



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

**Simulación de la variabilidad de la
temperatura global utilizando un modelo de
balance de energía forzado estocásticamente**

TESIS

Que como requisito para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta

Luis Efraín Moreles Vázquez

Asesor:

Dr. Benjamín Martínez López





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Simulación de la variabilidad de la temperatura
global utilizando un modelo de balance de
energía forzado estocásticamente

Luis Efraín Moreles Vázquez

Dedicatoria

A mi mamá y mi hermano

Agradecimientos

A mi familia

A mis maestros

A mis amigos y compañeros

Al CONACyT

Resumen

Un problema clásico en modelación climática es el de evaluar el efecto que los procesos no resueltos en el dominio discretizado (también llamados procesos de escala de sub-malla) tienen sobre las variables que sí son resueltas en el mismo. Recientemente, el empleo de procesos aleatorios para modelar los eventos de escala de sub-malla se ha convertido en una alternativa exitosa para solucionar el problema de las escalas no resueltas. Específicamente, se ha demostrado que las variaciones aleatorias de corto plazo de los procesos de escala de sub-malla afectan la dinámica del sistema climático en el largo plazo, produciendo un claro efecto en la variabilidad climática de baja frecuencia. Por lo tanto, es de sumo interés estudiar el efecto de variaciones aleatorias de corto plazo en ciertos procesos físicos del sistema climático sobre la evolución de la temperatura global de la Tierra. En el presente trabajo se hace uso de la modelación climática estocástica como una herramienta para simular la variabilidad de la temperatura global del planeta. Utilizando un modelo climático termodinámico simple, el cual acopla la atmósfera y el océano, se estudia la respuesta de la variabilidad de la temperatura global de la Tierra ante perturbaciones representadas como ruido aditivo y ruido multiplicativo. El caso de ruido aditivo considera variaciones aleatorias en la energía disponible en el sistema océano-atmósfera, mientras que el caso de ruido multiplicativo considera parametrizaciones estocásticas del flujo de calor latente y de la radiación de onda larga emitida por el océano. Para ambos tipos de forzamiento aleatorio se obtuvieron series de temperatura global que exhiben variaciones comparables a las observadas, y se verificó, a primer orden de aproximación, que la persistencia de la temperatura global se puede ver como un proceso puramente aleatorio, lo cual es consistente con el resultado propuesto por Hasselmann en 1976. Asimismo, se propone una derivación heurística para calcular la función potencial asociada a una ecuación diferencial estocástica general uno-dimensional, la cual es comprobada al resolver la ecuación estacionaria de Fokker-Planck para ambos tipos de forzamiento aleatorio.

Contenido

1. Introducción	1
2. Variabilidad climática y modelación estocástica	7
2.1. Variabilidad climática natural	7
2.2. Modelación climática estocástica	11
3. Modelo climático determinista	15
3.1. Modelo acoplado océano-atmósfera	15
3.1.1. Mezcla vertical	19
3.1.2. Flujos de calor en el sistema océano-atmósfera	20
3.2. Implementación numérica del modelo climático	23
3.3. Solución del modelo climático determinista	27
3.3.1. Forzamiento radiativo y calentamiento global	30
4. Modelo climático estocástico	35
4.1. Formulación estocástica del modelo climático	35
4.1.1. Forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera	36
4.1.2. Forzamiento radiativo aleatorio en el océano	37
4.1.3. Parametrización estocástica de $L \uparrow$	37
4.1.4. Parametrización estocástica de LE	39
4.2. Simulación numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas	41
4.3. Ruido multiplicativo y función potencial	44
5. Resultados y discusión: Modelo climático estocástico	49
5.1. Forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera	49
5.2. Forzamiento radiativo aleatorio en el océano	66
5.3. Parametrización estocástica de flujos de calor	75

6. Conclusiones	85
Apéndices	
A. Ecuación de advección-difusión	89
B. Ecuaciones diferenciales estocásticas	91
B.1. Ecuaciones estocásticas con ruido Gaussiano	91
B.1.1. Incrementos Gaussianos y el límite del continuo	92
B.1.2. Cálculo Ito	96
B.1.3. Ruido blanco	98
B.1.4. Ruido multiplicativo e integrales Stratonovich	99
B.2. La ecuación de Fokker-Planck	103
B.2.1. Derivando la ecuación de Fokker-Planck	103
B.2.2. Soluciones estacionarias para una dimensión	106
Bibliografía	109

Capítulo 1

Introducción

El entendimiento del sistema climático y la capacidad para modelarlo son de fundamental importancia para estimar adecuadamente los posibles impactos de los cambios climáticos a mediano y largo plazo. El desarrollo de modelos cada vez más sofisticados, como los modelos de circulación general (MCG), permite hacer estimaciones útiles del clima (de los valores medios de diversas variables meteorológicas). Estos modelos, sin embargo, fallan en la descripción de la variabilidad asociada a éste, esto es, no pueden reproducir satisfactoriamente las variaciones de las variables meteorológicas respecto a un valor medio (Williams, 2005).

Con la finalidad de tener estimaciones cuantitativas confiables de fenómenos climáticos que nos pudieran afectar en el mediano o largo plazo, es indispensable entender adecuadamente el origen, estructura y evolución de la variabilidad climática. Esta variabilidad se presenta en muy diversas escalas temporales y espaciales, abarcando desde las escalas planetarias (como las glaciaciones) hasta las escalas regionales (como las temporadas de lluvias y sequías). Una aplicación de vital importancia del estudio de la variabilidad del clima es en la detección del cambio climático al permitirnos extraer dicha señal de las series climáticas, filtrando el ruido físico y así poder identificar si los cambios actuales observados en diversos patrones climáticos son debidos a la variabilidad intrínseca del clima o a las actividades humanas. Por lo tanto, es de vital importancia contar con una medida bien definida de la variabilidad del clima a fin de detectar con exactitud las señales de interés dentro de cada registro climático.

¿Qué es lo que provoca que los modelos climáticos actuales más sofisticados no puedan simular correctamente la variabilidad del clima? Estos modelos trabajan resolviendo numéricamente las ecuaciones dinámicas, termodinámicas y de transferencia de energía que gobiernan las distintas componentes del sistema climático: atmósfera, océanos, capas de hielo y suelo. Para poder resolver estas ecuaciones es necesario discretizarlas, tanto en espacio como en tiempo¹. Todos los procesos que ocurren en escalas más pequeñas que las especificadas por la discretización espacial y temporal (conocidos como procesos de escala de sub-malla, procesos no resueltos o procesos de micro-escala), son parametrizados como valores medios en función

¹Tipicamente, en los modelos de circulación general, se utilizan celdas de malla de aproximadamente 100 km × 100 km en espacio horizontal y pasos de tiempo de aproximadamente 30 minutos.

de las variables resueltas por el modelo. Una consecuencia de esto, como se verá más adelante, es que la variabilidad asociada a los procesos de escala de sub-malla es removida, eliminando el impacto que ésta tiene en el desarrollo de la dinámica resuelta (Williams, 2005). La Figura 1.1 muestra un ejemplo de esto. La aproximación común (el método de diferencias finitas) utilizada para resolver ecuaciones diferenciales numéricamente reemplaza el gradiente exacto, $\partial T/\partial t$, por el gradiente medio, $\Delta T/\Delta t$, lo cual tiene el efecto de aplicar un filtro pasa-bajas. Esta aproximación remueve estructuras en escalas de tiempo más cortas que Δt , conservando sólo las estructuras en escalas de tiempo más grandes que Δt .

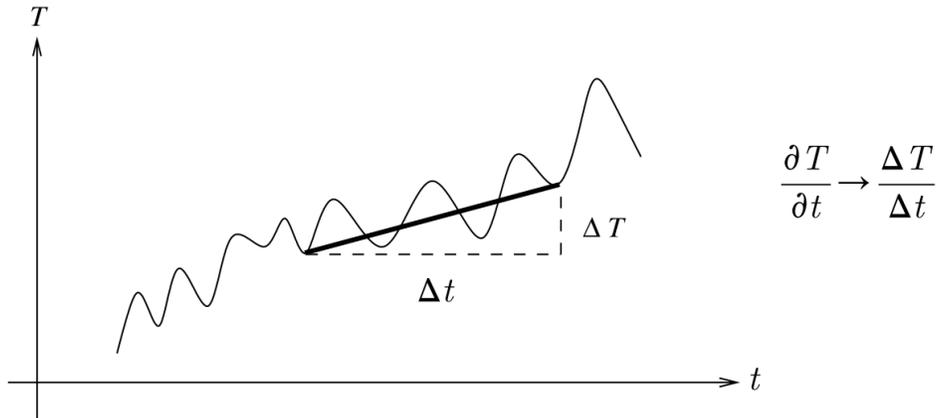


Figura 1.1: Diagrama esquemático que muestra cómo podría evolucionar en el tiempo, t , alguna variable climática, T , en el mundo real (línea sólida ligera) y en un modelo numérico con paso de tiempo Δt (línea sólida gruesa). Imagen adaptada de Williams (2005).

El proceso de parametrización usado en los modelos climáticos está basado en una formulación utilizada en mecánica estadística (Williams, 2005), en la cual, a partir de las propiedades microscópicas (de micro-escala), se hace una descripción macroscópica (de macro-escala) de los sistemas, tal como sucede en la derivación de las relaciones termodinámicas. En las derivaciones de la mecánica estadística es posible definir un equilibrio estadísticamente significativo de los procesos de micro-escala, los cuales tienen un efecto único perfectamente medible en la macro-escala. Este proceso está fundamentado en la ley de los números grandes, la cual establece que el resultado obtenido de un conjunto de eventos aleatorios independientes es más predecible mientras mayor sea el número considerado de eventos. Esto es, la varianza de la función de distribución de probabilidad de los posibles resultados se hace mucho más pequeña conforme se incrementa el número de eventos, volviéndose cero en el límite de un número infinito de eventos.

Una aplicación clásica de esta ley se puede ver en la derivación de la presión y temperatura (variables de macro-escala) de un gas diluido dentro de un contenedor. Dichas variables dependen de la energía contenida en las moléculas del gas, la cual está relacionada al número e intensidad de los choques de las moléculas del gas contra las paredes del contenedor (Ambegaokar, 1996). A pesar de la naturaleza aleatoria de los choques, una medida de la presión

o de la temperatura es prácticamente constante en el tiempo, ya que el número tan elevado de moléculas y colisiones permiten la aplicación de la ley de los números grandes y los valores medidos de la temperatura, o de la presión, están determinados por la media.

Tal como se definió, el concepto de parametrización no puede aplicarse estrictamente a los modelos climáticos, ya que en este caso el número de eventos de escala de sub-malla, dentro de cada celda de malla y durante cada paso de tiempo, no es lo suficientemente grande para permitir una aplicación de la ley de los números grandes y entonces poder representar el efecto de estos fenómenos por un valor medio. Shutts y Palmer (2004 en Williams (2005)) analizaron la estadística de eventos convectivos atmosféricos y encontraron que el número de éstos dentro de una celda de malla de un modelo estándar (con resolución horizontal de $64 \text{ km} \times 80 \text{ km}$) es bajo, tal que su distribución de probabilidad, la cual tiene una varianza grande, no garantiza que los flujos convectivos a través de una celda de malla puedan representarse por un valor medio. Otra dificultad asociada a la parametrización, indicada por Williams (2005), tiene que ver con el hecho de que en los fluidos climáticos no hay una separación enorme entre las escalas no resueltas y las escalas resueltas, es decir, entre ambas existen una serie de procesos que no pueden ser eliminados con el fin de definir el efecto de la escala de sub-malla sobre la escala resuelta, como lo muestra el espectro casi continuo de energía en todas las escalas observables de longitud (Figura 1.2). El ignorar los efectos de la escala de sub-malla sobre la escala resuelta es sumamente significativo, una consecuencia de esto es que la invariancia de escala exhibida por la atmósfera² es destruida en los modelos climáticos (Palmer, 2001 en Williams (2005)).

Basándonos en lo mencionado anteriormente, parecería más adecuado parametrizar los procesos de escala de sub-malla como valores que oscilen alrededor de un estado medio definido por las variables resueltas del modelo. Llevar esto a la práctica requeriría contar con un conocimiento bien detallado de dichos procesos, así como con un modelo de altísima resolución que pueda correr en computadoras de alto rendimiento. Ambas tareas parecen difíciles de lograr en el corto o mediano plazo, debido sobre todo a limitaciones de carácter cognoscitivo originadas por la complejidad de la física subyacente³ y a limitaciones tecnológicas.

Entonces, ¿existe una mejor solución al problema de las escalas no resueltas? Una posible alternativa que ha venido cosechando éxitos recientes al mejorar la evaluación de los pronósticos, sugiere que los eventos de escala de sub-malla deben ser modelados utilizando procesos aleatorios (Hasselmann, 1976), ya que la naturaleza de ellos parece ser aleatoria. Esto es, usando el ejemplo de la discretización temporal (Williams, 2005), se espera que la diferencia entre $\partial T/\partial t$ y $\Delta T/\Delta t$ fluctúe rápidamente en el tiempo, tal que la aproximación

²La invariancia de escala se refiere al hecho de que la atmósfera se ve igual en todos los aumentos, por lo menos hasta 1 km (Lovejoy *et al.*, 2001 en Williams (2005)), es decir, la atmósfera exhibe un desarrollo tipo fractal.

³Una de las principales dificultades para entender el sistema climático viene del acoplamiento de varios procesos no lineales en un amplio rango de escalas temporal y espacial dentro de él.

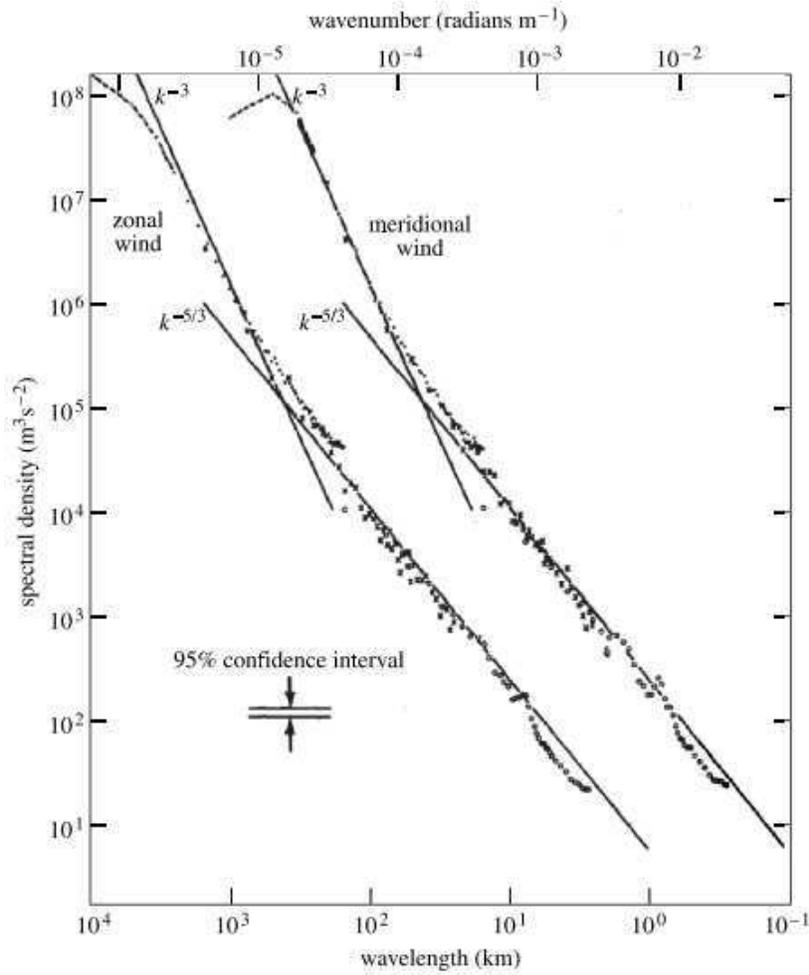


Figura 1.2: Espectro de los vientos en la atmósfera, en el rango de longitud de onda de 3-10000 km, según lo medido por aviones comerciales durante el “NASA Global Atmospheric Sampling Programme”. Las componentes zonal y meridional del viento están mostradas separadamente. Por claridad, la componente meridional ha sido desplazada a la derecha por un factor de 10. Imagen tomada de Williams (2005).

puede ser mejorada al añadir un término de ruido, σ , mediante la relación

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta t} + \sigma, \quad (1.1)$$

donde la amplitud de σ puede ser determinada a partir de la distribución de probabilidad observada para la variable T . Williams (2005) refiere que la introducción de ruido en los modelos climáticos intenta incorporar la variabilidad no resuelta que está presente en el clima real, pero que está ausente en los modelos debido a la aplicación algo inapropiada de la ley de los números grandes.

El objetivo principal de esta tesis es simular la variabilidad de la temperatura global de la Tierra determinada por variaciones aleatorias en ciertos procesos físicos del sistema climático, utilizando un modelo de balance de energía uno-dimensional, globalmente promediado que acopla la atmósfera y el océano. El modelo de balance de energía consta de una capa atmosférica, una capa de mezcla y un océano profundo, en donde la dinámica está dada por la ecuación de advección-difusión, la cual será resuelta utilizando un nuevo esquema de discretización físicamente atractivo, simple de aplicar en todas las dimensiones y más exacto que los actuales.

A partir de el hecho de que uno de los principales factores que regulan el clima y su variabilidad es la temperatura superficial del mar, la cual es el único parámetro oceánico del cual dependen los flujos de calor del océano hacia la atmósfera⁴ (Deser *et al.*, 2010), se considerarán como procesos aleatorios al flujo turbulento de calor latente y a la radiación de onda larga emitida por la superficie del océano (introducción de ruido multiplicativo). Asimismo se adicionará ruido aditivo a la temperatura global mediante fluctuaciones aleatorias del flujo neto de energía en el sistema océano-atmósfera. El estudio del modelo climático bajo estos dos regímenes de ruido (aditivo y multiplicativo) considera cuatro casos. En cada uno de ellos el forzamiento aleatorio (o estocástico) estará dado por un sólo proceso físico: 1) variaciones aleatorias del flujo neto de energía en la atmósfera, 2) variaciones aleatorias del flujo neto de energía en el océano, 3) variaciones aleatorias del flujo turbulento de calor latente y 4) variaciones aleatorias de la radiación de onda larga emitida por la superficie del océano. El objetivo de esto es estudiar el efecto de un único proceso físico aleatorio sobre la dinámica del sistema océano-atmósfera. Para cada caso se resolverán numéricamente las ecuaciones diferenciales estocásticas resultantes, obteniendo las trayectorias muestrales respectivas, a las cuales se les aplicará un análisis en tiempo y en frecuencia. El análisis en tiempo contempla la descripción de la persistencia de las series de temperatura global para la atmósfera y el océano y su relación entre ellas, así como la obtención de sus distribuciones de probabilidad estacionaria mediante la solución de la ecuación de Fokker-Planck. Con respecto al análisis en frecuencia se describirán ambas series de temperatura en función de modelos de series de tiempo y se calcularán sus espectros, lo cual se explicará en función de el resultado de Hasselmann (1976) (Capítulo 2). Además, se considerará el efecto determinista sobre la temperatura global provocado por un cambio en el forzamiento radiativo asociado a un incremento en los gases de efecto invernadero.

A fin de dar cabida a todos los temas expuestos anteriormente, la tesis se ha estructurado de la siguiente manera: en el segundo capítulo se presenta una reseña de la variabilidad climática natural y se expone el resultado de Hasselmann (1976), la cual motivó el concepto de modelación climática estocástica. Después, en el tercer capítulo, se ofrece una descripción detallada del modelo climático utilizado y de los procesos físicos relevantes considerados. Se incluyen los detalles del esquema numérico utilizado para resolverlo y se presentan los re-

⁴Los flujos de calor del océano hacia la atmósfera dependen además de varios factores atmosféricos como la rapidez del viento, temperatura del aire, humedad y nubosidad. Note que la evolución de la temperatura superficial del mar depende de los procesos que ocurren en la capa de mezcla oceánica.

sultados obtenidos, tanto la solución determinista estacionaria del modelo, como el caso del forzamiento radiativo provocado por un incremento en los gases de efecto invernadero. El capítulo cuatro está dedicado a la formulación del modelo climático estocástico y al método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas. También, en este capítulo, se presenta una derivación original para calcular el potencial asociado a una ecuación diferencial estocástica uno-dimensional forzada con ruido multiplicativo. Posteriormente, en el quinto capítulo, se examinan los resultados obtenidos al resolver el modelo climático estocástico y al aplicar las técnicas de análisis propuestas. Finalmente, en el capítulo seis se presentan las conclusiones y perspectivas derivadas de este trabajo. Se incluyen dos apéndices: En el primero se presenta el detalle del esquema de discretización utilizado para la solución numérica de la ecuación de advección-difusión; en el segundo se proporciona una revisión breve de los procesos estocásticos y de la definición de las ecuaciones diferenciales estocásticas, haciendo una distinción entre el cálculo Ito y el cálculo Stratonovich y su aplicación a los sistemas físicos. El segundo apéndice finaliza con una descripción somera de la ecuación de Fokker-Planck.

Capítulo 2

Variabilidad climática y modelación estocástica

En este capítulo se ofrece una breve reseña de la variabilidad climática natural (tomada de Ghil (2002)) y de la descripción de ésta mediante modelos climáticos estocásticos (Hasselmann, 1976). La derivación y explicación de la teoría concebida por Hasselmann fue tomada de von Storch y Zwiers (1999: Sección 10.4) y Mudelsee (2010: Sección 2.5).

2.1. Variabilidad climática natural

El clima varía en todas las escalas temporales (de un año al siguiente, así como de una década, siglo o milenio al siguiente) y espaciales (desde las regionales a las globales). Un ejemplo significativo de variabilidad climática natural es el fenómeno El Niño/Oscilación del Sur (ENOS), con implicaciones de escala global. La variabilidad de este fenómeno tiene una componente estacional, una cuasi-bienal (con un tiempo de recurrencia característico de 2–2.5 años) y una frecuencia baja (con una recurrencia de 4–5 años). La interacción de estos tres distintos modos de variabilidad provoca que la evolución de la temperatura superficial del mar en el Pacífico tropical sea bastante irregular. Otra causa de la irregularidad observada en dichas temperaturas se encuentra en las constantes perturbaciones climáticas que afectan la superficie del océano.

En general, la variabilidad climática natural (como en el ejemplo anterior de ENOS) incluye tres tipos de fenómenos:

1. Las variaciones que están impulsadas por un forzamiento externo puramente periódico. Dichas variaciones (como las relacionadas al ciclo diurno o estacional de insolación) son las más fáciles de entender y predecir. Ellas conducen a patrones de variación perfectamente identificados en temperatura, precipitación e insolación.
2. Las variaciones debido a la interacción de retroefectos no lineales dentro del sistema climático. Éstas son más difíciles de entender y predecir que las primeras. Por ejemplo,

un descenso de la temperatura terrestre incrementará la cantidad de hielo y nieve. Esto incrementa la reflexión de radiación de onda corta proveniente del sol favoreciendo una disminución adicional de la temperatura. Lo anterior se conoce como el retroefecto hielo-albedo. Por otro lado, el incremento en las concentraciones de gases traza en la atmósfera, tal como el dióxido de carbono (CO_2), incrementará las temperaturas superficiales a través del efecto invernadero. Este aumento de la temperatura liberará cantidades aún más grandes de gases traza del océano interior hacia la atmósfera o, de lo contrario, la vegetación terrestre los atrapará. Cada retroefecto climático puede potenciar o contrarrestar el efecto de otro retroefecto. Los diferentes mecanismos de retroefecto identificados hasta ahora en el sistema climático son numerosos y complejos. Su número y complejidad contribuyen significativamente a la dificultad de detectar confiablemente el cambio climático inducido por el hombre.

3. Las variaciones asociadas con fluctuaciones aleatorias en factores físicos o químicos. Estas variaciones son las más difíciles de predecir en detalle para cualquier longitud de tiempo. Estos factores pueden ser externos al mismo sistema climático, como la carga de aerosoles debida a erupciones volcánicas, o internos al sistema, como las fluctuaciones en el tiempo atmosférico. Se sabe que las últimas son impredecibles en escalas de tiempo grandes (de estaciones a milenios). Sin embargo, su efecto promediado sobre estas escalas de tiempo puede dar lugar a variaciones en el transporte de calor entre el ecuador y los polos.

Las variaciones impulsadas periódicamente, en la ausencia de cualquier otra fuente de variabilidad, son puramente periódicas y entonces altamente predecibles. Un cambio único repentino impuesto en el sistema, ya sea en la irradiación solar recibida en el tope de la atmósfera, o en otros forzamientos o parámetros del sistema, tienen un efecto relativamente simple, conceptualmente hablando, sobre tal variación periódica. Por ejemplo, un impulso repentino puede cambiar la media alrededor de la cual oscila la temperatura hemisférica o la amplitud de la oscilación o ambas. Un cambio tal podría ser fácilmente detectable, hablando otra vez en términos relativos, cuando lo comparamos con uno que pueda causar un impulso repentino en los otros dos tipos de variaciones, los que resultan de la interacción de retroefectos no lineales o aquellos producidos por un forzamiento estocástico. Las características de los dos últimos tipos de variaciones pueden ser afectadas por un cambio impuesto en formas diversas y complicadas, formas que pueden ser difíciles de distinguir de aquellas de un cambio espontáneo dentro del sistema.

La Figura 2.1 esquematiza los tres tipos de variabilidad mencionados anteriormente: líneas puntiagudas que corresponden a variaciones forzadas periódicamente, en un día y en un año; picos más anchos que provienen de modos internos de variabilidad; y una porción continua del espectro que refleja variaciones forzadas estocásticamente, así como el caos determinista. Esta última representa las variaciones irregulares que resultan de la interacción determinista de retroefectos no lineales.

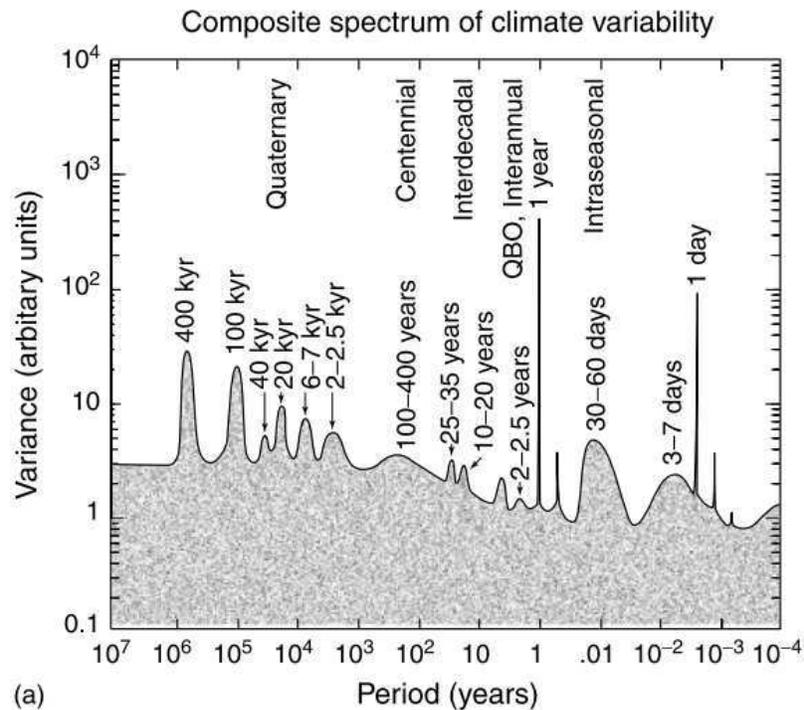


Figura 2.1: Espectro de potencia compuesto de la variabilidad climática en los últimos 10 Myr (1 Myr = 10⁶ años; 1 kyr = 10³ años). Imagen tomada de Ghil (2002).

¿Cuáles son las implicaciones de describir la variabilidad climática en nuestro entendimiento de los cambios climáticos globales? Si no estuviera presente ninguna variabilidad, i.e., si el sistema climático estuviera en equilibrio, los cambios externos resultarían en un simple desplazamiento de este equilibrio (ver Figura 2.2a). La tasa de desplazamiento, por ejemplo, en la temperatura media global al cambio equivalente en la irradiación en la cima de la atmósfera, es definida usualmente como sensibilidad climática. El cambio en el forzamiento actual bajo consideración podría ser en la concentración de dióxido de carbono o en la opacidad atmosférica debido a la carga de aerosoles o en la distancia media entre la Tierra y el sol. La Figura 2.2b muestra cómo podría ser modificada la respuesta del sistema si éste estuviera sometido a oscilaciones periódicas, ya sea como resultado de un forzamiento puramente periódico o de un modo interno puramente oscilatorio. En este caso, un desplazamiento en el valor medio estaría acompañado por un cambio en la amplitud de la oscilación, aumentándola o disminuyéndola. De hecho, para un sistema no lineal, un cambio en un parámetro externo puede llevar al sistema del equilibrio a un estado de oscilaciones autosostenidas, i.e., como un resultado del cambio global el sistema podría ser desestabilizado y volverse oscilatorio.

Sin embargo, el desarrollo del sistema climático es mucho más complicado que estar en equilibrio o en un estado de oscilaciones puramente periódicas. Entonces, los efectos de cambios naturales o antropogénicos en el forzamiento del sistema o en los parámetros, incluyendo pero no restringidos a la insolación neta, no pueden ser medidos por una única variable como

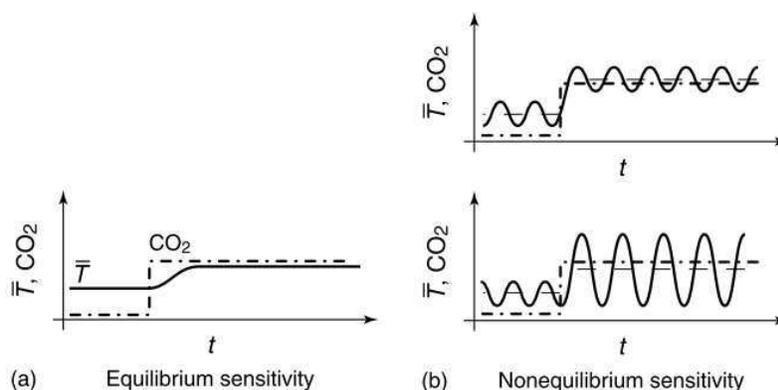


Figura 2.2: Sensibilidad climática para (a) un modelo en equilibrio y (b) un modelo oscilatorio en un estado de no equilibrio: conforme un parámetro cambia repentinamente (concentración de CO_2 atmosférico, línea a puntos y rayas), la temperatura global (línea sólida) sufre una transición. En (a) únicamente cambia la temperatura media; en (b) la amplitud de la oscilación puede disminuir o permanecer igual (panel superior), o aumentar (panel inferior), mientras que la media (línea suave discontinua) se ajusta como lo hace en el panel (a). Imagen tomada de Ghil (2002).

la sensibilidad climática. Las resonancias pueden llevar a la amplificación de ciertos modos oscilatorios y el desarrollo del sistema puede cambiar, volviéndose más o menos predecible. La situación que estamos confrontando está ilustrada esquemáticamente en la Figura 2.3, la cual enfatiza la discrepancia entre una respuesta simple a forzamientos inducidos por el hombre y la variabilidad de la temperatura registrada durante el último siglo y medio.

La naturaleza compleja de la variabilidad climática representa un obstáculo importante para la identificación fiable de los cambios globales provocados en el pasado, presente y futuro por la presencia y actividades de la humanidad en el planeta. De acuerdo a Stouffer *et al.* (2000), para detectar el cambio climático antropogénico es necesario comparar los cambios observados con las variaciones climáticas típicas, esto es, se debe contar con una medida bien definida de la variabilidad o “ruido” en el sistema climático. Esta tarea resulta complicada por dos motivos principalmente, el primero y más evidente es que los registros observacionales contienen ambas señales: los cambios forzados en el sistema climático y la variabilidad no perturbada del sistema climático (o ruido); la segunda limitante para detectar cambio climático es que los registros observacionales son demasiado cortos para determinar con precisión la variabilidad no perturbada del sistema climático en escalas de tiempo de varias décadas o mayores.

Una solución al problema de detectar cambio climático antropogénico ha sido la de comparar la variabilidad modelada obtenida de los modelos de circulación general con los estimados de la variabilidad observada en escalas de tiempo anuales a decenales, esto es, la variabilidad encontrada en integraciones de control no perturbadas ha sido usada para estimar el ruido observado en el sistema climático (Stouffer *et al.*, 2000).

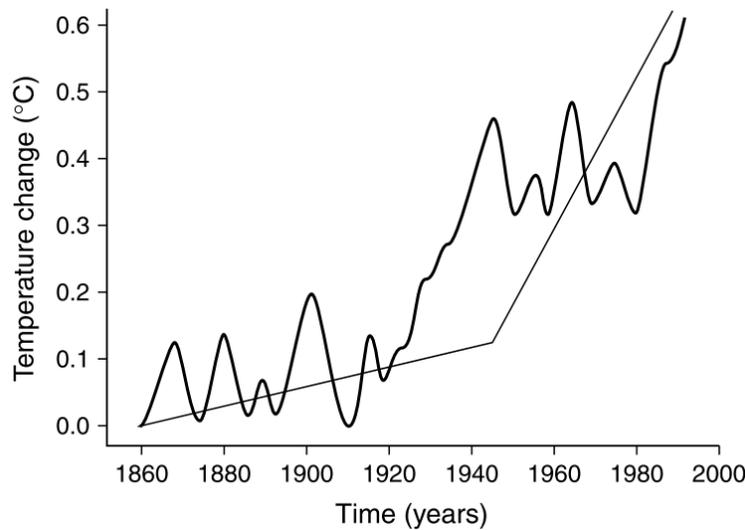


Figura 2.3: El rol de la variabilidad climática natural en la detección y atribución del cambio climático: respuesta de equilibrio de la temperatura global a cambios en aerosoles y gases traza (línea sólida ligera) contra variaciones observadas en la temperatura (línea sólida gruesa). Imagen tomada de Ghil (2002).

2.2. Modelación climática estocástica

Los primeros intentos de la comunidad científica para explicar las variaciones climáticas lentas (tales como las eras de hielo, el calentamiento medieval o la pequeña era de hielo) estuvieron basados en la suposición de que tal variabilidad venía exclusivamente de forzamientos externos, tales como las variaciones en los parámetros orbitales de la Tierra. Se argumentaba que la fluctuaciones del tiempo atmosférico eran irrelevantes debido a que su influencia disminuiría a través del proceso de integración temporal. Esto es, no se creía que el forzamiento de corto plazo afectara la dinámica de los sistemas que responden lentamente a tal forzamiento. Hasselmann (1976) reconoció la inconsistencia de este concepto y demostró que la variabilidad de baja frecuencia en los sistemas como el clima podría ser simplemente la respuesta integrada de un sistema lineal (o no lineal) forzado con variaciones de corto plazo. Un análisis dinámico del sistema climático sugiere que la persistencia climática puede ser vista, a primer orden de aproximación, como un proceso autorregresivo de orden uno, $AR(1)$. La derivación de este resultado está basada en tres consideraciones, las cuales se explican a continuación:

1. La escala de tiempo es separable. El sistema climático como un todo está compuesto de una componente que varía lentamente (“clima” en el sentido original), representando océanos, biósfera y criósfera, y una componente que varía rápidamente (“tiempo atmosférico”), representando la atmósfera. Esto es, la evolución climática puede ser descrita por los denominados modelos dinámicos estadísticos. Sea y una variable climática que varía en escalas de tiempo τ_y y que tiene una dinámica que está descrita por una

ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy(t)}{dt} = V(x(t), y(t)) + f(x(t), y(t)). \quad (2.1)$$

Aquí x es otra variable climática que varía en una escala de tiempo mucho más corta τ_x . Generalmente, V es alguna función no lineal de y y x , y f representa forzamiento externo.

Ahora sea A_τ un operador que promedia una variable climática sobre la escala de tiempo τ . Ya que $\tau_x \ll \tau_y$, existe una escala de tiempo τ^* tal que

$$\begin{aligned} A_{\tau^*}(x(t)) &\approx \text{constante}, \\ \frac{dA_{\tau^*}(y(t))}{dt} &\approx \frac{dy(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Así (2.1) puede ser reformulada como

$$\frac{dy(t)}{dt} = V^*(y(t)) + f^*(y(t)). \quad (2.3)$$

El operador modificado V^* incluye el efecto de promediar, en particular el de promediar la contribución constante de la componente “rápida” x . El forzamiento modificado f^* representa la componente lenta del forzamiento.

La ecuación (2.3) es un modelo “dinámico”, ya que la dinámica está representada explícitamente por la función V^* . Esta es llamada también un modelo “estadístico”, ya que el operador de promedio ha integrado los momentos de la componente ruidosa x en la función V^* . La ecuación (2.3) es completamente determinista (no contiene componentes aleatorias) y describe la evolución determinista de los momentos de una variable aleatoria. Dicha ecuación puede ser resuelta, al menos en principio, si se dispone de las condiciones iniciales adecuadas y de las funciones de forzamiento. Consecuentemente, el estudio de la variabilidad climática está reducido al análisis de la estructura de las funciones de forzamiento. El sistema (2.3) puede generar muchos modos complicados de variación si éste es no lineal. Para entender tal sistema es necesario identificar un subespacio del espacio fase completo que contenga la dinámica no lineal relevante.

Ni la búsqueda de funciones de forzamiento externo, ni la búsqueda de subsistemas no lineales ha sido convincentemente exitosa para explicar la variabilidad observada en el sistema climático. Hasselmann (1976) sugirió un tercer mecanismo para generar variaciones de baja frecuencia en el sistema descrito por (2.1). Dicho mecanismo dió origen al concepto de modelación climática estocástica, el cual es ampliamente usado en la actualidad (von Storch y Zwiers, 1999).

