UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE PSICOLOGIA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

Estudio del Desarrollo de las Competencias Matemáticas en Niños Preescolares: una Perspectiva Sociocultural

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN PSICOLOGÍA

P R E S E N T A:

DIAZ MENDEZ LILIANA ARELI

DIRECTOR DE TESIS:

MTRO. JAVIER ALATORRE RICO

ASESORA: DRA. GEORGINA DELGADO CERVANTES

® Facultad de Psicología

MÉXICO, D.F. FEBRERO, 2012.

Agradecimientos:

Agradezco a *Agustín Rodríguez,* por llegar a mi camino, por tu complicidad y por querer compartir tu vida conmigo. Te amo.

A *mis padres*, por todo el apoyo y educación que me han brindado durante toda mi vida.

A *mis hermanos;* Adriana y Eva por las grandes experiencias compartidas y a Israel por el gran apoyo y comprensión que me ha brindado.

A *mis niños* por brindarme su cariño.

Al profesor *Javier Alatorre Rico* por confiar en mi y apoyarme hasta el final.

A *Ileana y Karel* por su apoyo incondicional y su amistad única.

A mi amiga *Amanda* por su amistad sincera de años.

A la profesora *Georgina Delgado y a mis sinodales* por sus francas opiniones para mejorar.

A todas las *maestras del CENDI* "Granada" por los momentos y experiencias vividas.

A todos mis amigos y maestros que han influido en mi carrera profesional.

A la Facultad de Psicología y a la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de formarme profesionalmente.

INDICE

ÍNDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Resumen

Debido a la problemática educativa, con respecto al bajo desempeño de aprendizaje sobre las matemáticas en los alumnos mexicanos, (la cual se refleja en las evaluaciones tanto nacionales como internacionales). El presente estudio tiene como propósito principal entender y describir el surgimiento y desarrollo de las competencias matemáticas, que constituyen formas de pensar particulares en los niños preescolares; dentro de entornos complejos de aprendizaje que descansan en las premisas principales de la perspectiva constructivista socio-cultural propuesta por Lev. S. Vygotsky.

Este estudio tiene un diseño mixto, con un componente cuantitativo y uno cualitativo. En donde el primer componente consta de dos condiciones: grupo de comparación e intervención y tres fases: evaluación inicial, programa de intervención y evaluación final. El componente cualitativo es de corte observacional participativo, con una metodología etnográfica, se utilizó la observación participante que consistió en dos formas o dos aspectos, por una parte se realizó la observación participante dentro del aula de clases y por otro lado se realizó fuera del aula. Participaron un total de 136 niños/as, con edades de 3 a 7 años, pertenecientes a Centros de Desarrollo Infantil públicos del Distrito Federal, de los cuales 58 correspondían al Centro de Intervención “Granada” y 78 a los Centros de Comparación.

Los resultados cuantitativos muestran diferencias significativas en el desempeño de los Centros de intervención y comparación; de esta manera se obtuvo un efecto positivo sobre el desarrollo de pensamiento matemático en los niños expuestos a la intervención, logrando el desarrollo de capacidades de razonamiento numérico dentro de situaciones contextualizadas.

Por otro lado, los resultados cualitativos muestran la evolución del razonamiento numérico en general de los preescolares, así como el desarrollo cualitativo de las competencias matemáticas desde sus niveles más insipientes hasta la obtención de una competencia numérica, mostrando que al insertar a los preescolares a ambientes complejos los niños son capaces de usar el conocimiento matemático a través de acciones particulares que constituyen a la actividad matemática.

Palabra clave: Entornos complejos de aprendizaje, competencias matemáticas, nivel preescolar, perspectiva socio-cultural, razonamiento numérico.

Introducción

El presente estudio tiene el objetivo de entender y describir el surgimiento y desarrollo de competencias matemáticas en niños preescolares. Cabe mencionar que éste se deriva del proyecto “Entornos de aprendizaje en educación preescolar”, el cuál tiene como objetivo el fomentar y desarrollar capacidades intelectuales o capacidades de razonamiento superior, en tres áreas de conocimiento (pensamiento matemático, lectoescritura y ciencias o conocimiento del medio). En este caso, este estudio se enfoca en el desarrollo de competencias matemáticas en preescolar

En primer lugar se presenta el análisis de las evaluaciones tanto nacionales como internacionales que presentan datos relevantes sobre el bajo desempeño de aprendizaje sobre las matemáticas; estás evaluaciones revelan que los alumnos durante su edad escolar (de 3 a 15 años), no logran adquirir los conocimientos curriculares educativos, ni mucho menos son capaces de usarlos, en situaciones extraescolares. En consecuencia, la formación escolar vigente no logra desarrollar plenamente en los estudiantes las habilidades, conocimientos e incluso capacidades que les permitan resolver problemas en los espacios extraescolares (de la vida cotidiana, pública y laboral)

En el segundo apartado, se presentan las premisas socioculturales apoyando la idea de que las capacidades intelectuales o las capacidades cognitivas complejas como el razonamiento numérico en la solución de problemas y en la toma de decisiones, se originan y desarrollan a partir de la participación de los individuos en actividades culturalmente construidas, y del uso de instrumentos o sistemas culturales con el apoyo de una persona más experimentada. También, en éste apartado se presentan algunas de las investigaciones empíricas que sustentan los elementos socioculturales que favorecen el desarrollo de las competencias matemáticas.

En el tercer apartado, se presenta la metodología del estudio, la cual posee un diseño mixto con un componente cuantitativo y uno cualitativo. Se describen las decisiones metodológicas y las actividades que se realizaron para la toma de datos.

Por último, se presentan los análisis y resultados del presente estudio, por una parte se presentan los resultados del componente cuantitativo, donde se menciona el impacto que se obtuvo con el programa de intervención en el desarrollo de competencias matemáticas de los preescolares. Por otro lado, se presentan los resultados cualitativos, los cuales muestran el desarrollo de las competencias matemáticas de los preescolares, desde los niveles más básicos y sencillos, hasta los niveles donde la competencia alcanza su plenitud en esta población. Estos muestran cómo es que los niños construyen y usan el conocimiento matemático para dar solución a actividades problemáticas.

1. Situación actual del aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Básica

Uno de los problemas educativos que atraviesa actualmente México y el mundo en general dentro del plano educativo, es el bajo nivel de aprendizaje que se alcanza en matemáticas; y esto resulta relevante ya que el aprendizaje de las matemáticas tiene un papel esencial tanto en la vida escolar como en la vida social, pues el conocimiento de las matemáticas es un instrumento indispensable para actuar en nuestra sociedad, es decir para contar objetos, para comprar, viajar, cocinar, gestionar la economía doméstica, realizar cálculos aritméticos, es decir, para participar en las actividades sociales en donde se requiere la solución de problemas que descansan en el uso de las matemáticas. En este sentido, la educación debe de respaldar esta necesidad, formando individuos con formas de pensar matemáticamente.

Para entender la naturaleza del bajo desempeño matemático, es necesario observar la situación actual respecto al aprendizaje de este campo en la educación básica, por medio de las evaluaciones nacionales e internacionales que evalúan el aprendizaje de las matemáticas en México y se encuentran disponibles para impulsar mejoras en el sistema educativo.

1.1 Evidencias del bajo rendimiento en matemáticas

El bajo desempeño que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas es mostrado por evaluaciones nacionales e internacionales, como la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), el Examen de la Calidad y el Logro Educativo (EXCALE) y el Programa Internacional para la Evaluación de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés), las cuales evalúan desde la adquisición de conocimientos curriculares básicos, la aplicación de las matemáticas para resolver problemas escolares hasta las competencias matemáticas para resolver problemas extraescolares.

Conocimientos curriculares

Dentro de la evaluación que se realiza para valorar el rendimiento académico de los estudiantes mexicanos dentro del campo de matemáticas (contenidos establecidos en los planes y programas de estudios oficiales vigentes de la SEP) a nivel primaria, un 77.7% (6 millones 634 mil) estudiantes obtuvieron un desempeño de “insuficiente a elemental”, al igual que en el caso de los jóvenes evaluados en secundaria, un 94.4% de ellos (un millón 520 mil alumnos) obtuvieron un desempeño “insuficiente y elemental”, mostrando que éstos niveles de rendimiento son insipientes y muy básicos. Esto significa, que los alumnos en estos niveles sólo son capaces de resolver problemas en donde la tarea se presenta directamente; los estudiantes pueden reconocer conceptos simples y resolver ejercicios sencillos sin una problemática detrás, además, efectúan operaciones aritméticas básicas con números enteros y traducen del lenguaje común al algebraico, así como resuelven problemas en los que se requiere identificar figuras planas y tridimensionales (SEP 2010).

En contraste con esto, lo que se esperaría es que los alumnos no sólo fueran capaces de realizar operaciones sencillas sino que resuelvan problemas que involucran más de un procedimiento y sobre todo que ésta resolución se relacione con una problemática real. Además, se esperaría que realicen operaciones aritméticas complejas para resolver problemas mixtos, también que los alumnos analicen las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural y resuelvan los sistemas de ecuaciones que las representan, identifiquen funciones a partir de sus gráficas para estimar el comportamiento de un fenómeno (SEP 2010).

De acuerdo a lo anterior podemos afirmar que los alumnos mexicanos dominan una minoría de habilidades cognitivas del grado evaluado, es decir, no adquieren los conocimientos matemáticos curriculares esperados en los programas de estudios oficiales, ya que la mayoría de los alumnos llegan a la sola identificación, reconocimiento y comprensión de algunos principios del sistema matemático.

Aplicación de conocimientos

Al analizar los resultados obtenidos por la prueba de EXCALE, en el campo formativo de las matemáticas, los alumnos de tercero de preescolar se ubican en un nivel básico, es decir, sólo son capaces de utilizar números para representar cantidades menores de siete; contar colecciones de objetos hasta treinta; comparar colecciones de objetos y establecer relaciones de igualdad y desigualdad; registrar la cantidad de elementos en tablas y gráficas con ayudas como categorías establecidas y ejemplos; identificar en tablas o gráficas la colección en la que hay más o hay menos elementos; identificar la colección faltante en una serie de colecciones con patrón de crecimiento n + 1; y construir la colección que sigue en una serie de colecciones con patrón de crecimiento n + 1 (INEE, 2008a).

En el mismo sentido, pero en relación con el aspecto de Forma, Espacio y Medida, los preescolares sólo son capaces de identificar semejanzas entre un cuerpo geométrico y un objeto del entorno; identificar posiciones de objetos respecto a otros objetos, en una representación gráfica; comparar de manera perceptual la longitud de objetos: más corto que…, más largo que; resolver problemas que impliquen estimar longitudes; y distinguir el instrumento apropiado para medir el peso (INEE, 2008a).

A diferencia de esto, se esperaría que en relación con el aspecto de Número, los alumnos sean capaces de utilizar números para representar cantidades hasta veinte. En relación con el aspecto de Forma, Espacio y Medida, se esperaría que las alumnas y los alumnos sean capaces de dibujar trayectos a partir de puntos de referencia espaciales que incluyen direccionalidad desde, hacia, hasta, etc., y ubicar los días de la semana a partir de las actividades que realizan (INEE, 2008a).

En lo que respecta a los alumnos de secundaria, el 52% de los estudiantes se ubican en el nivel por debajo del básico, esto quiere decir, que leen y escriben números naturales y establecen relaciones de orden entre ellos; resuelven problemas aditivos que implican una sola operación con números naturales, enteros, decimales o fraccionarios, así como resuelven problemas multiplicativos con números naturales. Asimismo, identifican situaciones de proporcionalidad directa y establecen relaciones entre una tabla de valores y su gráfica en funciones lineales o cuadráticas. Adicionalmente, identifican figuras o cuerpos geométricos a partir de sus elementos o características. Calculan el perímetro y el área de figuras básicas (triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares). Identifican la moda y la media en un conjunto de datos y finalmente, estiman y comparan la probabilidad de eventos simples (INEE, 2006a).

Se esperaría entonces, que los estudiantes de secundaria resuelvan problemas que implican potenciación y radicación con números naturales o decimales, resuelvan problemas de reparto proporcional y de proporcionalidad inversa, dividan y factorizen polinomios. Modelen problemas mediante ecuaciones de segundo grado, establezcan relaciones entre todo tipo de representaciones: tabulares, gráficas y algebraicas de una función lineal o cuadrática; también que resuelvan problemas que implican el cálculo del área del círculo, así como del área lateral y volumen de cuerpos geométricos; utilicen propiedades o teoremas sencillos para resolver problemas geométricos o de medición (por ejemplo, las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras). Reconozcan y realicen transformaciones o movimientos en el plano (simetría, rotación, traslación) para la resolución de problemas de construcción, de medida o de escala. Infieran información a partir de datos presentados en una tabla o en una gráfica; y finalmente, resuelvan problemas de probabilidad aplicando la regla de la suma o del producto. Sin embargo, solamente el 19% de los alumnos alcanza el nivel *Medio*; y sólo 2% alcanza el nivel *Avanzado*, siendo estos dos últimos los que se consideran deseables (INEE, 2008a).

Por lo anterior, podemos decir que los alumnos no son capaces de usar los conocimientos del currículo, habilidades y conocimientos que adquieren al exponerse a las experiencias de aprendizaje que se formalizan en el currículo.

Competencia matemática.

En cuanto a los resultados obtenidos por los estudiantes de 15 años, y con relación a la capacidad que ellos tienen para aplicar las matemáticas al mundo real y, de ese modo, adentrarse en la utilización de las mismas para satisfacer sus necesidades. La mayoría de los alumnos mexicanos se ubican en un nivel 1, es decir, los estudiantes logran responder a preguntas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas; son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas; y pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados (PISA, 2009).

Sin embargo, se esperaría que los estudiantes sepan formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos; puedan relacionar diferentes fuentes de información y representaciones, y traducirlas de una manera flexible; que posean un pensamiento y razonamiento matemático avanzado; puedan aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas formales y simbólicas, y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas; puedan formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus hallazgos, argumentos y a su adecuación a las situaciones originales (PISA, 2009).

Los resultados anteriores no indican que los alumnos no posean habilidades matemáticas, pero si evidencia que la mayoría de estos estudiantes probablemente tienen serias dificultades para usar las matemáticas como herramienta para beneficiarse de nuevas oportunidades educativas y de aprendizaje a lo largo de la vida. Corriendo entonces, un alto riesgo de enfrentar dificultades en su paso inicial de la educación al trabajo.

Al analizar de manera general los resultados de las pruebas mencionadas anteriormente, se puede dar por entendido que existe un problema en la apropiación y uso de las matemáticas. Por una parte, los estudiantes mexicanos no adquieren los conocimientos del currículo nacional establecido, lo cual trae problemas consigo, debido a que los alumnos no sólo no adquieren los conocimientos sino que no les es posible aplicarlos para resolver problemas escolares; y en consecuencia no son competentes para dar solución a problemas que ocurren en su vida diaria. Por tales motivos, es de esperarse que existan riesgos de rezago y fracaso escolar para seguir con los siguientes niveles educativos.

El bajo rendimiento escolar conlleva a la deserción educativa.

Los sistemas educacionales de buena parte de los países de Latinoamérica comparten en mayor o menor medida los siguientes rasgos: insuficiente cobertura de la educación preescolar, elevado acceso al ciclo básico, y escasa capacidad de retención tanto en el nivel primario como en el secundario. Así, la repetición y el retraso escolar (fenómenos que con gran frecuencia anteceden a la deserción escolar) unidos a un bajo nivel de aprendizaje de los contenidos básicos de la enseñanza, conspiran contra el aprovechamiento y potencial de los niños y niñas desde temprana edad. Sus efectos negativos se acumulan a lo largo del ciclo escolar, incidiendo de manera muy desigual en las oportunidades de bienestar, sobre todo entre los sectores más pobres (Espíndola y León, 2002).

La deserción escolar genera elevados costos sociales y privados. Los primeros no son fáciles de estimar, pero entre ellos se mencionan los que derivan de disponer de una fuerza de trabajo menos competente y más difícil de calificar, cuando las personas no han alcanzado ciertos niveles mínimos de educación para aprovechar los beneficios de programas de entrenamiento ofrecidos por el Estado o por las empresas, y cuya manifestación extrema es el analfabetismo (Espíndola y León, 2002).

Según la UNESCO, el fracaso escolar está referido a todo aquel sujeto en situación de aprendizaje o grupo de sujetos que no alcanzan con suficiencia los objetivos educativos programados propuestos como metas, y dentro de un establecimiento de educación formal. Estos objetivos pueden estar referidos a alguna área específica del curriculum, estar en relación a un periodo de tiempo o puede referirse a todas las áreas del curriculum y en un periodo escolar determinado.

En México, con la información disponible en el 2004, se registró una tasa de deserción escolar promedio de 1.4% en primaria, pero con desigualdades regionales marcadas: en el Distrito Federal prácticamente esta problemática no existe, pero en Chiapas, Guerrero, Chihuahua, Oaxaca y Veracruz las tasas duplican a la media en el país. En el caso de la secundaria, la deserción es mayor, pues el promedio nacional es de 7.4%, y las tasas más elevadas las presentaron para el ciclo 2004/2005 en Guerrero, Michoacán y Jalisco (INEGI, 2005).

Asociado a la deserción escolar, en México hay altos porcentajes de reprobación y repetición de grados el porcentaje de reprobación en primaria es de 4.1 % (490 mil 492 menores repiten el ciclo); en secundaria de 17.6 % (un millón 33 mil 876 alumnos reprobados) y 37.7% en bachillerato (un millón 239 mil 432 alumnos) (INEGI, 2005).

Asimismo el INEGI destaca que en 2005, para la educación primaria se registró que el 9.1% de estudiantes que acuden a la escuela tienen una edad mayor al nivel escolar que cursan, es decir, alumnos que han repetido al menos una vez o que rebasan en más de un año el ciclo escolar que correspondería a su edad cronológica. Esta característica es mayor para la secundaria, pues en 2005 el total de alumnos con extra edad grave fue de 10.8 %.

Otro desafío es el analfabetismo, pues de acuerdo con el Segundo Conteo de Población del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) en 2005, 8.4% de la población mayor de 15 años era analfabeta, esto es, 1 millón 622 mil 710 personas que no saben, como mínimo, leer y escribir un recado.

Según el Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (Coneval), en ese mismo año, 5.29% de la población de seis a 14 años no asistía a la escuela (un millón 21 mil 921), y 45.98% de los mayores de 15 años contaba con educación básica incompleta (alrededor de 32 millones 927 mil 787 personas) (INEGI, 2005).

Reimers (citado en Guevara y cols. 2008) expone que uno de cada tres niños que se inscriben en primer grado, fracasa justo cuando inicia su vida escolar, que muchos de ellos no tienen ningún tipo de educación preescolar y muchos de sus maestros no han sido preparados para tratar sus problemas específicos, así la repetición escolar es desproporcionadamente alta.

Por lo tanto, uno de los problemas clave que provocan el porcentaje tan alto de la deserción escolar tanto en primaria como en secundaria, es el bajo rendimiento escolar que tienen los educandos. Poniendo en alerta un punto de partida para lograr un aumento en el rendimiento educativo, para lograr disminuir los índices de deserción en el país ya que es uno de los problemas drásticos que acabar en la Educación de nuestro país: México.

Reforma Integral de la Educación Básica.

Ante las aceleradas y profundas transformaciones en todos los ámbitos de la sociedad actual y sobre todo ante el bajo desempeño y problemas educativos que posee el país, como los que se mencionaron anteriormente, surge la necesidad de diseñar y llevar a la práctica reformas educativas que en este caso, el gobierno mexicano ya ha planteado para proponer una mejor educación. Así es como surge la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB).

La RIEB, plantea 5 líneas estratégicas de acción (SEP, 2009a):

1. Articulación curricular de la educación básica.- Implica integrar los niveles preescolar, primaria y secundaria, como un trayecto formativo consistente con las correspondientes interrelaciones entre conocimientos específicos, las habilidades y las competencias.
2. Nuevo Federalismo Educativo.- Se refiere a que las dificultades del siglo XXI demandan que el Sistema Educativo Nacional actual presente

mayor interacción entre todos sus agentes y una mayor gestión institucional.

3. Empleo de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Implica impulsar el desarrollo y utilización de TIC en el sistema educativo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, ampliar sus competencias para la vida y favorecer su inserción en la sociedad del conocimiento.
4. Sistema Nacional de Formación Continua de Maestros en Activo.- Busca modificar la forma en que se asume la capacitación profesional de los profesores en México, articulando una propuesta coherente que responda a las necesidades de formación de los profesores mexicanos.
5. Pacto por el Fortalecimiento de la Escuela Pública.- Se considera la necesidad de revisar los compromisos institucionales adoptados a partir de 1992, expresados en el Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica y en la Ley General de Educación de 1993.

La Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) iniciada desde el 2004 con preescolar, en 2006 con secundaria y en el 2009 con primaria, considera los planteamientos establecidos en los acuerdos internacionales que México ha firmado y los traduce al plano nacional, con el propósito de favorecer el desarrollo de competencias en los alumnos que cursan la Educación Básica con el fin de responder a las expectativas de la sociedad a cerca de la educación (SEP 2009a).

Para esto, la RIEB ha planteado *sus tres líneas estratégicas: a*rticulación entre los niveles que conforman la educación básica, es decir la Educación Básica se ha ido ampliando de manera progresiva hasta alcanzar en nuestro país 12 años (continuidad entre la educación preescolar, primaria y secundaria); énfasis en temas relevantes para la sociedad actual y en la formación para la vida, ya que la Educación Básica debe formar en los alumnos las competencias que requieren para incorporarse con éxito en la sociedad del conocimiento, lo que significa mejorar sus capacidades lectoras, matemáticas, científicas y tecnológicas hacia niveles de alta complejidad, además de formar en los niños, las competencias para saber conocer, saber hacer y aplicar el conocimiento; saber convivir en una sociedad democrática y saber ser hacia la autorrealización personal (SEP 2009a).

Además la RIEB le otorga al preescolar la base de toda educación obligatoria, que debe contribuir a la formación integral, pero asume que para lograr este propósito el Jardín de Niños debe garantizar a los pequeños, su participación en experiencias educativas que les permitan desarrollar, de manera prioritaria, sus competencias afectivas, sociales y cognitivas (SEP 2009a).

Para avanzar en la articulación de la Educación Básica, México ha establecido un perfil de egreso del estudiante y constituye un referente común. El perfil de egreso, está integrado por un conjunto de rasgos que los estudiantes habrán de mostrar al término de la Educación Básica, como garantía de que podrán desenvolverse en cualquier ámbito y desarrollar competencias para la vida (SEP 2009a).

Por otra parte, organismos internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), el Programa Internacional para la Evaluación de los Alumnos de la propia OCDE (PISA) y la Comisión Europea, han centrado su mirada sobre la enseñanza y aprendizaje de las competencias básicas como un medio para mejorar la calidad y la equidad de los sistemas educativos.

Desde la perspectiva de la OCDE los individuos requieren un mayor dominio de ciertas destrezas y conocimientos para alcanzar las metas debido a que las sociedades actuales demandan que los individuos se enfrenten a situaciones más complejas en muchas áreas de su vida, lo cual se traduce en la necesidad de desarrollar competencias.

Para este organismo, ser competente significa que el educando debe ser capaz de “expresar e interpretar” conceptos, pensamientos, hechos y opiniones (escuchar, leer, hablar y escribir) e interactuar lingüísticamente de una manera adecuada y creativa en todos los posibles contextos sociales y culturales, como la educación, la vida privada y profesional, y el ocio.

Según la Reforma Integral de la Educación Básica una **competencia** implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes). En otras palabras, la manifestación de una competencia revela la puesta en juego de conocimientos, habilidades, actitudes y valores para el logro de propósitos en contextos y situaciones diversas y es por esta razón que se utiliza el concepto de "movilizar conocimientos" (Perrenoud, 1999, citado en SEP 2009b) pero además desde ésta posición no solo es la movilización de movimientos si no la integración de éstos conocimientos.

En el Programa de Educación Preescolar (PEP 2004) a diferencia de un programa que establece temas generales como contenidos educativos, en torno a los cuales se organiza la enseñanza y se acotan los conocimientos que los alumnos han de adquirir, este programa está centrado en competencias (SEP, 2004).

Para el **PEP** una **competencia** es un conjunto de capacidades que incluye conocimientos, actitudes, habilidades y destrezas que una persona logra mediante procesos de aprendizaje y que se manifiestan en su desempeño en situaciones y contextos diversos (SEP, 2004).

1.2 Concepción de Competencia desde las Matemáticas

Una de las características esenciales de la Reforma Integral, se refiere a la adopción de un modelo basado en competencias, para esto es importante conocer ésta concepción. En el caso de las matemáticas este enfoque permite mostrar que una **competencia matemática** no sólo es el aprendizaje del conocimiento matemático, si no el uso de éste conocimiento en la resolución de problemas reales. En la escuela tradicional bastaba con memorizar algún tipo de conocimiento, pero en la actualidad y con la nueva reforma no basta esto, lo que se busca es que los alumnos usen las matemáticas como una herramienta para la vida, ya que los conocimientos que la vida nos exige van más allá de lo que preguntan los ejercicios de los libros de texto.

El proyecto PISA define a la **competencia matemática** como la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados, utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprendido y reflexivo ante la necesidad de la cultura o sociedad que continuamente se desarrolla. La competencia matemática para PISA, no se reduce al dominio de la terminología, los datos y los procedimientos matemáticos ni a la habilidad para realizar diversas operaciones y poner en práctica determinados métodos; **la competencia matemática** supone una combinación de estos elementos con objeto de responder a exigencias que se plantean en contextos reales. *Implica poseer la habilidad para plantear, formular e interpretar problemas mediante las Matemáticas en una variedad de situaciones y contextos que van desde lo sencillo a lo complejo* (INNE, 2008b).

Como menciona Freudenthal (1983 citado en OCDE 2003) nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental. Y es aquí donde las matemáticas funcionan como una herramienta para resolver los problemas que presenta el mundo físico, social y mental.

El desarrollo de la competencia matemática, en definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse con un lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático para dar mejor respuestas a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

En breve, la competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. El término competencia matemática enfatiza el uso funcional del conocimiento matemático en numerosas y diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda en diferentes situaciones del mundo.

Por el lado de la enseñanza, diversos autores proponen que los estudiantes deben tener la oportunidad de construir su propio conocimiento matemático sobre la base de un proceso de aprendizaje, donde este aprendizaje sea de tipo activo, que prepare al alumnado para saber ser, para saber hacer y para saber aplicar el conocimiento. Por ello el desarrollo del enfoque basado en competencias en la educación se alcanzará en la medida en que el pensamiento matemático se aplique de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones extraescolares. Comprendiendo que la educación matemática no implica acumular conocimientos (fórmulas, símbolos, gráficas, etc.) sino poder utilizarlos en la resolución de situaciones problemáticas, transfiriendo y resignificando lo aprendido (González y Weinstein, 2001).

Respecto a este punto, algunos autores han establecido que una **competencia matemática** se refiere a *la disposición favorable y de progresiva seguridad en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral, identificando las ideas fundamentales, juzgando la lógica y la validez de los argumentos e informaciones que se presentan* (Álvarez, Pérez y Suárez 2008).

Por su parte, otros autores han dicho que la competencia es la capacidad de un individuo de identificar y comprender el papel de las Matemáticas en el mundo actual, emitir juicios bien fundamentados, así como utilizarlas y comprometerse con ellas de manera que puedan satisfacer las necesidades de la vida del sujeto como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

Esta concepción de competencia matemática resalta que desde el enfoque de las competencias, las matemáticas se refieren a los *procesos intelectuales* que subyacen al uso de los conocimientos y habilidades matemáticas en situaciones extraescolares, en este sentido, el término competencia en lo que se refiere a las matemáticas involucra el uso funcional del conocimiento matemático en situaciones diversas, de forma reflexiva y basada en una comprensión profunda. La competencia matemática implica la combinación e integración creativa de conceptos, datos, procedimientos matemáticos, destrezas para realizar operaciones y cumplir con determinados métodos en respuesta a las condiciones y problemas que se le puedan presentar al sujeto en su entorno natural, social y cultural (Alatorre, 2008).

En definitiva, este enfoque permite responder a los objetivos educativos curriculares por medio del enfoque basado en competencias, en donde se requiere que los estudiantes se atrevan a pensar con ideas matemáticas y que además las empleen en todos los contextos extraescolares.

Competencias Matemáticas desde la Educación Preescolar.

Retomando las condiciones de la RIEB, vemos que la SEP plantea un Programa de Educación Preescolar nacional que será de observancia en general en todos los planteles y las modalidades en que se imparte educación preescolar en el país, y de carácter obligatorio, convirtiéndose en el marco institucional de este estudio, pues se retoman las competencias matemáticas que éste plantea.

El nuevo programa se editó en agosto de 2004 y se ha distribuido entre el personal docente y directivo en todas las entidades del país. El proceso de reforma a la educación preescolar se emprendió mediante acciones de exploración e intercambio con educadoras y autoridades educativas estatales para conocer los rasgos que caracterizan a este servicio educativo en el país (SEP, 2004).

El programa tiene un carácter abierto pues la naturaleza de los procesos de desarrollo y aprendizaje de las niñas y los niños menores de seis años hace sumamente difícil y con frecuencia arbitrario establecer una secuencia detallada de metas especificas, situaciones de aprendizaje o tópicos de enseñanza; por esta razón, el programa no define una secuencia de actividades o situaciones que deban realizarse sucesivamente con los niños.

El PEP (2004) plantea la idea de que las instituciones de educación preescolar deben fortalecerse para procurar el cuidado y la educación de los pequeños tomando en cuenta los cambios sociales, económicos y culturales vividos en nuestro país y que impactan la vida de la población infantil. Una de las metas que establece el Programa Nacional de Educación es contar con una nueva propuesta pedagógica para mejorar la calidad y asegurar la equidad en la atención educativa que se brinda a las niñas y a los niños de tres a cinco años de edad (SEP, 2004).

Los propósitos fundamentales definen la misión de la educación preescolar, y de ellos derivan las competencias que se espera logren los alumnos en el transcurso de la educación. Una vez definidas las competencias en preescolar que implica un conjunto de propósitos fundamentales, se ha procedido a agruparlas en los siguientes campos formativos (ver tabla 1):

Tabla 1. Campos formativos (organización).

Campos Formativos	Aspectos en los que se organiza
Desarrollo personal y social.	Identidad personal y autonomía. Relaciones interpersonales.
Lenguaje y comunicación.	Lenguaje oral. Lenguaje escrito.
Pensamiento matemático	Número. Forma, espacio y medida.
Exploración y conocimiento del mundo.	Mundo natural. Cultura y vida social.
Expresión y apreciación artísticas.	Expresión y aprensión musical. Expresión corporación y apreciación de la danza. Expresión y apreciación plástica. Expresión dramática y apreciación teatral.
Desarrollo físico y salud.	Coordinación, fuerza y equilibrio. Promoción de la salud.

(SEP, Programa de Educación Preescolar, 2004).

Se espera que al término de la educación preescolar, los niños y niñas logren desplegar las competencias marcadas por el PEP (2004) dentro del preescolar, ya que éste debe de construir las bases solidas para la resolución de problemas matemáticos en la vida diaria y en los siguientes niveles educativos.

El estudio que se despliega en este trabajo, promueve del desarrollo de las competencias matemáticas en preescolar, por lo tanto dentro del marco institucional que rige al preescolar, el Campo Formativo de Pensamiento Matemático, se divide en dos aspectos relacionados con la construcción de nociones matemáticas básicas: número y forma, espacio y medida. A continuación se presentan las competencias del Campo de Pensamiento Matemático (ver tabla 2).

Tabla 2. Pensamiento Matemático: Competencias Matemáticas

Número	Forma, Espacio y Medida.
• Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo. • Plantea y resuelve problemas en situaciones variadas que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos. • Reúne información sobre criterios acordados, representa gráficamente dicha información y la interpreta. • Identifica regularidades en una secuencia a partir de criterios de repetición y crecimiento.	• Reconoce y nombra características de objetos, figuras y cuerpos geométricos. • Construye sistemas de referencia en relación a su ubicación espacial. • Utiliza unidades no convencionales para resolver problemas que implican medir magnitudes de longitud, capacidad, peso y tiempo. • Identifica para que sirven algunos instrumentos de medición.

(Programa de Educación Preescolar, 2004).

Se debe de tener presente los propósitos fundamentales señalados por el programa en lo que se refiere al Campo de Pensamiento Matemático los cuales son:

- Construyan nociones matemáticas a partir de situaciones que demanden el uso de sus conocimientos y sus capacidades para establecer relaciones de correspondencia, cantidad y ubicación entre objetos; para estimar y contar, para reconocer atributos y comparar.
- Desarrollen la capacidad para resolver problemas de manera creativa mediante situaciones de juego que impliquen la reflexión, la explicación y la búsqueda de soluciones a través de estrategias o procedimientos propios, y su comparación con los utilizados por otros.

2. La actividad para el surgimiento del pensamiento en los niños.

Las capacidades cognitivas complejas han sido objeto de múltiples análisis, y actualmente con los cambios curriculares en el mundo se ha puesto especial interés en entender las condiciones bajo las cuales los estudiantes pueden desarrollarlas para participar en actividades sociales de la vida cotidiana, pública, laboral y académica. El objetivo de este apartado se plantea por el interés de aclarar el origen y desarrollo de las capacidades cognitivas intelectuales, presentando como fundamento la importancia de la actividad para el surgimiento del pensamiento, partiendo de que existen posiciones teóricas que han contribuido al desarrollo de las capacidades intelectuales complejas. Dentro de éstas posiciones se encuentran la teoría de la actividad y la perspectiva sociocultural, donde se da especial importancia al papel de la interacción social y uso de los medios semióticos. Por lo tanto, estas posiciones teóricas ofrecen las herramientas para indagar y ulteriormente influir en el desarrollo de las formas de pensar y capacidades que los individuos necesitan para enfrentar los retos de la sociedad cada vez más industrializada y que requiere del uso de tecnología. Ahora partimos de la idea de que las Funciones Psicológicas Complejas, como el razonamiento, ya no se encuentran controladas por los estímulos del entorno**,** al contrario, son *autorreguladas,* ya que responden a *la creación y uso de estímulos artificiales o medios que se convierten en las causas inmediatas del comportamiento a través de su uso.* Estas capacidades humanas se hallan específicamente definidas:

> *"Por la situación psicológica nueva o modificada creada por los mismos seres humanos. La creación y uso de estímulos artificiales como medios auxiliares para el dominio de las propias reacciones que constituyen el fundamento de ésta nueva forma de determinación del comportamiento, que distingue las formas superiores de las formas elementales del comportamiento" (Wertsch, 1988).*

Además, las Capacidades Cognitivas Complejas o superiores pueden alcanzar la *realización consciente y la voluntariedad*, es decir, dominamos una función cognitiva compleja hasta el grado de su intelectualización. Estas capacidades también, surgen en la actividad social, no en la naturaleza del individuo. Como menciona Wertsch (1988), ésta concepción del control voluntario, la realización consciente y la naturaleza social de los procesos psicológicos superiores presuponen la existencia de herramientas psicológicas o signos, que pueden ser utilizados para controlar la actividad propia y de los demás, en tal sentido la presencia de estímulos creados, junto con estímulos dados, son la característica diferencial de la psicología humana.

Así partimos de la idea, que las capacidades intelectuales o las Capacidades Cognitivas Complejas como el razonamiento en la solución de problemas y en la toma de decisiones, se originan y desarrollan a partir de la participación en actividades y el uso de instrumentos o sistemas culturales con el apoyo o asistencia de una persona más experimentada.

Por lo tanto, los Procesos Cognitivos Complejos como resultado de la internalización de las relaciones sociales y sistemas culturales se aborda en los siguientes subcapítulos, en donde se parte de los elementos interdependientes que incluyen: actividad como condición determinante de las interacciones sociales y el uso de herramientas culturales.

2.1 La influencia de la Actividad en el surgimiento de las Capacidades Cognitivas Complejas

El contexto en el que el ser humano se desarrolla involucra una serie de relaciones en las que se entretejen los actos de las personas y el mundo social. Estas relaciones se hallan establecidas en los diversos escenarios de actividad social práctica en los que se organiza dicho contexto, los cuales van a tener un impacto psicológico en el desarrollo de la conciencia del individuo (Kirshner y Whitson, 1997 y Daniels, 2003).

El desarrollo individual se vislumbra desde el vínculo con lo social y cultural de la vida del ser humano. De esta forma, es imposible pensar en una separación entre el individuo y su entorno sociocultural pues la naturaleza de la interrelación que forman el individuo y el mundo social, es algo más que el poder pensar en dichos elementos de manera independiente (Wertsch, 1988).

Esta consideración tiene una consecuencia al querer entender el desarrollo individual y específicamente el surgimiento de capacidades intelectuales en el ser humano, pues resulta evidente la necesidad de plantearse una unidad que preserve la mutualidad del individuo con lo social y que permita mantener la esencia de los acontecimientos más que en la división de los mismos en elementos aislados que funcionan distinto a como lo hacen en su totalidad (Wertsch, 1988; Wertsch, Del Río y Álvarez, 1997).

En tal sentido, recurrir a la noción de actividad resulta oportuno ante la necesidad de entender las relaciones del individuo, sociedad y cultura, concretamente la influencia cultural y social sobre el desarrollo psicológico del ser humano, el cual surge y se establece en dichos sistemas organizados de acciones sobre los objetos culturales (Wertsch, 1988; Daniels, 2003).

La actividad entonces se ha constituido como una unidad que permite analizar el desarrollo de la conciencia dentro de la actividad social práctica. Es necesario considerarla además de las condiciones sociales y sistemas que son producidos dentro y a través de ella para entender éste impacto (Daniels, 2008).

Por lo tanto, es importante reconocer el carácter histórico e institucional de la actividad pues ésta última constituye el medio en donde ocurre la influencia de dichos procesos institucionales en la formación de capacidades cognitivas. Los factores institucionales sociales definen la actividad, pues ésta tiene lugar en lo colectivo, es ahí donde se crea y tiene funcionamiento en tanto que constituye un contexto situacional en el cual el sujeto se relaciona con el mundo social y los objetos del mismo, de esta manera la actividad tiene existencia únicamente en las relaciones sociales humanas, la cual está determinada por las formas y medios de interacción social y material (Leontiev, 1978). Es la sociedad quien crea y establece dichos fines de acuerdo a un contexto situacional e histórico determinado.

Las formas rutinarias de la interacción, de la acción sobre los objetos, del uso de herramientas específicas en una actividad llegan a institucionalizarse como reglas aceptadas, por lo cual trasciende al propio funcionamiento del humano como unidad individual y descansa en la actividad. De esta manera la estructura de los intercambios humanos posee fundamentos establecidos en las actividades a lo largo del tiempo y han permitido generar el carácter institucional de las mismas al establecerse interpretaciones realizadas por el ser humano (Rogoff, 1993).

La actividad siempre se encuentra en un proceso constante de cambio histórico, y los individuos que entran en una actividad institucionalizada, no necesariamente fueron sus creadores, de tal manera, que los individuos han heredado una institución establecida por sus antepasados (Rogoff, 1993). Consecuentemente por su carácter histórico las actividades institucionalizadas guardan una *estructura intencional*, sin embargo quienes ponen en práctica estas formas institucionales no necesariamente conocen las razones de esta estructura, pues muchas veces para ellos simplemente es como una forma de hacer las cosas.

Pero lo que brinda este carácter histórico, que no hay que perder de vista dentro de la actividad, es la justificación de que la institución sea de una forma y no de otra, pues precisamente guarda sus raíces en el momento que fue creada así como en el paso del tiempo (Rogoff, 1993; Wertsch, 1988). Esto es, las instituciones implican al individuo en la actividad de forma tal, que lo que se ha hecho con ella en lo colectivo y en el pasado, obliga a avanzar en una determinada dirección en el futuro.

Afinando lo anterior, la existencia humana y el nacimiento de nuevos individuos sucede en el entramado social-institucional de actividades que presentan una estructura y objetivos definidos, que requieren para su realización de instrumentos culturales específicos, la participación de los individuos tendrá sus resultados en el surgimiento y desarrollo de las capacidades cognitivas complejas que caracterizan a los seres humanos.

De tal manera se puede observar como la actividad influye sobre la formación del pensamiento, estos es, tanto de manera directa e indirecta. La primera es porque ayuda a darle el sentido a la meta, a las herramientas a utilizar, e indirectamente porque organiza las interacciones. Dado lo anterior se desprende que los individuos se ven en la necesidad de conocer y utilizar los artefactos, escenarios, reglas, objetivos y acciones pertenecientes de la actividad; los cuales son productos culturales, construidos por los humanos y que han adquirido algún significado en particular con el paso del tiempo para ser utilizados (Valsiner, 1984).

Examinando lo anterior, se puede concluir que **según la calidad de las actividades será la calidad del pensamiento** (la complejidad subsume la idea de lo contextualizado, el que sea “real hace que sea más fácil su entendimiento y por tanto auténtico). Además, se parte de la idea de que **las formas de pensar** que crea o adquiere cada individuo están **directamente influenciadas e incluso formadas por la propia organización de las actividades** en las que estos se encuentran inmersos.

Es importante comprender la naturaleza de la actividad y su influencia en el desarrollo de las Capacidades Cognitivas Complejas, ya que en los rasgos de la actividad descansa la influencia de los medios simbólicos y la interacción. La actividad humana es una actividad práctica y que cuenta con una dimensión interna o psicológica de la actividad, está conformado por aquellas acciones mentales, formadas mediante el proceso de internalización (Wertsch, 1979; Wertsch, 1988).

La actividad posee ciertas características por un lado su organización estructural y por otro lado su organización funcional como comunidad de práctica cultural.

En la estructura y organización de la actividad en el plano externo, se identifican los siguientes componentes que la integran: a) *el motivo*, esto es lo que impulsa a la actividad, es hacia donde el objetivo se dirige. b) *la meta,* o la representación del resultado de una acción y c) *las condiciones, o las circunstancias* bajo las cuales, las acciones en la actividad se llevan a cabo (Wertsch, 1979, 1988; Daniels 2003). En el mismo sentido, se pueden distinguir desde la Teoría de la Actividad tres tipos específicos de unidades, que son: *actividad, acción y operación*. Estos tipos de unidades constituyen los niveles de la estructura de la actividad (Wertsch, 1988).

Un punto importante a tomar en cuenta es que a pesar de que cada NIVEL unidad puede ser descrito de manera independiente, cada uno de ellos representa un sistema interconectado con el nivel anterior, cada una de ellas, guarda una relación constante de esta manera la actividad representa el motivo, las acciones a las metas u objetivos y las operaciones a las condiciones (Leontiev 1978, Daniels, 2003). Es decir, no es una estructura congelada ni jerárquica, más bien existe una transformación continua entre los tres niveles. Sin embargo, es importante mencionar la relativa independencia de las acciones, esto es una acción puede variar independientemente de la actividad (Wertsch, 1988; Wertsch, 1979). Una misma acción puede contribuir materialmente a la realización de diferentes actividades. Puede ser transferida desde una actividad a otra, revelando de esta forma, su relativa independencia (Wertsch, 1988).

El motivo hacia donde la actividad se dirige*.* La estructura de la actividad mantiene un sistema complejo que permite definir el grupo de posibles acciones que pueden utilizarse para realizarla, los sistemas simbólicos y materiales que se necesitan para llevar a cabo las acciones, esta misma estructura define también el grupo de individuos que ha de participar en ella, así como la división de responsabilidades en un grupo social para aumentar la eficacia en su realización (Daniels, 2003; 2008).

