



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Modelación del paleoclima de los últimos
420ka: Oscilaciones Asimétricas.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

DIEGO JIMÉNEZ DE LA CUESTA OTERO

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. MANUEL RENÉ GARDUÑO LÓPEZ



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

- 1. Datos del Alumno
Jiménez de la Cuesta
Otero
Diego
55 15 04 47
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
407098192
- 2. Datos del Tutor
M. en C.
Manuel René
Garduño
López
- 3. Datos del Sinodal 1
Dr.
Darío
Núñez
Zúñiga
- 4. Datos del Sinodal 2
Dr.
Carlos
Málaga
Iguiñiz
- 5. Datos del Sinodal 3
Dr.
Pedro Eduardo
Miramontes
Vidal
- 6. Datos del Sinodal 4
M. en C.
Oscar Casimiro
Sánchez
Meneses
- 7. Datos del trabajo escrito
**Modelación del paleoclima de los últimos
420ka: Oscilaciones Asimétricas.**
59 pp
2012

Modelación del paleoclima de los últimos 420ka: Oscilaciones Asimétricas.

Diego Jiménez de la Cuesta Otero.

Índice general

I	Introducción.	5
1.	Antecedentes.	6
1.1.	Introducción al análisis cualitativo de las STBGV.	7
1.2.	Un recorrido guiado a través de las STBGV.	9
1.3.	Se atisba el modelo cuantitativo.	11
II	Las Bases.	13
2.	Los Flujos en el SC.	14
2.1.	El Modelo Logístico.	16
2.1.1.	Adimensionalización de la Ecuación de Verhulst. Modelo Logístico.	17
2.1.2.	Solución del Modelo Logístico.	17
2.2.	La Ecuación Logística y sus soluciones como modelo de flujos del SC.	19
3.	La Cadena Energética.	21
3.1.	Diagrama de flujo de la CE.	21
3.1.1.	Irradiancia solar, albedo y calentamiento de la Superficie.	22
3.1.2.	Reemisión en onda larga y calentamiento de la Atmósfera.	23
3.1.3.	Efecto invernadero.	24
3.1.4.	Discusión del diagrama de flujo.	24
3.2.	Modelo de la CE.	24
4.	El Ciclo de Carbono.	28
4.1.	Diagrama de flujo del CC.	28
4.1.1.	Discusión del diagrama de flujo.	28
4.2.	Modelo del CC.	31
4.3.	Modelos de los coeficientes de flujo.	32
4.3.1.	Interacción Continente - Atmósfera.	32
4.3.2.	Interacción Océano - Atmósfera.	33
4.3.3.	Proceso Continente - Océano.	33
4.4.	Resumen.	33

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
III La simulación.	34
5. Un mar de opciones... pero sólo una correcta.	35
5.1. La Cadena Energética. Simulación.	35
5.1.1. Discusión del código.	35
5.1.2. Parámetros de las sigmoides y condiciones iniciales. Mejor ajuste.	38
5.2. El Ciclo de Carbono. Simulación.	39
5.2.1. Discusión del código.	39
5.2.2. Parámetros de las sigmoides y condiciones iniciales. Mejor ajuste.	39
IV Cuestiones sobre un modelo.	52
6. Epílogo. Sobre depredadores, presas, intermediarios y bihamiltonianos.	53
6.1. Conclusiones cualitativas a partir de trabajos sobre sistemas de Lotka-Volterra.	53
6.2. Sistemas Bihamiltonianos.	55

Prólogo.

Dave, this conversation can serve no purpose anymore. Goodbye.

HAL9000,
2001: a space odyssey.

En este trabajo presento un diagnóstico (análisis cualitativo) y una simulación (análisis cuantitativo) del Sistema Climático (SC) y el Metabolismo Bio-geofisicoquímico de la Tierra a partir de dos modelos simples construidos para tal efecto, usando datos paleoclimáticos de 420ka hasta hace unos 2ka antes del Antropoceno¹ obtenidos del Barreno Glacial de Vostok (BGV). Los modelos matemáticos presentados, en los que se basa la simulación, son abstracciones de un balance energético, que llamamos Cadena Energética, y el Ciclo de Carbono. Los modelos contienen en su estructura un principio aparentemente universal: existe saturación en los principales procesos del Sistema Climático. En la construcción del modelo tomé como base la discusión cualitativa, producto de los trabajos del IGBP², que aparece en [Stef00A] y un tanto menos explícita en [Faea00A]. Para la construcción cuantitativa busqué simplificar los subsistemas del SC implicados para proponer una base sobre la cuál montar la complejidad del sistema en futuros trabajos.

A lo largo de los capítulos mostraré cómo los modelos simulan correctamente, al menos en primera aproximación, la dinámica del SC, tomando como punto de comparación las Series de Tiempo del BGV (STBGV).

¹El intervalo geológico de la acción humana.

²International Geosphere-Biosphere Programme.

Parte I
Introducción.

Capítulo 1

Antecedentes.

Except for a single, very powerful radio emission aimed at Jupiter, the four million-year-old black monolith has remained completely inert, its origin and purpose still a total mystery.

Dr. Heywood Floyd,
2001: a space odyssey.

En la actualidad se vive un problema en las Ciencias Ambientales y de la Tierra. El problema consiste en la relación de las emisiones de CO_2 ¹ producto de la actividad humana y el aumento en la temperatura media en la superficie del planeta. Tal problema, como ha sido abordado por los expertos, ha consistido en el modelado del Sistema Climático (SC). Sin embargo, el presente trabajo no toma en cuenta la actividad humana, debido a que el intervalo temporal analizado no es el Antropoceno, y estudia el SC de tal manera que en trabajos posteriores sea posible introducir la actividad humana del Antropoceno como una perturbación.

La dificultad de describir el SC reside en el hecho que el sistema es complejo; ya que éste consta de diversos Subsistemas, Procesos y haces de Procesos bidireccionales (llamados Interacciones) y es difícil elegir un mínimo de variables para describir la dinámica del SC en las diversas escalas de tiempo y con una mínima fidelidad. De hecho ésto último es la causa de que en la actualidad existan muchos

¹Y otros Gases de Efecto Invernadero (GEI).

modelos del SC, pero con diversas hipótesis cada uno y resultados muchas veces distintos. Más aún, el factor biológico el cual es actor y sujeto de acción (como es posible intuir), es sumamente complicado de describir.