Suponga que el forzamiento f en (2.1) es cero y considere la evolución del sistema desde un valor inicial. Desde el principio, para $0 \leq t \leq \tau_y$, se puede suponer que

$V(y(t), x(t)) \approx V(y(0), x(t))$ tal que V actúa sólo en respuesta a la variable aleatoria x . Durante este período

$$\frac{dy(t)}{dt} = V(y(0), x(t)) \quad (2.4)$$

se comporta como un proceso estocástico, digamos $\xi(t)$. Ya que $x(t)$ varía en escalas de tiempo $\tau_x \ll \tau_y$, el proceso $\xi(t)$ también varía en escalas de tiempo cortas. La discretización¹ de (2.4) lleva a

$$Y_{t+1} = \alpha Y_t + Z_t, \quad (2.5)$$

donde $\alpha = 1$ y $Z_t \equiv \Delta t \Xi_t$. La ecuación (2.5) describe una caminata aleatoria cuando $\xi(t)$ es ruido blanco gaussiano. Entonces el sistema gana energía debido a que su varianza se incrementa con el tiempo. Si bien las excursiones crecen con el tiempo, en un sentido de ensamble la solución media es constante. Aquí hemos empleado la consideración 2.

2. Las componentes desconocidas del tiempo atmosférico $x(t)$ se suman para dar, después de la aplicación del teorema del límite central, un proceso aleatorio puramente gaussiano.

Ahora, cuando $t \geq \tau_y$, el operador sí depende de $y(t)$. Debido a que las trayectorias del sistema están limitadas se debe recurrir a un mecanismo de retroefecto negativo. Esto nos conduce a la tercera consideración.

3. El retroefecto negativo es proporcional a la variable climática de respuesta lenta. Comúnmente se utiliza una aproximación de la forma

$$V(y(t), x(t)) \approx -\beta y(t) + \xi(t). \quad (2.6)$$

Esto lleva a que (2.5) no cambie, excepto que ahora $\alpha = 1 - \beta$. Bajo estas circunstancias la ecuación (2.5) describe un proceso $AR(1)$, donde la condición de estacionariedad, $\alpha < 1$, se obtiene para pasos de tiempo suficientemente pequeños.

Lo adecuado del modelo $AR(1)$ depende de qué tan bien se satisfagan las tres consideraciones mencionadas anteriormente. Se piensa que la primera consideración es generalmente bien satisfecha. La razón principal es que la atmósfera tiene una densidad y capacidad calorífica mucho más pequeña que el resto del sistema climático, permitiendo que los procesos del tiempo atmosférico evolucionen más rápido. La validez de la consideración 2 es difícil de probar. Podría ser que algunas interacciones del tiempo atmosférico no se sumen, sino que se multipliquen entre sí, produciendo una forma de distribución no gaussiana. No obstante, la consideración 2 puede ser relajada al reconocer esto, llevando a modelos $AR(1)$ no gaussianos. La tercera consideración ciertamente no es satisfecha exactamente, pero puede ser una buena aproximación de primer orden. Mecanismos de retroefecto más sofisticados llevarían

¹Las variables continuas muestreadas en tiempos discretos se representan por letras mayúsculas con subíndices, los cuales denotan el índice temporal discreto.

a modelos autorregresivos de media móvil, $ARMA(p, q)$, de orden más alto o modelos no lineales.

Los sistemas como (2.5) poseen variaciones sustanciales de baja frecuencia que no están relacionadas a dinámica no lineal interna (determinista) o a forzamiento externo (también determinista). En vez de eso, el sistema es completamente aleatorio: está totalmente impulsado por el ruido fluctuante de corto plazo $x(t)$.

Los modelos climáticos estocásticos simples (como se definieron aquí) no pueden ser utilizados para reproducir un sistema físico en detalle. No obstante, ellos juegan un papel importante en el entendimiento de la dinámica que predomina en los modelos complejos de circulación general o en las observaciones. Su propósito principal es explicar la dinámica fundamental desde una perspectiva de orden cero.

Capítulo 3

Modelo climático determinista

En este capítulo se da la descripción detallada del modelo climático de balance de energía empleado en este trabajo, el cual es muy similar al utilizado en Harvey y Schneider (1985) (llamado de aquí en adelante HS85), indicando las modificaciones realizadas al modelo HS85 en las ecuaciones que lo rigen. Además, se explica brevemente el proceso de mezcla vertical en el océano a la luz de los valores del coeficiente de difusión y de la velocidad de advección obtenidos de investigaciones recientes (Kunze *et al.*, 2006; Wunsch y Ferrari, 2004). Al final del capítulo se abordan los procesos de transferencia de calor entre el océano y la atmósfera.

3.1. Modelo acoplado océano-atmósfera

Se usó un modelo climático de balance de energía uno-dimensional, globalmente promediado, acoplado a un modelo oceánico termodinámico simple uno-dimensional, globalmente promediado. El modelo oceánico consta de una capa de mezcla isotérmica acoplada a un océano profundo advectivo-difusivo, el cual tiene un perfil discreto de temperatura en la vertical. El modelo contiene una capa atmosférica integrada verticalmente con una inercia térmica igual a la de una atmósfera de 8.5 km de profundidad, con una temperatura superficial de 290 K, y una capa de mezcla equivalente con una profundidad de 30 m. El esquema del modelo utilizado se presenta en la Figura 3.1.

La ecuación que rige a la atmósfera es

$$R_A \frac{dT_A}{dt} = Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + LE, \quad (3.1)$$

donde T_A es la temperatura de la atmósfera, R_A es la capacidad calorífica atmosférica por unidad de área¹, Q_A ($= 68.4 \text{ W/m}^2$) es la radiación neta de onda corta absorbida por la atmósfera, $L \uparrow$ es la radiación de onda larga superficial emitida hacia arriba, $L \downarrow$ es la

¹El valor de R_A está dado por $R_A = \rho_A C_A h_A = 11043913.830 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$, donde ρ_A ($= 1.293 \text{ Kg/m}^3$) es la densidad del aire, C_A ($= 1004.860 \text{ J}/(\text{Kg} \cdot \text{K})$) es el calor específico del aire y h_A ($= 8500 \text{ m}$) es la profundidad de la atmósfera.

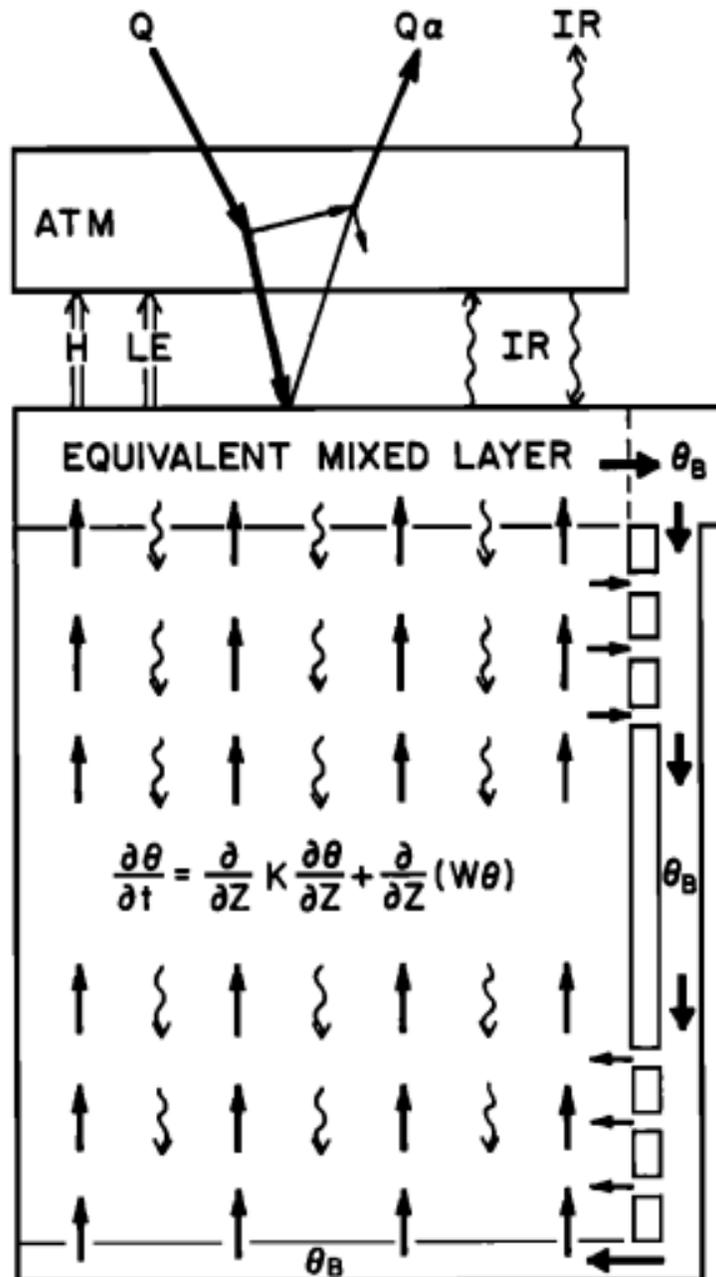


Figura 3.1: El modelo de caja de advección-difusión globalmente promediado. k es la difusividad térmica, w la velocidad de advección, θ la temperatura del océano profundo, θ_B la temperatura del agua del fondo, Q es la radiación solar incidente, α es el albedo planetario, IR es la radiación de onda larga y H y LE son los flujos turbulentos de calor sensible y latente, respectivamente. Las flechas rectas en el océano profundo representan advección y las flechas curvas representan difusión. Imagen tomada de Harvey y Schneider (1985).

radiación de onda larga atmosférica emitida hacia abajo, L_{out} es radiación de onda larga emitida hacia el espacio desde la cima de la atmósfera y H y LE son los flujos turbulentos de calor sensible y latente, respectivamente.

Las ecuaciones que gobiernan la capa de mezcla y el océano profundo son

$$R_s \frac{dT_s}{dt} = Q_s + L \downarrow - L \uparrow - H - LE + \rho_w C_w k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=h} - \rho_w C_w w(h) [\theta(h) - \theta_B], \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (w\theta), \quad h < z < D, \quad (3.3)$$

junto con las condiciones de frontera

$$\theta(h) = T_s, \quad \theta(D) = \theta_B,$$

donde T_s es la temperatura de la capa de mezcla oceánica, R_s es la capacidad calorífica de la capa de mezcla por unidad de área², Q_s es la radiación neta incidente absorbida por la capa de mezcla ($= 171.0 \text{ W/m}^2$), h es la profundidad de la capa de mezcla equivalente, D es la profundidad total del océano (3000 m), ρ_w es la densidad del agua de la capa de mezcla, k es el coeficiente de difusión térmica, w es la velocidad de advección, $\theta(z)$ es la temperatura del océano profundo a la profundidad z y θ_B es la temperatura del agua del fondo, igual a 3.4°C . Los valores de la radiación neta absorbida por la atmósfera y por la capa de mezcla oceánica, Q_A y Q_s , respectivamente, están tomados de Hartmann (1994) (Subsección 3.1.2).

El entrainment y detrainment observado en varias regiones en el agua de fondo hundiéndose pone de manifiesto que w varía con la profundidad. En nuestro caso se considera que w disminuye con la profundidad, lo cual representa detrainment de agua de fondo cuando ésta se hunde, tal que la condición de frontera $\theta(D) = \theta_B$ permanece válida.

Debido a cuestiones numéricas de estabilidad y exactitud la ecuación de advección-difusión no se resolvió utilizando la expresión (3.3). En vez de esto se utilizó una versión modificada de dicha ecuación obtenida a través de una transformación propuesta por Grima y Newman (2004), en donde las derivadas espaciales aparecen sólo como Laplacianos. El resultado de esta transformación es que la ecuación resultante se vuelve fácil de discretizar, además de que las propiedades numéricas de estabilidad y exactitud se mejoran respecto a los esquemas clásicos de discretización utilizados comúnmente para resolver la ecuación de advección-difusión.

La transformación señalada considera la introducción de dos variables, p y q , definidas a través de las relaciones

$$k = pq, \quad (3.4)$$

$$w = q \frac{\partial p}{\partial z} - p \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (3.5)$$

²El valor de R_s está dado por $R_s = \rho_w C_w h = 128658000.0 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{m}^2)$, donde ρ_w ($= 1025.0 \text{ Kg/m}^3$) es la densidad del agua, C_w ($= 4184.0 \text{ J}/(\text{Kg} \cdot \text{K})$) es el calor específico del agua y h ($= 30 \text{ m}$) es la profundidad de la capa de mezcla.

tal que la ecuación (3.3) toma la forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = p \frac{\partial^2}{\partial z^2} (q\theta) - q\theta \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (3.6)$$

Este nuevo esquema de discretización permite que la velocidad w y el coeficiente de difusión k sean definidos de consideraciones físicas, pudiendo tener cualquier patrón espacial y temporal. Esto es posible ya que la ecuación que se resuelve (ecuación (3.6)) sólo utiliza las funciones p y q , las cuales se obtienen al integrar (3.4) y (3.5). Una explicación más detallada de este nuevo esquema de discretización se presenta en el Apéndice A.

Los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera están dados por las siguientes parametrizaciones deterministas:

La radiación de onda larga emitida hacia abajo por la atmósfera (fórmula de Angstrom) es

$$L \downarrow = \epsilon_1 \sigma T_A^4 [0.89 - 0.2 (10^{-0.07 e_a})], \quad (3.7)$$

donde ϵ_1 es un factor de corrección de emisividad (igual a 0.86) y σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

La radiación de onda larga emitida hacia arriba por la superficie del mar se calcula a través de la relación

$$L \uparrow = \epsilon_2 \sigma T_s^4, \quad (3.8)$$

donde $\epsilon_2 = 0.91$ es otro factor de corrección de emisividad.

La radiación de onda larga emitida hacia el espacio está dada por

$$L_{out} = A + BT_A - C \cdot F_{CL} \cdot \Delta T_{s,CL}, \quad (3.9)$$

donde $A = -251 \text{ W/m}^2$, $B = 1.8 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, $C = 1.73 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, F_{CL} es la media anual de cantidad de nubes pesada por el área, y $\Delta T_{s,CL}$ es la diferencia en temperatura de la superficie a la cima de la nube ($= 32.34 \text{ K}$).

Los flujos de calor sensible y latente son determinados usando

$$H = C_1 (T_s - T_A), \quad (3.10)$$

$$LE = C_2 (e_s - e_a), \quad (3.11)$$

donde $C_1 = 12.57 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, $C_2 = 11.75 \text{ W/(m}^2\text{mbar)}$, e_s es la presión de vapor de saturación superficial a temperatura superficial T_s , mientras que e_a es la presión de vapor de la atmósfera usando una humedad relativa fija $r = 0.71$. Las presiones de vapor e_s y e_a , dadas en milibares, se calculan de acuerdo a

$$\log_{10} e_s = 9.4051 - \frac{2354 \text{ K}}{T_s}$$

$$e_a = r e_s$$

Los últimos dos términos de (3.2) representan los flujos difusivo y advectivo de calor, respectivamente³. El transporte advectivo de calor representa la circulación termohalina. El término difusivo acopla la capa de mezcla al océano profundo y representa los efectos de procesos de mezcla vertical de pequeña escala. El flujo advectivo de calor establece que el agua en la rama descendente de la circulación termohalina abandona la capa de mezcla a una temperatura prescrita, θ_B , en vez de hacerlo a la temperatura de la capa de mezcla, y aparece en el fondo del océano a la misma temperatura.

3.1.1. Mezcla vertical

La dinámica propuesta para el océano profundo (ecuación (3.3)) establece un balance entre la advección (hacia arriba) de agua fría y la difusión (hacia abajo) de calor. Una aproximación usual de este balance, utilizada en los modelos oceánicos, ha sido la de considerar un coeficiente de difusión k constante y una velocidad de advección w constante, tal que la temperatura del océano profundo θ está gobernada por

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - w \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (3.12)$$

$$\theta(z = h) = T_s, \quad \theta(z = D) = \theta_B.$$

Esta ecuación está promediada sobre el océano mundial, excepto donde ocurre el hundimiento y formación de agua de fondo. El hundimiento y formación de agua de fondo han sido observados o inferidos en unas pocas regiones relativamente restringidas de los mares polares, pero un flujo de retorno no ha sido medido o inferido de distribuciones de agua características, entonces se asume que el flujo de retorno ocurre uniformemente a través del océano mundial (Munk, 1966).

La solución estacionaria a (3.12) es

$$\theta(z) = T_s - (T_s - \theta_B) \frac{e^{-(z-h)/\tau} - 1}{e^{-(D-h)/\tau} - 1}, \quad \tau = -k/w, \quad (3.13)$$

donde τ es llamada la escala vertical (note que τ es positiva ya que w es negativa). Si se considera que $h \ll D$ se tiene que (3.13) puede expresarse como

$$\theta(z) = \theta_B + (T_s - \theta_B) e^{-(z-h)/\tau}. \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) puede ser utilizada para determinar la escala vertical τ considerando los perfiles verticales de temperatura observados. Al ajustar las distribuciones de temperatura en el Pacífico interior a soluciones del tipo (3.14) Munk (1966) encontró $\tau \approx 1$ km, y dada la razón de formación de agua de fondo en altas latitudes ($w \approx 1$ cm/día para surgencia uniforme

³Estos flujos han sido escalados respecto a los utilizados en HS85 debido a que no eran dimensionalmente correctos.

especialmente) argumentó que una difusividad promedio $k \approx 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ era requerida para ser consistentes con la estratificación abisal observada.

Las mediciones de microestructura y experimentos de liberación de trazadores realizados en las últimas décadas han establecido varios resultados acerca de la mezcla vertical en los océanos (Kunze *et al.*, 2006; Wunsch y Ferrari, 2004). Se ha encontrado que la mezcla en el océano interior estratificado lejos de las fronteras es del orden $O(10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})$, valor que se mantiene casi constante desde justo debajo de la capa de mezcla hasta el piso marino. Además se ha observado que la mezcla elevada (hasta por dos órdenes de magnitud mayor) está, de cierta manera, confinada a las fronteras, terrenos rugosos con fuertes estructuras tridimensionales y a las aguas agitadas en el interior del océano. Asimismo, Kunze *et al.* (2006) han encontrado valores de $w \approx 0.1 \text{ cm/día}$ en el océano interior, lo cual sigue siendo consistente con un valor de la escala vertical $\tau \approx 1 \text{ km}$.

De lo anterior se concluye que es apropiado utilizar valores constantes de k y w en un promedio global, pero no lo es necesariamente cuando se analizan regiones específicas. El uso de una k y w únicas globalmente promediadas representa una parametrización de escala global de procesos heterogéneos de mezcla regional, por lo que no está claro el efecto que podría tener este promedio sobre las escalas no resueltas del modelo (Harvey y Schneider, 1985).

3.1.2. Flujos de calor en el sistema océano-atmósfera

Los flujos radiativos y no radiativos entre la superficie, la atmósfera y el espacio son determinantes claves del clima. La facilidad con la cual la radiación solar penetra la atmósfera y la dificultad con la cual la radiación terrestre es transmitida a través de la atmósfera determinan la temperatura media de la Tierra.

La contribución de los procesos radiativos al balance de energía de la superficie y la atmósfera están mostrados esquemáticamente en la Figura 3.2. Los valores están dados en porcentajes de la radiación solar disponible promediada globalmente en la cima de la atmósfera⁴, $I = 342 \text{ W/m}^2$. El planeta absorbe alrededor del 70 % de la radiación solar incidente y refleja el 30 %. El 50 % de la insolación disponible en la cima de la atmósfera alcanza la superficie y es absorbida ahí. El 17 % de la radiación solar absorbido en la atmósfera es debido principalmente al vapor de agua (13 %) y nubes (3 %), mientras que el dióxido de carbono, ozono y oxígeno molecular contribuyen en una menor proporción (4 %).

Una característica importante de la Figura 3.2 es que el intercambio interno entre la superficie y la atmósfera por flujos radiativos de onda larga tiene las magnitudes más grandes de todas, más grandes aún que la insolación en la cima de la atmósfera. Esto indica la

⁴La intensidad de la energía solar en la órbita terrestre, también llamada constante solar, tiene un valor aproximado de $S_0 = 1368 \text{ W/m}^2$. El valor de $I = 342 \text{ W/m}^2$ se obtiene al dividir la constante solar entre 4. El factor 4 representa la razón del área superficial de una esfera a su área sombreada, la cual es el área de un círculo con el mismo radio.

El flujo de calor latente es el mecanismo más importante de transferencia de calor, aparte de la radiación, por el cual el océano pierde calor. Es de alrededor de un orden de magnitud más grande que lo perdido por convección. El calor latente, Q_E [W/m²], adherido a la atmósfera por el océano se calcula comúnmente a través de la parametrización $Q_E = L_v E$, donde E [kg · s/m²] es la evaporación y L_v [J/kg] es el calor latente de vaporización, el cual depende ligeramente de la temperatura, pero que para propósitos climáticos se puede considerar constante e igual a 2.5×10^6 J/kg. La determinación de E es muy difícil, ya que depende de diversos parámetros, por lo que comúnmente se usa una fórmula empírica para su estimación,

$$E = c_E \rho_a u (q_s - q_a),$$

donde c_E es un número adimensional igual a 1.5×10^{-3} , ρ_a es la densidad del aire, u es la rapidez media del viento superficial, q_s es la humedad específica saturada en la superficie del mar (donde el aire está a la temperatura de la superficie del océano) y q_a es la humedad específica a 10 m. sobre la superficie del mar (q_s y q_a se miden en g/kg). La transferencia de calor latente es extremadamente variable, tanto en espacio como en tiempo.

El flujo de calor sensible permite intercambios de energía entre la atmósfera y el océano a través del contacto físico directo. La transferencia de calor sensible a la atmósfera, Q_S [W/m²], también es difícil de medir, por lo cual se usa la fórmula empírica

$$Q_S = \rho_a c_H u (T_s - T_a).$$

Las temperaturas superficiales del océano y del aire son T_s y T_a , respectivamente, el número de Dalton, c_H , es tomado como una función del grado de turbulencia en la atmósfera. Un rango típico de valores es de 1.10×10^{-3} en una atmósfera con mucha mezcla vertical a 0.83×10^{-3} en un aire estratificado. La transferencia de calor sensible es generalmente mucho más pequeña que las otras componentes del balance de calor en la interfase aire-océano, ya que la diferencia de temperatura entre el océano y la atmósfera es comúnmente menor que 2°C. Una descripción más detallada de estos flujos puede ser encontrada en Hartmann (1994) y en Bigg (2003).

Hay evidencia de que los flujos radiativos en el sistema océano-atmósfera presentan fuertes variaciones en escalas temporales y espaciales grandes. Wielicki *et al.* (2002) reportaron variaciones decenales grandes en los flujos radiativos en los trópicos. Los datos fueron compilados de mediciones hechas en la cima de la atmósfera por medio de satélites durante las últimas dos décadas. El registro de las anomalías de la radiación de onda larga se muestra en la Figura 3.3.

Wielicki *et al.* (2002) indican que la variabilidad natural exhibida por el flujo de onda larga en los trópicos es causada principalmente por cambios en la nubosidad tropical media. Los modelos climáticos actuales fallan al modelar adecuadamente las nubes, y por lo tanto en reproducir adecuadamente esta variabilidad. Por lo tanto es necesario contar con una buena descripción de las nubes en los modelos climáticos a fin de mejorar las predicciones del cambio climático.

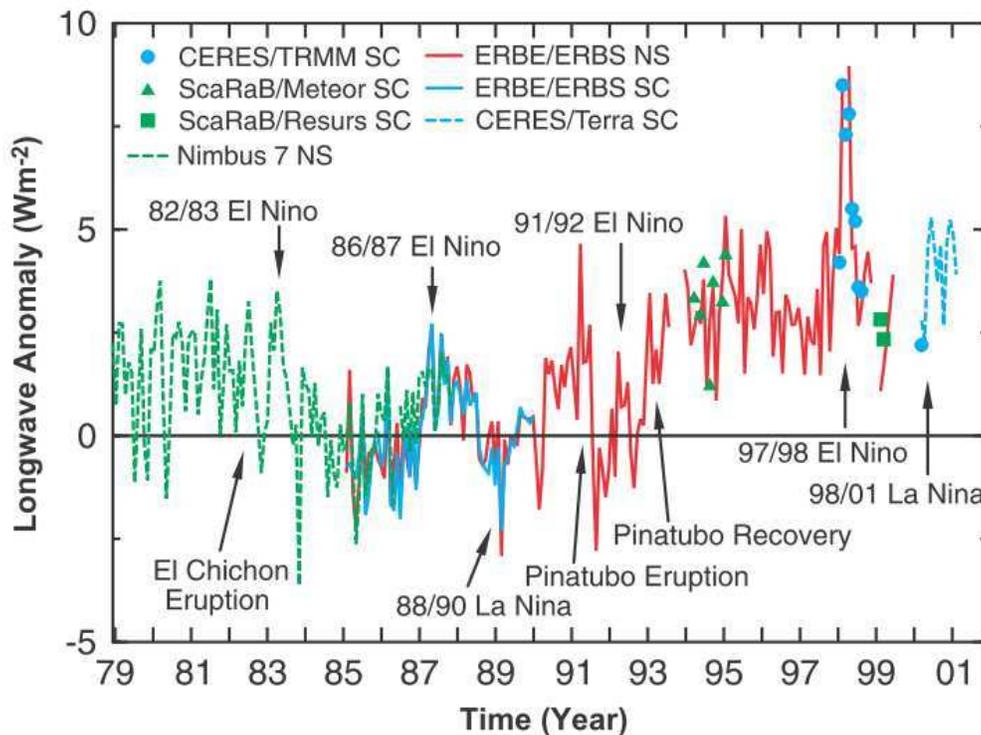


Figura 3.3: Registro de las anomalías medias de la radiación de onda larga en los trópicos ($20^{\circ}\text{N} - 20^{\circ}\text{S}$ en latitud). Los períodos de variaciones grandes han sido asociados a eventos climáticos de impacto global. Imagen tomada de Wielicki *et al.* (2002).

La formulación estocástica de nuestro modelo climático (propuesta en la Introducción) incorpora variabilidad a los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera, aunque no de la estructura e intensidad presentada por Wielicki *et al.* (2002) para el flujo radiativo de onda larga. Sin embargo los resultados obtenidos con el modelo climático estocástico indican que estas técnicas pueden ser una buena alternativa para hacer una descripción adecuada de la variabilidad de los flujos de calor presentes en el sistema climático.

3.2. Implementación numérica del modelo climático

Para resolver numéricamente las ecuaciones que gobiernan a las temperaturas de la atmósfera y del océano (ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3)) se utilizó el esquema Euler-adelantado de diferencias finitas para las derivadas de primer orden (temporales y espaciales), mientras que para las derivadas espaciales de segundo orden se utilizó un esquema de diferencias centradas.

La discretización temporal considera un intervalo $[0, T]$, con un paso de tiempo $\Delta t = T/Nt$ para algún entero positivo Nt . Para la discretización espacial se consideró una profundidad L

del océano profundo⁵, con un ancho de malla $\Delta z = L/Nz$ para algún entero positivo Nz . De esta manera la solución numérica de las temperaturas está denotada por $T_A^n \equiv T_A(t_n)$, $T_s^n \equiv T_s(t_n)$ y $\theta_j^n \equiv \theta(z_j, t_n)$, donde $t_n = n\Delta t$ y $z_j = (h + \Delta z/2) + j\Delta z$, con $n = 0, 1, 2, \dots, Nt$ y $j = 0, 1, 2, \dots, Nz$.

La malla espacial utilizada para resolver el océano profundo se muestra en la Figura 3.4. Dentro de cada celda de malla están especificados los valores de la temperatura del océano profundo, de la velocidad de advección y del coeficiente de difusión. El gradiente vertical de temperatura, $\partial\theta/\partial z$, está especificado en las fronteras de las celdas de malla. El valor del gradiente en la frontera entre la capa de mezcla y el océano profundo ($z = h$), se copia del valor del gradiente una celda más abajo ($z = h + \Delta z$).

De la discusión expuesta en la Subsección 3.1.1 y refiriéndonos a las condiciones de frontera impuestas en la ecuación (3.3), para la velocidad de advección se utilizó un perfil estacionario que disminuye en intensidad con la profundidad z de acuerdo a

$$w(z) = 0.045 [-1 + 0.08 \tanh(0.001z - 0.03)], \quad [w] = \text{cm/día.}$$

Esta elección de w (Figura 3.5(a)) permite obtener un perfil de temperatura semejante a un perfil de temperatura típico de latitudes medias o bajas en océanos abiertos (Figura 3.5(b)). Sin embargo la velocidad de advección no está restringida a perfiles de este tipo. Diferentes perfiles de w producen diferentes perfiles de temperatura (Figura 3.6). Dependiendo de la región oceánica que se esté estudiando se pueden elegir los perfiles de w adecuados que reproduzcan los perfiles de temperatura observados, lo cual se consigue fácilmente al resolver la ecuación de advección-difusión (3.3) y aplicando, posteriormente, el esquema de discretización propuesto por Grima y Newman (2004) (Apéndice A).

Por otro lado, para el coeficiente de difusión se utilizó un valor único y constante, tanto en tiempo como en espacio, $k = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Las funciones auxiliares p_j y q_j , utilizadas en la discretización de la ecuación de advección-difusión (Apéndice A), también están especificadas dentro de cada celda de malla mediante las relaciones

$$p_j = \sqrt{k} e^{S_j}, \quad q_j = k/p_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, Nz$$

donde

$$S_j = \int_{z_0}^{z_j} d\lambda \frac{w(\lambda)}{k}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, Nz.$$

Los valores S_j se obtuvieron utilizando integración numérica por medio de la regla de trapecios.

⁵La profundidad total del océano es $D = h + L$.

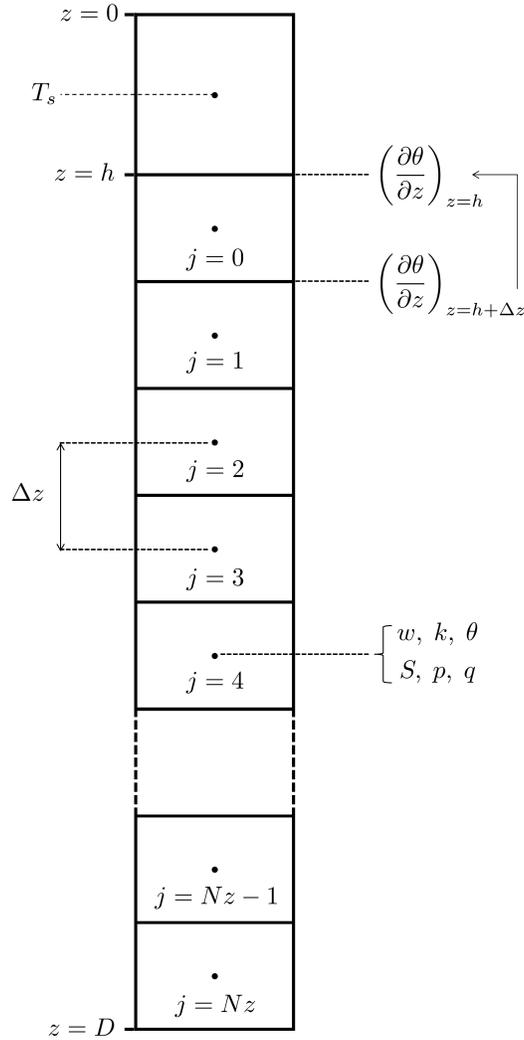


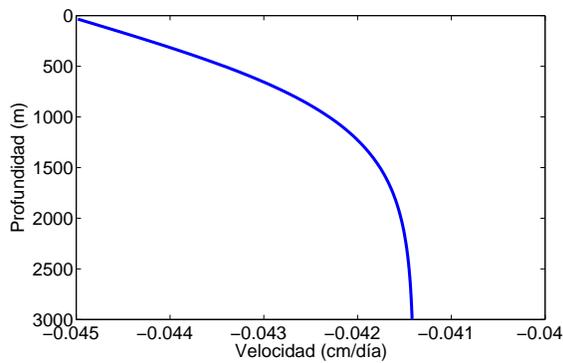
Figura 3.4: Malla utilizada para resolver la temperatura del océano profundo.

De esta manera la evolución de las temperaturas de la atmósfera y del océano se puede obtener al resolver las ecuaciones discretizadas:

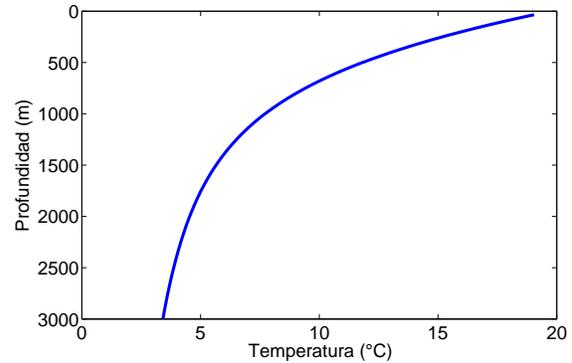
$$T_A^{n+1} = T_A^n + \frac{\Delta t}{R_A} (Q_A^n + L \uparrow^n - L \downarrow^n - L_{out}^n + H^n + LE^n), \quad (3.15)$$

$$T_s^{n+1} = T_s^n + \frac{\Delta t}{R_s} \left[Q_s^n + L \downarrow^n - L \uparrow^n - H^n - LE^n + \rho_w C_w k \left(\frac{\theta_1^n - \theta_0^n}{\Delta z} \right) \right] - \frac{\Delta t}{R_s} \rho_w C_w w_0 (\theta_0^n - \theta_B), \quad (3.16)$$

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \Delta t [R_{(j+1) \rightarrow j} \theta_{j+1}^n + R_{(j-1) \rightarrow j} \theta_{j-1}^n - R_{j \rightarrow (j+1)} \theta_j^n - R_{j \rightarrow (j-1)} \theta_j^n], \quad (3.17)$$



(a) Perfil vertical de la velocidad de advección.



(b) Perfil vertical de temperatura del océano profundo.

Figura 3.5: (a) Perfil propuesto de velocidad de advección y (b) perfil obtenido de temperatura del océano profundo en el modelo climático determinista.

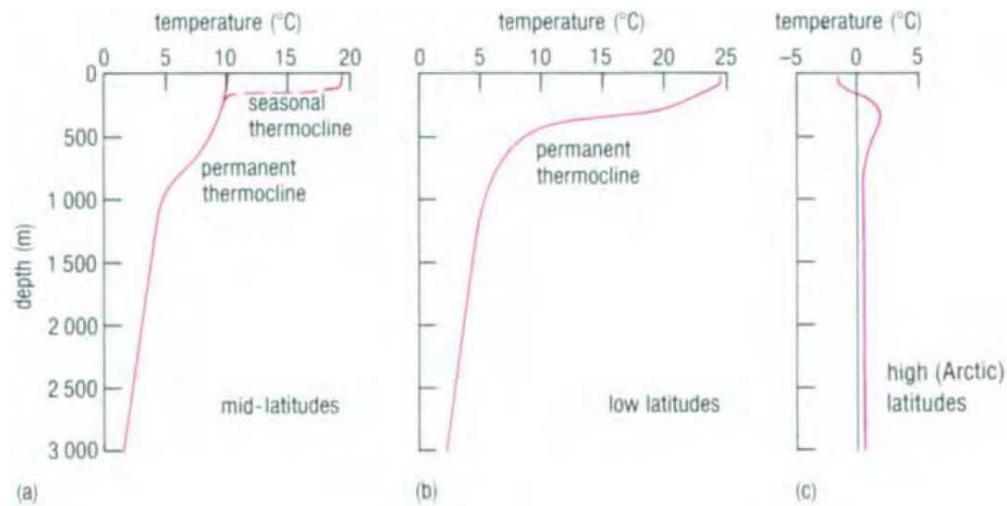


Figura 3.6: Perfiles típicos de temperatura media para diferentes cinturones de latitud en los océanos abiertos. Imagen tomada de Open University (2004).

dadas la razón de transición $R_{k \rightarrow i} = p_i q_k / (\Delta z)^2$, junto con las condiciones iniciales: T_A^0 , T_s^0 y θ_j^0 , $\forall j$, y las condiciones de frontera: $\theta_0^n = T_s^n$ y $\theta_{Nz}^n = \theta_B$, $\forall n$.

A partir de las condiciones iniciales $T_A^0 = T_s^0 = \theta_j^0 = \theta_B$, $\forall j$, y considerando $\Delta T = 1$ día y $\Delta z = 10$ m, el modelo se corrió 6000 años para alcanzar la solución estacionaria⁶. Tomando como base este estado estacionario el modelo se corrió para los diferentes casos de estudio: el caso de forzamiento radiativo asociado a un incremento del CO_2 atmosférico y para los diferentes casos planteados en la formulación estocástica del modelo climático. El estado estacionario determinista obtenido con el modelo climático se detalla en la siguiente sección, esto es, se muestran 500 años de simulación posteriores a la obtención del estado estacionario. También se muestran los resultados del caso de forzamiento radiativo asociado a un incremento del CO_2 atmosférico.

3.3. Solución del modelo climático determinista

En esta sección se presentan los resultados de la solución estacionaria del modelo climático de balance de energía. Se indican los resultados analíticos y se contrastan con los resultados obtenidos computacionalmente. Después se presenta el efecto provocado por un cambio en el forzamiento radiativo, asociado a un incremento en los gases de efecto invernadero, sobre la temperatura global.