Una de las características importantes de dicha estructura es que surge una interpretación de la actividad (Wertsch, 1988). La interpretación que el individuo construye al momento de participar en una actividad particular, es la que guía la selección de sus acciones, es la que se construye en el individuo al momento de participar en una actividad particular, guiando la selección de sus acciones, la composición operacional de las mismas y determina el significado funcional que han de tener éstas (Daniels, 2003). De acuerdo con esto:

> *"…Los teóricos de la actividad sugirieron que la estructura del proceso cognitivo reflejaba la estructura externa de la actividad y (sus) operaciones. prácticamente la actividad llega a estar mediada más que por los significados semióticos" (Daniels, et al, 1996).*

Es aquí, dentro de este marco de estructura de actividad institucional social en donde ocurren los procesos psicológicos de los seres humanos, en estos contextos socioculturalmente definidos se da lugar al funcionamiento intelectual humano, cuando *la actividad permite establecer en el individuo un motivo que lo lleve a realizar dicho sistema de acciones* (Wertsch, 1988).

Sin embargo, nunca hay que perder de vista que las acciones juegan un rol diferente, el cual cambia en relación a la motivación y el sentido que guarda para el individuo, éstas serán determinadas por la actividad, en la cual se lleve a cabo, pues adquirirán un sentido particular dentro de cada actividad específica teniendo una interdependencia de acciones.

***El objetivo y sentido de la acción del individuo se establece a partir de una actividad*.** La acción aun cuando puede ser vista de manera simple nunca pierde su relación con todas las demás acciones dentro del sistema, pues el motivo de la actividad permite guardar el sentido de la realización de una acción particular; este sentido, hace que el individuo no realice de manera mecánica el acto, sino que le atribuya un significado funcional dentro del complejo de actividad de la cual es parte.

Las metas y objetivos permiten establecer las acciones que han de cumplirse con el propósito de alcanzar la finalidad que demanda la actividad en general (Daniels, 2003). De esta manera, una acción brinda al individuo un objetivo particular que ha de ser logrado para llevar a cabo el motivo de la actividad.

Las acciones ayudan al individuo a encontrar todas las relaciones específicas entre los medios y fines que se hallan implícitos en la actividad. El objetivo y sentido de la actividad permite descomponer de manera particular una serie de acciones que se tienen que realizar (Wertsch, 1988).

Condiciones bajo las cuales opera la acción del individuo, en la actividad. Si se considera que la acción está relacionada con un objetivo, las operaciones son las condiciones concretas bajo las cuales se llevan a cabo dichas acciones (Wertsch, 1988; Zinchenko y Gordon, en Wertsch, 1979; Daniels, 2003; 2008). Es decir, *la operación es la materialización de una acción*, pues ésta es orientada a un contexto espaciotemporal real en la actividad concreta que se está llevando a cabo.

Un objetivo se puede mantener constante pero las condiciones bajo las que se da cambian. En estos casos solo variaría la composición operativa de la acción (Wertsch, 1988). Una actividad socioculturalmente definida puede variar para el caso en la forma en que sus acciones pueden materializarse, es decir el cómo se lleven a cabo las operaciones, que se relacionan con las circunstancias, las condiciones bajo las cuales se lleven a cabo.

En pocas palabras, se podría decir que la operación es la composición técnica de la acción, la cual puede ser externalizada y formalizada por la interpretación que vaya guardando a lo largo del tiempo (Wertsch, 1988).

Considerando entonces, que el contexto donde se desenvuelve todo humano está constituido de actividades sociales, creadas por la misma sociedad y cultura en la que éste se encuentra, en donde según su sociedad, se precisa el *motivo* de una actividad particular, se determinan el *sistema acciones* y el conjunto de *operaciones* bajo las cuales, éstas serán llevadas a cabo. Necesariamente, para que cualquier individuo pueda desenvolverse en la actividad, éste requiere del entendimiento global y específico de todos y cada uno de los elementos tanto estructurales como funcionales de la misma.

Cuando el individuo comprende el contexto complejo de actividad e identifica el motivo y acciones que la conforman, así como las herramientas culturales que se requieren para llevar a cabo las acciones; entonces, la *interpretación* y *actuación* a posteriori se complejiza y transforma llegando a formar parte del razonamiento del individuo.

En resumen, **la estructura de la actividad llega a ser la estructura de la mente,** ya que la actividad en cualquier humano estructura la acción del individuo, pues la actividad es como un todo o una estructura que le da sentido a la acción del individuo, porque lo organiza; le dice cuando actuar, le dice como accionar, para qué actuar y con qué participar.

Una de las premisas principales a la que nos referimos señala que la estructura de la actividad echa a andar un entramado de mecanismos, que hacen que surjan las capacidades cognitivas complejas.

2.2 La influencia de la actividad en el funcionamiento de las herramientas culturales

Una de las ideas centrales que ha sido desarrollada desde la perspectiva sociocultural es la mediación. Dentro de las premisas principales de la teoría vigotskiana resalta el hecho de que la mente humana es de carácter simbólico, ya que, su surgimiento y funcionamiento se da a partir de la incorporación y dominio de los sistemas culturales (Wertsch, 1988; Daniels, 1996).

En tal sentido, resulta importante explicar cómo la apropiación de los sistemas simbólicos y herramientas culturales pueden fungir como medios de cambio cognitivo, para que los individuo participen en el mundo social, por lo que es importante entender la relación de la actividad con estos sistemas que participen con formación de la mente humana.

Primero, es oportuno distinguir la función de los medios semióticos, la cual va en dos sentidos uno como herramientas técnicas y otro como herramientas psicológicas. Una herramienta técnica es aquella que es independiente del individuo, su uso descansa en la actividad, sirve como herramienta para transformar los objetos dentro de ésta, por otro lado la herramienta psicológica es aquella que medía el pensamiento del individuo con la realidad externa (Wertsch, 1988, Daniels, 1996).

Retomando el primer sentido en tanto herramientas técnicas, Martí (2003) menciona que en la gran mayoría de las culturas, las actividades humanas se apoyan en diferentes sistemas simbólicos que existen no sólo como objetos físicos sino representativos, a los cuales llama Sistemas Externos de Representación*.* De acuerdo con esto, una cantidad importante de sistemas simbólicos y artefactos, corresponden a aquellos que requieren que su aprendizaje sea de manera institucionalizada como es el caso del sistema escrito, el sistema numérico o el sistema científico. Pero, ¿Qué tienen en común estos sistemas simbólicos? ¿Cuáles son sus características?

Sistemas simbólicos. Sin duda alguna, es importante explicar que un sistema simbólico puede ser definido como:

> "un conjunto de símbolos distintos, organizados y estructurados de acuerdo a ciertas reglas y principios que los relacionan con un dominio específico y en donde cada uno tiene su propia y única interpretación" (Jhonson-Laird, 1990).

Por su parte, Martí y pozo (Martí 2003 y Martí y Pozo, 2000) retomando la idea de que las realidades están organizadas en torno a determinadas propiedades formales (adjudica el término de "sistema") y de la idea de que constituyen objetos ostensivos observables (propone el término "externo") expone que los sistemas externos de representación tienen como característica decisiva su *propiedad dual* porque son objetos físicos, manipulables, pero también son objetos de conocimiento y representativos que remiten a otra realidad.

Los sistemas simbólicos son un tipo particular de representaciones que comparten ciertas características como: ser representaciones que existen como objetos independientes al sujeto que las produce; poseen cierta permanencia; son representaciones desplegadas en el espacio y son sistemas organizados y estructurados.

Sin embargo, estas mismas representaciones también se diferencian entre ellas por las siguientes características: lo que representan (lenguaje, cantidad, relaciones espaciales, música); por la naturaleza de sus componentes (marcas arbitrarias, marcas analógicas, combinación de ambas) y por las reglas internas que rigen sus relaciones (organización lineal, valor de posición, segmentación de las unidades).

A razón de esto, la serie de particularidades que los diferencian entre sí, hace que se constituyan como un sistema de signos representativo de un *dominio específico.* Tal como lo expone Martí (Martí, 2003 y Martí y Pozo, 2000) al describir los sistemas externos de representación, los más comunes dentro de las actividades de nuestra cultura son la escritura, notación numérica o las imágenes. Estos sistemas simbólicos son resultado de las necesidades humanas dentro de las actividades sociales, que evolucionan y se transforman día a día. En donde cada sistema tiene funciones y características correspondientes a un dominio específico de conocimiento.

El lenguaje es uno de los sistemas simbólicos más estudiado y destacados por su función primaria como instrumento de comunicación que posibilita el contacto social. Este es un sistema formado por un código de signos lingüísticos objetivado en palabras, y que varía sin límites precisos en los distintos grupos sociales ya que es una herencia puramente histórica del grupo humano y producto de un hábito socialmente mantenido durante largo tiempo. El lenguaje tiene una estructura determinada en términos gramáticos, sintácticos, semánticos y léxicos (Yule, 2007). Tomando como ejemplo esta última descripción, se puede decir que estos sistemas de representación son respectivamente objetivaciones culturales que han sido creadas y transformadas con el paso del tiempo, y a razón de las necesidades del medio en el que se desarrollan (Eco, 2007).

Artefactos. Así como se han desarrollado distintos sistemas simbólicos de representación producto de las actividades culturales y sociales. También a lo largo de nuestra historia y con el objetivo de facilitar la resolución de alguna tarea se han creado distintas herramientas específicas que constituyen objetivaciones de los sistemas simbólicos. Estas son referidas por Eco (2007) como concreciones que reflejan el uso de los sistemas simbólicos, por ejemplo, un reloj (instrumento que sirve para medir el tiempo) el cual descansa el uso del sistema numérico.

Algunos autores cuando se refieren a las objetivaciones como formas de mediación de las acciones humanas utilizan la palabra *"herramientas"* para referirse a la función indirecta de un objeto cualquiera, como medio para realizar una actividad (Vygotsky, 1979). Así mismo, en gran parte de la literatura se ha utilizado el término *"instrumento"*, como aquella herramienta creada y utilizada para un fin específico dentro de una actividad. No obstante, el término de instrumento es considerado por Cole (en Daniels, 2003; 2008) como una subcategoria de *"artefacto"* el cual es definido como *algo que adquiere significado y valor mediante su existencia en un campo de actividad humana.*

Siguiendo la reflexión de Cole, en el presente estudio se considera el concepto de *artefacto* para referirnos a cualquier *instrumento, herramienta u objeto que pueda adquirir un significado y se usa como medio para realizar cualquier actividad sociocultural*. De acuerdo a Radford (2004), los sistemas simbólicos junto con los artefactos son concretamente producciones culturales que no tienen un valor intrínseco, su valor emana del uso que se les da para realizar determinadas acciones. Entonces, será este significado el más importante para lograr su internalización la del sistema simbólico que permite al hombre formar parte de una sociedad porque facilita su comunicación, interpretación e incorporación del mundo en el que se encuentra.

En la actividad el individuo le da uso y sentido a los sistemas simbólicos como el lenguaje, las matemáticas o la ciencia, ya que establece el para qué, cómo y cuándo se han de utilizar estos *sistemas* culturales (Wertsch, 1988, Daniels, 2003).

El sistema simbólico se encuentra entretejido en la actividad, la cual se encuentra estructurada en acciones, el sistema simbólico constituye el componente simbólico de cada acción (Daniels, 1996). Es a partir de las acciones que el sistema simbólico se hace disponible a todos los sujetos, es decir, se materializa; es cuando un individuo participa en una actividad que tiene acceso al sistema, que bajo esta estructura se hace presente en un plano público.

Lo anterior cobra sentido, puesto que la actividad obliga a utilizar instrumentos simbólicos y materiales particulares, en interacción con otros, estos instrumentos ayudan a transformar los objetos y las herramientas simbólicas permiten actuar, comunicarse y reflexionar sobre la actividad. Además, al tomar en cuenta que la actividad se realiza con otros, el uso compartido del sistema permite un entendimiento conjunto sobre sus metas así como del uso de las herramientas necesarias para su realización (Mercer y Littleton, 2007).

Inicialmente el uso del sistema es compartido, la actividad ayuda a que el individuo vaya progresivamente teniendo una transferencia de control sobre su uso, es así que se irá teniendo una mayor comprensión del sistema, el cual servirá como herramienta para pensar una vez que puede ser utilizado de manera independiente en el plano público de la actividad. El análisis del proceso que implica la reconstrucción del sistema simbólico, se desarrolla de manera más específica en el siguiente apartado.

2.3 La influencia de la interacción social para el origen de las capacidades intelectuales

La influencia de la actividad en el Surgimiento de las capacidades intelectuales, descansa en la participación del individuo en la realización de las acciones concretas que conforman la actividad. La participación juega un rol importante como una primera oportunidad de adentrarse en una actividad, ya sea desde la pura observación como en el involucramiento directo dentro de las acciones (Rogoff, 1995).

Al implicarse en una actividad el individuo se puede transformar, habiendo un proceso de apropiación a través del compromiso con una actividad, en un momento dado los individuos cambian y son capaces de manejar una situación ulterior de la misma forma que fue aprendida mediante su participación en la situación previa (Daniels, 2008).

Es así como las interacciones o participaciones que se propician, están determinadas por la actividad, pues es la actividad quien promueve interacciones de calidad y estas interacciones tienen una cualidad: son relevantes, eficientes y pertinentes de acuerdo de la actividad que el individuo se desarrolle.

El simple hecho de participar en una actividad brinda al individuo la posibilidad de comenzar a relacionarse con el entorno social y cultura, con ello el individuo puede apropiarse las formas de pensar particulares de la actividad de la que es parte (Rogoff, 1993).

Es necesario destacar que no es suficiente solo con adentrarse en la actividad y tener una participación indiscriminada en la misma, se requiere de un apoyo por parte del experto el cual guie y sostenga la participación del novato; es decir, debe existir una apoyo de un experto que propíciela construcción de una interpretación compartida de la actividad de manera conjunta y paulatina. Esta asistencia o guía es una dirección ofrecida tanto por la cultura y los valores sociales como por los otros miembros del grupo social (Wertsch, del Rio y Álvarez 1997).

Es así como el experto no solo da al novato las oportunidades de participar en actividades, sino también le ofrece intencionalmente conocimiento y guía en las maneras de comportarse y llevar a cabo las acciones, que la misma actividad sociocultural establece. Sin embargo, este no debe ser concebido como un proceso de transmisión unidireccional, pues el novato puede tener un papel activo al pedir ayuda, obteniendo información y transformándola en una nueva comprensión (Daniels 2008). En esta interacción el novato construye las **formas de pensar particulares de la actividad de la que es parte.** La estructura y meta de la actividad son negociadas en la propia interacción**.** Así, en la medida en que los individuos generan los medios coherentes para lograr los objetivos socialmente negociados, crean para sí mismos un sistema de representación que refleja los logros que se han generado en nuestra cultura e historia social (Tarp, 1988).

Las interacciones que están sostenidas por la actividad, permiten que surja la Zona de Desarrollo Próximo. Esta Zona de acuerdo a diferentes autores, *es un sistema interactivo de desarrollo intelectual o región dinámica donde surgen un momento de interacción, relación, intercambio y cooperación especial.* La interacción entre dos o más individuos en una tarea, persigue la meta de la actividad, *donde uno logra llevar a cabo acciones que no están en su desarrollo actual con la ayuda de uno más capaz (Wertsch 1988, Mercer 2007, Baquero 2004,* Mercer y Littleton 2007, Tharp 1988, Cole, Griffin y Newman 1991).

De acuerdo con Vigotsky la instrucción en la ZDP aviva la actividad del niño, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de procesos de desarrollo que dan paso al funcionamiento interpsicológico, para ser estructurado de tal manera que maximice el crecimiento del funcionamiento intrapsicológico. Dentro de ésta transición es donde se puede observar la distancia entre el nivel de desarrollo real del niño y el nivel más elevado de desarrollo potencial tal como es determinado por la resolución de problemas bajo la guía del adulto o en colaboración con sus iguales más capacitados (*Wertsch 1988).*

EN LA ZDP, la persona más experimentada *negocia* con el menos experimentado los significados de las metas que dirigen las acciones, para que éstos lleguen a ser compartidos. Además, en esta interacción se negocia el uso de los instrumentos y herramientas de la actividad particular, ayudando a interpretar el sistema que le da estructura a la misma. De tal forma, dentro de esta negociación, se hace necesaria la presencia de un sistema de andamios o ayudas para que gradualmente el sujeto se apropie del saber del experto sobre la actividad y uso de herramientas (*Wertsch 1988).*

La asistencia del experto, se compone de ayudas que se van retirando progresivamente del sujeto menos experimentado, de acuerdo al desempeño que éste tenga en la actividad. Este sistema es temporal y dependiente del nivel de comprensión que se haya alcanzado, para entonces, comenzar a reducir los grados de andamio en la realización de una cierta tarea, de modo que el individuo pueda concentrarse en alguna meta que está en curso de adquisición (*Wertsch, 1988;* Tharp y Gallimore 1988*).*

Algunos ejemplos de la asistencia que se puede presentar para ayudar a la inmersión del individuo en la actividad permitiendo a su vez, el avance y transformación en su ZDP (Zona de Desarrollo Proximal) son: *el modelado* (es la imitación de modelos, además implican centrar el proceso de la conducta modelada), *la gestión de la contingencia* (refiere a los refuerzos sociales, estímulos, recompensas o castigos que se dan después de la ocurrencia de una acción), *retroalimentación* (asistencia a nivel de la experiencia para guiar a un estudiante), *la instrucción, los cuestionamientos, y la estructuración cognitiva* (estos tres son medios de asistencia lingüísticas importantes en la asistencia de los actos propios y en las respuestas que provocan). Importante es señalar que existe una interdependencia entre los medios de asistencia, porque estos medios no son estrictamente normativos, son variables en su selección, esto se debe a la capacidad de respuesta a la ZDP que requiere la individualización, de acuerdo a las exigencias del momento y movimiento a través de la ZDP (Tharp y Gallimore 1988).

Así en esta negociación se realizan construcciones cognoscitivas nuevas de los novatos, que resultan de la interacción dinámica entre la elaboración de las metas para la solución de problemas y los medios coherentes para alcanzar esas metas. Mientras que los niños identifican nuevas metas, intentan elaborar los medios cognoscitivos nuevos, incluyendo las estructuras conceptuales, vehículos simbólicos, y las estrategias de solución de problemas para alcanzar esas metas (Saxe, 1984 en Rogoff 1984).

Para que el individuo pueda llegar a compartir significados dentro de la actividad y que entienda de la misma forma lo que los demás participantes entienden, las reglas, metas y usos de las herramientas simbólicas y culturales pasa por un proceso de cuatro etapas de *intersubjetividad*, que lo llevarán a la ***internalización de la actividad y a la creación de sistemas de acción medidados por instrumentos.*** Wertsch (1988) propone y describe las cuatro etapas de intersubjetividad en las que sucede la transición del funcionamiento interpsicológico al funcionamiento intrapsicológico, esta transición responde a la negociación que es sostenida por la asistencia del experto:

Primer nivel de intersubjetividad. Se caracteriza por el hecho de que la definición de la situación del niño es tan diferente de la del adulto que resulta difícil la comunicación. El adulto puede intentar conducir al niño a través de los pasos estratégicos, pero la comprensión del niño acerca de los objetos y la acción es tan limitada que el niño puede no entender de modo apropiado las producciones verbales del adulto.

Segundo nivel de intersubjetividad. En el segundo nivel de intersubjetividad, la interacción adulto-niño no está tan restringida por la limitada definición de la situación del niño. El niño, por lo menos, parece compartir la comprensión básica de los objetos por parte del adulto en la situación. No obstante, el niño aún no comprende la naturaleza de la acción dirigida a un objetivo de la que estos objetos forman parte y, consecuentemente, a menudo no realiza las deducciones necesarias para interpretar las otras producciones reguladoras del adulto. Este nivel se caracteriza generalmente por el hecho de que el niño empieza a participa con éxito en la tarea, pero no comprende aún la tarea al no coincidir completamente con el nivel de comprensión del adulto. Así pues, se producen problemas de comunicación porque el niño no percibe todas las implicaciones reguladoras de una producción.

Tercer nivel de intersubjetividad. Este nivel se caracteriza por que el niño puede responder haciendo las inferencias necesarias para interpretar las producciones directivas del adulto, incluso cuándo éstas no son explícitas y dependen de la definición de la situación según el modelo adulto. Mientras que el proceso se realiza aún en el plano interpsicológico, el hecho de que el niño pueda realizar las inferencias apropiadas indica que el funcionamiento intrapsicológico empieza a explicar una gran parte de las realizaciones del niño. Ya no es necesario que el adulto especifique todos los pasos a seguir para interpretar una directiva puesto que el infante puede llevarlos a cabo basándose en una definición de la situación bastante completa. De hecho, en algunos casos parece que el niño actúa independientemente y que el adulto únicamente proporciona la configuración de que el niño lo está haciendo bien (Wertsch, 1988).

Cuarto y último nivel de intersubjetividad. Dentro de este nivel, el niño toma la responsabilidad de llevar a cabo la tarea. Durante este nivel, surge un cambio en el funcionamiento intrapsicológico, e inmediatamente después, puede producirse el habla egocéntrica. De esta forma la mediación semiótica comparte muchas propiedades estructurales y funcionales con el habla comunicativa previamente usada por la diada. Se trata de una manifestación semiótica del hecho de que el niño ha llegado a dominar la definición de la situación con la que el adulto había iniciado la tarea. En este punto hay una intersubjetividad completa entre el niño y el adulto en cuanto a la definición de la situación, lo que hace que sea innecesarias otras producciones reguladoras (Wertsch, 1988).

La siguiente transición de la ZDP es la internalización,cuando ya el niño ha desfilado por las etapas de intersubjetividad y da paso a este proceso. Hay que considerar que al pasar por las etapas de intersubjetividad no resulta un proceso seriado donde el novato se obligue a pasar por cada una de las etapas de ésta, si no que puede ser un proceso discontinuó en donde al final surge la internalización.

Precisamente el entendimiento compartido, se logra por la asistencia pero en última instancia es por la actividad, ya que ésta permite la asistencia y la colaboración, ésta condición permite que el niño **internalizar la estructura de la actividad y las acciones mediadas por instrumentos culturales**; ya que se está en un plano social construyendo el plano intermental y negociando un plano intramental. Es decir lo que se internaliza es la actividad con sus acciones, cada sistema de acción va a ser representado en el sistema simbólico, por lo tanto se internaliza las acciones y el sistema simbólico.

En resumen este proyecto asume, las siguientes ideas: la creación y desarrollo de la mente está en función de la cantidad de sistemas simbólicos que posee el individuo, lo que implica una reconstrucción simbólica de estos sistemas en diversas actividades, en donde los sistemas simbólicos cobran función y en donde el ser humano tiene acceso a ellos.

Por tanto, las acciones constituyen las modalidades sociales prácticas a través de las cuales las actividades son realizadas (Bronckart, 1997). Sin olvidar claro está, que dichas acciones van siempre acompañadas del sistema simbólico especifico que está en uso dentro de determinada actividad.

Es así como el individuo al estar inmerso en diversas actividades que requieran el uso de distintos sistemas simbólicos, tendrá la oportunidad de reconstruirlos y posibilitar la creación y transformación de su pensamiento. Esto partiendo del hecho de que la adquisición de sistemas simbólicos exige que el individuo pueda utilizarlos de forma adecuada para lograr determinados objetivos cognitivos y sociales (Martí, 2003).

Para llevar a cabo la acción en una actividad se requiere del empleo de herramientas psicológicas y de artefactos (Wertsch, 1988). Los cuales son caracterizados por ser productos culturales y tienen la capacidad de transformar el funcionamiento mental (Martí, 2005; Wertsch, 1988; 1997). Es así como la acción…

> *“que se ha llevado a cabo en ausencia de instrumentos de mediación o con instrumentos mediacionales distintos, se transforma con la incorporación de una nueva herramienta psicológica. En el acto instrumental ni el individuo ni el instrumento de mediación funcionan aisladamente pues ninguno puede proporcionar una base adecuada para la acción realizada. Por el contrario el análisis debe basarse directamente en la irreductible tensión que existe entre los instrumentos de mediación y el individuo que los usa” (Wertsch, 1997. p. 54)*

En consecuencia, la acción siempre será mediatizada por el uso de sistemas simbólicos y sobre la unidad que implicará una tensión irreductible entre los instrumentos mediacionales y el individuo o individuos que los emplean, se plantea a la acción mediada por instrumentos (Zinchenko, 1985 en Wertsch, 1988; Wertsch 1997) como la unidad que permite entender a los momentos de funcionamiento mental y la situación sociocultural como momentos que actúan de manera dialéctica en la acción humana.

De igual manera, al encontrarse lo semiótico incluido en los procesos de actuación humana dentro de una actividad, la herramienta psicológica alterará por completo el flujo y la estructura de un nuevo acto instrumental o acción mediada (Vigostky, 1981 en Wertsch, 1997; Wertsch, 1988). La introducción de una herramienta psicológica en el flujo de la acción lleva a una transformación importante o incluso a una redefinición de esa acción (Wertsch, 1997). Esto contrasta con una perspectiva en la que la incorporación de instrumentos mediacionales se limitaría a facilitar una acción ya existente, pero dejándola cualitativamente intacta.

La acción al irse entrelazando con un sistema de signos sufre transformaciones, de esta manera, una vez que la medicación semiótica se ha incorporado a la acción práctica sufre una transformación cualitativa (Zinchenko, 1985 en Wertsch, 1988). Es aquí, en esta transformación, en donde los sistemas simbólicos se convierten en herramientas psicológicas pues se han incorporado a la acción del individuo, dichas herramientas psicológicas originan la mente humana y su desarrollo se verá afectado en tanto se incorporen nuevos sistemas que permitan la actuación del individuo en diversas actividades.

Dentro de la noción de acción mediada por instrumentos se puede estudiar la conciencia humana (Wertsch, 1988), pues es capaz de reflejar las complejas relaciones interfuncionales que caracterizan la conciencia humana. Refleja las interrelaciones que se establecen entre lo individual y lo social.

Concluyendo, se puede decir, que la acción mediada por instrumentos proporciona una unidad que incorpora necesariamente el criterio definidor de la noción que Vigostky proponía sobre la conciencia y su desarrollo, esto su organización dinámica que se evidencia en relaciones interfuncionales de lo individual y social. Al considerar una acción dirigida hacia un objetivo y mediada por instrumentos, se puede ver que distintos procesos que han sido reducidos para su estudio como la percepción, la memoria, la solución de problemas y la atención se hallan necesariamente implicados y coordinados en una unidad de verdadera vida psicológica (Wertsch, 1988). Una unidad que trasciende los procesos mencionadas anteriormente, la cual muestra el origen y desarrollo del pensamiento humano, hace evidente además su complejidad el cual se ve reflejado en su participación en las actividades de las cuales forma parte su vida.

2.4 La matemática como actividad humana.

En el mundo actual, es posible considerar a la matemática como una actividad humana más que aquella que se practica sólo en un ambiente escolar,
Sin perder de vista que éstas son uno de los pilares fundamentales de la educación básica. Considerar esta idea, es valido ya que las matemáticas son y

fueron creadas a través de actividades humanas, por medio de la resolución de problemas de las actividades sociales tal como menciona González y Weinstein (2001),

Al igual que otras ciencias, las matemáticas han ayudado al hombre a resolver problemas prácticos de la cultura. De esta manera, Freudenthal (citado en Gravemeijer y Terwel 2000) menciona que la matemática es una actividad de resolución de problemas, aunque también es una actividad que organiza una disciplina.

La matemática es una ciencia que posee reglas particulares y usos sociales, por lo tanto por su uso se conceptualiza en una actividad humana culturalmente reconocida. Como menciona Bichop (1999) las matemáticas como proceso cultural tiene una naturaleza suprasocial pues se utilizan en todas las sociedades y son un fenómeno pancultural, es decir, es el resultado de desarrollos producidos tanto dentro de las culturas como entre ellas, así como proceso suprasocial y proceso pancultural se han desenvuelto actividades diversas de las matemáticas como: contar, localizar, medir, diseñar, jugar, etc. por lo tanto se afirma que las matemáticas son actividades humanas.

Partiendo de ésta idea, mucha de la investigación empírica se ha situado en el análisis de la cognición que marcaron las actividades de los individuos, por ejemplo en estudios con trabajadores de carga, personal de la marina de explotación de un buque, y niños de la calle dedicados a la venta de bienes, etc., así las investigaciones muestran cómo las actividades cognitivas de las personas se basan en las propiedades de los artefactos, las actividades de los demás; y en la estructuración y resolución de tareas locales.

Las matemáticas ciertamente son el producto de la cultura, el resultado de las actividades de un grupo cultural, tienen un pasado verdaderamente multicultural, por lo tanto, las matemáticas no son simplemente un subconjunto de todas las matemáticas que han desarrollado las distintas culturas si no también son una línea particular de desarrollo del conocimiento que ha sido cultivada por determinados grupos culturales hasta alcanzar la forma concreta que conocemos hoy (Bichop, 1999). En consecuencia, muchos autores han tratado de documentar estudios donde señalan la importancia de las actividades históricamente situadas como se menciona anteriormente.

Es importante mencionar que las matemáticas han evolucionado con el paso del tiempo, debido a las actividades tan complejas que se han ido desarrollando a lo largo de la historia y la necesidad del hombre en su accionar con el medio. También, ha evolucionado el sistema simbólico de las matemáticas, sus artefactos o herramientas culturales, sus reglas, la resolución de problemas, etc. Por otro lado las simbolizaciones y los conceptos matemáticos han evolucionado y han crecido de determinada manera que podríamos comparar sus actividades durante la historia, por ejemplo contar, localizar, medir y diseñar han sido y todavía son, las bases de la ciencia, la ingeniería, la industria, el comercio, la agricultura, la guerra, entre otros.

Los sistemas numéricos se han hecho más complejos: infinitamente grandes, infinitamente pequeños, infinitamente divisibles, nuevos números como vectores y matrices, operaciones con todos ellos, con análisis de todos los sistemas numéricos y algebraicos posibles. Localizar nos ha dado gran parte de nuestra geometría: líneas y ángulos, ejes, coordenadas cartesianas y esféricas, gráficas, teoría de grafos, entre otros. Así tendríamos una lista muy grande de actividades que se han ido desarrollando a lo largo de los años. (Bichop, 1999)

Además, las matemáticas actualmente se puede identificar en sociedades que se caracterizan por estar cada vez más centradas en la tecnología, pues hoy en día tenemos una imagen de interrelación continua entre seres humanos que crean la tecnología para tener más control sobre su entorno, después, la tecnología llega a formar parte de este entorno y, en consecuencia, requiere la invención y creación de más tecnología, así las matemáticas evolucionan continuamente a causa de la presión del entorno, tanto físico como social. Por lo tanto si la matemática ha evolucionado de acuerdo a la complejidad de las actividades humanas y si estas actividades a lo largo de la historia se han ido complejizando, es necesario tener un razonamiento complejo ante esta ciencia para resolver el tipo de problemas o de actividades que actualmente se desarrollan.

En este sentido, concluimos que las matemáticas es una actividad cultural significativa, parte del desarrollo de la humanidad e inserta en la cultura, que se ha ido complejizando de acuerdo a las actividades de la sociedad y ha evolucionado su sistema simbólico al igual que sus artefactos.

El Sistema numérico

Los sistemas numéricos (medio o sistema semiótico) han evolucionado de acuerdo a su producción de signos y a las actividades culturales matemáticas, la cual tienen su origen desde hace muchos años atrás, en donde desde hace tiempo se realizaban repetitiva marcas como: “cuentas” que fueron hechas por seres humanos en forma de objetos por ejemplo; huesos con muescas como los africanos y europeos Ernest (2005). Además, algunas marcas como muestras de arcilla por un lado se utilizaban como símbolos para rituales, para la predicción del calendario o para otros fines inimaginables, también sirvieron como representaciones de contabilidad de los bienes comerciales, con múltiples señales que indicaban las cantidades numéricas de las mercancías representadas. Así, el número se fue representado a través de la repetición de símbolos o iconos.

Por otro lado los primeros sistemas de numeración de hace 5.000 años, en particular la sumeria y egipcia, representaba pequeñas cantidades por medio de signos ("yo" = 1, 'II' = 2, 'III' = 3, "IIII" = 4, y etc.), una vez más, ésta es una forma de signo icónico, como el número consta de una colección de piezas equivalentes, que tiene la cardinalidad de la cantidad indicada, y que por tanto se puede poner una correspondencia con cualquier instancia del mismo (Saxe, 2005).

En la transición desde el acto de conteo a la cuenta completa de marcas también tenemos el cambio de la acción, es decir las marcas icónicas forman parte de una totalidad simbólica de inicio de sesión del sistema en el que los números más emblemáticos no estaban incluidos y las características icónicas de los números más pequeños como "IIII" están en segundo plano. El "IIII" en números romanos se convierte en 'IV', y al hacerlo, el número cuatro deja de tener una relación icónica con el acto de contar hasta cuatro (Saxe, 2005).

Pero por supuesto esto es un desarrollo reciente de hace menos de 2500 años. Esto anuncia la próxima etapa de desarrollo de sistemas de numeración abstracta que se produjo en el mundo de muchos lugares, incluyendo América Central, Norte de África, Oriente Medio, el subcontinente indio y China. En estos lugares, se comenzaron a usar números diferentes para las distintas denominaciones que fueron desarrollados y que conlleva una variedad de sistemas de valor posicional (Saxe, 2005).

La identificación de los números, el conteo con partes del cuerpo y los gestos ha sobrevivido como sistemas funcionales de la numeración en el mundo moderno, ampliando estos sistemas entre los pueblos indígenas y las culturas tradicionales como lo muestra el trabajo de Saxe (2005) donde presenta como en las comunidades Oksapmin de Nueva Guinea, utilizan un sistema de conteo de 27 partes del cuerpo para el número. Este conteo por medio de las partes del cuerpo se utiliza en las prácticas colectivas de intercambio económico como; la actividad económica comercial, como un índice por la exportación de vegetales, el efectivo en circulación, el número de productos vendidos en los puestos de comercio Oksapmin, y la proporción de personas que participan en la economía monetaria en el que las actividades de aritmética son cada vez más importante.

El sistema de conteo Oksapmin de 27 de partes del cuerpo tiene su origen en los tiempos pasados, pero su historia es desconocida en este período. El sistema se muestra en la Figura 1 donde contar como Oksapmin tradicionalmente se hace cuando se comienza con el pulgar por un lado, y enumera 27 lugares alrededor de la periferia superior del cuerpo, terminando en el dedo meñique de la mano opuesta.

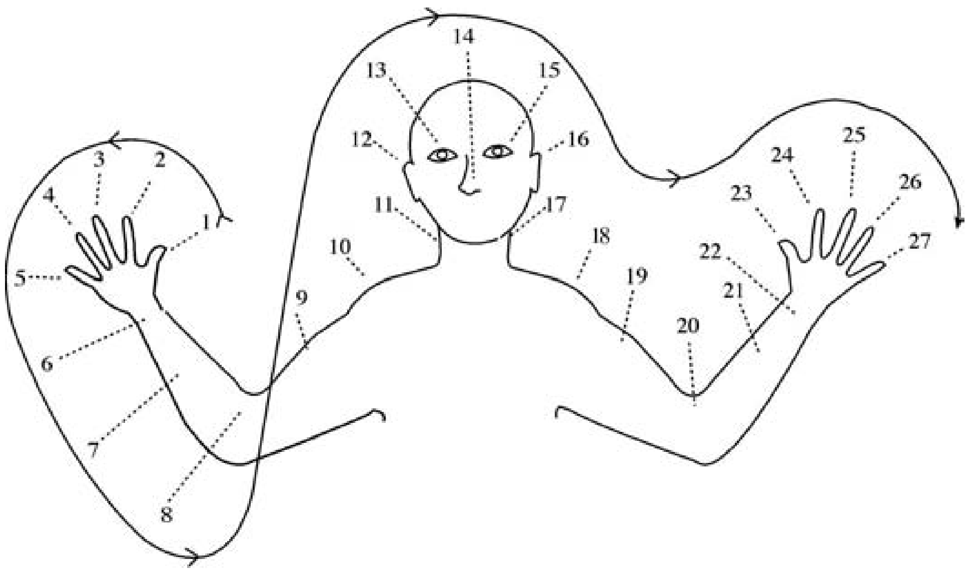

Figura 1. Parte del cuerpo del sistema Oksampin que cuenta con 27 puntos distintos (Saxe, 2005).

Continuando con la numeración abstracta que mencionamos anteriormente después se continúo con el desarrollo del sistema decimal contado moderno, con la introducción y el uso del cero como número, alrededor de 600 dc (Ifrah, 1998 citado en Saxe 2005).

Debido a su ubicuidad en cada aspecto de la vida moderna de la enorme magnitud de este logro conceptual, es decir, la realización del plan de numeración de valor de lugar, representa una innovación del más alto nivel sólo igualada por (y entrelazado con) el desarrollo de la escritura. Pero a pesar de los mitos generalizados sobre sus orígenes, no fue el desarrollo sin trabas del pensamiento humano especulativo y abstracto que llevó a la invención del sistema semiótico de la numeración y el cálculo. La numeración surgió principalmente como un sistema de contabilidad de los gobernantes centrales de los imperios antiguos de manera sistemática, actividades como registrar, documentar y controlar la riqueza de la fiscalidad y el comercio eran diligencias que se practicaban (Høyrup, 1994 citado en Saxe, Gearhart y Suad, 2001).

Por lo tanto la historia de los números y el contar es también la historia del desarrollo de sistemas semióticos de la numeración y el cálculo. En este desarrollo el conjunto de signos primitivos utilizados, se convirtió en la codificación, y surgieron las normas elaboradas y sistemáticas para la producción de signos compuestos. Las estructuras de significado implícito que sustentan esta tecnología de la información son los de preservar y ampliar las operaciones verificables en un conjunto de objetos tangibles y de acumulaciones de productos materiales y sustancias (por ejemplo, cultivos, tierras de cultivo). Las operaciones de la numeración (contar) las colecciones de materiales de objetos discretos o unidades de medida de las agregaciones de material continuo se basa en la conservación y la replicabilidad de los resultados. En otras palabras, contar da lugar a operaciones invariables como combinar y compartir colecciones de objetos que son la base para las operaciones numéricas que conocemos como suma / resta y multiplicación / división, respectivamente.

Para concluir este apartado reflexiono con la idea fundamental de que las matemáticas son actividades humanas insertas en la cultura y debido a la evolución de las actividades de la sociedad, es como su sistema de signos de las matemáticas también se desarrollan, comenzando desde algunas representaciones icónicas hasta una numeración convencional.

En el siguiente punto aterrizaremos este apartado empírico en lo que son capaces de hacer los niños en preescolar.

2.5 ¿Qué son capaces de hacer los niños en preescolar?

En este apartado se mostrará algunas investigaciones que revelan qué conocimientos o habilidades pueden desarrollar los niños en preescolar, éstas investigaciones revelan que los preescolares logran desarrollar cuestiones que van desde el realizar el conteo de colecciones, dividir y comparar conjuntos, conocer el principio de resta invertida, realizar representaciones numéricas y la resolución de habilidades para la resolución de problemas.

Asimismo, muchos estudios han demostrado que los niños pequeños tienen una gama impresionante de habilidades numérica en el inicio de la escolarización. Las Normas de Plan de Estudios y Evaluación en Estados Unidos para las Matemáticas Escolares (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM], 1989) afirmaron que los niños entran al preescolar con una considerable experiencia matemática, una comprensión parcial de muchos conceptos, y algunas habilidades importantes, incluyendo el cálculo.

También se afirma, que no sólo los niños pequeños que cursan la escuela vienen con una gran cantidad de conceptos matemáticos informales, destrezas y capacidades variables. Carraher y Schliemann (1990 citado en Pepper, y Hunting, 1998) encontraron que algunos niños, sin ninguna instrucción escolar anterior en el sistema de numeración, tienen un buen entendimiento de los aspectos conceptuales del sistema de numeración a pesar de la incapacidad de generar la secuencia de números por su nombre de forma sistemática.

Por ejemplo Bruce y Threlfall (2004) realizaron una investigación donde muestran como los niños realizan la numerosidad de un conjunto por medio del conteo y como establecen su aplicación de la lengua ordinal para describir la posición relativa en una línea.

Este estudio se realizó con 50 niños y 43 niñas, con una media de edad de 4 años y 4 meses, y de una amplia gama de grupos étnicos y antecedentes culturales. A cada niño se le presentaron dos tareas: el primero en hacer una colección de un determinado tamaño o extraer pequeños subconjuntos de un conjunto más amplio, y la segunda tarea fue identificar el objeto en una posición declarada en un conjunto ordenado, en una hilera de quince diferentes. Los resultados mostraron que los niños seleccionaron la cantidad correcta que se les pidió, algunos recogieron el número requerido de bloques entre los dedos de una mano; otros transfirieron los bloques en grupos pequeños, de un lado a otro; y unos más avanzados tomaron los bloques de dos en dos o tres, el método que utilizaron los niños fue clasificado como 'contar'.

Algunas de las acciones que realizaron el grupo de éste estudio al recoger algunos conjuntos de la colección fueron:

1. El niño reconoce a una solicitud de cantidad, pero no puede responder por el importe de la cantidad, y sólo toma la misma cantidad cada vez.
2. El niño sabe que las palabras de otro número implica diferentes cantidades, pero no está seguro acerca de los valores, por lo que ofrece "un puñado" de diferentes tamaños.
3. El niño realiza una estimación, y toma cantidades más o menos correcta.
4. El niño cuenta todas las cantidades, como resultado de emular el comportamiento de los adultos, pero sigue contando más allá de las limitaciones en su habilidad.
5. El niño cuenta pequeñas cantidades, pero, reconociendo sus propias limitaciones, vuelve a agarrar para cantidades más grandes.
6. El niño cuenta todo, con éxito.

Al parecer, los niños primero reconocer e interpretar el lenguaje ordinal de forma genérica, que saben que las palabras ordinales se refieren a la denominación de los puestos, pero sólo en un sentido amplio y amorfo. Es decir, que tienen conciencia de que palabras como primer, cuarto, séptimo y puede relacionarse con la posición física en una línea, pero no tienen claro el significado de las palabras diferentes, quizás como resultado de la limitada experiencia previa de la aplicación y contextualización de este lenguaje ordinal.

Por lo tanto este estudio comprueba que los niños en preescolar realizan el conteo para tomar una colección de objetos, además que los niños pueden identificar un orden de una colección hasta la catorceava o quinta posición.

Este tipo de conocimiento sobre el conteo o la ordinalidad comienzan a desarrollarse en los niños desde una edad muy temprana, pero así como estos conocimientos se van adquiriendo poco a poco, también se desarrollan otros un poco más complejos como en el estudio de Pepper y Hunting (1998) donde investigan que estrategias utilizan los niños en edad preescolar para subdividir elementos, además de la relación que realizan los niños con respecto a contar y compartir.

El estudio se realizó con veinte y cinco niños en edad preescolar con edad promedio de 5 años 4 meses, los resultados mostraron que los niños ofrecieron un comportamiento notable como el de contar como parte integral del proceso de distribución. Algunos niños lograron la igualdad mediante la colocación de elementos en el mismo patrón frente a la repartición de otro elemento. Otros niños hicieron filas de galletas en la parte frontal de cada muñeca y compararon la longitud de las filas, no siempre con éxito, dependiendo de cómo se realizó la recta de las filas.

Otra característica de la distribución de algunos de los niños era un "cuadro adyacente": estrategia mediante la cual se depositará la siguiente moneda en la caja junto a la caja en la que había depositado la moneda anterior. Por lo tanto, la capacidad de distribuir de forma equitativa los grupos de elementos que parecen, pudo no depender de conocimientos avanzados de conteo. Contar es una forma de verificar los resultados del plan de acción de compartir. Un método de justificación a veces se utiliza en lugar de contar era informar verbalmente una repetición de la secuencia de las acciones realizadas.

