nj}}{a} & \text{Cond. Dirichlet,} \\ \frac{\beta_{nj}}{a} & \text{Cond. Neumann,} \\ \frac{\gamma_{nj}}{a} & \text{Cond. Robin.} \end{cases} \quad (2.25)$$

### 2.2.1. Ortogonalidad de la solución radial

Al igual que con la solución angular, es necesario mostrar la ortogonalidad de nuestras soluciones radiales que en este caso son funciones de Bessel. Por



lo que podemos seguir un tratamiento análogo al que desarrollamos con las soluciones angulares. Sin embargo en este caso es necesario considerar las tres distintas condiciones de frontera.

Sea  $R_{nj} = J_n(\lambda_{nj}r)$  la solución de (2.8) con valor propio  $\lambda_{nj}$ , de

$$r^2 R''_{nj} + r R'_{nj} + R_{nj}(\lambda_{nj}^2 r^2 - n^2) = 0,$$

dividiendo entre  $r$  se tiene

$$r R''_{nj} + R'_{nj} + R_{nj}(\lambda_{nj}^2 r - n^2/r) = 0.$$

Podemos reescribir la expresión anterior como

$$[r R'_{nj}]' + R_{nj}(\lambda_{nj}^2 r - n^2/r) = 0. \quad (2.26)$$

Sea  $R_{nk} = J_n(\lambda_{nk}r)$  otra solución de (2.8) con valor propio  $\lambda_{nk} \neq \lambda_{nj}$ , por (2.26) tenemos que

$$[r R'_{nk}]' + R_{nk}(\lambda_{nk}^2 r^2 - n^2/r) = 0. \quad (2.27)$$

Multiplicando (2.26) por  $R_{nk}$  y (2.27) por  $-R_{nj}$  se tiene

$$\begin{aligned} R_{nk}[r R'_{nj}]' + R_{nk}R_{nj}(\lambda_{nj}^2 r - n^2/r) &= 0, \\ -R_{nj}[r R'_{nk}]' - R_{nk}R_{nj}(\lambda_{nk}^2 r - n^2/r) &= 0. \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$R_{nk}[r R'_{nj}]' - R_{nj}[r R'_{nk}]' + (\lambda_{nj}^2 - \lambda_{nk}^2)r R_{nk}R_{nj} = 0.$$

Notemos que

$$\frac{d}{dr}[R_{nk}r R'_{nj} - R_{nj}r R'_{nk}] = R_{nk}[r R'_{nj}]' - R_{nj}[r R'_{nk}]',$$

por tanto

$$\frac{d}{dr}[R_{nk}r R'_{nj} - R_{nj}r R'_{nk}] = (\lambda_{nk}^2 - \lambda_{nj}^2)r R_{nk}R_{nj}.$$

Integrando de 0 a  $a$

$$\begin{aligned} (\lambda_{nk}^2 - \lambda_{nj}^2) \int_0^a R_{nk}R_{nj}r \, dr &= r[R_{nk}R'_{nj} - R_{nj}R'_{nk}]|_0^a, \\ &= a[R_{nk}(a)R'_{nj}(a) - R_{nj}(a)R'_{nk}(a)]. \end{aligned}$$

Ahora bien, para la condición de Dirichlet  $R_{nj}(a) = R_{nk}(a) = 0$  y para la de Neumann  $R'_{nj}(a) = R'_{nk}(a) = 0$ . Por otro lado, para la condición de Robin,

$$\begin{aligned} r[R_{nk}R'_{nj} - R_{nj}R'_{nk}]|_0^a &= a[R_{nk}(a)R'_{nj}(a) - R_{nj}(a)R'_{nk}(a)], \\ &= a \left[ -R_{nk}(a) \frac{\eta}{\mu} R_{nj}(a) + R_{nj}(a) \frac{\eta}{\mu} R_{nk}(a) \right], \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$(\lambda_{nk}^2 - \lambda_{nj}^2) \int_0^a R_{nk} R_{nj} r \, dr = 0,$$

como  $(\lambda_{nk}^2 - \lambda_{nj}^2) \neq 0$

$$\int_0^a R_{nk} R_{nj} r \, dr = 0, \quad (2.28)$$

es decir, las funciones  $J_n(\lambda_{nj}r)$  y  $J_n(\lambda_{nk}r)$  son ortogonales bajo la función peso  $r$ .

## 2.2.2. Norma cuadrada de la solución radial

Ahora, obtendremos la norma cuadrada de las funciones de Bessel para las tres condiciones de frontera; para ello multiplicamos la ecuación (2.26) por  $rR'_{nj}$

$$rR'_{nj}[rR'_{nj}]' + R_{nj}R'_{nj}(\lambda_{nj}^2 r^2 - n^2) = 0.$$

Recordando que  $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ , es posible reescribir la expresión anterior como

$$[(rR'_{nj})^2]' + [R_{nj}^2]'(\lambda_{nj}^2 r^2 - n^2) = 0.$$

Integrando de 0 a  $a$

$$(rR'_{nj})^2|_0^a + \lambda_{nj}^2 \int_0^a [R_{nj}^2]' r^2 \, dr - n^2 R_{nj}^2|_0^a = 0, \quad (2.29)$$

y como

$$\int_0^a [R_{nj}^2]' r^2 \, dr = r^2 R_{nj}^2|_0^a - 2 \int_0^a R_{nj}^2 r \, dr,$$

podemos substituir en (2.29) para llegar a

$$\int_0^a R_{nj}^2 r \, dr = \frac{(rR'_{nj})^2 + R_{nj}^2(\lambda_{nj}^2 r^2 - n^2)}{2\lambda_{nj}^2} \Big|_0^a.$$

Recordando que  $R_{nj}(r) = J_n(\lambda_{nj}r)$

$$\begin{aligned} \int_0^a J_n^2(\lambda_{nj}r) r \, dr &= \frac{[r\lambda_{nj}J'_n(\lambda_{nj}r)]^2|_0^a + J_n^2(\lambda_{nj}r)(\lambda_{nj}^2 r^2 - n^2)}{2\lambda_{nj}^2} \Big|_0^a \\ &= \frac{[a\lambda_{nj}J'_n(\lambda_{nj}a)]^2 + J_n^2(\lambda_{nj}a)(\lambda_{nj}^2 a^2 - n^2)}{2\lambda_{nj}^2}, \\ &= \mathcal{N}_{DR}^2(n, j). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Utilizando (2.30) y la definición de  $\lambda_{nj}$  para las diferentes condiciones de frontera dada por (2.25) se tiene.

$$\mathcal{N}_{DNR}^2(n, j) = \begin{cases} \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_{nj}) & \text{Cond. Dirichlet,} \\ \frac{a^2}{2} J_n^2(\beta_{nj}) \left[ 1 - \frac{n^2}{\beta_{nj}^2} \right] & \text{Cond. Neumann,} \\ \frac{a^2}{2} J_n^2(\gamma_{nj}) \left[ 1 + \frac{\eta^2}{\mu^2} - \frac{n^2}{\gamma_{nj}^2} \right] & \text{Cond. Robin.} \end{cases} \quad (2.31)$$

Por tanto

$$\int_0^a J_n(\lambda_{nj}r) J_n(\lambda_{nk}r) r dr = \delta_{jk} \mathcal{N}_{DNR}^2(n, k). \quad (2.32)$$

### 2.3. Solución de la ecuación de Helmholtz

Ahora que hemos obtenido las soluciones angular y radial, podemos tomar  $\Phi_{nj}(r, \theta) = \Theta_n(\theta) R_{nj}(r)$  lo cual nos da dos familias de soluciones normalizadas linealmente independientes para cada par  $n, j$

$$\Phi_{Cnj}(r, \theta) = \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \cos(n\theta)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \quad \text{y} \quad \Phi_{Snj}(r, \theta) = \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \sin(n\theta)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)}. \quad (2.33)$$

Notemos que ambas soluciones tienen la propiedad

$$\nabla^2 \Phi_{*nj}(r, \theta) = -\lambda_{nj}^2 \Phi(r, \theta) \quad * = \{C, S\} \quad (2.34)$$

Superponiendo múltiplos escalares de estas soluciones se tiene la solución a la ecuación de Helmholtz como

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} \Phi_{Cnj}(r, \theta) + B_{nj} \Phi_{Snj}(r, \theta).$$

Las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 muestran soluciones a la ecuación de Helmholtz considerando diferentes condiciones de frontera.

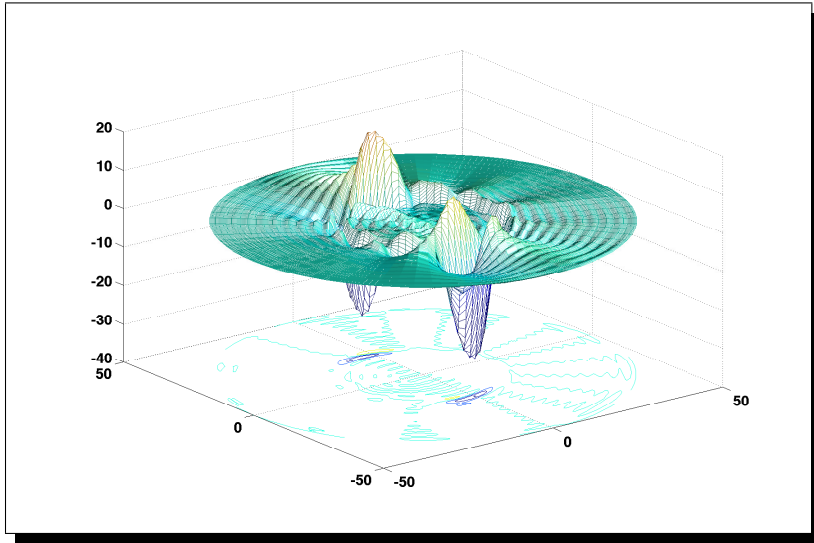


Figura 2.6:  $\Phi(r, \theta)$  bajo la condición de Dirichlet, sumando los primeros 400 términos.

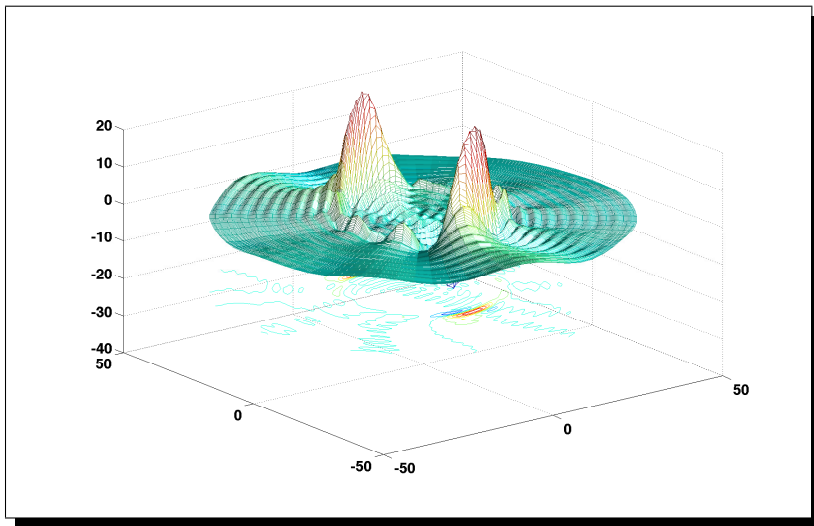


Figura 2.7:  $\Phi(r, \theta)$  bajo la condición de Neumann, sumando los primeros 400 términos.

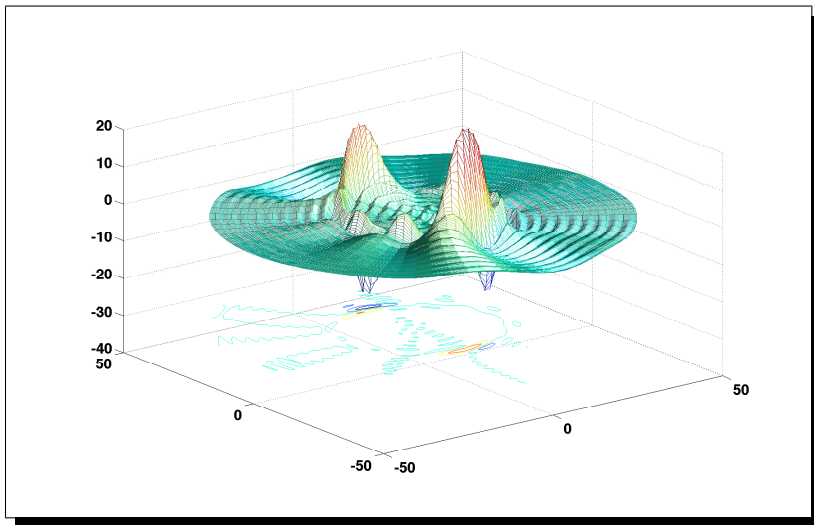


Figura 2.8:  $\Phi(r, \theta)$  bajo la condición de Robin, sumando los primeros 400 términos.





## Capítulo 3

# Solución de la ecuación de onda

En este capítulo mostraremos cómo resolver la ecuación de onda utilizando la solución de la ecuación de Helmholtz obtenida en el capítulo anterior. Además, mostraremos cómo obtener una representación compleja de la solución obtenida.

Como sabemos, las deflexiones de una membrana circular se pueden describir mediante la ecuación de onda (1.7)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \quad (3.1)$$

con  $0 < r < a$ ,  $0 < \theta < 2\pi$  y las condiciones iniciales

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad (3.2)$$

$$\partial_t u(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \quad (3.3)$$

donde  $f(r, \theta)$  y  $g(r, \theta)$  son la posición y la velocidad inicial de la membrana respectivamente.

Además la membrana se encuentra sujeta a alguna de las siguientes condiciones a la frontera homogéneas

$$u(a, \theta, t) = 0 \quad \text{Cond. de Dirichlet}, \quad (3.4)$$

$$u_r(a, \theta, t) = 0 \quad \text{Cond. de Neumann}, \quad (3.5)$$

$$\mu u_r(a, \theta, t) + \eta u(a, \theta, t) = 0 \quad \text{Cond. de Robin}. \quad (3.6)$$



### 3.1. El Método de expansión en eigenfunciones

Considerando que la membrana se encuentra sujeta a alguna de las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.4)-(3.6), podemos tomar las soluciones de la ecuación de Helmholtz dadas por (2.33) y proponer que  $u(r, \theta, t)$  sea de la forma

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(t) \Phi_{Cnj}(r, \theta) + B_{nj}(t) \Phi_{Snj}(r, \theta), \quad (3.7)$$

donde  $A_{nj}(t)$  y  $B_{nj}(t)$  son funciones que dependen del tiempo.

Entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A''_{nj}(t) \Phi_{Cnj}(r, \theta) + B''_{nj}(t) \Phi_{Snj}(r, \theta), \quad (3.8)$$

por otro lado, empleando la linealidad del operador laplaciano y la expresión (2.34)

$$c^2 \nabla^2 u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}(t) [-c^2 \lambda_{nj}^2 \Phi_{Cnj}(r, \theta)] + B_{nj}(t) [-c^2 \lambda_{nj}^2 \Phi_{Snj}(r, \theta)]. \quad (3.9)$$

Finalmente al sustituir (3.8) y (3.9) en (3.1) y agrupando adecuadamente llegamos a la siguiente expresión.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [A''_{nj}(t) + c^2 \lambda_{nj}^2 A_{nj}(t)] \Phi_{Cnj}(r, \theta) + [B''_{nj}(t) + c^2 \lambda_{nj}^2 B_{nj}(t)] \Phi_{Snj}(r, \theta) = 0,$$

como  $\Phi_{Cnj}(r, \theta)$  y  $\Phi_{Snj}(r, \theta)$  constituyen soluciones linealmente independientes su combinación lineal igualada a cero implica que cada uno de los coeficientes que las acompaña debe anularse

$$\begin{aligned} A''_{nj}(t) + c^2 \lambda_{nj}^2 A_{nj}(t) &= 0, \\ B''_{nj}(t) + c^2 \lambda_{nj}^2 B_{nj}(t) &= 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son de la forma

$$A_{nj}(t) = C_{nj} \cos(\lambda_{nj} ct) + C_{nj}^* \sin(\lambda_{nj} ct), \quad (3.10)$$

$$B_{nj}(t) = D_{nj} \cos(\lambda_{nj} ct) + D_{nj}^* \sin(\lambda_{nj} ct). \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.10) y (3.11) en (3.7)

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [C_{nj} \cos(\lambda_{nj} ct) + C_{nj}^* \sin(\lambda_{nj} ct)] \Phi_{C_{nj}}(r, \theta) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [D_{nj} \cos(\lambda_{nj} ct) + D_{nj}^* \sin(\lambda_{nj} ct)] \Phi_{S_{nj}}(r, \theta),
 \end{aligned}$$

y reagrupando los términos

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [C_{nj} \Phi_{C_{nj}}(r, \theta) + D_{nj} \Phi_{S_{nj}}(r, \theta)] \cos(\lambda_{nj} ct) \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [C_{nj}^* \Phi_{C_{nj}}(r, \theta) + D_{nj}^* \Phi_{S_{nj}}(r, \theta)] \sin(\lambda_{nj} ct)
 \end{aligned}$$

### 3.2. Obteniendo los coeficientes utilizando Ortogonalidad

Para resolver por completo la ecuación es necesario determinar la forma de los coeficientes  $C_{nj}, D_{nj}, C_{nj}^*$  y  $D_{nj}^*$  por lo que utilizaremos la primera condición inicial dada por (3.2)

$$\begin{aligned}
 f(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \Phi_{C_{nj}}(r, \theta) + D_{nj} \Phi_{S_{nj}}(r, \theta), \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj} r) \cos n\theta}{\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} + D_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj} r) \sin n\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)},
 \end{aligned}$$

y separando el término correspondiente a  $n = 0$

$$\begin{aligned}
 f(r, \theta) &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{0j} \frac{J_0(\lambda_{0j} r)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(0, j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj} r) \cos n\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj} r) \sin n\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)}, \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

con  $\mathcal{N}_{DNR}(r, \theta)$  la norma de las funciones de Bessel dada por (2.31)

Ahora para obtener el coeficiente para  $n = 0$  podemos usar ortogonali-

dad con respecto a  $\theta$  e integrar (3.12) de 0 a  $2\pi$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{0j} \frac{J_0(\lambda_{0j}r) \int_0^{2\pi} d\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(0, j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \int_0^{2\pi} \sin n\theta d\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)}, \\
 &= 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} C_{0j} \frac{J_0(\lambda_{0j}r)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(0, j)}. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Después multiplicamos (3.13) por  $J_0(\lambda_{0k}r)r$  e integramos de 0 a  $a$

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0(\lambda_{0k}r) f(r, \theta) r d\theta dr &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} C_{0j} \frac{\int_0^a J_0(\lambda_{0j}r) J_0(\lambda_{0k}r) r dr}{\mathcal{N}_{DNR}(0, j)}, \\
 &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} C_{0j} \frac{\delta_{jk} \mathcal{N}_{DNR}^2(0, k)}{\mathcal{N}_{DNR}(0, j)}, \\
 &= 2 \mathcal{N}_{DNR}(0, k) C_{0k}.
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$C_{0k} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_0(\lambda_{0k}r) f(r, \theta) r d\theta dr}{2\pi \mathcal{N}_{DNR}(0, k)}. \tag{3.14}$$

Lo siguiente, es multiplicar (3.12) por  $\cos m\theta$  e integrar de 0 a  $2\pi$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \cos m\theta d\theta &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{0j} \frac{J_0(\lambda_{0j}r) \int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(0, j)} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos m\theta d\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)}, \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{nj} \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \pi \delta_{nm}}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{mj} \frac{J_m(\lambda_{mj}r)}{\mathcal{N}_{DNR}(m, j)}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Posteriormente multiplicamos (3.15) por  $J_m(\lambda_{mk}r)r$  e integramos de 0 a  $a$

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0(\lambda_{mk}r) f(r, \theta) r \cos m\theta d\theta dr &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{mj} \frac{\int_0^a J_m(\lambda_{mj}r) J_m(\lambda_{mk}r) r dr}{\mathcal{N}_{DNR}(m, j)}, \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} C_{mj} \frac{\delta_{jk} \mathcal{N}_{DNR}^2(m, k)}{\mathcal{N}_{DNR}(m, j)}, \\ &= \mathcal{N}_{DNR}(m, k) C_{mk}. \end{aligned}$$

Entonces

$$C_{mk} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_m(\lambda_{mk}r) f(r, \theta) \cos m\theta r d\theta dr}{\mathcal{N}_{DNR}(m, k)}, \quad (3.16)$$

y análogamente, pero con la diferencia de que esta vez multiplicamos por  $\sin m\theta$ , se tiene

$$D_{mk} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_m(\lambda_{mk}r) f(r, \theta) \sin m\theta r d\theta dr}{\mathcal{N}_{DNR}(m, k)}. \quad (3.17)$$

Usando ahora (3.3)

$$\begin{aligned} g(r, \theta) &= c \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{0j} C_{0j}^* \frac{J_n(\lambda_{0j}r)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(0, j)} + c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{nj} C_{nj}^* \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \cos n\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \\ &\quad + c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{nj} D_{nj}^* \frac{J_n(\lambda_{nj}r) \sin n\theta}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

y mediante un procedimiento análogo al anterior llegamos a que

$$C_{0k}^* = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_0(\lambda_{0k}r) g(r, \theta) r d\theta dr}{c \lambda_{mk} 2 \mathcal{N}_{DNR}(0, k)}. \quad (3.19)$$

$$C_{mk}^* = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_m(\lambda_{mk}r) g(r, \theta) \cos m\theta r d\theta dr}{c \lambda_{mk} \mathcal{N}_{DNR}(m, k)}, \quad (3.20)$$

$$D_{mk}^* = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_m(\lambda_{mk}r) g(r, \theta) \sin m\theta r d\theta dr}{c \lambda_{mk} \mathcal{N}_{DNR}(m, k)}. \quad (3.21)$$

### 3.2.1. Ejemplo

Ahora consideremos el ejemplo en el que la posición inicial está dada por  $f(r, \theta) = (a^2 - r^2)(\cos \theta + \sin \theta)r$  como se ilustra en la Figura 3.1 y la velocidad

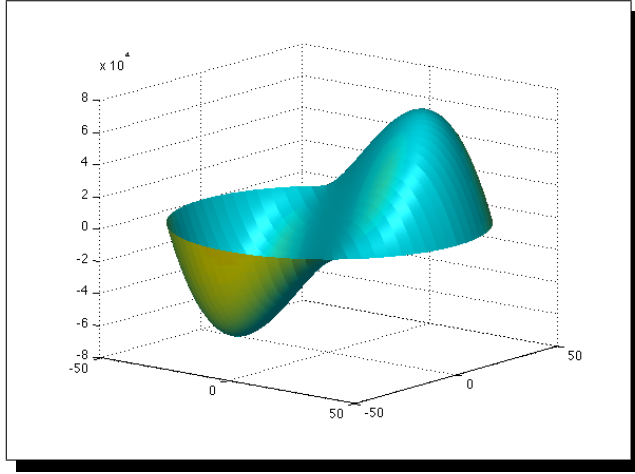


Figura 3.1:  $f(r, \theta) = (a^2 - r^2)(\cos \theta + \sin \theta)r$ .

inicial es cero.

Entonces

$$C_{0k} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_0(\lambda_{0k}r) (a^2 - r^2)(\cos \theta + \sin \theta) r r \, d\theta \, dr}{2\mathcal{N}_D(0, k)}, \quad (3.22)$$

$$= \frac{\int_0^a J_0(\lambda_{0k}r) (a^2 - r^2) r^2 \, dr \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta}{2\mathcal{N}_D(0, k)}, \quad (3.23)$$

$$= 0. \quad (3.24)$$

Este resultado se podía anticipar al observar que el volumen bajo la superficie  $f(r, \theta)$  se anulaba al integrar con respecto a  $\theta$ .

Por otro lado

$$\begin{aligned} C_{mk} &= \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} J_m(\lambda_{mk}r) f(r, \theta) \cos m\theta r \, d\theta \, dr}{\pi \mathcal{N}_D(m, k)}, \\ &= \frac{\int_0^a J_m(\lambda_{mk}r) (a^2 - r^2) r^2 \, dr \int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta) \cos(m\theta) \, d\theta}{\mathcal{N}_D(m, k)}, \\ &= \frac{\int_0^a J_m(\lambda_{mk}r) (a^2 - r^2) r^2 \, dr \pi \delta_{1m}}{\mathcal{N}_D(m, k)}. \end{aligned}$$

La última expresión nos indica que únicamente los términos con  $m = 1$  son

distintos de cero, por lo que

$$C_{1k} = \frac{\int_0^a J_1(\lambda_{1k}r)(a^2 - r^2)r^2 dr}{\mathcal{N}_D(1, k)}$$

$$= \frac{2a^5 J_3(\alpha_{1k})}{\alpha_{1k}^2 \mathcal{N}_D(1, k)},$$

y para  $D_{1k}$  el resultado es análogo. Sin embargo, podemos también analizar el comportamiento de los coeficientes como el volumen bajo la superficie  $h^{1k}(r, \theta)$  dada por

$$h^{1k}(r, \theta) = \frac{J_1(\lambda_{1k}r)f(r, \theta) \cos \theta r^2}{\mathcal{N}_D(m, k)}.$$

Como podemos apreciar en la Figura 3.2 , a medida que  $j$  se incrementa hay

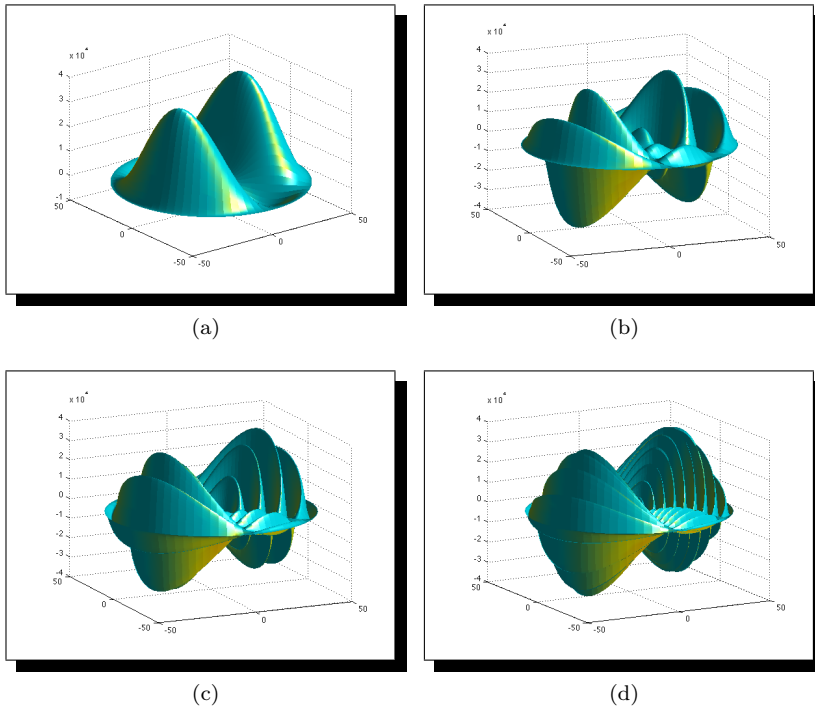


Figura 3.2: Algunos ejemplos de coeficientes dados como el volumen bajo la superficie (a)  $h^{1,0}(r, \theta)$ , (b)  $h^{1,5}(r, \theta)$  (c)  $h^{1,10}(r, \theta)$  y (d)  $h^{1,20}(r, \theta)$

un mayor número de oscilaciones en la parte radial, por lo que los volúmenes se cancelan entre sí y la contribución más importante está dada por los máximos centrales.

### 3.3. Representación compleja de la solución a la ecuación de onda

La solución a la ecuación de onda puede representarse en forma compleja, lo que tiene la ventaja de poder escribirla de una manera más compacta y además, como veremos en el Capítulo 4, nos permite realizar algunos cálculos con una mayor sencillez que si trabajáramos con la solución en su representación real.