Analíticamente, las temperaturas de equilibrio de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica se encuentran al resolver la condición estacionaria de las ecuaciones (3.1) y (3.2),

$$\begin{aligned} 0 &= Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + LE, \\ 0 &= Q_s - L \uparrow + L \downarrow - H - LE + \rho_w C_w k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=h} - \rho_w C_w w(h) [\theta(h) - \theta_B]. \end{aligned}$$

El resultado es

$$T_A^{eq} = 17.66^\circ\text{C}, \quad T_s^{eq} = 19.04^\circ\text{C}. \quad (3.18)$$

Con respecto a los resultados obtenidos numéricamente, en la Figura 3.7 se muestra la evolución de las temperaturas T_A y T_s durante 500 años de simulación posteriores a la obtención del estado estacionario. De esta figura se puede observar que los valores de ambas temperaturas se mantienen constantes durante todo el tiempo de simulación. Los resultados numéricos muestran que las temperaturas de equilibrio para la atmósfera y la capa de mezcla oceánica coinciden exactamente con los resultados analíticos (véase también el Cuadro 3.1). A partir de estos valores de temperatura se encuentra que, en el equilibrio, los flujos de

⁶El tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario depende de varios factores, en particular de las características del océano profundo: el paso de tiempo Δt , el ancho de malla Δz , el coeficiente de difusión k , la velocidad de advección w , la profundidad L , las condiciones iniciales y del método numérico utilizado para resolver la ecuación de advección-difusión. Diferentes valores de estos parámetros resultarán en diferentes escalas de tiempo para lograr el estado estacionario.

calor simulados tienen valores casi iguales a los reportados por Hartmann (1994) (Capítulo 3: Subsección 3.1.2). El Cuadro 3.1 detalla estos resultados. En la Figura 3.8 se presenta la evolución de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera posterior a la obtención del estado estacionario.

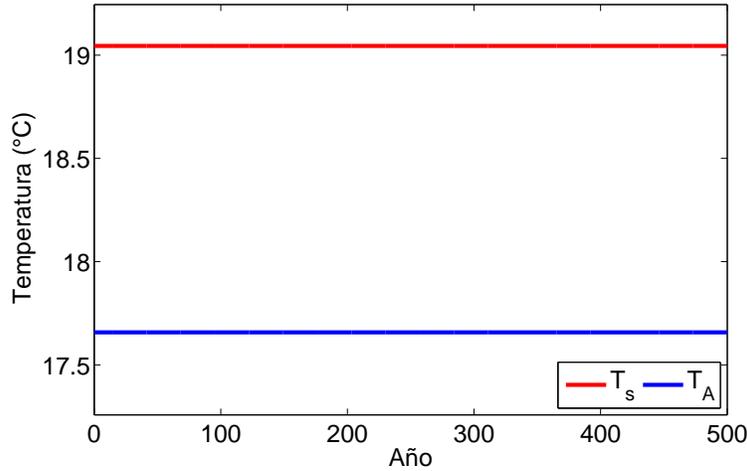


Figura 3.7: Evolución de las temperaturas de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica a partir de la obtención del estado estacionario. Caso del modelo climático determinista.

Temperatura	Flujo	W/m ²	%I
$T_A = 17.66^\circ\text{C}$	$L \uparrow$	376.11	109.97
$T_s = 19.04^\circ\text{C}$	$L \downarrow$	304.96	89.17
	L_{out}	238.88	69.85
	Q_s	171.00	50.00
	LE	81.90	23.95
	Q_A	68.40	20.00
	H	17.43	5.10
	Q_{adv}	0.35	0.10
	Q_{dif}	-0.86	0.25

Cuadro 3.1: Valores obtenidos numéricamente para las temperaturas de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica, así como de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera en el estado estacionario. Caso del modelo climático determinista.

La evolución de la temperatura del océano profundo, a partir de la obtención del estado estacionario, se muestra en la Figura 3.9. De ésta se puede ver que todas las isotermas (líneas de igual temperatura) permanecen constantes en el tiempo.

A partir de los resultados mostrados hasta aquí se puede concluir que el sistema completo océano-atmósfera se encuentra en un estado estacionario (de equilibrio).

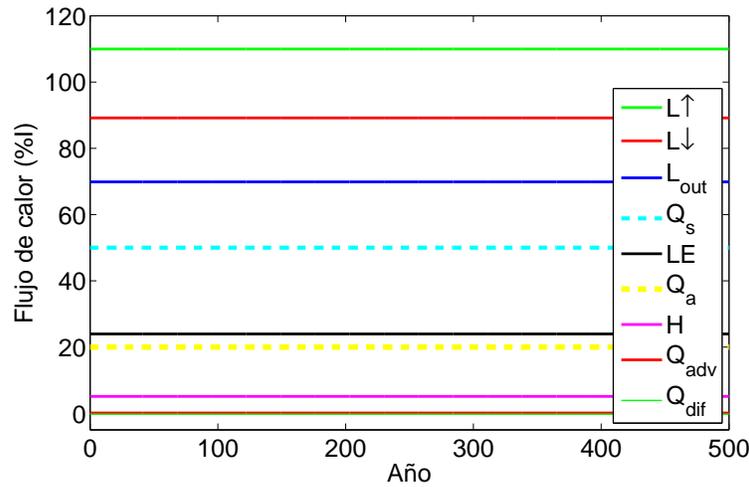


Figura 3.8: Evolución de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera (dados en porcentaje de la insolación media global I) a partir de la obtención del estado estacionario. Caso del modelo climático determinista.

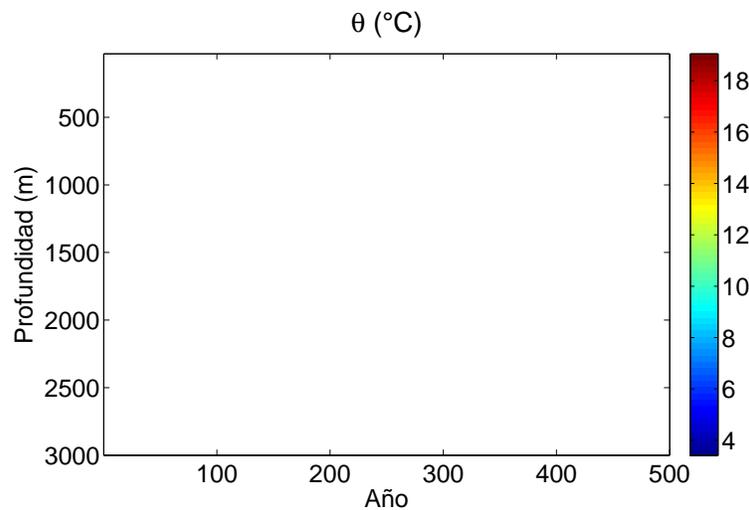


Figura 3.9: Evolución de la temperatura del océano profundo a partir de la obtención del estado estacionario. Caso del modelo climático determinista. Una característica relevante de este perfil vertical de temperatura es que presenta una región con un fuerte gradiente, la cual se localiza entre la base de la capa de mezcla y los 1000 m aproximadamente. A partir de esta profundidad la temperatura disminuye gradualmente hasta llegar a la temperatura de fondo establecida θ_B .

La condición de estacionariedad para la atmósfera y del océano puede ser evidenciada por el balance de energía (la suma de los flujos de calor) para cada uno de ellos. El balance de energía para la atmósfera, BC_A , y para la capa de mezcla oceánica, BC_s , mostrados en la Figura 3.10 indica que los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera están equilibrados, es decir, el balance de energía para ambas componentes es estacionario y nulo⁷.

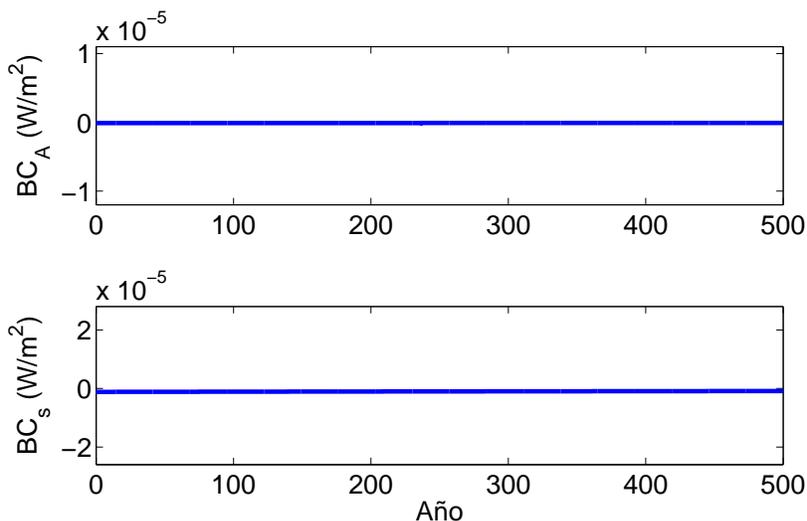


Figura 3.10: Balance de energía para la atmósfera (BC_A) y la capa de mezcla oceánica (BC_s). Caso del modelo climático determinista.

3.3.1. Forzamiento radiativo y calentamiento global

El concepto de forzamiento radiativo considerado en este trabajo se da en el contexto de la modelación numérica del cambio climático (IPCC, 2001). Esto es, el forzamiento radiativo se constituye como un medio útil y simple para estimar los impactos relativos ocasionados por factores naturales o antropogénicos en el sistema climático. Específicamente, este forzamiento se refiere a perturbaciones impuestas en el balance de energía radiativa del sistema océano-atmósfera.

El forzamiento radiativo impuesto en nuestro modelo climático considera un incremento gradual de 4.4 W/m^2 durante 100 años en la energía neta incidente en el océano (Figura 3.11). El forzamiento se introduce sin cambios en la dinámica, ni la presencia de retroefectos en el sistema océano-atmósfera (IPCC, 2001). Este forzamiento es similar al ocasionado

⁷El balance de energía para ambas componentes no es estrictamente nulo debido a que estos son calculados numéricamente. Para la atmósfera el balance de energía es muy cercano a cero, pero para la capa de mezcla oceánica dicho balance es negativo. Este comportamiento es debido a un pequeño término de deriva ocasionado por el flujo de calor difusivo Q_{dif} , el cual acopla la capa de mezcla al océano profundo. Sin embargo, para fines prácticos, se puede considerar que el sistema completo océano-atmósfera se encuentra en un estado estacionario.

por el incremento en la emisión de gases de efecto invernadero, tal como lo muestran las proyecciones realizadas por el Panel Intergubernamental sobre Cambio Climático (IPCC, 2007).

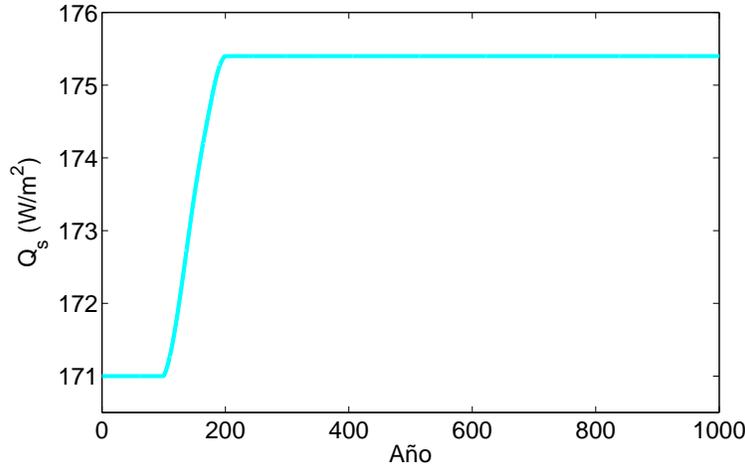


Figura 3.11: Evolución de la radiación neta incidente en la capa de mezcla. Después del aumento gradual de 4.4 W/m^2 la radiación Q_s se estabiliza en el nuevo valor.

Los resultados del modelo numérico muestran un aumento de 2.40°C para la temperatura de la atmósfera y de 1.99°C para la temperatura del océano, véase la Figura 3.12. Estos incrementos en la temperatura global caen dentro del rango pronosticado por diferentes modelos de simulación utilizados en el Cuarto Informe de Evaluación del IPCC (2007), en particular del rango pronosticado bajo el escenario B1 de emisiones de gases de efecto invernadero (Figura 3.13).

Con respecto a la respuesta del océano profundo ante este forzamiento radiativo se tiene que el calentamiento inducido por éste afecta principalmente al agua situada entre la base de la capa de mezcla y los 1000 m de profundidad, aproximadamente, lo cual coincide con la región de un fuerte gradiente térmico, también llamada termoclina. La evolución de la temperatura del océano profundo se muestra en la Figura 3.14. Si el calentamiento superficial del océano fuera mayor, la región del océano profundo afectada por dicho calentamiento también sería mayor, pero respetando la condición de frontera impuesta para la temperatura del fondo del océano. Esta condición de frontera evita que la temperatura de todo el océano profundo se homogenice. Por lo tanto, el efecto del calentamiento superficial será más evidente en los estratos de agua más someros.

La Figura 3.15 muestra la evolución de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera. La introducción del forzamiento radiativo provocó que las temperaturas de la atmósfera T_A y de la capa de mezcla oceánica T_s aumentaran. Ya que todos los flujos de calor, a excepción del flujo turbulento de calor sensible, dependen de sólo una temperatura, todos los flujos de calor se incrementaron, a excepción del flujo de calor sensible. La mayor inercia térmica de

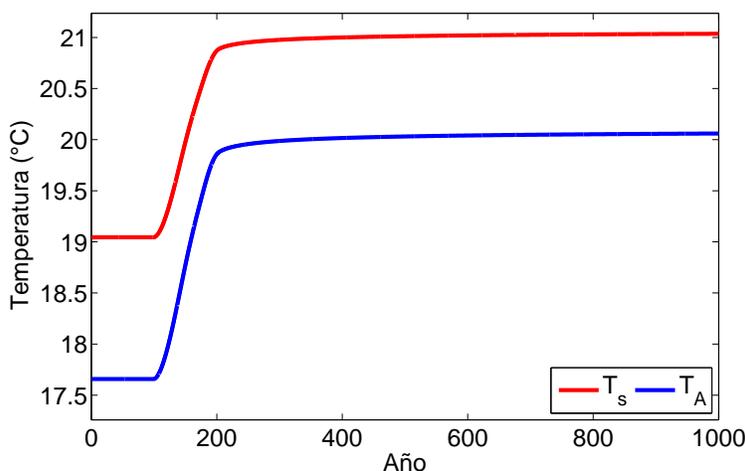


Figura 3.12: Evolución de las temperaturas de la atmósfera y de la capa de mezcla. El forzamiento radiativo impuesto en la energía incidente en el océano provocó que el sistema océano-atmósfera se situara en un nuevo estado de equilibrio más cálido. La diferencia en los incrementos de temperatura se debe esencialmente a que la capa de mezcla oceánica tiene una capacidad calorífica mayor que la atmósfera (aproximadamente 11 veces más grande).

la capa de mezcla oceánica respecto a la atmósfera provocó que el aumento en temperatura para la atmósfera fuera mayor. Esto llevó a que la diferencia entre la temperatura de la capa de mezcla y la atmósfera pasara de 1.39°C en el estado estacionario inicial a 0.96°C en el nuevo estado de equilibrio, lo cual explica la disminución en la intensidad del flujo de calor sensible.

Respecto al modelo de caja simple tradicional del sistema océano-atmósfera propuesto por McGuffie y Henderson-Sellers (2005: Sección 3.6.2), el cual parametriza los flujos de calor entre el océano y la atmósfera a través de un único parámetro de retroefecto λ , nuestro modelo climático resuelve los principales flujos de calor entre la atmósfera y el océano. Debido a ello, y a los resultados anteriores, se tiene que nuestro modelo climático constituye una herramienta útil para evaluar los posibles impactos ocasionados por un desequilibrio en el balance de energía del sistema océano-atmósfera. En particular, nos permite evaluar el efecto que tendría cada uno de dichos flujos de calor sobre el estado del sistema.

El paso siguiente en este trabajo consistió en estudiar el comportamiento del sistema océano-atmósfera cuando se consideraron variaciones en los flujos de calor que no eran deterministas, sino aleatorias.

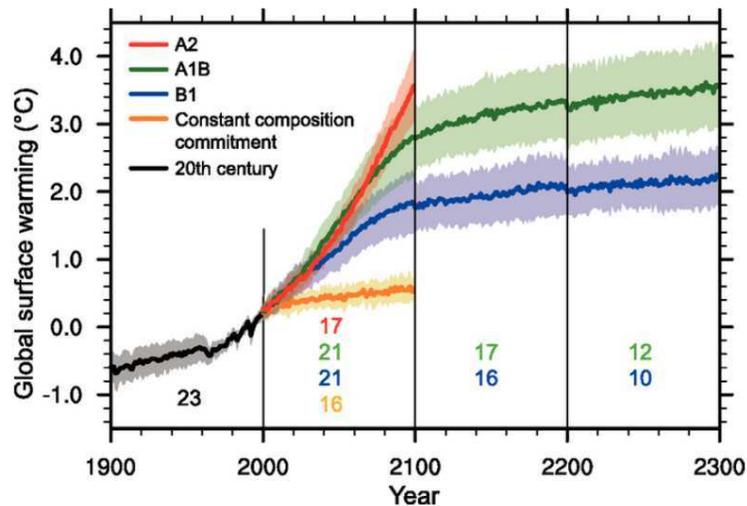


Figura 3.13: Promedios mundiales multimodelo del calentamiento en superficie (con respecto al promedio de 1980-1999) para los escenarios A2, A1B y B1, representados como continuación de las simulaciones del siglo XX. Los valores más allá del 2100 son para los escenarios de estabilización. Las tendencias lineales de las corridas de control correspondientes han sido removidas de estas series de tiempo. Las líneas corresponden a los promedios multimodelo, mientras que las áreas sombreadas denotan el rango de ± 1 desviaciones estándar para los promedios anuales individuales. Las discontinuidades en los diferentes períodos no tienen significado físico y son causadas por el hecho de que el número de modelos que se han corrido para un escenario dado es diferente para cada período y escenario, como está indicado por los números coloreados para cada período y escenario en la parte inferior de la figura. Imagen tomada del Cuarto Informe de Evaluación del IPCC (2007).

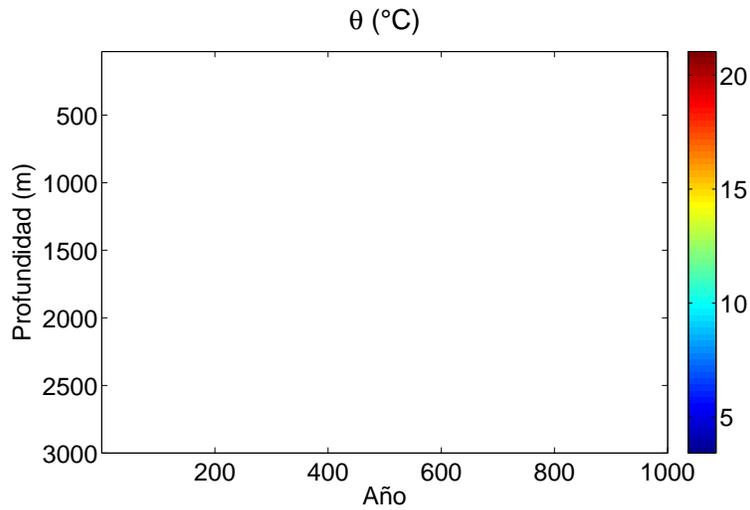


Figura 3.14: Evolución de la temperatura del océano profundo. La respuesta al calentamiento superficial se transmite de manera menos efectiva y más lentamente a las aguas más profundas. Después de 800 años de haberse aplicado el forzamiento radiativo las isotermas situadas por debajo de los 700 m. aún no se estabilizan.

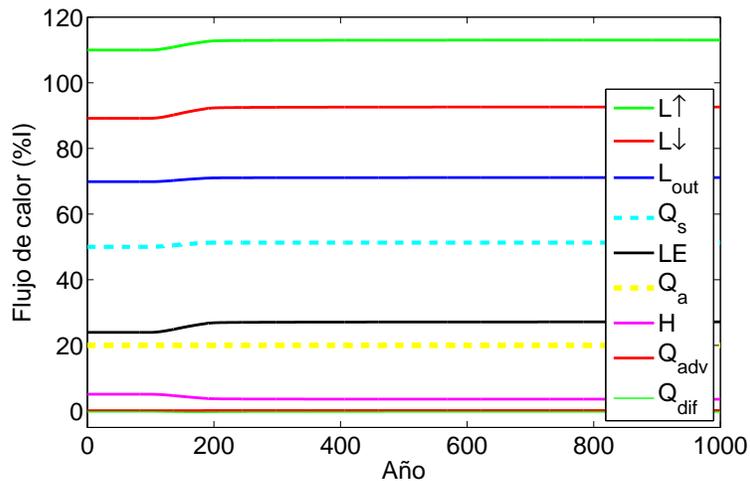


Figura 3.15: Evolución de los flujos de calor (dados en porcentaje de la insolación media global I). El flujo de calor sensible, a diferencia de los demás flujos de calor, disminuyó en el nuevo estado de equilibrio.

Capítulo 4

Modelo climático estocástico

En este capítulo se presenta la formulación estocástica del modelo climático, la cual involucra cuatro procesos estocásticos diferentes. Dichos procesos consideran un forzamiento aditivo aleatorio en el flujo de energía incidente en la atmósfera y en la capa de mezcla, y parametrizaciones estocásticas del flujo turbulento de calor latente y del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano. En la primera sección se trata la derivación de las ecuaciones diferenciales estocásticas, y posteriormente, en la segunda sección, se describe el método numérico utilizado para resolverlas. Finalmente, en la última sección, se analiza el cálculo del potencial asociado a una ecuación diferencial estocástica con ruido multiplicativo y se discute la ecuación de Fokker-Planck estacionaria.

4.1. Formulación estocástica del modelo climático

Los procesos estocásticos serán introducidos utilizando ruido blanco, esto es, las variaciones aleatorias de los procesos mencionados anteriormente se expresarán mediante incrementos de Wiener. Cada uno de estos cuatro procesos se implementará de manera independiente, esto para ver el efecto que tiene cada uno de ellos en la respuesta de la temperatura global.

Los dos primeros casos de estudio son conocidos como ruido aditivo, ya que el forzamiento aleatorio es independiente del estado del sistema. Los últimos dos casos, al considerar parametrizaciones estocásticas de procesos físicos, introducen un forzamiento que es función de las temperaturas del océano y la atmósfera, es decir, el forzamiento es dependiente del estado del sistema y es llamado ruido multiplicativo. El tratamiento para ambos casos de ruido es distinto, para el primero se utiliza el cálculo Ito y para el segundo el cálculo Stratonovich. Sin embargo, con el fin de aplicar los métodos del cálculo Ito desarrollados en el Apéndice B, todas las ecuaciones diferenciales estocásticas resultantes serán expresadas en formulación Ito.

Para iniciar con la discusión conviene reescribir, en forma diferencial, las ecuaciones termodinámicas deterministas que gobiernan al sistema océano-atmósfera. Las ecuaciones que

gobiernan a la temperatura de la atmósfera y de la capa de mezcla son

$$dT_A = \frac{1}{R_A} (Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + LE) dt, \quad (4.1)$$

$$dT_s = \frac{1}{R_s} \{Q_s + L \downarrow - L \uparrow - H - LE + Q_{dif} + Q_{adv}\} dt, \quad (4.2)$$

donde los flujos de calor tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} L \uparrow &= \epsilon \sigma T_s^4 \\ L \downarrow &= \sigma T_A^4 [0.89 - 0.2 (10^{-0.07 e_a})] \\ L_{out} &= A + B T_A - C F_{CL} \Delta T_{s,CL} \\ LE &= C_2 (e_s - e_a) \\ H &= C_1 (T_s - T_A) \\ Q_{dif} &= \rho_w C_w k \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=h} \\ Q_{adv} &= -\rho_w C_w w (h) [\theta (h) - \theta_B] \end{aligned}$$

La derivación de las ecuaciones diferenciales estocásticas para cada uno de los casos estudiados se presenta a continuación.

4.1.1. Forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera

El forzamiento estocástico es introducido a través de un término aleatorio dado por los incrementos de un proceso de Wiener dW como

$$dT_A = \frac{1}{R_A} (Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + LE) dt + \beta_A dW, \quad (4.3)$$

donde β_A es un término constante ($= 1.9 \times 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1/2}$) que denota la intensidad del ruido. Este forzamiento estocástico puede ser visto como un forzamiento radiativo [W/m^2], al notar que éste estaría dado por $R_A \beta_A \xi (t)$. Los incrementos de un proceso de Wiener dW están dados en términos de un proceso de ruido blanco gaussiano $\xi (t)$ y de un diferencial de tiempo dt a través de la relación $dW = \xi (t) dt$ (Apéndice B: Subsección B.1.3)¹.

Al definir las funciones

$$f_A (T_A, T_s) \equiv \frac{1}{R_A} (Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + LE), \quad (4.4)$$

$$g_A \equiv \beta_A, \quad (4.5)$$

¹Las unidades para cada variable son: $[dW] = \text{s}^{1/2}$, $[\xi (t)] = \text{s}^{-1/2}$ y $[dt] = \text{s}$.

la ecuación diferencial estocástica para T_A se puede expresar de manera compacta como

$$dT_A = f_A(T_A, T_s) dt + g_A dW. \quad (4.6)$$

Ya que la función g_A es un término constante, las versiones Ito y Stratonovich de la ecuación (4.6) coinciden, por lo cual su solución puede obtenerse al utilizar el cálculo Ito (Apéndice B: Subsección B.1.4).

4.1.2. Forzamiento radiativo aleatorio en el océano

El forzamiento aleatorio es introducido de la misma manera que en el caso anterior. La ecuación diferencial estocástica resultante para T_s es

$$dT_s = \frac{1}{R_s} (Q_s + L \downarrow - L \uparrow - H - LE + Q_{dif} + Q_{adv}) dt + \beta_s dW, \quad (4.7)$$

donde la intensidad del ruido está dada por el término constante β_s , el cual satisface la relación $R_A \beta_A = R_s \beta_s$. De esta manera se asegura que el forzamiento radiativo aleatorio introducido en la atmósfera y en la capa de mezcla oceánica sea el mismo².

La definición de las funciones

$$f_s(T_A, T_s) \equiv \frac{1}{R_s} (Q_s + L \downarrow - L \uparrow - H - LE + Q_{dif} + Q_{adv}), \quad (4.8)$$

$$g_s \equiv \beta_s, \quad (4.9)$$

permite escribir la versión Ito de (4.7) como

$$dT_s = f_s(T_A, T_s) dt + g_s dW, \quad (4.10)$$

4.1.3. Parametrización estocástica de $L \uparrow$

La parametrización estocástica implementada de $L \uparrow$ considera que el coeficiente de emisividad ϵ ya no será constante en el tiempo, sino que fluctuará de manera aleatoria alrededor de su valor determinista. El coeficiente de emisividad ϵ será reemplazado de acuerdo a

$$\epsilon \longrightarrow \epsilon + \beta_1 \xi(t).$$

donde β_1 ($= 7.1 \cdot \epsilon \text{ s}^{1/2}$) es el parámetro que regula la intensidad del nuevo coeficiente de emisividad.

El flujo de radiación de onda larga estará formado de un término determinista más un término aleatorio, esto es,

$$L \uparrow(t) = \epsilon \sigma T_s^4 + \beta_1 \xi(t) \sigma T_s^4. \quad (4.11)$$

Ya que este flujo de calor aparece tanto en la ecuación de la temperatura de la atmósfera como de la capa de mezcla, se derivará una ecuación diferencial estocástica para cada una de ellas.

²El forzamiento radiativo [W/m^2] para la capa de mezcla oceánica, similar al caso anterior, es $R_s \beta_s \xi(t)$.

Temperatura de la atmósfera

La ecuación diferencial estocástica para T_A es de la forma

$$dT_A = \frac{1}{R_A} (Q_A + \epsilon\sigma T_s^4 - L \downarrow - L_{out} + H + LE) dt + \frac{1}{R_A} \beta_1 \sigma T_s^4 \xi(t) dt, \quad (4.12)$$

la cual, utilizando el hecho de que $\xi(t) dt = dW$, se puede expresar en términos de los incrementos de un proceso de Wiener como

$$dT_A = f_A(T_A, T_s) dt + g_A(T_s) dW, \quad (4.13)$$

donde

$$f_A(T_A, T_s) \equiv \frac{1}{R_A} (Q_A + \epsilon\sigma T_s^4 - L \downarrow - L_{out} + H + LE), \quad (4.14)$$

$$g_A(T_s) \equiv \frac{1}{R_A} \beta_1 \sigma T_s^4. \quad (4.15)$$

Temperatura de la capa de mezcla

La ecuación diferencial estocástica que se obtiene para T_s es

$$dT_s = \frac{1}{R_s} (Q_s + L \downarrow - \epsilon\sigma T_s^4 - H - LE + Q_{dif} + Q_{adv}) dt - \frac{1}{R_s} \beta_1 \sigma T_s^4 \xi(t) dt. \quad (4.16)$$

La definición de las funciones

$$f_s(T_A, T_s) \equiv \frac{1}{R_s} (Q_s + L \downarrow - \epsilon\sigma T_s^4 - H - LE + Q_{dif} + Q_{adv}), \quad (4.17)$$

$$g_s(T_s) \equiv -\frac{1}{R_s} \beta_1 \sigma T_s^4, \quad (4.18)$$

permite escribir (4.16) como

$$dT_s = f_s(T_A, T_s) dt + g_s(T_s) dW. \quad (4.19)$$

El estado del sistema océano-atmósfera está dado por los valores de las temperaturas T_A y T_s , las cuales están acopladas. Esto es, la magnitud del ruido para este caso es dependiente del estado del sistema (ruido multiplicativo). Por lo tanto las ecuaciones resultantes para T_A y T_s (ecuaciones (4.13) y (4.19), respectivamente) representan ecuaciones diferenciales estocásticas Stratonovich.

Usando la regla de transformación de una ecuación diferencial estocástica Stratonovich a una Ito dada por (B.51) (Apéndice B), se tiene que la ecuación diferencial estocástica Ito para T_A es

$$\begin{aligned} dT_A &= \left(f_A + \frac{g_A}{2} \frac{\partial g_A}{\partial T_A} + \frac{g_s}{2} \frac{\partial g_A}{\partial T_s} \right) dt + g_A dW \\ dT_A &= \left(f_A - \frac{R_A}{R_s} \frac{2}{T_s} g_A^2 \right) dt + g_A dW \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por otro lado, la ecuación Ito equivalente para T_s es

$$\begin{aligned} dT_s &= \left(f_s + \frac{g_A}{2} \frac{\partial g_s}{\partial T_A} + \frac{g_s}{2} \frac{\partial g_s}{\partial T_s} \right) dt + g_s dW \\ dT_s &= \left(f_s + \frac{2}{T_s} g_s^2 \right) dt + g_s dW. \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.1.4. Parametrización estocástica de LE

El procedimiento para introducir una parametrización estocástica en LE es muy similar al implementado en $L \uparrow$. En este caso se considera hacer el siguiente reemplazo en el coeficiente C_2 ,

$$C_2 \longrightarrow C_2 + \beta_2 \xi(t), \quad (4.22)$$

donde $\beta_2 (= 34 \cdot C_2 \text{ s}^{1/2})$ es el parámetro que regula la intensidad de las variaciones de esta nueva variable.

El flujo turbulento de calor latente ahora constará de dos términos,

$$LE(t) = C_2 (e_s - e_a) + \beta_2 \xi(t) (e_s - e_a), \quad (4.23)$$

el primero de naturaleza determinista y el segundo de naturaleza aleatoria (o estocástica).

Las ecuaciones diferenciales estocásticas resultantes para la temperatura de la atmósfera y la temperatura de la capa de mezcla se muestran a continuación.

Temperatura de la atmósfera

La ecuación diferencial estocástica que se obtiene para T_A es

$$dT_A = \frac{1}{R_A} [Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + C_2 (e_s - e_a)] dt + \frac{1}{R_A} \beta_2 (e_s - e_a) \xi(t) dt, \quad (4.24)$$

la cual expresada en términos de incrementos de Wiener es

$$dT_A = \frac{1}{R_A} [Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + C_2 (e_s - e_a)] dt + \frac{1}{R_A} \beta_2 (e_s - e_a) dW. \quad (4.25)$$

Nuevamente, para facilitar un análisis posterior, se definen las funciones

$$f_A(T_A, T_s) \equiv \frac{1}{R_A} [Q_A + L \uparrow - L \downarrow - L_{out} + H + C_2 (e_s - e_a)], \quad (4.26)$$

$$g_A(T_s) \equiv \frac{1}{R_A} \beta_2 (e_s - e_a), \quad (4.27)$$

las cuales permiten escribir la ecuación diferencial estocástica Stratonovich³ para T_A de la siguiente manera:

$$dT_A = f_A(T_A, T_s) dt + g_A(T_s) dW. \quad (4.28)$$

La ecuación diferencial estocástica Ito equivalente para T_A se obtiene al aplicar la transformación dada por (B.51), siendo el resultado

$$\begin{aligned} dT_A &= \left(f_A + \frac{g_A}{2} \frac{\partial g_A}{\partial T_A} + \frac{g_s}{2} \frac{\partial g_A}{\partial T_s} \right) dt + g_A dW \\ dT_A &= \left(f_A - \frac{R_A}{R_s} \frac{2354 \cdot \ln 10}{2T_s^2} g_A^2 \right) dt + g_A dW. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Temperatura de la capa de mezcla

La ecuación respectiva para la temperatura de la capa de mezcla T_s es

$$dT_s = \frac{1}{R_s} [Q_s + L \downarrow - L \uparrow - H - C_2(e_s - e_a) + Q_{dif} + Q_{adv}] dt - \frac{1}{R_s} \beta_2 (e_s - e_a) \xi(t) dt, \quad (4.30)$$

la cual, expresada de manera más compacta, se lee como

$$dT_s = f_s(T_A, T_s) dt + g_s(T_s) dW, \quad (4.31)$$

donde

$$f_s(T_A, T_s) \equiv \frac{1}{R_s} [Q_s + L \downarrow - L \uparrow - H - C_2(e_s - e_a) + Q_{dif} + Q_{adv}], \quad (4.32)$$

$$g_s(T_s) \equiv -\frac{1}{R_s} \beta_2 (e_s - e_a). \quad (4.33)$$

Al aplicar la transformación (B.51) a la ecuación Stratonovich (4.31) se obtiene la versión Ito para T_s ,

$$\begin{aligned} dT_s &= \left(f_s + \frac{g_A}{2} \frac{\partial g_s}{\partial T_A} + \frac{g_s}{2} \frac{\partial g_s}{\partial T_s} \right) dt + g_s dW \\ dT_s &= \left(f_s + \frac{2354 \cdot \ln 10}{2T_s^2} g_s^2 \right) dt + g_s dW. \end{aligned} \quad (4.34)$$

En la siguiente sección se explicará brevemente el método numérico utilizado para solucionar ecuaciones diferenciales estocásticas y se explicarán las condiciones sobre las cuales fueron resueltas las ecuaciones propuestas en nuestro modelo climático estocástico.

³Al igual que en el caso anterior la magnitud del ruido depende del estado del sistema, es decir, se tiene ruido multiplicativo. Entonces las ecuaciones que describen al sistema representan ecuaciones diferenciales estocásticas Stratonovich (ecuaciones (4.28) y (4.31)).

4.2. Simulación numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas

El método numérico utilizado para solucionar las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) es el método de Euler-Maruyama (EM). La descripción de dicho método está tomada de Higham (2001).

Una EDE escalar puede ser escrita en forma integral como

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s)) ds + \int_0^t g(X(s)) dW(s), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.35)$$

donde f y g son funciones escalares y la condición inicial X_0 es una *v.a.* La segunda integral en el lado derecho de (4.35) es tomada con respecto a movimiento Browniano, donde se asume que se usa la versión Ito. La solución $X(t)$ es una *v.a.* para cada t .

Es usual reescribir (4.35) en forma de ecuación diferencial como

$$dX(t) = f(X(t)) dt + g(X(t)) dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.36)$$

Si $g \equiv 0$ y X_0 es constante, entonces el problema se vuelve determinista, y (4.36) se reduce a la ecuación diferencial $dX(t)/dt = f(X(t))$, con $X(0) = X_0$.

El movimiento Browniano estándar, o proceso de Wiener estándar sobre $[0, T]$ es una *v.a.* $W(t)$ que depende de forma continua de $t \in [0, T]$ y que satisface las siguientes tres condiciones:

1. $W(0) = 0$ (con probabilidad 1).
2. Para $0 \leq s \leq t \leq T$ la variable aleatoria dada por el incremento $W(t) - W(s)$ está distribuida normalmente con media cero y varianza $t - s$; o equivalentemente, $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t - s}N(0, 1)$, donde $N(0, 1)$ denota una *v.a.* distribuida normalmente con media cero y varianza unitaria.
3. Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$ los incrementos $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes.

La implementación del método Euler-Maruyama requiere calcular trayectorias Brownianas discretizadas propias utilizando un generador de números aleatorios, donde $W(t)$ está especificado en valores discretos t . Sea $\delta t = T/N$ para algún entero positivo N , con W_j que denota $W(t_j)$, donde $t_j = j\delta t$. La condición 1 dice que $W_0 = 0$ con probabilidad 1, y las condiciones 2 y 3 nos dicen que

$$W_j = W_{j-1} + \Delta W_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.37)$$

donde cada ΔW_j es una *v.a.* independiente de la forma $\sqrt{\delta t}N(0, 1)$.

Con respecto a la discretización de (4.36) sobre el mismo intervalo $[0, T]$ se considera un paso de tiempo $\Delta t = T/L$ para algún entero positivo L , y $\tau_j = j\Delta t$. La aproximación numérica a $X(\tau_j)$ es denotada por X_j , y entonces el método Euler-Maruyama toma la forma

$$X_j = X_{j-1} + f(X_j) \Delta t + g(X_{j-1}) [W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})], \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (4.38)$$

Por conveniencia, siempre se escoge que el paso de tiempo Δt para el método numérico sea un múltiplo entero $R \geq 1$ del incremento δt para la trayectoria Browniana, $\Delta t = R\delta t$. Esto asegura que el conjunto de puntos $\{t_j\}$ en los cuales está basada la trayectoria Browniana discretizada contenga los puntos $\{\tau_j\}$ en los cuales está calculada la solución EM. Entonces, el incremento $W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})$ necesario en (4.38) está dado por

$$W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}) = W(jR\delta t) - W((j-1)R\delta t) = \sum_{k=jR-R+1}^{jR} \Delta W_k. \quad (4.39)$$

De esta forma, la solución numérica X_j queda completamente especificada por (4.38). La solución $X(t)$ resultaría de tomar el límite de paso de tiempo nulo en el método numérico.