Se esperaba que la percepción pueda ser adquirida en particiones de los niños y el intercambio de estrategias a través de la observación de su comportamiento en la solución de las tareas de repetición. Se consideró que los niños que respondieron correctamente a todas las tarjetas de vocabulario podría ser capaz de usar esta habilidad en la resolución de las tareas de compartir. Este resultado sugiere que la **repetición** puede haber sido una *estrategia* utilizada por el niño en la creación de partes iguales. Pepper y Hunting (1998) menciona que muchos niños en edad preescolar han demostrado que tienen lo suficientemente desarrollado las destrezas para contar o ser capaces de resolver problemas sencillos de suma y resta que se establecen en los contextos pertinentes, siempre que la información perceptual está disponible.

Otras de las capacidades que desarrollan los niños en preescolar es el principio de resta invertida donde este tipo de conocimientos resulta más complejo a comparación al conteo que se necesita un nivel cognitivo moderado. Dentro de este principio Baroody (2007) realizó un estudio donde afirma que niños de 6 años de edad logran realizar el principio inverso de la resta (por ejemplo 2 + 1 – 1 = 2). Ya que la comprensión general del principio inverso de resta, o inversión, implica reconocer la adición de inmediato y luego restar el mismo número (o viceversa) y resulta el número inicial sin cambios, este principio necesita además de cierto conocimiento, la resta requiere una comprensión de la relación inversa entre las dos operaciones, en concreto, entendiendo que la suma y la resta son interdependientes y no son independiente. Las operaciones son necesarias para (a) la construcción relativa de un conocimiento completo de la composición aditiva del número y (b) de un razonamiento aritmético que afecta a las relaciones parte-todo.

Este estudio se realizó en una localidad de Taiwán con 48 participantes entre 4 y 6 años de edad, estos participantes se sometieron a una tarea la cual consistía en la resolución de restas con el principio inverso. Se obtuvo un resultado donde los niños de 4 y algunos de 5 años logran realizar una mínima inversión en la resolución de la tarea y logran realizar solo algunas operaciones de la resta invertida, así los niños más pequeños, en particular pueden haber "tenido errores" por el gran tamaño de la colección original o porque la tarea requiere razonamiento algebraico desconocido, por otro lado la mayoría de los niños de 6 años logran una regularidad matemática importante con respecto a la inversión de la resta, logrando ventajas mayores como descubrir la inversión que permite tener un acceso directo al cálculo para buscar otros atajos de cálculo (por ejemplo, ver 9 + 8 en un problema más fácil [9 + 1] + [8-1] = 10 + 7 = 17), o reconocer que la suma y la resta se relacionan de otra manera (por ejemplo, ver 5 - 3 =? Como 3 + ?= 5).

Además los resultados de este estudio indican, que algunos niños de 5 y la mayoría de 6 años de edad, son capaces de obtener un razonamiento algebraico y que las actividades relacionadas con cierto razonamiento algebraico pueden ser apropiadas para el desarrollo desde la edad preescolar. Las investigaciones anteriores indican que los niños desde los 3 años pueden participar en la regla basada del razonamiento algebraico en situaciones de sustracción simple o paso como n - 0 (ninguno) o n - n (Baroody 2004 citado en Baroody 2007). Además éste estudio indica que muchos niños en edad preescolar, pueden razonar algebraicamente con algo más complejo, como procesos de 2 pasos (relaciones inversas), realizar una acción mental (reversibilidad), siendo una característica definitoria de pensamiento operacional (realmente lógico).

Por otra parte siguiendo con los conocimientos que poseen o logran desarrollar los niños en preescolar, se refiere a la representación gráfica del sistema simbólico, ya que el que los niños puedan representar una cantidad con símbolos numéricos, ayuda a éstos a comprender mejor la naturaleza abstracta de un número y les ayuda a ver la función especial de los símbolos del número escrito en su vida. Los niños que leen los números tienen una mayor libertad e independencia de la estructura de la situación concreta y visual en el pensamiento matemático. El uso de símbolos escritos proporciona que los adultos y niños compartan un modelo cognitivo, que proporciona una base para la comunicación de un número entre niños y adultos (Munn, 1998 citado en Zhoun y Wang 2004). El que los niños posean esta habilidad les permite utilizar diferentes herramientas de cálculo y medida, como una calculadora, un reloj, una regla, una taza de medir (artefactos culturales). También son capaces de participar en más actividades sociales, tales como juegos de ordenador o de otras actividades de entretenimiento en los que se incluyen los números escritos.

Se muestra que los niños en preescolar pueden realizar este conocimiento como lo muestra el estudio de Martí (2010) donde observó que los niños utilizan el dibujo, la escritura y la notación numérica como medio fundamentales para representar alguna cantidad. Los resultados del análisis evolutivo muestra que la mayoría de niños de 4 años utiliza el dibujo para representar tanto la identidad como la cantidad de objetos; a los 5 años se empiezan a diferenciar las funciones de cada sistema aunque la combinación en una misma expresión de numerales y escritura es poco frecuente. A los 6 y 7 años aumenta drásticamente el porcentaje de niños que representa de forma diferenciada la identidad de los objetos y su cantidad mediante la escritura y los numerales aunque algunos combinen dibujo, escritura y numerales de forma redundante.

Así, aunque la escritura empieza siendo, para los niños, una manera de representar el nombre de las cosas y por tanto de indicar su identidad, son comunes las situaciones en las que la repetición de letras pueda ser una estrategia para representar la cantidad. También ocurre que la escritura del nombre del número sirva para representar la cantidad de una colección, de igual forma, el dibujo, que es una de las maneras más directas de representar la identidad de las cosas desde los 3 años, puede también ser una vía para representar la cantidad mediante la repetición de grafías icónicas. Los numerales, por su parte, aunque tengan la función de representar la cantidad, también pueden representar la identidad cuando son usados para identificar objetos (por ejemplo, un teléfono, un autobús, una casa, etcétera) (Sinclair, 1991).

Otra investigación donde estudian la representación numérica como en el estudio de Martí (2007) es el estudio de Zhoun y Wang (2004) donde realizaron una investigación donde mostraron que los niños en edad preescolar pueden representar y tener una comprensión de los símbolos de los números escritos, mencionando que la capacidad de los niños para representar por escrito los símbolos numéricos se relaciona estrechamente con el concepto cardinal.

Participaron 71 preescolares que procedían de dos centros de atención infantil en Shanghai, China. en éstos centros se realizaron varias tareas al inicio y al final de un ciclo escolar, una de las tareas consistió en tres partes (1) Objeto-Símbolo: en la que a los niños se les pidió que anotaran la cantidad después de que les mostrase una serie de botones; (2) Símbolo: Objeto , en el que los niños se les pidió que tomaran la cantidad correspondiente de los botones en un recipiente después de ver un número escrito en una tarjeta, y (3) Numeral-lectura, en el que los niños se les pidió que leyeran cada número escrito en el índice de una tarjeta. Otra de las tareas consistió en que se les pidió a los niños tomar un conjunto específico de los botones de un contenedor de treinta y cinco botones. Los tamaños de los conjuntos eran cinco, diez, quince, veinte, veinticinco y treinta. El orden de presentación de la tarea fue de menor a mayor conjunto.

Los resultados de este estudio afirman que la mayoría de los niños de cuatro años (85,2%) podría utilizar algún tipo de símbolos para representar la cantidad correcta. El número de niños que utilizan los símbolos escritos número para representar la cantidad en una muestra. Se indica que el 85.2% de los niños en las dos muestras podría representar una cantidad correcta de símbolos numéricos convencionales. En general, la puntuación de los niños por parte de la lectura Numeral fue el más alto, mientras que la puntuación de la parte del Objeto-Numeral fue el más bajo en la tarea número de presentación de símbolos.

Se observó una relación positiva significativa entre las puntuaciones de los niños de la representación símbolo número por escrito y su concepto numeral, además el rendimiento de los niños del centro que sirve a los profesores universitarios fue mejor que la de los niños que estaban del otro centro

En un estudio similar, Hughes (1998 citado en Zhoun y Wang 2004) encontraron que los niños en edad preescolar británicos fueron capaces de utilizar uno-a-uno de los métodos (métodos icónicos e idiosincráticos) para representar pequeñas cantidades, mientras que los niños mayores eran más propensos a responder con métodos pictográficos y simbólicos.

Se confirma en este estudio que los niños preescolares son susceptibles de utilizar el método de correspondencia uno-a-uno para representar la cantidad. Munn (1998 citado en Zhoun y Wang 2004) sugiere que el desarrollo de la función simbólica tiene un impacto importante en la comprensión de varios niños, ya que proporciona un modelo cognitivo común que apoya niño-adulto a la comunicación sobre los números. El estudio chino antes mencionado, ha confirmado que los usuarios funcionales de los símbolos numéricos, desarrollan una mayor capacidad para representar por escrito los símbolos numéricos y tienen un mejor concepto cardinal que el de los usuarios no funcionales. Asimismo, la mayoría de usuarios funcionales también se utiliza el método del número simbólico para representar cantidades, lo cual es consistente con el resultado encontrado en el estudio de Munn (1998 citado en Zhoun y Wang 2004).

Retomando todos los conocimientos, habilidades y capacidades cognitivas que nos dan las investigaciones, que pueden desarrollar los niños en preescolar, concluyo que el interés de esta investigación es mostrar que no basta con dominar algún tipo de conocimientos como el conteo o la representación numérica, por el contrario, el interés es desarrollar capacidades intelectuales o competencias en las que el uso de este conocimiento sea útil o funcional para poder desempeñarse y comenzar a formas maneras de pensar matemáticamente. Ya que la mayoría de investigaciones muestra conocimientos que los niños adquieren durante el preescolar, pero estos conocimientos no poseen una función significativa dentro de un problema o tarea con sentido, solo se adquieren conocimientos sin contexto.

Pues que tan eficaz puede resultar saber o memorizar algún conocimiento matemático sin la resolución de un problema real, tomando como partida que en vez de solo saber algunos conocimientos matemáticos se debería impulsar el uso de estos conocimientos matemáticos en situaciones contextualizadas donde se pongan en uso estos conocimientos para la resolución de algún problema de la vida real.

Por lo tanto tomando el marco contextual que hemos venidos desarrollando durante este informe, se da pie para presentar los elementos que de acuerdo a algunas investigaciones empírica son fundamentales para crear Funciones Psicológicas Superiores o Competencias de acuerdo a algunas investigaciones empíricas. Consecuentemente mostrando que al buscar el razonamiento complejo en los niños es necesario crear ambientes complejos para desarrollar todo el tipo de habilidades, aptitudes y capacidades que un niño necesita para enfrentarse a los problemas matemáticos que invaden nuestra sociedad.

2.6 Factores o elemento que influyen o contribuyen al surgimiento del razonamiento matemático.

Existen factores o elementos que influyen o contribuyen el surgimientos y desarrollo del razonamiento matemático, los cuales proporcionan ciertas ventajas y ayudas a los estudiantes pera crear capacidades de pensar, estos elementos se han investigado tanto de una manera teórica como empírica, en este apartado se muestran las investigaciones empíricas que apoyan a cada uno de éstos elementos para el desarrollo del razonamiento matemático como: actividades situadas, medios sociales y medios semióticos que a continuación se describirán.

Las actividades situadas contribuyen al surgimiento del razonamiento matemático.

Recientemente, algunos autores han puntualizado que un factor que parece contribuir al surgimiento del razonamiento matemático, son las ***actividades situadas o contextualizadas***, las cuales pueden ser implementadas dentro del aula (Herrington y Oliver, 2000; Jurdak, 2006). Esto resulta importante, ya que con los modelos educativos de la escuela tradicional se han notado serias deficiencias cuando los alumnos tienen que efectuar alguna competencia matemática para la resolución de algún problema cotidiano, es decir, ellos presentan dificultades al momento de llevar a la práctica habitual aquellos conocimientos descontextualizados que adquirieron en la escuela.

La separación entre saber y hacer tradicionalmente ha sido el sello de la escuela pues el énfasis de ésta, ha sido por un lado, la extracción de los principios esenciales, conceptos o hechos; y por otro, la enseñanza dada en forma abstracta y descontextualizada desde hace muchas décadas (Resnick, 1987 citado en Herrington y Oliver, 2000). En otras palabras, se hace caso omiso de la interdependencia de la situación y la cognición.

En este sentido, Herrington y Oliver (2000) mencionan que cuando el aprendizaje y el contexto (actividades) están separados, el conocimiento mismo es visto por los estudiantes como el producto final de la educación, en lugar de reconocerlo como una herramienta para ser utilizada de forma dinámica en la resolución de problemas.

En Matemáticas la visión de actividades contextualizadas para la vida real, suele vincularse con la teoría de la Educación Matemática Realista (RME), pues uno de los principios de la RME es que la actividad matemática significativa comienza con fenómenos que están en la experiencia real de los estudiantes (Freudenthal, 1983 citado en Jurdak, 2006). Se entiende por problema del mundo real, a la experiencia “real” de una situación “real” en donde se pide a la persona tomar una decisión sobre la base de todas las herramientas (incluidas las Matemáticas) que están disponibles y accesibles a ella.

De tal manera, cabe aclarar que no basta con la memorización de conocimientos, conceptos, técnicas para poder solucionar un problema real, si no falta saber y comprender el uso de éstos para lograr los objetivos propuestos en las actividades socio-culturales. Para ello, resulta necesario crear ambientes situados o contextualizados donde se tenga en presente, la noción de aprendizaje de conocimientos y habilidades en contextos que reflejan la forma en que estos mismos son utilizados en la vida real.

Es importante propiciar que los aprendices participen en actividades contextualizadas, por ejemplo en un escenario de trabajo real, en un gran realismo " virtual "sustituto del ambiente de trabajo, en un anclaje de contexto como un video o un programa multimedia. Este último fue realizado Herrington y Oliver (2000) donde aplicaron un modelo de diseño instruccional basado en la Teoría del Aprendizaje Situado para el diseño de un ambiente de aprendizaje multimedia por estudiantes universitarios.

Se trabajó con ocho participantes de segundo año de secundaria, los cuales debieron realizar un programa de evaluación que incluía una actividad donde los alumnos deberían proponer nuevas estrategias de evaluación para el departamento de matemáticas en una escuela, por medio de un programa multimedia. Además, los estudiantes tenían que dar una exposición oral y un informe escrito de su propuesta, pues fueron evaluados en la vida real, con un contexto simulado. Los resultados sugieren que los estudiantes no sólo aprenden habilidades específicas de las demostraciones en video, sino que también aprenden un conocimiento periférico de la cultura y la conducta de la clase de matemáticas.

Los resultados confirman que el programa fomenta la colaboración, pues se observaron muchos beneficios, tales como la solución conjunta de problemas, la necesidad de negociar su aprendizaje, y un producto que es de mejor calidad que el que hacen de forma individual. Estos resultados sugieren que las actividades de aprendizaje les permiten a los estudiantes reflexionar libremente sobre su aprendizaje, permitiéndoles un retorno a las experiencias, asistir a los sentimientos, y reevaluar la experiencia, además de que la oportunidad de expresar sus pensamientos en pares permite a los estudiantes ser conscientes de su aprendizaje y para hacer enlaces adecuados para que incorporen en sus marcos cognitivos.

Así este estudio muestra que el modelo de aprendizaje situado es apropiado y eficaz para propiciar un entorno multimedia de aprendizaje, que permita la adquisición de conocimientos avanzados. Este enfoque es sin duda una forma más auténtica de proporcionar a los estudiantes la oportunidad de adquirir múltiples perspectivas en una estrategia determinada en uso.

Algunas características que se propone puede conformar un ambiente contextual para promover el aprendizaje son (Harrinton y Oliver, 2000):

1. Proporcionar actividades o contextos auténticos que reflejen la forma en que el conocimiento es utilizado en la vida real.
2. Proporcionar actividades auténticas.
3. Facilitar el acceso a las actuaciones de expertos y la modelación de los procesos.
4. Proporcionar múltiples roles y perspectivas.
5. Apoyar la construcción colaborativa del conocimiento.
6. Promover la reflexión para que las abstracciones se formen.
7. Promover la articulación para permitir más el conocimiento tácito que el explícito.
8. Proporcionar entrenamiento y andamiaje para el profesor en los momentos críticos.
9. Proporcionar una evaluación auténtica del aprendizaje dentro de las tareas.

Asimismo, Jurdak (2006) menciona 3 puntos principales sobre las características de los ambientes:

En primer lugar, ***la situación del problema tiene que ser real*** para la población de los estudiantes en cuestión. Con esto queremos decir, que la situación esté dentro del espacio de experiencia de los estudiantes. En segundo lugar, el problema debe ser formulado en un contexto en el sentido de que el solucionador de problemas puede establecer hipótesis y participar en un proceso de matematización para formular el problema en términos matemáticos. En tercer lugar, la tarea problema se presta a múltiples enfoques y distintos niveles de tratamiento.

Este mismo autor también realizó un estudio con 31 estudiantes de secundaria de cuatro escuelas privadas en Beirut, Líbano. El estudio consistió en presentarle a los estudiantes, 3 tareas contextuales a resolver como: el préstamo de un coche con opciones de pago, una situación de una oferta de un teléfono celular y una tarea sobre el índice de masa corporal. Los resultados revelan que al exponer a los estudiantes a estas tareas situadas, ellos desarrollaron algunas herramientas como el lenguaje, además que la mayoría de los estudiantes utilizaron la escritura expositiva en la presentación de sus argumentos, razones y soluciones. Por otro lado, se utilizó el lenguaje matemático con moderación, para la comunicación de ideas matemáticas.

Para concluir este apartado, se puede afirmar que un ambiente (actividades) situado o contextualizado favorece el desarrollo del razonamiento matemático pues obliga al estudiante a hacer uso de los conocimientos, herramientas o técnicas matemáticas en la solución de un problema matemático; permite que el aprendizaje de este sistemas cultural sea más significativo ya que los problemas comienzan a tener sentido y coherencia para el estudiante. Igualmente estas actividades permiten reflexionar libremente, hacer conscientes a los estudiantes de su aprendizaje, y promueven la comunicación en el aula de clases.

De tal forma, Jurdak (2006) concluye dos cosas por un lado, apoya la utilización de este tipo de actividades contextualizadas y por otro, reflexiona y certeramente expone que la experiencia del mundo real para resolver problemas es probable que no forme parte de los currículos escolares. Sin embargo, este factor convendría incorporarlo a la educación formal y permitir entonces, que el aprendizaje de las Matemáticas sea significativo y útil para desempeñarse efectivamente en la resolución de problemas o actividades extraescolares y de la vida diaria.

Los intermediaros sociales contribuyen al surgimiento del razonamiento matemático.

Otro de los factores que influyen en el razonamiento matemático se refiere a los intermediarios sociales, los cuales por su naturaleza social intervienen en la interacción con los individuos.

Dentro de la investigación empírica se exponen diversos intermediarios sociales por ejemplo, los padres o tutores, el docente y/o los compañeros. Todos estos con el fin de que el experto en cuestión negocie con el novato, para que éste entienda las metas de la solución de problemas y los medios coherentes para alcanzar esas metas, así los niños intentan elaborar los medios cognoscitivos nuevos, incluyendo las estructuras conceptuales, vehículos simbólicos, y las estrategias de resolución de problemas para alcanzar esas metas.

A continuación se expondrá como resultado de las investigaciones realizadas hasta el momento; cómo es la interacción de las madres, del docente con los alumnos dentro de las aulas y de las ayudas entre pares; y cuál es el efecto que tienen estos intercambios sociales sobre el desarrollo de un razonamiento matemático que posibilite la resolución de aquellas actividades complejas.

Como es el caso de la investigación de Saxe, Geahart y Guberman (1984), quienes ponen especial interés en el proceso de cómo las madres enseñan a sus niños a solucionar un problema de conteo. Este estudio se realizó con niños de 5 años, donde se colocó a la madre e hijo en un experimento, donde la madre tenía que ayudar a su hijo a contar un conjunto exacto de galletas para otro conjunto de muñecos (monstruos), es decir, la meta de la actividad era producir una copia numérica exacta. Se observó que las madres realizaban un tipo de submetas que servía como apoyo a los niños, para alcanzar la meta (producir la copia exacta). Se obtuvieron 2 tipos de grupos uno de bajo rendimiento y otro de alto.

Los resultados muestran como las madres realizaban ajustes apropiados según los niveles de habilidad de su hijo. Esto es, se observó que las madres de los niños de bajo rendimiento introdujeron la tarea de manera diferente en comparación con las madres de niños de alto rendimiento. La mayoría de las madres de los primeros niños iniciaron con la solicitud simple de una tarea (por ejemplo, un nivel 4 "¿Cuántas galletas y monstruos hay?" o de nivel 5 "¿Cuenta los Monstruos y las galletas?”). Simplificaron la estructura de la meta, tal simplificación redefinió la tarea numérica a una que solo implicó correspondencias no numéricas y por lo tanto, cambio la meta que sólo implicó conseguir los elementos de un conjunto, en comparación de las madres con niños de alto rendimiento que no simplificaron la meta de inmediato logrando una representación numérica de la tarea.

Los resultados indican que la estructura de meta de las actividades numéricas que se producen en las interacciones sociales es un fenómeno emergente, que no se encuentra ni en la mente de la madre ni en la del niño, esta estructura de meta se negocia durante la interacción. De tal manera, se sostiene que los niños construyen los medios para lograr los objetivos socialmente negociados. Esto es, para un niño pequeño, esto puede implicar la imitación de la cadena del número en la misma secuencia que la madre se lo articula. Y para un niño mayor, puede implicar el descubrimiento de la importancia de contar de manera sistemática tanto el modelo y la copia. Lo fundamental en este estudio, fue que la madre ayudó al niño a resolver la copia numérica exacta, logrando que los niños pudieran contar y reproducir el duplicado correcto.

La **interacción** es fundamental para que se pueda realizar la meta de la actividad, en este caso la madre fue el mediador social para que cada niño pudiera entender el objetivo y meta por medio de las ayudas brindadas, que en este caso fue la simplificación de la tarea.

Pero como se mencionó inicialmente, existen otros mediadores sociales que presentan ayudas, como es el caso del docente y/o los propios compañeros del aula.

El estudio de Harrinton y Oliver (2000), por ejemplo indagó sobre el papel del docente durante la manipulación de un programa multimedia. Éste estuvo presente y a disposición de los estudiantes en todos los horarios de las clases programadas, la mayoría de los apoyos dados fueron de naturaleza procesal esto es, si era sobre el contenido (por ejemplo, "Es que significaba ser un informe por escrito"), el software (por ejemplo, "No hay sonido en este video"), y el equipo de computo (por ejemplo, "Nuestro ratón no funciona muy bien").

Los resultados muestran que el papel del profesor fue visto favorable e importante incluso para los mismos alumnos, aunque el maestro se fijaba en el problema y lo trataba de resolver proporcionándoles ayuda, ello les permitió que resolvieran el problema por sí mismos lo más pronto posible.

En este mismo estudio, se observó la disponibilidad de los alumnos para el trabajo y aprendizaje colaborativo, pues en relación con el contenido del programa multimedia, se ayudaron entre sí considerablemente, tanto en las Matemáticas como en las estrategias de evaluación. Los estudiantes eran conscientes de la influencia de las interacciones con sus pares sobre la profundidad de su aprendizaje. Aquí, el papel de asistencia proporcionado por el par tuvo una importancia fundamental para el proceso de aprendizaje. En conclusión, se observa como en este estudio tanto el papel del docente como el de los pares tuvieron una influencia considerable para la resolución de la tarea por medio de las ayudas presentadas.

Por otro lado, otro estudio que trata sobre el efecto que tiene el papel docente en el aprendizaje, es el de Goss (2004) dicho trabajo se basa en las conclusiones de un estudio más amplio llevado a cabo en una escuela secundaria de Queensland, Australia; cuyo objetivo fue examinar el papel del maestro para la creación de una cultura de investigación en la clase de matemáticas de nivel secundaria. Éste se realizó con 14 estudiantes de una clase, con edades entre 16-17 años.

En éste, el docente aplicaba una serie de acciones como:

- El maestro modela el pensamiento matemático mediante una dialógica formal para impulsar la participación de los alumnos.
- El profesor invita a los estudiantes a tomar conciencia de los contenidos, proporcionándoles los pasos intermedios o finales en las soluciones o los argumentos.
- El profesor considera y usa el juicio de sugerencias de los estudiantes al tiempo que motiva los comentarios o críticas por parte de otros estudiantes.

Ante esto, los alumnos comienzan a ofrecer conjeturas y justificaciones sin que el maestro pregunte o las exponen durante toda la clase de discusión, los estudiantes inician la argumentación entre ellos mismos, sin la mediación del maestro, logrando usar estrategias que los ayuden a entrar la cultura de las Matemáticas.

Otra de las investigaciones sobre interacción social, pero en este caso se refiere al aprendizaje colaborativo, es el estudio de Tarim (2009) que se realizó en dos jardines de infantes privados en Turquía, con un total de 54 niños, con el fin de observar como el aprendizaje colaborativo mejoraba las habilidades matemáticas en los niños. Los resultados muestran que hubo una diferencia estadísticamente significativa en los niveles de resolución de problemas de los niños en los dos grupos experimentales en comparación con los del grupo control, además los resultados muestran que el método de aprendizaje cooperativo puede ser aplicado con éxito en la enseñanza de conceptos matemáticos y en la Educación Preescolar.

De acuerdo con los resultados, los niños en todos los grupos tuvieron mejoras, se observó que estas mejoras fueron mayores en los grupos experimentales que en el grupo control. Los niños en los grupos experimentales desarrollaron sus habilidades para resolver problemas relacionados con la suma, resta, y repartición. Además, los niños del grupo experimental tuvieron algunas mejoras en sus habilidades relacionadas con la cooperación, el intercambio y el trabajo en grupo.

Es posible destacar que las interacciones de cooperación promovieron el aprendizaje y el desarrollo cognitivo, porque los niños se enseñaron a guiar y ayudarse mutuamente en la resolución de problemas y la realización de tareas en conjunto.

En resumen, la interacción con otros, específicamente la cantidad y tipo de las ayudas que un experto le pueda proporcionar a un novato dentro de una actividad contextual, permite y favorece el desarrollo del razonamiento matemático. Asimismo, al estar en colaboración con otros, los estudiantes tienen más oportunidad de reunir ideas, pensar en muchas opciones de resolución, son capaces de cuestionar, criticar, analizar y justificar sus procedimientos y resultados. En conclusión, el intermediario social influye directamente en la forma de pensar de los estudiantes en consecuencia esto, modela el pensamiento matemático de cada alumno, mediante una dialógica formal.

El tipo de interacción que comprende tanto al docente como a los alumnos, es sin duda un elemento central dentro de los contextos educativos. Ya que fundamentalmente el docente es la única y más cercana figura experta que interviene entre las relaciones del mundo físico, social y personal que tengan los alumnos. En este sentido, el docente se convierte en una persona que puede mediar la relación de los alumnos con su realidad (medio), para hacer que paulatinamente cada individuo logre adentrarse a su sociedad; manejando y dominando los diversos tipos de interacciones inter-personales, además de aquellos saberes simbólicos, culturales que forjan el mundo que lo rodea.

Los Intermediarios semióticos contribuyen al surgimiento del razonamiento matemático.

Continuando con los elementos que influyen para el desarrollo del razonamiento matemático, ahora le toca el turno a los intermediarios semióticos, que de igual forma que los otros elementos como los intermediaros sociales o las actividades contextualizadas, éstos tienen una especial importancia para el razonamiento matemático.

Los intermediarios semióticos, son aquellos medios que tienen como función mediar el pensamiento. Las investigaciones han establecido que existen numerosos medios semióticos como el lenguaje, las matemáticas, la escritura, las ciencias, los artefactos o herramientas culturales. En seguida, se presentan algunas investigaciones empíricas que fundamentan como los medios semióticos (Esquemas, diagramas y el discurso) favorecen el surgimiento del razonamiento matemático.

Bekker y Hoffmann (2005) mencionan que la discusión entre el papel de los signos, las actividades simbólicas y los modelos se han convertido en los principales temas de investigación en Educación Matemática en los últimos años. La comprensión matemática supone la habilidad para transformar las representaciones dentro de ciertos "sistemas de representación y de cambiar entre los diferentes sistemas. Las representaciones son necesarias para conectar las diferentes áreas de conocimiento. En este sentido, un punto esencial para el aprendizaje de las Matemáticas refiere al problema del significado de los signos utilizados en las Matemáticas.

Pero lo que nos interesa resaltar es que existen intermediarios semióticos como las señales, símbolos, esquemas o diagramas, imágenes que nos ayudan por un lado a razonar con ellos, y también darle forma al pensamiento matemático Ese es el punto esencial de los intermediarios semióticos, que por medio de ellos, se puede interpretar la realidad y a su vez, al interpretarla eso ayuda a transformar pensamiento matemático y hacerlo más complejo.

Una investigación que estudia el uso de los *esquemas o diagramas* para lograr un razonamiento matemático, es la de Bekker y Hoffmann (2005), en donde participan 28 estudiantes de séptimo grado (12-13 años) de una escuela holandesa. El objetivo es lograr que los alumnos logren un razonamiento por medio del uso de esquemas o diagramas, este razonamiento consiste en tres pasos: primero, elaborar una representación esquemática del problema matemático presentado; segundo, experimentar con dicho esquema o diagrama y por último, reflexionar con estos recursos. Este tipo de razonamiento diagramático o esquemático ha servido de base para que los estudiantes piensen en algunos aspectos esenciales de las representaciones estadísticas. Mediante la interpretación de signos en una especie de "juego de interpretación", mediante la comunicación de estos signos, y la producción de nuevos signos, los estudiantes tuvieron la oportunidad de aprender algunos conceptos estadísticos. Los resultaron muestran que los alumnos lograron razonar de la manera propuesta (elaborar, experimentar y reflexionar).

A continuación (Gráfico 1) se muestran ejemplos gráficos de los esquemas o diagramas utilizados por los alumnos.

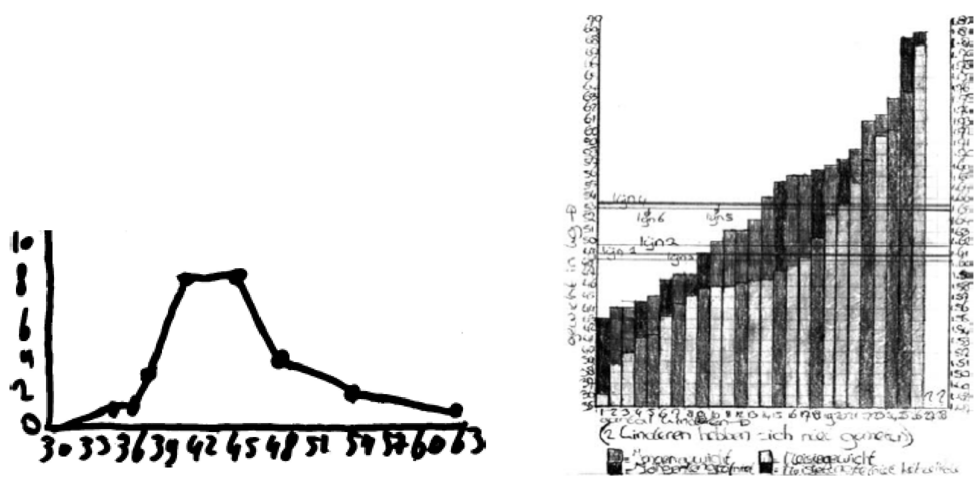

Gráfico 1. Ejemplos de gráficos o diagramas (Bekker y Hoffman, 2005).

Se observó que los estudiantes desarrollaron una clara necesidad por esquematizar o diagramatizar, y de discutir con ayuda del docente lo que se representaba en el gráfico, se produjo que los estudiantes aprendieran a describir y predecir las características agregadas de los conjuntos de datos, siendo ésta una característica esencial del análisis de datos estadísticos. Esto implica que los estudiantes pudieron describir las características de los conjuntos de datos, además de predecir las características de las situaciones hipotéticas. Por lo tanto, en este estudio se concluye que los esquemas o diagramas no sólo son medios de comunicación gráfica, sino que son herramientas que hacen posible la reflexión, comprensión y razonamiento sobre la realidad.

Otro estudio que indaga sobre el razonamiento matemático en este caso, para el cálculo, es realizado por George, (2005) en donde se centró específicamente en los *diagramas* que los estudiantes modificaban o construían en la solución de problemas de cálculo aplicado. Los participantes en este estudio fueron estudiantes de una escuela secundaria, (aproximadamente 600 alumnos participaron en el estudio). Estos estudiantes resolvieron tareas matemáticas complejas utilizando palabras, símbolos matemáticos y diagramas. Los diagramas producidos en la solución fueron particularmente interesantes ya que los estudiantes trataron de interpretar y representar una situación en tres dimensiones que implicaban movimiento. Se observó una elaboración pictórica única, marcada con constantes numéricas, etiquetados con variables, y trazando las secciones transversales como se muestra en el ejemplo siguiente.

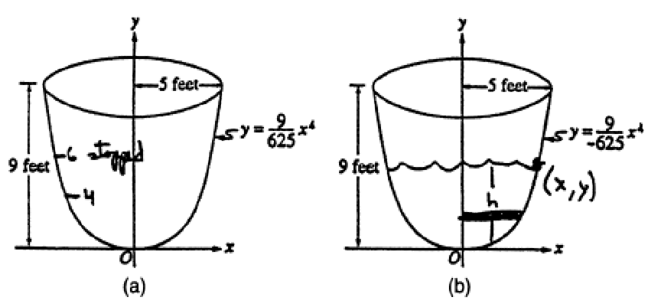

Gráfico 2. Ejemplos de gráficos o diagramas (George, 2005).

La observación más sorprendente que surgió a partir del análisis de la naturaleza de los esquemas, fue la diversidad de esquemas que los estudiantes produjeron dentro de cada problema de respuesta libre, sobre todo teniendo en cuenta que todos los estudiantes se presentaron con los mismos diagramas dados. También se encontró que los estudiantes son capaces matemáticamente de usar varias rutas para dar soluciones a un problema particular.

Lo que nos plantea este estudio para concluir, es que por medio de un medio semiótico, los alumnos pudieron modificar o crear un esquema nuevo para la resolución de los problemas de cálculo presentados. Esto implica, que se logró desarrollar una capacidad de visualización o interpretación del diagrama, la creación de imágenes mentales al igual que imágenes físicas para obtener un razonamiento matemático complejo.

También se ha estudiado el papel del *discurso* en el aprendizaje de las matemáticas como el estudio de Planas (2008), el cual realiza una investigación para explorar la práctica educativa teniendo en cuenta los cambios en el discurso del profesor y los alumnos, esto debido a la interacción entre unos y otros dentro el aula de matemáticas. Este estudio se realizó con alumnos de 15-16 años, los cuales se sometieron a una clase regular de Matemáticas con el fin de resolver un problema matemático de porcentaje. Los resultados revelan la importancia que tuvo el discurso del profesor para la solución del problema de los alumnos, ya que el discurso del profesor marcaba las pautas para reconocer y facilitar la resolución del mismo y así poder reflexionar por distintos caminos matemáticos. El uso del discurso permitió clarificar las nociones matemáticas, generar procesos de conflicto para ser interpretados, y hacer cambios en la resolución de problemas.

Para concluir es oportuno retomar que las Matemáticas son actividades humanas en las que participamos todos los días y que desde edad preescolar, es posible promover el desarrollo de un razonamiento matemático, (desde el conteo por colecciones, repartición de éstas, representaciones numéricas).

También, es importante reconocer que existen elementos que favorecen al surgimiento del razonamiento matemático como: las ***actividades contextualizadas*** las cuales ayudan a la asignación de sentido y uso a los conocimientos matemáticos, además éstas obligan al estudiante a hacer uso de las herramientas matemáticas para la solución de un problema, además permite que el aprendizaje de las matemáticas sea más significativo, ya que los problemas comienzan a tener sentido para el estudiante.

Por otro lado, la ***interacción social*** permite que el novato (la persona menos experimentada) entienda la actividad; y que los estudiantes al trabajar en colaboración tengan oportunidad de reunir ideas, pensar en muchas opciones de resolución, de cuestionar, criticar, analizar y justificar sus procedimientos y resultados.

Los ***intermediarios semióticos***, enfatizan que tanto el discurso, esquemas y diagramas, ayudan a entender mejor un problema, ayudan a conceptualizarlo y representarlo por medio de éstos, haciendo posible que los estudiantes razonen matemáticamente.

Las investigaciones empíricas antes mencionadas nos muestran claramente, que las actividades situadas (contextualizadas), los intermediarios sociales y los intermediarios semióticos efectivamente favorecen el razonamiento matemáticos.

III. Propósitos.

Dada la problemática educativa con respecto al bajo desempeño del aprendizaje matemático en los alumnos mexicanos, donde los estudiantes no logran apropiarse de los conocimientos matemáticos curriculares y desarrollo del razonamiento como lo muestran las evaluaciones tanto nacionales como internacionales, se presenta un cambio en la reforma (RIEB) que busca la generación de competencias desde el preescolar a partir de una perspectiva sociocultural. Es aquí donde el presente estudio tiene cabida, ya que, este proyecto apoya el cambio educativo con esta perspectiva, retomando además, la actividad como papel fundamental para la participación y uso de sistemas culturales para el origen y desarrollo de las capacidades intelectuales. Es así como se plantea el objetivo principal de este proyecto el cual es **entender y describir el surgimiento y desarrollo de competencias matemáticas de preescolar**, dentro de entornos de aprendizaje que fomenten la participación del alumno en la solución de problemas mediante la cooperación entre compañeros y guía docente para la promoción de competencias matemáticas.

Además, se busca contribuir con el desarrollo de las Competencias Matemáticas: numéricas, geométricas y espaciales señaladas denle el Programa de Educación Preescolar, (mostradas en la tabla 2). Para poder realizar este objetivo esencial se plantearon varios objetivos:

Objetivos específicos.

- Evaluar las competencias matemáticas de los niños preescolares contempladas en el PEP (2004).
- Diseñar e implementar situaciones de aprendizaje contextuales que propicien el razonamiento matemático.
- Apoyar en la formación y conducción de docente en la implementación de situaciones de aprendizaje contextualizadas en el campo del razonamiento matemático.

- Analizar la participación e interacción de los niños en preescolar dentro del entorno desarrollado en el aula mediante situaciones de aprendizaje con la intención de reconstruir el desarrollo de las capacidades intelectuales que constituyen formas de pensar particulares en éste caso, el campo de las matemáticas.

IV. METODOLOGÍA

En el siguiente apartado, se presentará la perspectiva metodológica la cual delinea y define las decisiones metodológicas importantes que se realizaron para cumplir los objetivos de este proyecto, después se menciona la metodología del componente cuantitativo y la del componente cualitativo de una manera más detallada.

4.1 Perspectiva metodológica.

Una vez establecidos los objetivos de ésta investigación, se tomaron decisiones metodológicas para organizar el planteamiento de la investigación y el análisis de datos. Lo que caracteriza la metodológica de éste proyecto, es que se crearon las condiciones necesarias para propiciar el surgimiento y desarrollo de capacidades intelectuales matemáticas. A continuación se enunciarán las decisiones tomadas:

Método genético experimental de Vigotsky: No partimos de la observación de situaciones naturales, partimos de situaciones que estuvieron diseñadas, organizadas y estructuradas con el objetivo de poder producir el surgimiento y desarrollo de las capacidades de razonamiento matemático.

El objetivo es identificar y caracterizar los procesos y mecanismos que promueven el surgimiento y desarrollo de las capacidades intelectuales.

Esto se realizó por medio del método genético experimental de Vigotsky, quien argumentaba que los procesos del ser humano solamente pueden ser entendidos en el curso del desarrollo (Wertsch, 1988).

Es decir, necesitamos concentrarnos, no en el producto del desarrollo, sino en el proceso mismo mediante el que las formas superiores se constituyen (Vigotsky, 1978 citado en Wertsch 1988)

> *Nuestro método recibe el nombre de experimental-evolutivo por el hecho de que crea o produce artificialmente un proceso de desarrollo*

> *psicológico. Este punto de vista es igualmente apropiado para el objetivo básico del análisis dinámico. Si reemplazamos el análisis de objetos por el análisis de procesos, entonces la labor básica de investigación se transforma en una reconstrucción de cada uno de los estadios evolutivos del proceso: el proceso debe ser construido hasta sus estadios iniciales (Vigotsky, 1978 citado en Wertsch 1988)*

Para realizar esta investigación se diseñó un ambiente artificial, controlado y sistemático en el cual se presentan actividades reales socialmente significativas, en donde su realización requiere del uso del conocimiento matemático.

Unidad de análisis: se observaron las actuaciones de los participantes en la evolución en el tiempo, por medio de la unidad de análisis. Se adoptó como unidad de análisis a las situaciones de aprendizajes socio-funcionales debido a que con éstas se pretende propiciar el aprendizaje de conocimientos, habilidades y estrategias matemáticas en contextos que reflejen la forma en la cual el conocimiento será usado en la vida real (Collins 1988 citado en Alatorre 2008); y reconstruir el proceso de construcción de conocimiento. Pues ésta unidad de análisis (situaciones de aprendizaje) tomada como segmento u episodio, abre la puerta o ventana para que se desplieguen las competencias matemáticas.

De acuerdo a lo anterior, este estudio tiene un análisis micro genético debido a que se realizó la formación a corto plazo de un proceso psicológico determinado, es decir el surgimiento de las competencias matemáticas por medio de las situaciones de aprendizaje. Como menciona Vigotsky:

> *El estudio de un dominio requiere de la observación de los intentos repetidos de los sujetos en la solución de una tarea determinada. De ésta manera podemos pensar que este tipo de análisis es un estudio longitudinal a corto plazo. Así Vigotsky señala que al ignorar ésta forma básica de transición genética, los estudios sobre el aprendizaje y los estudios experimentales dejan de lado la fuente de datos más interesante que poseen (Vigotsky, 1978 citado en Wertsch 1988).*

Debido a esto se observaron las situaciones de aprendizaje durante toda su dimensión temporal, es decir en los tres grados del centro educativo y durante todo el ciclo escolar, observando situaciones de aprendizaje como unidad básica de análisis con la con el fin de poder detectar y explicar el origen y las transformaciones en el tiempo de las capacidades intelectuales.

Análisis de los procesos psicoculturales en el aula: Para el análisis de los datos cualitativos, retomamos la idea o premisa en la que el objeto de estudio de esta investigación (capacidades intelectuales) es de origen social pues pasa de estar afuera en un plano interpsicológico y se internaliza pasando a un plano intrapsicológico. Por lo tanto afirmamos que las capacidades intelectuales surgen en un plano social, pues son la internalización de la cultura, ya que se internalizan los sistemas simbólicos y las actividades socio-culturales (Wertsch, 1988).

Debido a que nuestro objeto de estudio, es de naturaleza social, nos permite observar las relaciones y acciones humanas de los individuos, para poder reconstruir el origen de las capacidades intelectuales. Además, por medio de este método incorporado, se realizaron descripciones analíticas o reconstrucciones de escenas de grupos culturales-educativos, así se recrea al lector las creencias compartidas, practicas, artefactos, conocimientos populares y comportamiento del grupo escolar, centrándonos en la grabación en detalle de los aspectos de un mismo fenómeno, que en éste caso son las competencias matemáticas.

Muestreo intencional de situaciones de aprendizaje: se pretendió reconstruir la línea evolutiva de las competencias, mostrando un razonamiento que implican el uso del número en cuestiones laborales, juego, públicas-cotidiano y científicas. Éste muestreo se realizó con la observación de todos los grupos en las aulas, con la observación de un equipo de cuatro niños dentro del aula y con la observación de un equipo fuera del aula.

El muestreo de situaciones permitió recoger las diferentes expresiones de los factores relevantes de las situaciones de aprendizaje o del ambiente de aprendizaje. Se observaron las diferentes participaciones y colaboraciones en las distintas modalidades como en juego, intercambio, rutina, etc., lo que permite que se expresen estos elementos del ambiente y los factores que son fundamentales en la actividad, permitiendo que sea muy fuerte la presencia del esquema o medio semiótico, material cultural, interacción o participación, etc.