Consideremos la solución a la ecuación de onda dada por

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} [C_{nj} \cos(n\theta) + D_{nj} \sin(n\theta)] \cos(\lambda_{nj}ct) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} [C_{nj}^* \cos(n\theta) + D_{nj}^* \sin(n\theta)] \sin(\lambda_{nj}ct).$$

Utilizando la igualdad de Euler, podemos expresar el seno y el coseno en forma compleja [4]

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i},$$

se tiene

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \cos(\lambda_{nj}ct) \left[ e^{in\theta} \frac{C_{nj} - iD_{nj}}{2} + e^{-in\theta} \frac{C_{nj} + iD_{nj}}{2} \right] \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \sin(\lambda_{nj}ct) \left[ e^{in\theta} \frac{C_{nj}^* - iD_{nj}^*}{2} + e^{-in\theta} \frac{C_{nj}^* + iD_{nj}^*}{2} \right]. \quad (3.25)$$

Ahora bien usando (3.16) y (3.17) y sustituyendo llegamos a

$$\frac{C_{nj} - iD_{nj}}{2} = \frac{1}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \left[ \int_0^a \int_0^{2\pi} J_n(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) \cos n\theta r \, d\theta \, dr \right] \\ - i \frac{1}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \left[ \int_0^a \int_0^{2\pi} J_n(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) \sin n\theta r \, d\theta \, dr \right], \\ = \frac{1}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_n(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) (\cos n\theta - i \sin n\theta) r \, d\theta \, dr, \\ = \frac{1}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_n(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) e^{-in\theta} r \, d\theta \, dr,$$

y similarmente

$$\begin{aligned}
 \frac{C_{nj} + iD_{nj}}{2} &= \frac{1}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_n(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) e^{in\theta} r \, d\theta \, dr, \\
 &= \frac{(-1)^n}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \int_0^a \int_0^{2\pi} (-1)^n J_n(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) e^{in\theta} r \, d\theta \, dr, \\
 &= \frac{(-1)^n}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{-n}(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) e^{in\theta} r \, d\theta \, dr.
 \end{aligned}$$

Definamos  $\mathcal{A}_{\pm nj}$  de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_{\pm nj} = \frac{1}{2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{\pm n}(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) e^{\mp in\theta} r \, d\theta \, dr, \quad (3.26)$$

análogamente

$$\mathcal{A}_{\pm nj}^* = \frac{1}{c\lambda_{nj}2\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_{\pm n}(\lambda_{nj}r) g(r, \theta) e^{\mp in\theta} r \, d\theta \, dr. \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.26) y (3.27) en (3.25)

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{nj}ct)}{\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} [e^{in\theta} \mathcal{A}_{nj} J_n(\lambda_{nj}r) + e^{-in\theta} \mathcal{A}_{-nj} (-1)^n J_n(\lambda_{nj}r)] \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_{nj}ct)}{\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} [e^{in\theta} \mathcal{A}_{nj}^* J_n(\lambda_{nj}r) + e^{-in\theta} \mathcal{A}_{-nj}^* (-1)^n J_n(\lambda_{nj}r)], \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_{nj}ct)}{\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} [e^{in\theta} \mathcal{A}_{nj} J_n(\lambda_{nj}r) + e^{-in\theta} \mathcal{A}_{-nj} J_{-n}(\lambda_{nj}r)] \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_{nj}ct)}{\mathcal{N}_{DNR}(n, j)} [e^{in\theta} \mathcal{A}_{nj}^* J_n(\lambda_{nj}r) + e^{-in\theta} \mathcal{A}_{-nj}^* J_{-n}(\lambda_{nj}r)],
 \end{aligned}$$

y agrupando en una sola sumatoria sobre  $n$  que ahora va de menos infinito a infinito

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e^{in\theta} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\pi \mathcal{N}_{NDR}(n, j)} [\mathcal{A}_{nj} \cos(\lambda_{nj}ct) + \mathcal{A}_{nj}^* \sin(\lambda_{nj}ct)]. \quad (3.28)$$

Observemos que

$$\Phi_{nj}(r, \theta) = e^{in\theta} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\pi \mathcal{N}_{NDR}(n, j)}, \quad (3.29)$$



representa la parte espacial de nuestra solución y presenta las siguientes propiedades

$$\nabla^2 \Phi_{nj}(r, \theta) = -\lambda_{nj}^2 \Phi_{nj}(r, \theta), \quad (3.30)$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Phi_{nj}(r, \theta) \overline{\Phi_{ml}(r, \theta)} r \, d\theta \, dr = 2\delta_{nm} \delta_{jl}, \quad (3.31)$$

donde la barra denota el complejo conjugado de la función. En el siguiente capítulo utilizaremos estas propiedades.

Finalmente, podemos reescribir a nuestra solución (3.28) de una forma muchos más compacta

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{nj}(r, \theta) [\mathcal{A}_{nj} \cos(\lambda_{nj} ct) + \mathcal{A}_{nj}^* \sin(\lambda_{nj} ct)]. \quad (3.32)$$

La solución ya queda separada en con el producto de dos funciones, una espacial y la otra temporal.





## Capítulo 4

# Aproximación a la solución de la ecuación de onda usando sumas finitas

Como hemos visto, podemos escribir la solución de la ecuación de onda mediante sumas infinitas y expresar esta solución en su forma compleja dada por (3.32). Sin embargo, en la práctica es necesario encontrar hasta qué término podemos truncar esas sumas [15] [17], ya que la computadora no nos permite realizar sumas infinitas. En este capítulo nosotros proponemos una forma para truncar la suma utilizando la expresión asintótica de la función de Bessel dada por (D.5).

### 4.1. Acotando el error

Consideremos la representación de  $u(r, \theta, t)$  dada por (3.32) utilizando las funciones  $\Phi_{nj}(r, \theta)$  bajo la condición inicial (3.2); esto nos da

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_{nj} \Phi_{nj}(r, \theta), \quad (4.1)$$

y cuya aproximación finita es

$$f_{NK}(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^K \mathcal{A}_{nj} \Phi_{nj}(r, \theta), \quad (4.2)$$

donde los coeficientes  $\mathcal{A}_{nj}$  están dados por (3.26).

Sea  $\Delta f$  la diferencia entre  $f(r, \theta)$  y su aproximación finita dada por

$$\begin{aligned} \Delta f &= |f(r, \theta) - f_{NK}(r, \theta)| \\ &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e^{in\theta} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\mathcal{N}_{NDR}(n, j)} \mathcal{A}_{nj} - \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^K e^{in\theta} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\mathcal{N}_{NDR}(n, j)} \mathcal{A}_{nj} \right|, \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} e^{in\theta} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\mathcal{N}_{NDR}(n, j)} \mathcal{A}_{nj} + \sum_{n=-\infty}^{-(N-1)} \sum_{j=K+1}^{\infty} e^{in\theta} \frac{J_n(\lambda_{nj}r)}{\mathcal{N}_{NDR}(n, j)} \mathcal{A}_{nj} \right|, \end{aligned}$$

y utilizando la desigualdad del triángulo [12]

$$\Delta f \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \Phi_{nj}(r, \theta) \mathcal{A}_{nj} \right| + \left| \sum_{n=-\infty}^{-(N-1)} \sum_{j=K+1}^{\infty} \Phi_{nj}(r, \theta) \mathcal{A}_{nj} \right|. \quad (4.3)$$

Para el primer término de (4.3) se tiene

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \Phi_{nj}(r, \theta) \mathcal{A}_{nj} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} |e^{in\theta}| \frac{|J_n(\lambda_{nj}r)|}{\pi |\mathcal{N}_{NDR}(n, j)|} |\mathcal{A}_{nj}| \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\pi |\mathcal{N}_{NDR}(n, j)|} |\mathcal{A}_{nj}|, \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 |\mathcal{A}_{nj}|}{\pi \mathcal{N}_{DNR}(n, j) \lambda_{nj}^2}. \end{aligned}$$

Observemos que haciendo uso de la desigualdad de Cauchy-Schwartz [12] llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 |\mathcal{A}_{nj}|}{\pi \mathcal{N}_{DNR} \lambda_{nj}^2} &\leq \left( \sum_{n'=N+1}^{\infty} \sum_{j'=K+1}^{\infty} \lambda_{n'j'}^4 |\mathcal{A}_{n'j'}|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 \lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_{DNR}^2(n, j)} \right)^{1/2}, \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left( \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \sum_{j'=1}^{\infty} \lambda_{n'j'}^4 |\mathcal{A}_{n'j'}|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_{DNR}^2(n, j)} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para poder acotar el primer factor de (4.4) vamos a aplicar el laplaciano a (4.1)

$$\nabla^2 f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-\lambda_{nj}^2) \mathcal{A}_{nj} \Phi_{nj}(r, \theta),$$

y dado que estamos trabajando con la representación compleja de la solución, debemos tomar su conjugado

$$\overline{\nabla^2 f(r, \theta)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_{mk}^2) \overline{\mathcal{A}_{mk} \Phi_{mk}(r, \theta)}.$$

Entonces al multiplicarlos se obtiene

$$|\nabla^2 f(r, \theta)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{mk}^2 \lambda_{nj}^2 \mathcal{A}_{nj} \overline{\mathcal{A}_{mk}} \Phi_{nj}(r, \theta) \overline{\Phi_{mk}(r, \theta)}, \quad (4.5)$$

y utilizando (3.31)

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} |\nabla^2 f(r, \theta)|^2 r d\theta dr &= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mathcal{A}_{nj} \overline{\mathcal{A}_{ml}} \delta_{nm} \delta_{jl} \\ &= 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{ml}^4 |\mathcal{A}_{ml}|^2. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{mk}^4 |\mathcal{A}_{mk}|^2 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} |\nabla^2 f(r, \theta)|^2 r d\theta dr.$$

Sea

$$B = \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} |\nabla^2 f(r, \theta)|^2 r d\theta dr}, \quad (4.6)$$

entonces sustituyendo (4.6) en (4.4)

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\lambda_{nj}^2 |\mathcal{A}_{nj}|}{\mathcal{N}_{DNR}(n, j) \lambda_{nj}^2} \leq \frac{B}{\pi} \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_{DNR}^2(n, j)} \right)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Notemos que la expresión anterior nos dice que la cota del error lineal depende de la función que estemos aproximando y esa dependencia está dada por (4.6). Por otro lado el segundo factor del miembro derecho de (4.7) depende de las condiciones de frontera.

Ahora consideremos las diferentes normas que dependen de las condiciones a la frontera.

### 4.1.1. Cota para la condición de Dirichlet

Para esta condición se tiene

$$\begin{aligned}\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j) &= \frac{\alpha_{nj}^4}{a^4} \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_{nj}), \\ &= \frac{\alpha_{nj}^4}{2a^2} J_{n+1}^2(\alpha_{nj});\end{aligned}$$

recordemos que estamos trabajando con  $n \gg 1$ , lo cual implica que las raíces de la función de Bessel se encuentran muy alejadas del cero, por lo que podemos utilizar la representación asintótica de la función de Bessel (Apéndice D), lo que nos lleva a que

$$\begin{aligned}\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j) &\approx \frac{\alpha_{nj}^4}{2a^2} \frac{2}{\pi \alpha_{nj}} \cos^2 \left( \alpha_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{(n+1)\pi}{2} \right), \\ &= \frac{\alpha_{nj}^3}{\pi a^2} \cos^2 \left( \alpha_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{(n+1)\pi}{2} \right),\end{aligned}$$

Además, también podemos aproximar las raíces de la función de Bessel para  $r \gg 1$  (véase D.7)

$$\begin{aligned}\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j) &\approx \frac{1}{\pi a^2} \left[ \frac{(2j+n)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]^3 \cos^2((j-1)\pi), \\ &= \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \frac{(2j+n)}{2} - \frac{1}{4} \right]^3, \\ &= \frac{\pi^2}{2^6 a^2} (4j+2n-1)^3.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Entonces

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j)} \approx \frac{2^6 a^2}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{(4j+2n-1)^3}.$$

Ahora, llevando las variables discretas  $n, k$  al continuo  $n \rightarrow x, j \rightarrow y$  se tiene

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{(4j+2n-1)^3} \leq \int_{N+1}^{\infty} \int_{K+1}^{\infty} \frac{1}{(4y+2x-1)^3} dy dx.$$

Calculando la primera integral iterada resulta

$$\begin{aligned}\int_{K+1}^{\infty} \frac{1}{(4y+2x-1)^3} dy &= \frac{1}{2^3} \frac{1}{(4y+2x-1)^2} \Big|_{\infty}^{K+1} \\ &= \frac{1}{2^3} \frac{1}{(2x+4(K+1)-1)^2},\end{aligned}$$

y para la segunda

$$\begin{aligned} \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2^3} \frac{1}{(2x+4(K+1)-1)^2} dx &= \frac{1}{2^4} \frac{1}{(2x+4(K+1)-1)} \Big|_{\infty}^{N+1}, \\ &= \frac{1}{2^4} \frac{1}{(2(N+1)+4(K+1)-1)}, \\ &= \frac{1}{2^4} \frac{1}{(2(N+2K)+5)}. \end{aligned}$$

Esto nos da

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j)} \lesssim \frac{2^2 a^2}{\pi^2} \frac{1}{(2(N+2K)+5)},$$

y sustituyendo en (4.7)

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}_{nj}|}{\mathcal{N}_D(n, j)} < B \frac{a}{\pi^2} \frac{2}{\sqrt{2(N+2K)+5}}. \quad (4.9)$$

Finalmente, para el segundo sumando de (4.3) el procedimiento es análogo y se tiene

$$|f(r, \theta) - f_{NK}(r, \theta)| \leq 2B \frac{a}{\pi^2} \frac{2}{\sqrt{2(N+2K)+5}}. \quad (4.10)$$

En la Figura 4.1 (pág 38) se puede observar la convergencia  $\Delta f$  a cero para la condición de Dirichlet a menisda que aumentan  $N$  y  $K$ .

### 4.1.2. Cota para la condición de Neumann

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_N^2(n, j) &= \frac{\beta_{nj}^4}{a^4} \frac{a^2}{2} J_n^2(\beta_{nj}) \left[ 1 - \frac{n^2}{\beta_{nj}^2} \right], \\ &= \frac{\beta_{nj}^4}{2a^2} J_n^2(\beta_{nj}) \left[ 1 - \frac{n^2}{\beta_{nj}^2} \right]. \end{aligned}$$

Ahora utilizaremos la representación asintótica (Apéndice D)

$$\begin{aligned} \lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j) &\approx \frac{\beta_{nj}^4}{2a^2} \frac{2}{\pi \beta_{nj}} \cos^2 \left( \beta_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \left[ 1 - \frac{n^2}{\beta_{nj}^2} \right], \\ &= \frac{\beta_{nj}^3}{\pi a^2} \cos^2 \left( \beta_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \left[ 1 - \frac{n^2}{\beta_{nj}^2} \right], \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \cos^2 \left( \beta_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \beta_{nj} [\beta_{nj}^2 - n^2], \end{aligned}$$



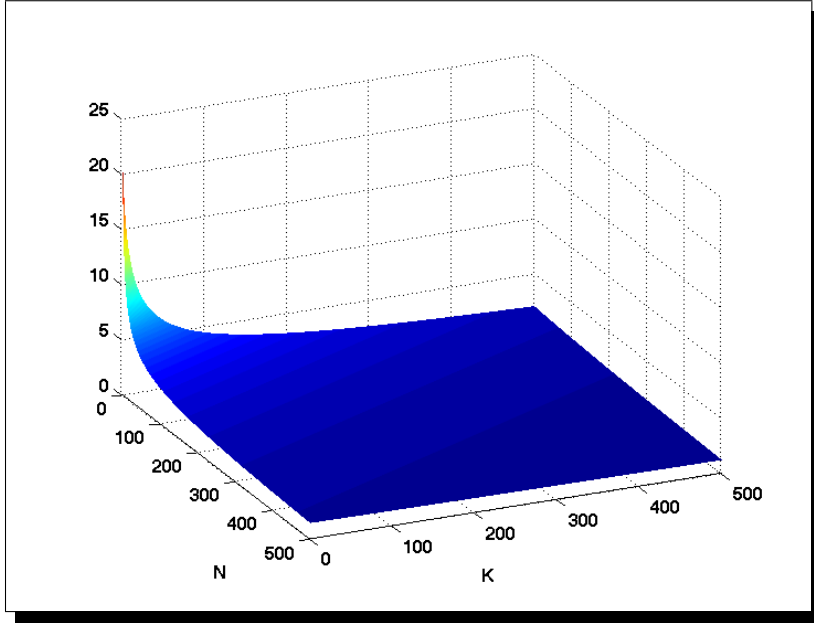


Figura 4.1: Convergencia de  $\Delta f$  para la Condición de Dirichlet.