Al resolver las ecuaciones diferenciales planteadas en nuestro modelo climático estocástico se deben tener en cuenta dos aspectos:

1. El rango de frecuencia de las variaciones en la temperatura global es el que determina la elección del incremento δt para el proceso de Wiener y del paso de tiempo Δt utilizado para el método numérico.

Tomando como punto de partida las variaciones mensuales de la temperatura global reportadas por la “National Oceanic and Atmospheric Administration” (NOAA) (Figura 4.1), se consideró que las variaciones mensuales de ésta están determinadas por variaciones aleatorias de corto plazo ($\delta t = 1$ día) en ciertos flujos de calor (forzamiento radiativo, $L \uparrow$ o LE). Esta elección de δt establece que las fluctuaciones del ruido de Wiener utilizado para representar estos flujos de calor aleatorios estén en un rango de frecuencia más ancho que el de las variaciones (mensuales) reportadas en la temperatura global⁴. Para medir el efecto de los forzamientos aleatorios de los flujos de calor sobre la temperatura global en escalas mensuales, a pesar de que $\Delta t = 1$ día, se hicieron promedios mensuales de ésta. Sin embargo, ya que uno de nuestros objetivos principales es estudiar la estructura de la variabilidad de la temperatura global especificada por las ecuaciones diferenciales de nuestro modelo climático estocástico, dicho estudio se realizó utilizando las variaciones diarias de la temperatura global obtenidas al resolver

⁴Siempre y cuando el ancho de banda de la dinámica del sistema sea pequeño comparado al ancho de banda de las frecuencias de una fuente de ruido real que lo impulsa, el ruido de Wiener servirá como una buena aproximación a esta fuente de ruido real. (Apéndice B: Subsección B.1.3).

dichas ecuaciones⁵. Otra forma de implementar el forzamiento estocástico es considerando $\Delta t = 30$ días y $R = 30$, de tal manera que δt sea igual a 1 día. De esta manera ya no habría necesidad de calcular promedios mensuales de la temperatura global. También, en este caso, la intensidad de los procesos de ruido sería menor. Sin embargo, en un ejemplo dado por Higham (2001) se encuentra que la diferencia entre la solución analítica a una EDE y su solución numérica utilizando el método Euler-Maruyama, se vuelve mayor al considerar valores de δt más pequeños que Δt . La mejor aproximación se obtiene al utilizar $\delta t = \Delta t$. Este hecho fue el que nos motivó a utilizar la primera configuración al implementar el forzamiento estocástico.

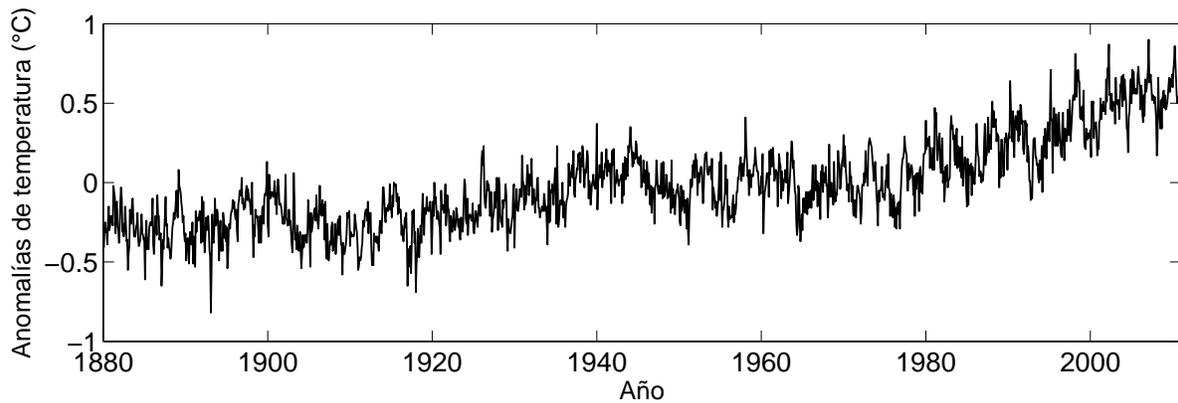


Figura 4.1: Anomalías mensuales de la temperatura global tierra-océano desde 1880 a la fecha actual. La amplitud promedio de las variaciones de la temperatura global tierra-océano durante sus períodos estacionarios es de aproximadamente 0.7°C . Datos tomados de la “National Oceanic and Atmospheric Administration” (NOAA).

2. La amplitud de las variaciones en los procesos físicos considerados como aleatorios (forzamiento radiativo, $L \uparrow$ y LE) es la que determina la amplitud de las variaciones en la temperatura global. La amplitud de las variaciones en dichos procesos físicos debiera ser comparable a las observadas.

En la construcción de nuestro modelo climático estocástico se consideró como aleatorio sólo un flujo de calor, por lo tanto no se espera que toda la variabilidad de la temperatura global sea explicada por la variabilidad de un sólo proceso físico: forzamiento radiativo, $L \uparrow$ o LE . Este hecho, aunado a que el modelo numérico integra los efectos de las variaciones de dichos procesos físicos en intervalos de $\Delta t = 1$ día, requiere que la amplitud en las variaciones diarias de estos procesos sea relativamente grande para producir un efecto apreciable en la temperatura global, o sea, que las variaciones

⁵El estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDEs) de nuestro modelo climático y de los procesos autorregresivos que ellas originan, es más directo e ilustrativo cuando se analizan en su forma original las EDEs (tomando valores diarios). En general, los resultados que se obtienen al considerar valores diarios o promedios mensuales de la temperatura global son los mismos.

obtenidas de la temperatura sean comparables a las reportadas. A fin de cuantificar la amplitud de las variaciones mensuales de los flujos de calor aleatorios se calcularon sus promedios mensuales, los cuales tienen una amplitud mucho menor que la de sus valores diarios.

Hasta este punto se pueden resolver, mediante simulación numérica, las ecuaciones estocásticas Ito que gobiernan al sistema océano-atmósfera, y así obtener las trayectorias muestrales de las temperaturas de la atmósfera (T_A) y de la capa de mezcla oceánica (T_s) para cada uno de los cuatro casos propuestos en el modelo climático estocástico. No obstante, además del cálculo de las trayectorias muestrales para ambas temperaturas, también se analizará su dinámica mediante el estudio de sus funciones potencial y sus funciones de densidad de probabilidad estacionaria para cada caso. La discusión de estos dos nuevos aspectos en el análisis de cualquier ecuación diferencial estocástica se aborda en la siguiente sección.

4.3. Ruido multiplicativo y función potencial

En esta parte se discutirá la solución a la ecuación estacionaria de Fokker-Planck y el cálculo del potencial asociado para cada uno de los cuatro casos discutidos anteriormente. La ecuación de Fokker-Planck se resolverá en un dominio finito centrado alrededor de los valores de equilibrio de la temperatura de la atmósfera o del océano, según corresponda, utilizando la condición de fronteras reflejantes (Apéndice B: Sección B.2).

Aunque las ecuaciones (4.6), (4.10), (4.28), (4.34), (4.13) y (4.21) dependen de dos variables, T_A y T_s , éstas se pueden considerar uno-dimensionales al sustituir la variable independiente por su valor en el equilibrio determinista. Esto es adecuado ya que la estructura e intensidad de los forzamientos estocásticos introducidos es tal que las variables T_A y T_s oscilan únicamente alrededor de su valor en el equilibrio determinista.

Considere la ecuación diferencial estocástica Ito uno-dimensional,

$$dx = f(x) dt + g(x) dW, \quad (4.40)$$

donde $f(x)$ es la parte determinista, $g(x)$ es la parte aleatoria y dW son los incrementos de un proceso de Wiener.

La expresión para la función de densidad de probabilidad en el dominio $x \in [a, b]$ y considerando fronteras reflejantes está dada por

$$P(x) = \frac{1}{Ng^2(x)} \exp \left[\int_a^x \frac{2f(u)}{g^2(u)} du \right] \quad (\text{Jacobs, 2010}), \quad (4.41)$$

donde la constante N es elegida tal que

$$\int_a^b P(x) dx = 1.$$

Una forma de analizar la dinámica y estabilidad del modelo expresado por la ecuación (4.40) es a través de su función potencial (Wilks, 2008). Para el modelo determinista

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

el potencial $V(x)$ se calcula a partir de la expresión

$$f(x) = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (4.42)$$

Cuando se consideran ecuaciones diferenciales estocásticas el cálculo del potencial involucra realizar la integral del término determinista $f(x)$ y el término aleatorio $g(x)$, por lo que la forma natural de proceder sería utilizando integración estocástica. Wilks (2008) calcula el potencial asociado a una ecuación diferencial estocástica uno-dimensional, la cual obtiene a partir un modelo climático de balance de energía cero-dimensional forzado con ruido gaussiano aditivo (donde la variable pronostico es la temperatura media anual de la Tierra promediada globalmente), véase la Figura 4.2. El argumenta que debido a que el ruido no depende de la temperatura, el potencial es el mismo que para el caso determinista. Sin embargo cuando se considera ruido multiplicativo (ruido que sí depende de el estado del sistema) el procedimiento para obtener el potencial es complejo y requiere utilizar herramientas matemáticas avanzadas de integración estocástica. Wilks (2008) no discute el caso de ruido multiplicativo.

La complejidad asociada a la obtención del potencial para el caso de ruido multiplicativo nos llevó a proponer una derivación muy ilustrativa y fácil de implementar (sin la necesidad de utilizar integración estocástica) para calcular el potencial asociado a una ecuación diferencial estocástica uno-dimensional de la forma (4.40).

El procedimiento es conceptualmente simple: A partir de la función de densidad de probabilidad $P(x)$, obtenida mediante la solución de la ecuación de Fokker-Planck, se encuentran los puntos críticos de ésta, los cuales deben ser iguales a los puntos críticos de la función potencial $V(x)$. Posteriormente, para asegurar la correspondencia dinámica entre $P(x)$ y $V(x)$ se debe cumplir que los máximos de $P(x)$ correspondan a los mínimos de $V(x)$, lo cual debe ser evidenciado al aplicar el criterio de la segunda derivada⁶.

Nuestro objetivo es calcular el potencial asociado a la dinámica de T_s para los casos de parametrizaciones estocásticas de los flujos de calor $L \uparrow$ y LE , dado que la función de densidad de probabilidad está dada por (4.41)⁷. Las ecuaciones para T_s (ecuaciones (4.21) y (4.34)) son las únicas que tienen la forma general (4.40), es decir, son las únicas ecuaciones en las cuales la función g depende de la variable que se está resolviendo.

⁶El criterio de la segunda derivada, utilizado en cálculo diferencial, es útil para encontrar máximos y mínimos relativos.

⁷El procedimiento propuesto aquí es igualmente aplicable si se consideran otros tipos de condiciones de frontera, no sólo condiciones de frontera reflejantes.

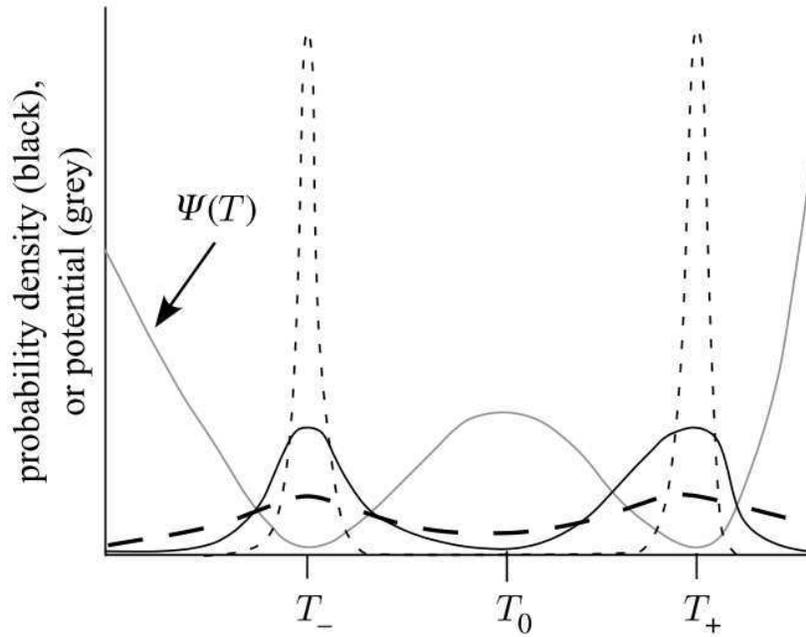


Figura 4.2: Bocetos de largo plazo (climatológicos) de la función de distribución de probabilidad para el modelo climático estocástico para un forzamiento estocástico pequeño (curva punteada a trazos largos), moderado (curva continua) y grande (curva punteada). La curva gris representa la función potencial, la cual tiene dos puntos de equilibrio estables (T_- y T_+) y uno inestable (T_0). Los mínimos del potencial, T_- y T_+ , corresponden a los máximos de las funciones de distribución de probabilidad. Al saber la forma explícita del potencial se puede tener una idea clara de las distribuciones de probabilidad en el equilibrio de las variables pronóstico, así como de la dinámica de éstas, antes de resolver la ecuación diferencial estocástica respectiva. Imagen tomada de Wilks (2008).

Teniendo en cuenta lo anterior, los puntos críticos x_c de la función de densidad de probabilidad se encuentran al igualar a cero su primera derivada y resolver la expresión resultante,

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{2e^{S(x)}}{Ng^3(x)} \left[\frac{g(x)}{2} \frac{ds(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx} \right]. \quad (4.43)$$

Esto es, los puntos críticos satisfacen

$$\frac{g(x_c)}{2} \left[\frac{ds(x)}{dx} \right]_{x_c} + \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]_{x_c} = 0,$$

donde

$$s(x) \equiv \int_a^x \frac{2f(u)}{g^2(u)} du.$$

Entonces, la función potencial $V(x)$ definida mediante la relación

$$\frac{dV(x)}{dx} \equiv \frac{g(x)}{2} \frac{ds(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}, \quad (4.44)$$

tiene los mismos puntos críticos que $P(x)$.

La segunda derivada de $P(x)$ es

$$\frac{d^2P(x)}{dx^2} = \frac{2e^{S(x)}}{Ng^3(x)} \left[\left(\frac{ds}{dx} - \frac{3}{g} \frac{dg}{dx} \right) \frac{dV(x)}{dx} + \frac{d^2V(x)}{dx^2} \right], \quad (4.45)$$

la cual evaluada en los puntos críticos x_c se expresa como

$$\left[\frac{d^2P(x)}{dx^2} \right]_{x_c} = \frac{2e^{S(x_c)}}{Ng^3(x_c)} \left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x_c}. \quad (4.46)$$

Considerando $g(x) < 0 \forall x$, como es el caso en las ecuaciones (4.18) y (4.33), se puede escribir (4.46) como

$$\left[\frac{d^2P(x)}{dx^2} \right]_{x_c} \propto - \left[\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right]_{x_c}. \quad (4.47)$$

La relación (4.47) asegura que los puntos críticos de $P(x)$ y $V(x)$ coinciden y que los máximos de $P(x)$ coinciden con los mínimos de $V(x)$. Si $g(x) > 0 \forall x$ basta con definir el potencial con un signo menos global para asegurar que (4.47) siga siendo válida⁸.

Al utilizar la regla de Leibniz para derivar la función $s(x)$, la ecuación (4.44) se expresa como

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{dg(x)}{dx}. \quad (4.48)$$

Entonces el potencial se calcula de acuerdo a

$$V(x) = \int_a^x \frac{f(u)}{g(u)} du + g(x) - g(a). \quad (4.49)$$

Note que el potencial depende fuertemente del término aleatorio $g(x)$.

En el caso de ruido aditivo, $g(x) = \text{constante}$, el cálculo del potencial se reduce a

$$V(x) = - \int_a^x f(u) du, \quad (4.50)$$

ya que se supuso $g < 0$. Este resultado coincide con el caso determinista y con lo expresado por Wilks (2008).

⁸Si la función aleatoria $g(x)$ tiene alternancias de signo en el dominio considerado, se puede dividir el dominio total en subintervalos donde la función $g(x)$ tenga un signo único, y entonces aplicar el procedimiento descrito a cada subintervalo teniendo en cuenta las modificaciones adecuadas.

Capítulo 5

Resultados y discusión: Modelo climático estocástico

En este capítulo se presentan los resultados numéricos y el análisis de la solución del modelo climático estocástico para cada uno de los cuatro casos propuestos: forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera y en el océano (ruido aditivo), y las parametrizaciones estocásticas de los flujos de calor $L \uparrow$ y LE (ruido multiplicativo).

5.1. Forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera

Para este caso el modelo climático se corrió considerando un forzamiento aditivo aleatorio en el flujo de energía incidente en la atmósfera (ecuación (4.6)). El forzamiento radiativo empleado, $Q_{est} = R_A \beta_A \Delta W / \Delta t$, se muestra en la Figura 5.1. En esta figura se muestran las series temporales (panel superior) y las distribuciones de probabilidad (panel inferior) del forzamiento radiativo, tanto para sus valores diarios como para sus promedios mensuales. Note que aunque los valores promediados (mensuales) del forzamiento radiativo aleatorio son significativamente menores que sus valores diarios, estos no son estrictamente nulos. Es decir, el efecto de las fluctuaciones del forzamiento radiativo en un intervalo de tiempo de 1 mes¹ no puede ser parametrizado en función de su valor medio, como se asume en los modelos deterministas (ver discusión en el Capítulo 1)².

El análisis de cada caso del modelo climático estocástico está enfocado en dos aspectos: el primero corresponde a la descripción en el dominio temporal de las series de temperatura para la atmósfera y la capa de mezcla oceánica y la relación entre ellas, incluyendo la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck para ambas series; el segundo aspecto trata la descripción en el dominio de frecuencias, la cual es útil para investigar el resultado de

¹Como se mencionó en la Sección 4.2, se consideran variaciones mensuales de la temperatura global.

²Esta misma conclusión se aplica a los casos restantes propuestos en el modelo climático estocástico: forzamiento radiativo aleatorio en el océano y parametrizaciones estocásticas de los flujos de calor $L \uparrow$ y LE .

Hasselmann relacionada a la persistencia climática (Sección 2.2) dentro de nuestro modelo climático estocástico.

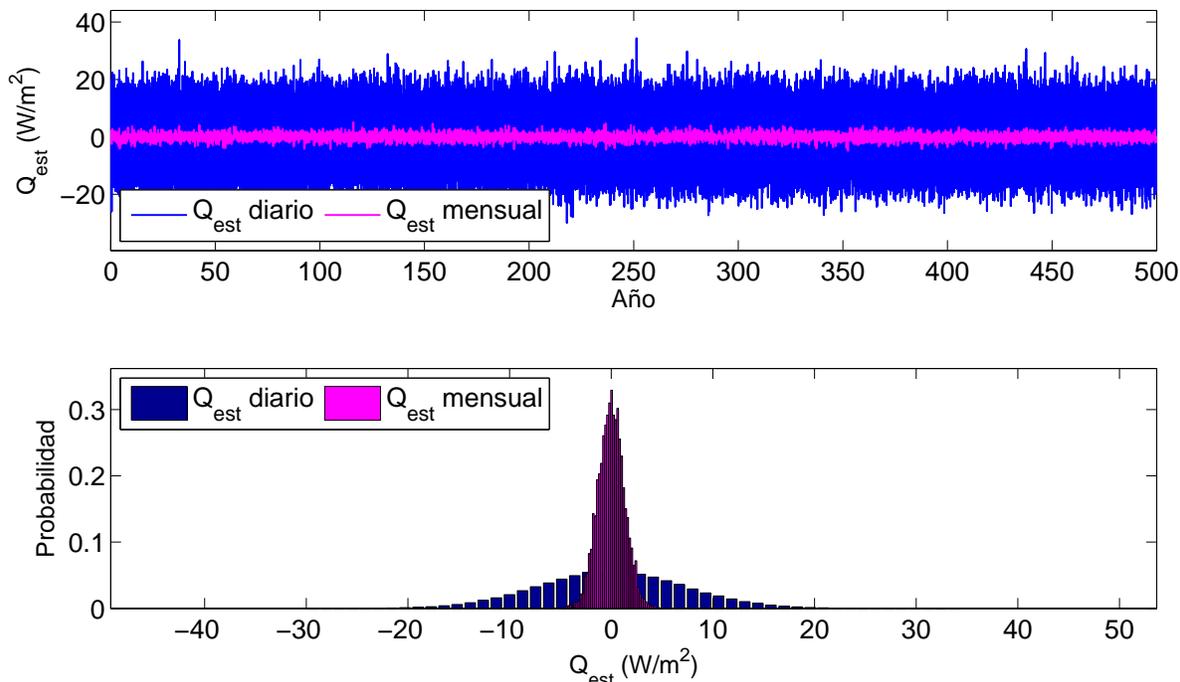


Figura 5.1: Flujo aditivo aleatorio de energía incidente en la atmósfera. El panel superior contiene la serie temporal de este forzamiento (en color azul para los valores diarios y en color magenta para los promedios mensuales). En el panel inferior se muestra la distribución de probabilidad de ambas series, las cuales corresponden a una distribución normal. El tiempo de simulación es de 500 años.

Análisis en tiempo

Las series de tiempo para las temperaturas de la atmósfera y la capa de mezcla oceánica se muestran en la Figura 5.2.

La descripción completa de cada serie de temperatura involucra tres aspectos: distribución, homogeneidad y dependencia o persistencia³. *a) Distribución.* Ambas series se distribuyen de manera normal con medias iguales a sus valores de equilibrio deterministas (vea la Figura 5.5). La temperatura de la capa de mezcla oceánica, T_s , exhibe variaciones máximas diarias de $\sim 0.38^\circ\text{C}$ y mensuales de $\sim 0.36^\circ\text{C}$, mientras que la temperatura de la atmósfera, T_A , despliega variaciones máximas diarias de $\sim 1.11^\circ\text{C}$ y mensuales de $\sim 0.68^\circ\text{C}$ ⁴. Las series

³Todo el análisis de las series de temperatura global T_A y T_s , obtenidas al resolver el modelo climático estocástico, se hizo utilizando las series diarias (Sección 4.2). Algunos resultados incluyen, sólo para efectos comparativos, los promedios mensuales de éstas.

⁴Debido a que los valores diarios de T_A son bastante erráticos, la magnitud de sus promedios mensuales se redujo notablemente respecto a sus valores diarios.

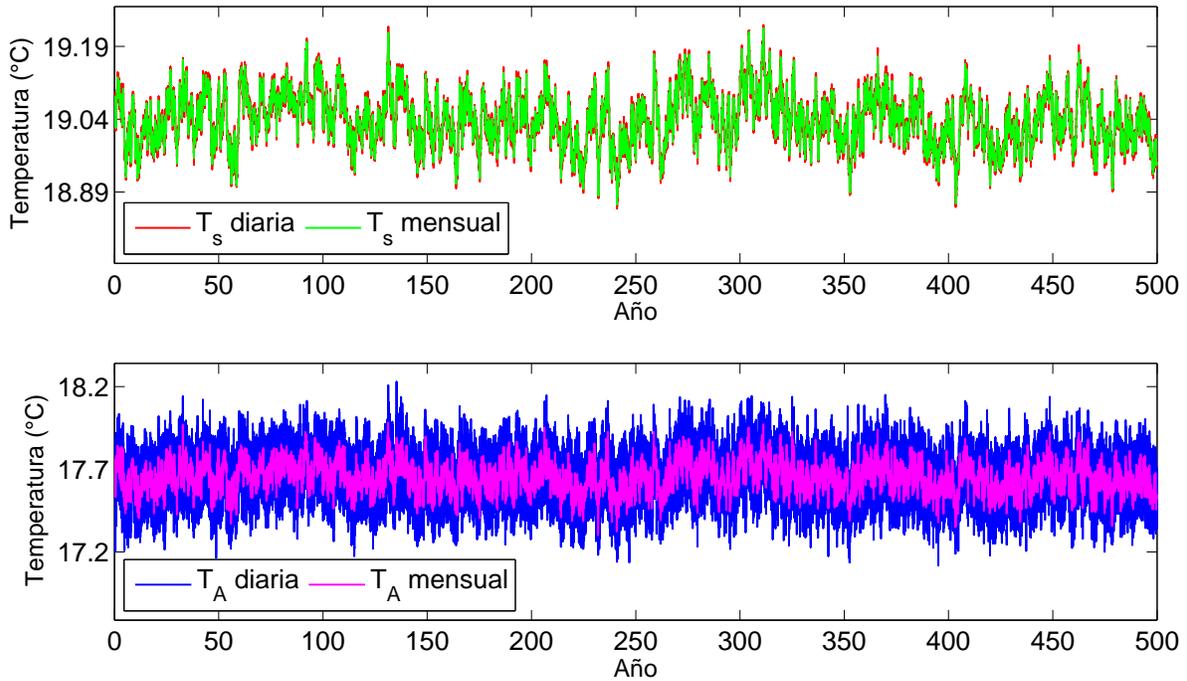


Figura 5.2: Evolución de las temperaturas de la atmósfera (T_A) y de la capa de mezcla oceánica (T_s). Se incluyen las series diarias y mensuales para ambas temperaturas. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

son simétricas respecto a su media y no presentan valores atípicos. *b) Homogeneidad.* Los valores dentro de los cuales oscilan las temperaturas T_s y T_A se mantienen constantes en el tiempo. Las variaciones por encima y por debajo de su valor medio son iguales. Esto es, ambas series de temperatura no presentan cambios bruscos en sus valores que se mantengan, por lo tanto son homogéneas. *c) Persistencia.* Se observa que la temperatura de la capa de mezcla oceánica exhibe tendencias de corto plazo de mayor duración que la temperatura de la atmósfera, esto es, el océano tiene mayor persistencia que la atmósfera, lo cual está provocado esencialmente por la baja capacidad calorífica de la atmósfera en relación a la capacidad calorífica de la capa de mezcla oceánica ($R_s \simeq 11R_A$).

Este análisis de las series indica que las medidas comunes de tendencia central y dispersión, usadas en estadística descriptiva, son adecuadas para describir las series. Es decir, no es necesario el uso de medidas robustas ni resistentes. Por otro lado, la introducción del forzamiento radiativo aleatorio como se definió anteriormente produjo variaciones en la temperatura global que coinciden aproximadamente con las variaciones reales estimadas para la temperatura global tierra-océano, véase la Figura 4.1.

Como se verá más adelante, para todos los casos del modelo climático estocástico se cumple que las series de temperatura de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica son homogéneas y se distribuyen de manera normal alrededor de sus valores de equilibrio deter-

ministas, por ello en las secciones posteriores sólo se discutirán las diferencias y descripciones puntuales para cada caso.

A fin de hacer una descripción de las series de temperatura global (atmósfera y océano) que nos proporcione información acerca de la relación entre ellas, en las Figuras 5.3 y 5.4(b) se presentan las series temporales de las anomalías estandarizadas para T_A y T_s y la correlación entre ellas (Figura 5.4(a)). Las variaciones de temperatura en la atmósfera están entre ± 5 desviaciones estándar, mientras que en la capa de mezcla oceánica las variaciones son menores a ± 4 desviaciones estándar (Figura 5.3).

De la Figura 5.4(a) se tiene que existe una correlación positiva entre las temperaturas de la atmósfera y la capa de mezcla oceánica, siendo el coeficiente de correlación de Pearson, r_P , de 0.5920. Debido al acoplamiento del sistema océano-atmósfera y de que los procesos climáticos están determinados mayormente por el océano, es posible definir una relación de causalidad entre ambas temperaturas: el comportamiento de la atmósfera está fuertemente determinado por el comportamiento del océano, es decir, “*la atmósfera sigue al océano*”. Otra característica que se puede obtener al analizar las Figuras 5.3 y 5.4(b) es que la variabilidad de largo plazo es similar en la atmósfera y el océano, pero difieren en la variabilidad de corto plazo: la atmósfera es más variable que el océano en el corto plazo.

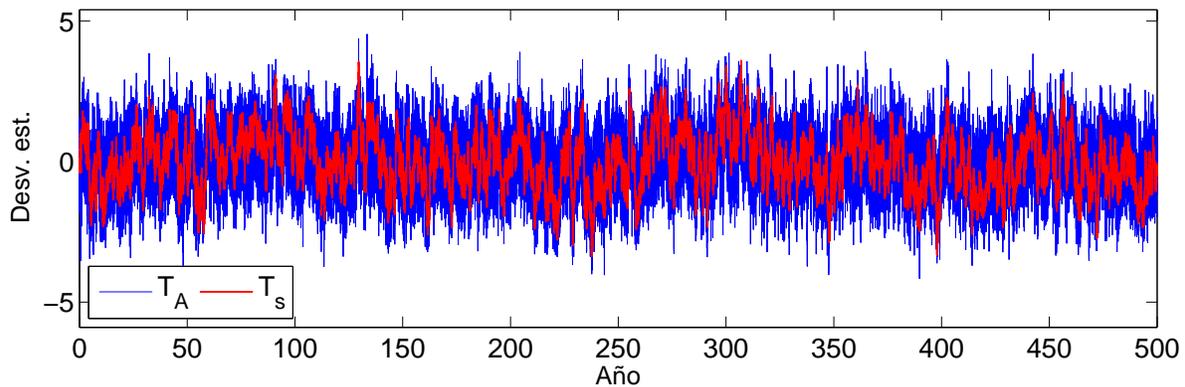


Figura 5.3: Anomalías estandarizadas de las temperaturas de la atmósfera (T_A) y de la capa de mezcla oceánica (T_s). Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

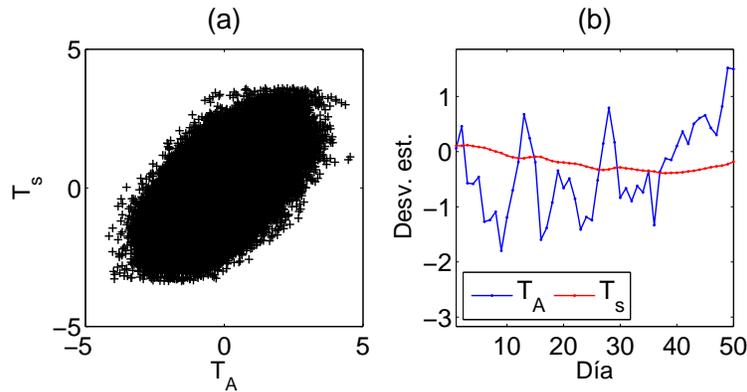


Figura 5.4: (a) Correlación entre las anomalías estandarizadas de T_s y T_A y (b) Anomalías estandarizadas de las temperaturas de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica para los primeros 50 días de simulación. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

Los histogramas para las temperaturas de la capa de mezcla oceánica y la atmósfera se presentan en la Figura 5.5. Dichos histogramas han sido normalizados⁵ para semejar las funciones de distribución de probabilidad. El objetivo de esto es poder hacer una comparación entre estos histogramas y las funciones de distribución de probabilidad obtenidas al resolver la ecuación estacionaria de Fokker-Planck.

La Figura 5.6 muestra la función de distribución de probabilidad estacionaria para T_A obtenida al resolver la ecuación estacionaria de Fokker-Planck. En este caso sólo se resolvió dicha ecuación para la temperatura de la atmósfera, ya que ésta es la única ecuación diferencial que contiene un término asociado a los incrementos de un proceso de Wiener (vea la Sección 4.3 para los detalles). En esta misma figura se incluye también la función potencial asociada a la ecuación diferencial estocástica que gobierna a la temperatura atmosférica. Observe que el mínimo de la función potencial coincide con el máximo de la función de distribución de probabilidad. Asimismo, dentro del dominio considerado el potencial es simétrico respecto al valor de equilibrio determinista, lo cual lleva a que la función de distribución de probabilidad sea también simétrica en el mismo dominio (la función potencial determina la función de distribución de probabilidad). En el límite de un número infinito de años simulados el histograma normalizado de T_A debe de coincidir con la función de distribución de probabilidad obtenida de la ecuación estacionaria de Fokker-Planck.

⁵La normalización consiste en hacer que el área del histograma tenga el valor de 1.

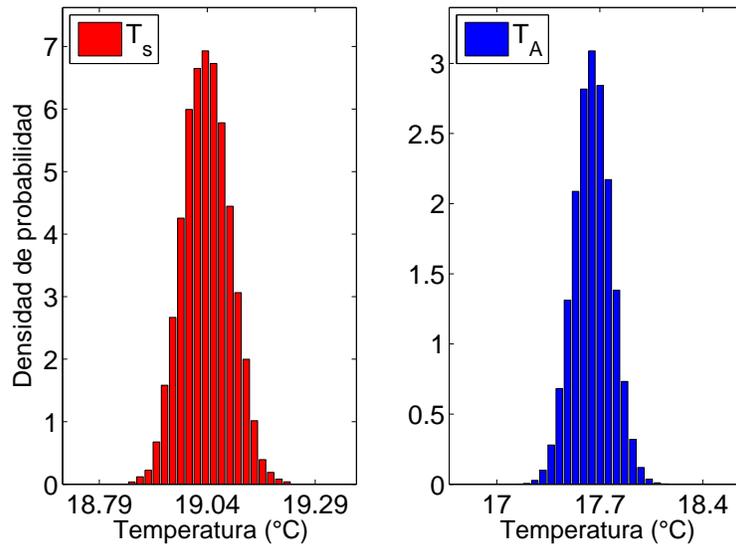


Figura 5.5: Histogramas normalizados para las temperaturas de la capa de mezcla (T_s) y de la atmósfera (T_A). Los histogramas son obtenidos a partir de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

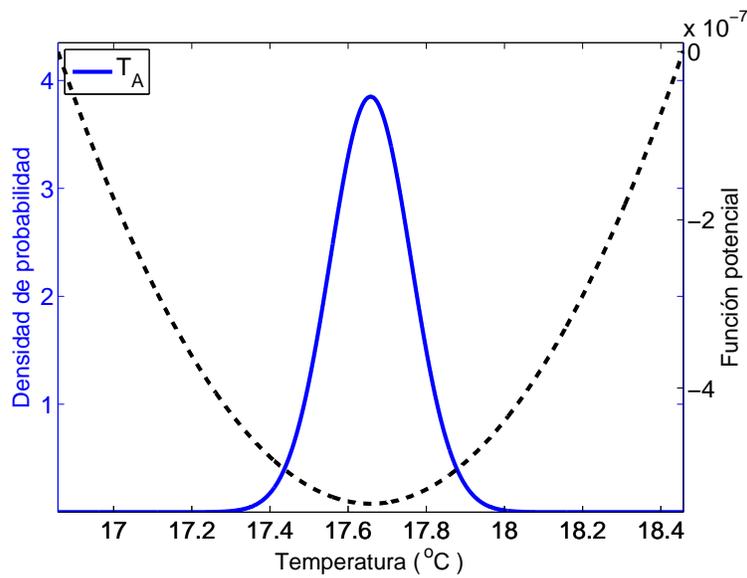


Figura 5.6: Función de distribución de probabilidad estacionaria para la temperatura de la atmósfera (T_A). Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

Análisis en frecuencia

El resultado de Hasselmann (1976) (Sección 2.2) establece que la persistencia climática puede ser entendida, a primer orden, como un proceso de ruido rojo (o un proceso autorregresivo de orden uno). Una medida de la persistencia de cualquier serie de tiempo puede ser hecha en términos de su espectro, esto es, el grado de persistencia de la serie será proporcional al grado de enrojecimiento del espectro⁶. Otra de las ventajas más importantes que se obtienen al utilizar el espectro es que éste sirve para identificar si la serie presenta pseudo-periodicidades o frecuencias puntuales. Todos los casos del modelo climático estocástico se construyeron sin la presencia de frecuencias puntuales, sin embargo es posible que algunos de ellos puedan presentar un comportamiento cuasi-oscilatorio (o pseudo-periodicidades), todo dependerá de la estructura de los espectros.

Con la finalidad de probar si la persistencia de las temperaturas globales (atmósfera y océano) pueden ser descritas, a primer orden de aproximación, como procesos puramente aleatorios (procesos autorregresivos $AR(1)$), se calculó el espectro lineal de Fourier para las anomalías estandarizadas de T_A y T_s y se compararon con los espectros teóricos de procesos autorregresivos estimados para cada una de ellas.

Un proceso autorregresivo de orden p , o $AR(p)$, se define generalmente como: $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso autorregresivo de orden p si existen constantes reales μ , ϕ_k , $k = 1, 2, \dots, p$, con $\phi_p \neq 0$ y un proceso de ruido blanco $\{\xi_t : t \in \mathbb{Z}\}$, con media cero y varianza σ_ξ^2 , tal que

$$X_t - \mu = \sum_{k=1}^p \phi_k (X_{t-k} - \mu) + \xi_t \quad (5.1)$$

donde μ es la media muestral de largo plazo de X y ϕ_k , $k = 1, 2, \dots, p$, son los parámetros autorregresivos. La estacionariedad del proceso implica que μ y σ_ξ^2 no cambien con el tiempo.

Al ajustar un proceso autorregresivo a una serie de tiempo es necesario seguir una metodología específica (usualmente se utiliza la metodología de Box y Jenkins (1976)). En particular, la identificación del modelo a ajustar involucra la utilización de herramientas gráficas como la función de autocorrelación, FAC, y la función de autocorrelación parcial, FACP⁷. La Figura 5.7 muestra la FAC, denotada por η_k , y la FACP, denotada por η_{kk} , para las anomalías estandarizadas de la temperatura de la atmósfera y la capa de mezcla oceánica.

La FAC para ambas temperaturas decae aproximadamente de forma geométrica. Sin embargo, para la atmósfera ésta decae a 0.3 en ~ 2 meses, mientras que para el océano el valor

⁶Un espectro rojo o enrojecido es aquel que presenta mayor densidad en frecuencias bajas que en frecuencias altas.