*Diseño de investigación: s*e utilizó un diseño mixto debido a que tiene dos componentes, un componente cuantitativo y otro cualitativo, con el propósito de obtener datos complementarios acerca de la adquisición de competencias matemáticas y así identificar los procesos de construcción de conocimiento implicados en este desarrollo.

El estudio comprendió la evaluación de competencias matemáticas para conocer el efecto de la intervención, la creación de ambientes de aprendizaje y la reconstrucción del dato.

El componente cuantitativo consistió en tres fases; una evaluación inicial, intervención y una evaluación final con el fin de contemplar las competencias adquiridas en los niños preescolares, al estar expuestos a las situaciones de aprendizaje.

El componente cualitativo consistió en una sola tapa con lo cual simultáneamente se recolecta, procesa y analiza la información obtenida; el dato cualitativo ayuda a explicar los resultados significativos de la primera etapa cuantitativa. En éste componente se realizaron observaciones participantes con el fin de la obtención de datos de los preescolares, dentro de las situaciones de aprendizaje durante el ciclo escolar, con el fin de adoptar una aproximación basada en analizar y comprender en profundidad un número relativamente pequeño de casos en cada investigación particular. Y así tener mayor profundidad para reconstruir la evolución del razonamiento matemático (ver tabla 3).

Tabla 3. Diseño de investigación.

COMPONENTE CUANTITATIVO	COMPONENTE CUALITATIVO
Diseño: cuasi experimental con dos condiciones y tres fases: evaluación inicial, intervención y evaluación final.	Diseño: Basado en un enfoque micro genético con una metodología etnográfica y técnicas de corte observacional.
Participantes: 136 niños en total Comparación: 78 Intervención: 58	Participantes: 12 niños (4 por grado escolar)
Escenario: 3 CENDIS de Delegación.	Escenario: CENDI “Granada

A continuación, se presenta el desarrollo de la metodología del componente cuantitativo así como del componente cualitativo. En éstas se describirán el diseño, participantes, escenario, instrumento o técnicas para la recolección de datos de cada uno de los componentes.

4.2 Componente cuantitativo

Este componente cuantitativo posee un diseño cuasi experimental con una muestra intencional con dos condiciones: CENDI de intervención y CENDI de comparación; además de tres fases: evaluación inicial, intervención y evaluación final (ver Tabla 4)

Tabla 4 Organización Componente Cuantitativo.

Componente cuantitativo	
Centro de intervención	Centros de comparación
Evaluación inicial	Evaluación inicial
Intervención	-----------------------------------
Evaluación Final	Evaluación Final

Participantes

Participaron 136 niños y niñas de los tres grados de educación preescolar con edades de entre 2 y 7 años al inicio del curso escolar. Distribuidos en 3 centros de distintas delegaciones del Distrito Federal, CENDI 5 “Fernando Casas”, CENDI 4 “Miguel Hidalgo y CENDI “Granada”; para los fines de este informe se tomaron en cuenta los datos del Centro “Granada” perteneciente a la Delegación Miguel Hidalgo como grupo de intervención y los otros dos Centros en conjunto conformaron el grupo de comparación.

En los centros de comparación contaron con 78 niños y niñas de los tres grados de preescolar con edades de 3 a 7 años al inicio del curso, de los cuales 16 de primer grado, 30 de segundo grado y 32 de tercer grado.

El Centro de intervención se componía en 62 niños en total, para este estudio en el cual se llevó a cabo la intervención contó con 58 niños y niñas de los tres grados de preescolar de 2 a 7 años de edad, 19 alumnos de primer grado, 19 de segundo grado y 20 de tercer grado, en este Centro asistían niños con Síndrome de Down, problemas motores y de lenguaje (Tabla 5)

Tabla 5 Organización Componente Cualitativo.

Componente cualitativo	
CENDI de intervención	CENDIS de comparación
Número de niños	Número de niños
58 niños	78 niños

La tabla 6 nos muestra una visión general de las características de la población tanto del grupo de comparación como el de intervención con respecto a las edades, sexo, grado, asistencia a guardería y años en guardería de los niños. Como se puede observar en la tabla 6, la proporción de niños y niñas tanto en el grupo de intervención como en el de comparación es similar, ya que es mayor el porcentaje de niñas en los dos grupos y presentan una minoría del género masculino.

En cuanto a las edades podemos observar que el grupo de comparación cuenta con una mayor proporción de niños entre los 4 y 5 años de edad; así como el grupo de intervención la mayor parte de la población tenia de 3 a 5 años de edad. A diferencia del grupo de comparación, el grupo de intervención tenía niños de 2 años al inicio del ciclo escolar; y a diferencia del grupo de intervención, el grupo de comparación no contaba con niños de 6 años de edad (Ver tabla 6).

En lo que respecta al grado escolar, el grupo de intervención contó con un 13.7% más de niños de primer grado a diferencia al grupo de comparación; mientras que en segundo y tercer grado el grupo de comparación presenta un porcentaje mayor de 9.3 % y 4.4% respectivamente que el grupo de intervención.

Por otra parte una proporción considerable de la población tanto del grupo de intervención como de comparación no asistieron a guardería, sin embargo, un porcentaje de aproximadamente 40% del grupo de comparación y 10% del grupo de intervención si asistieron, mostrando que la proporción de cada grupo, ya conocían el ambiente, la rutina o reglas escolares al estar aproximadamente 1 a 2 años insertos en un aula antes del preescolar (Ver tabla 6).

Cabe mencionar que dentro de los Centros, había niños de edades desde 2 a 7 años, sin embargo para el análisis de resultados se redujo el rango de edad de 3 a 6 años.

Tabla 6. Características generales de la población

Edad		**Comparación (%)**	**Intervención (%)**
	2	-	6.9
	3	22.2	29.3
	4	37.5	31
	5	38.9	27.6
	6	-	3.4
	7	1.4	1.7
Sexo			
	Niño	41.7	44.8
	Niña	58.3	55.2
Grado			
	1º	20.8	34.5
	2º	40.3	31
	3º	38.9	34.5
Asistencia a Guardería			
	Si	39.7	10.7
	No	60.3	89.3
Años en Guardería			
	1	70.4	50
	2	25.9	16.7
	3	**3.7**	**33.3**

La tabla 7 nos muestra las características de la estructura familiar de las poblaciones, el lugar que ocupa el niño entre los hermanos y el cuidador principal tanto del grupo de intervención como de comparación.

Lo que nos muestra la tabla 7 es que de acuerdo al tipo de familia en los dos grupos intervención y comparación la mayor parte de la población tienen una familia nuclear, esto quiere decir que la mayoría de la población vive con su mamá y papá, mostrando que tal vez haya más posibilidades de que la población tenga más experiencias educativas al tener una familia nuclear, en contraste si la población se desarrolla dentro de una familia extensa donde conviven un padre de familia y otros familiares más, como tíos, primos, etc., en donde la atención al educando de ésta población sería poco ajustable a las necesidades educativas que tendría el alumno (Ver tabla 7).

Respecto al lugar que ocupa el niño en la familia dentro de los hermanos, tanto en el grupo de comparación como en el de intervención existe un mayor porcentaje cuando se refiere al hermano mayor. A diferencia del grupo de comparación, el grupo de intervención no tiene ningún niño que ocupe el quinto lugar entre sus hermanos (Ver tabla 7).

Para el cuidador principal se observa que la madre es quien sobresale al cuidado del niño tanto en el grupo de comparación como en el de intervención, aunque existe una diferencia del 18.8% en el grupo de comparación en el cuidado de la madre. En lo que se refiere al cuidado por parte de los abuelos el grupo de intervención presenta un 16.1% más de este tipo de cuidado en contraste con el grupo de comparación. También se puede observar que sólo en los grupos de comparación hay casos donde los cuidados son por parte de personas que no son parientes de los niños, lo que se esperaría fuera que el cuidador principal fuera aquel que pudiera cumplir con las necesidades educativas del alumno, que en este caso podría ser dentro de una familia nuclear donde uno de los progenitores cumpla con las necesidades del alumno (Ver tabla 7).

Tabla 7. Características de la estructura familiar de la población

	Comparación (%)	Intervención (%)
Tipo de familia		
Familia mono parental	1.4	5.3
Familia de tres generaciones	6.9	14
Familia extensa	41.7	26.3
Familia nuclear	48.6	49.1
Otro tipo de familia	1.4	5.3
Lugar que ocupa entre los hermanos		
1	44.4	50
2	29.2	31
3	19.4	13.8
4	5.6	5.2
5	1.4	-
Cuidador principal		
Mamá	73.2	54.4
Papá	1.4	1.8
Ambos	4.2	3.5
Hermanos	-	1.8
Abuelos	8.5	24.6
Tíos	2.8	3.5
Múltiples	8.5	10.5

Nota: La tabla se lee verticalmente.

En la tabla 8 se observa el nivel socioeconómico, para lo cual se combinó la información sobre la escolaridad de los padres, el nivel de hacinamiento en que vive el niño y si la vivienda era propia, rentada o prestada. Como podemos observar, la mayor parte de la población en los dos grupos cuenta con un nivel socioeconómico medio. En cuanto al trabajo remunerado podemos observar que en el grupo de comparación la contribución económica es mayor por parte de los padres ya que cuentan con un 32.4% más que en el grupo de intervención. Sin embargo el grupo de intervención cuenta con un 26% más de contribución económica por ambos padres que el grupo de comparación (Ver tabla 8).

La tabla 8 muestra la ocupación de los padres y madres. En lo que respecta a la ocupación de madres en el grupo de comparación la mayor parte de la población se dedica al hogar contando con un 34.1% más que el grupo de intervención. Sin embargo, el grupo de intervención cuenta con un 29% más de madres que son empleadas contrastando con las madres del grupo de comparación.

En cuanto a la ocupación de los padres, en los dos grupos la mayor parte de la población son empleados. En el grupo de comparación las ocupaciones varían ya que presentaron la ocupación de comerciantes y chóferes de taxi, a diferencia del grupo de intervención donde las ocupaciones varían entre oficio y profesionistas empleados (Ver tabla 8).

Podemos observar que en cuanto a la escolaridad de ambos padres. Las madres en el grupo de intervención cuentan con Secundaria y Bachillerato a diferencia del grupo de comparación donde la mayoría de la población de las madres cuentan con la Secundaria. El porcentaje de madres con licenciatura es mayor en el grupo de comparación ya que contaron con 7.9% más de madres con licenciatura a diferencia del grupo de intervención. En cuanto a la escolaridad de los padres en los dos grupos existe una mayor proporción en la escolaridad de Secundaria y una menor proporción de la población con escolaridad Licenciatura, mostrando que el existe una mayor posibilidad que al tener un nivel educativo mayor por parte de los padres y madres, las oportunidades de aprendizaje suelen ser mayores (Ver tabla 8).

Tabla 8. Características socioeconómicas de la población

	Comparación (%)	Intervención (%)
Nivel Socioeconómico		
Alto	20.3	23.2
Medio	72.5	67.9
Bajo	7.2	8.9
Trabaja remuneradamente		
Mamá	7.6	14.3
Papá	48.5	16.1
Ambos	43.9	69.6
Ocupación mamá		
Hogar	45.2	11.1
Oficio	1.6	1.9
Comerciante	19.4	16.7
Empleado	21	50
Profesionista empleado	11.3	14.9
Otros	1.6	5.6
Ocupación papá		
Hogar	-	-
Oficio	6.3	14.6
Comerciante	14.1	12.5
Empleado	57.9	50.0
Profesionista empleado	17.2	23.0
Otros	4.7	-
Escolaridad mamá		
Primaria	20	15.8
Secundaria	48.6	40.4
Bachillerato	20	40.4
Licenciatura	11.4	3.5
Escolaridad papá		
Primaria	15.9	13.5
Secundaria	50.7	48.1
Bachillerato	20.3	26.9
Licenciatura	13	11.5

Escenario

La intervención se llevó a cabo en el Centro de Desarrollo Infantil “Granada” que se ubica en un mercado en la delegación Miguel Hidalgo, este Centro de Desarrollo Infantil cuenta con todos los servicios básicos de agua, luz, gas y drenaje, además de teléfono, computadora, videocasetera y televisión.

El espacio físico incluye cocina, comedor, patio en el cual había juegos como resbaladilla y columpios, además el espacio incluye bodega de materiales, dirección, consultorio y 5 aulas de las cuales pertenecían una a lactantes, una a segundo grado, otra a tercer grado, y las dos restantes a primer grado.

En cuanto al personal que laboraba en el Centro de Desarrollo Infantil se encontraba la directora, una psicóloga, dos cocineras, un intendente y 5 docentes. Las cinco docentes estaban a cargo de un grupo sin de asistentes.

Instrumento

A continuación, se describen los instrumentos que se utilizaron para llevar a cabo este estudio, en la primera sección se presenta la descripción de la prueba para evaluar las competencias matemáticas de niños preescolares y la segunda sección se presenta la descripción del cuestionario socio-demográfico.

*a) Evaluación de las competencias matemáticas en preescolar: l*a prueba que se utilizó para evaluar a los niños y saber qué nivel de competencias tenían al inicio del ciclo escolar y las que tenían al final de la intervención, esta prueba consta de 70 reactivos que cumplen con la evaluación de las competencias matemáticas del Programa de Educación Preescolar cubriendo los aspectos de Número, Forma, Medida y Espacio.

Los reactivos que se calificaron con 2 si el niño pudo responder solo de manera correcta, se le calificaron con 1 si el niño necesitó ayuda para responder de manera correcta, o se calificaron con 0 cuando los preescolares no respondieron o lo hacen de manera incorrecta. Esta prueba es de ejecución y tiene una duración aproximada de 45 minutos, que se realiza en un cuarto cerrado, con la luz adecuada, sin distracciones, además, es una prueba situada o contextualizada, que gira en torno a la construcción de una ciudad

Para aplicar la prueba, los niños se sentaron frente al evaluador de tal forma que no pudieran ver los materiales antes de tiempo, pero que sí tuvieran una visión amplia de los materiales con los que tenían que trabajar en cada momento. La prueba contó con 74 reactivos, la tabla 9 muestra el número total de los reactivos por aspecto, ya sea Número, Forma, Espacio o Medida.

Tabla 9. Reactivos por aspecto matemático

Aspecto matemático que cubre	Total de Reactivos
Número	28
Forma	13
Espacio	23
Medida	10
Total	**74**

Existen tres reactivos de los cuales son de tipo cualitativo. Se contemplaron los 4 niveles de representación numérica señalados por Gonzales y Weinstein (2001) a los cuales les añadimos 8 categorías (ver la tabla 10).

Tabla 10. Niveles de representación numérica

Nivel de Representación	Descripción	Categorías
Idiosincrático	El niño al representar no tiene en cuenta ni el tipo ni la cantidad de objetos presentados. Realiza una representación gráfica que no tiene relación con la situación planteada.	
Pictórico	El niño representa tanto los objetos presentados como la cantidad de los mismos.	Incorrecto Correcto
Icónico	El niño representa la cantidad de objetos mediante símbolos que no se parecen al objeto presentado.	Incorrecto Correcto
Simbólico	El niño representa la cantidad de objetos mediante números.	Incorrecto Correcto Convencional

Los objetivos de la aplicación de esta prueba de evaluación de competencias matemáticas en preescolar, fueron conocer el nivel de competencias que los niños tenían al inicio del curso escolar para realizar el diseño de situaciones de aprendizaje y conocer el impacto del programa de intervención para la promoción de las competencias matemática al final del ciclo escolar.

b) Cuestionario Socio demográfico: finalmente se llevó a cabo un cuestionario socio demográfico, en el cual se obtuvieron datos generales del niño, escolaridad de los padres, ingresos económicos, familiares y de vivencia.

Este cuestionario fue aplicado a los padres de familia por la psicóloga, la directora del Centro y psicólogas de la intervención.

Procedimiento

Como se mencionó anteriormente el estudio consiste en 3 fases: fase 1 evaluación inicial (pre-test), fase 2 intervención y fase 3 evaluación final (pos-test) que se explicarán en los siguientes apartados:

Fase 1 Evaluación inicial pre-test

Dentro de esta fase se realizó la evaluación de competencias matemáticas en preescolar, la cual se aplicó a cada niño, sin distracciones, en un lugar adecuado. Esta evaluación se realizó durante las primeras semanas del ciclo escolar de los niños.

Fase 2 Intervención.

La fase de intervención se llevó a cabo dentro del programa de prácticas "Entornos para el Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Preescolar".

Basándose en este programa, este estudio tiene el propósito de diseñar, implementar y evaluar situaciones de aprendizaje que permitan a los alumnos de preescolar construir, usar y razonar los conocimientos matemáticos a través de su participación en actividades reales socialmente significativas con el fin de desarrollar las competencias matemáticas y construir un conocimiento matemático, alrededor de tres áreas de conocimiento, las matemáticas, lectoescritura y ciencias, mediante la participación en actividades reales socialmente significativas (Alatorre, 2005).

Las situaciones de aprendizaje que se plantean en el programa, buscan a través de entornos contextualizados, el fomento y desarrollo de capacidades de razonamiento superior, en donde se planea una forma de aplicar el aprendizaje que se manifiesta en situaciones de la vida cotidiana (Alatorre, 2005).

Se decidió continuar con las características del programa "Entornos para el aprendizaje en educación preescolar", debido a que se han obtenido datos significativos en años anteriores de implementación, favoreciendo el desarrollo de las competencias matemáticas en niños preescolares.

Durante esta fase de intervención se diseñaron e implementaron de situaciones de aprendizaje y la asesoría docente (Ver tabla 11).

Tabla 11. Organización de intervención.

CENDI de intervención	CENDIS de comparación
Evaluación inicial	Evaluación inicial
Intervención -Diseño e implementación de situaciones de aprendizaje. -Asesoría y formación docente.	-------------------------------------
Evaluación Final	Evaluación Final

Durante esta intervención se llevaron a cabo 45 situaciones de aprendizaje (Ver anexo 1), las situaciones de aprendizaje implementadas durante la intervención presentan un enfoque sociocultural, ya que tienen ciertas características: a) por una parte son situaciones contextualizadas a un escenario real o a un entorno social común, es decir, todas las situaciones corresponden a una problemática real como intercambio comercial, juegos (de competencia y de mesa), rutinas sociales, públicas, etc; b) las situaciones de aprendizaje presentan medios o apoyos semióticos, desde ésta perspectiva se tomó como apoyo o medio semiótico a todos los esquemas, gráficas, tablas, representaciones gráficas, etc. es decir a todos aquellos medios de representación simbólica que pudieran ser medios de apoyos para construir el conocimiento; c) también se presentaron materiales o/y herramientas culturales; como las básculas, los termómetros, la cinta métrica, tazas medidoras, reglas, etc., estos medios son herramientas culturales, las cuales tienen inserto el sistema simbólico.

Además estas situaciones están guiadas con apoyo del docente, éste apoyo siempre se encuentra presente en la realización de las situaciones de aprendizaje, la docente es quien guía la situación y facilita las experiencias de los preescolares en la situación de aprendizaje.

Los apoyos docentes promueven el razonamiento al preescolar en la situación y sobre la situación, con el fin de reflexionar en la problemática a trabajar. La asistencia docente contiene diferentes tipos de ayudas, como; los cuestionamientos, las demostraciones, retroalimentaciones, instrucciones, guía, etc.

Cada una de estas situaciones se especifica en acciones tanto de la docente como del alumno y están dirigidos paso por paso para que se realicen, los pasos se encuentran organizados y son definidos para alcanzar la meta.

Estas situaciones de aprendizaje son entregadas a la docente para que la revisará y pudiera aplicarla en el aula; las situaciones de aprendizaje tuvieron una duración de aproximadamente 1 hora (depende del tipo de situación: rutina, proyecto, taller o juego), presentan motores cognitivos en cada paso al igual que la instrucción definida del paso.

Existen diferentes tipos de situaciones de aprendizaje; *las rutinas* son actividades breves que se realizan de la misma manera todos los días, por ejemplo graficar la asistencia y registrar la hora de entrada. *Los juegos* se llevan a cabo de acuerdo con sus características socialmente reconocidas, aunque se les agregan elementos como el registro de números*. Los proyectos* son actividades o eventos únicos con un inicio y un final determinado temporalmente, que requieren de la colaboración del equipo para obtener un resultado o elaborar un producto en concreto. Cada tercera semana del mes se lleva a cabo el único *taller* que se implantó, el taller de cocina donde los niños elaboraron diversas recetas sencillas.

*Formación docente y acompañamiento: s*e trabajó con la docente a fin de que comprendiera los objetivos, motores cognitivos y acciones de dichas situaciones, así como preparar los materiales de la situación. Se realizaron acciones específicas en esta asesoría como: a) al inicio del ciclo escolar se entregaron a las docentes el conjunto de situaciones para implementarse durante el ciclo escolar; b) se asesoraron martes y jueves, días en el que las psicólogas asistimos al CENDI, en el cual se trabajaron 20 min con cada maestra de cada grado para que se comprendiera totalmente la situación de aprendizaje y su aplicación. Esta asesoría consistía en una guía de asesoramiento la cual cumplía varios objetivos: como el que la docente comprendiera la situación de aprendizaje en su aplicación (motores cognitivos, pasos de aplicación, complejidad cognitiva, etc.), además que la docente comprendiera que competencias matemáticas se desarrollan en cada situación de aprendizaje por aplicar, a continuación se muestran algunos ejemplos de los cuestionamientos de la guía docente (ver tabla 12).

Tabla 12: Ejemplos de cuestionamientos para guía de asesoramiento.

Ejemplos de cuestionamientos en una asesoría docente:
¿Qué situación va a aplicar el día de hoy?
¿Qué es lo que va a realizar en el aula? (resultado del producto: elaboración de una gelatina, compra y venta, realización de un papalote, etc.)
¿Qué competencias va a trabajar en día de hoy?
¿A qué se refieren esas competencias? (cuestión de conocimiento como: entender el sistema de medida, resolución de problemas con operaciones como, suma resta, etc.)
¿Cuáles son los pasos a seguir de la situación?
¿Qué motores cognitivos son los más fuertes para que el niño comprenda la actividad a realizar?
¿Qué aprendizajes va a observar y que va a observar de la competencia en cuestión de la realización de los niños en la situación de aprendizaje?

Enseguida se entró al aula para el seguimiento de las situaciones de aprendizaje. Al finalizar el día se hacía una retroalimentación con las docentes para explicar lo que se observó, analizar lo que se pudo realizar adecuadamente, que hizo falta, etc. y se entregaron las situaciones posteriores.

Fase 3 Evaluación final (pos-test)

En la fase final, se aplicó el instrumento de evaluación de las competencias matemáticas en preescolar, con el objetivo de observar el impacto que tuvo la intervención en el desarrollo de razonamiento matemático. Esta evaluación se realizó con los tres grados del centro “Granada” durante las últimas semanas del ciclo escolar.

4.3 Componente Cualitativo

El componente cualitativo permitió observar la interacción, participación y uso de herramientas culturales o sistema simbólico de los preescolares para describir las experiencias que afectan el proceso de construcción del conocimiento y la evolución de las competencias matemáticas en el aula

Se decidió optar por una metodología etnográfica debido a que la naturaleza del objeto de estudio de esta investigación (capacidades intelectuales matemáticas) es de naturaleza social. Tomando a la etnografía como el estudio del conocimiento explicito y tácito del conocimiento cultural, donde la cultura no solo se refiere al conocimiento que la gente ha adquirido y usa para interpretar sus experiencias y generar nuevas formas de actuar (Siegel, 2005). Si no además que este conocimiento esta sostenido en la actividad practica que se organiza en un sistema social particular y concreto (Ratner, 1997). De tal forma que este método permite analizar los patrones de interacción y el contexto sociocultural donde ocurre el fenómeno social, en éste caso el aprendizaje (Lecompte, Preissle y Tesch, 1993)

Utilizamos el método etnográfico con la intención de analizar un fenómeno social particular más que la determinación a examinar una hipótesis sobre ésta. Por lo tanto por medio de este método etnográfico se pretendió revelar los significados que sustentan las acciones e interacciones que constituyen la realidad social del grupo estudiado, así como de describir y comprender las realidades como formas "totales" estructuradas y complejas, como fenómenos interconectados que se integran y adquieren sentido por sus relaciones e influencia recíproca.

Diversos estudios han mostrado la utilidad de la observación participante para entender por ejemplo; el modelo de la clase de matemática que provee elementos primarios para la elaboración futura de una teoría sobre la cual estructura la enseñanza de las matemáticas en un nivel intermedio, además, entender la comunicación en clase de matemáticas, la enseñanza matemática, el trabajo de colaboración como una herramienta de la mediación para alcanzar ajustes de aprendizaje más comprensivos, etc. (Olfos, 2001; Forero-Saenz (2008) y Cesar y Santos (2006).

Observación participante

Para el acopio del dato cualitativo se utilizó la observación participante, la cual se realizó en dos sentidos, por un lado dentro del aula con la conducción de la actividad a través de la docente de manera grupal y de un equipo específico, y en otro sentido fuera del aula donde la actividad fue conducida por el investigador. Ésta observación participante tuvo beneficios que nos permitió describir aspectos cualitativos dados por los comportamientos de los individuos, de sus relaciones sociales, sus creencias, su pensamiento, perspectivas y de las interacciones con el contexto y ambiente en el que se desenvuelven los individuos, estos aspectos cualitativos que se pueden observar mediante la recolección etnográfica varían en diferentes momentos y circunstancias. Por lo tanto estas observaciones se realizaron de una manera planeada como se muestra más adelante para observar el desarrollo del razonamiento numérico.

La observación participante consistió en observar con ayuda de la videograbación a todo el grupo en general dentro de las diversas situaciones de aprendizaje, detectando la influencia de aspectos en los procesos de construcción de conocimiento, así como la interacción de la maestra en la actividad total, interacción de niño-niño, la intención de la maestra con los niños, etc.

La observación participante fuera del aula ayudó a la reconstrucción de la línea evolutiva, así como, el proceso de construcción de conocimiento. Esta técnica permitió que los preescolares pudieran resolver un problema matemático en grupo con ayuda de una psicóloga para su dirección, fuera del aula con el fin de obtener un dato más claro, limpio y transparente, además esta técnica permitió explorar, describir, explicar e interpretar los datos obtenidos para obtener los mecanismos de construcción de conocimiento que se buscaban.

Participantes

Para la técnica de observación participante grupal participaron, 58 niños de los tres grados de preescolar de 2 a 7 años de edad pertenecientes al Centro de intervención “Granada” los cuales se observaron a estos 58 niños dentro del aula por grado escolar y también a un grupo de 4 niños de cada grado escolar. Es decir al momento de la grabación, se filmaba a todo en grupo en general y a un grupo de cuatro niños en equipo.

Para la observación participante fuera del aula se seleccionaron a 12 niños en edad preescolar que pertenecen al CENDI “Granada” de edades entre 2 y 7 años. Esta selección se efectuó tomando en cuenta las puntuaciones obtenidas en la evaluación inicial, es decir para la selección de este pequeño grupo de cuatro niños por grado, se tomaron dos rangos a partir de la evaluación inicial de las competencias, el percentil 25 y percentil 75, de los cuales se eligieron 2 niños que se encontraron por debajo del percentil 25 y 2 niños que se encontraron en un nivel alto, debido a que están por arriba del percentil 75; es decir, se observaron 4 niños por grado escolar por medio de una situación de aprendizaje contextualizada.

En el anexo 2 se muestran los indicadores matemáticos que poseen los niños seleccionados de la evaluación inicial por su puntaje obtenido, mostrando las características de los niños con un nivel bajo así como niños con nivel alto de acuerdo a su grado escolar.

Procedimiento

Con las dos observaciones participantes tanto dentro del aula como fuera de ésta, se pretendió entrar al aula para video grabar las interacciones, el diálogo y acciones con contenido matemático que se presentaban entre los niños y estos con la maestra. De igual forma se calendarizo la realización de las observaciones (día y hora), además de elegir las situaciones en las cuales se presentaría la observación.

Para la técnica de observación participante dentro del aula se realizaron observaciones de 10 situaciones durante el periodo del mes de Enero al mes de Junio, cada situación tuvo una duración de una hora y las situaciones de aprendizaje fueron distribuidas durante el ciclo escolar (ver Anexo 3). La observación participante dentro del aula fue general de la clase, se presentaban en todo el grupo sin distinción de grupos o equipos de niños y la conducción de ésta situación la realizaba la docente.

Finalmente, para la observación participativa fuera del aula, se realizaron 4 observaciones durante 6 meses, se distribuyeron de Enero a Junio, con una duración de una hora cada una, se eligieron las situaciones en las cuales se puso en juego la competencia de número.

Se introdujo al grupo de niños seleccionado a una situación contextualizada donde era conducida por el investigador. Se pretendió observar para registrar las interacciones y el diálogo que se realizaron dentro de ésta entre los niños y la maestra (Ver Anexo 4).

V. Análisis y resultados

En este apartado se presentan los análisis y resultados tanto del componente cuantitativo como del componente cualitativo.

5.1 Análisis de datos cuantitativos

En este capítulo se presentan los resultados y comparaciones de los datos obtenidos en las evaluaciones inicial y final de las competencias matemáticas en preescolar. Los resultados obtenidos de la evaluación inicial son el fundamento de las situaciones contextualizadas que se implementaron en el programa de intervención.

Se presentan a continuación tres apartados de resultados, el primer apartado se muestra el impacto de la intervención en el desarrollo de competencias matemáticas, el segundo apartado se presenta el impacto en los aspectos matemáticos y por último los niveles de razonamiento.

Para analizar los resultados se empleó un análisis de varianza univariado para conocer si existían diferencias entre ambas poblaciones en la evaluación inicial y un análisis de varianza por medidas repetidas para conocer el cambio de cada grupo en comparación con el cambio del otro grupo. Los análisis se realizaron con ayuda del programa SPSS en español versión 15.

5.2 Resultados cuantitativos

a) Impacto de la intervención en el desarrollo de competencias

En esta sección se muestra el impacto de la intervención en cuanto al pensamiento matemático de los niños y niñas de preescolar. En el gráfico 3 se puede observar que en la evaluación inicial el promedio del Centro de intervención (22.37) inicia ligeramente por arriba del Centro de comparación (20.44), sin embargo al analizar sus promedios esta diferencia no resulta significativa entre ambas poblaciones (F=23.23; p>.000).

En la evaluación final el Centro de Intervención obtuvo una media 34.57 y el Centro de Comparación obtuvo una media de 25.75; por lo tanto, tras la implementación de situaciones de aprendizaje, el Centro de Intervención presentó un gran impacto en el desarrollo de las competencias matemáticas ya que la pendiente de este grupo está muy pronunciada y queda por arriba de la curva del Centro de Comparación (Gráfico 3).

Al realizar un análisis de varianza por medidas repetidas el grupo de intervención presentó un mayor desarrollo en su razonamiento matemático en comparación con el otro grupo, el cambio en el grupo de intervención fue significativamente mayor (F=23.23; p>.000).

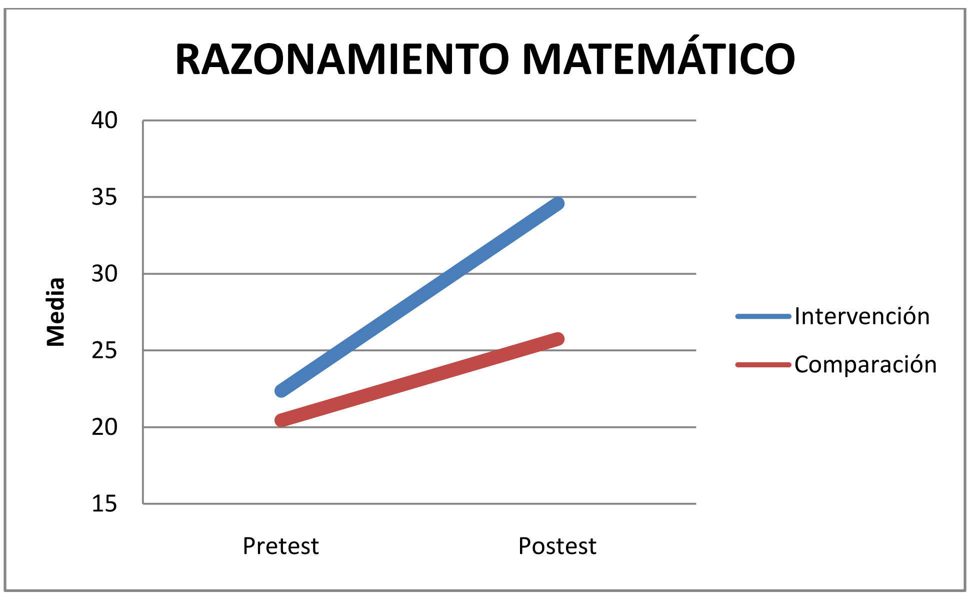

Gráfico 3 Resultado de puntuaciones totales promedio en el Razonamiento matemático

En la Gráfico 4 se presentan con mayor claridad los cambios en los puntajes totales de la prueba que presentan el grupo de Intervención y el grupo de Comparación; mostrando el impacto que tuvo el programa de intervención para el desarrollo de las competencias matemáticas en niños preescolares. Se observa que el nivel de razonamiento matemático alcanzado por el grupo de Intervención fue mayor que el nivel alcanzado por el grupo de Comparación; esto quiere decir, que el cambio que hubo entre el inicio y el final fue mayor en el grupo de intervención (12.2) que en el grupo de comparación (5.31); existiendo diferencias estadísticamente significativas. Por lo tanto, podemos afirmar que el Programa de Intervención favoreció el desarrollo de competencias matemáticas en los preescolares.

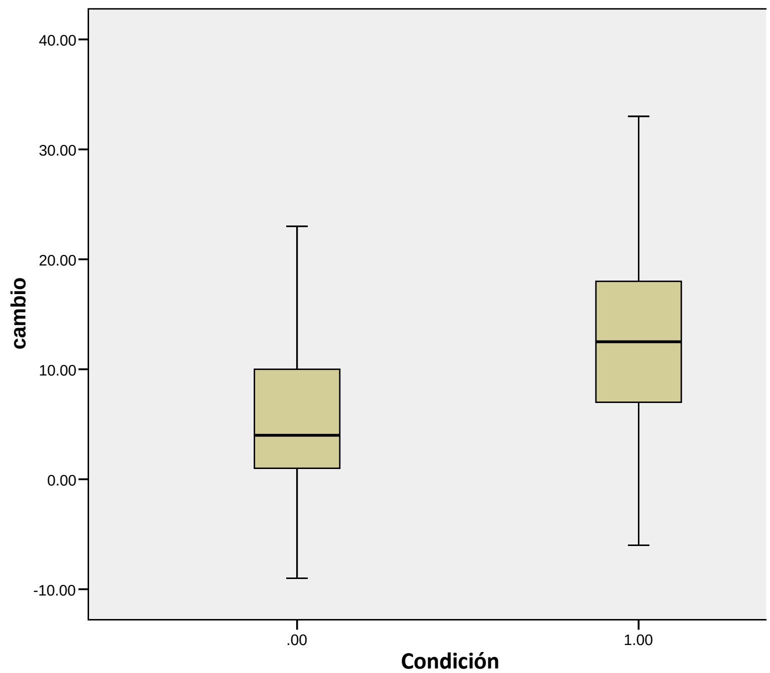

Gráfico 4. Cambio del Razonamiento Matemático

Cambio por aspecto

En esta sección se pretende mostrar el impacto de la intervención en lo que se refiere a cada aspecto matemático, es decir, los cambios que se dieron entre la evaluación diagnóstica y la evaluación final en el aspecto de Número y Medida, Geometría y Ubicación Espacial según los aspectos presentados en el Programa de Educación Preescolar.

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos en el razonamiento numérico y medida en ambas poblaciones; así como el crecimiento interno de cada grupo (ver tabla 13). Se pude observar que los puntajes obtenidos en la evaluación inicial tanto del grupo de intervención como el grupo de comparación, mostrando que no existen diferencias significativas entre ambas poblaciones.

Al realizar un análisis de varianza por medidas repetidas el grupo de intervención obtuvo un mayor cambio en el nivel de desarrollo del razonamiento numérico y medida en relación con sus propias evaluaciones, que el desarrollo de competencias numéricas del grupo de comparación (Tabla 13).

Tabla 13. Puntajes promedio por Razonamiento Numérico y Medida

	Pretest		**Postest**		**Cambio**	
	$\bar{x}$	***(DS)***	$\bar{x}$	***(DS)***	$\bar{x}$	***(DS)***
Comparación	10.70	6.08	12.35	6.52	1.65	*7.66*
Intervención	13.22	6.20	17.29	7.25	4.07	*7.61*

Estas diferencias en los cambios de razonamiento numérico y medida entre ambas poblaciones son estadísticamente significativas (F=21.79; p>.000) mostrando que el programa de intervención favoreció el desarrollo del razonamiento numérico en niños y niñas preescolares.

En la tabla 14 se muestran los resultados obtenidos en el razonamiento geométrico y espacial en ambas poblaciones además el crecimiento al interior de cada grupo. Se observa que al inicio de la evaluación el grupo de intervención tiene un puntaje mayor que el grupo de comparación, pero a pesar de esto, no es un diferencia significativa. Al realizar un análisis de varianza de medidas repetidas se observa que el grupo de intervención aumentó en el desarrollo del razonamiento geométrico y espacial al contrastarlo con del grupo de comparación, con una diferencia significativa (F=14.24; p>.000). Mostrando que la intervención impacto también en el desarrollo del razonamiento geométrico como espacial.

Tabla 14. Puntajes promedio por Razonamiento Geométrico y Espacial

	Pretest		**Postest**		**Cambio**	
	$\bar{x}$	***(DS)***	$\bar{x}$	***(DS)***	$\bar{x}$	***(DS)***
Comparación	10.87	*4.56*	13.50	4.52	2.63	*6.08*
Intervención	11.35	5.22	17.27	6.86	5.92	*6.05*

b) Niveles de razonamiento

En esta sección se presentan los cambios en el nivel de razonamiento matemático que presentan los niños tanto del grupo de intervención como del grupo de comparación. El gráfico 4 muestra el porcentaje de la población de los dos grupos en los 4 niveles de razonamiento matemático tanto en la evaluación inicial como en la evaluación final. Los 4 niveles de razonamiento corresponden a los 4 cuartiles del total de respuestas correctas obtenidas en la evaluación inicial.

En la tabla siguiente (tabla 15) se presenta de una manera más específica los indicadores matemáticos que identifican a cada nivel de razonamiento matemático para un mejor entendimiento.

Tabla 15. Descripción de los niveles de razonamiento matemático.

Nivel de razonamiento	Descripción del nivel
Nivel 4	Los niños logran resolver problemas de adicción, sustracción, división o multiplicación en cuestiones cotidianas sin ayuda de un experto. Identifican cuestiones de tiempo, como el año, mes o día en el que se encuentran. Además, tienen una ubicación espacial al ubicarse en planos o croquis con coordenadas, así como realizan trayectorias en croquis o planos. Comprenden el sistema de medición y usan este sistema, además comprenden la relación entre patrones de medida y unidades de medida. Comprenden características y propiedades de figuras y cuerpos geométricas, como lados, ángulos, aristas y caras.
Nivel 3	Logran medir con medidas convencionales. Logran construir objetos a partir de modelos representativos. Logran tener una ubicación espacial con respecto a la posición y direccionalidad de algunos objetos como derecha, izquierda, etc. Logran realizar secuencias de crecimiento. Identifica la ordinalidad en objetos hasta la tercera posición en una serie ordenada. Solo logran ubicarse en el día en el que se encuentra. Identifica posición como vertical u horizontal. Logran usar instrumentos de medición. Logran identificar cuerpos y figuras geométricas.
Nivel 2	Logran contar de mayor de menor en una serie de 10. Logran identificar un elemento faltante de una colección. Establecen rutas en un plano establecido. Usan numerales para identificar elementos. Identifican cuerpos geométricos sencillos Identifican características geométricas sencillas como perímetro. Identifican conocimientos sobre las relaciones de ubicación de orientación como: arriba de, abajo de, sobre de, etc. Identifican numerales en precios de compra y venta. Comprenden el uso de un instrumento de medición.
Nivel 1	Identifican conocimientos sobre las relaciones de ubicación de orientación como: arriba de, abajo de, sobre de, etc. Logran armar un cuerpo geométrico a partir de un patrón. Presentan cardinalización, así como conteo. Logran representar un conjunto de colecciones. Comunican posiciones y desplazamientos de objetos y personas utilizando términos como dentro, fuera, arriba, abajo.

Lo que se muestra en el Gráfica 4 es que en la evaluación inicial el grupo de comparación contaban con un 31% de niños que se ubicaban en el primer nivel de razonamiento matemático a diferencia del grupo de intervención que solo contaba con el 13% durante la evaluación inicial, al evaluarlos en el pos test podemos observar que se redujo el porcentaje de niños que se ubican en el nivel 1 en los dos grupos, el grupo de comparación obtuvo un porcentaje de 10.23% y le grupo de intervención un porcentaje de 5.6%, esto quiere decir que el grupo de intervención tuvo muy pocos niños que solo lograron repetir, identificar o nombrar algunos conocimientos matemáticos como la serie numérica al introducirlos en tareas muy contextualizadas, tomando en cuenta que en este análisis se incluyeron también a los niños de primer grado.

Al inicio de la evaluación el grupo de intervención tiene un mayor número de niños en el nivel 2 con 33.3% al contrastarlo con el grupo de comparación que tiene un 20.7% de niños. La reducción de la población en este nivel fue mayor en el grupo de intervención que en el grupo comparación, obteniendo un 18.5 % el grupo de intervención y un 27.1% en el grupo de comparación; esto nos muestra que solamente una quinta parte de los niños relaciona algunos conocimientos para poder conformar otros un poco más complejos que en el nivel 1, los niños en este nivel conocen características del conteo, la serie numérica y logran establecer correspondencia biunívoca y cardinalización.

En lo que respecta al nivel 3 donde los niños tienen todos los conocimientos matemáticos, sin embargo los niños no pueden aplicar estos conocimientos a un problema significativo, el porcentaje del grupo de intervención fue de 25.9% en la evaluación inicial y un 9.3% en la evaluación final, observando que se redujo más del 2 veces la población en ese nivel, el grupo de comparación obtuvo un 22.4% en la evaluación inicial y un 25.4% en la evaluación final presentando muy poco cambio en ese nivel.

Por otro lado, en el nivel 4 se observa un gran cambio, el porcentaje del grupo de comparación que se ubicaba en el nivel 4 obtuvo 25.39% en la evaluación inicial y un 37.3% en la evaluación final, contrastando con el grupo de intervención que obtuvo un 27.8% de niños en la evaluación inicial y un 66.7% en la evaluación final, se observa que el porcentaje en la evaluación final aumentó mucho más en el grupo de intervención que en el grupo de comparación, mostrando que existen más niños del grupo de intervención donde el nivel de razonamiento es más complejo, en el que los niños pueden reflexionar, usar el conocimiento y su forma de razonar es más abstracta, además dentro de este nivel los niños usan el conocimiento en diversos problemas y buscan una estrategia matemática para resolverlos.

El cambio del nivel 1 al nivel 4 fue mayor en el grupo de intervención que en el grupo de comparación; esto quiere decir que el porcentaje de niños que pasa de un nivel a otro no solo se refiere a que contesten más reactivos de la evaluación, si no que contestan los reactivos más difíciles demostrando que la intervención presentó un cambio en la forma de pensar de los niños de una manera simple al inicio a una más compleja al final.