y aproximando las raíces de la derivada de la función de Bessel mediante (D.8)

$$\begin{aligned} \lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j) &\approx \frac{1}{\pi a^2} \cos^2(j\pi) \left( \frac{(2j+n)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left[ \left( \frac{(2j+n)\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)^2 - n^2 \right], \\ &= \frac{\pi^2}{a^2 2^6} (4j+2n+1) \left[ (4j+2n+1)^2 - \frac{4^2 n^2}{\pi^2} \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_D^2(n, j)} \approx \frac{2^6 a^2}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{(4j+2n+1) \left[ (4j+2n+1)^2 - \frac{4^2 n^2}{\pi^2} \right]},$$

y nuevamente llevando las variables discretas al continuo

$$\begin{aligned} &\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{(4j+2n+1) \left[ (4j+2n+1)^2 - \frac{4^2 n^2}{\pi^2} \right]} \\ &\leq \int_{N+1}^{\infty} \int_{K+1}^{\infty} \frac{1}{(4y+2x+1) \left[ (4y+2x+1)^2 - \frac{4^2 x^2}{\pi^2} \right]} dy dx. \end{aligned}$$

Para calcular la primera integral iterada hacemos el siguiente cambio de variable  $u = 4y + 2x + 1$ ,  $\mathcal{D} = 4(K + 1) + 2x + 1$  y  $\xi = \frac{4x}{\pi}$  y así

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{\mathcal{D}}^{\infty} \frac{1}{u[u^2 - \xi^2]} du &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{\mathcal{D}}^{\epsilon} \frac{1}{u(u^2 - \xi^2)} du, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{4\xi^2} \int_{\mathcal{D}}^{\epsilon} \frac{1}{u + \xi} + \frac{1}{u - \xi} - \frac{1}{u} du, \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{4\xi^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{\xi^2}{\epsilon^2} \right) + \ln(\mathcal{D}) - \frac{1}{2} \ln(\mathcal{D} - \xi) - \frac{1}{2} \ln(\mathcal{D} + \xi) \right], \\ &= \frac{1}{4\xi^2} \left[ \ln(\mathcal{D}) - \frac{1}{2} \ln(\mathcal{D} - \xi) - \frac{1}{2} \ln(\mathcal{D} + \xi) \right]. \end{aligned}$$

Entonces la segunda integral iterada queda como

$$\begin{aligned} &\int_{N+1}^{\infty} \frac{\pi^2}{4^3 x^2} \left[ \ln(2x + 4(K + 1) + 1) - \frac{1}{2} \ln \left( \left( 2 + \frac{4}{\pi} \right) x + 4(K + 1) + 1 \right) \right] dx \\ &- \int_{N+1}^{\infty} \frac{\pi^2}{4^3 x^2} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \left( 2 - \frac{4}{\pi} \right) x + 4(K + 1) + 1 \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Sean  $\mathcal{I}_2$  la segunda integral iterada,  $G = 4(K + 1) + 1$ ,  $R = 2 + \frac{4}{\pi}$  y  $S = 2 - \frac{4}{\pi}$ , esto nos da

$$\mathcal{I}_2 = \int_{N+1}^{\infty} \frac{\pi^2}{4^3 x^2} \left[ \ln(2x + G) - \frac{1}{2} \ln(Rx + G) - \frac{1}{2} \ln(Sx + G) \right] dx.$$

Para resolver la integral anterior basta recordar que

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \frac{1}{x^2} \ln(ax + b) dx = \frac{1}{x} \ln(ax + b) + \frac{a}{b} \ln(x) - \frac{a}{b} \ln(ax + b) \Big|_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \ln(2x + G) dx &= \frac{1}{x} \ln(2x + G) + \frac{2}{G} \ln(x) - \frac{2}{G} \ln(2x + G) \Big|_{N+1}^{\infty}, \\ -\frac{1}{2} \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \ln(Rx + G) dx &= \frac{R}{2G} \ln(Rx + G) - \frac{1}{2x} \ln(Rx + G) - \frac{R}{2G} \ln(x) \Big|_{N+1}^{\infty}, \\ -\frac{1}{2} \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \ln(Sx + G) dx &= \frac{S}{2G} \ln(Sx + G) - \frac{1}{2x} \ln(Sx + G) - \frac{S}{2G} \ln(x) \Big|_{N+1}^{\infty}, \end{aligned}$$

y así la integral resulta ser

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \frac{\pi^2}{4^3} \left[ \frac{1}{2x} \ln \left( \frac{4x^2 + 4Gx + G^2}{RSx^2 + (R + S)Gx + G^2} \right) - \frac{1}{G} \ln \left( \frac{4x^2 + 4Gx + G^2}{RSx^2 + (R + S)Gx + G^2} \right) \right]_{N+1}^{\infty} \\ &+ \frac{\pi^2}{4^3} \left[ \frac{2}{G\pi} \ln \left( \frac{Rx + G}{Sx + G} \right) \right]_{N+1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Ahora, lo único que resta es evaluar la integral en sus límites

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \frac{\pi^2}{4^3} \frac{2}{\pi(4K+5)} \left[ \ln \left( \frac{R}{S} \right) - \ln \left( \frac{R(N+1) + 4K+5}{S(N+1) + 4K+5} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\pi^2}{4^3} \frac{1}{4K+5} \left[ \ln \left( \frac{4}{RS} \right) - \ln \left( \frac{4(N+1)^2 + 4(4K+5)(N+1) + (4K+5)^2}{RS(N+1)^2 + 4(4K+5)(N+1) + (4K+5)^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\pi^2}{4^3} \frac{1}{2(N+1)} \ln \left( \frac{4(N+1)^2 + 4(4K+5)(N+1) + (4K+5)^2}{RS(N+1)^2 + 4(4K+5)(N+1) + (4K+5)^2} \right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_N^2(n, j)} \lesssim \frac{2^3 a}{\pi} \sqrt{\mathcal{I}_2}.$$

Por tanto, para la condición de Neumann se tiene

$$|f(r, \theta) - f_{NK}(r, \theta)| \leq 2B \frac{2^3 a}{\pi^2} \sqrt{\mathcal{I}_2}. \quad (4.11)$$

La convergencia para esta condición se ilustra en la Figura 4.2 . Notemos que la convergencia es mucho más rápida que para la condición de Dirichlet.

### 4.1.3. Cota para la condición de Robin

En este caso debemos considerar la condición de Robin dada por (3.6) y ya que estamos trabajando con la expansión asintótica (Apéndice D) nos es posible obtener un resultado, dado por (D.9), cuando  $\eta = \mu = 1$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_R^2(n, j) &= \frac{\gamma_{nj}^4}{a^4} \frac{a^2}{2} J_n^2(\gamma_{nj}) \left[ 2 - \frac{n^2}{\gamma_{nj}^2} \right], \\ &= \frac{\gamma_{nj}^4}{2a^2} J_n^2(\gamma_{nj}) \left[ 2 - \frac{n^2}{\gamma_{nj}^2} \right]. \end{aligned}$$

Ahora utilizaremos la representación asintótica

$$\begin{aligned} \lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_R^2(n, j) &\approx \frac{\gamma_{nj}^4}{2a^2} \frac{2}{\pi \gamma_{nj}} \cos^2 \left( \gamma_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \left[ 2 - \frac{n^2}{\gamma_{nj}^2} \right], \\ &= \frac{\gamma_{nj}^3}{\pi a^2} \cos^2 \left( \gamma_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \left[ 2 - \frac{n^2}{\gamma_{nj}^2} \right], \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \cos^2 \left( \gamma_{nj} - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \gamma_{nj} [2\gamma_{nj}^2 - n^2]. \end{aligned}$$

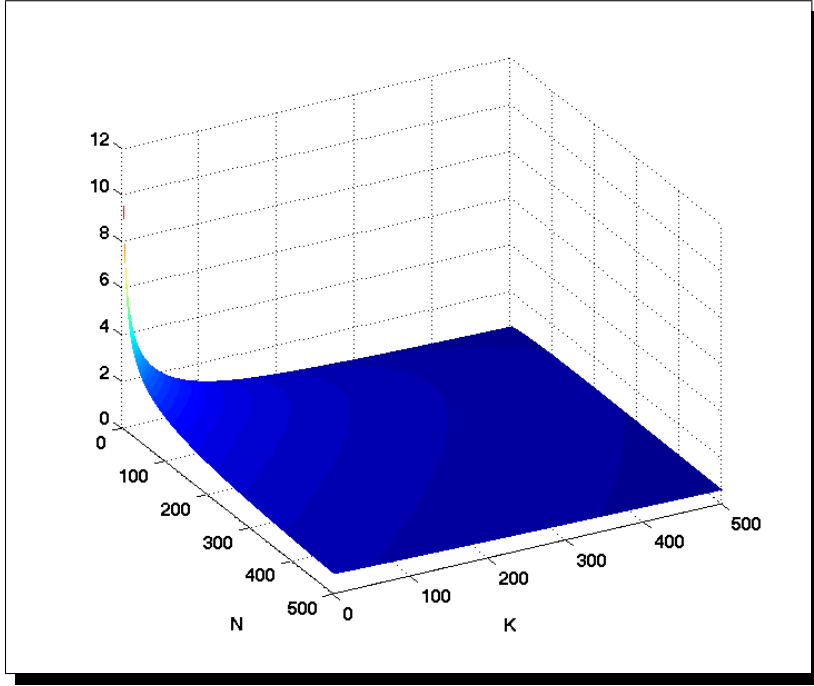


Figura 4.2: Convergencia de  $\Delta f$  para la Condición de Neumann

Utilizando la representación asintótica de la función de Bessel y (D.9) llegamos a que

$$\begin{aligned}
 \lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_R^2(n, j) &\approx \frac{1}{\pi a^2} \cos^2 \left( (j-1)\pi + \frac{\pi}{4} \right) \left( \frac{(2j+n-1)\pi}{2} \right) \left[ 2 \left( \frac{(2j+n-1)\pi}{2} \right)^2 - n^2 \right], \\
 &= \frac{1}{\pi a^2} \frac{1}{2} \left( \frac{(2j+n-1)\pi}{2} \right) \left[ 2 \left( \frac{(2j+n-1)\pi}{2} \right)^2 - n^2 \right], \\
 &= \frac{1}{\pi a^2} \left( \frac{(2j+n-1)\pi}{2} \right) \left[ \left( \frac{(2j+n-1)\pi}{2} \right)^2 - \frac{n^2}{2} \right], \\
 &= \frac{\pi^2}{a^2} \left( \frac{(2j+n-1)}{2} \right) \left[ \left( \frac{(2j+n-1)}{2} \right)^2 - \frac{n^2}{2\pi^2} \right], \\
 &= \frac{\pi^2}{2^3 a^2} (2j+n-1) \left[ (2j+n-1)^2 - \left( \frac{\sqrt{2}n}{\pi} \right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

y así

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nj}^4 \mathcal{N}_R^2(n, j)} \approx \frac{2^3 a^2}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{1}{(2j+n-1) \left[ (2j+n-1)^2 - \frac{2n^2}{\pi^2} \right]}.$$

Procediendo de forma análoga a como lo hicimos con la condición de Neumann, se tiene

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{|\mathcal{A}_{nj}|}{\mathcal{N}_R(n, j)} \leq B \frac{2^{3/2} a}{\pi} \sqrt{\mathcal{J}_2}. \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = & \frac{\pi^2}{2^2} \frac{\sqrt{2}}{2\pi(2K+1)} \left[ \ln \left( \frac{P}{Q} \right) - \ln \left( \frac{P(N+1) + 2K+1}{Q(N+1) + 2K+1} \right) \right] \\ & - \frac{\pi^2}{2^2} \frac{1}{2K+1} \left[ \ln \left( \frac{1}{PQ} \right) - \ln \left( \frac{(N+1)^2 + 2(2K+1)(N+1) + (2K+1)^2}{PQ(N+1)^2 + 2(2K+1)(N+1) + (2K+1)^2} \right) \right] \\ & - \frac{\pi^2}{2^2} \frac{1}{2(N+1)} \ln \left( \frac{(N+1)^2 + 2(2K+1)(N+1) + (2K+1)^2}{PQ(N+1)^2 + 2(2K+1)(N+1) + (2K+1)^2} \right), \end{aligned}$$

con  $P = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}$  y  $Q = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ .

Por tanto, la cota para la condición de Robin con  $\mu = \eta = 1$  está dada por

$$|f(r, \theta) - f_{NK}(r, \theta)| \leq 2B \frac{2^{3/2} a}{\pi^2} \sqrt{\mathcal{J}_2} \quad (4.13)$$

Finalmente, nosotros podemos definir  $\mathcal{C}_{DNR}(N, K)$  como la cota para las diferentes condiciones de frontera, dada por

$$\mathcal{C}_{DNR}(N, K) = \begin{cases} 2B \frac{a}{\pi^2} \frac{2}{\sqrt{2(N+2K)+5}} & \text{Cond. Dirichlet,} \\ 2B \frac{2^3 a}{\pi^2} \sqrt{\mathcal{I}_2} & \text{Cond. Neumann,} \\ 2B \frac{2^{3/2} a}{\pi^2} \sqrt{\mathcal{J}_2} & \text{Cond. Robin.} \end{cases} \quad (4.14)$$

## 4.2. Error cuadrático medio

En el estudio de la aproximación de funciones, es necesario definir el error cuadrático medio como

$$E_{NK} = \int_0^a \int_0^{2\pi} |f(r, \theta) - f_{NK}(r, \theta)|^2 r \, d\theta \, dr. \quad (4.15)$$

Esta cantidad es el promedio de la función  $|f(r, \theta) - f_{NK}(r, \theta)|^2$  en el círculo de radio  $a$ .

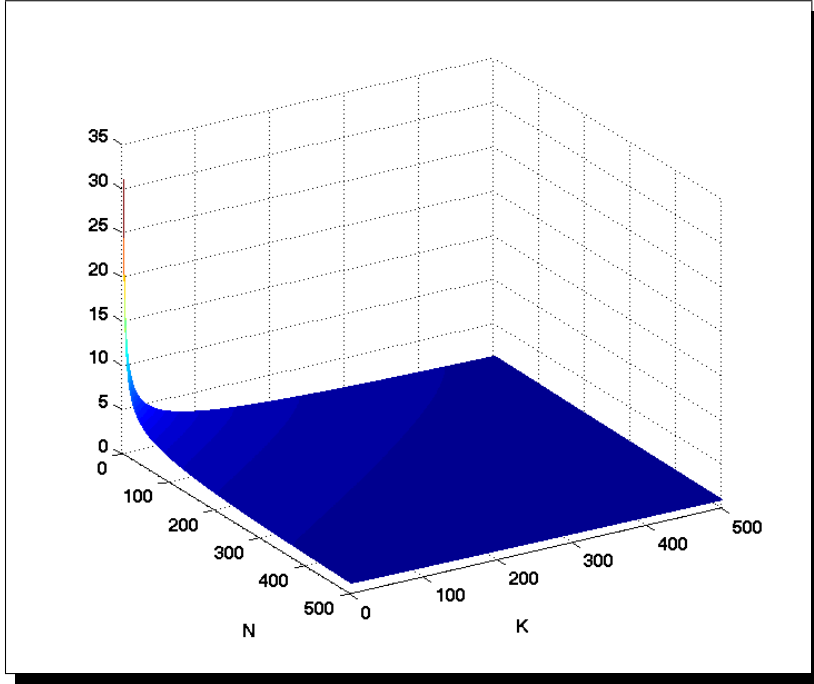


Figura 4.3: Convergencia de  $\Delta f$  para la Condición de Robin.