⁷La función de autocorrelación parcial mide la correlación entre una observación k períodos atrás y la observación actual después de controlar las observaciones en rezagos intermedios, es decir, la correlación entre y_t y y_{t-k} . En el caso de un proceso $AR(p)$ la función de autocorrelación parcial tendrá conexiones directas entre y_t y y_{t-s} para $s \leq p$, pero no conexiones directas para $s > p$. Por ejemplo, para un proceso $AR(1)$ la función de autocorrelación parcial η_{kk} será cero para $k \geq 2$.

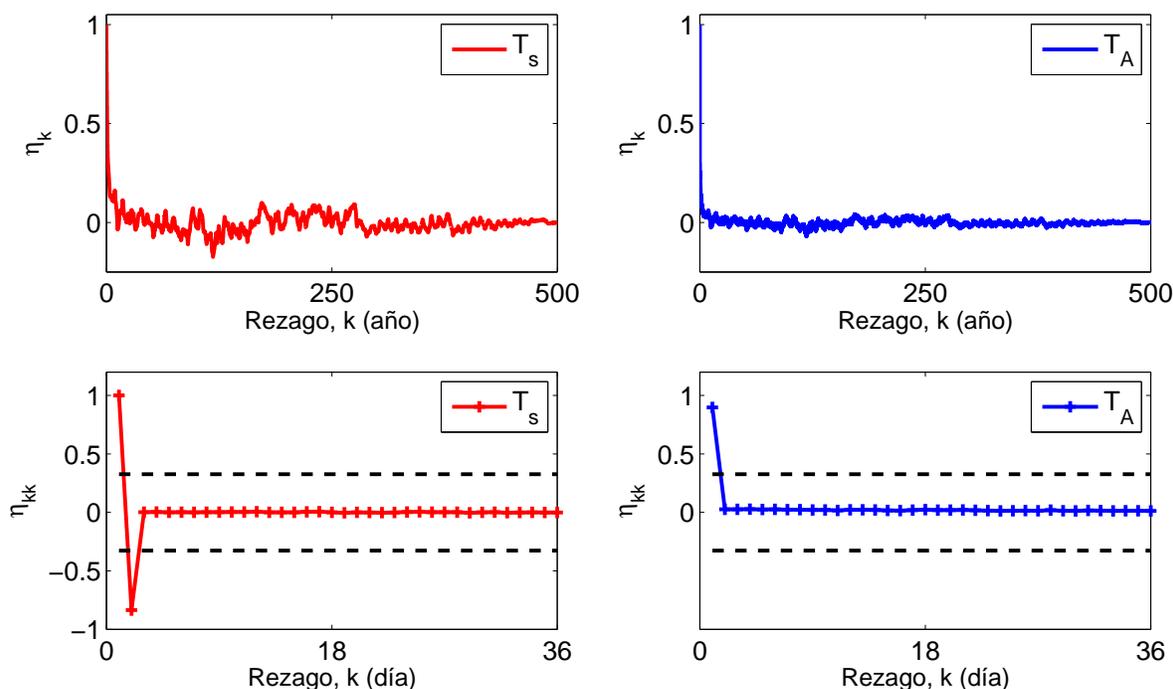


Figura 5.7: Función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial para las anomalías estandarizadas de T_s y T_A . Para los coeficientes de la FACP se incluye una región de no rechazo al 95% de probabilidad dada por $\pm 1.96/\sqrt{N_T}$, donde N_T es el número de datos de la muestra (líneas negras punteadas). Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

de 0.3 se alcanza en aproximadamente 2 años. Esto demuestra la mayor persistencia de las temperaturas de la capa de mezcla oceánica sobre las temperaturas atmosféricas (la función de autocorrelación, o correlación serial, también es útil para medir la persistencia de cualquier serie de tiempo, sólo que en el dominio temporal). Las oscilaciones más pronunciadas en la FAC de la temperatura de la capa de mezcla oceánica son debidas a la mayor persistencia de ésta respecto a la atmósfera. Por otro lado, las FACP indican que para la temperatura de la capa de mezcla oceánica sólo los dos primeros términos son significativos, mientras que para la temperatura de la atmósfera únicamente el primer término es significativo⁸. El análisis de la FAC y la FACP para cada una de las series de temperatura sugiere que para la capa de mezcla oceánica se puede ajustar un proceso $AR(2)$ y para la atmósfera un proceso $AR(1)$.

En los Cuadros 5.1 y 5.2 están indicados los valores de los parámetros estimados de los procesos autorregresivos para cada una de las series de anomalías estandarizadas de temperatura⁹. En cada cuadro se muestra para cada coeficiente: su valor estimado, su error estándar, el valor del estadístico t (el cual es útil para probar la hipótesis nula de que los

⁸Este resultado se obtuvo al probar la hipótesis conjunta de que todos los coeficientes de autocorrelación parcial η_{kk} ($k \geq 3$ para el océano y $k \geq 2$ para la atmósfera) son simultáneamente igual a cero usando el estadístico Ljung-Box al 95% de probabilidad (Brooks (2008: Sección 5.2)).

⁹A fin de obtener el error estándar para los coeficientes estimados y las probabilidades de los estadísticos

coeficientes estimados no son significativos) y su probabilidad. De acuerdo con este estadístico todos los parámetros del modelo autorregresivo son significativos a más del 95 % de confianza, a excepción de las medias muestrales¹⁰. El parámetro σ corresponde a la desviación estándar de ruido blanco. Los estadísticos R^2 y R^2 ajustada miden la fracción de varianza de la serie explicada por la componente sistemática¹¹. El estadístico F , utilizado para probar la significancia de la estimación realizada (valor de los estadísticos R^2 y R^2 ajustada), establece que cada una de las estimaciones es significativa a más del 95 % de confianza. Finalmente, al final de cada cuadro se muestran los valores calculados de las raíces del proceso autorregresivo respectivo.

Variable	Coefficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$	-0.000918	0.066065	-0.013897	0.9889
ϕ_1	1.836650	0.001281	1434.083000	0.0000
ϕ_2	-0.837060	0.001281	-653.588200	0.0000
σ	0.011552			
R^2	0.999867			
R^2 ajustada	0.999867			
Estadístico F	6.84E+08			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	1.02, 1.19			

Cuadro 5.1: Estimación del proceso autorregresivo $AR(2)$ para T_s . Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

El objetivo de ajustar procesos autorregresivos a las series de temperatura global es construir espectros nulos (o de referencia) que puedan ser utilizados para compararlos con los espectros reales de las series. La finalidad es hacer una descripción del comportamiento de la temperatura de la Tierra basada en el resultado de Hasselmann (1976), por tal motivo no es relevante que las estimaciones realizadas satisfagan o no las pruebas de diagnóstico residual¹² (que de hecho no lo hacen). Estimaciones de las series de temperatura global usando modelos ARMA más complejos sí satisfacen todas las pruebas de diagnóstico residual, pero éstas son bastante difíciles de interpretar desde un punto de vista físico.

asociados a ellos, las estimaciones de los procesos autorregresivos fueron hechas utilizando el software EViews 6.0.

¹⁰Esto era de esperar ya que las series consideradas son anomalías estandarizadas de temperatura. Es importante, sin embargo, incluir siempre esta constante, ya que su ausencia podría afectar el desarrollo de los demás parámetros.

¹¹El estadístico R^2 -ajustada considera una penalización en función del número de variables explicativas.

¹²El objetivo del diagnóstico residual es determinar si el modelo especificado es adecuado. Se checan los residuales para verificar que éstos efectivamente se comporten como ruido blanco gaussiano, es decir, se debe cumplir que los residuales no contengan información sistemática acerca del proceso original al cual se le ajustó un modelo de series de tiempo.

Variable	Coefficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1)$	-0.000034	0.010071	-0.003410	0.9973
ϕ_1	0.897493	0.001032	869.339500	0.0000
σ	0.441031			
R^2	0.805492			
R^2 ajustada	0.805491			
Estadístico F	755751.2			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	1.12			

Cuadro 5.2: Estimación del proceso autorregresivo $AR(1)$ para T_A . Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

La estacionariedad y comportamiento cuasi-oscilatorio de un proceso autorregresivo depende únicamente de sus coeficientes ϕ_k (von Storch y Zwiers, 1999: Sección 10.3). En este caso ambos procesos autorregresivos estimados son estacionarios y ninguno de ellos presenta pseudo-periodicidades. Si el comportamiento no cuasi-oscilatorio está o no presente en las series muestrales será examinado al graficar sus espectros.

En el panel superior de la Figura 5.8 se muestra el espectro de Fourier crudo de las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A . El eje horizontal representa las frecuencias armónicas, las cuales van en múltiplos enteros positivos de la frecuencia fundamental, $f_1 = 1/(182500 \text{ días}) = 2 \times 10^{-3}/\text{años}$, hasta la frecuencia de Nyquist, $f_{N/2} = 1/(2 \text{ días}) = 182.5/\text{años}$. El eje vertical representa la amplitud cuadrada de cada uno de los armónicos. Los espectros teóricos de los modelos autorregresivos estimados también están representados en la misma figura por las líneas negras sólidas. Dichos espectros se utilizaron como los espectros nulos para probar la significancia estadística de las amplitudes cuadradas más grandes de los espectros muestrales. Las líneas negras discontinuas denotan el intervalo de confianza al 95 % de probabilidad.

No obstante se sabe que la estimación del espectro muestral crudo representa el espectro real (poblacional) bastante mal, debido a que la distribución de muestreo para cada amplitud cuadrada individual es bastante ancha, lo cual lleva a que el espectro calculado de esta manera sea bastante errático. A fin de obtener un espectro muestral más representativo y con una distribución de las amplitudes cuadradas menos variable se utilizó una técnica de suavizado, la cual consistió en promediar 25 espectros replicados sin traslape (Wilks, 2006: Sección 8.5). El resultado fue un espectro más suave y más representativo, pero con una reducción en la resolución de la frecuencia (panel inferior de la Figura 5.8). Además, el intervalo de significancia del espectro suavizado contra el espectro nulo se redujo considerablemente, debido a un incremento en los grados de libertad en la distribución de muestreo para las amplitudes cuadradas promediadas (los cuales pasaron de 2 para el espectro crudo a 50 para el espectro suavizado).

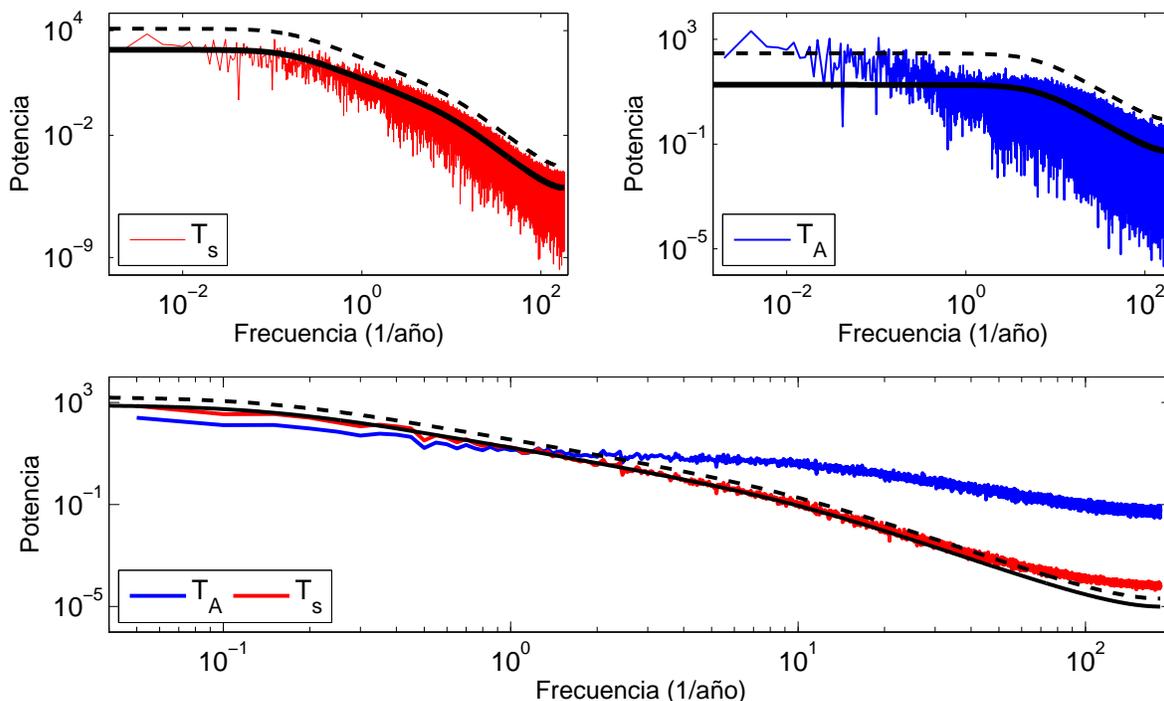


Figura 5.8: *Panel superior.* Espectro de Fourier crudo de las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A . Igualmente se incluyen los espectros teóricos de los procesos autorregresivos estimados para cada temperatura (líneas negras sólidas) y los intervalos de confianza al 95 % de probabilidad utilizados al probar la significancia estadística de las amplitudes cuadradas más grandes del espectro muestral (líneas negras discontinuas). *Panel inferior.* Espectros de Fourier suavizados (con 25 espectros replicados) de las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A . Sólo se incluye el espectro teórico del proceso autorregresivo estimado para T_s y su respectivo intervalo de confianza al 95 % de probabilidad. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

¿Cómo se interpretan estos espectros?, ¿porqué los espectros muestrales no ajustan a los espectros teóricos estimados?

§

§

Para explicar el comportamiento de dichos espectros muestrales vamos a revisar un ejemplo bastante ilustrativo que nos permita responder a las preguntas anteriores.

Considere los siguientes modelos altamente simplificados del sistema océano-atmósfera: en el primer modelo la temperatura de la atmósfera evoluciona debido a un flujo de calor sensible y a un forzamiento radiativo aditivo aleatorio βdW , mientras que la temperatura de la capa de mezcla oceánica evoluciona sólo por el flujo de calor sensible (referido como

modelo HR-TS),

$$dT_A = a_1 + c(T_s - T_A)dt + \beta dW, \quad (5.2)$$

$$dT_s = a_2 - c(T_s - T_A)dt. \quad (5.3)$$

El segundo modelo (modelo HR) es idéntico al anterior, sólo que en este caso la temperatura de la capa de mezcla oceánica es estacionaria,

$$dT_A = a_1 + c(T_s - T_A)dt + \beta dW, \quad (5.4)$$

$$dT_s = 0. \quad (5.5)$$

Los coeficientes a_1 , a_2 y β para ambos modelos son constantes arbitrarias. La discretización de T_A para ambos modelos es la siguiente:

$$\text{Modelo HR-TS: } T_A(t+1) = \mu_1 + \phi_1 T_A(t) + \beta_1 dW(t) + b_1 T_s(t), \quad (5.6)$$

$$\text{Modelo HR: } T_A(t+1) = \mu_2 + \phi_1 T_A(t) + \beta_1 dW(t), \quad (5.7)$$

donde los coeficientes μ_1 , μ_2 , ϕ_1 , β_1 y b_1 son constantes.

Las series de anomalías estandarizadas de T_A para ambos modelos se muestran en la Figura 5.9. A partir del análisis de esta figura y de las ecuaciones discretizadas (5.6) y (5.7) se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- La temperatura T_A del modelo HR-TS (línea azul en la Figura 5.9) corresponde a un proceso $AR(1)$ forzado con un término de acoplamiento, es decir, la evolución de T_A está acoplada a la evolución de T_s .
- La temperatura T_A del modelo HR (línea magenta en la Figura 5.9) corresponde a un proceso $AR(1)$, esto es, su evolución está determinada únicamente por sus valores rezagados, los cuales no dependen de T_s .
- La variabilidad de largo plazo (variabilidad de baja frecuencia) es similar en ambos modelos, lo que implica que la densidad espectral de T_A para ambos modelos será similar en frecuencias bajas.
- Debido al comportamiento de corto plazo más errático de T_A en el modelo HR-TS, su espectro tendrá mayor densidad en frecuencias altas que para el modelo HR (el modelo HR-TS produce una mayor variabilidad de alta frecuencia en T_A que el modelo HR).

Los parámetros de los procesos autorregresivos estimados para las anomalías estandarizadas de T_A en ambos modelos se presentan en los Cuadros 5.3 y 5.4. El resultado más notable de estas estimaciones corresponde a los valores de los parámetros autorregresivos ϕ_1 y ϕ_2 , y de las desviaciones estándar de ruido blanco, σ . Para ambos modelos los valores de los parámetros autorregresivos se traducen en que la persistencia de largo plazo de ambas series es similar. Sin embargo la desviación estándar de ruido blanco es muy distinta en ambos

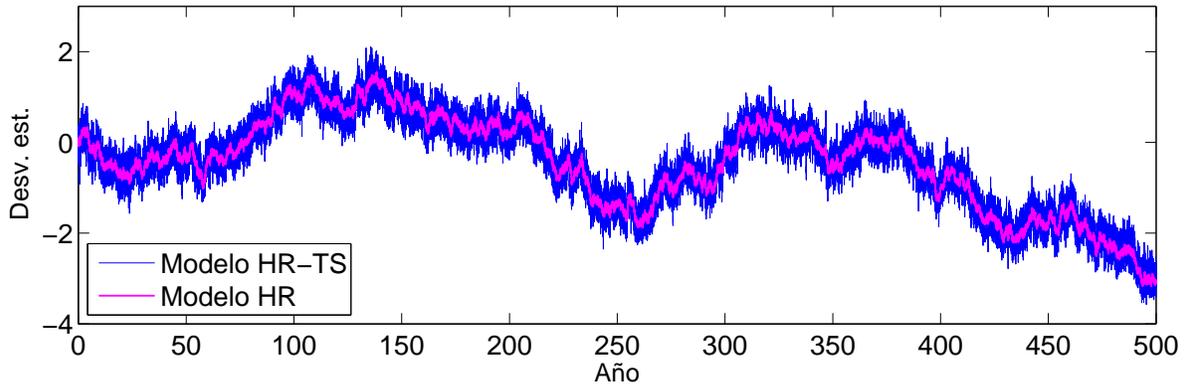


Figura 5.9: Series de anomalías estandarizadas de T_A para los modelos HR-TS (línea azul) y HR (línea magenta).

modelos, el valor correspondiente al modelo HR-TS es de un orden de magnitud más grande que para el modelo HR, lo cual explica el hecho de la mayor variabilidad de corto plazo en T_A para el modelo HR-TS y su mayor densidad espectral en frecuencias altas (a medida que se incrementa σ el espectro se va aplanando). Esto es, la incertidumbre σ en T_A para el modelo HR-TS no explicada por la correlación serial es mayor, y en términos de pronóstico, la varianza en la predicción de T_A será mayor para el modelo HR-TS que para el modelo HR.

Variable	Coefficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$	-0.000255	0.005892	-0.043267	0.965500
ϕ_1	1.837108	0.001280	1435.614000	0.000000
ϕ_2	-0.837358	0.001280	-654.353300	0.000000
σ	0.999919			
R^2	0.999919			
R^2 ajustada	0.999919			
Estadístico F	1.12E+09			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	1.00, 0.84			

Cuadro 5.3: Estimación del proceso autorregresivo para las anomalías estandarizadas de T_A correspondientes al modelo HR-TS.

Finalmente en la Figura 5.10 se muestran los espectros suavizados (con 25 espectros replicados) de las anomalías estandarizadas de T_A para ambos modelos. El modelo HR produce un espectro más enrojecido que el modelo HR-TS (el contraste de densidad espectral entre frecuencias bajas y altas es mayor para el modelo HR). El término de acoplamiento en el modelo HR-TS (ecuación (5.6)) produce retroalimentaciones entre T_A y T_s , las cuales llevan

Variable	Coefficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1)$	0.000003	0.001523	0.002104	0.998300
ϕ_1	0.913093	0.000954	956.638500	0.000000
σ	0.999919			
R^2	0.833739			
R^2 ajustada	0.833738			
Estadístico F	915157.3			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	0.91			

Cuadro 5.4: Estimación del proceso autorregresivo para las anomalías estandarizadas de T_A correspondientes al modelo HR.

a que el espectro de T_A para este modelo difiera del proceso autorregresivo estimado en las frecuencias bajas (líneas de color verde). El comportamiento de T_A para el modelo HR-TS en frecuencias bajas está determinado por los términos autorregresivos o de memoria (típicamente ϕ_1 para un proceso $AR(1)$ simple), sin embargo dichos términos de memoria están modificados respecto a un proceso $AR(1)$ simple (como en el modelo HR) por la presencia del término de acoplamiento.

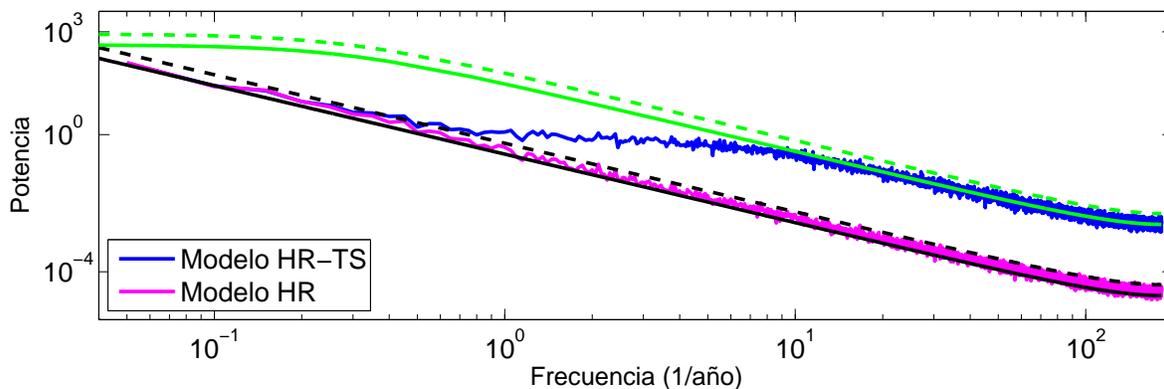


Figura 5.10: Espectros suavizados de las series de anomalías estandarizadas de T_A para los modelos HR-TS (línea azul) y HR (línea magenta). Igualmente se muestran los espectros teóricos de los procesos autorregresivos estimados para cada una de ellas con líneas negra y verde sólidas, respectivamente. Los intervalos de confianza al 95 % de probabilidad utilizados para probar la significancia estadística de las amplitudes cuadradas más grandes del espectro muestral se muestran con líneas punteadas.

Los resultados obtenidos con este simple pero ilustrativo ejemplo ofrecen una respuesta clara a las interrogantes planteadas anteriormente: ¿Cómo se interpretan los espectros muestrales del modelo climático estocástico? y ¿porqué dichos espectros muestrales no ajustan a los espectros teóricos estimados?

§

§

Tanto el espectro (crudo y suavizado) de las anomalías estandarizadas de T_s y T_A exhiben mayor densidad en frecuencias bajas y menor densidad en frecuencias altas, características espectrales típicas de los procesos conocidos como ruido rojo (panel superior de la Figura 5.8). Los intervalos de confianza indican que al 95 % de probabilidad la hipótesis nula de que la persistencia de la temperatura del océano pueda ser descrita como un proceso $AR(2)$ no puede ser rechazada¹³. En cuanto a la persistencia de la temperatura de la atmósfera se tiene que el proceso $AR(1)$ estimado se desempeña bien al describir la variabilidad de alta frecuencia, pero no es un buen candidato para describir la variabilidad de baja frecuencia (la correspondiente a períodos de tiempo de entre 3 y 500 años). Sin embargo hay que recordar que el sistema océano-atmósfera está acoplado y que los procesos climáticos están determinados mayormente por el océano. Entonces el análisis espectral debe tomar como punto de partida el espectro de la temperatura oceánica y en base a éste describir el espectro de la temperatura atmosférica. El panel inferior de la Figura 5.8 hace posible esta descripción. Esta figura muestra que los espectros de T_s y T_A son similares en frecuencias bajas, lo cual indica que la atmósfera “sigue” al océano en períodos largos, pero es inherentemente más variable que el océano en períodos cortos, lo cual está demostrado por la mayor densidad espectral para la atmósfera en frecuencias altas, y también por su mayor desviación estándar de ruido blanco (Cuadros 5.1 y 5.2). El hecho de que la persistencia de la atmósfera no está bien representada por un proceso $AR(1)$ es debida a los términos de acoplamiento entre T_A y T_s , los cuales originan retroalimentaciones más complejas entre ambas que no corresponden a las de un proceso $AR(1)$ simple. La complejidad de dichos mecanismos de retroalimentación puede llevar a modelos ARMA de orden superior¹⁴ (Mudelsee, 2010: Sección 2.51).

En conclusión se tiene que los resultados de este experimento numérico son congruentes con el resultado de Hasselmann (1976), de acuerdo a la cual la persistencia climática puede ser vista, a primer orden de aproximación, como un proceso puramente aleatorio (típicamente un proceso $AR(1)$). Esto es, el sistema climático integra las variaciones aleatorias de corto plazo y produce una respuesta en el largo plazo (variabilidad de baja frecuencia).

Este mismo procedimiento de análisis espectral se realizó para los tres casos restantes del modelo estocástico, llevando a conclusiones similares acerca del comportamiento general del espectro de las series de anomalías estandarizadas de la temperatura global. Sin embargo, las diferencias y descripción puntuales de cada uno de los tres casos restantes se detalla en las secciones respectivas.

¹³La naturaleza de los mecanismos de retroalimentación que intervienen en el desarrollo de T_s es tal que provoca que su comportamiento pueda ser representado como un proceso $AR(2)$ (por medio de una ecuación diferencial estocástica de segundo grado).

¹⁴El identificar el número, estructura y grado de impacto de los mecanismos de retroalimentación dentro del sistema climático es un tema de investigación actual entre la comunidad científica.

Flujos de calor en el sistema océano-atmósfera

La evolución de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera se muestra en la Figura 5.11. Los valores de los flujos de calor se indican en porcentaje de la insolación media global I . Todos los flujos de calor, a excepción de Q_s y Q_A , los cuales son fijos, oscilan alrededor de sus valores de equilibrio determinista y se distribuyen de manera normal. El flujo de calor sensible es el que presenta mayores oscilaciones, lo cual es debido a que éste depende directamente de la diferencia entre T_s y T_A .

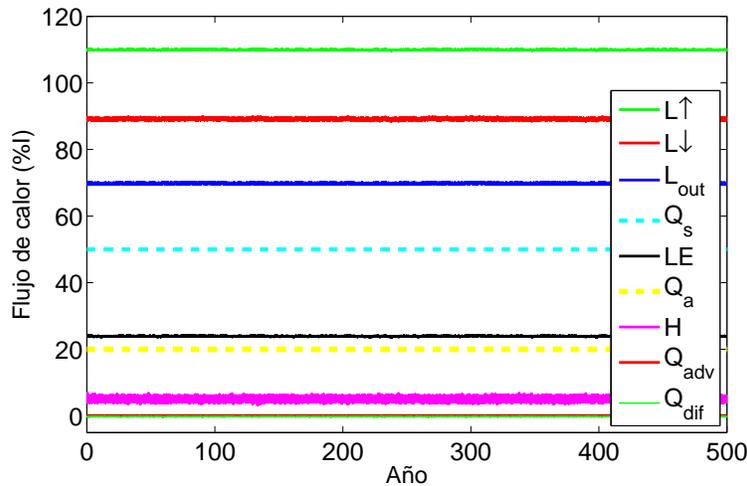


Figura 5.11: Evolución de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera en función de la insolación media global I . Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

Otro resultado interesante es que la introducción de un forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera incorpora variabilidad al flujo de radiación de onda larga que se emite hacia el espacio exterior. La importancia de este resultado radica en el hecho de que una correcta simulación de la variabilidad exhibida por los flujos de calor en el sistema climático (y en particular de L_{out}) es importante para describirlo adecuadamente (Wielicki *et al.*, 2002).

La Figura 5.12 muestra las anomalías de L_{out} . Las oscilaciones de más de 6 W/m^2 en este flujo coinciden, en amplitud, con lo reportado por Wielicki *et al.* (2002) (Figura 3.3). La estructura y simplicidad de la formulación estocástica de nuestro modelo climático, en particular del forzamiento estocástico empleado, no permiten reproducir fielmente las variaciones en el flujo radiativo de onda larga reportadas por Wielicki *et al.* (2002)¹⁵. Sin embargo es importante tener en cuenta que la construcción de modelos más complejos con la física adecuada se puede beneficiar enormemente de la aplicación de las técnicas de modelación estocástica.

¹⁵De hecho nuestro modelo climático estocástico no tendría por qué hacerlo. Nuestro modelo climático no contiene la física necesaria para reproducir la variabilidad observada del flujo de radiación de onda larga que se emite hacia el espacio exterior.

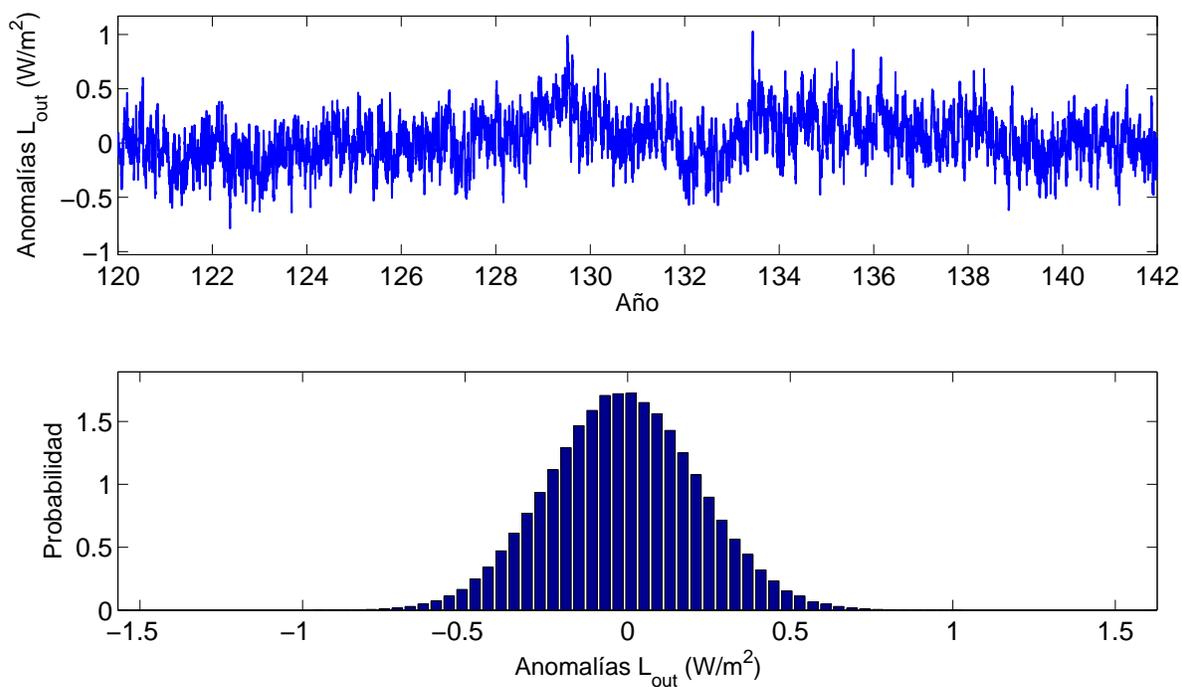


Figura 5.12: Anomalías del flujo radiativo de onda larga emitido hacia el espacio exterior. El panel superior muestra un extracto de la serie de anomalías para un período arbitrario de 22 años. El panel inferior muestra la distribución de probabilidad de dichas anomalías (la cual es normal) para los 500 años de simulación. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera.

5.2. Forzamiento radiativo aleatorio en el océano

Para este caso se utilizó un forzamiento aleatorio $Q_{est} = R_s \beta_s \Delta W / \Delta t$ (ecuación (4.10)) añadido a la energía incidente en la capa de mezcla oceánica. Las consideraciones y resultados obtenidos para este forzamiento son las mismas que en el caso anterior (Sección 5.1). La Figura 5.13 resume la descripción de este flujo.

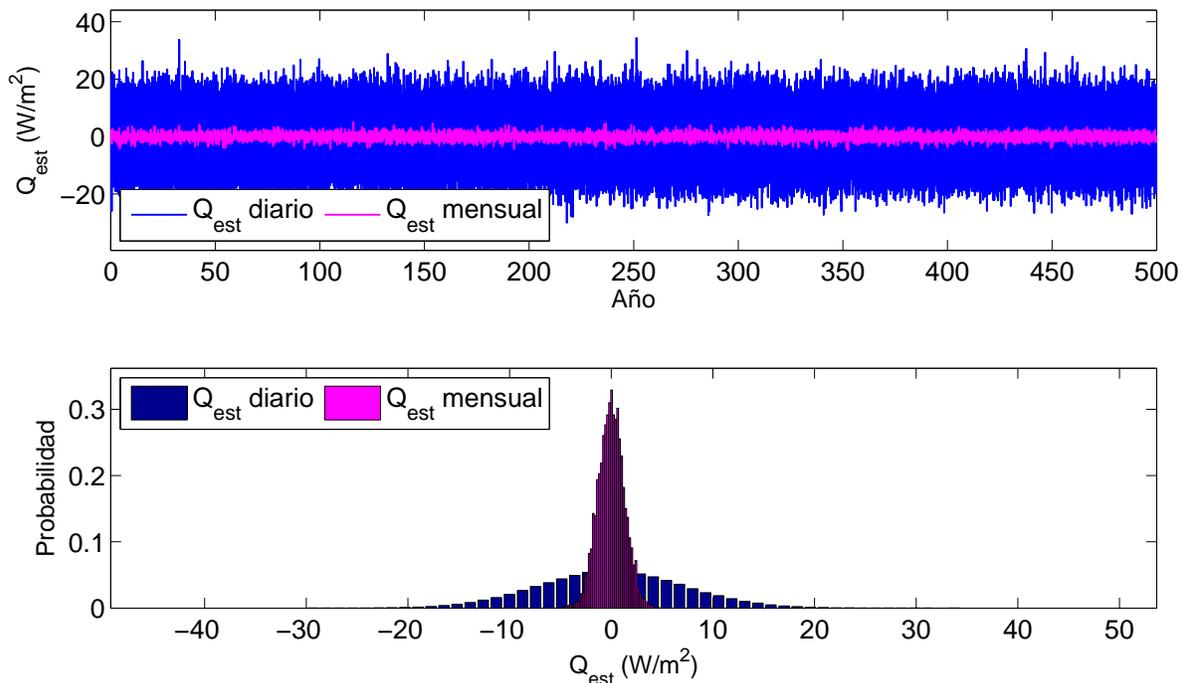


Figura 5.13: Flujo radiativo aleatorio de energía incidente en la capa de mezcla oceánica. El panel superior contiene la serie temporal de este forzamiento (en color azul para los valores diarios y en color magenta para los promedios mensuales). En el panel inferior se muestra la distribución de probabilidad de ambas series, las cuales corresponden a una distribución normal. El tiempo de simulación es de 500 años.

Análisis en tiempo

Los efectos provocados por este forzamiento¹⁶ sobre las temperaturas T_s y T_A son casi idénticos tanto en estructura como en intensidad. Las variaciones máximas diarias en la temperatura atmosférica T_A y en la capa de mezcla oceánica T_s son de aproximadamente 0.50°C y 0.44°C , respectivamente, mientras que sus variaciones máximas mensuales son de aproximadamente 0.48°C y 0.40°C , respectivamente (Figura 5.14). Ambas series de temperatura son homogéneas, se distribuyen de manera normal y poseen una persistencia muy similar (principalmente en el largo plazo). Sin embargo la persistencia en el corto plazo de T_s es menor

¹⁶Recuerde que se toma el forzamiento diario (Sección 4.2).

que la de T_A , lo cual se puede apreciar al graficar sus series de anomalías estandarizadas (Figuras 5.15 y 5.16). En la Figura 5.15 se ve que ambas series empatan casi exactamente, pero las variaciones de corto plazo de T_s son mayores y de carácter más errático que las de T_A , esto explica el hecho de que la serie para T_A no “oculte” completamente la serie para T_s . En comparación al caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera, en este caso se producen variaciones de menor amplitud (menores a 4 desviaciones estándar) y de mayor persistencia (por lo menos para T_A).