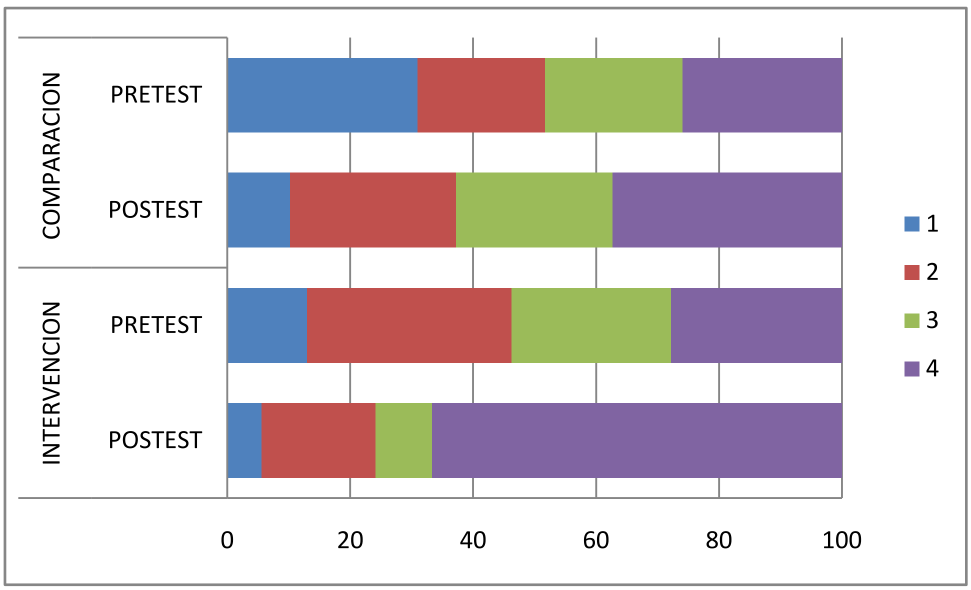

Gráfico 5. Niveles de Razonamiento Matemático

5.3 Análisis de datos cualitativos

El análisis de datos responde a los objetivos planteados que parten de la situación de aprendizaje como unidad de análisis, esta situación de aprendizaje es una actividad culturalmente reconocida, presenta una secuencia organizada y posee una meta a cumplir.

De acuerdo a lo anterior, la unidad mínima de este análisis es un segmento de acción conjunta, el cual es definido como un fragmento de acción con objetos y sobre objetos, estas acciones son los componentes fundamentales de la actividad y que dentro de ésta tienen una organización temporal, con un objetivo, el cual contribuye al cumplimiento de la meta de la situación de aprendizaje.

Además este análisis cualitativo está basado en un enfoque microgenético debido a que permite describir los procesos de construcción de conocimiento, ya que como mencionan Flynn, Pine y Lewis (2007) este enfoque implica tomar obsrvaciones repetidas de los mismos participantes en el curso de la transición en el dominio de interés. La única forma de especificar los mecanismos del cambio es examinar de cerca la naturaleza de la transición. Los resultados son sometidos a análisis intensivos para establecer el proceso subyacente de cambio. Los datos de grano fino que se producen permiten que la actividad se analice en ensayo por ensayo o sesión por sesión, por lo tanto los cambios se ilustran. Estos sólo podrán referirse a una aplicación breve de una estrategia específica, pero sólo por la observación de grano fino puede mostrar la progresión y entendimiento para la comprensión completa de los cambios en un dominio particular.

Para el análisis de los datos cualitativos se utilizó el enfoque de La Teoría Fundamentada (Vasilachis, 2006) la cual permitió comprender el significado del fenómeno o evento dentro de la perspectiva de los participantes, siendo estos significados producto de la interacción social establecida. Se realizó un proceso sistemático de recolección y análisis de datos cualitativos, a través de la comparación constante de los mismos, con el objetivo de generar una teoría que explique y posibilite la comprensión de los fenómenos sociales y culturales (Glaser y Strauss 1967, citado en Vasilachis, 2006).

Los análisis se realizaron por medio de videos de las situaciones seleccionadas en los cuales se observó la interacción que se realizó durante las situaciones de aprendizaje, se analizó la dinámica de las actividades, las intervenciones de la docente y las intervenciones de los niños.

El procedimiento fue como sigue:

*La Recolección de datos; p*ara la recolección de datos como se mencionó anteriormente, que se utilizó las grabaciones de las situaciones de aprendizaje con el fin de ver las interacciones en el aula es decir, del diálogo que se presentó y las acciones que se realizaron al estar dentro del aula.

La codificación: una vez obtenidos los datos con la recolección antes mencionada, se comparó la información obtenida, tratando de dar una denominación común a un conjunto de datos que comparten una misma idea, después se leyeron los datos para descubrir relaciones es decir realizamos una codificación abierta identificando temas específicos.

Estos códigos fuero inicialmente las competencias prescritas por el Programa de Educación Preescolar, iniciando con la codificación abierta de los datos, en el cual, luego de la codificación inicial, los códigos fueron agrupados de acuerdo con sus semejanzas y diferencias, dando origen a las categorías.

En un segundo momento, se pasó a la etapa denominada de codificación teórica que tiene por objetivo integrar las categorías referentes a un mismo fenómeno y se buscó comprender los fenómenos que representaban el eje de integración entre las categorías las cuales permitiesen el desarrollo de una teoría fundamentada en los datos. Esta codificación teórica se realizó por medio de notas los cuales ayudaron a elaborar esquemas de redacción.

Comunicación de resultados: Para la comunicación de los datos se tomaron todas las notas que se realizaron durante el análisis con la codificación y a continuación se muestran en los resultados. Para estos análisis es utilizó el programa de análisis cualitativo ATLAS TI 5.0.

Cabe mencionar que los nombres que se utilizan en éste análisis cualitativo para presentar ejemplos específicos de las acciones que se realizaron dentro del aula, son nombres ficticios que se utilizaron para la protección personal de los participantes.

5.4 Resultados cualitativos

En este capítulo se pretende presentar los resultados cualitativos, se encuentra divido en tres apartados, el primero muestra el desarrollo de las competencias numéricas de acuerdo al PEP, el segundo apartado se muestra el desarrollo del razonamiento numérico en general y por último el ejemplo de un caso de un preescolar para mostrar el proceso de razonamiento numérico.

Desarrollo de competencias matemáticas

A continuación se describirá la construcción del conocimiento matemático así como el desarrollo de las competencias numéricas de acuerdo al PEP dentro de las modalidades de intervención, las competencias son:

1. Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo.
2. Plantea y resuelve problemas en situaciones variadas que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.
3. Reúne información sobre criterios acordados, representa gráficamente dicha información y la interpreta.

Competencia 1: Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo.

A continuación se presenta el desarrollo cualitativo de esta competencia de conteo, dentro de esta competencia se presentaron cinco niveles, los cuales se van desarrollaron desde los más simples a los más complejos.

Nivel 1 de Conteo: Repite la serie numérica

Al inicio de ésta competencia numérica los niños requieren que la maestra plantee el problema matemático debido a que los niños no logran traducir el problema contextualizado para abstraerlo, incluso no pueden elegir la operación matemática para darle solución, es así como la maestra aplica distintas ayudas y estrategias para que se pueda resolver el problema; en este nivel los niños realizan el **conteo sólo repitiendo la serie numérica** algunos correctamente y otros incorrectamente, les falta tener conocimiento de que al objeto físico le corresponde un numeral, es decir no presentan correspondencia biunívoca y su significado del número aun no se construye, por tal razón la maestra es quien regresa el resultado al problema planteado debido a que a los niños les es imposible comprenderlo. A continuación se transcribió un fragmento que ejemplifica este nivel de competencia:

Dentro de la situación de “Boliche” de primer grado de preescolar, los niños después de registrar sus puntos del juego realizan el conteo total de sus puntos. Los puntos que se encuentran en el registro de Boliche se representan con rayas, y al final de la situación se cuentan todas las rayas para tener el total. El conteo lo incita la maestra para que vayan señalando las rayas, relacionando los objetos con los números.

1- Maestra: ven Yair vamos a contar tus puntos, vente, a ver vamos a contar tus puntos que hiciste, a ver Yair cuéntalos, tus rayitas, cuenta todas.

2- Yair: 1, 2 (cuenta las rayas *e*n desorden)

3- Maestra: a ver a ver es… [le toma la mano para que comience con la primer raya]

4- Yair: 1, 2, 3, 4

5- Maestra: no, no, otra vez es… 1… [la maestra es ahora quien señala las rayas pues son 5 rayas y no 4]

6- Yair: 1, 2, 3, 4, 5, 1…

7- Maestra: ¡6¡ …

8- Yair: 6, 4…

9- Maestra: no 7…

10- Yair: 8, 9… ¿10? 11, 14.

11- Maestra: 12… [Yair ya no continua contando, siguen contando sus compañeros hasta el dieciséis]

Extracto de la situación "Boliche" Primer grado de preescolar.

En este nivel es la maestra la que lleva el control o la guía de la acción; en el fragmento anterior se muestra primeramente como es que la maestra es quien plantea el problema y da la operación para resolver dicho problema como lo podemos observar en la línea 1, posteriormente a través de distintas ayudas como tomarle su mano o señalarle la primar rayita (ver Figura 2), Yair empieza a contar ubicándose en el nivel 1 de conteo ya que a pesar de que infiere que contar es repetir la serie numérica no la repite correctamente como se muestra en la línea 8 y 10.

Figura 2. Conteo de puntos en registro.

En éste nivel el niño no posee correspondencia biunívoca como se muestra en la aclaración de la línea 6, en esta misma línea cuando la maestra señala la siguiente raya comienza con el uno mostrando que no tiene sobreconteo al no poder continuar contando con el siguiente conjunto; además la maestra tiene que contar el siguiente elemento ya que Yair no sigue con las demás rayas de las siguientes columnas. En la siguiente figura 3 se sintetiza el nivel 1 de conteo.

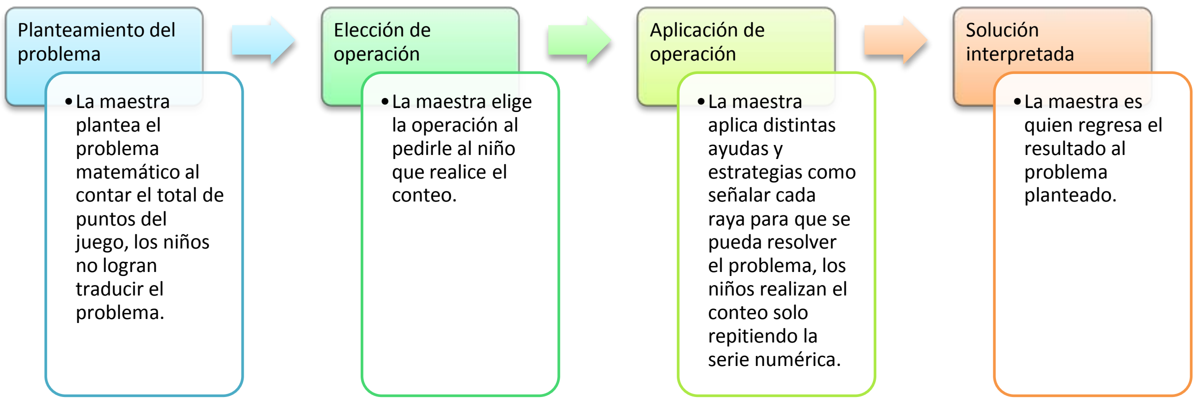

Figura 3. Competencia de Conteo nivel 1.

NIVEL 2 de Conteo: Presentan correspondencia biunívoca.

En este nivel la maestra plantea el problema matemático y ayuda a buscar la operación para resolver dicho problema, pero a diferencia del nivel anterior el niño es quien realiza la operación debido a que este nivel se caracteriza por que los niños, ya comienzan a internalizar el sistema matemático, ya saben que existen números, con una secuencia y que nos ayudan a numerar, comienzan a tener un significado del “número”, en este nivel los niños al contar **presentan correspondencia biunívoca** a pesar de que no cardinalizan ni tienen sobreconteo.

Para el conteo se utilizan estrategias como separar, ordenar, alinear, etc. Pero de igual forma que el nivel anterior la maestra es quien necesita regresar el resultado de la operación al problema planteado

El siguiente fragmento ilustra este nivel:

Dentro de la situación de “Pizza” en primer grado de preescolar los niños después de pesar sus ingredientes, cuentan cuantos cuadritos de queso tienen de ese ingrediente.

12	Maestra: ¿Cuántos cuadritos tienes de queso Nancy?
13	Ale: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 …
14	Maestra: ¿tú eres Nancy Ale?, Nancy **¿Cuántos cuadritos tienes de queso?**
15	**Nancy: uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis (señalando cada cuadrito de queso)**

Extracto de la situación “Pizza” Primer grado de preescolar.

En el fragmento anterior podemos observar cómo es que la maestra le plantea el problema a Nancy, pero a diferencia del nivel anterior ella se ubica en el segundo nivel de competencia, pues cuenta sus cuadritos de queso teniendo correspondencia entre cada cuadrito como lo muestra la línea 15. Además, Nancy ocupa una estrategia para el conteo en este caso señalar. La siguiente figura (4) ilustra de una manera sintética el nivel 2 de conteo antes descrito.

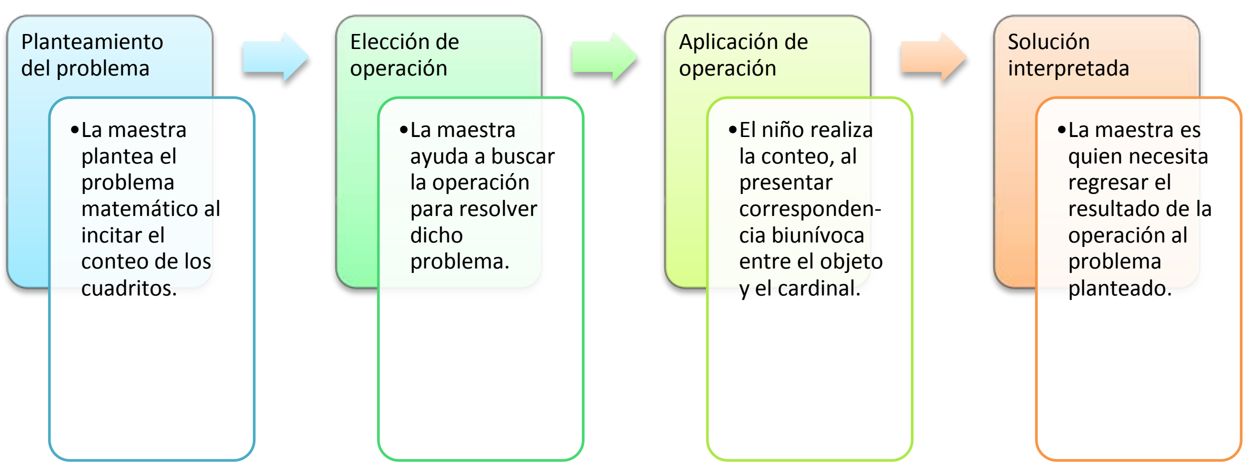

Figura 4. Competencia de Conteo nivel 2.

NIVEL 3 de Conteo: Presencia de cardinalización.

En el siguiente nivel de la competencia la maestra plantea el problema, pero a diferencia del nivel anterior los niños son los que eligen la operación correcta para darle solución, solo que la maestra da algunas ayudas o motores para poder resolverla y al aplicarla se **presenta la cardinalización** al realizar el conteo de conjuntos, los niños comprenden que el último número nombrado es el que indica cuántos objetos tiene una colección. Y finalmente, los niños pueden abstraer este resultado para traducirlo a la problemática contextualizada a resolver

En la situación de ”Recaudería” en segundo grado de preescolar, donde se presenta una compra-venta de fruta, el niño vendedor debe de contar el dinero total que debe de pagar el comprador por las naranjas y manzanas.

16	Maestra: ¿a ver cuánto es de la manzana? ¿Cuánto lleva?
17	Tania: 3
18	Maestra: pues ponlo en el ábaco.
19	Tania: 1, 2, 3 … (Tania cuenta y separa las bolitas en el ábaco)
20	Maestra: y ¿cuánto vale la manzana?
21	Tania: 6 (cuenta con el ábaco) 1, 2, 3, 4, 5, 6.
22	Maestra: ahora contamos el total, ¿Cuánto tiene que pagar?
23	**Tania: (cuenta las dos colecciones sin detenerse en el conteo para el cambio de colección) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.**
24	**Maestra: ¿Cuánto tiene que pagar?**
25	**T: 9.**

Extracto de la situación “Recaudería” Segundo grado de preescolar.

Figura 5 Conteo de colecciones con ábaco.

Al analizar el extracto anterior, podemos observar que la maestra es quien plantea el problema como observamos en la línea 16 y es así como Tania comienza a resolver el problema presentando cardinalización, pues lo podemos saber cuándo al terminar de contar las dos colecciones la maestra le cuestiona y ella puede realizar la cardinalización de la colección, pues comprende que el último número nombrado es el que indica cuántos objetos tiene una colección. Además, se observa en la línea 25 como puede realizar el sobreconteo al contar consecutivamente los dos conjuntos y sobre todo realiza una correspondencia biunívoca entre el numeral y cada bolita del ábaco utilizando una estrategia del conteo al separar cada bolita. Y finamente Tania puede regresar el resultado al problema planteado como lo observamos en la línea 25 (ver Figura 5). En la siguiente figura 6, se presenta la síntesis del nivel 3 de conteo antes mencionado.

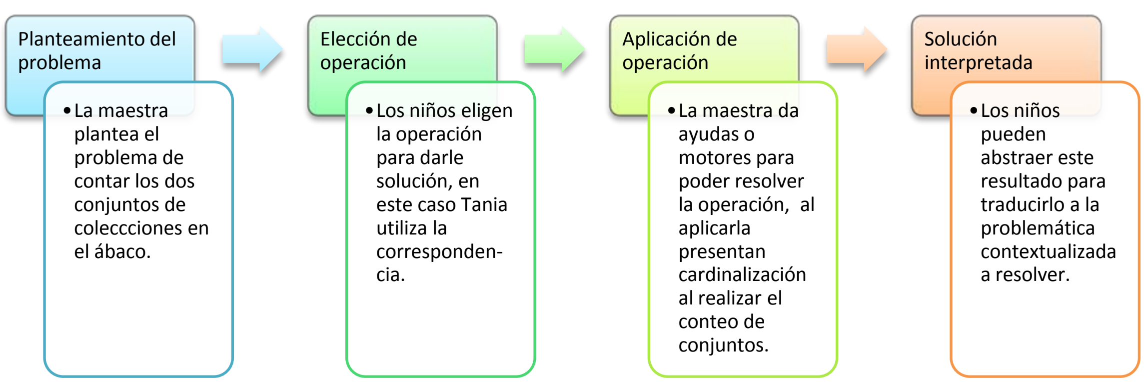

Figura 6. Competencia de Conteo nivel 3.

Nivel 4 de Conteo: Realizan sobreconteo

En el nivel 4 los niños logran plantear el problema y elegir la operación correcta para darle solución, pero es necesario para la aplicación ayudas o motores para resolver correctamente, en este nivel los niños ya presentan correspondencia biunívoca, ya muestran cardinalización y ahora en este nivel los niños **realizan sobreconteo** ya que cuentan a partir de un número dado y continúan contando los siguientes elementos de la siguiente colección. Incluso los niños pueden regresar el resultado de la operación al problema planteado para darle la solución correcta

Este fragmento ilustra este nivel de competencia, pues en la situación de "Periódico" de tercer grado de preescolar, se les reparte dinero a los niños para que puedan realizar la actividad de compra y venta de periódico y así se observaron sus interacciones.

26	Maestra: a ver chicos ¿cuántos pesos tenemos aquí? Ayúdenme a contar (La maestra desliza las monedas en el piso)
27	Niños: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
28	**Maestra: ¿cuántos pesos tengo aquí?**
29	**Niños: 6**
30	Maestra: a ver vamos a ayudarle a Danna, ya teníamos ¿cuánto dinero?
31	Niños: 14 [ya se les había repartido $14 anteriormente]
32	**Maestra: 14, a ver Danna pon tu mano, y $6, ¿que sigue del 14?**
33	**Niños: 15, 16, 17, 18, 19, 20.**
34	**Maestra: ¿Cuánto dinero tienes Danna?**
35	**Danna: 20**
36	Maestra: [mueve la cabeza de afirmación] $20.

Extracto de la situación "Periódico" Tercer grado de preescolar.

En el fragmento anterior nos damos cuenta como el grupo de tercer grado de preescolar ya posee el sobreconteo al agregarle una colección a un conjunto antes contado, pues como se observa en la línea 32 la maestra cuestiona para que los niños realicen fácilmente el sobreconteo y en la línea 33 se observa como ellos continúan contando la siguiente colección de monedas con la cantidad que le sigue, además de que se muestra la cardinalización que tiene Danna en la línea 35. Y en la línea 35 podemos observar que Danna puede regresar el resultado al problema dándole solución y estructura al problema.

En este nivel de la competencia los niños ya entienden el significado del número. En la siguiente figura 7 se ilustra de una manera más sintética el nivel 4 de la competencia de Conteo.

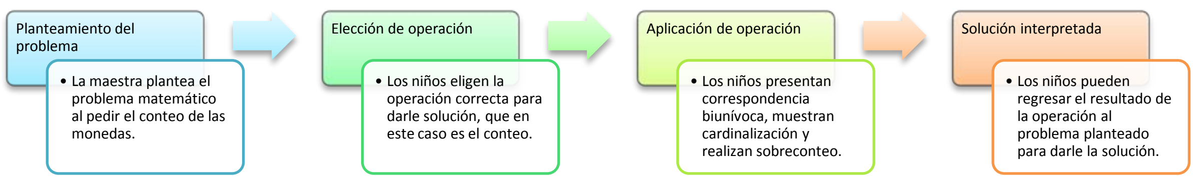

Figura 7. Competencia de Conteo nivel 4.

Nivel 5 de Conteo: Uso el conteo.

En este ultimo nivel de competencia de conteo el niño ya es capaz de plantearse el problema matemático, buscar una operación correcta, aplicarla y regresar el resultado al problema situado, es decir, el nivel la competencia ya se encuentra completa, los niños pueden aplicar **el conteo como uso para algún cálculo** y uso de alguna resolución problemática, ya se tiene correspondencia biunívoca, se presenta la cardinalización además de tener sobreconteo.

Lo más importante de este nivel es que la competencia se realiza sin ayuda de la maestra a comparación de los cuatro niveles anteriores, los niños son autónomos al aplicar el conteo como cálculo matemático para alguna solución, los niños en este nivel logran contar de 2 en 2 (Ver figura 8).

Situación "Cine-dulcería" de tercero de preescolar se presenta una compra-venta en la que los niños pasan a comprar a la dulcería sus papas, refresco y su boleto, se encuentra un niño que realiza el recibo, otro que cobra y otro que entrega los productos.

37 Maestra: 8+5¿cuánto es Dani?… a ver haz la suma, ¿Cuánto es?
38 Daniela: ¡13!
39 Maestra: ya hiciste la raya para poner el total (Daniela elabora el recibo con la cantidad a cobrar)
40 **Eduardo: ¡me tienes que dar $13?! Primero las de a 5 (Danna le da dos monedas de cinco pesos) 5+5, 10, 12 y 13** [Eduardo realiza la venta solo]
41 Maestra: ¿Cuánto dinero te quedo Danna?
42 Danna: nada.

Extracto de la situación "Cine-dulcería" Tercer grado de preescolar

En el fragmento anterior se muestra como Eduardo es quien debe de cobrar el recibo en este caso es de trece pesos, lo más relevante es que Eduardo se enfrenta al problema de cobrar y lo realiza solo, sin ayuda de la maestra pues ésta ya no interviene en el cobro planteándose correctamente el problema, buscando la operación correcta realizando el conteo de las monedas para saber cuánto le pagan como lo muestra la línea 40.

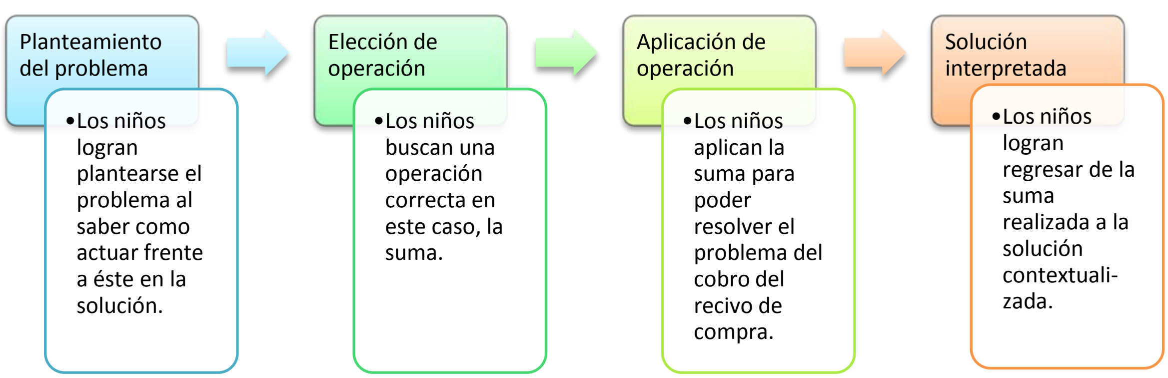

Figura 8 Competencia de Conteo nivel 5.

En resumen, la competencia del uso del conteo en situaciones problemáticas sufrió cambios desde un nivel muy sencillo, paulatinamente, se volvió más complejo, es decir al comienzo los niños requerían apoyo de la maestra para plantearse el problema, buscar la operación correcta para darle solución y aplicarla solo repitiendo la serie numérica, progresivamente muestran correspondencia biunívoca, cardinalización, sobreconteo llegando hasta un nivel muy avanzado, donde hacen uso de esta competencia para resolver algún problema matemático mostrándose autónomos. En la siguiente figura 9 se muestra la evolución que tuvo la competencia de Conteo en sus 5 niveles.

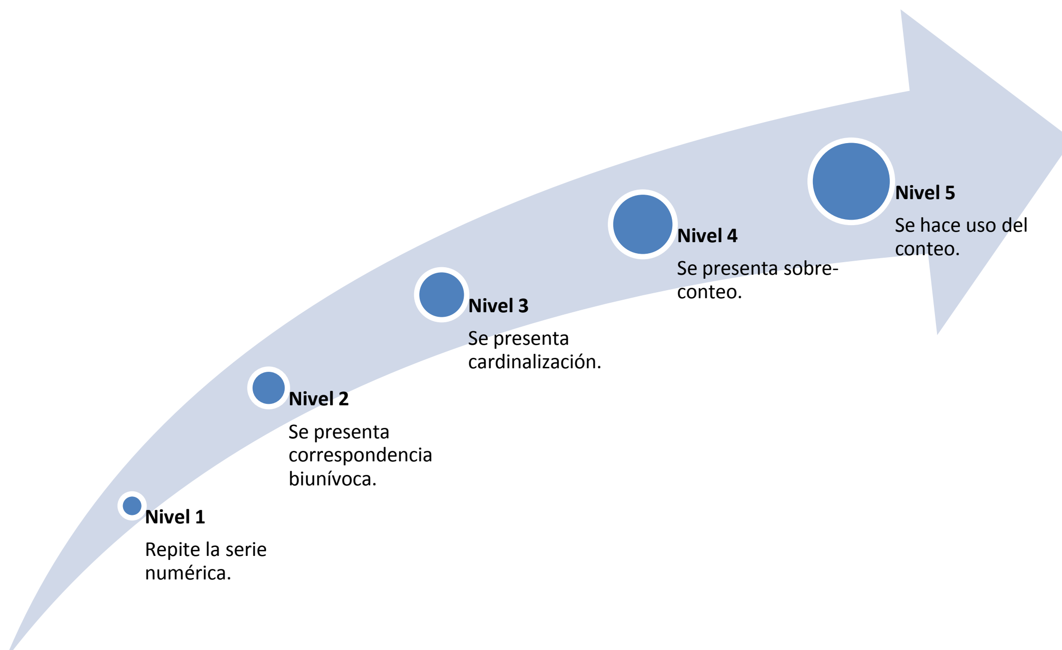

Figura 9 Evolución general de la competencia de Conteo.

Competencia 2: Plantea y resuelve problemas en situaciones variadas que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.

Ésta competencia del Programa de Educación Preescolar la traducimos para los análisis en "Cálculo" en la cual el niño debería ser capaz de suponer, deducir y reflexionar un problema matemático, para éste análisis calcular implica sumar (agregar o reunir), restar (quitar o comparar), multiplicar (duplicar) y dividir (repartir), por lo tanto a continuación se muestran los niveles de cada cálculo, pero sobre todo se muestran como este cálculo se va transformando de ser muy simple a ser más complejo, además, también existe una integración paulatina de conocimientos, estrategias y habilidades. Las operaciones de cálculo evolucionan ligándose unas con otras, por ejemplo el desarrollo del cálculo comienza con suma, y está ligado con el conteo, a la vez esta suma se invierte en resta, y esta resta nos lleva a la división y por último se observa un nivel de multiplicación que se enlaza con la suma.

Primer cálculo: Suma (agregar o reunir).

NIVEL 1 de Suma: Cuenta 1 a 1 los elementos de cada colección.

Dentro de los análisis que realizamos se observó que en el primer nivel de la competencia la maestra es la que debe de plantear el problema matemático, así como elegir la operación matemática para darle solución y al aplicarla la maestra se vale de distintas ayudas pidiendo al niño que reúna o sume dos conjuntos pequeños en cantidad, éste cuenta uno por uno cada elemento de cada colección y después cuenta los elementos de los dos conjuntos desde el inicio de la numeración con alguna estrategia para el conteo y finalmente la maestra es quien regresa el resultado al problema planteado interpretando el resultado (Ver Figura 11). El extracto siguiente muestra este nivel:

Situación “Polos de Yogurt” de primero de preescolar, en esta situación, los niños venden paletas de yogurt, se encuentra un niño vendedor y un comprador, en este fragmento se ilustra el momento en que el comprador termina de realizar su compra.

43	Maestra : dale su cambio (se dirige a Dominic), ahora tú recibe tu cambio (se dirige a Ailton). ¿Cuánto te quedo de cambio? [acomoda las dos monedas que le sobraron a Ailton una de dos pesos y una de un peso, total tres pesos]
44	Ailton: 1, 2…
45	Maestra: a ver ¿este qué número es? [señala la moneda de un peso]
46	Ailton: 5…¿9?
47	Maestra: ¡ay Ailton¡ ¿qué número es este? ¡Ayúdale¡ (se dirige a Dominic)…¿qué número es Adriel?
48	Adriel: ¿este?
49	**Maestra: este (indica la moneda de un peso)**
50	**Adriel: 1**
51	**Maestra: y éste (indica la moneda de dos pesos)**
52	**Adriel: 2**
53	Maestra: ¿cuántos pesos tienes?, esta es de 2 y esta de 1 (señala las monedas).
54	Adriel: de 1 y de 2 pesos
55	**Maestra: de 1 y de 2 pesos a ver, una es de 1 peso (señala un dedo de su mano) y la otra es de 2… 1 y 2... (señala dos dedos de su mano)… ¿cuántos pesos tienes? (Ailton enseña sus monedas) ¿cuántos?, cuenta mis dedos.**
56	**Ailton: 1, 2, 3 (señala cada dedo de la maestra)**
57	Maestra: entonces fíjate, tienes aquí 2 y 1,3.
58	Ailton: 3
59	Maestra: 3 pesos de cambio.

Extracto de la situación “Polos de Yogurt” Primer grado de preescolar

Lo que nos muestra el fragmento anterior es primeramente la maestra es quien plantea el problema como lo observamos en la línea 43 y el niño aún se encuentra sostenido por la maestra al realizar el conteo del primer y segundo conjunto a sumar, no realiza la suma convencionalmente como se muestra en la línea 55, lo que realiza el niño en este nivel es contar todos los conjuntos desde el inicio de la colección como se representa en la línea 56 con alguna estrategia para


Figura 10. Conteo de monedas en compra-venta.

el conteo que en éste caso es señalar, también nos muestra que aun no realiza sobreconteo ni contiene el significado del número para realizar la suma mentalmente (ver Figura 10).

Además se observa como los niños se comienzan a apropiar de los conocimientos matemáticos al identificar algún numeral como lo realiza Adriel en la línea 50 y 52 en las cuales además de señalar, nombra o menciona el numeral correcto que la maestra señala.

Se observa como este nivel de competencia se relaciona con la competencia de conteo, pues cuando se plantea la realización de la suma, ésta resulta ser compleja, así este cálculo se regresa al conteo en su nivel 2 donde se presenta la correspondencia biunívoca por su simpleza o bajo nivel de complejidad.

Finalmente, la maestra regresa el resultado al problema planteado interpretándolo debido a que Ailton solo menciona la cantidad total sin comprender a que se refiere como lo muestra la línea 59.

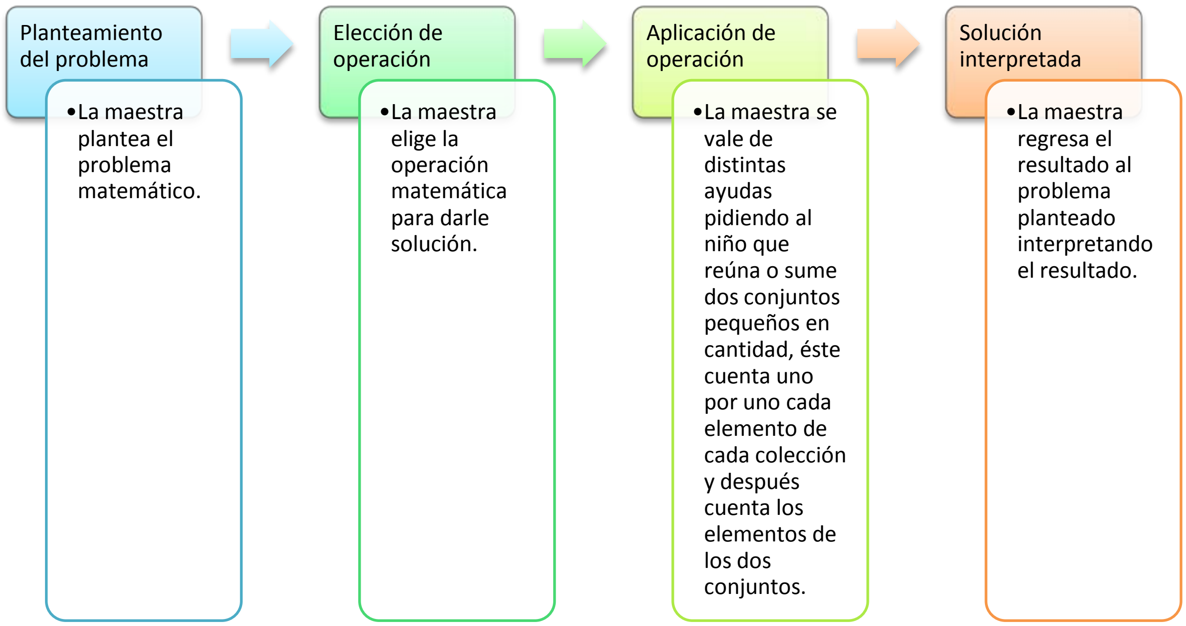

Figura 11. Competencia de Suma Nivel 1.

Nivel 2 de Suma: Cuenta a partir del segundo conjunto.

En el siguiente nivel de suma el niño requiere estar sostenido por la maestra ya que de igual forma que en el nivel anterior la maestra es quien plantea el problema matemático y elige la operación para darle solución. En este nivel el niño puede sumar cuando tiene presente la cantidad total de elementos de un conjunto y le atribuye otro conjunto partiendo de un numeral agregando los elementos de la siguiente colección, al igual que en el nivel 1, este nivel regresa al nivel 4 de conteo donde el niño logra realizar sobreconteo y a partir de esta estrategia realizar la suma. Finalmente, en este nivel los niños logran interpretar el resultado a partir del problema planteado.

En este nivel se presenta como el niño puede tener en su cabeza el valor que representa un número y continuar con el número siguiente de la serie numérica.

A continuación se muestra el fragmento que ilustra este nivel de competencia, se ilustra en la situación "Boliche" de segundo de preescolar en la que después de registrar los puntos que logro tirar cada niño en cada ronda, se suman los puntajes totales.

60	Maestra Martha: a ver Sofía ¿cuántos puntos tuvo?, vamos a sumarlos Sofi, 1+5
61	Héctor: 5+5
62	Sofía: 6
63	Maestra: 6+5, Héctor deja que ella haga su suma, 6+5, ya teníamos 6 empezamos, (extiende su mano mostrando los 5 dedos de su mano) siete, ¿cuántos son aquí?,
64	Sofía: 5
65	**Maestra: ya tenemos 6 ahora que número sigue** (señala uno de sus dedos al mismo tiempo que Sofía cuenta)
66	**Sofía: 6, 7, 8, 9, 10, 11**
67	Maestra: ¿Cuántos puntos obtuviste?
68	Sofía: 11
69	Maestra: pasa a anotarlos.

Extracto de la situación "Boliche" Segundo grado de preescolar

Lo que ilustra el texto anterior es como la maestra en la línea 60 plantea el problema y elige la opción para resolverlo. También podemos observar como Sofía realiza la suma de sus dos conjuntos (5 + 6), sobre contando el primer conjunto, es decir parte de ese numeral (5) y sigue contando la siguiente colección (6) a partir del primer conjunto como se muestra en la línea 66.

Además, lo que nos muestra éste fragmento es que este sobreconteo la maestra lo sostiene y lo empuja para que Sofía lo realice y sea mucho más fácil entender y realizar la suma como ilustra la línea 64.

Otro punto importante es que este nivel de competencia se vuelve a enlazar con el conteo en su nivel 4 pues se realiza el sobreconteo al intentar realizar la suma convencional. Finalmente, al obtener el resultado de la operación Sofía logra interpretar esta cantidad traduciéndolo al problema como lo muestra la línea 67 y 68. En la siguiente figura 12 se muestra el nivel de Suma 2 antes descrito.

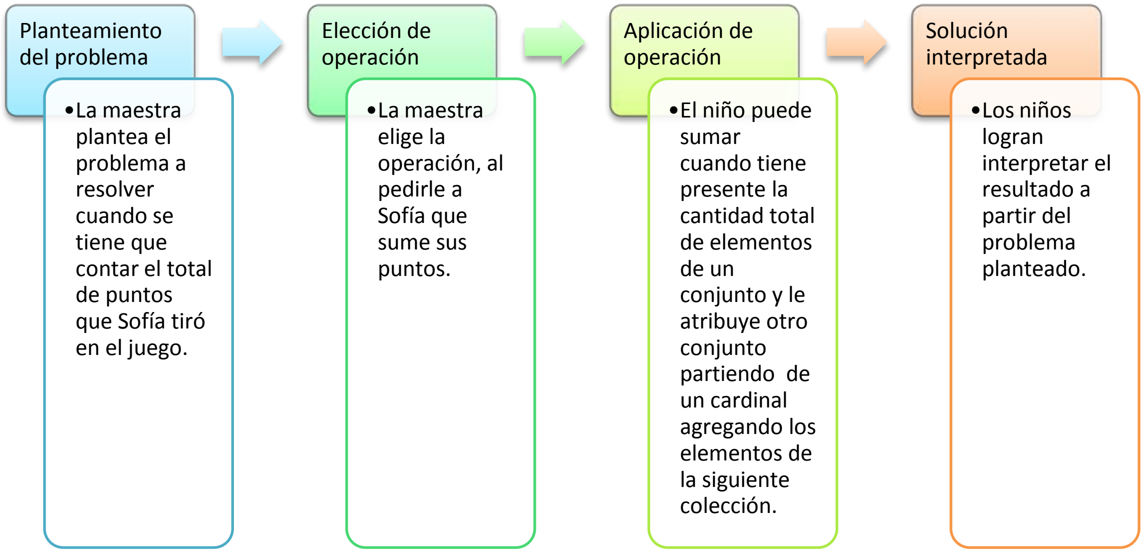

Figura 12. Competencia de Suma Nivel 2.

Nivel 3 de Suma: Suma dos conjuntos partiendo de la cardinalización del primer conjunto.

Podríamos decir que en este nivel los niños pueden plantear el problema, elegir la operación, así como aplicarla. El niño ya conoce la serie numérica, ya parte de un valor numérico y significado de éste, el cual permite que al realizar una suma, un niño pueda realiza la suma cuando tiene presente el cardinal de una colección y le agrega el numeral de otra colección. Podemos afirmar que ya no requieren ayuda de la maestra para traducir el resultado, es decir, interpretan su resultado a partir del problema planteado.

Situación “Polos de Yogurt” tercer grado, de preescolar en la cual se comienza a recrear la situación que se realizo el día anterior (elaboración) para continuar con la compra y venta de las paletas “polos de yogurt”, en esta situación los niños se organizan en equipos y en total son 4 equipos, 3 equipos se componen de 5 niños y 1 equipo de 4 niños.

70	Maestra: ayer cada quien elaboró sus paletas, a ver el equipo 1 (señalando al equipo) ¿cuántas paletas elaboró ayer?
71	Dana: 2
72	Maestra: ¿2? ¿Por todos?
73	Niños: aaaa¡ 8
74	Maestra: ¿8? ¿Ayer cuantos había? (señala a todo el equipo), es que tú estabas allá [surge una confusión pero no se resuelve] a ver chicos, allá ¿Cuántas paletas se lograron? todos juntos… [La docente señala el equipo 4, los niños comienzan a contar con sus dedos el número de paletas que elaboraron]
75	Gael: 10 [se encuentra en el equipo 1]
76	Maestra: aquí 10 (señala al equipo 1), ¿allá? (señala al equipo 4)
77	Pablo: 2
78	Eduardo: (cuenta el total de las paletas por niño) 9, ¡10¡
79	Maestra: ¿y en el equipo 3?
80	Niños: 10 (el equipo 3 grita al mismo tiempo)
81	Maestra: 10, y allá (señalando al equipo 3)
82	Ángel: 10 (Ángel se encuentra en el equipo 3 al igual que Diana)
83	Diana: 8 (responde al mismo tiempo que Ángel)
84	Maestra: ¿segura que 8? (Diana mueve la cabeza afirmando su respuesta) [Diana muestra una afirmación oral que no se logra escuchar perfectamente, se descifra que Diana le menciona a Ángel diciendo que solo había cuatro niños en su equipo en la elaboración de las paletas, interpretando que si son cuatro niños y se elaboraron 2 paletas por niño son 8 paletas en total y no 10 como en todos los equipos]
85	Maestra: si es cierto fueron 8, bien a ver chicos, bien, pongan atención, todos…, aquí elaboraron 10 en el equipo 1, en el equipo dos 10, vamos a anotarlo aquí a ver, equipo 1 elaboro 10 paletas (escribe en el pizarrón el número 10), equipo 2 ¿cuántas?
86	Equipo 2: 10 (todo el equipo responde)
87	Maestra: equipo 3
88	Equipo 3: 10 (todo el equipo responde)
89	Maestra: equipo 4
90	Equipo 4: 8 (todo el equipo responde)
91	Maestra: 8 paletas, bien a ver chicos, si aquí tenemos, en el equipo 10 tenemos, no perdón, en el equipo 1 tenemos 10, en el equipo 2 tenemos 10, **¿cuántas son si las sumamos las del 1 y las del dos ¿cuántas serían?**
92	**Niños: 20**
93	**Maestra: 20¡**
94	**Carlos: y luego 30**
95	**Maestra: y si sumamos las del equipo 3**

96	**Niños: 30**
97	**Maestra: 30¡ y si sumamos las 8?,**
98	**Niños: 8 (dicen la respuesta dudando)**
99	**Maestra: ya llevamos 30+8**
100	**Eduardo: ¡38¡**
101	**Maestra: 38 en total ¿cuántas paletas hicimos?**
102	**Niños: 38**
103	MC: 38 muy bien.

Extracto de la situación “Polos de Yogurt” Tercer grado de preescolar.

Lo que muestra el fragmento es como los niños logran plantearse el problema matemático, elegir la operación, aplicarla e interpretar este resultado como lo muestran las líneas 74 y 75. También podemos mencionar que desde la línea 91 a la 102, los niños cardinalizan el número de cada colección, lo que permite (reunir los cardinales de cada conjunto) es decir, se realiza la suma partiendo de numerales, con sobreconteo, es sostenido por la maestra esta suma, se ayudan de una representación grafica tanto la maestra como los niños.