#### 4.2.1. Desigualdad de Bessel

Con el fin de expresar el error cuadrático medio en términos de los coeficientes de nuestra suma [3], consideremos el error cuadrático medio y expandamos el módulo al cuadrado,

$$\begin{aligned}
 E_{NK} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} |f(r, \theta)|^2 r d\theta dr + \int_0^a \int_0^{2\pi} |f_{NK}(r, \theta)|^2 r d\theta dr \\
 &\quad - \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \overline{f_{NK}(r, \theta)} r d\theta dr - \int_0^a \int_0^{2\pi} \overline{f(r, \theta)} f_{NK}(r, \theta) r d\theta dr.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, usando (3.31)

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} |f_{NK}(r, \theta)|^2 r d\theta dr = 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^K |\mathcal{A}_{nj}|^2$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} |\overline{f(r, \theta)} f_{NK}(r, \theta)|^2 r d\theta dr &= 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^K |\mathcal{A}_{nj}|^2 \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} |\overline{f_{NK}(r, \theta)} f(r, \theta)|^2 r d\theta dr, \end{aligned}$$

se tiene

$$E_{NK} = \int_0^a \int_0^{2\pi} |f(r, \theta)|^2 r d\theta dr - 2 \sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^K |\mathcal{A}_{nj}|^2.$$

Utilizando  $0 \leq E_{NK}$

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{j=1}^K |\mathcal{A}_{nj}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} |f(r, \theta)|^2 r d\theta dr,$$

y tomando el límite cuando  $N$  y  $K$  tienden a infinito

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_{nj}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} |f(r, \theta)|^2 r d\theta dr. \quad (4.16)$$

A esta expresión se le llama **Desigualdad de Bessel en coordenadas polares**

### 4.2.2. Identidad de Parseval

Ahora veamos que podemos obtener un resultado mucho más fuerte utilizando las cotas para las tres condiciones dadas por (4.14). El error entonces está acotado como sigue

$$\begin{aligned} E_{NK} &\leq \int_0^a \int_0^{2\pi} |\mathcal{C}_{DNR}(N, K)|^2 r d\theta dr, \\ &= |\mathcal{C}_{DNR}(N, K)|^2 \int_0^a \int_0^{2\pi} r d\theta dr, \\ &= |\mathcal{C}_{DNR}(N, K)|^2 \pi a^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

y puesto que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{N, K \rightarrow \infty} E_{NK} \leq \lim_{N, K \rightarrow \infty} |\mathcal{C}_{DNR}|^2 \pi a^2 \\ 0 &\leq \lim_{N, K \rightarrow \infty} E_{NK} \leq 0, \end{aligned}$$

obtenemos como consecuencia que  $E_{NK} = 0$  en el límite cuando  $N$  y  $K$  tienden a infinito, por tanto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_{nj}|^2 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} |f(r, \theta)|^2 r d\theta dr. \quad (4.18)$$

Esta es la **Identidad de Parseval en coordenadas polares**.

Al trabajar con soluciones dadas por una suma infinita generalmente se trunca hasta un número "suficientemente grande" de sumandos. La ecuación dada por (4.17) nos muestra cómo para cualquier error  $E_{NK}$  nosotros podemos obtener el número de sumando necesarios que nos permiten aproximar a la función  $f(r, \theta)$  considerando las diferentes condiciones de frontera.





# Capítulo 5

## Análisis de la solución a la ecuación de onda

En el capítulo 1 dedujimos la ecuación de onda y en el capítulo 2 resolvimos la ecuación de Helmholtz. Utilizando el método de expansión en eigenfunciones pudimos resolver la ecuación de onda en el capítulo 3, cuya solución está dada como sumas infinitas. En el capítulo 4 encontramos cómo truncar dichas sumas para un cierto error de aproximación. Finalmente mostraremos los resultados obtenidos al simular las oscilaciones en una membrana circular mediante un programa que elaboramos en lenguaje C (Apéndice E).

### 5.1. Resultados de la simulación

La solución a la ecuación de onda está dada por (3.32)

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{nj}(r, \theta) [\mathcal{A}_{nj} \cos(\lambda_{nj} ct) + \mathcal{A}_{nj}^* \sin(\lambda_{nj} ct)].$$

y ahora consideremos por simplicidad una velocidad inicial (3.3) dada por  $g(r\theta) = 0$ , esto nos permite reescribir la solución anterior como

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{nj}(r, \theta) \mathcal{A}_{nj} \cos(\lambda_{nj} ct). \quad (5.1)$$

Con el programa que escribimos para simular la membrana circular (Apéndice E) hemos logrado obtener las gráficas que ilustran la dinámica de una membrana bajo las tres condiciones homogéneas con las que hemos estado trabajando (Dirichlet, Neumann y Robin) y la condición inicial dada por

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{15} \sum_{j=1}^{10} J_n(\lambda_{nj} r) [\sin n\theta + \cos n\theta]. \quad (5.2)$$

La Figura 5.1 muestra el comportamiento de la función bajo la condición de Dirichlet (3.4). Como podemos observar la membrana permanece fija en la frontera para todo tiempo  $t$ . Por otro lado, cuando el comportamiento está bajo la condición de Neumann (3.5), podemos apreciar cómo la Figura 5.2 nos muestra que aunque la condición inicial está dada por la misma función, la membrana presenta ondulaciones en la frontera que se van desplazando en dirección angular; esto se debe a que los valores propios  $\lambda_{n,j}$  cambian con cada una de las condiciones de frontera. Finalmente para la condición de Robin (3.6), con  $\mu = \eta = 1$ , la Figura 5.3 muestra como este comportamiento sugiere ser una combinación de los dos anteriores, ya que no presenta una frontera fija como en el caso de Dirichlet, pero tampoco es tan pronunciado como en el caso para la condición de Neumann. En las figuras 2.6, 2.7 y 2.8 de la página 17 se puede observar este comportamiento con mayor detalle.

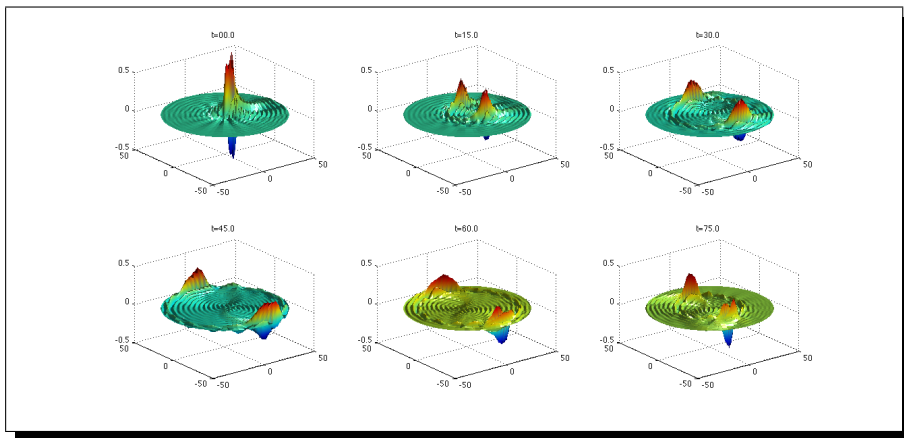


Figura 5.1: Membrana circular vibrante para la condición de Dirichlet.

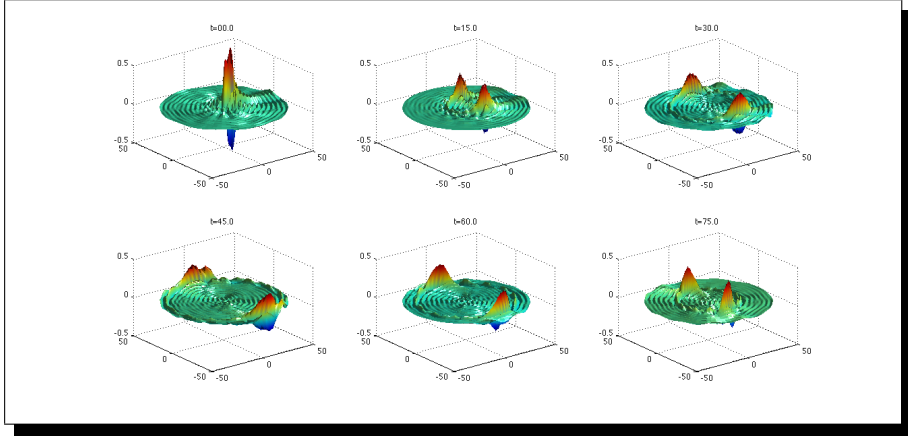


Figura 5.2: Membrana circular vibrante para la condición de Neumann.

## 5.2. La Solución como Ondas Viajeras

Para poder reescribir (5.1) como una suma de ondas viajeras, expresaremos  $\cos(\lambda_{nj}ct)$  en su forma compleja y vamos a sustituirlo en (5.1) esto nos da

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{nj} \Phi_{nj}(r, \theta)}{2} [e^{i(\lambda_{nj}ct)} + e^{-i(\lambda_{nj}ct)}], \quad (5.3)$$

y recordando la definición de  $\Phi_{nj}(r, \theta)$  dada por (3.29)

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{nj} J_{nj}(\lambda_{nj}r)}{\pi 2 \mathcal{N}_{DNR}} [e^{i(n\theta + \lambda_{nj}ct)} + e^{i(n\theta - \lambda_{nj}ct)}]. \quad (5.4)$$

Sean

$$\Psi_{nj}^+ = \frac{A_{nj} J_{nj}(\lambda_{nj}r)}{\pi 2 \mathcal{N}_{DNR}} e^{i(n\theta + \lambda_{nj}ct)} \quad (5.5)$$

y

$$\Psi_{nj}^- = \frac{A_{nj} J_{nj}(\lambda_{nj}r)}{\pi 2 \mathcal{N}_{DNR}} e^{i(n\theta - \lambda_{nj}ct)}. \quad (5.6)$$

Entonces para cada par  $(n, j)$  nosotros podemos interpretar a (5.5) como una onda viajera (Apéndice F) que se desplaza alrededor de un círculo de radio  $r$ , como se muestra en la Figura 5.4. De la misma manera, (5.6) puede interpretarse como una onda viajera que se desplaza en sentido contrario (levógiro), véase la Figura. La superposición de estas ondas que se desplazan angularmente, nos permite obtener los modos normales de una membrana

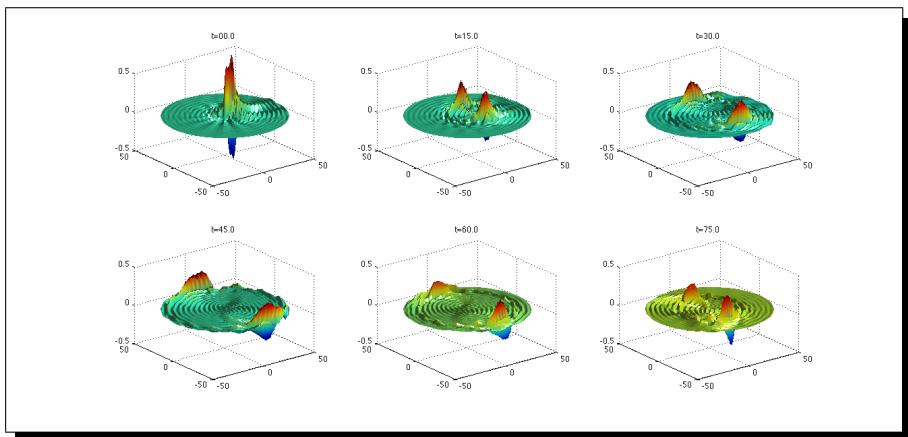


Figura 5.3: Membrana circular vibrante para la condición de Robin.

circular; lo anterior queda ilustrado en la Figura 5.6.

Ahora bien, dado que  $\lambda_{nj} < \lambda_{n,j+1}$ , tenemos que la velocidad de fase es mayor conforme van aumentando  $n$  y  $j$ , es decir, las ondas viajeras giran cada vez más rápido. Lo anterior podemos observarlo si comparamos los desplazamientos angulares que se ilustran en las Figuras 5.4, 5.7 y 5.8; entre más grande es  $j$  la velocidad de giro aumenta.

### 5.2.1. Patrones en espiral

Tomando como punto de partida nuestra interpretación de dos onda viajeras que se desplazan en dirección angular, podemos preguntarnos si también es posible ver las oscilaciones en una membrana circular como ondas que se desplacen también en la dirección radial.

Consideremos la expresión asintótica para las funciones de Bessel de primer tipo dada por (D.5) y utilicemos la representación compleja del coseno,

$$\begin{aligned}
 J_n(\lambda_{nj}r) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_{nj}r}} \cos\left(\lambda_{nj}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_{nj}r}} \frac{e^{i(\lambda_{nj}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\lambda_{nj}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}}{2} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda_{nj}r}} \frac{e^{i(\lambda_{nj}r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{i(-\lambda_{nj}r + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4})}}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

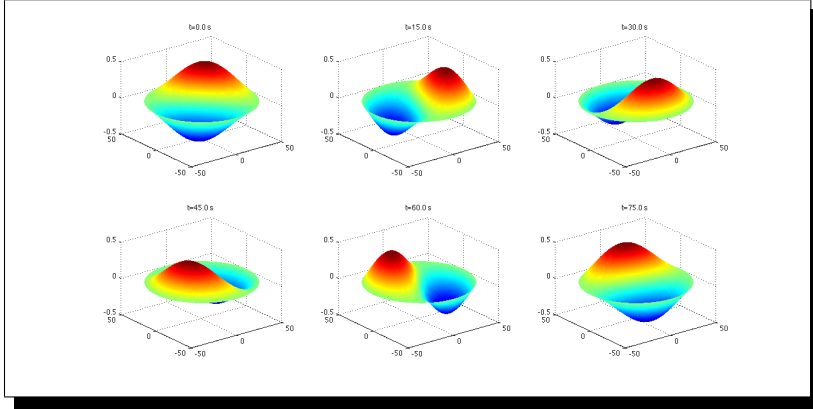


Figura 5.4: Onda viajera en dirección angular y sentido dextógiro para  $n$  y  $j$  fijos.

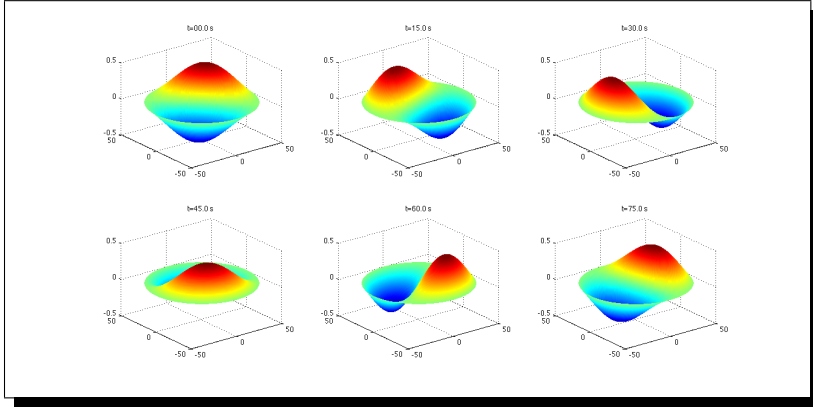


Figura 5.5: Onda viajera en dirección angular y sentido levógiro para  $n$  y  $j$  fijos.