A pesar de lo anterior todos los investigadores tienen a su disposición datos bien definidos. Los datos más abundantes, es de esperar, son de las últimas décadas del siglo XIX hasta principios del siglo XXI, medidas instrumentales de las variables que se tratan. Pero también existen datos paleoclimáticos, de naturaleza obviamente indirecta, de los que se pueden deducir las cantidades de GEI y la Temperatura (T). En su mayoría provienen de barrenos del fondo marino y de glaciares². Por un lado, los barrenos del fondo marino proporcionan información sobre la sedimentación de materia orgánica e inorgánica, lo que provee datos sobre la abundancia de vida en el Océano y el aporte de materia desde el Continente por procesos de escorrentía y transporte (advectivo) atmosférico de Continente a Océano, mientras que los barrenos glaciales proporcionan medidas de los GEI a partir de las burbujas de aire en el hielo, T e insolación a partir de las características físicas del hielo como la concentración de isótopos conocidos³.

²Sobre todo de los casquetes polares.

³En el caso de los datos usados en este trabajo se obtuvieron temperaturas a partir de un análisis del cociente de la concentración de isótopos ^{16}O y ^{18}O y de la concentración de 2H como se describe en [Pee99A] y en el correspondiente juego de datos, el

En [Stef00A] se puede encontrar una rica descripción cualitativa del SC, producto de los trabajos del IGBP⁴, en el intervalo de tiempo que cubren los datos publicados por [Peea99A] obtenidos del BGV extraído en la Antártida. El modelo cualitativo de [Stef00A] lo he utilizado como senda hacia un modelo cuantitativo del SC. En [Stef00A] se intenta llegar a una explicación plausible de las STBGV e incorpora elementos que muestran la intrincada relación entre química, biología y física para describir el así llamado Metabolismo Biogeofisicoquímico del planeta.

A continuación presento las STBGV. En las figuras 1.1 y 1.2 muestro tres series de tiempo donde el tiempo está etiquetado desde 0 (el más profundo en el barreno y, por tanto, más antiguo de los datos) hasta el dato más reciente. Cada serie de tiempo corresponde a una de tres variables: CH_4 , CO_2 y T . Para fechar los estratos de hielo las técnicas que se usaron se describen en [Peea99A]. En el eje vertical de las series para CH_4 y CO_2 se mide la concentración de éstos en partes por mil millones-volumen (ppmmv) y partes por millón-volumen (ppmv), respectivamente, mientras que en el caso de T se mide la anomalía (ΔT) respecto de la temperatura media registrada en la base antártica Vostok de la Federación Rusa⁵, el barreno se tomó de la capa de hielo sobre el lago antártico Vostok.

1.1. Introducción al análisis cualitativo de las STBGV.

De la figura 1.1 se puede ver que las STBGV tienen las siguientes características sorprendentes:

1. Las series son periódicas, en el sentido de que los máximos (picos) y los mínimos (valles) principales de las tres STBGV se repiten: existen

cual se puede obtener de la página de NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration).

⁴International Geosphere-Biosphere Programme.

⁵-55C a 3,488m sobre el nivel del mar[Peea99A].

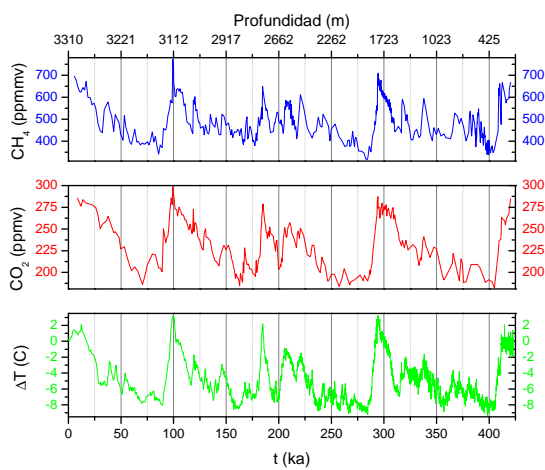


Figura 1.1: Las tres STBGV en paralelo usando los datos del BGV proporcionados por [Peea99A]. En rojo está el CO_2 , en azul el CH_4 y en verde ΔT . El extremo derecho corresponde a la actualidad y el izquierdo al fondo del barreno.

cinco picos⁶ y cuatro valles principales, en las tres STBGV, que están distribuidos a intervalos regulares a lo largo del registro temporal.

2. Las tres STBGV están en fase⁷, es decir, los extremos principales y secundarios coinciden. Ésto implica una íntima dependencia de ΔT (y por tanto de T) con la concentración de GEI a lo largo de milenios y no sólo, como se sabe, de siglos.
3. Las tres series están acotadas en una banda de valores. Ésto es indicativo, junto con la característica de periodicidad, de una oscilación del SC entre dos estados extremos a lo largo del

⁶Tres picos en toda regla y dos que son picos, los de los extremos de las STBGV, si no consideramos lo que hay antes o después. A partir de lo que se puede ver en [Auea04A] el primer pico si debe ser un pico verdadero, ya que ahí se muestra, a partir de otro barreno antártico (El llamado barreno EPICA) que existen otros cuatro ciclos atrás de los que se extraen del BGV.

⁷[GaCrT05A].