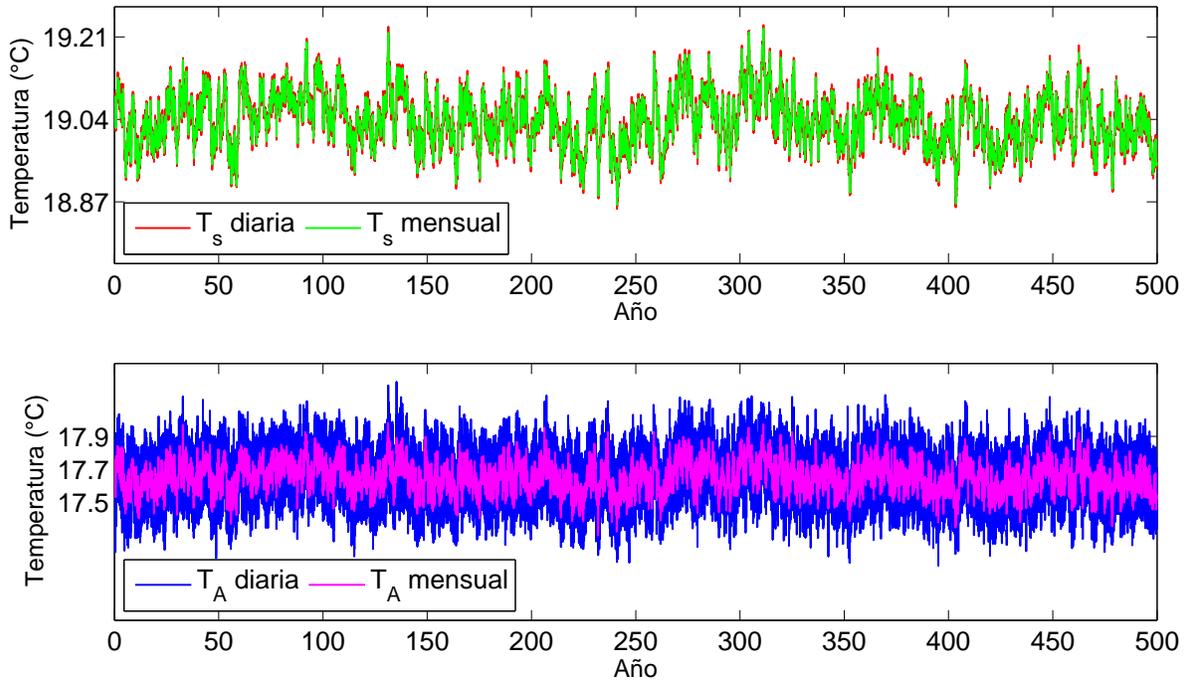


Figura 5.14: Evolución de las temperaturas de la capa de mezcla oceánica (T_s) y de la atmósfera (T_A). Se incluyen las series diarias y mensuales para ambas temperaturas. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

La Figura 5.16(a) muestra la correlación entre las anomalías estandarizadas de T_s y T_A , la cual tiene un valor de $r_P = 0.9896$. En este caso se aprecia más fuertemente la correspondencia entre atmósfera y océano, es decir, la evidente dependencia de la temperatura de la atmósfera en función de la temperatura del océano. A pesar de que el presente caso refleja muy bien dichas características del sistema climático, éste muestra una peculiaridad: ¡La temperatura de la capa de mezcla oceánica se vuelve más variable que la temperatura de la atmósfera en períodos cortos!, véase la Figura 5.16(b). Sin embargo esto es sólo consecuencia del hecho matemático de que el forzamiento estocástico fue introducido directamente en el flujo de energía asociado a la capa de mezcla oceánica, lo cual ocasionó que T_s tuviera variaciones aleatorias en cada paso de tiempo (1 día en el modelo numérico), variaciones que fueron integradas produciendo una respuesta en el largo plazo.

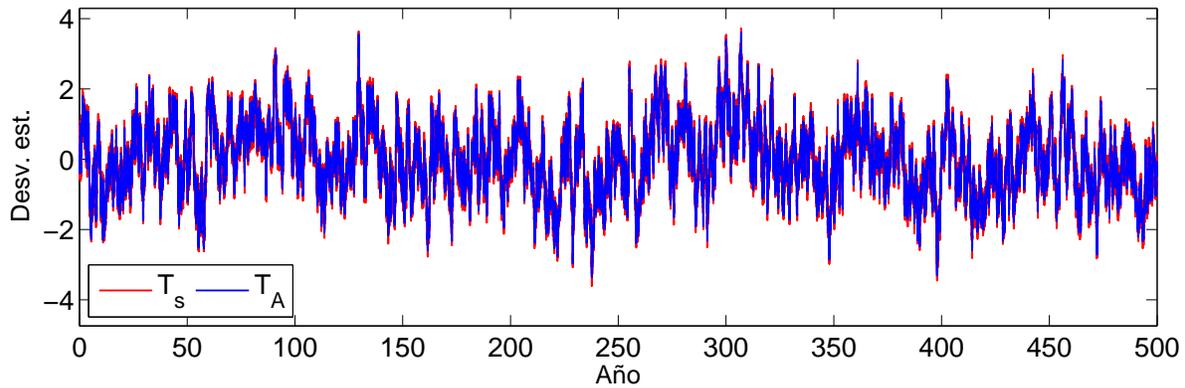


Figura 5.15: Anomalías estandarizadas de las temperaturas de la capa de mezcla oceánica (T_s) y de la atmósfera (T_A). Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

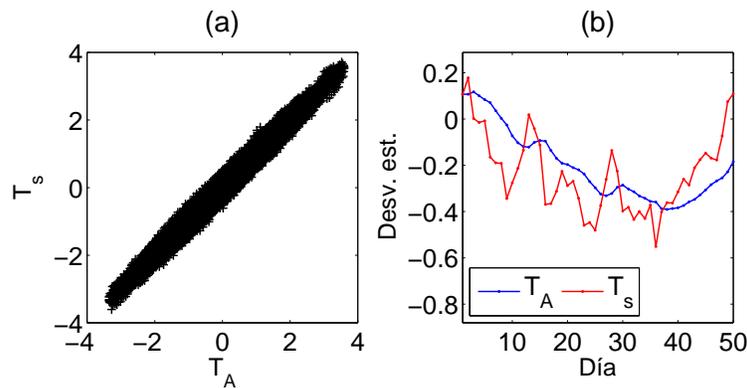


Figura 5.16: (a) Correlación entre las anomalías estandarizadas de T_s y T_A y (b) Anomalías estandarizadas de las temperaturas de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica para los primeros 50 días de simulación. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

Los histogramas normalizados para las temperaturas de la capa de mezcla oceánica y de la atmósfera se muestran en la Figura 5.17.

La Figura 5.18 presenta la función de distribución de probabilidad estacionaria para T_s , la cual se obtuvo al resolver la ecuación estacionaria de Fokker-Planck. El desarrollo de T_s y de su distribución de probabilidad están determinados por el potencial asociado a la ecuación diferencial estocástica que gobierna a la temperatura de la capa de mezcla oceánica. La simetría de dicho potencial dentro del dominio considerado provoca la simetría de la función de distribución de probabilidad.

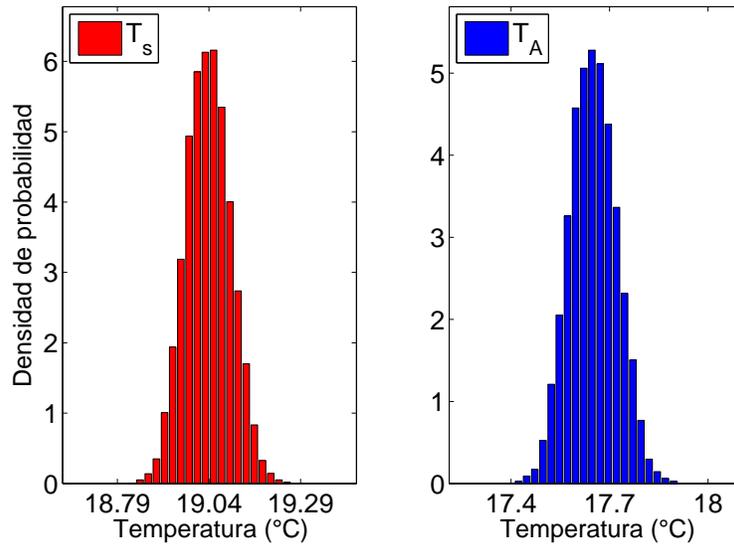


Figura 5.17: Histogramas normalizados para las temperaturas de la capa de mezcla oceánica (T_s) y de la atmósfera (T_A). Ambos histogramas se distribuyen normalmente alrededor de los valores de equilibrio determinista respectivos. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

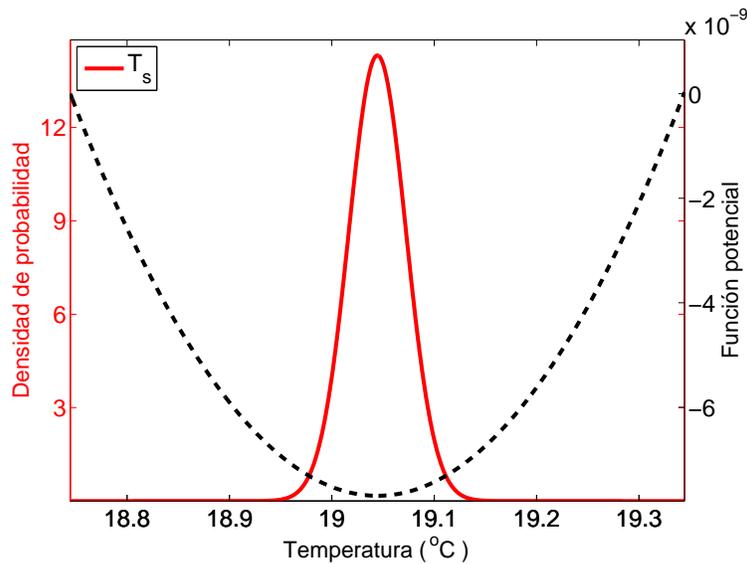


Figura 5.18: Función de distribución de probabilidad estacionaria para la temperatura de la capa de mezcla (T_s) y función potencial asociada. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

Análisis en frecuencia

Siguiendo la misma metodología de análisis espectral planteada en la subsección anterior, la cual se enfoca en probar si los procesos autorregresivos $AR(1)$ son buenos candidatos para describir la persistencia de las temperaturas globales (océano y atmósfera), se ajustaron procesos autorregresivos a las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A en función del comportamiento de sus funciones de autocorrelación y funciones de autocorrelación parcial (Figura 5.19).

Esencialmente la FAC para ambas temperaturas tiene la misma estructura: decaen aproximadamente en forma geométrica y tienden a cero conforme se incrementan los rezagos. Sin embargo difieren en sus FACP, ya que ésta indica que para la temperatura de la capa de mezcla oceánica se puede ajustar un proceso $AR(1)$, mientras que para la temperatura de la atmósfera el mejor candidato es un proceso $AR(2)$ ¹⁷.

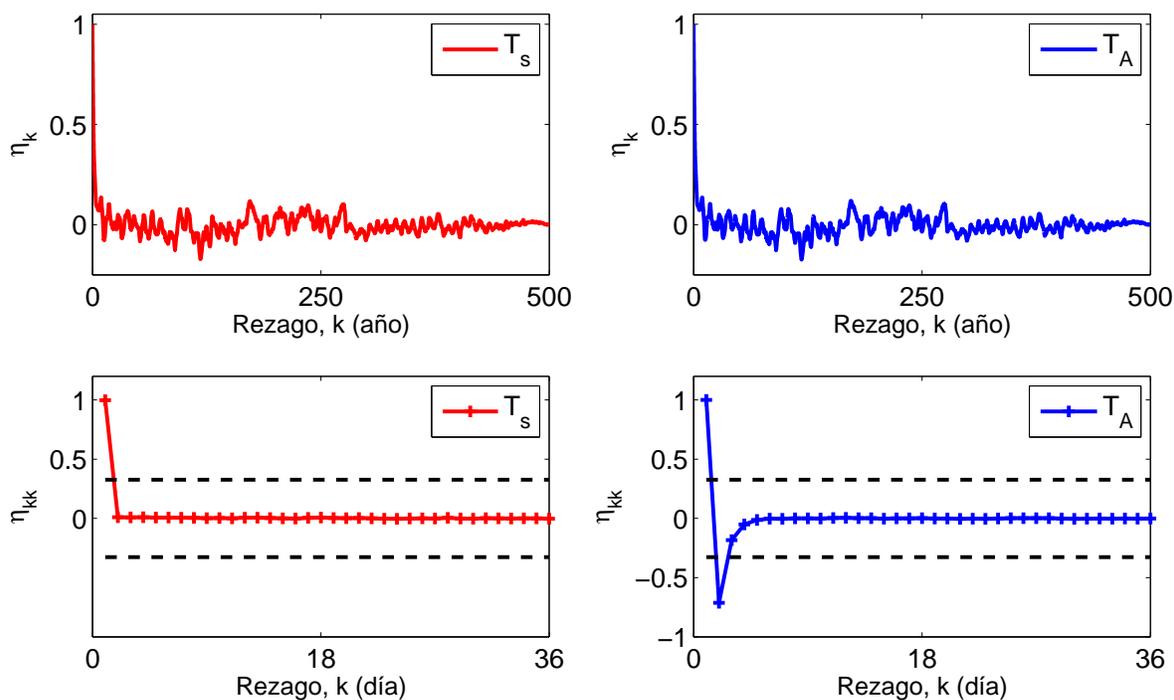


Figura 5.19: Función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial para las anomalías estandarizadas de T_s y T_A . Para los coeficientes de la FACP se incluye una región de no rechazo al 95 % de probabilidad dada por $\pm 1.96/\sqrt{N_T}$ (líneas negras punteadas). Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

¹⁷Al igual que en el caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera, este resultado se obtuvo al probar la hipótesis conjunta de que todos los coeficientes de autocorrelación parcial η_{kk} ($k \geq 2$ para el océano y $k \geq 3$ para la atmósfera) son simultáneamente igual a cero usando el estadístico Ljung-Box al 95 % de probabilidad (Brooks (2008: Sección 5.2)).

En los Cuadros 5.5 y 5.6 están indicados los parámetros de los procesos autorregresivos estimados para las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A , respectivamente¹⁸. Ambos procesos autorregresivos estimados son estacionarios y no exhiben un desarrollo cuasi-periódico, sin embargo para completar el análisis en frecuencias de estas series es necesario examinar sus espectros.

Variable	Coficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1)$	-0.000792	0.059305	-0.013346	0.9894
ϕ_1	0.996889	0.000185	5402.584000	0.0000
σ	0.078827			
R^2	0.993786			
R^2 ajustada	0.993786			
Estadístico F	29187914			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	1.02			

Cuadro 5.5: Estimación del proceso autorregresivo $AR(1)$ para T_s . Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

Variable	Coficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1 - \phi_2)$	-0.000918	0.066067	-0.013895	0.9889
ϕ_1	1.836649	0.001281	1434.079000	0.0000
ϕ_2	-0.837059	0.001281	-653.585600	0.0000
σ	0.011552			
R^2	0.999867			
R^2 ajustada	0.999867			
Estadístico F	6.84E+08			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	1.02, 1.19			

Cuadro 5.6: Estimación del proceso autorregresivo $AR(2)$ para T_A . Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

El espectro de Fourier crudo y suavizado (con 25 espectros replicados) de las series de anomalías estandarizadas de temperatura global, T_s y T_A , se muestra en la Figura 5.20. La nomenclatura es la misma que la utilizada anteriormente. El análisis de estos espectros revela que al 95 % de probabilidad la variabilidad presente en la temperatura de la capa de mezcla oceánica y en la atmósfera puede ser bien descrita en términos de procesos puramente aleatorios: un proceso $AR(1)$ para el océano y un proceso $AR(2)$ para la atmósfera. El

¹⁸La nomenclatura utilizada en estos cuadros es la misma que para el caso anterior.

fuerte acoplamiento entre el océano y la atmósfera queda demostrado por la alta similitud de sus espectros (panel inferior de la Figura 5.20). El hecho de que ellos difieran en las frecuencias altas es debido a la estructura del forzamiento estocástico considerado (explicado anteriormente), lo cual provoca una mayor variabilidad de las temperaturas de la capa de mezcla oceánica en dichas frecuencias, característica confirmada por el valor más alto de la desviación estándar σ de ruido blanco del proceso autorregresivo estimado para T_s (Cuadro 5.5).

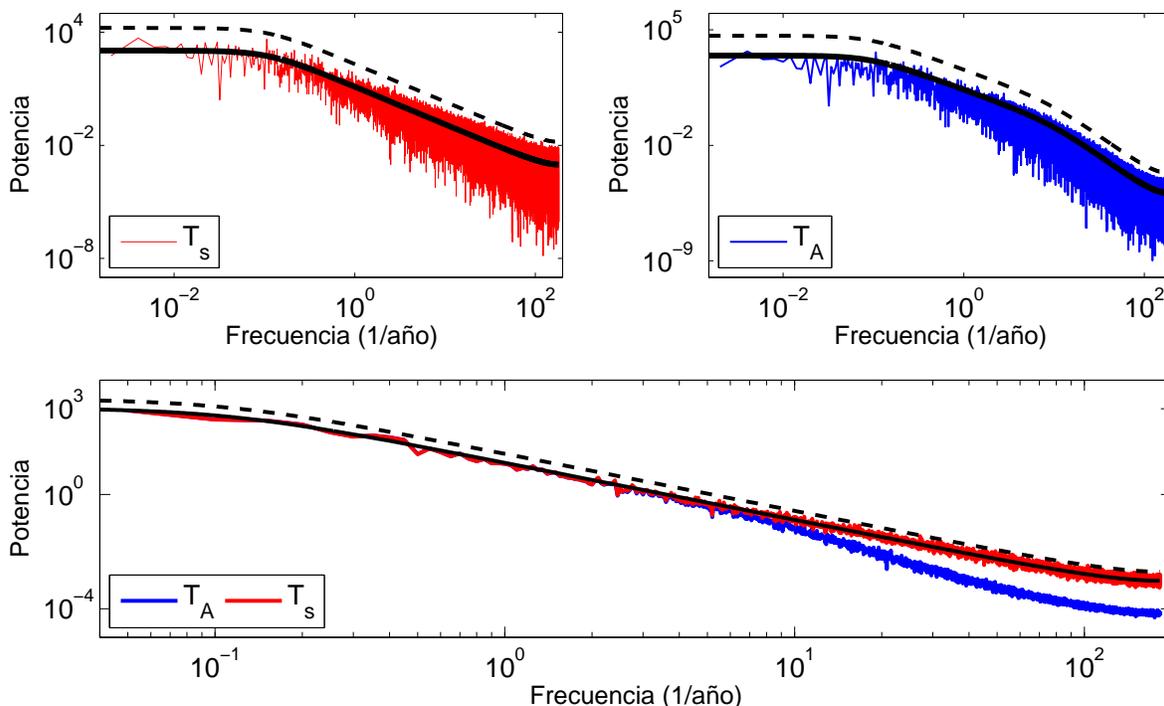


Figura 5.20: *Panel superior.* Espectro de Fourier crudo de las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A . En líneas de color se indica el espectro muestral, en líneas negras sólidas el espectro del proceso autorregresivo estimado, y en líneas negras discontinuas el intervalo de confianza al 95% de probabilidad. *Panel inferior.* Espectros de Fourier suavizados (con 25 espectros replicados) de las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A . Sólo se incluye el espectro teórico del proceso autorregresivo estimado para T_s y su respectivo intervalo de confianza al 95% de probabilidad. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

En este caso la aproximación a primer orden de Hasselmann (1976) para describir la persistencia climática se verifica satisfactoriamente.

Flujos de calor en el sistema océano-atmósfera

La Figura 5.21 despliega la evolución de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera, los cuales exhiben pequeñas variaciones respecto a sus valores en el equilibrio determinista. La fuerte correlación entre T_s y T_A provoca que las variaciones en todos los flujos de calor

(a excepción de Q_s y Q_A , los cuales son fijos) sean menores que las producidas en el caso anterior (caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera).

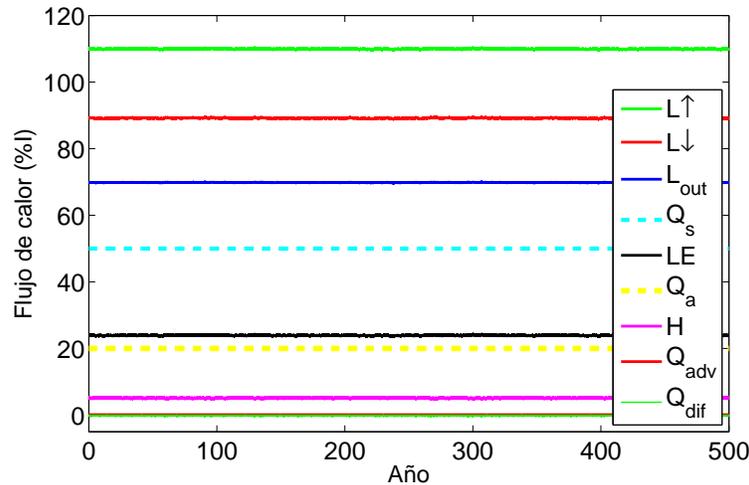


Figura 5.21: Porcentaje de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera en función de la insolación global media I . Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

Las variaciones en el flujo de radiación de onda larga que escapa hacia el espacio exterior se muestran en la Figura 5.22. En el panel superior se da la evolución de las anomalías de dicho flujo durante un período arbitrario de 22 años. El flujo L_{out} , a diferencia del caso anterior, véase la Figura 5.12, presenta una persistencia mayor, pero con variaciones de menor amplitud, de aproximadamente 1 W/m^2 (panel inferior de la Figura 5.22). En este mismo panel se puede ver la distribución de probabilidad de las anomalías de L_{out} para el período completo de simulación (500 años). A simple vista la estructura de las variaciones exhibidas por este flujo se asemeja bastante a las variaciones reportadas por Wielicki *et al.* (2002), véase la Figura 3.3¹⁹.

¹⁹Recuerde que esta comparación sólo es ilustrativa.

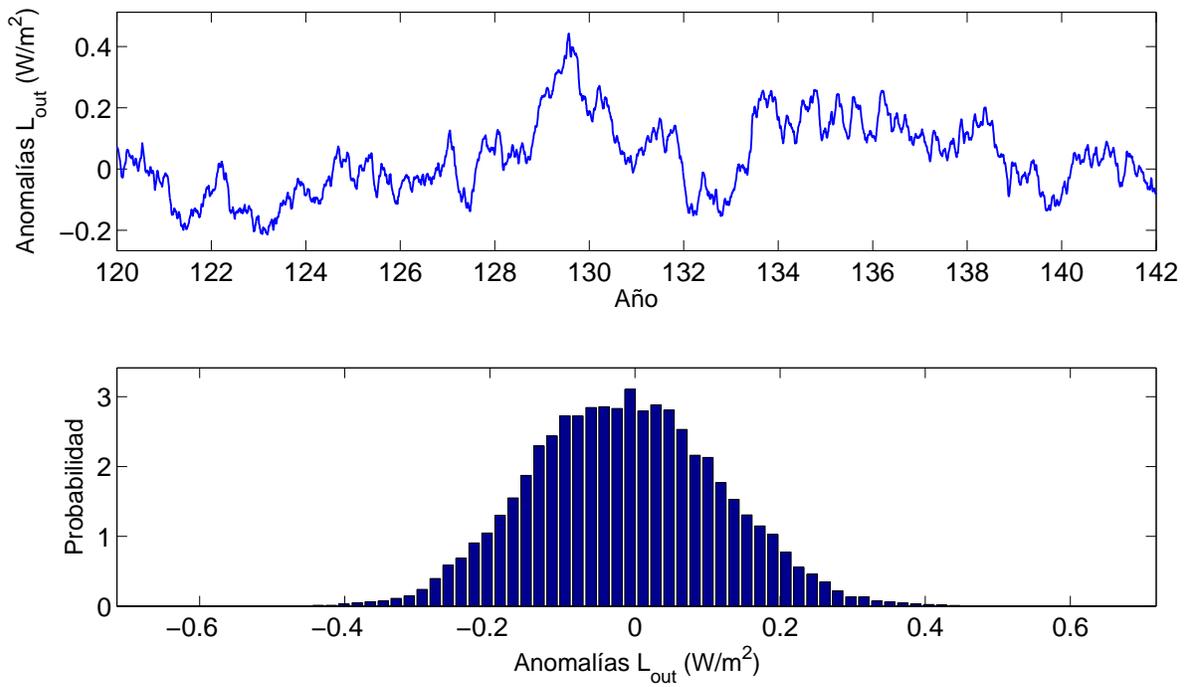


Figura 5.22: Anomalías del flujo radiativo de onda larga emitido hacia el espacio exterior. El panel superior muestra un extracto de la serie de anomalías para un período arbitrario de 22 años. El panel inferior muestra la distribución de probabilidad de dichas anomalías (la cual es normal) para los 500 años de simulación. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en la atmosfera. Caso de forzamiento radiativo aleatorio en el océano.

5.3. Parametrización estocástica de flujos de calor

En cuanto a la parametrización estocástica propuesta de los flujos de calor sólo vamos a considerar una de ellas, la parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano, $L \uparrow$. El motivo de esto es que los resultados obtenidos al considerar las parametrizaciones estocásticas de LE y $L \uparrow$ son casi idénticos. Este hecho, como se verá más adelante, conduce a una nueva e interesante propuesta de investigación.

La parametrización estocástica de $L \uparrow$ (ecuación (4.11)) considera que las variaciones de este flujo se distribuyen normalmente alrededor de su valor de equilibrio determinista, véase la Figura 5.23. La amplitud de las variaciones de $L \uparrow$ es tal que permite que las variaciones en las temperaturas T_s y T_A sean comparables a las observaciones (Figura 4.1). La razón de tomar variaciones diarias grandes en este flujo es la misma que la considerada en los dos casos explicados anteriormente (forzamiento radiativo aleatorio en la atmósfera y en el océano).

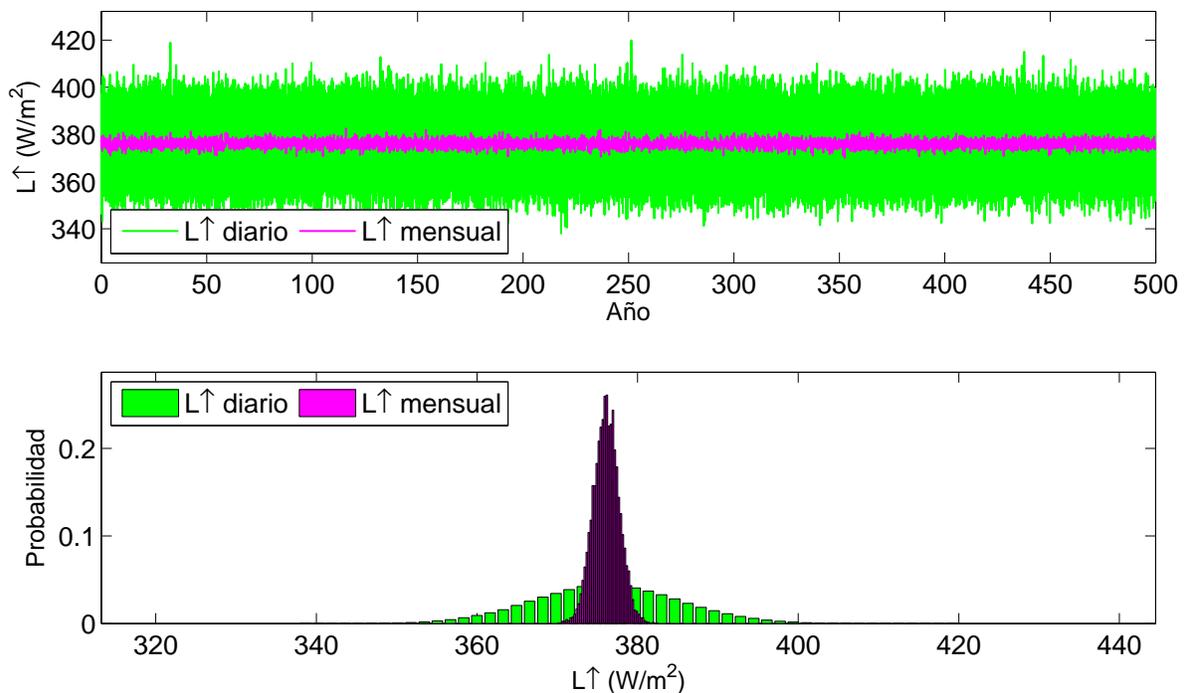


Figura 5.23: Flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano ($L \uparrow$). El panel superior contiene la serie temporal de este forzamiento (en color verde para los valores diarios y en color magenta para los promedios mensuales). En el panel inferior se muestra la distribución de probabilidad de ambas series, las cuales corresponden a una distribución normal. El tiempo de simulación es de 500 años.

Análisis en tiempo

La respuesta producida en la temperatura de la capa de mezcla oceánica T_s y en la temperatura atmosférica T_A por la parametrización estocástica de $L \uparrow$ es muy desigual en ambas. Por un lado T_A presenta variaciones rápidas con intensidades máximas diarias de 1.21°C y mensuales de 0.53°C , aproximadamente, mientras que T_s exhibe variaciones de período un poco más largo, con intensidades máximas diarias de apenas 0.12°C y mensuales de 0.07°C , aproximadamente (Figura 5.24)²⁰.

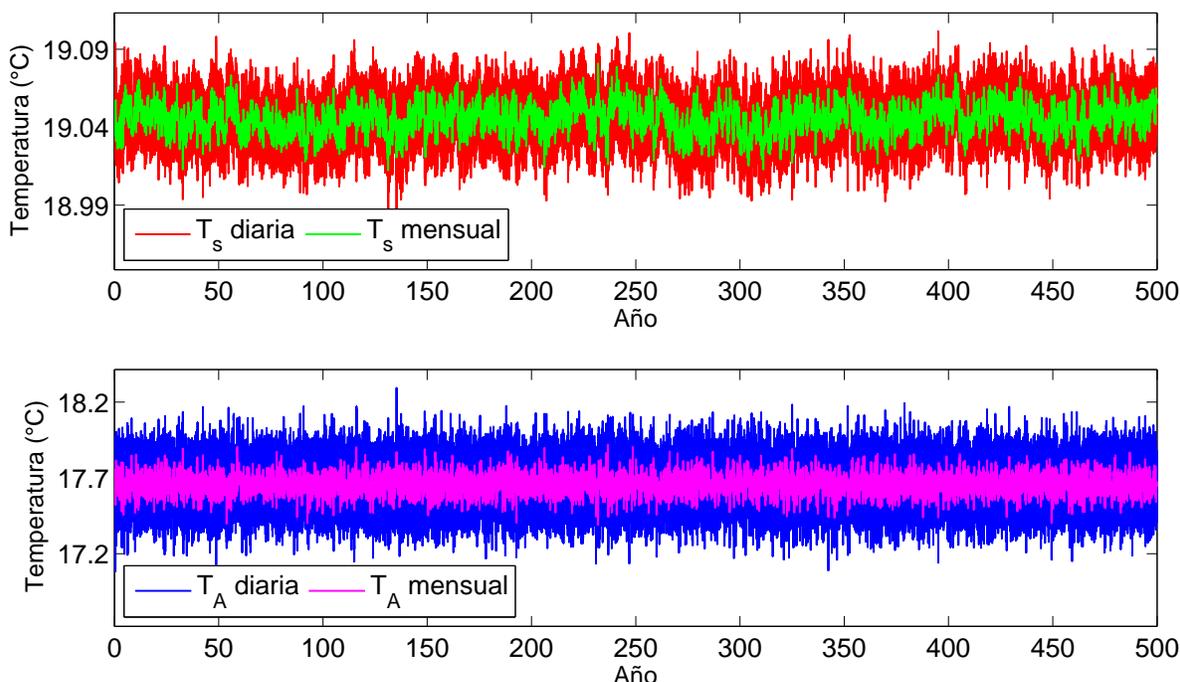


Figura 5.24: Evolución de las temperaturas de la capa de mezcla oceánica T_s y de la atmósfera T_A . Se incluyen las series diarias y mensuales para ambas temperaturas. Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

Aparte del hecho ya bien establecido de que la temperatura de la atmósfera es más variable (tiene un comportamiento más errático) que la temperatura de la capa de mezcla oceánica, la parametrización estocástica propuesta del flujo $L \uparrow$ produce varios resultados interesantes. El primero de ellos se refiere al hecho de que T_s y T_A están correlacionados negativamente ($r_P = -0.8561$), vea la Figura 5.25(a). La explicación de este comportamiento es muy simple: Considere una versión discretizada sencilla de las ecuaciones que gobiernan a las temperaturas de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica (ecuaciones (4.20) y (4.21)) en la que los

²⁰Al igual que en los casos anteriores ambas series de temperatura son homogéneas y se distribuyen de manera normal alrededor de sus valores en el equilibrio determinista (Figura 5.27).

términos deterministas son nulos ($f_A = f_s = 0$), esto es,

$$\begin{aligned}\Delta T_A &= -\frac{R_A}{R_s} \frac{2}{T_s} g_A^2 \Delta t + g_A \Delta W, \\ \Delta T_s &= \frac{2}{T_s} g_s^2 \Delta t + g_s \Delta W,\end{aligned}$$

donde $g_A = \beta_1 \sigma T_s^4 / R_A$ y $g_s = -\beta_1 \sigma T_s^4 / R_s$. Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$\Delta T_s = -\frac{R_A}{R_s} \Delta T_A, \quad (5.8)$$

la cual explica la correlación negativa entre T_s y T_A y la amplitud relativa de sus variaciones, dadas por el cociente R_A/R_s (≈ 0.85)²¹.

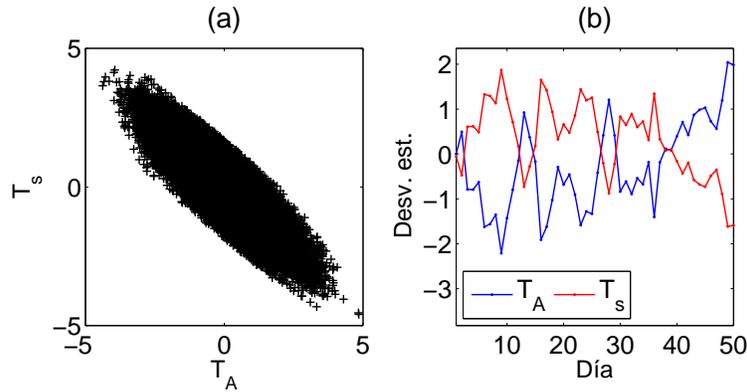


Figura 5.25: (a) Correlación entre las anomalías estandarizadas de T_s y T_A y (b) Anomalías estandarizadas de las temperaturas de la atmósfera y de la capa de mezcla oceánica para los primeros 50 días de simulación. Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

En vista de los resultados anteriores y con el fin de analizar la relación entre T_A y T_s , esto es, su persistencia a corto y largo plazo, en la Figura 5.26 se muestran las anomalías estandarizadas de $-T_A$ y T_s .

De las Figuras 5.25(b) y 5.26 se puede ver que la variabilidad de corto plazo es similar para ambas temperaturas (aunque un poco mayor para T_A , ya que sus variaciones en términos de desviaciones estándar son un poco más significativas que para T_s). Sin embargo, con respecto a la variabilidad de largo plazo no es posible identificar si ésta es similar para ambas temperaturas, lo más que se puede decir al analizar la Figura 5.26 es que la variabilidad de largo plazo es mayor para la temperatura de la capa de mezcla oceánica. Información

²¹Este mismo fenómeno de anticorrelación entre T_A y T_s surge también al considerar una parametrización estocástica del flujo turbulento de calor latente LE . La explicación dada aquí del origen de la anticorrelación entre T_s y T_A y de la magnitud de sus variaciones también se aplica a dicho caso.

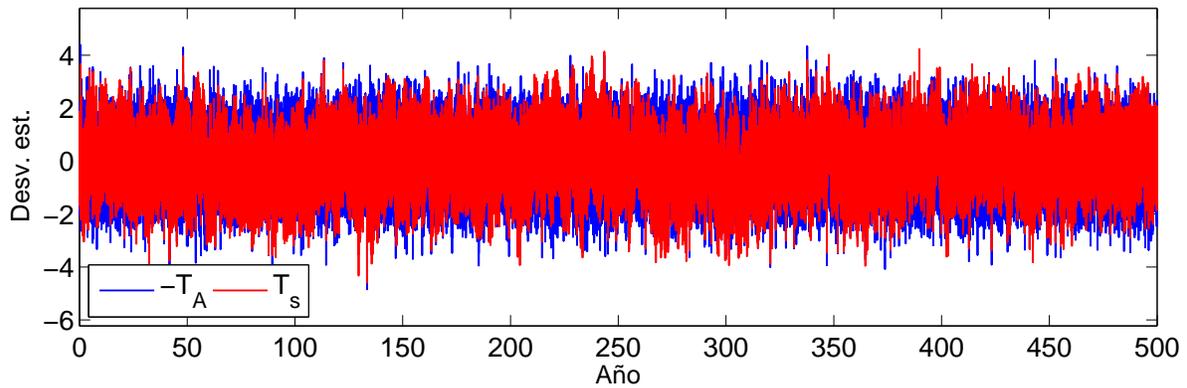


Figura 5.26: Anomalías estandarizadas de las temperaturas de la capa de mezcla oceánica (T_s) y de la atmósfera (T_A). Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

adicional para describir la variabilidad de largo plazo en ambas temperaturas se obtendrá al graficar sus espectros.

Siguiendo con el análisis en tiempo, en la Figura 5.27 se presentan los histogramas normalizados para las temperaturas de la capa de mezcla oceánica y de la atmósfera. Debido a que las variaciones de T_s son muy pequeñas, la densidad de probabilidad para ella es mucho más grande que para T_A , aproximadamente 11 veces mayor, que es el factor entre R_s y R_A . Por último, en la Figura 5.28 se muestra la función de distribución de probabilidad para ambas temperaturas (obtenidas al resolver la ecuación estacionaria de Fokker-Planck). Ya que en este caso se tiene una ecuación diferencial estocástica para T_s y T_A se resolvió dicha ecuación para ambas temperaturas. Para efectos ilustrativos se incluyen en la misma figura los potenciales asociados a cada temperatura.