Substituyendo (5.7) en (5.4) tenemos la siguiente expresión asintótica para la solución a la ecuación de onda

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, t) \approx & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_{nj} r}} \frac{e^{i(\lambda_{nj}(ct+r)+n(\theta-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{4})}}{\pi 4 \mathcal{N}_{DNR}} \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_{nj} r}} \frac{e^{i(-\lambda_{nj}(r-ct)+n(\theta+\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{4})}}{\pi 4 \mathcal{N}_{DNR}} \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_{nj} r}} \frac{e^{i(\lambda_{nj}(r-ct)+n(\theta-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{4})}}{\pi 4 \mathcal{N}_{DNR}} \\
 & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda_{nj} r}} \frac{e^{i(-\lambda_{nj}(r+ct)+n(\theta+\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{4})}}{\pi 4 \mathcal{N}_{DNR}}. \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

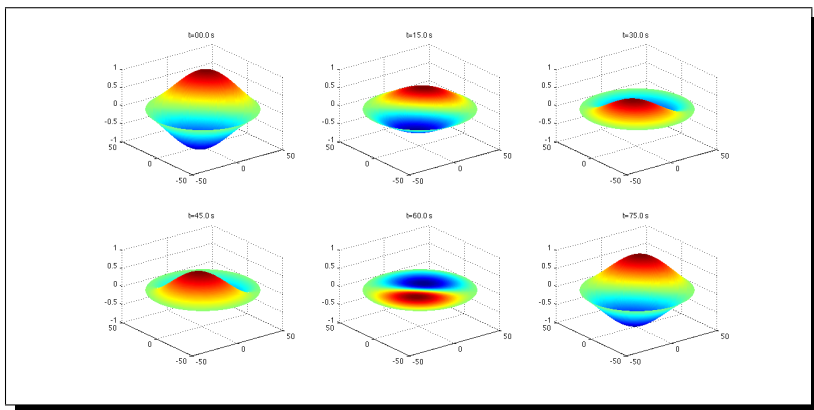


Figura 5.6: Modo normal con  $n = 1$   $j = 1$ .

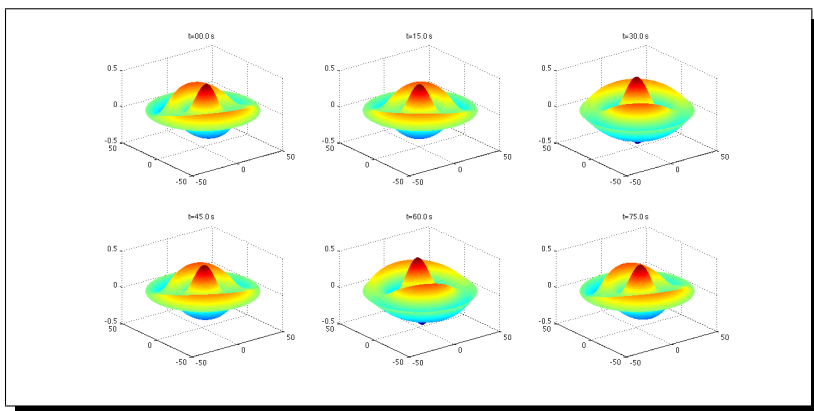


Figura 5.7: Onda viajera con  $n = 1$   $j = 3$ .

Puede interpretarse esta solución como cuatro ondas que se desplazan en las direcciones radial y angular, dando como resultado patrones en espiral como se aprecia en la Figura 5.9. Notemos que estas espirales no cumplen por sí mismas con la condición de frontera, la suma total de armónicos debe cumplirla. Por otro lado, este comportamiento a distintos tiempos se representa como espirales que giran, una ilustración de esto se ve en la Figura 5.10. Cabe mencionar que esta forma de visualizar las deflexiones de una membrana como ondas viajeras es válida únicamente para valores de  $j$  grandes donde se cumple la aproximación asintótica.

En la Figura 5.11 se ilustra la suma de las distintas ondas viajeras. En las imágenes tituladas Onda 1 y Onda 4 podemos observar oscilaciones que presentan cierta torsión y que giran en sentido contrario la una de la otra. Para las

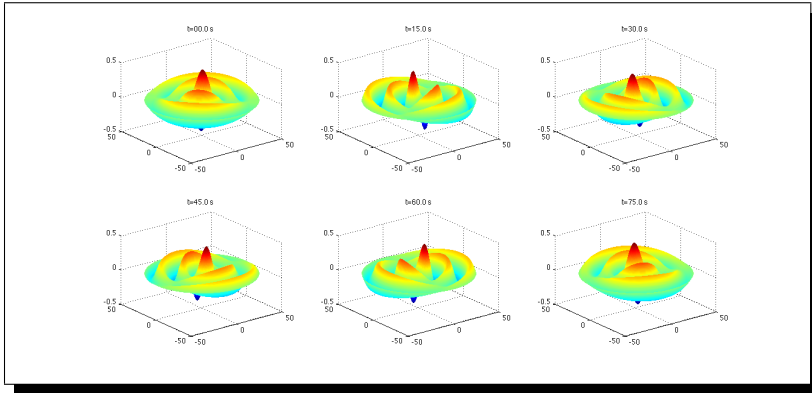


Figura 5.8: Onda viajera con  $n = 1$   $j = 5$ .

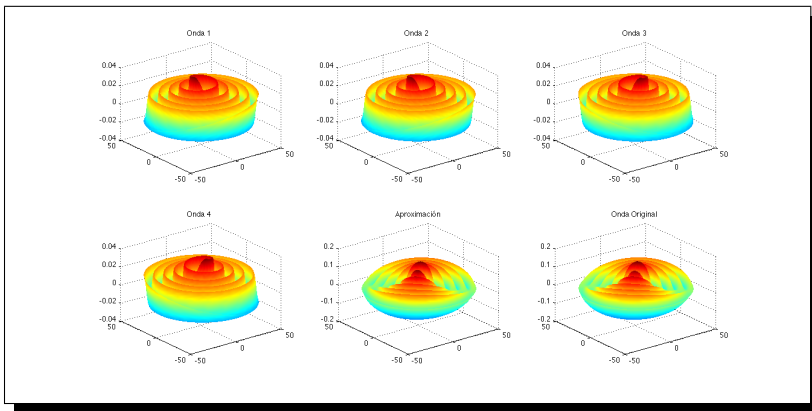


Figura 5.9: Ondas viajeras con  $n = 1$   $j = 11$  a  $t = 00.0s$ .

imagenes tituladas Onda 2 y Onda 3 podemos ver a los máximos y los mínimos de la función que también se desplazan en la dirección angular y sentido contrario. Finalmente podemos observar en las dos últimas imágenes la comparación entre la Onda Original y la aproximación que se obtiene al utilizar (5.8). En las Figuras y 5.13 se ilustra este comportamiento para distintos tiempos.



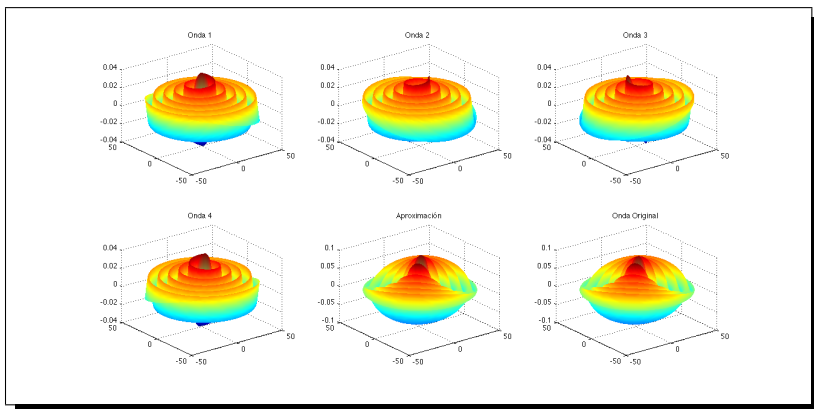


Figura 5.10: Ondas viajeras con  $n = 1$   $j = 11$  a  $t = 30.0s$ .

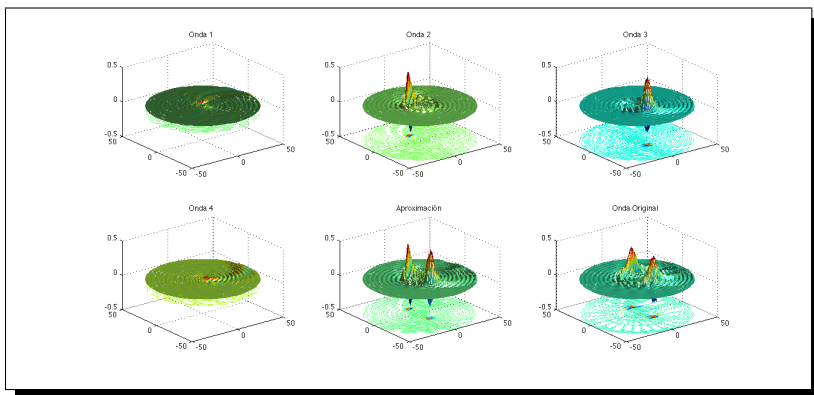


Figura 5.11: Superposición de las ondas viajeras a  $t = 15.0s$ .

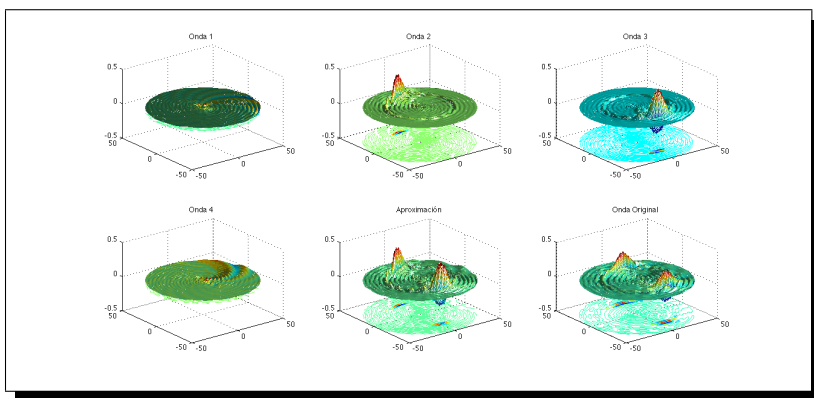


Figura 5.12: Superposición de las ondas viajeras a  $t = 30.0s$ .

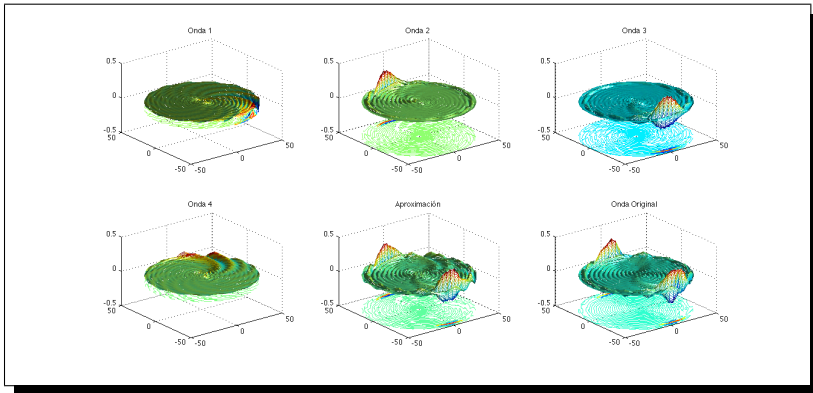


Figura 5.13: Superposición de las ondas viajeras a  $t = 45.0$ s.



# Apéndice A

## La función Gama y el factorial

Como sabemos, la función gama se define de la siguiente forma [AW05]

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad x > 0,$$

y una de sus propiedades básicas es [Asm05]

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{A.1}$$

Demostración: Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Lo anterior implica que para  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n), \\ &= n(n-1)\Gamma(n-2), \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-3), \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 2\Gamma(1), \end{aligned}$$

pero  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ .

Por tanto

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{A.2}$$



## Apéndice B

# Solución de la ecuación de Bessel

La ecuación (2.8) es conocida como la ecuación paramétrica de Bessel de orden  $n$  [3] [11]. Para resolver esta ecuación, es necesario realizar el cambio de variable  $s = \lambda r$ , eso nos da

$$R' = \lambda S' \quad \text{y} \quad R'' = \lambda^2 S''.$$

Sustituyendo en (2.8) tenemos

$$s^2 S'' + s S' + S(s^2 - n^2) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Nosotros proponemos que  $S$  sea de la forma [5]

$$S(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^{m+p}, \quad (\text{B.2})$$

lo cual implica

$$S'(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+p) s^{m+p-1}, \quad (\text{B.3})$$

$$S''(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+p)(m+p-1) s^{m+p-2} \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.2), (B.3) y (B.4) en (B.1)

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+p)(m+p-1) s^{m+p} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+p) s^{m+p} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^{m+p+2} - n^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^{m+p} = 0, \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m s^{m+p} [(m+p)^2 - n^2] + \sum_{m=0}^{\infty} a_m s^{m+p+2} = 0.$$

Recorriendo el índice en la segunda suma se tiene

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m s^{m+r} [(m+p)^2 - n^2] + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-2} s^{m+p} = 0,$$

y expandiendo la primera suma y agrupando

$$a_0 s^p (p^2 - n^2) + a_1 s^{p+1} [(1+p)^2 - n^2] + \sum_{m=2}^{\infty} s^{m+p} \{a_m [(m+p)^2 - n^2]\} = 0.$$

Igualando cada uno de los coeficientes a cero se tiene que debe satisfacerse

$$a_0 (p^2 - n^2) = 0, \tag{B.5}$$

$$a_1 [(p+1)^2 - n^2] = 0, \tag{B.6}$$

$$a_m [(p+m)^2 - n^2] + a_{m-2} = 0. \tag{B.7}$$

Como  $a_0 \neq 0$  entonces de (B.5)

$$(p+n)(p-n) = 0,$$

esto es  $r = n$  y  $r = -n$ . Tomando  $r = n$  y usando (B.7) llegamos a la siguiente relación de recurrencia

$$a_m = \frac{-a_{m-2}}{m(m+2)} \quad m \geq 2.$$

Esta es una relación de recurrencia de dos pasos, por lo que los términos pares y los impares se determinan de forma separada. Como  $r = n$  tenemos entonces que para la ecuación indicial (B.6)

$$a_1 [(n+1)^2 - n^2] = 0,$$

por tanto  $a_1 = 0$  y  $a_1 = a_3 = \dots = 0$ . Esto quiere decir que únicamente trabajaremos con los términos pares y es conveniente reescribir la relación de recurrencia utilizando  $m = 2k$

$$a_{2k} = \frac{-1}{2^2 k(k+n)} a_{2(k-1)} \quad k \geq 1.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{2^2(1+n)} a_0; \\ a_4 &= \frac{-1}{2^2 2(2+n)} a_2 = \frac{(-1)^2}{2^4 2!(1+n)(2+n)} a_0; \\ &\vdots \\ a_k &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(1+n)(2+n) \dots (k+n)}. \end{aligned}$$

Substituyendo estos coeficientes en (B.2) tenemos la solución a la ecuación de Bessel (B.1)

$$S(s) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(1+n)(2+n) \dots (k+n)} s^{2k+n}, \quad (\text{B.8})$$

donde  $a_0 \neq 0$  es arbitrario. Esta solución se puede escribir en una forma más elegante con la ayuda de la función gama ( $\Gamma(x)$ ) si escribimos

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}. \quad (\text{B.9})$$

Entonces substituyendo (B.9) en (B.8) se tiene

$$S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n) \dots (2+n)(1+n)\Gamma(n+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n},$$

y utilizando la propiedad dad por (A.1)

$$\begin{aligned} [(k+n) \dots (2+n)(1+n)]\Gamma(n+1) &= [(k+n) \dots (2+n)]\Gamma(2+n) \\ &= [(k+n) \dots (3+n)]\Gamma(3+n) \\ &\vdots \\ &= \Gamma(k+n+1). \end{aligned}$$

Mediante esta simplificación llegamos a la primera solución denotada por  $J_n$  y se le llama la función de Bessel de orden  $n$

$$J_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n}, \quad (\text{B.10})$$

utilizando ahora (A.2), se tiene

$$J_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n}. \quad (\text{B.11})$$

Por tanto

$$R(r) = J_n(\lambda r). \quad (\text{B.12})$$





## Apéndice C

# Fórmulas de recurrencia para la función de Bessel

Tomemos  $J_n(s)$  como en (B.11) (Apéndice B) y derivemos con respecto a  $s$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}J_n(s) &= \frac{d}{ds} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{2k+n}{2}\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(k+n-\frac{n}{2}\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n-1}.\end{aligned}$$

Desarrollando el término de la suma

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}J_n(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+n)}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n-1} \\ &\quad - \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n} \left(\frac{s}{2}\right)^{-1},\end{aligned}$$

y utilizando las propiedades del factorial [3]

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}J_n(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n-1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n-1} \\ &\quad - \frac{n}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n} \\ &= J_{n-1}(s) - \frac{n}{s}J_n(s).\end{aligned}\tag{C.1}$$

La Figura C.1 ilustra esta relación de recurrencia.