Se observa que esta suma se realiza con números mayores de 10, pues los niños logran sumar decenas llegando a sumar hasta 38, por lo tanto si analizamos los fragmentos anteriores se puede observar un grado de complejidad mayor, pues no solo suman las paletas del grupo si no también las paletas del equipo.

En la figura 13 se muestran el nivel de Suma 3 antes descrito.

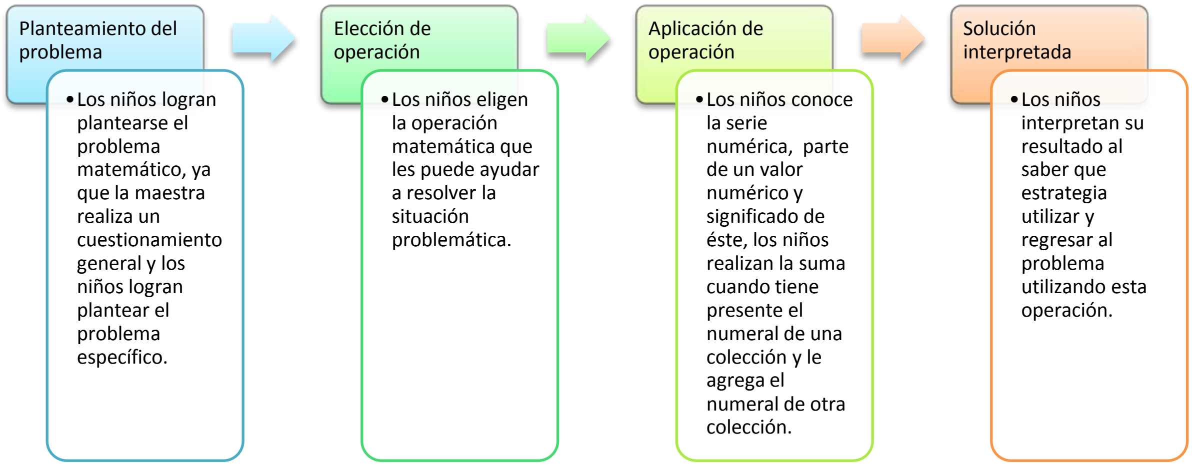

Figura 13. Competencia de Suma Nivel 3.

Nivel 4 Uso de la suma como estrategia

En este último nivel de la competencia el niño utiliza la suma como estrategia al resolver un problema contextualizado o descontextualizado, sin ayuda de la maestra, a comparación de los niveles anteriores, que continuaban teniendo una complejidad como avanzaban los niveles pero seguían sostenidos por la maestra. En este nivel los niños son capaces de plantearse le problema matemático, elegir la operación, aplicarla y su resultado traducirlo e interpretarlo en el problema (Ver figura 15). En el siguiente fragmento se ilustra este nivel de competencia:

En la Situación de “Panadería” de tercer grado de preescolar donde se realiza una compra-venta, se encuentran don vendedores y dos filas de compradores, los cuales compran pan, en este fragmento se muestra como un niño se inserta a la actividad y la maestra deja de sostenerlo.

104	Maestra Carmen: a ver Ángel, ve con la maestra y tu Carlos ocupa su lugar de Ángel. [Carlos pasa a ser comprador sin que la maestra le dé indicaciones de la actividad o la tarea a la que se va a enfrentar]
105	**Carlos: ¿cuántos panes vas a llevar Pato? [Pato es un niño con Síndrome de Down]**
106	**MC: señálale 2 Pato (Pato señala dos dedos)**
107	**C: ¿dos?, ¿cuánto cuestan? (voltea al pizarrón y observa el precio escrito $4)**
108	**Niños: 4**
109	**C: 8 pesos [simula que va a comenzar a contar en el ábaco pero lo hace mentalmente], son 8 pesos Pato,** [Pato le da una moneda de $10 y Carlos la toma, la acomoda con las otras monedas y le da de cambio una moneda de $2], toma tus panes (lo toca para que Pato tome sus panes y Pato se retira)
110	C: ¿cuántos panes vas a llevar?
111	MC: ¿para cuántos te alcanza Daniela?
112	Daniela: 2
113	C: son $8 [Daniela le paga con una moneda de $10 y Carlos le da de cambio una moneda de $2, además Daniela toma sus panes].

Extracto de la situación “Panadería” Tercer grado de preescolar.

Dentro de este nivel se observa, como Carlos logra plantearse el problema, elegir la operación, aplicarla e interpretar el resultado como lo muestran las líneas 105 y 109, además Carlos utiliza la operación de la suma para calcular cuántos dinero es por dos panes, en un primer momento Carlos observa la dinámica y trae todo su conocimiento matemático como identificación del número que se muestra en la aclaración de la línea 107, ya no presenta sobreconteo, cardinaliza cada conjunto de 4 al sumar

Figura 14 Suma convencional en la “panadería”.

4+4 y le atribuye ese valor a los panes, si analizamos la trayectoria de la situación desde la línea 105, observamos como Carlos plantea su problema de la compra al preguntarle a Pato cuantos panes va a llevar, después Carlos necesita saber cuento vale cada pan pues le están comprando 2 panes (línea 107), este sabe el precio al cuestionase en voz alta y sus compañeros se lo mencionan (línea 108), después al saber que va a cobrar 2 panes y que cada pan cuesta $2, Carlos realiza la suma mentalmente 4+4 y cobra $8, es decir, Carlos elige la operación de suma pertinente para el problema. Toda esta trayectoria Carlos la realiza sin ayuda de la maestra (ver Figura 14).

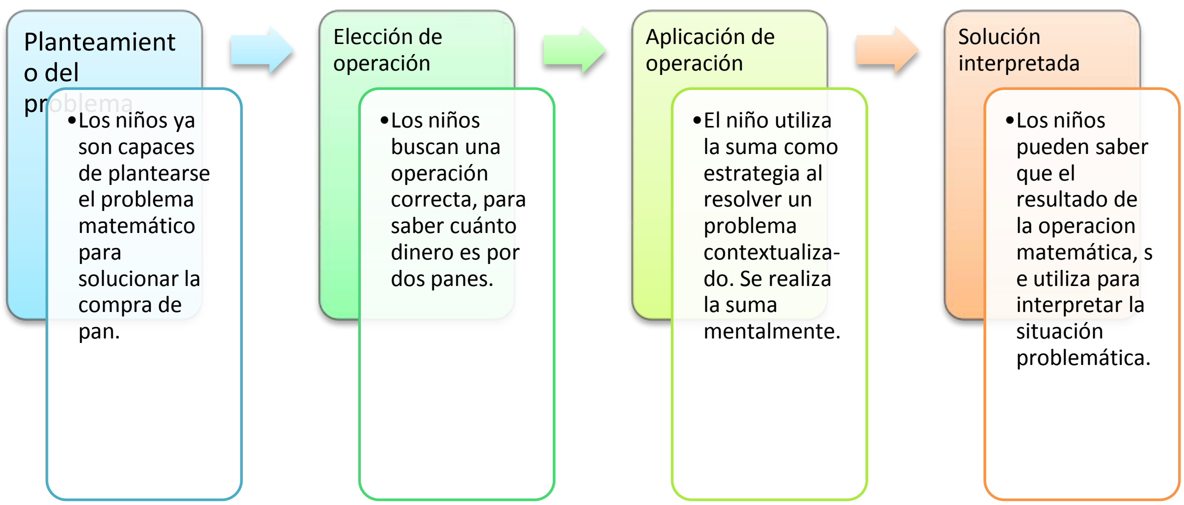

Figura 15. Competencia de Suma Nivel 4.

Como acabamos de observar la estrategia de suma tiene 4 niveles los cuales van del más simple al más complejo, desde el inicio del conteo de cada elemento de las dos colecciones a juntar, continuando con el siguiente nivel de contar a partir del segundo conjunto, después siguió evolucionando esta competencia al subir otro nivel donde los niños pueden sumar dos conjuntos partiendo del cardinal de cada colección y finalmente el último nivel donde se utiliza la estrategia de la suma para la resolución de un problema matemático. A continuación en la figura 16 se muestra la evolución de la estrategia de Suma en sus niveles.

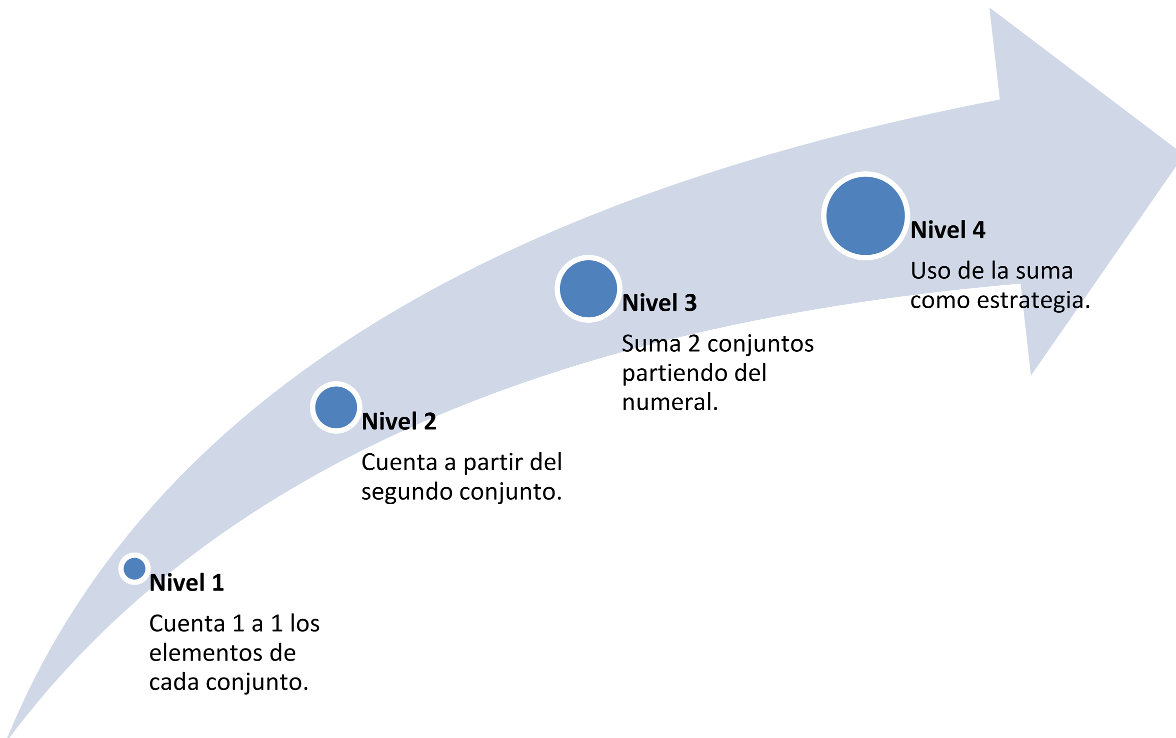

Figura 16. Desarrollo global de Suma.

Segundo cálculo: Resta.

Nivel 1 de Resta: Invertir-

En este primer nivel los niños requieren del apoyo de la maestra para traducir el problema a un problema matemático, elegir la operación y poder realizarla utilizando diversas estrategias o ayudas. En este nivel de resta el niño realiza el conteo de un conjunto para resolver cuantos elementos faltan para llegar a un conjunto determinado, es decir el inicio de este nivel comienza cuando es la inversa de la suma, ya que le agrega el elemento que le hace falta al conjunto. Ahora se muestra el fragmento que ilustra este nivel de resta. Finalmente, los niños requieren ayuda de la maestra para poder interpretar el resultado obtenido.

En la situación de “Periódico” de tercer grado de preescolar, se presenta un intercambio monetario con Danna, la cual es la compradora, también se encuentra Daniela quien es la que realiza el recibo, Carlos quien es el que cobra y Diana quien la que se encarga de dar el producto.

114	Maestra: dile que vas a comprar primero (le señala a Daniela quien es quien elabora el recibo)
115	Danna: un periódico y una revista
116	Maestra: ¿Qué vamos a anotar primero Dani? (Daniela comienza a realizar el recibo de compra), ¿cuánto es Daniela?
117	Daniela: $17
118	Maestra: a ver ¿cuánto le vas a pagar?, ¿Cuánto te va a pagar Dani? Como se escribe el 17 (escribe el total del recibo $17 y la maestra se lo entrega a Danna), a ver espérame cuanto vamos a pagar, Dani dile ¿cuánto vamos a pagar?
119	Daniela: $17
120	Maestra: primero vamos a usar las monedas grandes, primero vamos a usar las monedas grandes, (Danna tomas 2 monedas de $5), Carlos enséñale con tus dedos cuánto es a Danna, ¿cuánto es aquí Danna?, cuenta, no le digas cuanto es (Danna cuenta los dedos de Carlos señalándolos).
121	Danna: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
122	Maestra: ¿Cuánto hay ahí?
123	Danna: 9
124	Maestra: cuenta bien ¿cuánto hay? Cuéntalos.
125	Danna: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (Danna cuenta tocando los dedos de Carlos)
126	Maestra: ¿cuánto hay?
127	Danna: 10
128	Maestra: ¿Cuánto dinero tenemos aquí?
129	Danna: 5
130	Maestra: ¿Cuánto dinero contaste aquí? (señala los dedos de Carlos)
131	Danna: 10
132	Maestra: ¿Cuánto tenemos aquí? (señala las monedas y Danna se mantiene callada) 10, 5+5 10, ¿ya está bien así?

133	Carlos: 12, 13
134	Maestra: bien Carlos, ayúdale a contar Danna, 13…
135	Carlos: 14, 15, 16 y 17.
136	Maestra: ¿así está bien?
137	Carlos: si.

Extracto de la situación “Periódico” Tercer grado de preescolar.

En este fragmento se ilustra cómo podemos observar como Danna está sostenida por la maestra primeramente para que ella comprenda el problema matemático como lo muestra las líneas 118 y 119, posteriormente utiliza diversas ayudas para aplicar la operación como lo muestran de la línea 121 a la línea 134. A pesar de que la maestra no es explicita en la descripción al decir tenemos 10 y queremos 17, ¿Cuántas nos faltan?, Carlos comienza a realizar el conteo para alcanzar la cantidad que deseamos que en este caso es 17, utiliza el sobreconteo y una estrategia para el conteo que en este caso es separar las moneda, por otro lado en este nivel el niño comienza a comprender lo que se debe de realizar.

En este nivel el niño es capaz de invertir la operación de resta a la suma por ejemplo quiero 7 y solo tengo 5, entonces pongo 2.

En la siguiente figura 17 se muestran el nivel de Resta 1 antes descrito.

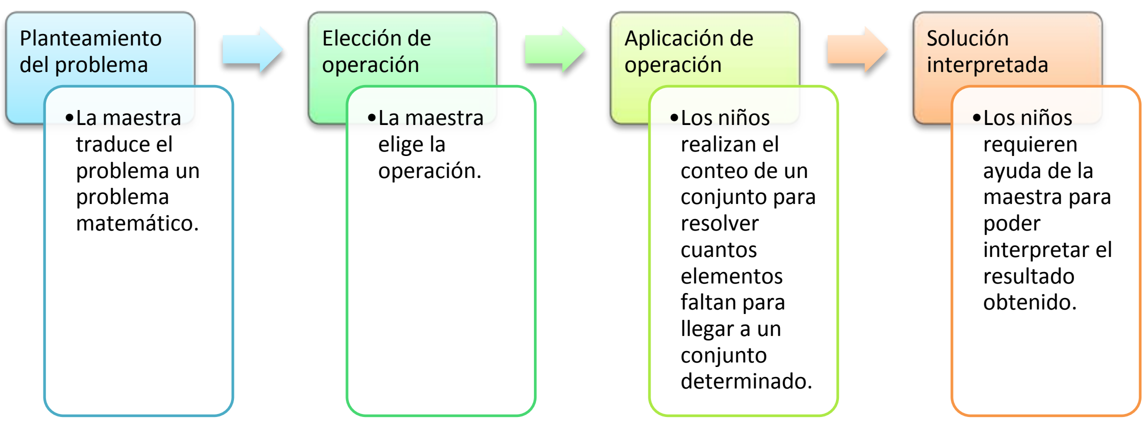

Figura 17. Competencia de Resta Nivel 1.

Nivel 2Separación del conjunto a quitar o sustraendo.

Dentro de este nivel de resta el niño es sostenido por la maestra al plantarle el problema y elegir la operación correcta, pero a diferencia del nivel anterior el niño es capaz de traducir el resultado al problema planteado. Al realizar la operación el niño en este nivel realiza el conteo total de los elementos de dos conjuntos (realizando una suma), cuenta y separa la parte que le quiere quitar y cuenta los que le quedaron (quita un conjunto de otro para encontrar la cantidad restante).

En la Situación de "Cine" en tercero de preescolar donde existe una compra y venta de productos para el cine, donde al comprador se le proporciona el recibo y pasa a pagarlo, el comprador consta de $15, 2 monedas de $5, 2 monedas de $2 y 1 moneda de $1. Este fragmento presenta el momento en que el comprador (Danna) debe de pagar $13.

138	Eduardo: dame las 2 monedas de $5 (Danna le da dos menadas de $2 y continua dándole más monedas y Eduardo realiza el cálculo para contar las monedas)
139	Maestra Carmen: a ver ayúdale ¿cuánto es? ¿Cuánto va a pagar? (se dirige a Eduardo y le señala en recibo).
140	Eduardo: 4… 5… y (toma una moneda de $5) 9
141	Maestra: no a ver ¿cuánto hay aquí?(Eduardo muestra su mano con 5 dedos y es correcto), 5+5 ¿cuánto es?
142	Eduardo: 10
143	Maestra: 10 + 5 ¿cuánto es?
144	Eduardo: 15
145	**Maestra: ella te va a pagar $13 ¿cuánto le sobra?, ¿cuánto le vas a quitar a 15? (le muestra el recibo)**
146	**Eduardo: 13**
147	Maestra: ¿cuánto le queda?... (Eduardo se queda pensando), cuenta 13, que te de 13, ¿cuánto le queda de cambio?
148	**Eduardo: 5, 10, 12, 13**
149	**Maestra: ¿cuánto le queda de cambio?**
150	**Eduardo: 2 (le proporciona a Danna los $2) tu recibo.**

Extracto de la situación "Cine" Tercer grado de preescolar.

El fragmento anterior muestra en la línea 145 como la maestra es la que debe plantear el problema matemático y elegir la operación correcta. También podemos ver como Eduardo con ayuda de la maestra, tiene que regresar cambio en la compra de sus productos, tiene que restar el total del recibo $13 al dinero que le pago Danna $15, por lo tanto como éste no puede realizar una resta convencional, lo que realiza es contar la colección original que es de 15, después cuenta el conjunto que desea quitar (13) y por lo tanto la colección que queda es la resta del primer conjunto original (2). Finalmente, la cantidad resultante Eduardo al puede interpretar de acuerdo al problema planteado como en la línea 150.

En la siguiente figura 18 se muestran el nivel de Resta 2 antes descrito.

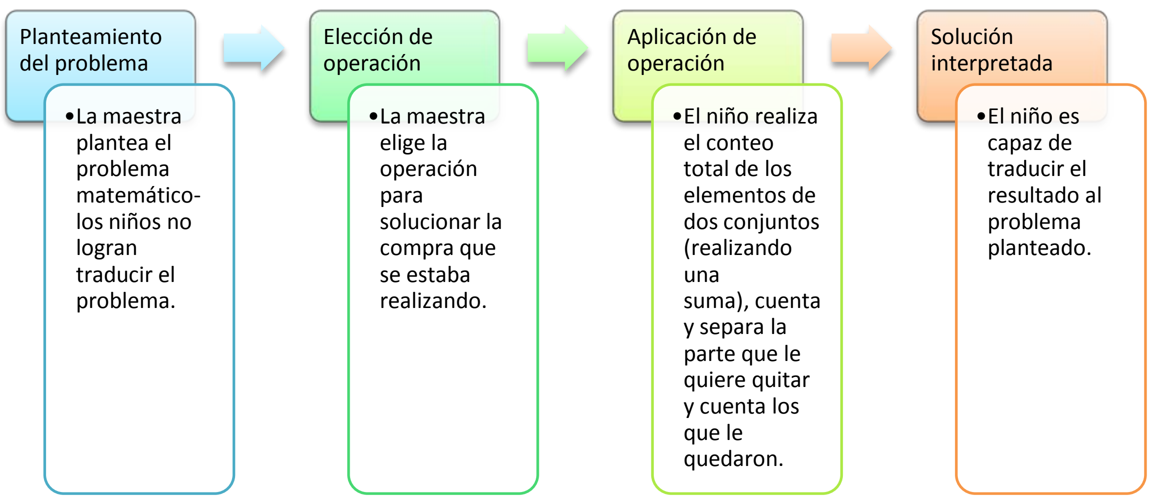

Figura 18. Competencia de Resta Nivel 2.

Como se acaba de observar el nivel de Resta solo posee dos niveles, los cuales muestran los mecanismos que los niños utilizaron al razonar con esta estrategia, que viene de un inicio con una inversión de la suma, y consecuentemente con la separación del conjunto a quitar. En la siguiente figura 19 se muestra la síntesis de esta competencia.

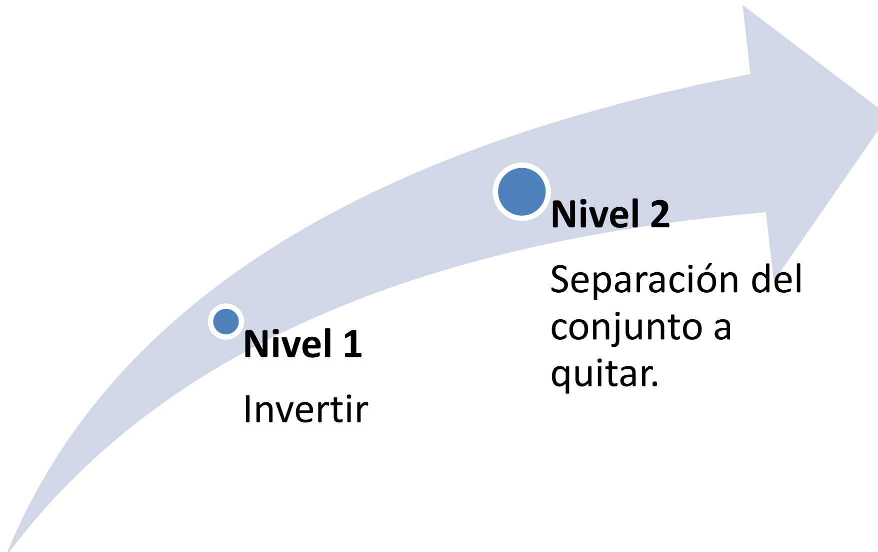

Figura19. Desarrollo global de Resta.

Tercer Cálculo: DIVISION.

Nivel 1de División: Por correspondencia.

Dentro de este nivel de división los niños requieren estar sostenidos por la maestra debido a que ella es quien plantea el problema, elige la operación, realiza la operación y regresa el resultado al problema planteado. Lo niños en este punto realizan una repartición sin tener presente la capacidad de saber cuántas veces cabe algo en otro, solo lo realizan por correspondencia.

Un ejemplo claro es en la situación Domino en primero de preescolar, donde al inicio del juego, los niños deben de repartir las cartas para comenzar el juego.

151	Maestra: a ver vamos a comenzar, a ver Lili ¿cómo se llama este juego?
152	Niños: dominó
153	Maestra: a ver todos son lilis,
154	Ailton: Dominic
155	Maestra: ¿cómo se llama?, domino, pero quiero que me digan

¿Que tienen las fichas de dómino?, ¿Que tienen las fichas de dómino? (señala los números)
156 Alejandra: Números
157 Maestra: y además de números, ¿qué tiene abajo? (señala los puntos)
158 Ailton: Puntos
159 Maestra: puntos, muy bien ¿alguien saben que número es éste?
160 Adriel: 3
161 Maestra: 3, y ¿éste? (señala en número 5)
162 Ángel: 4
163 Maestra: 4 ¿si saben jugar domino?
164 Niños: si¡¡
165 Ailton: yo las comparto.
166 Maestra: si, ¿cuántas tenemos que repartir? (todos gritan al mismo tiempo señalándose y contando)
167 Maestra: a ver, fíjense, ya sabemos cómo se juega, hay que repartir las fichas, oigan y ¿quién gana en el domino? ¿Cuándo se gana en el domino?
168 Ailton: Cuándo se pierde
169 **Maestra: Cuando se quedan sin fichas, sale el que se quede sin fichas ese gana, entendido, Ailton vas a repartir 4 cartas a cada uno, entendido (la maestra le da a Ailton un boliche de tarjetas sin saber cuántas son, se dirige a Alexia para repartirle sus cartas, las comienza a poner sobre la mesa),** la que sea, la que le toque, no es la que quiera, ponlas volteadas, 4 cartas a cada uno, (Ailton solo coloca 3 tarjetas)
170 Ailton: ¿ya?
171 Maestra: ¿Cuántas son?
172 Ailton: 1, 2, 3
173 Maestra: dije 4 (Ailton coloca una ficha mas), ¿Cuántas son?, ¿Cuántas son?
174 Ailton: 1, 2, 3, 4
175 Maestra: está bien, ya, 4, sigue Vale (Ailton pone 4 fichas en el lugar de Vale y continua al lugar de Diego.
176 Ailton: 1, 2, 3, 4 (continua al lugar de Nancy y coloca 4 tarjetas), ahora me toca a mi… (Ailton coloca 4 tarjetas) y ¿ésta maestra?
177 Maestra: ¿sobro 1?, bueno esa la ponemos aquí.

Extracto de la situación “Dominó” Primer grado de preescolar.

En este fragmento se muestra como el niño esta sostenido por la maestra debido que al observar a línea 178 ella es quien plantea el problema, elige la operación y la aplica e interpreta el resultado según la línea 181; dejando solo que Ailton reparte las cartas del juego de domino por correspondencia (ver Figura 20) ya que a cada niño le conciernan 4 cartas, él no tiene en su mente un proceso de división convencional ya que no sabe con cuantas cartas comienza ni cuantas reparte, por lo tanto no sabe que hay 13 cartas y que a cada niño le corresponden 4 y sobraría 1, Ailton solo reparte por correspondencia entre niño y carta.

Figura 20. Repartición de cartas en el "Dominó".

En la siguiente figura 21 se muestran el nivel de División 1 antes descrito.

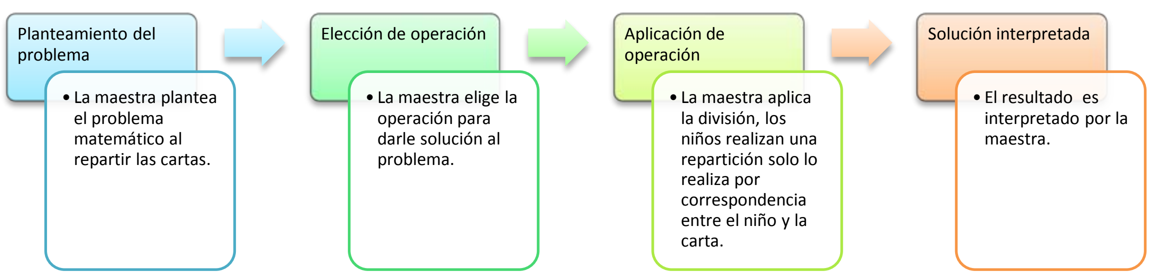

Figura 21. Competencia de División Nivel 1.

Nivel 2 de División: Correspondencia directa.

En este nivel los niños requieren quela maestra plantee el problema pero a diferencia del nivel anterior los niños eligen su operación, la aplican e interpretan el resultado. Los niños realizan la correspondencia inmediata de la cantidad que tiene de una colección a la repartición que debe de tener, es decir se averiguar cuantas veces cabe algo en otro más grande, esta correspondencia se realiza mentalmente (Ver figura 22).

En la situación de “Polos de Yogurt” de tercer grado de preescolar se realiza una compra y venta, en la cual después de realizar su compra la maestra cuestiona para saber si pueden comprar más paletas.

178	Maestra Carmen: ¿de qué sabor vas a comprar? ¿Cuántas? ¿Cuánto vas a pagarle? (se dirige a Ángel y éste señala 2 paletas de durazno que cuestan $2)
179	Carlos: $6
180	Maestra: A ver cuéntale por favor $6
181	Carlos: con 2…
182	Maestra: ¿cuánto es $6?, recuerdas ¿cuánto vale esta 5? (señala la moneda de $2)
183	Carlos: 5 (Carlos toma una moneda de $1 y la pone junto a la moneda de $5)
184	Maestra: ¿cuánto sería así?, ¿cuánto es así? pon tus manos (Carlos coloca extiende 6 de sus dedos y se los muestra a Ángel), ¿cuánto es así? (Ángel comienza a contar), ¿Cuánto es?
185	Ángel: 6
186	Maestra: ya está bien o le falta
187	Ángel: está bien
188	Maestra: está bien, dime ¿Cuánto dinero nos queda?, a ver ¿Cuánto tenemos aquí? (coloca una moneda de $2)
189	Angel: 2
190	Maestra: y ¿acá?
191	Angel: 2
192	Maestra: ¿Cuánto es? Hazlo con tus dedos (Ángel comienza a contar con sus dedos indeciso), a ver tienes 2 ahí, (la maestra extiende 4 dedos de Ángel), ¿cuánto tienes?, ¿cuánto es?, a ver tenemos 2 y 2 ¿cuánto nos queda? (la maestra señala cada uno de los dedos de Ángel y éste cuenta)

193	**Angel: 1, 2, 3, 4**
194	**Maestra: ¿cuánto nos queda?, ¿crees que puedas comprar otra paleta con ese dinero que te queda?**
195	**Carlos: si**
196	**Maestra: ¿crees que puedas comprar otra paleta?, recuerda que valen 5 y 3 pesos, ¿crees que puedas comprar otra paleta?**
197	**Carlos: si**
198	**M**aestra**: ¿cuál?**
199	**Carlos: De durazno[la de durazno vale $3]**
200	Maestra: bien pero solo vamos a comprar 2, tómalas por favor.

Extracto de la situación "Polos de Yogurt" Tercer grado de preescolar.

En este fragmento se observa como la maestra es quien plantea el problema; al observar de la línea 193 podemos ver como Carlos elige su operación la aplica mentalmente y logra interpretar su resultado. Específicamente en cuanto a la operación, Carlos realiza esta división entre el dinero que tiene Ángel y la compra de otra paleta más, ya que se cuestiona que si tiene 4 pesos, puede comprar una paleta de 5 y de 3 pesos, ¿a cuál le alcanza? Y se realiza la división, al responder que se puede comprar una paleta de $3, como se muestra desde la línea 199.

Se muestra un proceso en cual el niño, primero **realiza una comparación** entre el 3 y 5, por lo tano no puede comprar la de 5$ por que no le alcanza, después al comparar el 3 con el 4, verifica que el 3 es más pequeño del 4, por lo tanto puede comprar una paleta de $3.

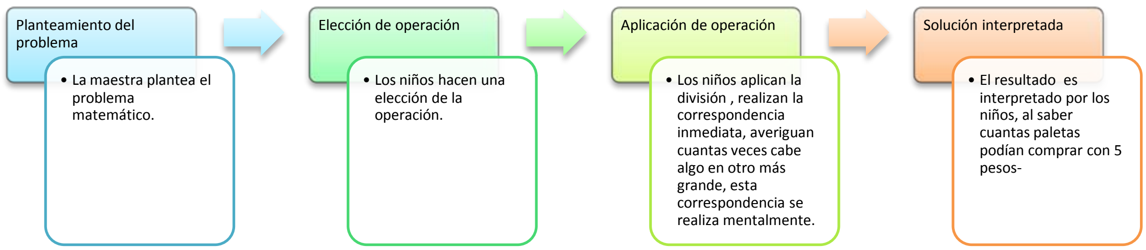

Figura 22. Competencia de División Nivel 2.

Nivel 3 División convencional.

Este nivel es igual al anterior ya que la maestra plantea el problema pero los niños eligen su operación, la aplican e interpretan el resultado, solo que en este nivel, los niños pueden realizar una división convencionalmente a pesar de que no tenga conciencia al explicar su operación.

Dentro de la situación de “Panadería” en tercer grado de preescolar, se realiza una compra-venta, donde los niños deben de saber cuántos panes pueden compra con $10 que se les proporcionó al inicio.

201 Maestra Carmen: pregúntale cuánto pan va a comprar.
202 Isaac: ¿cuánto vas a comprar?
203 Maestra: Para cuanto te alcanza si vale $4, (señala el precio en el pizarrón: medio semiótico), ¿cuánto dinero tienes?
204 Shandel: $10
205 Maestra: ¿para cuánto nos alcanza?
206 Issac: para 10 panes
207 Maestra: ¡seguro¡ ¿para 10 panes nos alcanza?
208 Ángel: no¡ para 2
209 Maestra: muy bien, ¿por qué Ángel para 2?
210 Ángel: Porque si tienes 10 para 2 te alcanza

Extracto de la situación “Panadería” Tercer grado de preescolar.

Lo que nos muestra este fragmento es como la maestra les plantea el problema según la línea 205 y al ver la línea 208 a la 210 Ángel es quien elige su operación la aplica e interpreta. Ángel realiza una división, al dividir 10 entre 4, es decir tiene $10 y cada pan le vale $4, lo cual como se observa en la línea 208 el responde que el resultado de la división es 2. También se puede mostrar como Ángel no es capaz de describir el proceso que está realizando en la operación de división, como se muestra en la línea 210.

En la siguiente figura 23 se muestran el nivel de División 3 antes descrito.

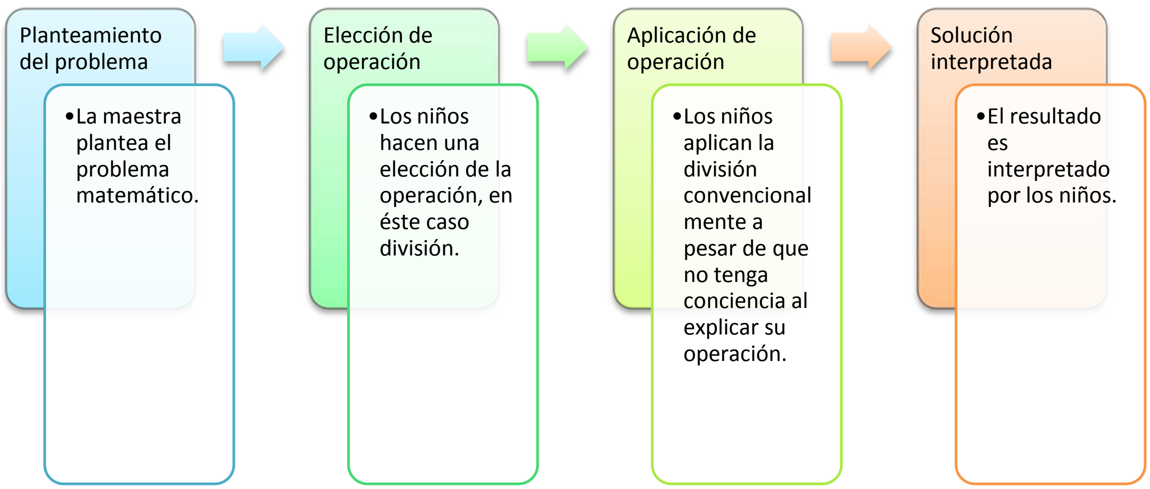

Figura 23. Competencia de División Nivel 3.

Como se acaba de mostrar en la evolución de la estrategia de División, ésta posee 3 niveles los cuales van desde la correspondencia, continua con una correspondencia directa y por último se realiza la división convencional. En la figura 24 se muestra la evolución ésta estrategia de división de una manera general.

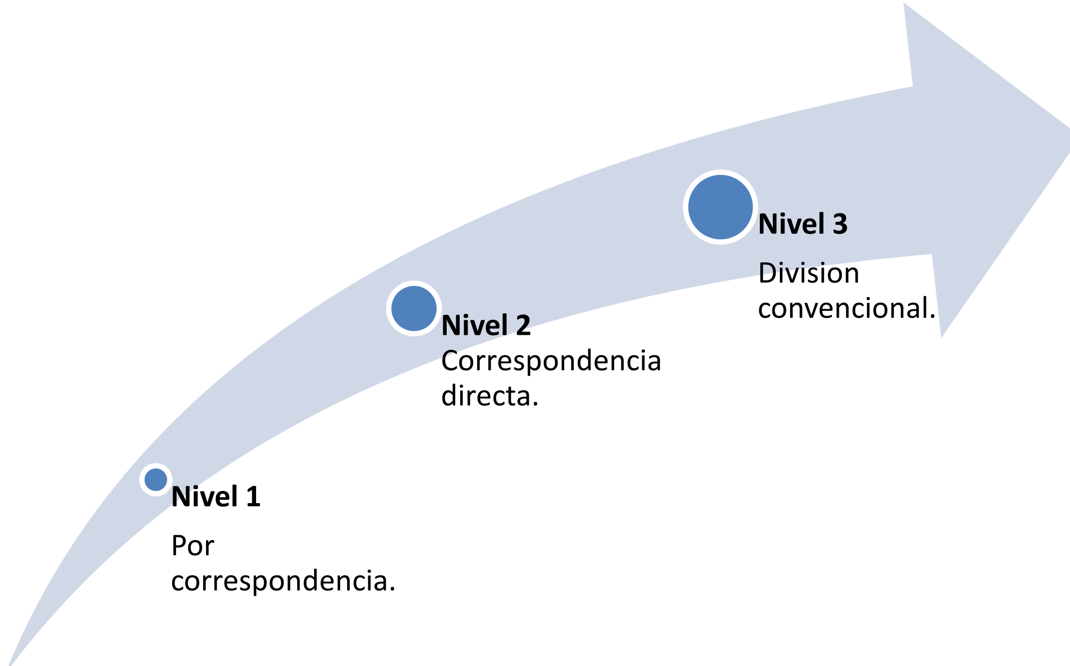

Figura 24. Desarrollo global de División.

Cuarto cálculo: MULTIPLICACIÓN.

Nivel 1 Repetición de suma.

Esta competencia se encuentra relacionada con la suma, es decir comienza con la inversa de la suma, en la cual los niños solo pueden realizar una suma repetida sin poder realizarla compleja, es decir 3 por 5. En este nivel la maestra convierte el problema en un problema matemático, hace la elección de la operación y la aplica solo dejando que el niño interprete este resultado.

Se muestra este nivel en la situación “Grandes y chicos” en tercer grado de preescolar, en la que al inicio se reparten 3 fichas por cada compañero y el equipo se compone de 5 niños.

211	Maestra Carmen: vamos a repartir las fichas, y la reparte quien ganó, que fue Ixchel, reparte 3 fichas, (Ixchel cuenta de un bote con fichas 3 por color), bien ya tiene Pato, ahora a Diana, de otro color muy bien (vuelve a contar 3), ¿cuántos integrantes hay en nuestro equipo Ixchel? Ixchel, ¿cuántos integrantes hay en nuestro equipo?

	(Ixchel cuenta mentalmente)
212	Ixchel: 5
213	Maestra: muy bien (Ixchel le reparte 3 fichas a Gael, a Daniela y 3 se las queda ella), bien, ¿Cuántas fichas tiene cada uno?
214	Niños: 3
215	Maestra: a ver, Gael, ¿Cuántas fichas tiene cada uno?
216	Gael:3
217	**Maestra: ahora vamos a ver por todos, si Patricio tiene 3 fichas ¿cuántas tiene Ixchel?**
218	**Gael: 3**
219	**Maestra: ¿Cuántas son 3 + 3?**
220	**Diana y Gael: 6**
221	**Maestra: mas 3 que tiene Diana ¿Cuántos son?**
222	**Gael:12**
223	**MC: ya teníamos 6 + 3 que tiene Diana ¿Cuántos son? (alguien menciona 8), seguros¡, 6+3 que tiene Diana ¿cuántos son?**
224	**Gael: 6**
225	**Maestra: a ver vamos a ponerlos…**
226	**Gael: 12**
227	**Diana: 9¡**
228	**Maestra: 9, muy bien Diana, pongan atención, a ver acomódenlas como Patricio acomoden las fichas en hilera, bien, a ver, ya habíamos contado que 3+3 ¿cuántos son?**
229	**Niños: 6**
230	**Maestra: más 3**
231	**Niños: 9**
232	**Maestra: ¿más 3 Gael?, cuenta.**
233	**Gael: 12**
234	**Maestra: cuenta, muy bien, 10, 11, 12, más ya llevamos 12,**
235	**Diana: 13, 14, 15.**
236	**Maestra: ¿Cuántas fichas tenemos en total?**
237	**Niños: 15**
238	Maestra: muy bien 15, ya esta, vamos a iniciar nuestro juego.

Extracto de la situación “Grandes y Chicos” Tercer grado de preescolar.

Lo que se muestra en el fragmento anterior, se refiere que en vez de realizar una multiplicación convencional en la que se multipliquen 3 fichas por 5 niños que hay en el equipo, (ver Figura 25) lo que realiza es la suma de conjunto por conjunto como lo muestra casi todo el fragmento anterior desde la línea 217 a la 237, donde suman 5 veces 3.

Figura 25. Multiplicación inicial de fichas.

En la siguiente figura 26 se muestran el nivel 1 de Multiplicación antes descrito.

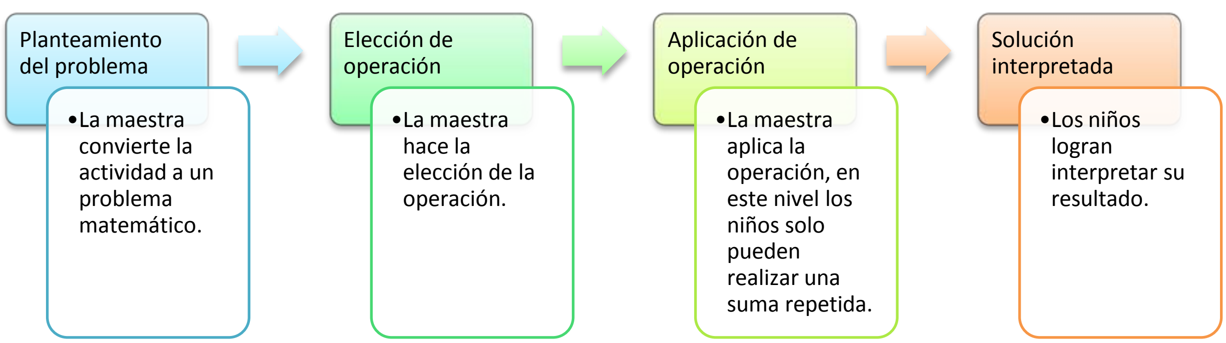

Figura 26. Competencia de Multiplicación Nivel 1.

***Competencia 3:* Reúne información sobre criterios acordados, representa gráficamente dicha información y la interpreta.**

Dentro de esta competencia se presentan tres niveles de competencia, los cuales muestran que para reunir información sobre los criterios que se pueden tener dentro de una actividad contextualizada, los niños en todos los niveles pueden reunir esta información siempre y cuando la tarea sea sencilla y no necesite de una tarea más abstracta, ya que las tareas implementadas que realizamos necesitan de un razonamiento o un pensamiento más complejo y al estar en esta condición los niños reúnen información con ayuda de la maestra.

Con respecto a la representación gráfica y la interpretación de ésta, las situaciones de intervención están planteadas para que esta competencia se ralice por medio de tablas de registros, los cuales muestra su evolución de realización, comprensión y razonamiento ante éstas. Esta competencia se compone de tres niveles que se mencionarán a continuación.

Nivel 1

Con respecto a la reunión de criterios acordados, dentro de este nivel, los niños no reúnen información solos, éstos son sostenidos por la maestra, además, de que estos no conocen ni la dinámica ni el criterio para esta información, y sobre todo no pueden reunir información a pesar de que la maestra les muestra como se realiza.