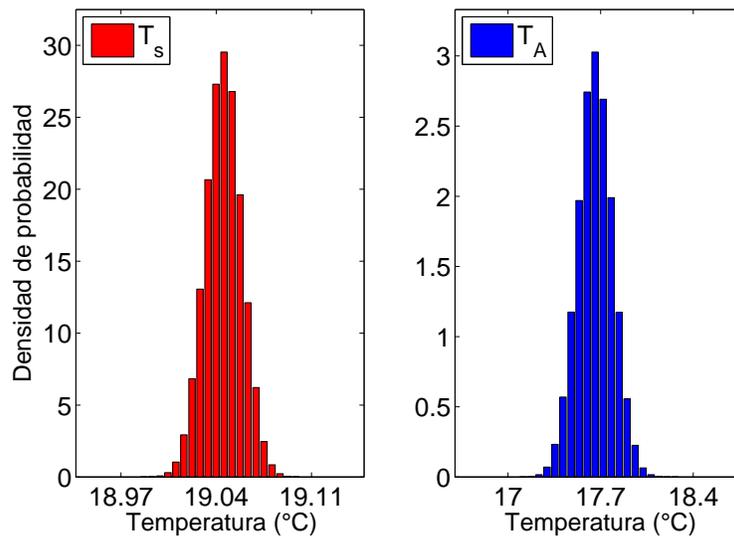


Figura 5.27: Histogramas normalizados para las temperaturas de la capa de mezcla oceánica (T_s) y de la atmósfera (T_A). Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

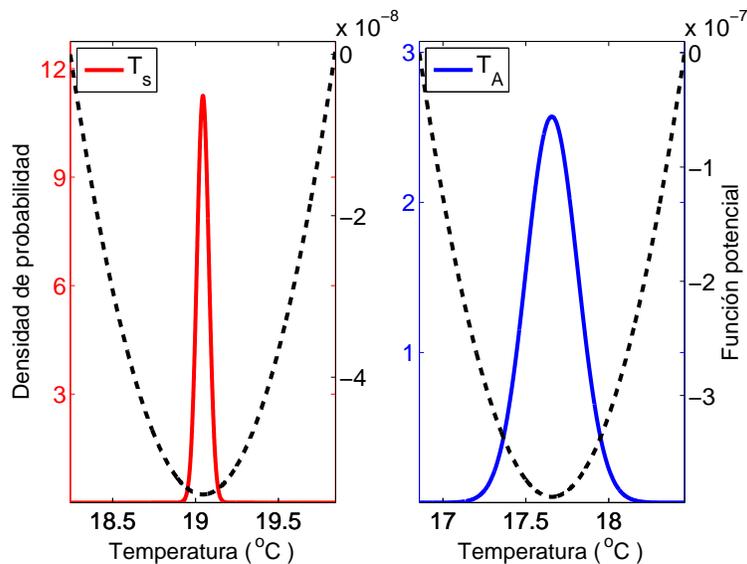


Figura 5.28: Función de distribución de probabilidad estacionaria para la temperatura de la capa de mezcla (T_s) y de la atmósfera (T_A). Note la correspondencia exacta entre los mínimos de los potenciales y los máximos de las distribuciones de probabilidad, así como la simetría de ambos dentro del dominio considerado. Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

Análisis en frecuencia

El siguiente aspecto a considerar es el análisis en frecuencias. Primeramente se ajustaron procesos autorregresivos a las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A utilizando sus FAC y FACP, para posteriormente comparar los espectros de Fourier de dichas anomalías contra los espectros teóricos de los procesos autorregresivos estimados.

La FAC y FACP de las anomalías estandarizadas de T_s y T_A , mostradas en la Figura 5.29, indican que un proceso $AR(1)$ es útil para describir ambas temperaturas. Los resultados de la estimación de dichos procesos están contenidos en los Cuadros 5.7 y 5.8.

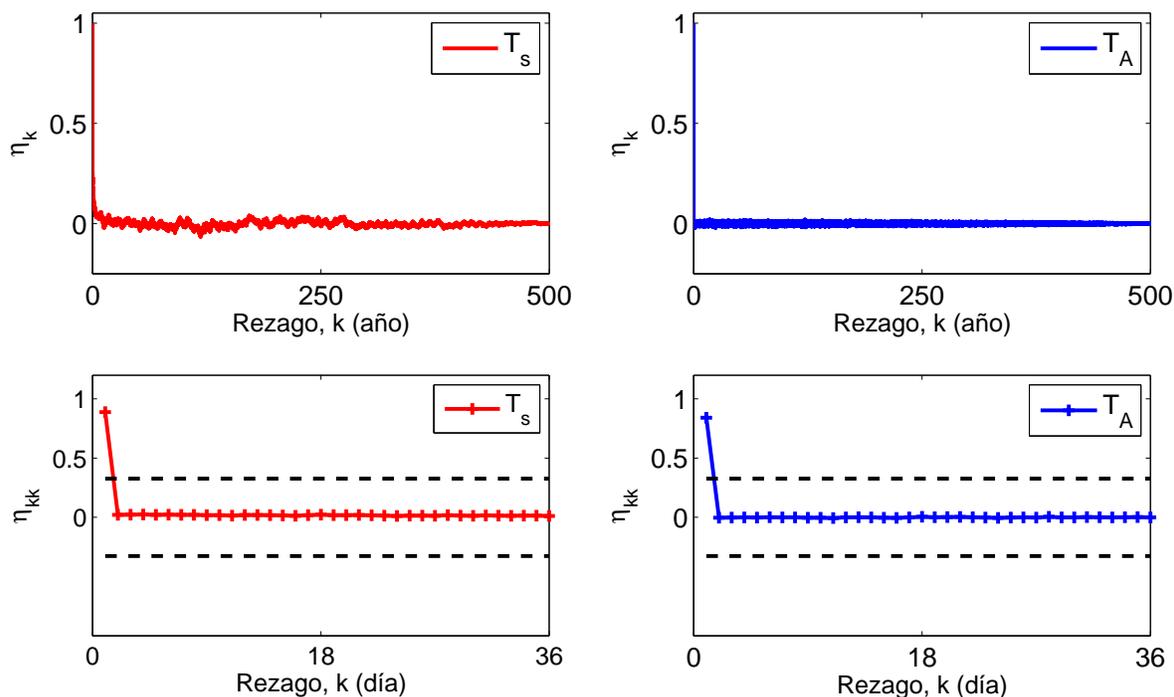


Figura 5.29: Función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial para las anomalías estandarizadas de T_s y T_A . Para los coeficientes de la FACP se incluye una región de no rechazo al 95% de probabilidad dada por $\pm 1.96/\sqrt{N_T}$ (líneas negras punteadas). Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

Estas estimaciones indican que ambas temperaturas tienen valores similares de memoria ϕ_1 y de desviación estándar de ruido blanco σ . La temperatura T_A posee un término de memoria un poco menor que T_s y una mayor desviación estándar de ruido blanco. Esto se traduce en una menor persistencia en períodos largos y mayor variabilidad en períodos cortos para la temperatura atmosférica en relación a la temperatura de la capa de mezcla oceánica. Estas características están confirmadas por los espectros de Fourier de ambas temperaturas (panel inferior de la Figura 5.30).

Variable	Coefficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1)$	0.000033	0.009588	0.003446	0.9973
ϕ_1	0.887486	0.001079	822.700300	0.0000
σ	0.460837			
R^2	0.787629			
R^2 ajustada	0.787628			
Estadístico F	676835.8			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	1.12			

Cuadro 5.7: Estimación del modelo autorregresivo $AR(1)$ para T_s . Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido hacia la atmósfera $L \uparrow$.

Variable	Coefficiente	Error estándar	Estadístico t	Probabilidad
$\mu(1 - \phi_1)$	-0.000018	0.007943	-0.002282	0.9982
ϕ_1	0.840186	0.001269	661.855900	0.0000
σ	0.542300			
R^2	0.705911			
R^2 ajustada	0.705909			
Estadístico F	438053.2			
Prob(Estadístico F)	0.000000			
Raíces AR	1.19			

Cuadro 5.8: Estimación del modelo autorregresivo para $AR(1)$ T_A . Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido hacia la atmósfera $L \uparrow$.

A pesar de que existe una fuerte correspondencia entre las temperaturas de la capa de mezcla oceánica y de la atmósfera, hay una característica que salta a la vista, y es que los procesos autorregresivos estimados no describen adecuadamente la variabilidad de largo plazo (frecuencias $< 0.3/\text{año}$) para ambas temperaturas (paneles superiores de la Figura 5.30). Este comportamiento sugiere la presencia de mecanismos de retroalimentación complejos en los procesos que rigen las temperaturas de la capa de mezcla oceánica y de la atmósfera. El factor que determina la persistencia de largo plazo en un proceso $AR(1)$ es el término de memoria ϕ_1 , el cual está modificado de la versión simple de un proceso $AR(1)$ por los términos de acoplamiento entre T_s y T_A . En particular la ecuación que gobierna la temperatura de la capa de mezcla oceánica tiene ruido dependiente del sistema, lo cual introduce una reformulación en la dinámica determinista que la rige (ecuación (4.21)), mientras que en la ecuación para la temperatura de la atmósfera esto no ocurre (ecuación (4.13)). Esta estructura del ruido es la que provoca la forma específica de los espectros.

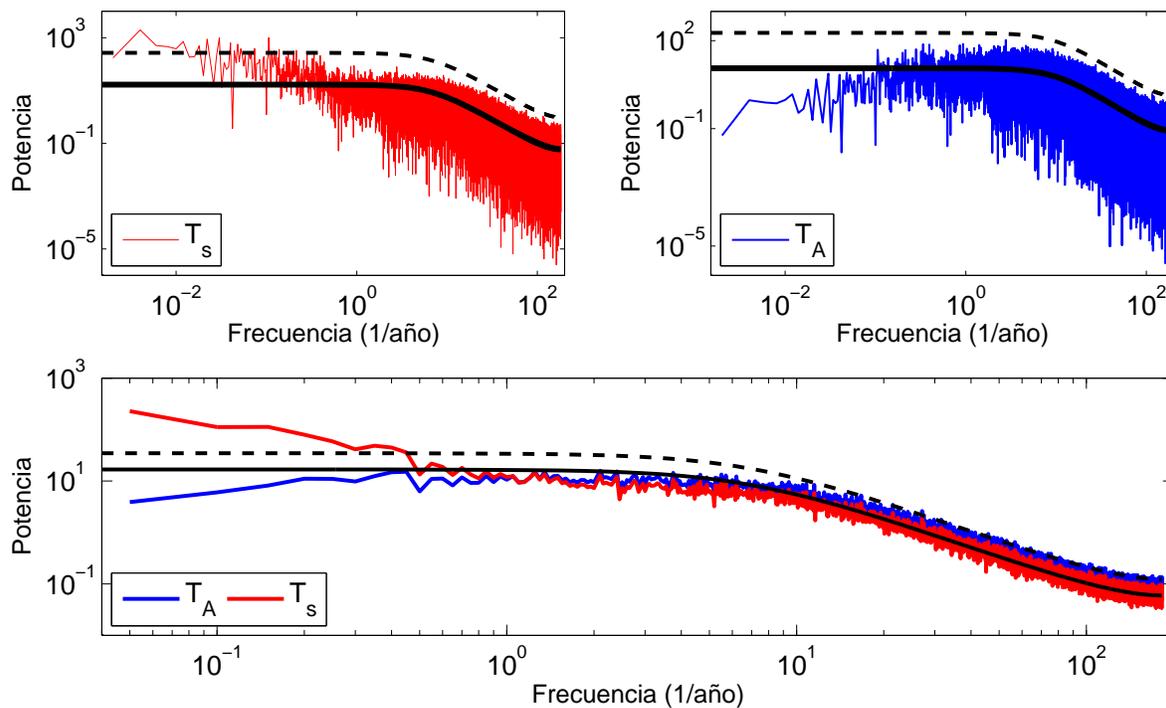


Figura 5.30: *Panel superior.* Espectro de Fourier crudo de las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A . En líneas de color se indica el espectro muestral, en líneas negras sólidas el espectro del proceso autorregresivo estimado, y en líneas negras discontinuas el intervalo de confianza al 95 % de probabilidad. *Panel inferior.* Espectros de Fourier suavizados (con 25 espectros replicados) de las series de anomalías estandarizadas de T_s y T_A . Sólo se incluye el espectro teórico del proceso autorregresivo estimado para T_s y su respectivo intervalo de confianza al 95 % de probabilidad.

Estos resultados denotan diferencias claras entre la dinámica asociada a ruido aditivo (primeros dos casos del modelo estocástico) y ruido multiplicativo (parametrización estocástica de los flujos de calor). El análisis demuestra que cuando el sistema es forzado con ruido aditivo éste puede ser descrito de manera razonable, a primer orden de aproximación, por procesos $AR(1)$ ó $AR(2)$; mientras que en el sistema forzado con ruido multiplicativo esta aproximación no resulta tan satisfactoria, es decir, la descripción del sistema involucraría modelos $ARMA$ de orden más alto o modelos no lineales.

Al igual que la parametrización estocástica de $L \uparrow$, la parametrización estocástica del flujo turbulento de calor latente LE (Subsección 4.1.4) origina variaciones casi idénticas en las temperaturas T_s y T_A , tanto en estructura como en intensidad, que las provocadas por la parametrización estocástica de $L \uparrow$. Estas similitudes comprenden, además, la anticorrelación entre ellas y resultados casi idénticos del análisis en frecuencias. Esto es, todo el análisis desarrollado aquí se aplica indistintamente en ambos casos.

Estos resultados plantean una interrogante: ¿Cuál es el mecanismo que provoca que la respuesta del sistema climático sea la misma para los dos tipos de parametrizaciones es-

tocásticas de flujos de calor? El estudio y explicación de este mecanismo está más allá de los objetivos de este trabajo y constituyen una nueva propuesta de investigación. Sin embargo, se propone que la respuesta a esta pregunta debe discernir entre dos aspectos: investigar si dicho mecanismo es debido a procesos de retroalimentación entre las temperaturas del océano y de la atmósfera, o si es ocasionado por la manera de parametrizar dichos flujos de calor, esto es, por la estructura matemática propuesta para dichas parametrizaciones.

Flujos de calor en el sistema océano-atmósfera

En la Figura 5.31 se puede apreciar la evolución temporal de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera. El flujo turbulento de calor sensible H , aparte del flujo $L \uparrow$, es el que presenta la mayor variabilidad.

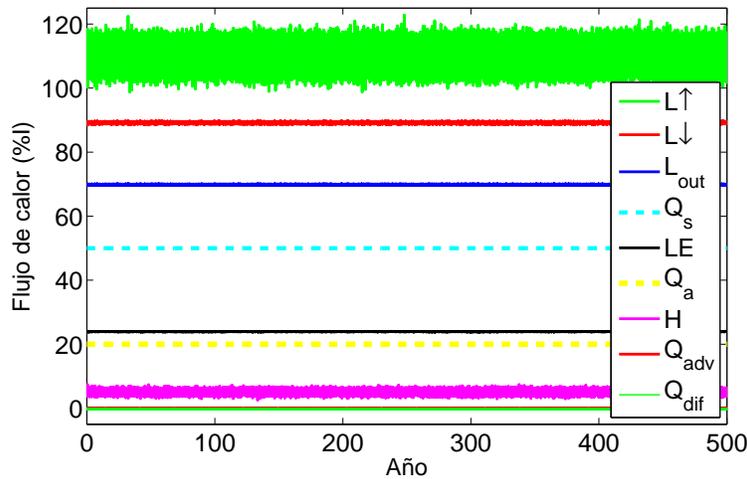


Figura 5.31: Evolución de los flujos de calor en el sistema océano-atmósfera. Los valores están dados en porcentajes de la insolación media global I . Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

Por otro lado, la variabilidad del flujo de radiación de onda larga emitido hacia el espacio exterior, L_{out} , presenta oscilaciones netas de aproximadamente 2 W/m^2 que se distribuyen normalmente, véase la Figura 5.32. En este caso la intensidad encontrada para las anomalías de dicho flujo dista de las reportadas por Wielicki *et al.* (2002).

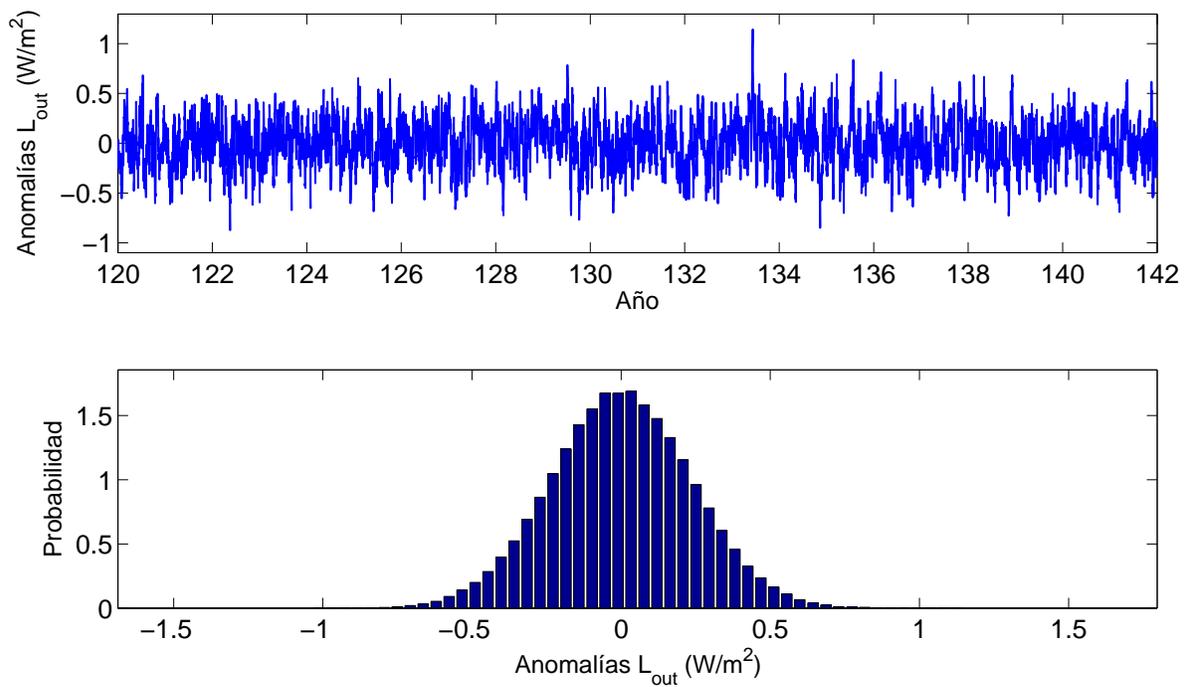


Figura 5.32: Anomalías del flujo radiativo de onda larga emitido hacia el espacio exterior. El panel superior muestra un extracto arbitrario de 22 años de la serie de tiempo. El panel inferior muestra su distribución de probabilidad para todo el período de simulación (500 años). Caso de parametrización estocástica del flujo de radiación de onda larga emitido por la superficie del océano.

Capítulo 6

Conclusiones

Dentro del desarrollo del trabajo de tesis se estudió y desarrolló un modelo climático de balance de energía uno-dimensional, globalmente promediado, que acopla la atmósfera y el océano. La solución del océano profundo se obtuvo al resolver numéricamente la ecuación de advección-difusión mediante un nuevo esquema de discretización, más estable y preciso que los esquemas tradicionales, el cual nos permitió especificar a la velocidad de advección y al coeficiente de difusión como cualquier función del espacio y del tiempo.

La versión determinista del modelo climático se utilizó para reproducir los valores medios de la temperatura (tanto atmosférica como oceánica) y de los flujos de calor dentro del sistema. Asimismo se empleó para representar la respuesta simple esperada en temperatura por el cambio en el forzamiento radiativo debido a un incremento en los gases de efecto invernadero. Los resultados mostraron que el modelo posee una sensibilidad climática comparable a la exhibida por modelos de complejidad más alta, como los utilizados en el Cuarto Informe de Evaluación del IPCC.

Las características de las que goza el modelo lo convierten en una herramienta práctica para realizar estudios de sensibilidad climática, en particular la determinada por fluctuaciones deterministas y aleatorias en el balance de energía del sistema océano-atmósfera.

Por otro lado, la formulación estocástica del modelo climático nos permitió obtener series de temperatura que exhiben variaciones comparables a las observadas. Se encontró que la temperatura del océano posee una mayor persistencia que la temperatura de la atmósfera. Esta observación resalta la diferencia entre ambas componentes del sistema climático: la atmósfera corresponde a la componente que evoluciona en períodos de tiempo de corto y mediano plazo, mientras que el océano corresponde a la componente que evoluciona en el largo plazo. Al representar ciertos procesos no resueltos en el sistema climático mediante ruido en las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan, se verificó que la persistencia climática (en temperatura) puede ser descrita, a primer orden de aproximación, por un proceso puramente aleatorio: procesos autorregresivos de primer o segundo orden. Es decir, se verificó el resultado de Hasselmann según la cual la variabilidad de baja frecuencia en el sistema climático es el resultado de la respuesta integrada del sistema forzado con variaciones de corto plazo.

Las conclusiones obtenidas del análisis del modelo climático estocástico ponen de manifiesto las diferencias entre la respuesta inducida por forzamiento con ruido aditivo y con ruido multiplicativo. El forzamiento con ruido multiplicativo produjo variaciones de temperatura con amplitudes muy pequeñas, pero con estructuras en frecuencia más ricas que las correspondientes al forzamiento con ruido aditivo. Esto último debido muy posiblemente a la presencia de mecanismos de retroefecto complejos en la dinámica que rige a la temperatura del océano. Dichos mecanismos de retroefecto serían el resultado de las modificaciones hechas al término determinista de la ecuación que gobierna al océano, las cuales están especificadas por el cálculo Stratonovich.

Un resultado original y atractivo es una derivación heurística para calcular el potencial asociado a una ecuación diferencial estocástica general uno-dimensional. Conocer la forma explícita del potencial es importante ya que nos da una idea clara del desarrollo de las distintas variables climáticas, incluso antes de resolver la ecuación diferencial estocástica respectiva.

La metodología utilizada en este trabajo es útil para entender la dinámica que está detrás de los procesos que determinan el comportamiento de las diversas variables climáticas, aunque no proporciona una descripción detallada del sistema climático.

Finalmente, entre las principales perspectivas sugeridas a partir de la realización de este trabajo se listan las siguientes:

1. Usar múltiples fuentes de ruido para estudiar la variabilidad de la temperatura global. Esto con el objetivo de ver el efecto combinado de considerar diferentes procesos físicos que evolucionan aleatoriamente.
2. Emplear procesos de Lévy (Penland y Ewald, 2008). En lugar de utilizar la aproximación usual de ruido blanco gaussiano para representar procesos no resueltos en el sistema, se plantea utilizar procesos de Lévy, los cuales tienen la característica de presentar saltos ocasionales. Esto proporcionaría una mayor riqueza a nuestro modelo numérico, y posiblemente mejoraría la descripción del sistema climático.
3. Además se propone modificar el mecanismo de retroefecto asociado a la corriente termohalina¹ para volverlo más significativo, y entonces estudiar el efecto que tendrían variaciones deterministas y aleatorias de la temperatura del fondo del océano sobre la temperatura global. Con el mismo fin también se plantea realizar parametrizaciones estocásticas de la velocidad de advección y del coeficiente de difusión.
4. Otro punto de investigación considera la formulación de un modelo regional para la República Mexicana sujeto a un potencial de doble pozo (un sistema biestable con forzamiento estocástico), el cual pueda ser utilizado para realizar estudios de precipitación. Esto es, un modelo que nos permita reproducir satisfactoriamente la alternancia observada entre temporadas de lluvias y sequías.

¹El flujo de calor advectivo asociado a la evolución de la temperatura de la capa de mezcla oceánica, T_s .

Apéndices

Apéndice A

Ecuación de advección-difusión

En este capítulo se recopilan algunos conceptos clave del esquema de discretización de la ecuación de advección-difusión, los cuales fueron tomados del trabajo desarrollado por Grima y Newman (2004).

La ecuación de advección-difusión EAD proporciona una representación continua (macroscópica) de sistemas cuya dinámica subyacente combina movimiento Browniano (difusión) con alguna forma de deriva determinista (advección). La EAD general tiene la forma

$$\partial_t \psi = \nabla \cdot (k \nabla \psi) - \nabla \cdot (\psi \vec{v}), \quad (\text{A.1})$$

donde el campo ψ describe el número de densidad de “partículas”. En principio el coeficiente de difusión $k(\vec{x}, t)$ y el campo de velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ pueden depender del campo de densidad ψ .

A pesar de su aparente simplicidad el término de advección es extremadamente difícil de manejar. Hay dos grandes retos: a) estabilidad, la cual puede ser mejorada usando una variedad de métodos implícitos, y b) exactitud, la cual es una cuestión delicada, requiriendo la mejor forma posible de discretización espacial. Con respecto a la estabilidad se han usado los esquemas de Crank-Nicholson/ADI, métodos de paso fraccional y el método Lax-Wendroff. La cuestión de precisión ha recibido menos atención con dos esquemas de discretización espaciales (y sus variantes inmediatas): la expansión simple de Taylor y el esquema *upwind*. Tal como lo refieren Grima y Newman (2004), uno de los resultados principales de su trabajo es la derivación de un nuevo esquema de discretización, el cual es físicamente atractivo, simple de aplicar en todas las dimensiones y más preciso que aquellos actualmente en uso.

Muchos algoritmos numéricos diseñados para integrar una ecuación como (A.1) tratan los términos de advección y difusión separadamente. Al discretizar dicha ecuación se deben mantener exactamente dos propiedades fundamentales de la ecuación. Estas son la no negatividad de ψ y su conservación espacial,

$$\int_V \psi(\vec{x}, t) d^3x = cte. \quad (\text{A.2})$$

La esencia de este nuevo esquema de discretización consiste en transformar la ecuación (A.1) de modo que nos permita escribir de manera simple una forma discreta de ésta. Para ello se introducen dos variables escalares $p(\vec{v}, t)$ y $q(\vec{v}, t)$ definidas mediante las relaciones:

$$k = p q, \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{v} = q \nabla p - p \nabla q, \quad (\text{A.4})$$

con lo cual (A.1) toma la forma explícita

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot (p q \nabla \psi) - \nabla \cdot [\psi (q \nabla p - p \nabla q)]. \quad (\text{A.5})$$

Al diferenciar esta expresión se obtiene una ecuación cuyas derivadas espaciales aparecen sólo como Laplacianos,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = p \nabla^2 (q \psi) - q \psi \nabla^2 p, \quad (\text{A.6})$$

la cual es fácil de discretizar.

El Laplaciano discreto está definido vía

$$\nabla^2 D(\vec{x}) = \frac{1}{h^2} \sum_j (D_j - D_i), \quad (\text{A.7})$$

donde la sumatoria es sobre los vecinos más cercanos j del punto de malla i , que corresponde a la posición del continuo de \vec{x} . El parámetro h corresponde al ancho de malla especificado. De este modo el esquema correspondiente a (A.6) se puede escribir como

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \sum_j (R_{j \rightarrow i} \psi_j - R_{i \rightarrow j} \psi_i), \quad (\text{A.8})$$

donde se ha definido la razón de transición para “saltar” del sitio i al sitio j como

$$R_{i \rightarrow j} = p_j q_i / h^2. \quad (\text{A.9})$$

Una vez que las funciones p y q están determinadas el algoritmo discreto (A.8) queda completamente especificado vía la razón de transición dada anteriormente. En el caso unidimensional es posible integrar exactamente las ecuaciones (A.3) y (A.4) para encontrar las funciones auxiliares p y q en términos del coeficiente de difusión y la velocidad de advección físicamente relevantes. Se encuentra que

$$p(z, t) = C \sqrt{k(z, t)} e^S, \quad S(z, t) = \frac{1}{2} \int_z d\lambda \frac{v(\lambda, t)}{k(\lambda, t)}, \quad (\text{A.10})$$

donde C es una constante de integración y $q = k/p$. La razón de transición es fácilmente evaluada de (A.9) para dar

$$R_{i \rightarrow j} = \frac{\sqrt{k_i k_j}}{h^2} e^{-(S_i - S_j)}. \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Ecuaciones diferenciales estocásticas

En este capítulo se revisarán puntualmente algunos de los conceptos más relevantes relacionados a las ecuaciones diferenciales estocásticas y a la ecuación de Fokker-Planck. La descripción de ambos puntos fue tomada de Jacobs (2010: Capítulos 3, 4, 5 y 7) y abarca los temas: definición de los procesos estocásticos, ruido blanco, cálculo estocástico (Ito y Stratonovich) y la ecuación de Fokker-Planck.

B.1. Ecuaciones estocásticas con ruido Gaussiano

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) para x es una ecuación que nos dice cómo cambia x en cada paso de tiempo infinitesimal dt cuando el incremento en x es una variable aleatoria (*v.a.*).

Considere una ecuación discretizada en el tiempo

$$\begin{aligned}t_n &= n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ \Delta t &= t_{n+1} - t_n \\ \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t) = x(t_{n+1}) - x(t_n) = x_{n+1} - x_n\end{aligned}$$

en la cual el cambio en x , Δx , es la suma de un término proporcional a x , y un término impulsor que es independiente de x . Haremos este término impulsor una función del tiempo, dándole así la libertad de ser diferente en tiempos diferentes. La ecuación en diferencias para x es

$$\Delta x(t_n) = x(t_n) \Delta t + f(t_n) \Delta t, \tag{B.1}$$

donde $f(t_n) \Delta t$ es el término impulsor. Dado el valor de x al tiempo t_n , el valor al tiempo t_{n+1} es

$$x(t_n + \Delta t) = x(t_n) + x(t_n) \Delta t + f(t_n) \Delta t. \tag{B.2}$$

Si conocemos el valor de x a $t = 0$, entonces

$$x(\Delta t) = x(0) (1 + \Delta t) + f(0) \Delta t. \tag{B.3}$$

¿Qué sucede si el término impulsor, $f(t_n) \Delta t$, es aleatorio en cada tiempo t_n ? Esto significa reemplazar $f(t_n)$ con una *v.a.*, y_n , en cada tiempo t_n . Entonces la ecuación en diferencias sería

$$\Delta x(t_n) = x(t_n) \Delta t + y_n \Delta t, \quad (\text{B.4})$$

la cual es llamada una ecuación estocástica en diferencias. Esta ecuación dice que en cada tiempo t_n seleccionamos un valor para la *v.a.* y_n (muestreado de su densidad de probabilidad) y sumamos $y_n \Delta t$ a $x(t_n) \Delta t$. Esto significa que ya no podemos predecir exactamente el valor de x en algún tiempo futuro T , sino hasta que llegemos a ese tiempo y que todos los valores de los incrementos aleatorios hasta T hayan sido determinados.

En cada tiempo la solución de una ecuación estocástica en diferencias, $x(t_n)$, es una *v.a.* y ésta *v.a.* cambia en cada paso de tiempo. Por lo tanto, para resolver dicha ecuación debemos determinar la densidad de probabilidad para x en todos los tiempos futuros. Ya que $x(t_n)$ es una función de todos los incrementos de ruido y_n , así como de $x(0)$, esto significa calcular la densidad de probabilidad para x desde las densidades de probabilidad para los incrementos de ruido (y desde la densidad de probabilidad para $x(0)$ si ésta también es aleatoria).

Las EDEs son obtenidas al tomar el límite $\Delta t \rightarrow 0$ de las ecuaciones estocásticas en diferencias. Así, la solución de una EDE también es una densidad de probabilidad para el valor de x en cada tiempo futuro t . Sin embargo, no siempre es posible encontrar una expresión de forma cerrada para la solución de una EDE, pero para algunos casos simples sí es posible. Para ecuaciones estocásticas que no pueden ser resueltas analíticamente se deben utilizar los métodos numéricos. Un proceso que fluctúa aleatoriamente en el tiempo es llamado un proceso estocástico y las EDEs están impulsadas por procesos estocásticos. Los incrementos aleatorios que impulsan una EDE son referidos también como ruido. Además de obtener la densidad de probabilidad para x a los tiempos futuros t_n , también podemos preguntarnos cómo evoluciona x con el tiempo dado un conjunto específico de valores para los incrementos aleatorios y_n . Un conjunto de valores de los incrementos aleatorios (valores muestreados de sus densidades de probabilidad) es llamado una realización del ruido. Una evolución particular de x dada una realización específica de ruido es llamada una trayectoria muestral para x . Además, si se quiere saber la densidad de probabilidad para x a tiempos futuros puede ser útil conocer también qué propiedades tienen las trayectorias muestrales de x . Por lo tanto, la solución completa a una EDE es justamente el conjunto completo de todas las trayectorias muestrales posibles, y las probabilidades para todas estas trayectorias, pero usualmente no necesitamos conocer toda esta información. Usualmente todo lo que necesitamos conocer es la densidad de probabilidad para x en cada tiempo, y cómo está correlacionado x a un cierto tiempo consigo mismo a otro tiempo. Ya que la solución a una EDE, $x(t)$, varía aleatoriamente en el tiempo, ésta es un proceso estocástico.

B.1.1. Incrementos Gaussianos y el límite del continuo

Las EDEs examinadas aquí están impulsadas por ruido Gaussiano. Por ruido Gaussiano queremos decir que cada uno de sus incrementos tiene una densidad de probabilidad Gaus-

siana. Consideremos el caso

$$\Delta x(t_n) = y_n \Delta t.$$

Ya que el ruido Gaussiano es usualmente llamado ruido de Wiener, llamaremos al incremento aleatorio $\Delta W_n = y_n \Delta t$. La ecuación diferencial discreta para x es entonces

$$\Delta x(t_n) = \Delta W_n. \quad (\text{B.5})$$

Cada incremento de Wiener es completamente independiente de todos los otros, y todos tienen la misma densidad de probabilidad dada por

$$P(\Delta W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\Delta W)^2/(2\sigma^2)}. \quad (\text{B.6})$$

Esta es una densidad Gaussiana con media cero, y escogemos la varianza a ser $\sigma^2 = V = \Delta t$. Dicha elección de la varianza para el incremento de Wiener es muy importante, y pronto veremos porqué. Comúnmente denotamos un incremento de Wiener en algún paso de tiempo Δt simplemente como ΔW , sin referencia al subíndice n . Esta notación es conveniente ya que todos los incrementos aleatorios tienen la misma densidad de probabilidad, y aunque son independientes entre sí, son en ese sentido idénticos.

Iniciando con $x(0) = 0$ tenemos la solución

$$x_n \equiv x(n\Delta t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_i. \quad (\text{B.7})$$

Ahora necesitamos calcular la densidad de probabilidad para x_n . Sabemos que la densidad de probabilidad de x_n es Gaussiana (ya que es la suma de varias *v.a.* Gaussianas). También sabemos que la media y varianza de x_n es la suma de las medias y varianzas de las ΔW_i , ya que todas las ΔW_i son independientes. Por lo tanto tenemos

$$\langle x_n \rangle = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$V(x_n) = n\Delta t, \quad (\text{B.9})$$

y también

$$P(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-x_n^2/(2V)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\Delta t}} e^{-x_n^2/(2n\Delta t)}. \quad (\text{B.10})$$

Ahora necesitamos movernos de las ecuaciones en diferencias a las ecuaciones diferenciales. Resolveremos (B.5) para un tiempo futuro T , con N pasos discretos de tiempo (cada paso de tiempo es $\Delta t = T/N$). La solución $x(T)$ es ahora

$$x(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta W_i = \int_0^T dW(t) = W(T). \quad (\text{B.11})$$

Aquí definimos una integral estocástica, $W(T) = \int_0^T dW(t)$, como el límite de la suma de todos los incrementos del proceso de Wiener. Por lo tanto una integral estocástica es una *v.a.* En muchos casos podemos calcular la densidad de probabilidad para la *v.a.* $x(T)$. En este caso esto se realiza fácilmente ya que sabemos que la densidad de probabilidad para $x(T)$ es Gaussiana. Debido a esto, sólo necesitamos calcular su media y su varianza. La media es cero, ya que todas las *v.a.* en suma tienen media cero. Para calcular la varianza resulta que no necesitamos tomar el límite cuando $N \rightarrow \infty$ ya que los factores N salen de la expresión

$$V(x(T)) = \sum_{i=0}^{N-1} V(\Delta W_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta t = N\Delta t = N\frac{T}{N} = T. \quad (\text{B.12})$$

La densidad de probabilidad para $W(T)$ es

$$P(W(T)) = P(x(T)) \equiv P(x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-x^2/(2T)} \quad (\text{B.13})$$

Note que cuando escribimos la integral sobre los incrementos de Wiener, hemos incluido t explícitamente como un argumento de dW , sólo para indicar que dW cambia con el tiempo. Comúnmente quitamos la dependencia explícita de dW de t , y sólo escribimos la integral estocástica como

$$W(T) = \int_0^T dW. \quad (\text{B.14})$$

El proceso de Wiener es definido como $W(T)$, mientras que dW es un incremento del proceso de Wiener.

¿Qué sucedería si elegimos $V[\Delta W(\Delta t)]$ a ser alguna potencia de Δt ? Sea, por ejemplo, $V[\Delta W(\Delta t)] = (\Delta t)^\alpha$, entonces

$$V(x(T)) = \sum_{i=0}^{N-1} V(\Delta W_i) = \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta t)^\alpha = N(\Delta t)^\alpha = N\left(\frac{T}{N}\right)^\alpha = N^{(1-\alpha)}T^\alpha. \quad (\text{B.15})$$

Ahora tomemos el límite del continuo, $N \rightarrow \infty$, para obtener una EDE. Si $\alpha > 1$ tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(x(T)) = T^\alpha \lim_{N \rightarrow \infty} N^{(1-\alpha)} = 0, \quad (\text{B.16})$$

y cuando $\alpha < 1$ tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V(x(T)) = T^\alpha \lim_{N \rightarrow \infty} N^{(1-\alpha)} \rightarrow \infty. \quad (\text{B.17})$$

Ninguna de estas tiene sentido para el propósito de obtener una EDE que describa un sistema real impulsado por ruido. Entonces estamos forzados a escoger $\alpha = 1$ y de aquí $V(\Delta W) \propto \Delta t$.

Cuando trabajamos en el límite del continuo los incrementos Gaussianos dW son referidos como infinitesimales. Una EDE general para una sola variable $x(t)$ es escrita como

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dW. \quad (\text{B.18})$$

Ya que la varianza de dW debe ser proporcional a dt , y ya que cualquier constante de proporcionalidad puede ser siempre absorbida en $g(x, t)$, se elige $V(dW) = dt$. Por tanto podemos escribir la densidad de probabilidad para dW como

$$P(dW) = \frac{e^{-(dW)^2/(2dt)}}{\sqrt{2\pi dt}} \quad (\text{B.19})$$

¿Porqué ruido Gaussiano?

Este ruido es muy importante porque es muy común en sistemas físicos. La razón de ello es debida al *teorema central del límite*. El teorema central del límite dice que si se suman muchas *v.a.* independientes, entonces la densidad de probabilidad de la suma será cercana a una Gaussiana. En el límite de sumandos infinitos la densidad de probabilidad tiende exactamente a una Gaussiana. La única condición sobre las *v.a.* es que todas ellas tengan varianza finita.