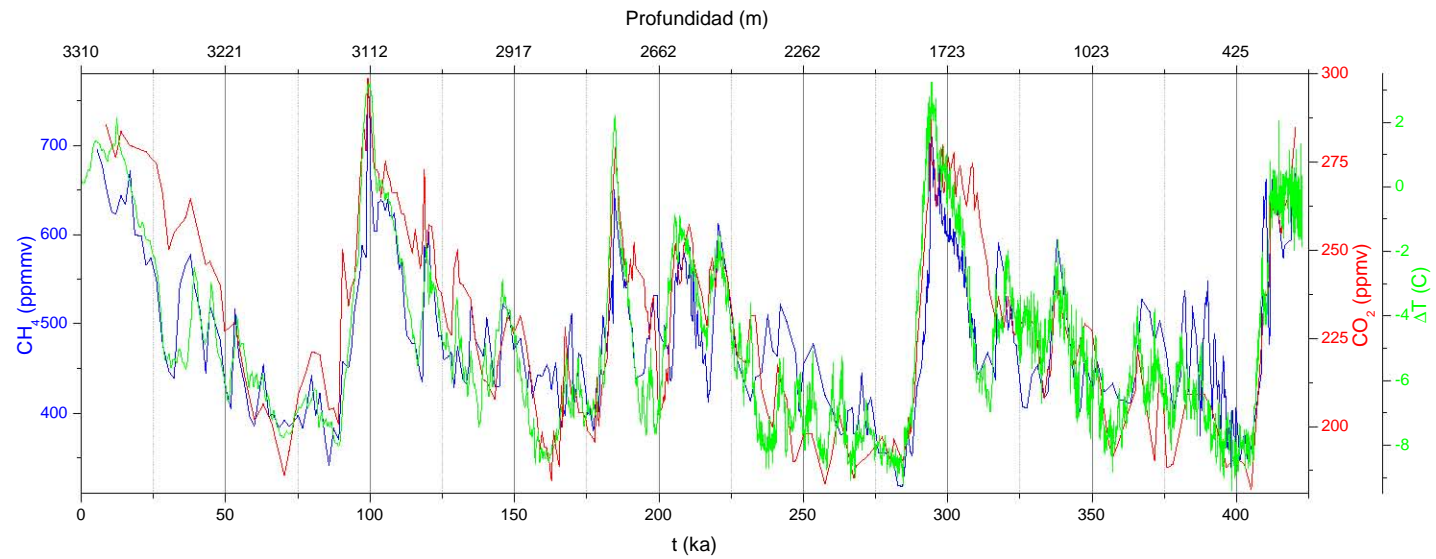


Figura 1.2: Las tres STBGV superpuestas usando los datos del BGV proporcionados por [Pee99A]. En rojo está el CO₂, en azul el CH₄ y en verde ΔT. El extremo derecho corresponde a la actualidad y el izquierdo al fondo del barreno.

intervalo de tiempo analizado por [Pee99A] y [Stef00A].

4. Olvidemos los extremos secundarios y observemos sólo los principales de las tres STBGV. La curva que conecta un pico con el siguiente valle, cronológicamente hablando, tiene una pendiente pequeña; mientras que la curva que conecta un valle con el siguiente pico tiene pendiente grande. Dadas las tres características discutidas, esto es indicativo de una transición paulatina de un interglacial (pico) a una glaciación (valle), mientras que la transición de una glaciación a un interglacial es súbita. Así, existe una asimetría en los procesos del SC que permiten tal comportamiento. A esta asimetría de las oscilaciones del SC la llamaré Asimetría Calentamiento Rápido-Enfriamiento Lento (ACREL).
5. Muy relacionado con la característica anterior, y en el mismo tenor, podemos ver que los interglaciales son cortos mientras que las glaciaciones son largas. Ésta es otra asimetría de las oscilaciones del SC que en mi trabajo llamaré Asimetría Pico-Valle (APV).

¿Cómo explicar estas características con ayuda de lo que sabemos del SC? Para ello habría que establecer primero un modelo cualitativo que sea válido de acuerdo a nuestras intuiciones físicas, es decir dar el salto mortal de la realidad observada y pasar a la realidad modelada. Como dije antes, [Stef00A] da una senda para ello. Es conveniente, para que el lector entienda el modelo desarrollado en mi trabajo, hacer un análisis de lo dicho en [Stef00A].

[Stef00A] se puede resumir a lo siguiente: existe un cambio de control entre el océano y el continente entre glaciaciones e interglaciales. Este cambio de control está dado por la interacción de los subsistemas en términos biológicos, geológicos, químicos, y físicos. En los interglaciales hay una biosfera continental vigorosa que disminuye el albedo, aumenta la temperatura y desencadena una serie de procesos

que finalmente llevan a la reducción de la biosfera continental a su menor extensión y fortalecen la biosfera oceánica lo cual desencadena otra serie de procesos que permiten una absorción oceánica de GEI aumentada llevando a un enfriamiento gradual, lo cual explicaría cualitativamente la ACREL y una de las mitades de la APV (las glaciaciones largas). Ésta es la base sobre la que construí los modelos. A continuación doy la versión no tan resumida.

1.2. Un recorrido guiado a través de las STBGV.

Ahora paso a la versión no resumida de los argumentos anteriores. Comencemos en un pico principal de las STBGV.

Hacia un control Oceánico. La Biosfera Continental (BC)⁸ está en su máximo tamaño, lo que es consecuencia de un aumento de la precipitación, a su vez consecuencia del aumento en el reservorio de H₂O Atmosférico, debido al máximo de evaporación reforzado positivamente por la alta T⁹. Este aumento de la precipitación permite incrementar el flujo de Alimento del Continente¹⁰ al Océano¹¹: una porción del Alimento de la Cadena Trófica Continental (CTC)¹² pasa a la empobrecida Cadena Trófica Oceánica (CTO)¹³ a través de la escorrentía generada por la precipitación. Ésto está en el pico en el que estamos empezando, de manera que en el Océano se dispara un pequeño crecimiento en la

⁸La BC se forma de todos los seres que viven en el Continente. Ésto incluye a los seres vivos que vuelan. No hay Biosfera Atmosférica.

⁹Ésto a escalas seculares, de acuerdo con el análisis hecho en [Stef00A] y [Faea00A].

¹⁰El Continente (con inicial mayúscula) es el conjunto de todas las tierras emergidas por encima del nivel del mar.

¹¹El Océano (con inicial mayúscula) lo defino como el conjunto de todas las aguas saladas que se ubican en las cuencas oceánicas y que rodean al Continente.

¹²Parte de la Cadena Trófica (CT) correspondiente al Continente.

¹³Parte de la CT correspondiente al Océano.

Biosfera Océánica (BO)¹⁴, lo que implica que el poco C disuelto en el Océano es aprovechado por este resurgimiento de la BO, lo cuál permite que haya un pequeño incremento en la disolución de C.