Dentro de este nivel la representación de dicha información el niño no sabe cuál es, ni la dinámica de lo que va a registrar, ni estructura de donde va a registrar pues no sigue un orden, por lo tanto la maestra explica y hace que el niño entienda la estructura de éste.

La maestra debe ayudar al niño a representar lo que se realiza en la actividad, este registro aun no es un medio del niño para poder facilitar la tarea.

Los niños realizan la representación grafica de una manera icónica, la maestra impulsa para que sea icónica la representación ya que no saben realizar una representación simbólica. Utilizan la ayuda de la serie numérica para copiar algún número. Pues esta construcción que tienen sobre la escritura del número es muy pobre, no identifica los números mayores del 3.

El siguiente fragmento se presenta en la situación “Boliche” en el primer grado de preescolar, donde se muestra como los niños, reúnen información y representan esta información de acuerdo al nivel 1 de esta competencia.

239. Maestra Mónica: ahora sí, párense en la distancia 1 y van a tirar los pinos, y ya saben que es por abajo, a ver Vale ¿cuál es la distancia 1?, tus pies arriba del 1, ahora tira (la maestra le proporciona la pelota y Vale tira), ¡por abajo vale¡ (se caen 2 pinos con los números 1 y 2), ¿Cuántos pinos tiraste Vale?
240. Nancy: 2
241. MM: ahora tiró dos pinos pero vamos a ver los números, cuantos… vamos a contar con este (toma el ábaco), a ver Vale vamos a registrar tus puntos, ¿qué número es éste? (señala el pino con el número 2)
242. Vale: 2
243. Maestra: entonces separa 2 bolitas (en el ábaco), 2, nada más 2, Vale 2, ahora aquí ¿aquí que número es? (señala en pino con el número) ¿aquí que número es?...a ver Vale éste ¿qué número era?
244. Vale: 5
245. Maestra: el 5, acuérdate
246. Johan: 2
247. Maestra: 2, este es el 2 y éste, 2 verdad, pon otros 2 Vale, (Vale recorre 2 bolitas más), ahora cuenta todos.
248. Vale : 1, 2, 3, 4
249. **Maestra: 4, ahora pon 4 rayitas, (Vale coloca 2 rayitas y se queda mirando a la maestra), ¿ahí cuántas llevas?**
250. Vale: 2
251. Maestra: ¿Cuántas te faltan?, pon otra, ¿Cuántas llevas?
252. Vale: 1, 2, 3
253. Maestra: ¿te falta?
254. Vale: 1
255. Maestra: pon otra, muy bien 4 rayitas.

Extracto de la situación “Boliche” Primer grado de preescolar.

Figura 27. Tiro de pelota en juego de "Boliche".

Lo que nos muestra el fragmento anterior en primer plano es que los niños no presentan estructura de la actividad, por lo tanto la maestra tiene que estar detrás de ellos en todo momento, esto ayuda a que los niños vayan sabiendo cómo es que se ocupan los criterios con los cuales se lleva a cabo la actividad, pues no lo realizan solos, es decir después de tirar los boliches ellos sabrían solos cuántos puntos sacó o por lo menos realizan alguna operación para obtener el criterio a registrar (ver Figura 27).

En la línea 249 se observa como la maestra impulsa para que ésta representación se realice de forma icónica, pues menciona un ícono en éste caso las rayitas para poder representar los puntajes de los boliches. Enseguida en la tabla 16 se mostrará un ejemplo del tipo de representación icónica que logran hacer los preescolares, donde se observa como la estructura de éste registro la conocen con ayuda de la maestra, la representación de los puntos del juego la realizan de una manera icónica por medio de líneas o puntos, a pesar de que en la última columna se observa como los puntajes finales los realiza la maestra de una forma simbólica:

Tabla 16. Ejemplo de representación icónica en tabla.

Dentro de este mismo nivel los niños interpretan información de una manera concreta, ya que en una representación más abstracta como la representación simbólica los niños no pueden hacer una conclusión o un razonamiento ante esta gráfica o tabla no responden a preguntas de frecuencia.

Si realizan algún cálculo lo tiene que desmenuzar la maestra para hacerlo más sencillo menos abstracto para que lo realicen los niños. No pueden interpretar tablas ni gráficas, por lo tanto la interpretación la realiza la maestra. El siguiente fragmento ilustra cómo es que los niños realizan la interpretación.

256. Maestra Mónica: a ver, ya tenemos el total de puntos niños, fíjense, Nancy ¿Quién ganó?, Vale siéntate y dime ¿Quién ganó?
257. Vale: este, Johan
258. Maestra: Johan ¿Cuántos puntos tuvo Johan?
259. Johan: 2
260. Maestra: 16, y… ¿Quién perdió?
261. Vale: mmm.. Nancy
262. Maestra: ¿Cuántos puntos tuvo Nancy?, 10, y ¿Cuántos puntos tuviste tu? (se dirige a Vale)… 10, ¿Quién tuvo más?
263. Vale: Johan
264. Maestra: tuvo más Johan y después, (la maestra le retira un plumón a Vale), entonces si tu tuviste 10 puntos y

	Nancy tuvo 10 puntos ¿Quién tuvo más?
265.	Vale: no sé
266.	Maestra: pues nadie, las 2 tuvieron igual, ¿Quién ganó Vale?
267.	Vale: Johan
268.	Maestra: ¿Quién gano Nancy? ¿Quién ganó?
269.	Nancy: Johan
270.	Maestra: con ¿Cuántos puntos?... 16, y Johan ¿Cuántos puntos tuvo Vale?. Este en un 1 y un 0 es 10 puntos, entonces primer lugar fue Johan, ¿segundo y tercer lugar?, Vale y Nancy porque tienen igual de puntos, entendido.

Extracto de la situación “Boliche” Primer grado de preescolar.

Lo que se muestra en el fragmento anterior, es como lo niños no logran realizar una interpretación de la tabla, quien realiza e impulsa poco a los niños para realizar esta interpretación es la maestra. Una característica singular de ésta competencia es que por medio de ésta tabla los niños logran razonar respecto a quien fue el ganador o el primer o segundo lugar.

Lo que nos mostró el fragmento anterior es que los niños no logran realizar un razonamiento matemático respecto a la interpretación de la tabla, pues no logran contestar a los cuestionamientos que realiza la maestra respecto a ésta interpretación.

En la siguiente figura 28 se muestran el nivel 1 de competencia antes descrito.

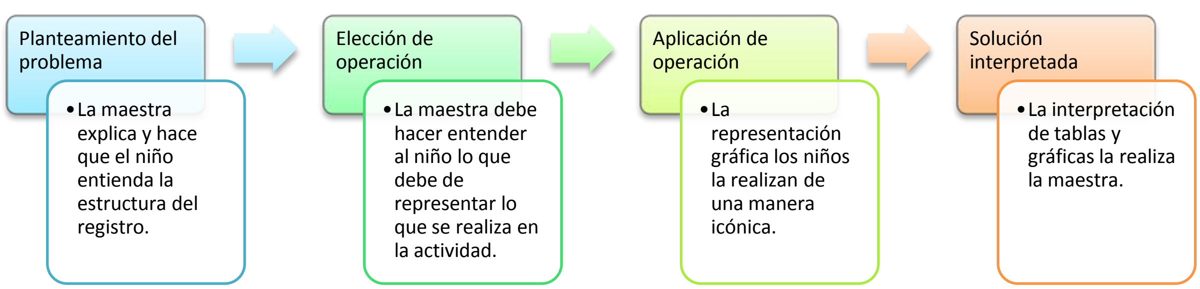

Figura28. Competencia Representa gráficamente Nivel 1.

Nivel 2

Para reunir la información la maestra lo apoya y lo sostiene para esta tarea, aunque ya no es tan sostenido como en el nivel 1. Comienza a comprender un poco la estructura de la actividad y sobre todo los acuerdos sobre los criterios acordados a representar.

Situación "Boliche" 2do grado de preescolar, se presenta el inicio del juego.

271.	Maestra: el día de hoy vamos a jugar boliche, las reglas del juego, cada boliche va a tener puntos, ¿a aquí que número es? (señala un boliche con el número 2)
272.	Niños: 2
273.	Maestra: y ¿aquí?, (señala un boliche con el número 3)
274.	Niños: 3
275.	Maestra: vamos a sumar y vamos a anotar,
276.	**Héctor: ósea ya entendí, los vamos a tirar y si tiramos 1 y 3, tenemos que sumar cuanto es.**
277.	Maestra: vamos a coloca nuestro boliche en dos hileras, ¿para qué creen que sea esto?, ¿qué tiene aquí? (muestra el registro)
278.	**Héctor: trae el nombre, 1ra ronda, 2da ronda y 3ra ronda.**
279.	Maestra: a muy bien, aquí está el nombre de cada niña y ya cuando les toque tirar, vamos a anotar lo que sumamos con nuestros boliches, porque vamos a sumar nuestros puntos, lo vamos a poner aquí en la mesa.

Extracto de la situación "Boliche" Segundo grado de preescolar.

En la línea 276, se observa como Héctor entiende la estructura de la actividad y sobre todo entiende cómo se van a reunir los criterios a registra, en la línea 278 se observa cómo se comienza a tener comprensión de la estructura del registro, lo que nos muestra un avance muy notorio a comparación del nivel 1 donde no conocían la estructura del registro, ni comprendían como se reuniría la información para representarla.

En este nivel los niños comprenden la estructura del registro, respetan un orden y secuencia de éste, no es desconocida, la representación la puede realizar porque reconocen, identifican y tiene una construcción de los números. Realiza la representación gráfica guiándose de la serie numérica, tanto para su identificación como para la copia de este numeral, utilizan una representación simbólica incorrecta, la tabla 17 es un ejemplo de este tipo de representación, donde se observa como los preescolares realizan una representación simbólica incorrecta como por ejemplo 15 por 51 o la escritura del número 1 en forma de espejo:

Tabla 17. Ejemplo de representación simbólica incorrecta.

En este nivel ésta representación les ayuda a entender la tarea que están haciendo.

En la situación de “Boliche” 2do grado de preescolar, después de tirar los pinos en el boliche se calculan los puntos y se registran, a continuación se presenta éste fragmento que ilustra este nivel 2 de competencia.

280. Maestra: ahora ¿quién sigue?
281. Sofía: yo (Sofía tira hacia los boliches)
282. Maestra: a ver vamos a sumar Sofía, ¿cuántos tenemos aquí Sofía?
283. Héctor: 2 y…
284. Maestra: a ver Héctor ¿cuántos tenemos? (levanta el boliche con el número 2)

285.	Sofía: 2
286.	Maestra: 2 + 1, (levante el boliche con el número 1) ¿cuántos son?
287.	Sofía: 3
288.	Maestra: y aquí ¿qué tenemos?
289.	Sofía: 3+2
290.	Maestra: ¿cuánto es? 3+2 (Sofía cuenta con sus dedos), ¿cuánto es?
291.	Sofía: 5
292.	Maestra: 5, anotamos el número 5 (cuando Sofía registra, voltea a ver la serie numérica a identificar el número y a copiar el 5).

Extracto de la situación “Boliche” Segundo grado de preescolar.

Lo que se muestra en el fragmento anterior es como Sofía, con ayuda de la maestra realiza su cálculo para obtener el resultado de su puntaje total, y al registrarlo conoce la estructura de éste y sabe colocar su representación donde le corresponde.

Para la interpretación de la tabla dentro de éste nivel de competencia, los niños realizan algún cálculo abstracto pero con ayuda de la maestra al planteárselo, sin embargo, ellos realizan este cálculo, además pueden hacer una conclusión o un razonamiento ante esta gráfica o tabla con ayuda de la maestra y responden a preguntas de frecuencia para este razonamiento.

El siguiente fragmento se refiere a la situación de “Boliche” 2do grado de preescolar, donde después de registrar el total de puntos durante el juego, se interpreta la tabla donde se registró.

293.	Maestra: a ver vamos a ver quien obtuvo, vamos hacer la suma del total.
294.	Héctor: yo tuve 8 puntos
295.	Maestra: a ver Nahomi ¿cuántos puntos obtuviste?
296.	Nahomi: 1
297.	Maestra: a ver ¿éste que número es? (señala el número 3), fíjate ahí (señala la serie numérica), ¿qué número es Nahomi? 1…
298.	Nahomi: 1, 2, 3
299.	Maestra: ¿qué número es el que tenemos ahí?

300. Nahomi: 3
301. Maestra: a ver ¿cuántos puntos tuvo Nahomi?
302. Niños: 3
303. Maestra: Nahomi ven a anotarlos, a ver Héctor, ¿cuántos puntos tuvo?
304. Héctor: en total 8, en total son 8
305. Maestra: 6 +2
306. Héctor: 8
307. Maestra: ven a anotarlos, a ver Sofía ¿cuántos puntos tuvo?, vamos a sumarlos Sofí, 1+5 ¿cuántos son?
308. Héctor: 5+5
309. Sofía: 6
310. Maestra: 6+5, Héctor deja que ella haga su suma, 6+5, ya teníamos 6 empezamos, (extiende su mano mostrando los 5 dedos de su mano) siete, ¿cuántos son aquí?,
311. Sofía: 5
312. Maestra: ya tenemos 6 ahora que número sigue (señala uno de sus dedos al mismo tiempo que Sofía cuenta)
313. Sofía: 6, 7, 8, 9, 10, 11
314. Maestra: ¿Cuántos puntos obtuviste?
315. Sofía: 11
316. Maestra: pasa a anotarlos, (Sofía registra sus puntos), a ver May, desde ahí ¿qué número es éste May?
317. May: 2
318. Maestra: y éste es el 5, a ver vamos a sumar, son 5+2 ¿cuántos son?, cuéntalos,
319. May: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
320. Maestra: 7+1 ¿cuántos son?
321. May: 8, este es el número 8 y aquí lo ponemos, a ver, vamos a ver ¿quién obtuvo más puntos?, ¿cuántos puntos tuvo Nahomi?
322. Niños: 3
323. Maestra: ¿Héctor?
324. Niños: 8
325. Maestra: ¿Sofía?
326. Niños: 11
327. Maestra: y ¿May?
328. Niños: 8
329. Maestra: ¿quién obtuvo más puntos?
330. Sofía: yo
331. Niños: Sofía
332. Maestra: ¿por qué Sofía?
333. Sofía: porque tengo 11 puntos.
334. Maestra: a ver Sofía dice que tiene el primer lugar, porque

tiene 11 puntos, ¿quién obtuvo el segundo lugar?
335. Héctor: May
336. Maestra: a ver vean, este es Sofía que tiene mayor puntuación, ¿cuál es mayor el 8 o el 3?
337. Niños: el 8
338. Maestra: ¿Quién obtuvo 8 puntos?
339. Sofía: Héctor y May
340. Maestra: Héctor y May quedaron en… segundo lugar, y ¿Quién obtuvo el número más pequeño?
341. Niños: Nahomi
342. Maestra: entonces ¿quién quedo en primer lugar? (levanta la mano Sofía), ¿en segundo lugar?
343. Nohomi: Nahomi (Sofía señala a Héctor y a Nahomi)
344. Maestra: y ¿el tercer lugar?
345. May: yo
346. Maestra: bueno pues ya terminamos nuestro juego.

Extracto de la situación “Boliche” Segundo grado de preescolar.

Dentro de éste fragmento se observa como los niños pueden realizar un razonamiento más complejo al interpretar la tabla, pues ya conocen su estructura de ésta, ya que logran leer la tabla vertical u horizontalmente según se requiera, además, al conocer la estructura de éste registro, les permite entender a los niños los pasos de cómo se va a llevar el proceso de cálculo de los puntajes, comprender los puntajes totales para saber quién ganó en el juego, etc.

En la siguiente figura 29 se muestran el nivel 2 de Representación gráfica antes descrito.

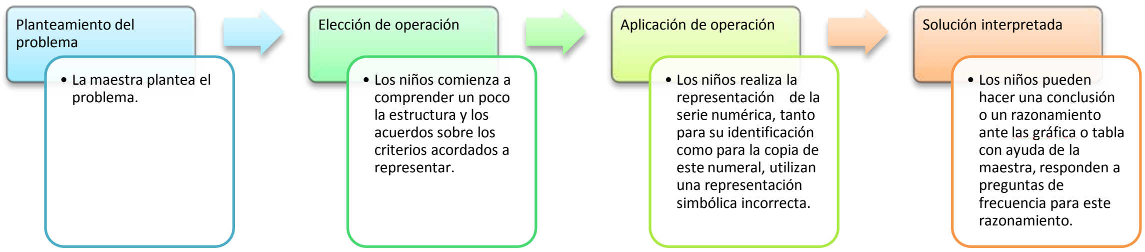

Figura 29. Competencia Representa gráficamente Nivel 2.

Nivel 3

Dentro de este nivel, los niños pueden reunir información cuantitativa y cualitativa sin alguna ayuda, en este caso se sostienen por que el nivel de complejidad para reunir información es mucho más compleja que en los niveles anteriores. En el siguiente fragmento se muestra un ejemplo de cómo los preescolares hacen uso de éste registro dentro de la actividad y lo utilizan para razonar matemáticamente.

Situación de “Grandes y chicos” en 3ro grado de preescolar.

347. Maestra: ¿alguna vez han ido a la feria?
348. Carlos: yo sí
349. Maestra: y ¿qué han visto en la feria?
350. Carlos: juegos
351. Maestra: ¿qué tipos de juegos?, canicas, tiro al blanco, ¿si han visto eso?,
352. Niños: si
353. Maestra: ¿si?, bueno hoy vamos a jugar un juego que se llama grandes y chicos, sale, sí, bueno, entonces les voy a mostrar el tablero, para el juego, éste es el tablero, sale, me pueden decir ¿qué hay aquí?.
354. Niños: números

355. Maestra: números, ¿qué más?
356. Niños: letras
357. Maestra: muy bien, estas letras dicen chicos, y aquí dice grandes, sale, ahora me pueden decir ¿qué números hay?
358. Niños: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 8, 9,10, 11, 12
359. Maestra: bien, eso muy bien, a ver Danna me puedes decir ¿cuál es el número más chico?, (Danna señala el número 8), ese, ese ¿está bien Danna?
360. Diana: no, es el 2
361. Carlos: 2
362. Maestra: ¿por qué?
363. Diana: porque el 2 tiene nada más 2
364. Maestra: eso y ¿cuál es el número más grande?
365. Diana: éste (señala el número 12)
366. Maestra: el 12, muy bien, se fijaron que el 7 es un número más grande de tamaño y es de color rojo
367. Niños: si
368. Maestra: ya vieron, bueno les voy a explicar por qué, porque nuestro juego consiste en que los números menores del 7, son números chicos, todos estos son números chicos (señala el conjunto del 2 al 6), ¿cuáles son los números chicos Danna?
369. Danna: éstos (señala el conjunto de los chicos)
370. Maestra: éstos, 2, 3, 4, 5 y 6, este conjunto son números chicos, y los números que están después del 7 son números grandes, éste es el conjunto de los grandes, sale, ¿me pueden decir cuáles son los grandes Diana? (Diana pone en su mano en el conjunto de los grandes?, ¿qué números son los grandes?
371. Diana: esos (señala el conjunto de los grandes)
372. Maestra: muy bien, entonces, para esto vamos a ver, les voy a explicar las reglas del juego, las reglas del juego consisten en que yo les voy a dar una ficha, como ésta a cada quien (señala una ficha) sale, y alguien va a tirar el dado, bueno los dados, entonces, yo voy a tirar el dado, pero antes voy a ver a qué número le voy a tirar, por ejemplo yo le voy a jugar al conjunto de los chicos, a los números de los chicos, qué quiere decir, que en mi dado debe de haber números chicos, entonces, por ejemplo, tiro mis dados, y sale 5 y 4, 9, éste 9, ¿el 9 en qué conjunto ésta?
373. Niños: en el de los grandes
374. Maestra: ¿gané o perdí?
375. Carlos: perdiste

376. Maestra: ¿por qué?
377. Carlos: porque si le atinas, porque si le hubieras tirado a la ficha de los grandes, hubieras ganado
378. Maestra: entonces como perdí tengo 0 puntos, y si hubiera ganado hubiera ¿tenido?
379. Niños: 3 puntos
380. Maestra: ya viste Danna, si ganas ¿cuántos puntos tienes?
381. Danna: 3
382. Maestra: y ¿si pierde?
383. Carlos: 0 ¿?¿?¿?¿?

Extracto de la situación “Grandes y Chicos” Tercer grado de preescolar.

Figura 30. Exposición de criterios en el Juego “Grandes y chicos”.

Lo que nos muestra el extracto anterior es que para los niños que ya tienen la competencia, es muy fácil comprender los criterios que se tienen que tomar en cuenta para llevar a cabo la actividad, donde ellos pueden comprender la complejidad de los criterios para la representación, a pesar de que éstos criterios utilicen más conocimiento matemático y razonamiento a comparación de los niveles 1 o 2 (ver Figura 30).

Por otro lado, la representación gráfica los niños la entienden, saben cuál es su uso de ésta, saben que este en un primer momento sirve para seguir con la dinámica de la actividad y por otro lado que esta representación les ayuda a resolver problemas como por ejemplo, poder resolver algún cálculo y poder regresar a la problemática contextual.

En este momento la dinámica de la competencia es distinta, ya no se fijan en la estructura del registro, ya saben cómo manejarlo, es un elemento más de la situación, ya ocupan una representación simbólica correcta, como el ejemplo siguiente, donde se observa que las representaciones que realizan los niños en este nivel son de una forma simbólica (Tabla 5):

Tabla 18. Ejemplo de representación simbólica.

Nombre	1ª Ronda	2da	3ra	Total
Danna	7	9	2	18
Carlos	17	7	19	43
Angel	11	9	10	30

En el siguiente fragmento se ilustra la situación de Grandes y Chicos en tercero de preescolar y más adelante se describe este fragmento.

384. Maestra: ahora van a tirar, pero para tirar los dados, primero deben de ver a qué número le van a jugar, ¿a qué conjunto, al conjunto de los chicos, al conjunto de los grandes o al número 7?, ¿a qué conjunto le vas a tirar Danna?
385. Danna: a los grandes
386. Maestra: pon tu ficha aquí, tu Diana, ¿a los chicos al 7 o a los grandes? (Diana coloca su ficha en el número 7), al 7, y tú José Carlos, (coloca su ficha en el conjunto de los grandes) a los grandes, muy bien, tira Danna, (Danna tira los dados) ¿cuánto es 6+6 Danna?
387. Danna: 16
388. Maestra: a ver yo te pongo 6, no cuenta tu 6, ¿qué sigue?,

7
389. Danna: 8, 9, 10, 11,12 (mientras Danna cuenta, Carlos y Diana cuentas con sus dedos)
390. Maestra: 12, ¿cuánto salió?
391. Danna: 6
392. Maestra: 12, el 12 ¿qué es? ¿Conjunto chico o conjunto grande?
393. Niños: conjunto grande
394. Maestra: conjunto grande, ¿Quién ganó?
395. Carlos: Danna
396. Maestra: de ¿quién son éstas fichas?
397. Carlos: de yo y de Danna
398. Maestra: entonces ¿cuántos puntos ganaste Danna? Si tu ficha quedo aquí.
399. Diana: 3¡
400. Maestra: muy bien, entonces en la primera ronda pon sus puntos, (Carlos coloca 3 puntos a Danna, 3 puntos a él y 0 puntos a Diana).

Extracto de la situación “Grandes y Chicos” Tercer grado de preescolar.

En el fragmento anterior se observa como la dinámica del juego es mucho más fluida, ya que conocen los criterios a registrar, además la ayuda de la maestra no es tan visible pues al registrar, ya conocen la estructura del registro y la dinámica de cómo se registra.

Por otra parte con la interpretación en éste nivel, se concluye que no solo son criterios acordados con los que se trabaja, va mas allá de eso, estos criterios necesitan de un razonamiento más abstracto que los niños en un primer momento necesitan más ayuda y después disminuye, pueden hacer una conclusión o un razonamiento ante esta tabla sin ayuda de la maestra, va mas allá de solo responder preguntas de frecuencia y es por esta frecuencia que ellos pueden obtener un razonamiento complejo.

401. Maestra: ahora vamos a hacer la suma de cuantos tuvieron cada uno va, vamos a empezar con Ángel, Ángel ¿cuánto tuvo en la primera ronda?
402. Niños: 3
403. Maestra: en la segunda
404. Diana: 0
405. Niños: en la tercera
406. Diana: 1
407. Maestra: ¿cuántos puntos tuviste en total Ángel?
408. José Carlos: 4
409. Maestra: ¿por qué 4?
410. Carlos: porque 3, 4
411. Maestra: si Ángel tuviste 4, (Ángel mueve la cabeza de afirmación) a ver anótalos, anota el número 4 aquí.
412. Diana: 11
413. Maestra:¿quién tuvo 11?
414. Diana: José Carlos
415. Maestra: a ver ¿cuánto tuvo en la primera ronda?
416. Niños: 1
417. Maestra: en la segunda
418. Niños: 3
419. Maestra: en la tercera
420. Niños: 6
421. Maestra: ¿Cuántos puntos tiene en total?
422. José Carlos:11
423. Maestra:¿seguros?, a ver vamos a contar, 1+3
424. José Carlos: 1+3… 4
425. Maestra: ¿4 + 6? (JC cuenta mientras Diana da una respuesta)
426. Diana: 11
427. Maestra: ¡segura¡ (Diana mueve su cabeza con afirmación)
428. José Carlos: 10
429. Maestra: a ver vamos a contar 4, ponle 6 dedos, así, ¿Cuánto es 4+6?
430. Diana: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
431. Maestra: a ver Ángel, ¿Cuánto es?, enséñale tus dedos Carlos, ¿Cuánto es 6+4?
432. Ángel: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
433. Maestra: a ver Danna ¿cuánto es? Ponle los 6 a Danna
434. Danna: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
435. Maestra: ¿cuántos puntos tuvo Carlos?
436. Niños: 10
437. Maestra: sigue Danna, ¿Cuántos puntos tuvo Danna en la primera ronda?
438. Niños: 3
439. Maestra: en la segunda
440. Niños: 1
441. Niños: en la tercera
442. Niños: 0
443. Maestra: ¿Cuántos puntos tuviste en total?

444. Niños: 4
445. Maestra: a ver segura 4
446. Danna: si
447. Maestra: ¿por qué Danna?
448. Danna: porque fueron 4…
449. Maestra: a ver anótalo
450. Diana: porque Ángel fue igualito
451. Maestra: anota aquí el 4, a ver sigue Diana, (Diana toma el lápiz y anota sus puntos sin obtener ayuda), a ver ¿Cuántos puntos obtuvo Ángel en total?
452. Niños: 4
453. Maestra: ¿Carlos?
454. Niños: 10
455. Maestra: ¿Danna?
456. Niños: 4
457. Maestra: y ¿Diana?
458. Niños: 1
459. Maestra: ¿Quién obtuvo más puntos?
460. Carlos: ¡yo¡
461. Maestra: ¿Quién obtuvo menos puntos?
462. Carlos: Diana
463. Maestra: ¿Quién obtuvo el primer lugar?
464. Carlos: ¡yo¡
465. Maestra: ¿Por qué tuviste el primer lugar?
466. Carlos: porque tuve 10 puntos
467. Maestra: ¿Quién obtuvo el segundo lugar?
468. Diana: los dos (señala a Ángel y Danna)
469. Maestra: ¿por qué?
470. Diana: porque tenían esos,
471. Maestra: a ver Ángel ¿Quién obtuvo el último lugar?
472. Diana: Diana
473. Maestra: tú tuviste el último lugar ¿por qué Diana?
474. Diana: por qué tuve 1
475. Maestra: aja.

Extracto de la situación “Grandes y Chicos” Tercer grado de preescolar.

Lo que se observa en el fragmento anterior es como los niños comienzan a razonar cuando interpretan la tabla, pues se utiliza de conocimiento matemático y éste lo usan para interpretar y con ésta. También, se observa cómo es que el registro se convierte en un medio tanto para entender la actividad como para razonar matemáticamente en ésta. El poder que tiene el registro para centrar las acciones de los niños es muy importante, ya que esto permite que después se abstraiga la situación problemática para resolverla con algún cálculo matemático y en seguida razonar con el resultado de éste cálculo dentro de la actividad, donde los niños le encuentran sentido a este cálculo.

En la figura 31 se presenta de una manera sintética el nivel 3 de ésta competencia.

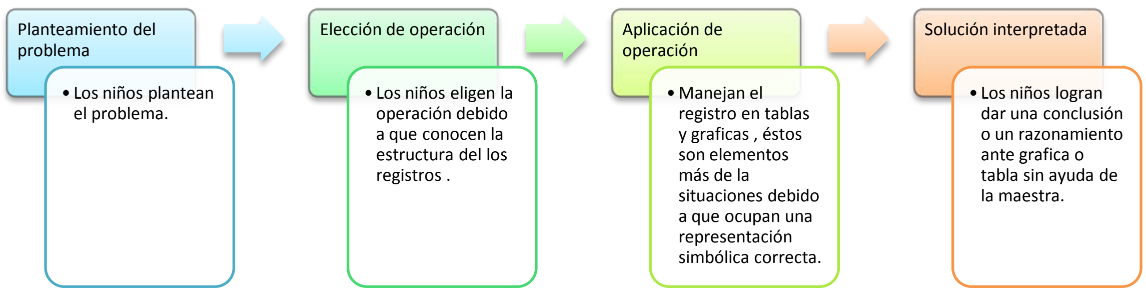

Figura 31. Competencia Representa gráficamente Nivel 3.

Desarrollo del Razonamiento numérico general

Para comprender este segundo apartado debemos de tomar en cuenta que partimos de un razonamiento numérico en general, el cual fue evolucionando y transformándose durante la intervención del programa. Este razonamiento matemático se desarrolló por medio de la resolución de problemas matemáticos en los que los niños se encontraban inmersos y se enfrentaban a estos problemas en cada momento de las situaciones planteadas de la intervención. Cada problema contenía una complejidad cognitiva la cual el niño respondía de acuerdo al nivel de competencia que éste poseía.

Lo que nos muestran los análisis cualitativos es que este razonamiento matemático fue evolucionando en cinco grades momentos los cuales se describen continuación (ver tabla 14):

MOMENTO 1

En el primer momento del razonamiento matemático los niños únicamente son participes en la actividad, son espectadores ante el planteamiento del problema que realiza el experto, únicamente sigue o imita la decisión de resolución que algún experto plantea en su lugar. Los niños no logran resolver algún problema matemático, no pueden realizar un planteamiento de éste problema pues no existe en su cabeza una estructuración del problema por lo tanto no tienen competencia para poder realizar algún cálculo para la solución matemática,

Su participación solo se relaciona con el manejo o identificación de algunos conocimientos matemáticos como la identificación de algunos números y presencia de algunos principios del conteo o en su caso la repetición de la serie numérica.

Necesitan ayuda poder resolver la tarea a la que se están enfrentando, es decir no logran traducir este problema contextualizado para abstraerlo y realizar una operación matemática, no realizan el cálculo matemático esperado ni mucho menos consiguen interpretar este cálculo matemático a la situación problema.

Como consecuencia la maestra es quien debe de plantear el problema a resolver, se los expone a los niños a pesar de que ellos no lo saben solucionar, así la maestra aplica un conjunto de ayudas, motores cognitivos y estrategias para que el niño pueda resolver el problema y realicen algún calculo, por lo tanto en este momento la maestra resuelve el problema. Las acciones que se tiene en la actividad comienzan a ser numerosas por parte de la maestra y de los niños, aunque los niños participen de una manera insipiente o como espectadores tanto de la actividad como del razonamiento que se está llevando a cabo, a pesar de que ellos participen en la actividad.

MOMENTO 2

Este momento es muy similar al momento 1, ya que el planteamiento del problema contextualizado lo realiza la maestra, los niños no participan en nada de este planteamiento, la maestra abstrae el problema contextualizado a un problema matemático, pero a diferencia del momento 1 al realizar la resolución o cálculo matemático, la maestra desmenuza la resolución pues para ellos es muy difícil poder hacer un cálculo completo (es decir no pueden atribuirle un valor a un objeto, no saben escoger la operación o calculo adecuado para la resolución del problema y sobre todo no saben realizar este cálculo) por ejemplo si se plantea una suma (agregar) la docente parte de juntar una colección con otra pero los niños no pueden realizar ese cálculo, así que la docente debe de hacer consiente al niño primero de contar correctamente un conjunto, después contar otro conjunto y por último que el niño cuente correctamente los dos conjuntos para obtener una suma, y así obtener el resultado que nos lleve a resolver el cálculo deseado.

De acuerdo al conocimiento que van adquiriendo los niños en este nivel ellos identifican algunos números de la serie numérica mayores al 5, repite la serie numérica y realiza sobreconteo (nivel 4 de conteo y nivel 2 de suma), agrupa objetos según su atributo, presenta abstracción numérica al relacionar el significado del número.

Por otro lado, la maestra está detrás de la resolución con muchos motores cognitivos para que los niños entiendan la operación matemática que deben hacer, esta operación la maestra los ayuda y empuja en todo momento, además de cómo en el momento 1 ella traduce el cálculo al problema a resolver. A manera de conclusión, este momento se caracteriza nuevamente como el momento 1 en que los niños se encuentran como espectadores en el razonamiento, pero por el esfuerzo, habilidad o experiencia que tiene la maestra al proporcionar ayudas o cuestionamiento, ella les desmenuza el cálculo matemático, entonces los niños pueden lograr realizar este cálculo de una manera simple y sencilla a comparación del momento 1 en el cual la maestra realizaba el cálculo complejo, sin perder de vista que los niños aun son dependientes de la maestra para este razonamiento matemático.

MOMENTO 3

En este momento del desarrollo del razonamiento matemático, quien comienza a realizar la solución del problema sigue siendo la maestra, ella es quien plantea el problema contextualizado a resolver, (pareciera obvio que el planteamiento del problema nunca lo pueden realizar los niños pues las situaciones de aprendizaje se plantean para que la maestra dirija estos problemas matemáticos, pero surge un momento que el niño puede realizar todo este procedimiento de la resolución del problema sin sostén de la maestra) *los niños en este momento comienzan a entender la estructura del problema*, lo que no pasaba en el momento 1 y 2.

La maestra nuevamente es quien empuja la traducción de este problema contextualizado a un cálculo matemático, pero en este momento los niños son capaces de poder resolver este cálculo directo sin ayuda de la maestra y sobre todo, sin que la maestra aplique un conjunto de motores para que el niño pueda resolver este cálculo, en este momento el cálculo se resuelve directo por ejemplo si se solicita una suma, el niño realiza el cálculo de una suma, a comparación del momento 2 que la maestra tenía que desmenuzar esta estrategia para que los niños la puedan aplicar.

Con respecto a su conocimiento matemático en este momento los niños ya identifican la mayoría de los números de la serie numérica, además ya comienzan a realiza operaciones matemáticas en sus niveles más altos como la suma o sustracción.

Además de poder realizar el cálculo esperado para la resolución del problema, los niños pueden abstraer este resultado para traducirlo a la problemática contextualizada a resolver.

MOMENTO 4

El momento 4 se caracteriza porque si bien en los momentos anteriores 1,2 y 3 la solución del problema era sostenido por la maestra, pues ella intervenía y sostenía en todo instante a los niños para que se pudiera solucionar el problema planteado, los niños ya no son sostenidos por la docente, ahora en este momento ellos entienden la estructura del problema y los pueden resolver sin ayuda de la maestra.

Es decir al estar dentro de una actividad contextualizada, ellos pueden plantear este problema situado, pueden traducir este problema contextualizado a un cálculo para que pueda ser resuelto, los niños son capaces de identificar que calculo es el indicado para la resolución del problema además de poder resolver este cálculo adecuadamente y sobre todo que este cálculo no solo se queda en una operación sencilla, tal vez como el conteo, si no se pueden resolver cálculos como agregar, quitar, repartir, etc. Y combinar estas operaciones matemáticas.

En este momento los niños son competentes para abstraer de la situación problemática los datos adecuados para el cálculo matemático, realizar este cálculo y poder regresar a la situación contexto para interpretar este resultado al problema que se desea resolver.

Es evidente en este momento que *el niño posee la competencia matemática y es autónomo para enfrentarse a cualquier problema y encontrar la solución* de éste, pues posee conocimientos matemáticos básicos que lo ayudan a resolver este problema ya no solo se presentan los conocimientos si no que usan estos conocimientos para calcular y sobre todo *su cabeza se encuentra estructurada* *tanto de la actividad como de la estructura del problema matemático*, así en este momento los preescolares pueden realiza cálculos matemáticas como suma, resta, multiplicación, y división.

MOMENTO 5

Más allá del momento 4 en donde se observa ya el razonamiento complejo, en el 5 los niños presentan un dominio de esta competencia pero sobre todo se encuentran autónomos de la maestra, ahora en este momento quien sostienen a los niños es la actividad, es decir la actividad es quien le da estructura a los niños para que puedan efectuar el razonamiento matemático que poseen.

Así como en el momento 4 los niños poseen la competencia matemática, poseen conocimientos matemáticos que lo ayudan a resolver este problema además de que su cabeza se encuentra estructurada tanto de la actividad como de la estructura del problema matemático.

En este momento existe un dominio de la competencia matemática ya que no se está sostenido por la maestra, ella puede participar pero no depende de ella para que el niño realice la competencia. Los niños poseen un dominio que les permite ayudar a otros compañeros para resolver este problema matemático y expresar la resolución del problema en todas sus partes.

Los niños muestran su dominio y autonomía de tal forma, que son capaces de estructurar y guiar a otros en las acciones ayudando a pensar o razonar y ayude a resolver el problema, esto es muy similar a lo que realiza la maestra dentro del aula, pero ahora el niño es apto y puede resumir el papel del experto y tener la capacidad de empujar al otro para que este resuelva el problema.

En la tabla 19, se presenta de una manera sintética la evolución del razonamiento matemático a través de los 5 momentos.

Tabla 19. Momentos del razonamiento matemático

MOMENTOS	CARACTERISTICAS
Momento 1	• Los niños necesitan ayuda para resolver la tarea. • No logran traducir el problema contextualizado para abstraerlo y realizar una operación matemática. • La maestra resuelve el problema y los niños solo son espectadores tanto de la actividad como del razonamiento que se está llevando a cabo.
Momento 2	• El planteamiento del problema contextualizado lo realiza la maestra. • La maestra abstrae el problema contextualizado a un problema matemático. • La maestra desmenuza la resolución (pues para ellos es muy difícil poder hacer un cálculo completo). • La maestra está detrás de la resolución con motores cognitivos para que los niños entiendan la operación matemática que deben hacer.
Momento 3	• La maestra plantea el problema contextualizado a resolver. • La maestra nuevamente es quien empuja la traducción de este problema contextualizado a un cálculo matemático. • Los niños son capaces de poder resolver este cálculo directo sin ayuda de la maestra.
Momento 4	• Los niños pueden plantear un problema situado, pueden traducir este problema contextualizado a un cálculo para que pueda ser resuelto. • Los niños son capaces de identificar que cálculo es el indicado para la resolución del problema además de poder resolver este cálculo adecuadamente. • No solo se presentan los conocimientos sino que usan estos conocimientos para calcular y sobre todo su cabeza se encuentra estructurada tanto de la actividad como de la estructura del problema matemático.
Momento 5	• Los niños obtienen un dominio de las competencias además de que ellos son autónomos de la maestra. • Quien sostienen a los niños es la actividad, es decir la actividad es quien le da estructura a los niños para que puedan efectuar el razonamiento matemático que poseen.

Para concluir con la evolución de la competencia matemática en general mostramos que los niños al inicio del razonamiento matemático no entendían ni la actividad ni la estructura del problema, además no poseían los conocimientos matemáticos necesarios para solucionar la situación problemática.

Conforme evolucionaron en el razonamiento, los niños poco a poco fueron internalizando la estructura de la actividad, la estructura de la solución del problema, los conocimientos matemáticos y la dinámica que se llevaba a cabo, pudiendo cada vez más participar en las actividades de una manera compleja progresivamente.

Por lo tanto se observa este avance paulatino del razonamiento y conocimiento matemático dentro de estos cinco momentos del cada uno con sus características particulares.

Ejemplo específico del desarrollo del proceso en un alumno de preescolar.

Este apartado tiene como fin reconstruir la línea evolutiva de las competencias matemáticas específicamente en un preescolar, este apartado nos muestra el proceso de construcción de conocimiento y razonamiento numérico que siguieron los preescolares al estar expuestos a las diversas situaciones de aprendizaje.

El ejemplo es un caso que se refiere a Diana una alumna de 3er año de preescolar, la cual durante el curso escolar muestró un cambio en su razonamiento matemático, ya que al comienzo del ciclo se encuentra en el momento 3 del razonamiento numérico (mencionado anteriormente) ya que Diana requiere que la maestra plantee el problema contextualizado a resolver, de igual forma la maestra nuevamente es quien empuja la traducción de este problema contextualizado a un cálculo matemático, en este momento el cálculo se resuelve tratando de bajar el problema para que el niño logro el cálculo; sin embargo Diana puede abstraer el resultado del cálculo para traducirlo al problema planteado.

476. Maestra: ¿Cuántas fichas tienen cada uno?
477. Ixchel: 3
478. Maestra: 3, a ver Gael ¿Cuántas fichas tiene cada uno?
479. Todos: 3.
480. Maestra: 3, ahora vamos a ver por todos, a ver si Patricio tiene 3 fichas, ¿Cuántas tiene Ixchel?
481. Ixchel: 3
482. Maestra: ¿Cuántos son 3 + 3?
483. Gael: 6
484. Maestra: 6 + 3 que tiene Diana (señala las fichas de Diana) ¿cuántos son?
485. Gael: 12
486. Maestra: 6 + 3 que tiene Diana, haber 6 + 3 que tiene Diana ¿Cuántos son?
487. Daniela: 8
488. Maestra: ¿Seguros?, haber 6 + 3 que tiene Diana ¿Cuántos son?, haber vamos a ponerlas así (coloca las fichas en hilera), haber vamos a verlo.
489. Gael: 12
490. Diana: 9
491. Maestra: Muy bien Diana (pone las fichas de Patricio en hilera) acomoden sus fichas como Patricio en hilerita. Acomódenlas (señala sus fichas)
492. Todos: (acomodan sus fichas en hilera)
493. Maestra: ¿listo? Bien, haber ya habíamos contado que 3 + 3 ¿Cuántos son?
494. Daniela: 6
495. Maestra: más 3
496. Diana: 9
497. Maestra: más 3 Gael, ya llevamos 9
498. Gael: 12
499. Maestra: 9 haber muy bien (señala las fichas de Gael) 10, 11, 12 muy bien, más 3
500. Diana: 13, 14, 15
501. Maestra: ¿Cuántas fichas tenemos en total?
502. Diana: 15
503. Maestra: 15 fichas muy bien.

Extracto de la situación “Grandes y Chicos” Tercer grado de preescolar.

En el fragmento anterior podemos observar que la maestra les plantea el problema contextualizado al preguntarles el número de fichas en total, y plantea el problema a un cálculo matemático al propiciar la suma de las fichas, Diana comienza a realizar las sumas pero necesita que la maestra baje el problema a un plano más concreto para que se logre el cálculo, observando las fichas de cada integrante del equipo.

Por tal razón podemos afirmar que Diana se ubicaba en ese momento en un nivel 2 de suma ya que cuenta a partir del segundo conjunto, es decir, Diana se ubica en este nivel debido a que tiene presente la cantidad total de elementos de un conjunto de sus fichas en este caso 12 como en la línea 498 y le atribuye otro conjunto partiendo del cardinal agregando los elementos de la siguiente colección en este caso tres, realiza sobreconteo y a partir de esta estrategia realiza la suma.

Incluso Diana tiene presente el valor que representa un numeral y continua con el numeral siguiente de la serie numérica como lo muestra la línea 500 en la cual cuenta a partir del 13, 14, 15.