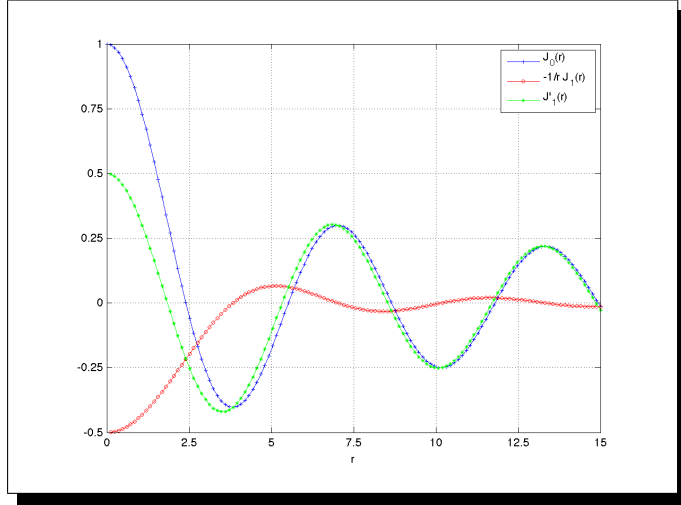


Figura C.1: Derivada de  $J_1(s)$  usando (C.1).

Por otro lado, también, podemos obtener otra identidad útil derivando

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} J_n(s) &= \frac{d}{ds} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{2k+n}{2}\right) \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n-1} \end{aligned}$$

y desarrollando la suma

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} J_n(s) &= \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n} \left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} k \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n-1}. \end{aligned}$$

Recorriendo el índice de la suma tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} J_n(s) &= \frac{n}{s} J_n(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n-1} \\ &= \frac{n}{s} J_n(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!((k+1)+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2(k+1)+n-1}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} J_n(s) &= \frac{n}{s} J_n(s) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!((k+n+1)!)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k+n+1} \\ &= \frac{n}{s} J_n(s) - J_{n+1}(s). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Un ejemplo de esta relación se encuentra en la Figura C.2.

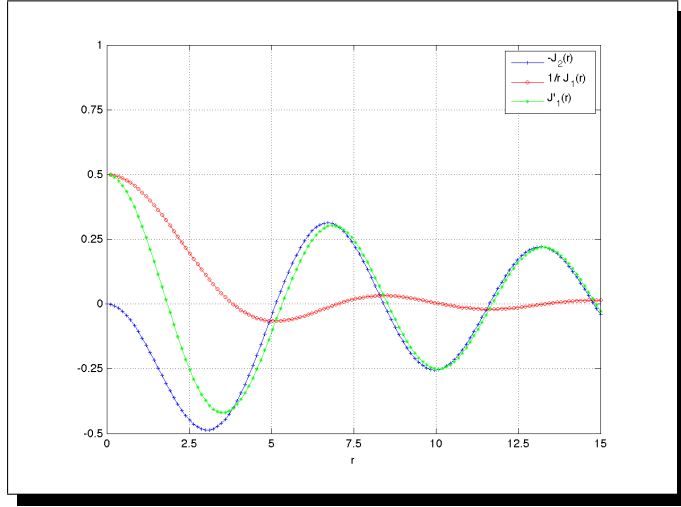


Figura C.2: Derivada de  $J_1(s)$  usando (C.2).

Las otras dos relaciones de recurrencia se obtienen, primero sumando (C.1) y (C.2), lo que nos da

$$J'_n(s) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(s) - J_{n+1}(s)), \quad (\text{C.3})$$

esto se puede ver en la Figura C.3 y después sustrayendo (C.2) de (C.1), lo que nos permite obtener la relación de recurrencia

$$\frac{2n}{s} J_n(s) = J_{n-1}(s) + J_{n+1}(s), \quad (\text{C.4})$$

que está ilustrada en la Figura C.4.

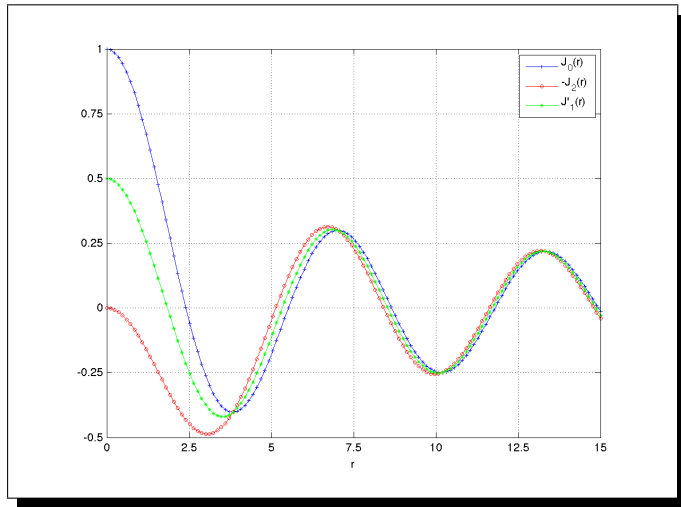


Figura C.3: Derivada de  $J_1(s)$  usando (C.3).

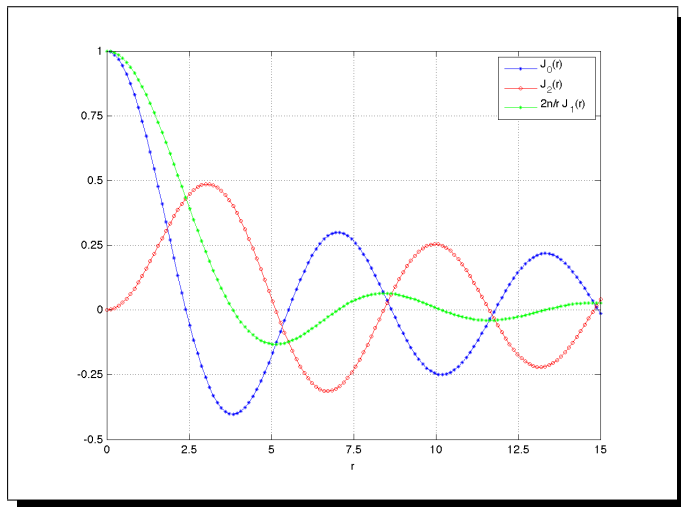


Figura C.4: Derivada de  $J_1(s)$  usando (C.4).

## Apéndice D

# Expresión asintótica de la función de Bessel

En ocasiones es conveniente trabajar con la expresión asintótica de la función de Bessel para  $x$  suficientemente grande. Lo primero que debemos obtener es un resultado que nos permite ver a la función de Bessel de orden  $n$  como una integral.

### Representación integral de la función de Bessel

Consideremos dos variables reales  $x$  y  $\theta$  y tomemos  $\zeta = e^{i\theta}$ . Para todo  $\theta$  tenemos que  $|\zeta| = |e^{i\theta}| = 1$ . Entonces  $\zeta$  se encuentra en el círculo unitario complejo [4] [12]. Ahora bien, la función  $e^{-\frac{x}{2}\frac{1}{\zeta}}$  tiene una expansión en serie alrededor del cero en  $-\frac{x}{2}\frac{1}{\zeta}$  [4], eso nos da

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} &= e^{\frac{x}{2}\zeta} e^{-\frac{x}{2\zeta}} \\ &= e^{\frac{x}{2}\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{2\zeta}\right)^k \\ &= e^{\frac{x}{2}\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right) \zeta^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}\zeta} \frac{1}{\zeta^k}. \end{aligned}$$

Tomando  $x$  fija se tiene que la serie es absolutamente convergente para toda  $\theta$  [4], por tanto, podemos multiplicar por  $\zeta^{-n}$  e integrar término a término.

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{x}{2}\right) \int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}\zeta} \frac{1}{\zeta^{k+n}}. \quad (\text{D.1})$$

Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} d\theta &= \int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} e^{-in\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin \theta - n\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta, \end{aligned}$$

pero

$$\int_0^{2\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta = 0$$

y

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}\zeta} \frac{1}{\zeta^{k+n}} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\zeta\right)^l \zeta^{k+n} d\theta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l \int_0^{2\pi} e^{il\theta} e^{-i(n+k)\theta} d\theta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l 2\pi \delta_{l, n+k} \\ &= 2\pi \frac{1}{(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+k}. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Sustituyendo (??) y (D.2) en (D.1) se tiene

$$2 \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Finalmente

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta. \tag{D.3}$$

### El método de fase estacionaria

A continuación necesitamos demostrar el siguiente lema:

Supongamos que  $f(\theta)$  es una función real con una serie de Taylor centrada en  $\theta_0$  en el intervalo  $[a, b]$ , tal que  $f'(\theta_0) = 0$ ,  $f''(\theta_0) \neq 0$  para todo  $t \neq \theta_0$  y  $f''(\theta_0) \neq 0$ . Sea  $g(\theta)$  una función suave arbitraria compleja en  $[a, b]$  entonces, para  $x$  suficientemente grande

$$\int_a^b e^{ixf(\theta)} g(\theta) d\theta \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} g(\theta_0) \frac{e^{i(xf(\theta_0) \pm \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|f''(\theta_0)|}}$$

donde usamos el signo (+) si  $f''(\theta_0) > 0$  y el signo (-) si  $f''(\theta_0) < 0$  [3].

Supongamos que  $f''(\theta_0) > 0$  y expandiendo la función  $f(\theta)$  en su serie de Taylor alrededor de  $\theta_0$

$$f(\theta) = f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + f''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 + \dots$$

Como  $f'(\theta_0) = 0$ , podemos aproximar la función  $f(\theta)$  como

$$f(\theta) = f(\theta_0) + f''(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!}$$

y  $g(\theta)$  como la constante  $g(\theta_0)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{ixf(\theta)} g(\theta) d\theta &\approx \int_a^b e^{ix\left(f(\theta_0) + f''(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!}\right)} g(\theta_0) d\theta \\ &= e^{ixf(\theta_0)} g(\theta_0) \int_a^b e^{ixf''(\theta_0) \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2!}} \\ &= g(\theta_0) e^{ixf(\theta_0)} \int_a^b e^{i\left(\sqrt{\frac{xf''(\theta_0)}{2}}(\theta - \theta_0)\right)^2} d\theta. \end{aligned} \tag{D.4}$$

Sea

$$u = \sqrt{\frac{xf''(\theta_0)}{2}}(\theta - \theta_0) \quad \rightarrow \quad du = \sqrt{\frac{xf''(\theta_0)}{2}} dt.$$

Lo anterior nos da

$$\int_a^b e^{ixf(\theta)} g(\theta) d\theta \approx g(\theta_0) e^{if(\theta_0)} \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{1}{\sqrt{f''(\theta_0)}} \int_A^B e^{iu^2} du,$$



donde  $A = \sqrt{\frac{xf''(\theta_0)}{2}}(a - \theta_0)$  y  $B = \sqrt{\frac{xf''(\theta_0)}{2}}(b - \theta_0)$ . Notemos que cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow -\infty$  y  $B \rightarrow \infty$ , entonces la integral converge a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu^2} du = \sqrt{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4}.$$

Por tanto

$$\int_a^b e^{ixf(\theta)} g(\theta) d\theta \approx \sqrt{\frac{2\pi}{x}} g(\theta_0) \frac{e^{i(xf(\theta_0) \pm \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|f''(\theta_0)|}}$$

para  $x$  grande. La demostración para  $f''(\theta_0) < 0$  es análoga.

Nosotros tenemos que

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i(n\theta - x \sin \theta)} + e^{-i(n\theta - x \sin \theta)}}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Para la primera integral tenemos que  $f(\theta) = -\sin \theta$  y  $g(\theta) = e^{in\theta}$ . Ahora notemos que  $f'(\theta) = 0$  únicamente cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  en el intervalo  $[0, \pi]$  y  $f''(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ . Del teorema que acabamos de demostrar se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{in\frac{\pi}{2}} e^{i(-x + \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

y análogamente

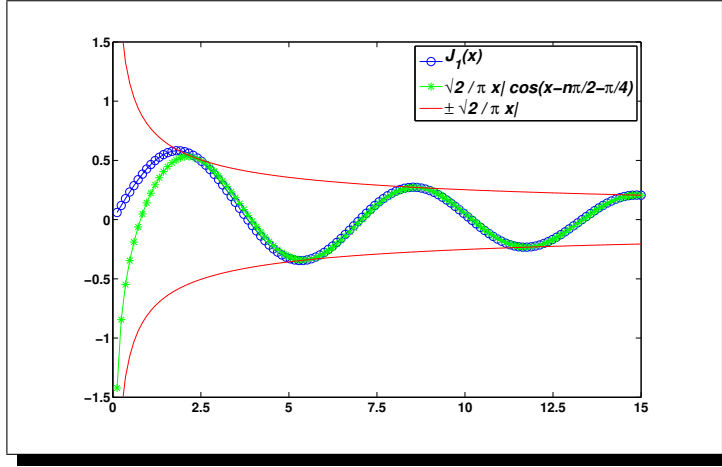
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}.$$

Por tanto

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (\text{D.5})$$

La Figura D.1 en la página 71 muestra el como el comportamiento de la expresión asintótica se asemeja al de la función de Bessel.