A medida que la escorrentía manda más Alimento del Continente al Océano, la BO toma este Alimento y CO_2 disuelto en el Océano para convertirlos en biomasa¹⁵, permitiendo que se pueda disolver más C de la Atmósfera¹⁶ en el Océano sin que haya cambiado la T. Por otro lado, la capacidad de disolver C en el Océano también se ve aumentada debido a que una parte del C disuelto es llevado por la circulación termohalina desde la capa de mezcla¹⁷ hasta las aguas profundas (aumentando el reservorio de C oceánico)¹⁸. Así la abundancia de C Atmosférico va en declive conforme la BO comienza a crecer como reservorio de C. Ésto disminuye el efecto invernadero, aunque al principio el cambio es mínimo.

Sin embargo, la pequeña disminución en el efecto invernadero genera una pequeña disminución en la T y como consecuencia en la evaporación, lo cual implica menos precipitación. Pero también ha decrecido el reservorio de C atmosférico que es necesario para mantener la BC. Entonces, así como la BO crece, pronto la BC decrece debido a que cada vez las pequeñas disminuciones en precipitación son más intensas y la cantidad de C disponible para el sustento de la BO es mayor (y el efecto acumulado aumenta). Sin embargo, la escorrentía, aunque en menor medida ya, sigue alimentando la CTO. Más aún, la T disminuye más: comienza a ser propicia para la creación de Criosfera¹⁹ (casquetes polares fundamentalmente), la cual aumenta el albedo pla-

netario, ya incrementado por la desertificación relativa del Continente (por la disminución de la BC).

Continente durmiente y Océano despierto. Siguiendo esta línea llegamos hasta uno de los valles de la STBGV. Aquí hay un mínimo del reservorio de C Atmosférico ya que el Océano ha utilizado gran parte en resurgir. La producción de CO_2 y CH_4 en el Continente disminuye debido a que hay menos BC y el Permafrost²⁰ se ha vuelto a congelar debido al crecimiento de la Criosfera²¹. Junto con ello la precipitación disminuye debido a que la evaporación es menor a causa de la menor T²². Por otra parte, el Océano es rico en CO_2 a causa del crecimiento de la BO que permite mayor disolución, ya que los organismos autótrofos del Océano usan el CO_2 disuelto para producir Alimento, dejando espacio para más disolución. En términos de la Cadena Energética (CE) tenemos una salida de radiación desde la Superficie al Espacio Exterior en un mínimo. Así ahora tenemos un Océano rebosante de vida y un Continente empobrecido respecto de la riqueza que éste tenía en el pico.

Otra vez al estado incial. El crecimiento de la BO llega su a fin. Ésto es debido a que no puede crecer más: se ha llegado a un máximo de disolución de C en el Océano y a un mínimo de flujo de Alimento desde la BC, debido a precipitación menor y el alejamiento de la CTC. Este déficit en las entradas implica que la BO decrece y libera CO_2 y CH_4 . Pero ya el Océano está saturado de C entonces hay un aumento en la exsolución²³ de éste, la cual no puede ser equilibrada por la disolución. Más aún, ahora hay un pequeño aumento de GEI en la Atmósfera lo

¹⁴La análoga del BC en el Océano.

¹⁵La masa de todos los seres vivos, en este caso, del Océano. Es una medida del tamaño de la Biosfera.

¹⁶La Atmósfera (con inicial mayúscula) es la capa de la atmósfera relevante para el clima, es decir la Troposfera.

¹⁷La zona del Océano que interactúa directamente con la Atmósfera.

¹⁸De acuerdo con el análisis del IGBP presentado en [Stef00A] y [Faea00A].

¹⁹La Criosfera es la capa de hielo que cubre el Continente o la superficie del Océano.

²⁰El Permafrost son pantanos congelados y los cuales son un reservorio de CH_4 .

²¹En el pico el Permafrost estaba lo suficientemente descongelado como para ser un pantano productor de CH_4 .

²²Consecuencia de la disminución del efecto invernadero por la pobreza de la Atmósfera en GEI y el aumento en el albedo planetario, que a su vez es debido a la Criosfera en crecimiento.

²³La exsolución es el proceso inverso a la disolución de gas en el Océano.

cual genera un pequeño aumento del efecto invernadero.

Pero, a diferencia de la transición de una BC rica a una BO rica, en este caso la transición es mucho más rápida, como se puede ver en las STBGV. Ésto puede explicarse de la siguiente forma: es más fácil destruir la Criosfera que generarla²⁴. El aumento de T inicia la ablación de esta Criosfera, de manera más rápida que el paso al que se formó ésta²⁵. El derretimiento de la Criosfera debilita la circulación termohalina y las corrientes ya que altera la profundidad de la capa de mezcla y los gradientes de salinidad, de modo que decrece la forma en la que el Océano puede almacenar C disminuyendo la capacidad de disolución de C en el Océano²⁶. Pero el aumento de T es más rápido que la disminución de T en el cambio de control anterior debido a ésto mismo, ya que el reservorio de C atmosférico aumenta rápidamente y con ello el efecto invernadero. Es así como llegamos al punto de partida.

1.3. Se atisba el modelo cuantitativo.

Como he venido diciendo el objetivo de mi trabajo es la modelación del SC proponiendo las bases antes discutidas y explorando modelos posibles para el SC y sus subsistemas. He realizado investigaciones sobre el tema con motivo de mi Servicio Social en el Centro de Ciencias de la Atmósfera donde elaboramos diagramas de flujo para los cuatro subsistemas en los que se dividió el SC, cada uno de ellos correspondiente a una de las siguientes variables de estado: Energía, Carbono, Agua y

²⁴Los casquetes polares no simplemente aparecen en las aguas del Océano. Los casquetes comienzan como glaciares y plataformas de hielo en el Continente y luego van extendiéndose sobre el Océano. Además el flujo del agua Océánica hace que se erosione el hielo.

²⁵Ya que ahora la debilidad mecánica de la Criosfera permite que ésta se rompa por las mareas o el peso del propio hielo a una tasa mayor que la tasa de formación de Criosfera.

²⁶Otra vez de acuerdo con el análisis del IGBP presentado en [Stef00A] y [Faea00A].

Alimento. Dos de estos diagramas son ciclos (Agua (CA) y Carbono (CC)) y los dos restantes son cadenas (Energética (CE) y Trófica (CT)). De éstos se han elegido los que son más directos para ser abordados y de los que se tienen datos del BGV: Energía y Carbono.