Posteriormente al observarla y analizarla en otra situación más adelante Diana se ubica en un momento 3 de razonamiento numérico debido a que todavía requiere que la maestra traduzca el problema contextualizado a aun problema matemático, sin embargo, Diana elije la operación para darle solución y es capaz de resolver dicha operación directamente sin que la maestra aplique un conjunto de motores para que ella pueda resolver este cálculo y finalmente logra regresar este resultado al problema planteado.

En esta situación ponen su ficha en el número que creen que saldrá al sumar la cantidad de los dos dados que tiren.

504.	Maestra: Tira los dados!
505.	Diana: (tira sus dos dados y en los dos sale el número 3)
506.	**Maestra: Eso es ¿cuánto salió Diana?**
507.	**Carlos y Diana: 6**
508.	Maestra: eso! Quien gano?
509.	Diana y Carlos: perdió
510.	Maestra: ¿Quién gano?
511.	Diana: ella (señala a Danna)

Extracto de la situación “Grandes y Chicos” Tercer grado de preescolar.

En el fragmento anterior podemos ver como la maestra es la que plantea el problema según la línea 506. Al observar la línea 507 podemos ver que Diana es capaz de elegir ya la operación correcta y aplicarla al problema planteado; ubicándose en un nivel 3 de suma ya que Diana realiza la suma cuando tiene presente el cardinal de una colección y le agrega el cardinal de otra colección en este caso 3 + 3. Dentro de este fragmento podemos ver como Diana cardinaliza cada conjunto de 3 al sumar 3+3 y le atribuye ese valor a los puntos de cada dado, así es como Danna realiza la suma de 6 y finalmente logra regresa el resultado al problema como lo muestra la línea 511 ya que sabe quien gano según los puntos obtenidos en los dados (ver Figura 32)

Figura 32. Juego de "Grandes y chicos".

Finalmente, después de estar expuesta a diversas situaciones que promueven el razonamiento numérico Diana pasa al momento 4 en el cual, Diana ya no requiere estar sostenida por la maestra para comprender la problemática, sino, que ella entiende la estructura del problema y lo puede resolver sin ayuda de la maestra. Incluso plantea el problema situado, traduce este problema contextualizado a un cálculo para que pueda ser resuelto, identificar el cálculo apropiado para darle solución y poder regresar a la situación para interpretar este resultado al problema que se desea resolver.

En esta situación los niños colocan su ficha en el número que creen saldrá al tirar dos dados. Diana pone su ficha en el número 12.

512.	Ángel: (tira los dados)
513.	**Diana: (toma los dados) [los dos dados tienen la cantidad de 6] ¡Yo gane!, ¡Yo gane!**
514.	Maestra: ¿Quién gano? ¿Cuánto es 6+6?
515.	**Diana: (señala su ficha que se encuentra en el número 12)**
516.	Carlos: 12
517.	Maestra: ¿Quién gano?
518.	Diana: ¡yo!

Extracto de la situación "Grandes y Chicos" Tercer grado de preescolar.

Como podemos observar en el fragmento anterior Diana tradujo el problema a un problema matemático, identifico el cálculo, utilizó el cálculo necesario para resolver el problema en este caso la suma y finalmente el resultado obtenido lo pudo regresar al problema planteado para seguir con la actividad.

Figura 33. Diana Jugando "Grandes y chicos".

A partir de esto podemos concluir que Diana finalmente se ubico en un nivel 4 ya que Diana necesito solo de la identificación del número que se muestra la línea 513 y hace la suma mentalmente como se muestra en la línea 515 (ver Figura 33).

La siguiente Tabla 20 muestra de una manera sintética la evolución de Diana durante un ciclo escolar, en éste caso Diana era una niña de tercer grado.

Tabla 20. Evolución del razonamiento matemático de Diana

Nivel	Descripción
Inició: Nivel 2	• *Planteamiento del problema:* La maestra plantea el problema matemático. • *Elección de operación:* La maestra ayuda a elegir la operación para darle solución. • *Aplicación de operación*: Para realizar la suma Diana tiene presente la cantidad total de elementos de un conjunto y atribuye otro conjunto partiendo de un cardinal agregando los elementos de la siguiente colección. • *Solución interpretada:* Diana puede abstraer el resultado del cálculo para traducirlo al problema planteado.
Nivel 3	• *Planteamiento del problema:* La maestra traduce el problema contextualizado aun problema matemático. • *Elección de operación:* Diana elije la operación para darle solución • Aplicación de operación: Diana realiza la suma cuando tiene presente el numeral de una colección y le agrega el numeral de otra colección. • *Solución interpretada:* Diana logra regresar este resultado al problema planteado.
Finalizó: Nivel 4	• *Planteamiento del problema:* Diana plantea el problema matemático. • *Elección de operación*: Diana identifica el cálculo apropiado para darle solución. • *Aplicación de operación:* Diana realiza la suma mentalmente utiliza la suma como estrategia al resolver un problema contextualizado o descontextualizado. • *Solución interpretada:* Diana interpreta este resultado al problema que se desea resolver.

Es muy evidente el cambio que presentó Diana, ya que poco a poco se disolvió la ayuda de la maestra, mostrando que Diana posee la competencia matemática y es autónoma para enfrentarse a problemas, buscar la estrategia adecuada, aplicarla y finalmente regresar su resultado al problema planteado logrando obtener un nivel de razonamiento máximo.

Para concluir este apartado cualitativo, el surgimiento y la evolución de las competencias numéricas se observó durante el desarrollo de las competencias como los niveles mostrados eran un salto cualitativo que ejemplificaba los mecanismos del razonamiento numérico. Por otra parte, los 5 momentos de razonamiento numérico en general nos muestra como los niños van logrando cambiar su forma de pensar al enfrentarse con algún problema matemático, al inicio sin estructura de la actividad y sin un sistema semiótico matemático internalizado donde conozcan las reglas, los símbolos y el uso de este sistema. Poco a poco conforme se le van presentando las experiencias a los niños de las situaciones de aprendizaje y al estar expuestos a un ambiente de aprendizaje enriquecido, es como comienzan a dar saltos cualitativos de éste razonamiento matemático al internalizar la actividad por medio de sus acciones y operaciones, además se comienza a conocer el sistema matemático, sus símbolos, sus reglas y como tomar a las matemáticas como herramienta para enfrentarse a situaciones problemáticas. Mostrando que en el nivel máximo 5 los niños son totalmente autónomos para resolver un problema, logrando mostrar por medio de estos resultados que la intervención fue muy favorable que ayudó a los niños alcanzar los niveles de razonamiento antes descritos.

VI. Discusión y Conclusiones

En México se enfrentan graves problemas en materia educativa, particularmente en el dominio donde prevalece un bajo desempeño es en el campo de las matemáticas, esta problemática la comprueban las pruebas tanto nacionales como internacionales que evalúan este desempeño, las cuales muestran que la mayoría de los estudiantes son incapaces de desarrollar capacidades que les permitan utilizar el sistema matemático para resolver problemas de la vida extraescolar.

Bajo estas circunstancias la Reforma Integral de Educación Básica plantea mejorar las metas de la educación, proponiendo una articulación curricular de la educación básica además de buscar modificar la capacitación profesional de los docente mediante un enfoque basado en competencias, todo esto con el propósito de fomentar el aprendizaje de los estudiantes para ampliar sus competencias para la vida y favorecer su inserción en la sociedad del conocimiento.

En la RIEB surge el Programa de Educación Preescolar 2004, donde se le otorga al nivel preescolar una base obligatoria, es decir se reconoce a la educación preescolar como fundamento de la educación básica, para asegurar la calidad y equidad en la atención educativa. Este estudio se planteó en el campo de pensamiento matemático con el objetivo del desarrollo de las competencias matemáticas planteadas en el PEP 2004, además de indagar en el desarrollo de capacidades intelectuales y uso de los conocimientos adquiridos, a través de la participación de los niños en situaciones de aprendizaje, donde se enfrentaron a solucionar problemas reales, con apoyo y guía del docente y de la interacción entre pares.

Bajo esta idea, surgió la necesidad de diseñar e implementar un programa de intervención educativa que respondiera a los objetivos planteados tanto en la Reforma Educativa como en el PEP 2004. Esta intervención creo ambientes de aprendizaje, donde se generaron las experiencias cognitivas complejas bajo una perspectiva constructivista sociocultural, las cuales lograron provocar, producir y desarrollar capacidades intelectuales matemáticas, es decir se desarrollar competencias matemáticas.

De ésta manera, los resultados obtenidos en este proyecto, reflejaron un desarrollo de las competencias matemáticas del Programa de Educación Preescolar 2004, los datos cuantitativos y cualitativos muestran un cambio en las formas de pensar de los niños preescolares, las cuales se desarrollaron debido al ambiente enriquecido y complejo que se les presentó durante el periodo de intervención. Los datos muestran un cambio dentro de todos los aspectos del campo de matemáticas: número, forma, espacio y medida.

Asimismo, los resultados muestran que los niños lograron razonar matemáticamente, por un lado adquirieron conocimientos matemáticos, pero lo más importante es que lograron utilizar esos conocimientos matemáticos para resolver problemas reales, en donde adquieren significado; los niños pudieron resolver problemas reales, lo cual implica que el niño pudo *plantearse* la problemática en términos matemáticos, tomó decisiones al saber que estrategia u operación tenía que aplicar, *aplicó* operaciones matemáticas y por último *regresó* esta operación al problema contextual, de tal manera que pudo reflexionar sobre éste dentro de una actividad en donde el niño debe de utilizar los conocimientos más pertinentes y usarlos dentro de acciones cognitivas que permitan resolver el problema dentro de la actividad; de esta manera, el niño realiza el proceso de matematización.

Los preescolares desarrollaran competencias matemáticas gracias a su participación en el entorno de aprendizaje en el que utilizaron las matemáticas como herramienta cultural dentro de actividades que contemplaron el uso de este sistema. De este modo, los preescolares lograron realizar actividades, que implicaron resolver problemas por medio de algún cálculo matemático (sumar, restar, multiplicar o dividir), interpretación de tablas o graficas que representaron el problema o solución matemática planteada, utilizaron estrategias en problemas reales como la compra-venta, la realización de una receta de cocina o en la aplicación en juegos.

Por otro lado, el currículo educativo, plantea que los estudiantes a los 15 años deben de adquirir competencias matemáticas para la vida, las cuales deben de ayudar al estudiante a enfrentarse al mundo real para ser ciudadanos informados, reflexivos y consumidores inteligentes, además de tener la capacidad de planear, formular, resolver e interpretar problemas a través de las matemáticas en diferentes situaciones y contexto. Tomando en cuenta esto y retomando los resultados que se tuvieron dentro de este estudio, se puede concluir que para alcanzar los objetivos planeados por la RIEB se requieren construir ambientes complejos de aprendizaje como los que se construyeron en este estudio. Los preescolares que se intervinieron en este proyecto lograron desarrollar competencias matemáticas para la resolución de problemas en la vida real, es lo mismo a lo que se espera que realicen los estudiantes a los 15 años, es decir, lograr que se identifique y comprenda el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

Un punto relevante se refiere a que los preescolares en intervención lograron realizar cosas que un estudiante de secundaría se esperaría que logre a los 15 años, esto nos muestra que este programa es que impulsa la construcción de capacidades intelectuales que ayudarán a los preescolares seguir con los siguientes niveles educativos de una manera plena, lo cual tendrá una consecuencia considerable sobre todo si se aprovecha los siguientes niveles educativos. Esto favorecerá que al término de la educación básica, se forme un alumno con maneras de pensar complejas, que sea responsable, constructivo, reflexivo, comprometido y sobre todo que se desempeñe cada vez mejor, que sea capaz de argumentar o resolver problemas logrando aprendizajes valiosos, constituyendo los fundamentos del aprendizaje y desarrollo personal futuros.

Discusión con la investigación empírica

Dentro de este proyecto se insertaron elementos que favorecieron y contribuyeron al razonamiento matemático, los cuales apoyan las investigaciones empíricas internacionales ya que los resultados presentados en este proyecto muestran que favorecen el razonamiento matemático.

Uno de los elementos que contribuyó al desarrollo del razonamiento matemático de los niños fue la inserción de actividades contextualizadas. Estas actividades ayudaron a los preescolares a atribuir sentido y uso a los conocimientos matemáticos, además estas actividades ayudaron a los preescolares tener a las matemáticas como una herramienta para ser utilizada en la solución de problemas de la vida real y no sólo como el producto final de su aprendizaje como lo menciona Herrington y Oliver (2000). Además, las actividades contextualizadas favorecen el uso de sistemas culturales para el desarrollo del razonamiento matemático.

Otro de los elementos importantes se refiere a las interacciones que se promueven por la actividad misma; además, de la manera que la docente ayuda a que se realicen estas interacciones en la actividad. Este elemento es fundamental en el favorecimiento del razonamiento matemático, ya que en la actividad siempre va a existir un novato y un experto en la tarea, el objetivo es que el novato entienda, comprenda, realice y se involucre en la resolución de la tarea, pero ya que el novato no tiene la misma experiencia que el experto surgen procesos por parte del experto para que el novato entienda y participe en la tarea. Por lo tanto, en las interacciones que se den entre éstos surgen las ayudas y la negociación de la tarea, con el fin de que el experto en cuestión, ya sea el padre, docente o compañero realice una negociación para proporcionarle ayuda al novato para que éste entienda las metas de la solución de problemas y los medios coherentes de alcanzar esas metas, así los niños intentan elaborar medios cognoscitivos nuevos, incluyendo las estructuras conceptuales, vehículos simbólicos y las estrategias de resolución de problemas para alcanzar esas metas y así entender la actividad, participar en ella y sobre todo razonar en ella. Esta idea apoya las investigaciones con respecto a la negociación de la tarea tanto con madres y con docentes. (Saxe, Geahart y Guberman 1984, Harrinton y Oliver 2000 y Goss 2004).

Por último, otro elemento que influye en el razonamiento matemático es la mediación semiótica, tanto el lenguaje como los artefactos y el sistema simbólico. Existen investigaciones como las de Bekker y Hoffman (2005) y George (2005) que afirman que los medios semióticos favorecen al razonamiento matemático, ya que, por medio de éstos medios se interpreta lo representado matemáticamente lo cual ayuda tanto a entender y simplificar el problema a resolver al plasmarlo en un medio semiótico y por otro lado al realizar la interpretación de éste donde surgen maneras de pensar complejas.

Las investigaciones muestran la importancia del medio semiótico pues favorece el razonamiento matemático, ya que este medio es de apoyo al experto para que el novato comprenda la tarea, por medio de éste por ejemplo, el novato puede interpretar un esquema o diagrama (medios semióticos) que le permita entender el problema, experimente con el esquema y razonen con el medio semiótico, lo cual favorece el desarrollo de conceptos para la formación de abstracciones, por medio del diagrama y de esta forma, desarrollar un razonamiento matemático complejo ya que estos objetos semióticos proporcionan una ventana adicional en el pensamiento matemático de los estudiantes.

Finalmente, se observó en esta intervención que el sistema semiótico será el medio para que el estudiante entienda, comprenda y utilice los sistemas culturales y sobre todo, que los estudiantes comprendan las actividades pues en el medio semiótico en donde descansa el pensamiento y es el que sostiene a las actividades contextualizadas.

Implicaciones educativas.

El promover un ambiente complejo con los elementos antes mencionados como las actividades contextualizadas, las interacciones o medios sociales y los medios semióticos conformarán un ambiente enriquecido de aprendizaje, el cual por los resultados obtenidos en este estudio podrían generar un aula para desplegar capacidades intelectuales matemáticas. Ya que en este ambiente se logró llevar a los preescolares a pensar de una manera compleja, usar el conocimiento matemático, al igual que herramientas, artefactos y sistemas matemáticos para la solución de problemas y poder tener la oportunidad de una asistencia múltiple del profesor.

La transformación fundamental que se sugiere desde las conclusiones de este trabajo es que el sistema educativo promueva la creación de ambientes enriquecidos, este ambiente es el indicado para el progreso del pensamiento matemático, por incluir una gama de características como la organización y diseño de las actividades o situaciones de aprendizaje contextualizadas, las cuales contengan un contexto socio-cultural (como intercambios comerciales, juegos, rutinas, recetas de cocina), la manera de presentar el sistema matemático inserto en los artefactos culturales matemáticos (como el ábaco, monedas, báscula, termómetro, esquemas, gráficas, tablas, etc.), interacciones y colaboraciones que se inducía dentro de las situaciones, la manera que el docente contribuía a que el o los preescolares razonarán con las actividades (motores cognitivos) y con el sistema matemático, todos estos se incorporaron y se proponen de una manera substancial en el desarrollo de las capacidades intelectuales para los preescolares. Ya que el proponer actividades contextualizas permitió a los preescolares situarse y encontrarle sentido a lo aprendido, éstas actividades propician las interacciones y colaboraciones entre novato y experto (docente-alumno, alumno-alumno) donde el experto asiste al niño en el uso del sistema matemático, además que estas actividades van de la mano del sistema cultural matemático, lo que permite que al estar insertos en estas actividades se utilice y consecuentemente se comprenda el sistema cultural matemático.

Newman, Griffin y Cole (1991) también mencionan que para crear un cambio cognitivo en los niños, se deben de crear ambientes donde se construya el conocimientos, los cuales debe de contener un sistema donde se produzca el cambio cognitivo con las herramientas culturales apropiadas ante dicho contexto, además en esta Zona aparece la mediación social con la negociación entre los participantes con diferentes comprensiones. También Baquero (2004) menciona que para el desarrollo de las competencias, se requiere y es necesaria la participación en procesos de socialización específicos.

Otro factor es la participación del alumno en ambientes de aprendizaje, en donde se genera un proceso de construcción conjunta, que se realiza con la ayuda del profesor y compañeros de aula. A diferencia de estos autores quienes toman al discurso como la esencia de la construcción del conocimiento como Mercer (2001), Cubero y Santamaría (2001), Coll y Onrubia (2001), Rochera (2001), Candela (2001), Wamba y García (2001), Martínez y Rivero (2001) para esta investigación, el discurso es solo una parte para el surgimiento de las capacidades intelectuales.

Al igual que en esta intervención donde se insertan actividades contextualizadas con un sistema cultural que las sostiene, Baquero (2004) menciona que una Función Psicológica Superior o razonamiento depende de la participación del sujeto en actividades culturales especificas, reguladas por dispositivos culturales que se propongan, también menciona que en un contexto escolar, se debe de participar en actividades que demanden cognitivamente, además de dominar en estas actividades instrumentos de mediación (sistemas culturales).

Consiguientemente para contextos educativos, lo importante es que se introduzcan estos ambientes de aprendizaje para que se favorezca el razonamiento matemático aunado con el Programa de Educación Preescolar 2004.

Otra de las implicaciones educativas se refiere al docente dentro de la práctica educativa, ya que durante éste programa se observaron algunas las implicaciones que debe de tener éste para el surgimiento del razonamiento matemático. Por un lado se tiene que tomar en cuenta que la docente debe de tener una perspectiva flexible, la cual le permita reconocer a las niñas y los niños pequeños como sujetos capaces de pensar, reflexionar, comprender el mundo, comunicar sus ideas y construir aprendizajes a partir de su experiencia, todo ello con el fin de que las docentes puedan colocar estrategias para que los niños logren razonar, teniendo en cuenta que los preescolares logran desarrollar capacidades intelectuales con las experiencias que los docentes propongan.

En conclusión, se destaca la importancia de las acciones de la educadora ya que es clave para la aplicación de las situaciones de aprendizaje, ayudar al niño a que entienda la estructura de la actividad, así como las herramientas culturales que han de ser utilizadas en ésta. La docente tiene un papel fundamental para fomentar y mantener en las niñas y los niños el deseo de conocer, el interés y la motivación por aprender. Es así que se necesita la colaboración de las docentes para el trabajo en equipo y en conjunto, para la búsqueda de alternativas para poner a los alumnos en situaciones desafiantes que los hagan ampliar y profundizar sus conocimientos y desarrollar capacidades de razonamiento.

Discusión teórica

Los resultados obtenidos en este trabajo han permitido elaborar y reflexionar sobre algunas ideas teóricas acerca del origen y desarrollo del razonamiento matemático las cuales a continuación se presentan.

Un aspecto fundamental que se rescata del trabajo se refiere a la premisa donde las capacidades intelectuales de razonamiento matemático se desencadenan en el ámbito cultural y social, esto se muestra claramente en la evolución de las competencias matemáticas que desplegaron los preescolares, ya que las capacidades intelectuales que mostraron los preescolares, se realizaron inicialmente en un plano social, es decir, se realizaban fuera del plano individual de pensamiento de los niños y con ayuda que la maestra le proporcionaba, ya que ponía a disposición su interpretación de la realidad matemática para que el niño comprendiera tanto las acciones de la actividad, el uso del sistema simbólico y las herramientas culturales, de esta forma los niños paulatinamente comenzaron a internalizar la estructura de la actividad, sus acciones y el sistema simbólico que la sostiene para así poder usar eventualmente este sistema dando surgimiento a las competencias matemáticas de los preescolares.

Otra idea a discutir es la importancia de la actividad como una unidad que sostuvo al intelecto del niño, las interacciones que tuvo, así como el sentido y uso del sistema semiótico matemático, sus instrumentos y artefactos. De esta manera, cuando los preescolares eran partícipes de las actividades contextualizadas sostenidas por el sistema simbólico, se daba pie paulatinamente a la internalización de la actividad con sus acciones, además del uso del sistema simbólico, lo anterior permite crear formas de pensar complejas, es decir se da pie a utilizar los sistemas culturales matemáticos como una herramienta para pensar en la actividad.

Otro hallazgo del trabajo se refiere a que la cuestión semiótica, una idea que se deriva al observar las acciones de los niños es que las herramientas semióticas adquieren su carácter semiótico en el individuo gracias a la actividad, ya que esta le da significado al sistema cultural o sistema semiótico matemático. Pues la capacidad semiótica no aparece sola, siempre se encuentra sustentado en la actividad. Es decir, en la cuestión práctica, lo semiótico se convierte en una realidad semiótica en el aula cuando la maestra lo construye en la actividad, cuando le da sentido y significado a éste, y sobre todo cuando lo construye, lo transmite y la usa junto con los preescolares. Es así que progresivamente se internaliza en la mente de los niños y comienza a ser semiótico en la actividad.

Continuando con la importancia que tiene la actividad, ésta la tiene cuando se habla de la asistencia adulta o experta, pues la actividad es la que da espacio a la asistencia y esta asistencia, la cual sólo tiene sentido en la actividad cuando ésta contiene una estructura o meta con el uso del sistema semiótico al presentar la meta de la actividad, la asistencia del experto tiene funcionalidad al explicar al novato la meta y uso del sistema simbólico dentro de la actividad, por el contrario, si esta actividad no tiene meta ni sistema o artefactos culturales insertos, la asistencia pierde sentido, funcionalidad y eficacia.

La actividad no sólo contiene a la asistencia y al sistema semiótico, ni sólo le da sentido y significado a estos elementos, además en ésta surgen sistemas de acciones mediados por instrumentos, es decir dentro de la actividad cuando el niño participa tiene acceso al sistema matemático con un significado y sentido, es ahí donde los niños construyen sistemas de pensamiento basados en sistemas simbólicos de origen sociocultural, sistemas en los que se usa las reglas de éste y que en el que se usan los símbolos de éste sistema y que con esto se actúa cognitivamente. Estos sistemas de acción tienen integradas varios atributos como el conjunto de habilidades, conocimiento, actitudes y motivaciones. Por lo tanto, habría que pensar a las competencias matemáticas como sistemas de acción específicos mediados por instrumentos y sistemas culturales matemáticos, que permite que los niños los usen de manera integrada para interpretar la realidad.

VII. REFERENCIAS

Alatorre J. (2005). Las competencias matemáticas de los estudiantes mexicanos en PISA 2003. Cuarto encuentro internacional de educación. *El informe de PISA 2003*: Un enfoque constructivo, Ciudad de México, 22 y 23 de Abril de 2005.

Alatorre, J. (2008). *Entornos para el aprendizaje de las matemáticas en preescolar*. Facultad de Psicología Coordinación de Psicología Educativa.

Álvarez M., Pérez C., y Suárez, Á., (2008). *Hacia un Enfoque de la Educación en Competencias*. España: Consejería de Educación y Ciencia.

Baquero, R. (2004). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique.

Bekker, A. y Hoffmann, M. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies In Mathematics*, 60, 333–358.

Bishop, A. (1999) *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona:Paidos.

Bradford, L. (2004) Semiótica, cultura y cognición. École des sciences de l'éducation Université Laurentienne.Conferencia plenaria dada en la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México.

Bruce, B. y Threlfall, J. (2004) One, Two, Three and Counting. *Educational Studies in Mathematics,* 55 (3), 3-26.

Bruner, J.(1988). *Actos de significado: más allá de la revolución cognitiva* Madrid: Alianza

Cabrera, G. y Sosa, A. (2006). *Matemáticas con sentido*. Argentina: Cominic-arte.

Candela, A. (2001) Modos de representación y géneros en clases de ciencias. *Investigación en la escuela,* (45), 45-56.

Cesar, M. y Santos, N. (2006). From exclusion to inclusion: Collaborative work contributions to more inclusive leaming settings*: European Journal of Psychology of Education,* 11 (3), 333-346.

Cole, M. (1977) Cultura y pensamiento: relación de los procesos cognoscitivos con la cultura. Limusa. México.

Cole, M., Engestrom, Y., y Vazquez, O. (1997) *Mind, Culture and Activity: Seminal Papers from the Laboratory of Comparative Human Cognition.* Cambridge University Press: USA.

Cole, M., Griffin, P., y Newman D. (1991) *La zona de construcción del conocimiento*. España Madrid: Morata

Coll, C. y Onrubia, J. (2001) Estrategias discursivas y recursos semióticos en la construcción de sistemas de significados compartidos entre profesor y alumnos. *Investigación en la escuela,* (45), 21-31.

Cortes, T. (2007). Programa de capacitación docente para el uso de estrategias de enseñanza matemática en segundo grado de preescolar. Informe de prácticas para obtener el título de Licenciado en Psicología. UNAM: Facultad de Psicología.

Cubero, R. (2001) Maestros y alumnos conversando: el encuentro de las voces distantes. *Investigación en la escuela,* (45), 7-19.

Cubero, M. y Santamaría, A. (2001) La reflexión sobre el propio lenguaje como recurso didáctico en las aulas. *Investigación en la escuela*. (45), 77-87.

Daniels, H. (2003) *Vygotsky y la Pedagogía*. Traducción en castellano, Paidós. Barcelona; México.

Daniels, H. (2008) *Vygotsky and Research*. Routledge, London.

Daniels, H. Cole, M., y Wertsch, J. (2007) *The Cambridge companion to Vygotsky*. Cambridge, Cambridge University.

Eco, H. (2009) *Cultura y semiótica*. Círculo de Bellas Artes. Madrid.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics,* (61), 67–101.

Espíndola, E. y León, A. (2002) La deserción escolar en América Latina: un tema prioritario para la agenda regional. *Revista Iberoamericana de Educación*, (30).

Flynn, E., Pine, K. y Lewis, C. (2007) Using the microgenetic method to investigate cognitive development: An introduction. *Infant and Child Development*, 16 (1-6), 1-6.

Forero-Saenz, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. *Universitas Psychologica,* 7 (3), 787-805.

Galton, M., Hargreaves, L. y Pell, T. (2009) Group work and whole-class teaching with 11- to 14-year-olds compared: *Cambridge Journal of Education*, 39 (1), 119-140.

George, E. (2005). An Analysis of Diagram Modification and Construction in Students' Solutions to Applied Calculus Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (3), 248-277.

González, A. y Weinstein, E. (2001). *¿Cómo enseñar matemáticas en el jardín?,* Buenos Aires Argentina: Colihue.

Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 35 (4), 258-291.

Gordon, W. (2007) Semiotic Mediation, Dialogue and the Construction of Knowledge. *Human Development,* 50, 244-274.

Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum studies, 32* (6), 777-796.

Guevara, Y., López, A., y cols. (2008), Habilidades de lectura en primer grado en alumnos de estrato sociocultural bajo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 13 (37), 573- 587.

Herrington, J. y Oliver, R. (2000) An Instructional Design Framework for Authentic Learning Environments*. ETR&D,* 48 (3), 23-48.

INNE (2006a). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México*. México: INNE.

INNE (2006b). Pisa 2006 en México. México: INNE.

INNE (2008a). El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México. México: INNE.

INNE (2008b). PISA en el aula: matemáticas. México: INNE.

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI). (2005) Segundo Conteo de Población 2005, recuperado el 14 de enero 2010 en http://www.ceidas.org/documentos/Excelsior/Desercion_escolar_y_rezago_educativo.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2008). *El aprendizaje en tercero de preescolar en México*. México: INEE.

Jhonson-Laird, P. N. (1990) *El ordenador y la mente: introducción a la ciencia cognitiva*; traducción de Alfonso Medina. Paidós. Barcelona; México. Págs. 9-40.

Jurdak, M. (2006) Contrasting Perspectives and Performance of High School Students on Problem Solving in Real World Situated, and School Context. *Educational Studies in Mathematics*, 63 (3), 283-301.

Kamuran, T. (2009) The effects of cooperative learning on preschoolers´ mathematics problem-solving ability. Educational Studies in Mathematics, 72, 325–340.

Kirshner, D. y Whitson, J. (1997) *Social, Semiotic and Psychological Perspectives, Situated Cognition*. Lawrence Erlbaum, Associates: London.

Martí, E. (2003) *Representar el mundo externamente.* Madrid: Aprendizaje.

Martí, E. y Mercer, G. (2010) Progresos en la diferenciación funcional entre dibujo, escritura y numerales en niños de 4 a 7 años. *Estudios de psicología. 31 (3) 339-352.*

Martí, E. (2003) Representar el mundo externamente: la adquisición infantil de los sistemas externos de representación. A. Machado Libros. Madrid.

Martí, E. (2005) *Desarrollo, cultura y educación*. Amorrortu: Colección Agenda Educativa. Buenos Aires. Págs. 83-101; 171-217.

Martí, E. y Pozo, J. (2000) Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje.* Núm. 90 Págs. 11-30.

Martinez, C. y Rivero, A. (2001) El conocimiento profesional sobre el conocimiento escolar en la clase de Conocimiento del Medio. *Investigación en la Escuela,* (45), 67-75.

Medrano, C. (2001) El cambio de las concepciones de los estudiantes a través del conocimiento compartido. *Investigación en la Escuela,* (45), 89-101.

Mercer, N. (2001) Construcción del conocimiento escolar y análisis del discurso en el aula. Diada editorial.

Mercer, N. (2001), *Palabras y Mentes, como usamos el lenguaje para pensar juntos.* Paidós: España.

Mercer, N., y Littleton, K. (2007) *Dialogue and the development of children's thinking:* a sociocultural approach. Routledge, New York.

OCDE (2003). Marcos teóricos de PISA 200: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. OCDE: Inecse

Olfos, R. (2001). Entendiendo la clase de matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4 (1).

Olson, D. (1997) La escritura y la mente. En Wertsch, Del Río, P. y Álvarez, A. *La mente sociocultural, aproximaciones teóricas y aplicadas.*

Planas, N. y Edo, M. (2008) Interacción entre discursos en una situación de práctica matemática escolar. C*ultura y Educación 20* (4), 441-453.

Pepper, K. y Hunting, R. (1998) Preschoolers' Counting and Sharing. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29 (2), 164-183.

Ratner, C. (1997) Cultural psychology and qualitative methodology, Teorical and empirical considerations. New York y London. Plenum Press

Rochera, J., Colomina, R., y Barberá, E. (2001) Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas. *Investigación en la escuela,* (45), 33-44.

Radford, L. (sin año) Semiótica y educación matemática. *Relime*. Número especial.

Rogoff, B., y Wertsch, J., (Eds). (1984) *Children´s learning in the "zone of proximal development" (New Directions for Child Development,* No.23) (pp. 19-30). San Francisco: Jossey-Bass.

Rogoff, B. (1993) *Aprendices del pensamiento, el desarrollo cognitivo en el contexto social*. Paidos: España.

Rogoff, B. (1995) *Observing sociocultural activity on three planes: participatory appropiation, guided participation, and apprenticeship*, Cambridgde: Cambridge University Press.

Saxe, G. (2002) Children's Developing Mathematics in Collective Practices: A Framework for Analysis. *The Journal of the Learning Sciences*, (11), 275–300.

Saxe, G. (2005) Studying Cognition in Flux: A Historical Treatment of *Fu* in the Shifting Structure of Oksapmin Mathematics. *Mind, Culture, and Activity*, *12*(3 y 4), 171–225.

Saxe, G. (2008) Reflections on J.V. Wertsch's 'From Social Interaction to Higher Psychological Processes. *Human Development,* (51), 80–89.

Saxe, G., Geahart, M., y Guberman, S. (1984). The social organization of early number development. En B., Rogoff y J., Wertsch. (Eds). *Children´s learning in the "zone of proximal development*" (New Directions for Child Development, No.23) (pp. 19-30). San Francisco: Jossey-Bass.

Saxe, G., Gearhart, M., y Suad, N. (2001). Enhancing students' understanding of mathematics: a study of three contrasting approaches to professional support. *Journal of Mathematics Teacher Education, (*4), 55–79.

Secretaría de Educación Pública (2009 a). Reforma Integran de Educación Básica. SEP: México.

Secretaría de Educación Pública (2009b) Referentes sobre la noción de competencias en el plan y los programas de estudio. SEP: México.

Secretaría de Educción Pública (2004). Programa de educación de preescolar. SEP: México.

SEP (2010) ENLACE Básica y Media Superior Resultados 2010. SEP: México.

Siegel, M. (2005) An ethnographic inquiry of cooperative learning implementation. *Journal of school psychology,* 43(2) 219-239.

Siegler, R. y Crowley, K. (1991). The microgenètic method. A dired means for studying cognitive development. *American psychologist*, 46 (6), 606-620.

Tharp, R., y Gallimore, R., (1988) *Rousing minds to life: teaching, learning, and achooling in social context.* USA: Cambrige.

Tharp, R., Estrada, P., Stoll, S., y Yamauchi, L. (2000) *Transformar la enseñanza: excelencia, equidad, inclusión y armonía en las aulas y las escuelas*. Temas de Educación. Paidós. España

Tharp, R. (1991) *Rousing Minds to Life: Teaching, learning, and schooling in social context*. Cambridge University Press: USA.

Vasilachis, I. (2006) *Estrategias de investigación cualitativa*. Barcelona: Gedisa.

Valsiner J. (1984). *Children's learning in the zone of proximal development*. En B. Rogoff. y J. Wertsch. Eds. New directions of child development, (23), San Francisco: Jossey Bass.

Vygotskii, L. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Edit. Por Michael Cole; traducción castellana de Silvia Furio. Barcelona: Critica.

Wamba, A. y García, E. (2001) Pautas y estructuras de intervención como unidades de práctica de aula de profesores de enseñanza Secundaria. *Investigación en la escuela*, (45), 57-65.

Wertsch, J. (1997), La necesidad de la acción en la investigación Sociocultural, En J. Wertsch, P., Del Río, P. y A. Álvarez (1997), *La mente sociocultural, aproximaciones teóricas y aplicadas.*

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós Ibérica. 1ª Ed.

Wood, D. (2000). *Cómo piensan y aprenden los niños.* México: Siglo XXI.

Yule, G. (2007) El lenguaje. Traducción de Nuria Bel Rafecas; nueva edición española a cargo de Antonio Benítez Burraco. Akal, Barcelona.

Zhoun, X., y Wang, B. (2004) Preschool children´s representation and understanding of written number symbols. *Early Child Development and Care,* 174 (3), 253-266.

Zichenko, V., y Gordon, V. (1997) Methodological Problems in the psychological analysis of activity. En J., Wertsch (1979) *The concept of activity in Soviet Psychology, Theoretical Foundation.* New York: M.e. Sharpe.

VIII. ANEXOS

Anexo 1 Situaciones aplicadas en la intervención.

Nombre de la situación.	Tipo de situación.	Aspecto y producto.	Duración.	Fecha.
Reloj	Proyecto.	Número y unidad de medida.	2 días.	2 y 3 Febrero
Pay de limón.	Taller.	Número, elaboración de receta, medición de ingredientes.	2 días.	4 y 5 Febrero
Pirinola	Juego	Número, juego de pirinola, interpretación de registro.	2 días.	8 y 9 de Febrero
Dado	Juego	Número, juego de dado, interpretación de registro.	1 días	12 Febrero
Carrera de carros.	Juego	Número, juego de carros, interpretación de registro.	2 días	22 y 2 de Febrero
Aguas frescas.	Taller	Número, elaboración de receta, medición de Ingredientes.	1 día	30 de Junio
Tamgram bidimensional	Proyecto	Geometría, reconocimientos de figuras geométricas, y características.	2 días	28 y 29 de Junio
Tamgram tridimensional	Proyecto	Geometría, reconocimientos de figuras geométricas, y 2 características.	2 días	25 y 26 de Enero
Cine	Proyecto	Número, cálculo, compra y venta de boletos.	2 días	27 y 28 de Enero, 24 y 25 de Febrero, 24 y 25 de Marzo. 28 y 29 de Abril y 26, 27 de Mayo
Papiroflexia	Proyecto	Geometría, características e identificación de figuras geométricas.	2 días	1 y 2 de Marzo.
Juego de dardos.	Juego	Número, juego de dardos, interpretación de registro.	2 días	3 y 4 de Marzo.

Consultorio médico.	Proyecto	Número, medida, registro de peso y estatura.	3 días	5 y 8 de Marzo, 21, 24 y 25 de Mayo, 26 y 27 de Mayo
Puesto de periódico.	Proyecto	Número, cálculo e intercambio monetario.	2 días	9 y 10 de Marzo.
Brochetas de plátano.	Taller	Número, medida, elaboración de receta, medición de ingredientes.	2 días	11 y 12 de Marzo.
Tortillería	Proyecto	Número, intercambio monetario, identificación de instrumento de medición.	4 días	Del 16 al 19 de Marzo
Lotería	Juego	Número, juego de lotería, interpretación de registro.	2 días	22 y 23 de Marzo
Calendario	Proyecto	Número, Identifica para que sirven algunos instrumentos de medición.	2 días	12 y 13 de Abril
Elaboración de casita	Proyecto	Geometría, identificación de figuras geométricas características.	3 días	Del 14 al 16 de Abril
Uno	Juego	Número, juego de uno, interpretación de registro.	2 días	19, 20 de Abril y 31 de Mayo
Pizza	Taller	Número, elaboración de receta, medición de ingredientes.	2 días	21 y 22 de Abril
Regalo para mamá (caja)	Proyecto	Geometría, reconocimientos de figuras geométricas, características.	1 día	26 de Abril
Regalo para mamá (collar)	Proyecto	Número, secuencia de cuentas.	1 día	27 de Abril
Enjambre	Taller	Número, elaboración de receta, medición de ingredientes.	2 días	7 y 10 de Mayo
Así es mi escuela	Proyecto	Ubicación Espacial, elaboración de un plano de su escuela.	2 días	11 y 12 de Mayo

Adivina de que se trata	Proyecto	Geometría, características e identificación de figuras geométricas.	1 día	13 de Mayo
Así es mi casa	Proyecto	Ubicación espacial, elaboración de un plano de su casa.	2 días	14 y 17 de Mayo
Adivina adivinador	Proyecto	Geometría, jugar a adivinar los cuerpos y figuras geométricas.	1 día	18 de Mayo
Juego de cartas	Proyecto	Número, juego de cartas, interpretación de registro.	2 días	19 y 20 de Mayo
Robot explorador	Proyecto	Ubicación, guiar por medio de coordenadas a un robot.	1 día	1 de Junio
Batalla naval	Proyecto	Ubicación Espacial, jugar a hundir el barco con coordenadas.	1 día	2 de Junio
Boliche	Juego	Número, juego de boliche, interpretación de registro.	2 días	3 y 4 de Junio
Ecosistemas	Proyecto	Geometría, Teselaciones con ecosistemas.	2 días	7 y 8 de Junio
Elaboración de una ciudad a escala.	Proyecto	Ubicación espacial, elaboración de una ciudad con cuerpos geométricos.	2 días	9 y 10 de Junio
Payaso	Proyecto	Número, jugar a anotar a la boca del payaso registrando puntos e interpretar registro.	1 día	11 de Junio
Así llego a mi casa	Proyecto	Ubicación Espacial, realización de croquis y ruta para llegar a casa.	2 días	14 y 15 de Junio
Así llego a la escuela	Proyecto	Ubicación Espacial, realización del croquis y ruta para llegar a la escuela.	2 días	16 y 17 de Junio
Grandes y chicos	Juego	Número, juego de grandes y chicos, interpretación de registro.	2 días	18 y 21 de Junio
Metro	Proyecto	Ubicación espacial, elaborar el metro con sus estaciones.	2 días	22 y 23 de Junio

Pan	Taller	Número, elaboración de receta, medición de ingredientes.	2 días	24 y 25 de Junio
Papalote	Proyecto	Geometría, elaboración de un papalote con algunas figuras geométricas.	2 días	1 y 2 de Julio
Panadería	Proyecto	Número, intercambio monetario.	5 días	De 5 al 9 de Julio
Guiando a una persona	Proyecto	Ubicación espacial, guía a una persona.	1 día	6 de Mayo
Tiendita	Proyecto	Número, intercambio monetario.	5 días.	Del 18 al 22 de Enero

Anexo 2 Características del desempeño de acuerdo a la evaluación inicial

GRADO	NIÑOS BAJOS	NIÑOS ALTOS
3	Identifica los números. Establece relaciones de ubicación, orientación e interioridad. Agrupa objetos según atributos cualitativos. Reconoce y nombra características de cuerpos geométricos. Menciona los números que sabe en orden ascendente. Menciona los números en orden descendente. Describe atributos geométricos con un lenguaje convencional Construye sistemas de referencia en relación con la ubicación espacial.	Identifica los números. Establece relaciones de ubicación, orientación e interioridad. Agrupa objetos según atributos cualitativos. Reconoce y nombra características de cuerpos geométricos. Menciona los números que sabe en orden ascendente. Menciona los números en orden descendente. Describe atributos geométricos con un lenguaje convencional Construye sistemas de referencia en relación con la ubicación espacial. Ejecuta desplazamientos siguiendo instrucciones, representando trayectorias. Utiliza unidades no convencionales para medir magnitudes de longitud.
2	Identifica los números. Agrupa objetos según atributos cualitativos.	Identifica los números. Agrupa objetos según atributos cualitativos.

	Establece relaciones de ubicación, orientación e interioridad. Menciona los números que sabe en orden ascendente. Describe atributos geométricos con un lenguaje convencional.	Establece relaciones de ubicación, orientación e interioridad. Menciona los números que sabe en orden ascendente. Construye sistemas de referencia en relación con la ubicación espacial. Menciona los números en orden descendente. Describe atributos geométricos con un lenguaje convencional
1	Establece relaciones de ubicación, orientación e interioridad. Agrupa objetos según atributos cualitativos.	Identifica los números. Menciona los números que sabe en orden ascendente. Establece relaciones de ubicación, orientación e interioridad. Agrupa objetos según atributos cualitativos. Describe atributos geométricos con un lenguaje convencional.

Anexo 3 Situaciones aplicadas en la observación participativa dentro del aula

Situación	Fecha de aplicación	No de sesiones
Polos de yogurt	11/Febrero/2010	1
Recaudería	16/Febrero/2010	1
Periódico	09/Marzo/2010	1
Tortillería	16/Marzo/2010	1
Cine	25/Marzo/2010	1
Pizza	22/Abril/2010	1
Cine	29/Abril/2010	1
Consultorio	25/Mayo/2010	1
Ecosistemas	07/Junio/2010	1
Panadería	24/Junio/2010	1

Anexo 4 Situaciones aplicadas en la observación participante fuera del aula.

Situación.	Fecha de aplicación	No de sesiones
Grandes y chicos	19/Enero/2010	1
Payaso	6/Abril/2010	1
Boliche	23/Junio/2010	1