Ahora considere ruido en un sistema físico. Este ruido es usualmente el resultado de muchos eventos aleatorios que suceden a nivel microscópico. Estos pueden ser los impactos de moléculas individuales, la fuerza eléctrica de muchos electrones moviéndose aleatoriamente en un conductor, etc. La fuerza total aplicada por estas partículas microscópicas es la suma de las fuerzas aleatorias aplicadas por cada una. Debido a que la fuerza total es la suma sobre muchas *v.a.*, ésta tiene una densidad de probabilidad Gaussiana (siempre y cuando las *v.a.* sean independientes). Ya que las fluctuaciones microscópicas son usualmente rápidas comparadas al movimiento del sistema, podemos modelar el ruido como si tuviera una densidad de probabilidad Gaussiana en cada paso de tiempo Δt , donde Δt es pequeño comparado a las escalas de tiempo en las que se mueve el sistema. De hecho, suponer que los incrementos de ruido son completamente independientes uno del otro de un paso de tiempo infinitesimal al siguiente es realmente una idealización que no es cierta en la práctica. Sin embargo, esta aproximación funciona muy bien.

Desde un punto de vista matemático, los procesos de ruido simple en los cuales el incremento aleatorio en cada intervalo de tiempo dt es independiente de todos los incrementos aleatorios previos, usualmente serán Gaussianos por la misma razón. Esto es debido a que el incremento aleatorio en cada intervalo de tiempo pequeño pero finito Δt es la suma sobre el número infinito de incrementos para los intervalos infinitesimales dt que hacen dicho intervalo finito. Hay dos excepciones a esto. Una son los procesos en los cuales el incremento aleatorio en un paso de tiempo infinitesimal dt no es necesariamente infinitesimal. Las trayectorias muestrales de tales procesos realizan saltos instantáneos y discretos de vez en cuando, y por tanto no son continuos. Estos son llamados procesos de punto o de salto, los cuales son demasiado comunes y tienen muchas aplicaciones. La otra excepción, mucho más rara en la naturaleza, sucede cuando los incrementos del ruido permanecen infinitesimales, como en el ruido Gaussiano, pero son extraídos de una densidad de probabilidad con una varianza ininita (una que elude el teorema central del límite).

B.1.2. Cálculo Ito

Cuando resolvemos ecuaciones diferenciales ordinarias somos capaces, en principio, de ignorar los términos $O(dt^2)$ en los incrementos infinitesimales, lo que nos lleva a las reglas usuales del cálculo (también significa que cualquier ecuación que escribamos en términos de diferenciales dx y dt puede ser escrita alternativamente en términos de derivadas). Sin embargo, la segunda potencia del diferencial estocástico dW no es nula con respecto a dt , lo cual lleva a aprender una nueva regla para la manipulación de EDEs. Lo anterior conlleva a que para escribir EDEs se deben usar diferenciales, y no derivadas.

Resolver una ecuación diferencial involucra sumar los incrementos infinitesimales sobre todos los pasos de tiempo dt . Para examinar si $(dW)^2$ produce una contribución no nula a la solución, debemos sumar $(dW)^2$ sobre todos los pasos de tiempo para un tiempo finito T . Para hacer esto regresemos a una descripción discreta, de manera que podamos escribir explícitamente la suma y tomar entonces el límite del continuo.

La primer cosa a notar es que $\langle (\Delta W)^2 \rangle = V(\Delta W) = \Delta t$, ya que $\langle \Delta W \rangle = 0$; entonces el valor de expectación de $(\Delta W)^2$ no es nulo con respecto al paso de tiempo Δt , y así la suma de estos incrementos no será nula cuando sumemos sobre todos los pasos de tiempo y tomemos el límite infinitesimal. De hecho, el valor de expectación de la suma de todos los incrementos $(dW)^2$ desde 0 a T es simplemente T :

$$\left\langle \int_0^T (dW)^2 \right\rangle = \int_0^T \langle (dW)^2 \rangle = \int_0^T dt = T. \quad (\text{B.20})$$

Ahora veremos qué es la varianza de la suma de todos los $(\Delta W)^2$. Como veremos, ésta se reduce a cero en el límite del continuo, tal que la integral de todos los $(dW)^2$ no es aleatoria, ¡sino determinista!

Para calcular explícitamente la varianza de $\int_0^T (dW)^2$ hay que notar que, ya que $\langle (\Delta W)^2 \rangle = \Delta t$, la varianza de $(\Delta W)^2$ debe ser proporcional a $(\Delta t)^2$ (de hecho podemos calcularla directamente usando la densidad de probabilidad para ΔW , siendo el resultado $V[(\Delta W)^2] = 2(\Delta t)^2$). Entonces, la varianza de $(\Delta W)^2$ es

$$V[(\Delta W)^2] = 2(\Delta t)^2 = 2\frac{T^2}{N^2}. \quad (\text{B.21})$$

Entonces la varianza de la suma de todas las $(\Delta W)^2$ es

$$V\left[\sum_{n=0}^{N-1} (\Delta W)^2\right] = \sum_{n=0}^{N-1} V[(\Delta W)^2] = \sum_{n=0}^{N-1} 2(\Delta t)^2 = 2N\frac{T^2}{N^2} = 2\frac{T^2}{N}. \quad (\text{B.22})$$

Y de aquí que en el límite continuo se tenga

$$\lim_{N \rightarrow \infty} V\left[\sum_{n=0}^{N-1} (\Delta W)^2\right] = \lim_{N \rightarrow \infty} 2\frac{T^2}{N} = 0, \quad V\left[\int_0^T (dW)^2\right] = 0. \quad (\text{B.23})$$

De la ecuación anterior se deduce que $\int_0^T (dW)^2$ es determinista, y entonces que ésta es igual a su media T ,

$$\int_0^T (dW)^2 = \left\langle \int_0^T (dW)^2 \right\rangle = T = \int_0^T dt, \quad (\text{B.24})$$

$$(dW)^2 = dt. \quad (\text{B.25})$$

El resultado sorprendente expresado por (B.25) es conocido oficialmente como lema de Ito o regla de Ito. La regla de Ito es fundamental para resolver EDEs que contienen ruido Gaussiano. Esta relación es una desviación de las reglas usuales del cálculo. Esto significa que siempre que $(dW)^2$ aparezca en el proceso para resolver una EDE, éste no puede ser descartado, así como los términos $(dt)^2$. Sin embargo resulta que todos los otros términos, como los productos de la forma $dt^n dW^m$, son cero en el límite infinitesimal. Los únicos términos que contribuyen a la solución de una EDE son dt , dW y $(dW)^2$. Entonces, la regla de Ito es la única regla adicional que necesitamos conocer para manipular EDEs. El cálculo de las EDEs es llamado cálculo Ito.

Integrales estocásticas Ito

Considere la siguiente integral estocástica

$$I(t) = \int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \Delta W_n, \quad (\text{B.26})$$

donde $f(t)$ es una función determinista. La integral $I(t)$ es una *v.a.* Gaussiana con media cero y varianza

$$V[I(t)] = \int_0^t f^2(s) ds. \quad (\text{B.27})$$

Cada término en la suma discreta (B.26) contiene un incremento de Wiener para cada paso de tiempo Δt , multiplicado por una función evaluada al inicio de este paso de tiempo. Este es un resultado directo de la forma en la que hemos definido una EDE, de hecho, las soluciones a EDEs, como las hemos definido, siempre involucran integrales en la cual el integrando es evaluado al inicio de cada paso de tiempo. Hasta ahora esto no había sido muy importante, pero se volverá importante cuando el integrando sea una suma de incrementos de Wiener. Por ejemplo, si $f(t)$ fuera un proceso estocástico, entonces ésta sería una función de todos los incrementos ΔW_j hasta el tiempo t . Así que el hecho de que $f(t)$ esté evaluada al inicio del intervalo significa que, para cada término en la suma (B.26), ΔW_n es independiente de todos los incrementos que contribuyen a $f(n\Delta t)$. Debido a esto tenemos

$$\langle f(n\Delta t) \Delta W_n \rangle = \langle f(n\Delta t) \rangle \langle \Delta W_n \rangle = 0, \quad (\text{B.28})$$

y así $\langle I(t) \rangle = 0$, aún si $f(t)$ es un proceso estocástico. Esto es importante cuando se consideran integrales estocásticas múltiples y modelado con ruido multiplicativo en sistemas reales.

De hecho, existen otras maneras de definir EDEs tal que las integrales estocásticas resultantes no están definidas en términos de los valores del integrando al inicio de cada intervalo. Por ejemplo, ellas pueden ser definidas en términos de los valores del integrando en el centro de cada integral, e incluso al fin de cada intervalo. Ya que hay más de una manera de definir una integral estocástica, aquellas en las cuales el integrando está evaluado al inicio de cada intervalo son llamadas integrales estocásticas Ito, y las EDEs correspondientes ecuaciones estocásticas Ito. Las otras versiones de ecuaciones estocásticas son más difíciles de resolver. La principal alternativa a la integral estocástica Ito es la integral Stratonovich. No obstante, todas las formas alternativas de definir integrales estocásticas, y las correspondientes EDEs, dan la misma clase de soluciones generales, y siempre es posible transformar los diferentes tipos de EDEs a EDEs Ito.

B.1.3. Ruido blanco

Se sabe que la derivada del proceso de Wiener no existe, ya que el movimiento Browniano no es diferenciable. Sin embargo, hay un significado en el cual la autocorrelación de esta derivada existe, y este hecho puede ser útil como una herramienta de cálculo. A beneficio del argumento llamaremos a la derivada de la función de Wiener $\xi(t)$. Ya que los incrementos del proceso de Wiener en dos intervalos consecutivos de tiempo dt son independientes entre sí, $\xi(t)$ debe de estar no correlacionado con sí mismo cuando la separación temporal es más grande que cero. Entonces debemos tener $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = 0$ si $\tau > 0$. Además, si intentamos calcular $\langle \xi(t) \xi(t) \rangle$, obtenemos

$$g(0) = \langle \xi(t) \xi(t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\Delta W}{\Delta t} \frac{\Delta W}{\Delta t} \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \langle (\Delta W)^2 \rangle \quad (\text{B.29})$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \langle \Delta t \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \rightarrow \infty.$$

Una función que tiene esta propiedad es la función delta $\delta(\tau)$, definida por la regla

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0), \quad (\text{B.30})$$

para cualquier función suave $f(t)$.

Ahora asumamos que $\xi(t)$ es una fuente de ruido con la función de autocorrelación $\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \delta(\tau)$ e intentemos usar esta consideración para resolver la ecuación

$$dx = g dW. \quad (\text{B.31})$$

Sabemos que la solución es $x(t) = gW(t)$. Si $\xi(t)$ existe entonces podemos escribir la ecuación estocástica como

$$\frac{dx}{dt} = g\xi(t), \quad (\text{B.32})$$

y la solución es simplemente

$$x(t) = g \int_0^t \xi(s) ds. \quad (\text{B.33})$$

Ahora calculemos la varianza de $x(t)$. Esto es

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= \left\langle g^2 \int_0^t \xi(s) ds \int_0^t \xi(v) dv \right\rangle = g^2 \int_0^t \int_0^t \langle \xi(s) \xi(v) \rangle ds dv \\ &= g^2 \int_0^t \int_0^t \delta(s-v) ds dv = g^2 \int_0^t dv = g^2 t, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

lo cual es la respuesta correcta. También podemos calcular la función de autocorrelación two-time de $x(t)$. Esto es

$$\begin{aligned} \langle x(t) x(t+\tau) \rangle &= \left\langle g^2 \int_0^t \xi(s) ds \int_0^{t+\tau} \xi(v) dv \right\rangle = g^2 \int_0^t \int_0^{t+\tau} \delta(s-v) ds dv \\ &= g^2 \int_0^t dv = g^2 t, \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

lo cual también es correcto. Entonces hemos sido capaces de obtener la solución correcta a la ecuación diferencial estocástica asumiendo que $\xi(t) \equiv dW(t)/dt$ existe y tiene una función de autocorrelación δ . Esta técnica funcionará para cualquier ecuación diferencial estocástica que tenga ruido puramente aditivo, pero no funcionará para ecuaciones diferenciales estocásticas en las cuales el ruido dW multiplique una función de cualquiera de las variables.

Considerando que el espectro de potencia de un proceso es la transformada de Fourier de su función de autocorrelación, el espectro de ξ es siempre 1. Esto es, el espectro es el mismo para todos los valores de frecuencia, y ya que el espectro contiene cantidades iguales de todas las frecuencias, el proceso $\xi(t)$ es referido como ruido blanco.

La razón de que podamos afirmar que $\xi(t)$ existe y usarla para resolver una ecuación estocástica que contenga ruido aditivo, es que una ecuación diferencial es un filtro que no deja pasar frecuencias infinitamente altas: aún cuando $\xi(t)$ tenga frecuencias infinitamente altas la solución a una ecuación diferencial impulsada por $\xi(t)$ no las tiene. Siempre y cuando el ancho de banda de la dinámica del sistema (esto es, las frecuencias que la ecuación diferencial deja pasar) sea pequeño comparado al ancho de banda de las frecuencias de una fuente de ruido real que lo impulsa, el ruido blanco servirá como una buena aproximación a este ruido real. Esto es el porqué podemos usar el proceso de Wiener para modelar ruido en sistemas reales. La pregunta de porqué no podemos usar $\xi(t)$ (al menos como lo definimos anteriormente) para modelar ruido real que no es aditivo es más sutil, y será discutida en la Sección B.1.4.

B.1.4. Ruido multiplicativo e integrales Stratonovich

El ruido que es independiente del estado de un sistema se dice que es aditivo. Se puede estar tentado a decir que el ruido multiplicativo debería ser descrito al añadir un término

proporcional a $x dW$ a la ecuación. Sin embargo, esto no es completamente correcto, hay una sutileza aquí que debe ser investigada para tener la descripción correcta.

La razón de la sutileza es que el ruido de Wiener, la base de nuestro tratamiento matemático del ruido, es una idealización. Éste asume que en cada intervalo de tiempo infinitesimal (no importa cuán pequeño) el incremento debido al ruido es diferente (e independiente de) del incremento en el intervalo previo. ¡Esto significa que el ruido tiene fluctuaciones que son infinitamente rápidas! Ningún proceso físico puede tener realmente esta propiedad, y así los procesos físicos reales no pueden realmente ser ruido de Wiener. El proceso de Wiener es una buena aproximación a un proceso real fluctuante siempre y cuando éste tenga fluctuaciones en un rango de frecuencia que sea ancho en comparación al rango de frecuencia del movimiento del sistema (Subsección B.1.3). Esto es el porqué las EDEs que hemos estado estudiando son útiles para describir sistemas físicos. Sin embargo, resulta que hay más de una forma para definir una ecuación estocástica en diferencias impulsada por incrementos aleatorios ΔW , y así más de una manera para tomar el límite del continuo y obtener una EDE.

La ecuación general Ito en diferencias es

$$\Delta x = f(x, t) \Delta t + g(x, t) \Delta W. \quad (\text{B.36})$$

Ahora, si definimos $x_n \equiv x(n\Delta t)$, $t_n \equiv n\Delta t$ y el primer incremento aleatorio ΔW como ΔW_0 , entonces podemos escribir la ecuación como

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \Delta x_{n-1} \\ &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, t_{n-1}) \Delta t + g(x_{n-1}, t_{n-1}) \Delta W_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

La solución general (obtenida al añadir repetidamente Δx_n al valor inicial de x , $x_0 \equiv x(0)$) está dada por

$$x_N = x(N\Delta t) = x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n, t_n) \Delta t + \sum_{n=0}^{N-1} g(x_n, t_n) \Delta W_n. \quad (\text{B.38})$$

Esta expresión no es muy útil para encontrar una solución explícita para $x(N\Delta t)$, ya que para hacerlo tendríamos que sustituir repetidamente en las soluciones para x_{N-1} , x_{N-2} , etc. Esto daría una expansión difícil de manejar y con un número infinito de términos cuando se intente tomar el límite del continuo $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, esto nos muestra cómo la integral Ito, definida como

$$\int_0^t g(x(t), t) dW \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g(x_n, t_n) \Delta W_n, \quad (\text{B.39})$$

aparece en la solución para $x(t)$.

El punto sutil al que se aludió arriba es que hay más de una manera de definir una integral

estocástica del proceso de Wiener. Otra forma, referida como la integral Stratonovich es

$$\begin{aligned} \text{st} \int_0^t g(x(t), t) dW &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{x((n+1)\Delta t) + x(n\Delta t)}{2}, n\Delta t\right) \Delta W_n \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

donde hemos escrito la integral con un **st** para diferenciarla de la integral Ito. Ahora, si dW fuera el incremento de una función suave bien comportada del tiempo, las integrales Ito y Stratonovich serían iguales, pero este no es el caso. De aquí que aparezca una ambigüedad cuando definimos la integral del proceso de Wiener, ¿cuál deberíamos usar?

Antes de responder a la pregunta calculemos la relación precisa entre los dos tipos de integrales estocásticas. Para entender de dónde viene la diferencia note que en la integral Ito, en el n -ésimo paso de tiempo se tiene el valor de $g(x, t)$ evaluada al inicio del paso de tiempo, multiplicando al incremento ΔW_n . El valor de g en este paso de tiempo es una función de todos los incrementos previos, $\Delta W_{n-1}, \Delta W_{n-2}, \dots$, pero no del nuevo incremento ΔW_n . Así $(\Delta W_n)^2$ no aparece en el n -ésimo término. Sin embargo, en la integral Stratonovich el n -ésimo término contiene el valor de g en el fin del intervalo para aquel paso de tiempo. Esto significa que en cada paso de tiempo la integral Stratonovich contiene un término extra proporcional a $(\Delta W_n)^2$. Como mencionamos antes, esto no importaría si $W(t)$ fuera una función suficientemente suave (que es, diferenciable), ya que $(\Delta W_n)^2$ tendería a cero en el límite del continuo. Sin embargo, el cuadrado del incremento de Wiener no es nulo en este límite, sino igual a dt . Esto es lo que da lugar a la diferencia entre las integrales Ito y stratonovich. Ahora calcularemos precisamente lo que es esta diferencia.

Primero consideremos x_n como la solución a la ecuación Ito

$$x_n = x_{n-1} + f(x_{n+1}, t_{n+1}) \Delta t + g(x_{n+1}, t_{n+1}) \Delta W_{n-1}. \quad (\text{B.41})$$

Esto significa que x_n es la solución obtenida al usar la definición Ito de una integral estocástica (ecuación (B.39)). Entonces notamos que el n -ésimo término en la integral Stratonovich es

$$g\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n = g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n. \quad (\text{B.42})$$

Ahora expandimos g como una serie de potencias alrededor del punto (x_n, t_n) . Para hacer la notación más compacta definimos $g_n \equiv g(x_n, t_n)$. Tomando esta expansión a segundo orden da

$$g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) = g_n + \left(\frac{\Delta x_n}{2}\right) \frac{\partial g_n}{\partial x} + \left(\frac{\Delta x_n}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}. \quad (\text{B.43})$$

Como siempre, la razón de tomar esto a segundo orden es porque Δx_n incluye un término ΔW_n . Ahora usamos el hecho de que $\Delta x_n = f(x_n, t_n) \Delta t + g(x_n, t_n) \Delta W_n$, y recordando que

$(\Delta W)^2 = \Delta t$ esto da

$$g\left(x_n + \frac{\Delta x_n}{2}, t_n\right) = g_n + \left(\frac{f_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x} + \frac{g_n^2}{4} \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}\right) \Delta t + \left(\frac{g_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x}\right) \Delta W_n. \quad (\text{B.44})$$

Ahora hemos expresado la g que aparece en el n -ésimo término en la integral Stratonovich enteramente en términos de la g_n que aparece en la integral Ito. Sustituyendo esto en la suma discreta para la integral Stratonovich nos permitirá escribir inmediatamente esta suma en términos de la integral Ito. El resultado es

$$\sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}, t_n\right) \Delta W_n = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \Delta W_n + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial x} \Delta t \quad (\text{B.45})$$

Note que al hacer esto hemos eliminado los términos proporcionales a $\Delta t \Delta W_n$, esto está bien ya que, como $(\Delta t)^2$, ellos son nulos en el límite del continuo. La primera suma en el lado derecho es la suma familiar para la integral Ito, así que tomando el límite del continuo tenemos

$$\text{st} \int g(x(t), t) dW = \int_0^t g(x(t), t) dW + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial g(x(t), t)}{\partial x} g(x(t), t) dt. \quad (\text{B.46})$$

Ahora vemos que si definimos nuestra solución a la ecuación estocástica

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dW \quad (\text{B.47})$$

usando la integral Stratonovich en vez de la integral Ito, entonces la solución, la cual llamaremos $y(t)$, será

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t f(y(t), t) dt + \text{st} \int_0^t g(y(t), t) dW \\ &= y(0) + \int_0^t \left[f(y(t), t) dt + \frac{g(y(t), t)}{2} \frac{\partial g(y(t), t)}{\partial y} \right] dt + \int_0^t g(y(t), t) dW. \end{aligned}$$

Pero esta sería la solución que tendríamos si usamos la integral Ito para resolver la ecuación estocástica

$$dy = \left(f + \frac{g}{2} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dt + g dW. \quad (\text{B.48})$$

Entonces vemos que usando la integral Stratonovich como la solución a una EDE es lo mismo que resolver la ecuación usando los métodos de la integral Ito pero cambiando el término determinista f por $f + g/2 \cdot \partial g / \partial x$.

Es posible derivar la relación entre ecuaciones estocásticas vectoriales Ito y Stratonovich. Considere la siguiente ecuación estocástica vectorial

$$d\vec{x} = \vec{A}(\vec{x}, t) dt + B(\vec{x}, t) \overrightarrow{dW}, \quad (\text{B.49})$$

$$dx_i = A_i(\vec{x}, t) dt + \sum_j B_{ij}(\vec{x}, t) dW_j, \quad (\text{B.50})$$

donde los x_i son los elementos del vector \vec{x} , A_i son los elementos del vector \vec{A} , B_{ij} son los elementos de la matriz B , y los dW_i son los elementos del vector \vec{dW} , los cuales representan ruidos de Wiener mutuamente independientes. Si (B.50) es una ecuación Stratonovich, entonces la ecuación Ito equivalente es

$$dx_i = \left(A_i + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k B_{kj} \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k} \right) dt + \sum_j B_{ij} dW_j \quad (\text{B.51})$$

Pero, ¿porqué hemos estado estudiando la integral Stratonovich? La razón es que cuando consideramos ruido multiplicativo en un sistema físico real, es la integral Stratonovich en vez de la integral Ito la que aparece naturalmente: resulta que si tenemos una fuerza real fluctuando, y tomamos el límite en el cual el ancho de banda de las fluctuaciones se vuelve muy ancho (comparado a la escala de tiempo del sistema), es la integral Stratonovich la que es el límite de este proceso, no la integral Ito. Por lo tanto, para tratar ruido multiplicativo en sistemas físicos debemos usar el siguiente procedimiento.

Cuando escribimos una ecuación estocástica que describe la dinámica de un sistema impulsado por ruido físico cuya magnitud depende de el estado del sistema, ésta es una ecuación estocástica Stratonovich. Ya que las ecuaciones Ito son más fáciles de resolver que las ecuaciones Stratonovich, transformamos la ecuación Stratonovich a una ecuación Ito antes de proceder y entonces usamos el cálculo Ito. Si el ruido es puramente aditivo, entonces las ecuaciones Stratonovich e Ito son las mismas, y no se requiere transformación.

B.2. La ecuación de Fokker-Planck

Hasta ahora, para estudiar una ecuación diferencial estocástica hemos encontrado la densidad de probabilidad del proceso estocástico respectivo. Hay un método alternativo, donde en vez de eso se deriva una ecuación diferencial parcial para la densidad de probabilidad del proceso estocástico. Entonces se resuelve esta ecuación para obtener la densidad de probabilidad como una función del tiempo. Si el proceso está impulsado por ruido Gaussiano, la ecuación diferencial para la densidad de probabilidad es llamada una ecuación de Fokker-Planck.

Describir un proceso estocástico por su ecuación de Fokker-Planck (EFP) no da un acceso directo a tanta información como la EDE Ito, ya que esta no proporciona un método práctico para obtener las trayectorias muestrales del proceso. Sin embargo, ésta puede ser usada para obtener expresiones analíticas de densidades de probabilidad estacionarias cuando éstas no pueden ser obtenidas de la EDE.

B.2.1. Derivando la ecuación de Fokker-Planck

Dado un proceso estocástico $x(t)$ con la ecuación diferencial Ito

$$dx = f(x, t) dt + g(x, t) dW, \quad (\text{B.52})$$

la EFP puede ser derivada muy fácilmente. Para hacerlo primero calculemos la ecuación diferencial para el valor medio de una función arbitraria $h(x)$.

Usando la regla de Ito, la EDE para $h(x)$ es

$$dh = \left(\frac{dh}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right) (dx^2) \quad (\text{B.53})$$

$$= \left(\frac{dh}{dx} \right) f(x, t) dt + \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right) \frac{g^2(x, t)}{2} dt + \left(\frac{dh}{dx} \right) g(x, t) dW. \quad (\text{B.54})$$

Tomando medias en ambos lados de la ecuación diferencial tenemos

$$d\langle h \rangle = \left\langle f(x, t) \left(\frac{dh}{dx} \right) \right\rangle dt + \left\langle \frac{g^2(x, t)}{2} \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right) \right\rangle dt, \quad (\text{B.55})$$

ya que $\langle dW \rangle = 0$. O alternativamente

$$\begin{aligned} \frac{d\langle h \rangle}{dt} &= \left\langle f(x, t) \left(\frac{dh}{dx} \right) \right\rangle + \left\langle \frac{g^2(x, t)}{2} \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x, t) \left(\frac{dh}{dx} \right) + \frac{g^2(x, t)}{2} \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right) \right] P(x, t) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Integrando por partes, una vez para el primer término y dos veces para el segundo, y usando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x, t) = 0$, lo cual se sigue del hecho de que $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) = 1$, obtenemos

$$\frac{d\langle h \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) P(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2(x, t) P(x, t)] \right\} dx. \quad (\text{B.57})$$

También sabemos que la media de h está dada por

$$\langle h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) P(x, t), \quad (\text{B.58})$$

tal que la derivada temporal de la media puede ser escrita como

$$\frac{d\langle h \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) P(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \frac{\partial}{\partial t} P(x, t). \quad (\text{B.59})$$

Igualando las ecuaciones (B.57) y (B.59), y notando que ellas deben ser iguales para cualquier función $h(x)$, nos da la ecuación de Fokker-Planck para la densidad de probabilidad de $x(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t) P(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g^2(x, t) P(x, t)]. \quad (\text{B.60})$$

Es útil escribir la EFP para una variable singular en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -f(x, t) P(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [g^2(x, t) P(x, t)] \right\} \equiv -\frac{\partial}{\partial x} J(x, t), \quad (\text{B.61})$$

donde $J(x, t)$ está definido como

$$J(x, t) = f(x, t) P(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [g^2(x, t) P(x, t)] \quad (\text{B.62})$$

La relación entre P y J (dada por (B.61)) implica que $J(x)$ es la corriente de probabilidad: $J(x, t)$ es la razón a la cual la probabilidad está fluyendo a través del punto x al tiempo t .

Condiciones de frontera para la EFP

Para resolver una EFP se puede necesitar especificar las condiciones de frontera. Si $x \in \mathbb{R}$ esto será innecesario, ya que sabemos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x, t) = 0$, y esto estará reflejado en la condición inicial, $P(x, t = 0)$. Sin embargo, si x tiene algún dominio finito, digamos el intervalo $[a, b]$, entonces necesitamos especificar qué sucede en las fronteras a y b . Las tres posibilidades más comunes son:

1. Fronteras absorbentes. Una frontera absorbente es una en la cual la partícula es removida inmediatamente que esta pega en la frontera. Esto significa que la probabilidad de que la partícula esté sobre la frontera es siempre cero, y esta situación está descrita por la condición

$$P(c, t) = 0, \quad (\text{B.63})$$

donde c es la ubicación de la frontera absorbente.

2. Fronteras reflejantes. Una frontera reflejante es una en la cual la partícula nunca puede pasar a través de ella. Esto significa que la corriente de probabilidad debe ser cero a través de la frontera,

$$J(c, t) = 0, \quad (\text{B.64})$$

donde c es la ubicación de la frontera reflejante.

3. Fronteras periódicas. En este caso las dos fronteras del intervalo están conectadas. Esto significa que la partícula está moviéndose en un lazo cerrado, como un círculo en una dimensión o un toro en dos dimensiones. En este caso, ya que los dos límites describen la misma ubicación física, tanto la densidad de probabilidad y la corriente de probabilidad deben ser la misma en ambas fronteras.

$$P(a, t) = P(b, t), \quad (\text{B.65})$$

$$J(a, t) = J(b, t), \quad (\text{B.66})$$

donde $[a, b]$ es el intervalo en el que se mueve la partícula.

B.2.2. Soluciones estacionarias para una dimensión

Cuando la EFP es uno-dimensional se pueden calcular con bastante facilidad sus soluciones estacionarias. Una solución estacionaria es definida como una en la cual $P(x, t)$ no cambia con el tiempo. Comúnmente $P(x, t)$ tenderá a la solución estacionaria cuando $t \rightarrow \infty$ para todas las elecciones iniciales de la densidad de probabilidad, y por esta razón la solución estacionaria es importante. La ecuación diferencial que describe las soluciones estacionarias es obtenida al poner $\partial P/\partial t = 0$ en la EFP. Haciendo esto tenemos

$$-\frac{d}{dx} [f(x) P(x)] + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [g^2(x) P(x)] = 0 = -\frac{d}{dx} J(x). \quad (\text{B.67})$$

Esta ecuación nos dice que la corriente de probabilidad J no cambia con x , y es por lo tanto la misma en todos lados. La corriente de probabilidad también debe ser constante en el tiempo, ya que esto es requerido para que P sea constante en el tiempo. Reescribimos la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [g^2(x) P(x)] - f(x) P(x) + J \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [g^2(x) P(x)] - f(x) P(x) + J &= cte, \end{aligned}$$

donde sin pérdida de generalidad se puede elegir la constante igual a cero. Entonces la densidad de probabilidad estacionaria, $P(x)$, se obtiene al resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [g^2(x) P(x)] - f(x) P(x) + J = 0. \quad (\text{B.68})$$

Fronteras reflejantes

En este caso $J = 0$ en al menos una frontera, y entonces $J = 0$ en todos lados. Entonces la ecuación diferencial para la solución estacionaria es

$$\frac{d}{dx} [g^2(x) P(x)] = 2f(x) P(x). \quad (\text{B.69})$$

Definiendo una nueva función $\xi(x) \equiv g^2(x) P(x)$, vemos que ésta es una ecuación diferencial lineal para $\xi(x)$,

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = \left[\frac{2f(x)}{g^2(x)} \right] \xi(x). \quad (\text{B.70})$$

Considerando el dominio $x \in [a, b]$ la solución es

$$P(x) = \frac{g^2(a) P(a)}{g^2(x)} \exp \left[\int_a^x \frac{2f(u)}{g^2(u)} du \right].$$

Definiendo una constante $N \equiv 1/[g^2(a)P(a)]$ la densidad de probabilidad $P(x)$ está dada por

$$P(x) = \frac{1}{Ng^2(x)} \exp \left[\int_a^x \frac{2f(u)}{g^2(u)} du \right], \quad (\text{B.71})$$

donde la constante N es escogida tal que

$$\int_a^b P(x) dx = 1. \quad (\text{B.72})$$

Fronteras periódicas

En este caso J no será necesariamente nula. Sin embargo J no es un parámetro libre, sino que está completamente determinada por la consideración de estacionariedad. La ecuación diferencial para $P(x)$ es

$$\frac{d}{dx} [g^2(x)P(x)] = 2f(x)P(x) - 2J. \quad (\text{B.73})$$

Definiendo nuevamente $\xi(x) \equiv g^2(x)P(x)$, esta es una ecuación lineal para ξ , pero esta vez con un término forzante constante:

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = \left[\frac{2f(x)}{g^2(x)} \right] \xi(x) - 2J. \quad (\text{B.74})$$

La solución es

$$P(x) = \frac{Z(x)}{g^2(x)} \left[P(a) \frac{g^2(a)}{Z(a)} - 2J \int_a^x \frac{ds}{Z(s)} \right], \quad (\text{B.75})$$

donde hemos definido

$$Z(x) = \exp \left[\int_a^x \frac{2f(u)}{g^2(u)} du \right]. \quad (\text{B.76})$$

Ahora aplicando la condición de frontera periódica $P(a) = P(b)$ (note que ya hemos aplicado esta condición sobre J al hacerla constante) obtenemos

$$J = \frac{P(a)}{2 \int_a^b \frac{ds}{Z(s)}} \left[\frac{g^2(a)}{Z(a)} - \frac{g^2(b)}{Z(b)} \right]. \quad (\text{B.77})$$

Por lo tanto la solución es

$$P(x) = P(a) \frac{\frac{g^2(a)}{Z(a)} \int_x^b \frac{ds}{Z(s)} + \frac{g^2(b)}{Z(b)} \int_a^x \frac{ds}{Z(s)}}{\frac{g^2(x)}{Z(x)} \int_a^b \frac{ds}{Z(s)}}, \quad (\text{B.78})$$

donde $P(a)$ es elegido tal que

$$\int_a^b P(x) dx = 1.$$

Bibliografía

- [1] Ambegaokar, V. *Reasoning About Luck: probability and its uses in physics*. Cambridge University Press, Great Britain, 1996.
- [2] Bigg, G. R. *The Oceans and Climate*. Second Edition. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [3] Box, G. E. and G. M. Jenkins. *Time Series Analysis. Forecasting and Control*. Revised Edition. Holden-Day, San Fransisco, 1976.
- [4] Brooks, C. *Introductory Econometrics for Finance*. Second Edition. Cambridge University Press, New York, 2008.
- [5] Deser, M. A. Alexander, S.-P. Xie and A. S. Phillips (2010) “Sea surface temperature variability: patterns and mechanisms”, *Annual Review Marine Science* **2**, pp. 115-143.
- [6] Ghil, M. (2002) “Natural climate variability”, en *Encyclopedia of Global Environmental Change*, vol. 1, editada por T. E. Munn, M. MacCracken and J. Perry, pp. 544-549, John Wiley, Hoboken, N. J.
- [7] Grima, R. and Newman, T. J. (2004) “Accurate discretization of advection-diffusion equations”, *Phys. Rev. E* **70**, 036703.
- [8] Hartmann, D. L. *Global Physical Climatology* Academic Press, United States Of America, 1994.
- [9] Harvey L. D. D. and Schneider, S. H. (1985) “Transient climate response to external forcing on 10^0 – 10^4 year time scales. Part 1: Experiments with globally averaged, coupled, atmosphere and ocean energy balance models”, *J Geophys Res* **90**, pp. 2191-2205.
- [10] Hasselmann, K. (1976) “Stochastic climate models. Part I: theory”, *Tellus* **28**, pp. 473-485.
- [11] Higham, D. J. (2001) “An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations”, *SIAM Rev* **43**, pp. 525-546.
- [12] IPCC, 2001. *Climate Change. Working Group I: The Scientific Basis*. “Radiative Forcing of Climate Change”. Cambridge University Press, IPCC, New York, USA.

- [13] IPCC, 2007. Climate Change. Working Group I: The Scientific Basis. “Global Climate Projections”. Cambridge University Press, IPCC, New York, USA.
- [14] Jacobs, K. *Stochastic processes for physicists. Understanding Noisy Systems*. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [15] Kunze, E., Firing, E., Hummon, J. M., Chereskin, T. K. and Thurnherr, A. M. (2006) “Global abyssal mixing inferred from lowered ADCP shear and CTD strain profiles”, *J. Phys. Oceanogr.* **36**, pp. 1553-1576.
- [16] McGuffie, K. and Henderson-Sellers, A. *A Climate Modelling Primer*. Third Edition. John Wiley & Sons, Ltd, Great Britain, 2005.
- [17] Mudelsee, M. *Climate Time Series Analysis. Classical Statistical and Bootstrap Methods*. Springer, Atmospheric and Oceanographic Sciences Library, Volume 42, New York, 2010.
- [18] Munk, W. (1966) “Abyssal recipes”, *Deep-Sea Research* **13**, pp. 707-730.
- [19] Open University. *Seawater: Its Composition, Properties and Behavior*. The Oceanography Series, vol. 1 (editor Bearman, G.). Second Edition. Butterworth Heinemann, Oxford, 2004.
- [20] Penland, C. and Ewald, B. D. (2008) “On modelling physical systems with stochastic models: diffusion versus Lévy processes”, *Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* **366**, pp. 2455-2474.
- [21] Stouffer, R. J., Hegerl, G. and Tett, S. (2000) “A comparison of surface air temperature variability in three 1000-yr coupled ocean-atmosphere model integrations”, *J. Climate* **13**, pp. 513-537.
- [22] von Storch, H. and Zwiers, F. W. *Statistical Analysis in Climate Research*. Cambridge University Press, United Kingdom, 1999.
- [23] Wielicki, B. A., Wong, T. M., Allan, R. P., Slingo, A., Kiehl, J. T., Soden, B. J., Gordon, C. T., Miller, A. J., Yang, S. K., Randall, D. A., Robertson, F., Susskind, J. and Jacobowitz, H. (2002) “Evidence for large decadal variability in the tropical mean radiative energy budget”, *Science* **295**, pp. 841-844.
- [24] Wilks, D. S. *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. Second Edition. Academic Press, United States of America, 2006.
- [25] Wilks, D. S. (2008) “Effects of stochastic parametrization on conceptual climate models”, *Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* **366**, pp. 2477-2490.
- [26] Williams, P. D. (2005) “Modelling climate change: The role of unresolved processes”, *Philos. Trans. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci.* **363**, pp. 2931-2946.

- [27] Wunsch, C. and Ferrari, R. (2004) “Vertical mixing, energy and the general circulation of the oceans”, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, pp. 281-314.