Para ambos las hipótesis simplificadoras son necesarias para generar un modelo con la menor complejidad posible que conserve la riqueza necesaria. En el caso de la CE se supone que la Tierra se comporta como un cuerpo negro para radiación de onda larga; y en ambos casos, CE y CC se trata de un modelo cero-dimensional de la Tierra lo cual implica que se considera la temperatura obtenida a través de balance energético como una temperatura promedio global anual y no se toma en cuenta la distribución de los continentes y océanos en la definición de Continente y Océano. En el caso del CC dividiré el planeta en tres reservorios de Carbono (Continente, Océano y Atmósfera) idealizando un carbono genérico, lo cual implica el agrupamiento de los distintos compuestos de carbono. Por otro lado, es claro que existirá en el sistema una ley de conservación, i.e. la conservación de la cantidad de Carbono, con lo que mis ecuaciones se simplificarán.

El modelo lo construí en dos capas de modelación. La primera capa corresponde a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el SC de manera global. Pero es necesario desarrollar una segunda capa de modelación. Ésta consiste en modelar los flujos entre reservorios de los diagramas de flujo simplificados los cuales constituirán los coeficientes de las ecuaciones diferenciales de la primera capa de modelación. Realicé un análisis sobre los posibles modelos, como luego veremos, y concluí que en primera aproximación se pueden representar los flujos con modelos de saturación, los cuales parecen ser universales. La saturación se representa con un modelo logístico cuya solución es la función sigmoide; tal función se encuentra como solución del modelo logístico en diversas ramas de la ciencia: desde la biología matemática hasta la mecánica estadística

cuántica. Los parámetros de esta función nos darán grados de libertad para jugar y ver como se comporta el sistema con distintos valores de éstos. En este sentido los coeficientes de la primera capa de modelación no son dependientes del tiempo sino que su dependencia en el tiempo viene heredada de T (en el caso del modelo de carbono) o la concentración de carbono (en el caso de la cadena energética).

Los modelos desembocan en una simulación del SC a partir de los dos anteriores modelos y la comparación (y consecuente revisión de la bondad de los modelos) con las curvas de T y CO_2 del BGV. Éste es el camino que recorrerán conmigo en este trabajo.

Parte II
Las Bases.

Capítulo 2

Los Flujos en el SC.

I've still got the greatest enthusiasm and confidence in the mission.

HAL9000,
2001: a space odyssey.

Lo más intuitivo¹ para la construcción de un modelo es explorar como serán los flujos en el sistema que estamos modelando. Ésto sólo es posible hacerlo cuando uno se ha encontrado con el monstruo de los diagramas de flujo más detallados de los subsistemas del SC, viaje que le ahorrará al lector. Es en ese momento cuando uno se pregunta si acaso todo el asunto tiene alguna solución simple.

Aunque tal solución implica simplificar el sistema, también requiere pensar que todo el asunto está en los flujos de las variables relevantes en nuestra descripción. De ese modo, primero con Energía y posteriormente con Carbono, busqué un modelo que representara de la manera más realista posible cómo deben de ser los flujos entre los reservorios. ¿Qué estoy entendiendo por la palabra flujo? Lo primero que viene a la mente es una tasa de cambio: en efecto es una tasa de cambio o velocidad, pero ¿de qué?. A lo largo de las cadenas o ciclos fluirán un ente, representado matemáticamente por un variable, entre unos reservorios, en nuestro caso Carbono y Energía. La analogía más simple sería hacer fluir un gas o un líquido por conductos entre dos o más tan-

ques. Entonces el flujo² es la velocidad a la cual se da la transferencia entre tanques del fluido y también la dirección en la que se da cuando se pueda considerar un flujo bidireccional³.

Antes de continuar haré la siguiente advertencia: los modelos, y como mostraré más adelante en éste y los próximos capítulos, es fundamental plantearlos en términos de cantidades adimensionales. Es decir, muy pocas veces hablaré de toneladas de carbono o partes por millón, y las ecuaciones estarán construidas de tal forma que tengamos adimensionalizadas o escaladas las cantidades. La adimensionalización permite la reducción del espacio de parámetros a analizar por lo que además de quitarnos de encima la carga de unidades proporciona un modelo más general⁴; además es más fácil ver propiedades fundamentales de los sistemas si se tiene una ecuación adimensionalizada, y los métodos numéricos son mucho más estables con cantidades acotadas. De esa forma podemos continuar con lo que nos atañe.

Si uno lee [Stef00A] o [Faea00A] se puede dar cuenta que para conseguir lo que ellos describen debería de haber en los flujos algún tipo de switch.

²Considerado aquí como una cantidad adimensional (lo normal en Matemáticas) y no como una tasa de cambio por unidad de área como se considera en Física. El concepto sería más parecido a lo que se llama gasto.

³La dirección dada por el signo.

⁴Como en mecánica de fluidos el famoso número de Reynolds.

¹Y más beneficioso en cuanto a salud mental.

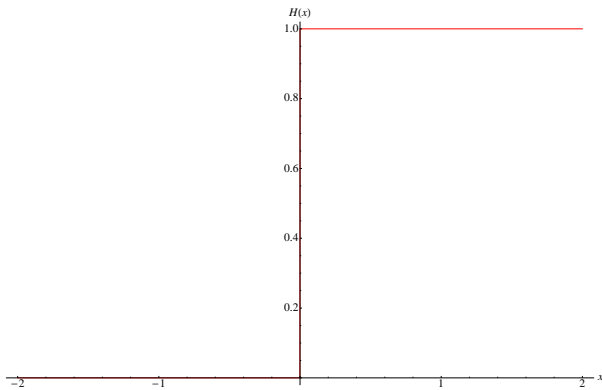


Figura 2.1: Función de Heaviside.