Ahora bien, para obtener una expresión asintótica de la derivada de la


 Figura D.1: Expresión asintótica para  $J_n(x)$ 

función de Bessel podemos hacer uso de la relación (C.3)

$$\begin{aligned}
 J'_n(x) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cos \left( x - \frac{(n-1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left( x - \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \tag{D.6}
 \end{aligned}$$

La expresión asintótica se ilustra en la Figura D.2 de la página 72.

### Raíces aproximadas

Mediante las relaciones (D.5) y (D.6) (Apéndice C) podemos obtener raíces aproximadas para cada una de las condiciones a la frontera, cuando  $x$  es lo suficientemente grande

#### Condición de Dirichlet

$$\alpha_{nj} \approx \frac{(2j+n)\pi}{2} - \frac{\pi}{4}. \tag{D.7}$$

#### Condición de Neumann

$$\beta_{nj} \approx \frac{(2j+n)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}. \tag{D.8}$$

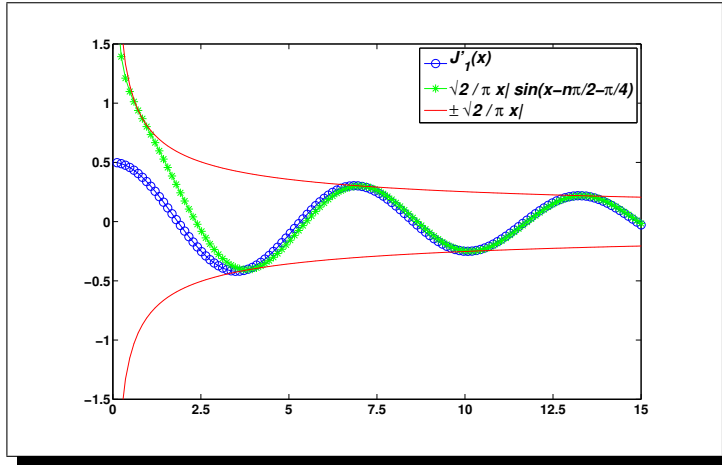


Figura D.2: Expresión asintótica para  $J'_n(x)$

### Condición de Robin

En este caso se tiene utilizando las expresiones asintóticas

$$\eta \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \mu \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

esto nos da

$$\frac{\eta}{\mu} = \tan\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Esta es una ecuación trascendente que no puede obtener las raíces explícitamente. Sin embargo, para el caso en el que  $\eta = \mu = 1$  podemos llegar a una solución

$$\gamma_{nj} \approx \frac{(2j + n)\pi}{2} - \frac{\pi}{2}. \quad (\text{D.9})$$

# Apéndice E

## Código del programa en lenguaje C

Para simular el comportamiento de las membranas vibrantes utilizamos el siguiente programa en C

```
/*
 * DNR.c
 *
 *
 * Created by Mauricio Garca Vergara on 19/07/11.
 * Copyright 2011 Facultad de Ciencias UNAM. All rights reserved.
 */

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define pi 4*atan(1)

#define a 50.0 //Radio de la Membrana
#define TH 2*pi //Sector circular de la Membrana
#define T 20.0 //Duracion del fenomeno
#define c 1.0 //Velocidad de la onda

main(){

    double J0(double r1);
    double J1(double r2);
    double J(int n3,double r3);
    double K(int n4,double r4);

    int pt=10; //numero de particiones del tiempo
    int pr=1.0*250; //numero de particiones del radio
    int pth=72; //numero de particiones del angulo

    double t=30.0; //variable temporal
    double r; //variable radial
    double th; //variable angular

    double dt=(T/pt); //tamano de paso para r
    double dr=fabs(a/pr); //tamano de paso para t
    double dth=(TH/pth);//tamano de paso para th

    int i; //contador de t
    int j; //contador de r
    int k; //contador de th

    int n; //contador de la suma
    int N=14; //Limite de la suma

    /*
    Esta parte del programa calcula las beta_np: los ceros de la derivada de la funcion de Bessel

    double zb[50][200];
    double px=2*500;

```



```

/*-----*/
/*-----de aqui se obtienen las ND_[n][k]-----*/
double ND[50][200];
for(n=0;n<=N;n++)
{
    for(h=1;h<=(q/2);h++)
    {
        ND[n][h]=pow(a,2.0)/2.0*pow(J(n+1,beta[n][h]),2.0);
        if(beta[n][h]=0.0)
        {
            ND[n][h]=1.0;
        }
        //printf("ND[%i][%i]=%f\n",n,h,ND[n][h]);
    }
}
////////////////////////////////////////////////////////////////////
/*-----*/

/*-----de aqui se obtienen las NN_[n][k]-----*/

double NN[50][200];
for(n=0;n<=N;n++)
{
    for(h=1;h<=(q/2);h++)
    {
        NN[n][h]=pow(a,2.0)/2.0*pow(J(n,beta[n][h]),2.0)*(1.0-(pow(n,2.0)/pow(beta[n][h],2.0)));
        if(beta[n][h]=0.0)
        {
            NN[n][h]=1.0;
        }
        printf("NN[%i][%i]=%f\n",n,h,NN[n][h]);
    }
}
////////////////////////////////////////////////////////////////////
/*-----*/

/*-----de aqui se obtienen las NR_[n][k]-----*/

double NR[50][200];
for(n=0;n<=N;n++)
{
    for(h=1;h<=(q/2);h++)
    {
        NR[n][h]=pow(a,2.0)/2.0*pow(J(n,beta[n][h]),2.0)*(2.0-(pow(n,2.0)/pow(beta[n][h],2.0)));
        if(beta[n][h]=0.0)
        {
            NR[n][h]=1.0;
        }
        printf("NR[%i][%i]=%f\n",n,h,NR[n][h]);
    }
}
////////////////////////////////////////////////////////////////////
/*-----*/

double Un1,Un2,Un3,Un4,Un5;
double Un;
//Un1=Un2=Un3=Un4=Un5=0.0;
double Unk;
    for(j=0;j<=pr;j++)
    {
        r=j*dr;
        //printf("%f\n",r);//<<-----para vector r
        for(k=0;k<=pth;k++)
        {
            th=k*dth;
            Un=0.0;
            for(n=0;n<=N;n++)
            {
                Un1=Un2=Un3=Un4=Un5=0.0;
                Unk=0.0;
                for(h=1;h<=24;h++)
                {
                    Unk=Unk+J(n,lam[n][h]*r)*(cos(n*th)+sin(n*th))*exp(-lam[n][h]*c*t)/(pi*ND[n][h]);
                    //Un1=Un1+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0)+sin(lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0));
                    if(r*lam[n][h]<=5.0)
                    {
                        Un1=0.0;
                    }
                    Un2=Un2+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0)+sin(lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0));
                    if(r*lam[n][h]<=5.0)
                    {
                        Un2=0.0;
                    }
                    Un3=Un3+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(-lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0)+sin(-lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0));
                }
            }
        }
    }

```

```

if (r*lam[n][h]<=5.0)
{
Un3=0.0;
}
Un4=Un4+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(-lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0)+sin(-lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0));
if (r*lam[n][h]<=5.0)
{
Un4=0.0;
}
Un5=Un5+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0)+sin(lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0))
+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0)+sin(lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th-pi/2.0)-pi/4.0))
+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(-lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0)+sin(-lam[n][h]*(r-c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0))
+1/(4.0*pi*ND[n][h])*sqrt(2.0/(pi*lam[n][h]*r))*(cos(-lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0)+sin(-lam[n][h]*(r+c*t)+n*(th+pi/2.0)+pi/4.0));
if (r*lam[n][h]<=5.0)
{
Un5=0.0;
}*/

}
Un=Un+Unk;
Unk=0.0;

}
printf("%f ",Un);
}
printf("\n");//<-----
}

}

/*-----*/

/*-----Funcion para obtener los ceros-----*/
//      de las distintas condiciones
//      a la frontera
double K(int n, double r)
{
double J(int n3,double r3);
double Kn;
/*if (r==0)
{
Kn=0.0;
}*/
if (r>0.0)
{
Kn=1.0*J(n,r)+0.0*((n/r)*J(n,r)-J(n+1.0,r));
}
return Kn;
}

////////////////////////////////////
/*-----*/

/*-----*/
double J(int n,double r)
{
double J0(double r0);
double J1(double r1);
double jn;
if (n==0)
{
jn=J0(r);
}
if (n==1)
{
jn=J1(r);
}
if (n>=2)
{
if (r==0)
{
jn=0.0;
}
else
{
int m;
double Jb[100];
Jb[0]=J0(r);
Jb[1]=J1(r);
Jb[n]=0.0;
for (m=1;m<=(n-1);m++)
{
Jb[m+1]=(2*m/r)*Jb[m]-Jb[m-1];
}
jn=Jb[n];
Jb[n]=0;
}
}
}

```

```

    }
    if(n>=9.0 & r<3.0)
    {
        jn=0.0;
    }
    if(n>=16.0 & r<5.4)
    {
        jn=0.0;
    }
    if(n>=20.0 & r<8.3)
    {
        jn=0.0;
    }
    if(n>=24.0 & r<=11.3)
    {
        jn=0.0;
    }
    if(n>=27.0 & r<=13.5)
    {
        jn=0.0;
    }
    if(n>=28.0 & r<=17.2)
    {
        jn=0.0;
    }
    if(n>=32.0 & r<=21.0)
    {
        jn=0.0;
    }
    }
    return jn;
}

/*****
//
//          Funcion de Bessel de orden 1
//
double J1(double r)
{
    double fac(int n);
    double j1=0.0;
    int k;
    int trunc=100;
    if(r<35.0)
    {
        for(k=0; k<=trunc; k++)
        {
            j1=j1+pow(-1,k)*pow(r/2.0,2.0*k+1)/(fac(k)*fac(k+1));
        }
    }
    else
    {
        j1=sqrt(2.0/(pi*r))*cos(r-(3.0*pi/4.0));
    }
    return j1;
}
*/

/*****
//
//          Funcion de Bessel de orden 0
//
double J0(double r)
{
    double fac(int n);
    double j0=0.0;
    int k;
    int trunc=100;
    if(r<35.0)
    {
        for(k=0; k<=trunc; k++)
        {
            j0=j0+pow(-1,k)*pow(r/2.0,2.0*k)/(pow(fac(k),2.0));
        }
    }
    else
    {
        j0=sqrt(2.0/(pi*r))*cos(r-(pi/4));
    }
    return j0;
}
*/

/*****
//
//          Funcion Factorial
//

```



```
// -Devuelve el factorial de un argumento entero.
//
// -Se utiliza un proceso iterativo de multiplicaciones
// hasta llegar al nmero deseado.
//
// n!=n*(n-1)*(n-2)*...*2*1
//
// -Este programa permite calcular mmeros de hasta 170!
/*-----*/

double fac(int n)
{
    double facn;
    facn=1.0;///<---Seguimos la convencion de 0!=1
    int i;
    for(i=0;i<n;i+1)///<----Inicio de las
    { // iteraciones
        if(i>0)
        {
            facn=facn*i;
        }
    }///<----Fin de las iteraciones
    return facn;
}
/*////////////////////////////////////*/
```

# Apéndice F

## Ondas Viajeras

Consideremos una onda que se propaga en la dirección  $x$ . En algún instante de tiempo, por ejemplo  $t = 0$  la forma de la onda se puede representar por [9]

$$y = f(x) \quad t = 0 \quad (\text{F.1})$$

conforme transcurre el tiempo la onda avanza sin cambiar de forma. Algún tiempo  $t$  más tarde la onda ha avanzado una distancia  $ct$  a la derecha, siendo  $c$  la velocidad de la onda, que suponemos constante. Por tanto, la ecuación de la curva en el tiempo  $t$  es

$$y = f(x - ct) \quad t = t \quad (\text{F.2})$$

Esta ecuación representa una onda de cualquier forma avanzando a la derecha. Para obtener una forma particular debemos especificar exactamente cual es la función  $f$ . Es claro que si quisieramos representar una onda que se desplaza hacia la izquierda escribiríamos

$$y = f(x + ct) \quad (\text{F.3})$$

a esta clase ondas que se desplazan en una dirección o en otra les llamamos ondas viajeras. En una onda viajera cada partícula vibra con la misma amplitud y tienen la misma frecuencia.

Como sabemos, para muchas clases de ondas dos o más ondas pueden atravesar el mismo espacio independientemente una de otra. El hecho de que las ondas actúen independientemente una de otra, significa que el movimiento de cualquier partícula en un momento dado es simplemente la suma de los movimientos que le daran las ondas individuales. Este proceso de suma de vectores de las elongaciones solas se llama superposición.

La importancia del principio de superposición estriba en el hecho de que permite analizar un movimiento ondulatorio complicado descomponiéndolo en una combinación de ondas sencillas. Cuando se superponen dos ondas con la misma frecuencia que viajan en sentidos contrarios se presenta una onda estacionaria, donde cualquier partícula de la membrana ejecuta un movimiento armónico simple conforme transcurre el tiempo y todas las partículas vibran con la misma frecuencia.

# Bibliografía

- [1] M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, no. v. 55, n.º 1972 in Applied mathematics series, U.S. Govt. Print. Off., 1964.
- [2] G. ARFKEN AND H. WEBER, *Mathematical methods for physicists*, Elsevier, 2005.
- [3] N. ASMAR, *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Prentice Hall, 2005.
- [4] N. ASMAR AND G. JONES, *Applied complex analysis with partial differential equations*, Prentice Hall, 2002.
- [5] M. BRAUN AND I. BRIBIESCA, *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.
- [6] R. BURDEN AND J. FAIRES, *Análisis numérico*, Thomson Learning, 2001.
- [7] W. ELMORE, W. ELMORE, AND M. HEALD, *Physics of waves*, Dover books on physics and chemistry, Dover Publications, 1985.
- [8] D. ETTER, *Solución de problemas de ingeniería con MATLAB*, Prentice Hall, 1998.
- [9] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON, AND M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics: Mainly mechanics, radiation, and heat*, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, 1965.
- [10] A. GRAY, G. MATHEWS, AND T. MACROBERT, *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*, (Dover Books on intermediate and advanced mathematics), Dover Publications, 1966.
- [11] R. HABERMAN, *Applied partial differential equations: with Fourier series and boundary value problems*, Pearson Prentice Hall, 2004.
- [12] K. HOWELL, *Principles of Fourier analysis*, Studies in advanced mathematics, Chapman & Hall/CRC, 2001.

- [13] Y. N. SKIBA, *Spectral approximation in the numerical stability study of nondivergent viscous flows on a sphere*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 14 (1998), pp. 143–157.
- [14] Y. N. SKIBA, *On the normal mode instability of harmonic waves on a sphere*, Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, 92 (2000), pp. 115–127.
- [15] Y. N. SKIBA, *Introducción a los métodos numéricos*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2001.
- [16] Y. N. SKIBA, *On the spectral problem in the linear stability study of flows on a sphere*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 270 (2002), pp. 165 – 180.
- [17] Y. N. SKIBA, *Métodos y esquemas numéricos: Un análisis computacional*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.
- [18] Y. N. SKIBA, *Linear instability of ideal flows on a sphere*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 32 (2009), pp. 284–306.