Esta forma de tratar los flujos, encendido y apagado, es muy burda. Matemáticamente estaría dada por la función de Heaviside generalizada, es decir una función escalón de la siguiente forma

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

donde x_0 es el valor en el que la función cambia de 0 a 1⁵. En cuanto a un flujo querría decir que éste es nulo para cuando cierta variable x (la cual controla el flujo) es menor que x_0 y es el flujo máximo para cuando $x > x_0$. En la figura 2.1 se muestra la función de Heaviside considerando $x_0 = 0$

Los flujos, a escala milenaria (la intuición clama), no deberían de tener cambios de estilo Heaviside, es decir discontinuidades⁶. En efecto podemos ver que aún a escalas de tiempo cortas, fenómenos como la transferencia de calor, la infiltración de agua en los acuíferos o el crecimiento de las plantas se dan gradualmente y de manera suave⁷. Con esta suposición

⁵Como, en principio, $H(x)$ es usada como una distribución; el valor que tome en x_0 es absolutamente irrelevante. En nuestro caso podríamos hacer la definición extra de que $H(x_0) = y_0 \mid y_0 \in [0, 1]$ como convenga.

⁶Aunque la acción humana en el Antropoceno podría ser de ese estilo al ser puesta en una escala milenaria, debido a su alto impacto en poco tiempo.

⁷Aunque haya algunos procesos catastróficos y rápidos, como fenómenos de ruptura mecánica de materiales, incendios repen-

en mente, el otro modelo para los flujos que consideré, y seguro el lector como por premonición rescatará en caso de ser Físico o afín, fue un modelo lineal.

Los modelos lineales son de los primeros que uno aprende en los cursos básicos de Física, aunque no se lo digan a uno explícitamente. Así muchas veces luego se introducen correcciones no lineales para obtener un modelo con la riqueza necesaria. En nuestro caso el modelo lineal tendría dos estados extremos constantes (como los de Heaviside) unidos por una recta. Estaríamos pasando del apagado al encendido gradualmente a lo largo de la recta que une estos estados. Matemáticamente el modelo sería de la forma

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \frac{1}{x_1 - x_0}x + \frac{x_0}{x_0 - x_1} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ 1 & \text{si } x > x_1 \end{cases}$$

donde x_0 es el punto donde tenemos el flujo a cero (y empieza la recta inclinada) y x_1 es el punto equivalente donde se llega al flujo máximo (en la figura 2.2 se muestra gráficamente este modelo usando $x_0 = -1$ y $x_1 = 1$). Ésto, en particular implicaría que el aumento del flujo en el intervalo $[x_0, x_1]$ es debido a un aumento proporcional en la variable x . De lo anterior es inmediato ver que tal cosa tampoco es muy realista⁸. Por ejemplo, considérese una solución azucarada. Al principio es muy sencillo disolver el azúcar en el agua al revolver⁹, pero conforme echemos más azúcar veremos que cada vez nos costará más trabajo disolverla. De hecho, cuando ya

tinos o impactos de meteoritos que generan grandes efectos en los sistemas de que se trate. La teoría matemática que permite describir estos sistemas es la, bien llamada, Teoría de Catástrofes. Pero si no se quieren utilizar estas herramientas bien podrían representarse por deltas de Dirac $\delta(x)$ o Heaviside según que se esté estudiando. De hecho ambas funciones generalizadas están relacionadas: $\frac{dH}{dx} = \delta(x)$.

⁸Como nota matemática diré que no es realista ya que tiene derivada discontinua en los puntos en donde empieza o termina la recta inclinada.

⁹Una vez que hemos logrado disolver cierta cantidad de azúcar al inicio.

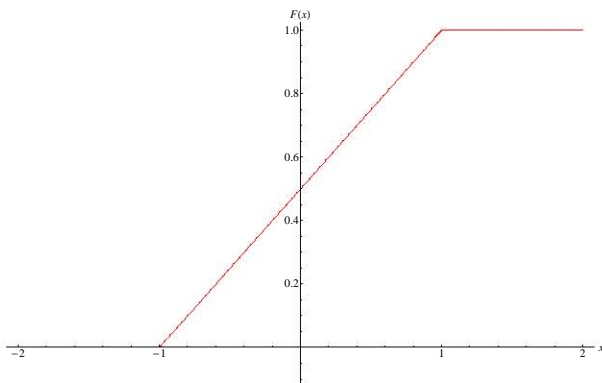


Figura 2.2: Modelo lineal.

no es posible disolver el azúcar¹⁰ decimos que la solución es una solución saturada. Así el paso del reservorio de azúcar sin disolver al reservorio de azúcar disuelta en el agua va disminuyendo conforme el reservorio de azúcar disuelta en el agua aumenta y no lo hace linealmente, si fuera así sería, en todo momento, igual de fácil disolver una unidad de azúcar independientemente del azúcar disuelta previamente. Otro ejemplo, relevante para nuestros fines, es que el agua puede contener disuelto gas, es decir podemos tener una solución en la cual el soluto sea un gas y el solvente un líquido. Es posible ver que la capacidad del agua para que el gas se disuelva en ella, que en general se llama solubilidad, depende de la temperatura de la siguiente manera cualitativa: a mayor temperatura menor solubilidad y a menor temperatura mayor solubilidad. En principio, la solubilidad debería de seguir la ley de Henry para disoluciones, la cual es lineal, pero la constante de proporcionalidad depende de la temperatura y esta dependencia no lo es¹¹, luego el modelo lineal no sirve para al menos un proceso de gran importancia para el funcionamiento del SC. Así hay que buscar alguno más realista.

¹⁰O lo que es lo mismo, que nos llevará un tiempo infinito el disolver una unidad de azúcar.

¹¹Sería lineal si la mezcla fuera ideal. Para más información, y en particular para CO₂, se puede consultar [Lide98] pp.8-(86-89) y [Crov91A].

2.1. El Modelo Logístico.

Hemos visto dos procesos en los que existe una saturación, es decir que el fenómeno no cumple la proporcionalidad respecto de una variable dada, lo que no hemos dicho es que generalmente también se tiene la característica de un arranque suave como el de la solución azucarada. Otros fenómenos relevantes para el SC, como el albedo planetario o la capacidad de crecimiento de la Criosfera es claro que no siguen tales crecimientos proporcionales o saltos catastróficos como los que provee Heaviside. En resumen, deberíamos de encontrar un modelo que tenga como extremos asintóticos tales comportamientos pero que integre la idea de no proporcionalidad, arranque y término suave. Para ello acudimos a un ejemplo que, aparentemente, no tenga mucho que ver con la Física.

El ejemplo proviene de las investigaciones de Pierre François Verhulst¹². Él ideó un modelo para representar el crecimiento de una población sometida a limitantes.

Consideremos una población de animales. Tal población crecerá, pero tal crecimiento estará limitado por la disponibilidad de los recursos necesarios para poder sobrevivir y lograr reproducirse. La tasa de crecimiento de la población \dot{P} , con unidades de individuos por unidad de tiempo, se podría modelar (en ausencia de limitantes) por la ecuación $\dot{P} = rP$ cuya solución es $P(t) = ce^{rt}$ con c una constante arbitraria, a determinar del valor inicial de P , y r es la tasa de crecimiento o tasa de natalidad de la especie en cuestión. Es decir, tenemos una población que crece sin límite de manera exponencial. Sin embargo, como la población necesita recursos para sobrevivir y lograr la reproducción, a mayor cantidad de individuos, menores son los recursos disponibles por individuo. Ésto lo modeló Verhulst con un término $-\frac{r}{K}P^2$, donde K es un parámetro que representa la máxima población sustentable respecto de los recursos disponibles. En el modelo original

¹²Para ver las ideas originales de Verhulst consultar libremente en Google Books las referencias [Verh38A], [Verh45A] y [Verh47A].

de Verhulst K es constante, sin embargo, es posible concebir $K = K(t)$, la cual se podrá obtener a través de experimentos¹³. Así presento la ecuación diferencial que Verhulst habría escrito de conocer nuestra notación actual

$$\dot{P} = \frac{rP(K - P)}{K} \quad (2.1.1)$$

2.1.1. Adimensionalización de la Ecuación de Verhulst. Modelo Logístico.

Antes de siquiera intentar resolver la ecuación de Verhulst, consideraré lo dicho sobre adimensionalizar los modelos. Ésto es natural para los matemáticos ya que ellos nunca hablan de dimensiones en cuanto a unidades se refiere y además ésta permite obtener información adicional sin resolver la ecuación. Ejemplos de estas ventajas son la adimensionalización de la ecuación de un oscilador armónico cuántico la cual, automáticamente, nos proporcionará conocimiento sobre la energía característica de los niveles del oscilador. En el caso que nos atañe es claro que la adimensionalización correcta consistiría en tomar la máxima población sustentable K como característica del sistema y medir respecto de ésta todo lo demás. Así dividiendo por K los dos lados de la ecuación diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \dot{P} &= \frac{1}{K} \frac{rP(K - P)}{K} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{K} \right) &= r \frac{P}{K} \left(1 - \frac{P}{K} \right) \\ \dot{p} &= rp(1 - p) \end{aligned}$$

donde $p = \frac{P}{K}$ es una población adimensional y normalizada respecto de K . Es decir $p \in [0, 1]$ ¹⁴. Ésto es lo que un matemático resolvería. Presento ahora, para destacarla de la derivación anterior, la ecuación

$$\dot{p} = rp(1 - p) \quad (2.1.2)$$

¹³De todas maneras el modelo original no es mas que $K(t) = K$. Para efectos de la discusión que sigue consideraré que K es constante.

¹⁴Y si se lo quiere ver es una población porcentual.

cuyo nombre es el de ecuación logística o modelo logístico. Nótese que esta ecuación es no lineal.

2.1.2. Solución del Modelo Logístico.

Ahora la resolveré. Para resolverla por fuerza bruta basta con integrar ya que podemos separar variables obteniendo

$$\int \frac{1}{p(1-p)} dp = \int r dt + c$$

con c una constante arbitraria. La integral del lado izquierdo se puede resolver por fracciones parciales: considerando que $\frac{1}{p(1-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1-p}$, lo cual nos dice que $1 = A + (B - A)p$ de lo cual se deduce el sistema lineal trivial $A = 1, B - A = 0$ cuya solución es $A = 1, B = 1$. Así $\frac{1}{p(1-p)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}$. El primer término tiene por primitiva $\ln p$ y el segundo $-\ln(1-p)$ ¹⁵. La integral del lado derecho tiene primitiva trivial rt , luego nos queda

$$\begin{aligned} \ln p - \ln(1-p) &= rt + c \\ \ln \left(\frac{p}{1-p} \right) &= rt + c \\ \frac{p}{1-p} &= ce^{rt} \end{aligned}$$

reordenamos haciendo $p = ce^{rt} - ce^{rt}p$, luego $p(1 + ce^{rt}) = ce^{rt}$ y entonces

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{ce^{rt}}{1 + ce^{rt}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{c}e^{-rt} + 1} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{c}e^{-rt}} \end{aligned}$$

Pero hay un problema con estas soluciones. Al apresurarnos a resolver por el método de fuerza bruta, olvidamos que la ecuación puede darnos soluciones aún antes de resolverla. Para ello, ver que

¹⁵Al considerar el cambio $u = 1 - p$, $du = -dp$ y regresar a la variable p .

la ecuación 2.1.2 tiene en su lado derecho un polinomio $p(1-p)$. Ésto implica que las raíces de ese polinomio son $p=0$ y $p=1$; luego si $p(t)=0$ o $p(t)=1$ entonces el lado derecho es nulo y la derivada de una función constante es nula, luego las dos funciones constantes anteriores son, en efecto, soluciones particulares de la ecuación diferencial. Éstas, matemáticamente se llaman separatrices, ya que por el teorema de existencia y unicidad las soluciones no se pueden cruzar y al ser horizontales delimitan el espacio ocupado por el sistema en su evolución. De hecho si hubiésemos dibujado el retrato fase de la ecuación 2.1.2¹⁶ podríamos haber visto un atisbo de que tendríamos soluciones que por un lado tienden asintóticamente a 0 y por el otro a 1 y que todas ellas están acotadas entre las dos soluciones constantes que acabamos de encontrar, como se puede revisar en la figura 2.3. Tal vez ésto podría significar que los llevé por una desviación inútil, pero en realidad no. El problema está en que las soluciones constantes no están contempladas en la solución general obtenida por fuerza bruta. En efecto, averiguemos cual sería el valor de c si $p(t_0)=p_0$ ¹⁷ con $p_0=0$ o $p_0=1$. En general

$$\begin{aligned} p(t_0) &= \frac{1}{1 + \frac{1}{c}e^{-rt_0}} = p_0 \\ p_0 + \frac{p_0}{c}e^{-rt_0} &= 1 \\ c &= \frac{p_0}{1-p_0}e^{-rt_0} \end{aligned}$$

con lo que la solución general en términos de un problema genérico de valores iniciales queda

$$p(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{p_0} - 1\right)e^{-r(t-t_0)}}$$

luego si $p_0=0$, como lo es para cualquier t si $p(t)=0$, entonces tendremos una indefinición en la

¹⁶Es decir un diagrama en el que podríamos ver el campo de pendientes, aprovechando que la ecuación es de tipo autónomo, i.e. no está el tiempo expresado explícitamente.

¹⁷Es decir el problema de valor inicial dado al evaluar p al tiempo t_0 igual a p_0 .

solución del tipo $\frac{1}{0}$; mientras que si $p_0=1$, como lo es para cualquier t si $p(t)=1$, entonces la constante c se indeterminaría y sólo por suerte al evaluar en la solución antes expresada se obtiene la solución constante 1. Así la solución general de la ecuación 2.1.2 tomando en cuenta problemas de valor inicial del tipo $p(t_0)=p_0$ será

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_0 = 0 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{p_0} - 1\right)e^{-r(t-t_0)}} & \text{si } p_0 \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } p_0 = 1 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Al caso intermedio de las soluciones anteriores se le conoce como una curva sigmoide¹⁸ o, simplemente, sigmoide. He de aclarar que en todo el tratamiento anterior he supuesto que p_0 no es mayor a 1 ni menor que 0, aunque las soluciones matemáticas no están supeditadas a esta limitación, ya que no hice ésta para resolver la ecuación. Obviamente las poblaciones negativas no tienen significado en la realidad al igual que poblaciones por encima del total sustentable. En todo caso, del retrato fase presentado en la figura 2.3 se nos aclara que la solución $p(t)=1$ es un atractor mientras que la solución $p(t)=0$ es un repulsor de modo que si estamos en valores iniciales mas grandes que 1 entonces habrá un decaimiento de la población hacia la población máxima sustentable, mientras que si el valor inicial es menor que 0 habrá un crecimiento exponencial de la población hacia valores negativos arbitrariamente grandes. Las soluciones constantes por su parte ponen en claro que si la población no existe es imposible que crezca, mientras que si la población está dada en su máximo de sustentabilidad no puede crecer más. Obviamente este modelo es uno de estado estacionario y equilibrio con lo que puede suceder lo anterior.

¹⁸Tal vez le sea posible al lector reconocer en las soluciones sigmoides, por la forma de la ecuación, la distribución de Fermi-Dirac para la estadística de fermiones.



Figura 2.3: Retrato fase del Modelo Logístico (Ecuación 2.1.2). El retrato fase consta únicamente, en este caso, del eje horizontal con las flechas que señalan la dirección del campo de pendientes.

2.2. La Ecuación Logística y sus soluciones como modelo de flujos del SC.

Después del detalle con el que estudiamos la ecuación logística nos hemos salido un tanto del tema que veníamos tratando ¿cómo representar los flujos en el SC? En todo lo que sigue consideraré solamente las soluciones sigmoides del modelo logístico. También dejaré de lado la interpretación de la variable independiente como el tiempo e introduciré una variable independiente genérica x , para evitar confusiones conceptuales. Así la ecuación y las soluciones ahora se escriben

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = rp(1-p) \\ p(x_0) = p_0 \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } p_0 = 0 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{p_0} - 1\right)e^{-r(x-x_0)}} & \text{si } p_0 \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } p_0 = 1 \end{cases}$$

En la figura 2.4 presento las soluciones del modelo logístico para diversos valores iniciales $p(0) = p_0 \in (0, 1)$ considerando $r = 1$. De la misma manera en la figura 2.5 se presentan las soluciones para diversos valores iniciales $p(x_0) = \frac{1}{2}$ considerando $r = 1$. Finalmente en la figura 2.6 se muestran las soluciones para un valor inicial fijo $p(0) = \frac{1}{2}$ considerando diversos valores de r . De la figura 2.6 puede verse que las sigmoides tienen una simetría, al ver $r > 0$ y la respectiva $r < 0$, respecto de la solución con $r = 0$ y respecto de la recta vertical que las

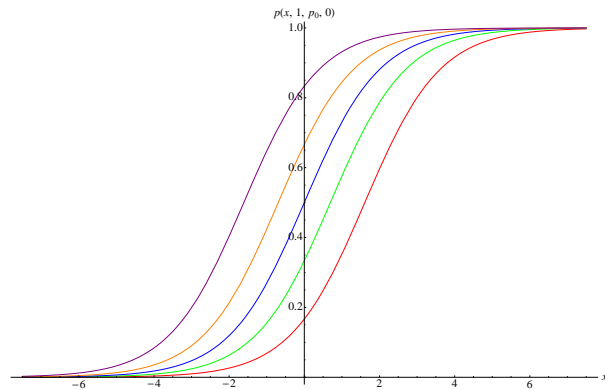


Figura 2.4: Sigmoides para $r = 1, x_0 = 0$. Rojo: $p_0 = \frac{1}{6}$. Verde: $p_0 = \frac{1}{3}$. Azul: $p_0 = \frac{1}{2}$. Naranja: $p_0 = \frac{2}{3}$. Violeta: $p_0 = \frac{5}{6}$.

intersecta en la mitad de su subida¹⁹

Nótese que la variación de los valores iniciales (figuras 2.4 y 2.5) cuando fijo r da como resultado una simple traslación horizontal de la solución original sin cambiar la forma en la que se da la pendiente²⁰, mientras que si cambio el parámetro r tenemos el comportamiento más rico (figura 2.6), el cual no habíamos descrito. En términos de poblaciones $r < 0$ implica una tasa de muertes mientras que $r > 0$ implica una tasa de nacimientos y $r = 0$ implica una población constante.

Dados los comportamientos presentados tenemos que cuando $|r| > 1$ entonces la subida (o bajada) de la curva se irá pareciendo cada vez más a una función Heaviside²¹, mientras que para cierto valor $|r| \in (0, 1)$ se parecerá al modelo lineal que propuse antes²² excepto por el hecho de que el comportamiento asintótico está lejos del punto de inflexión. En cualquier momento serían también aproximables estas soluciones por el modelo lineal, pe-

¹⁹Esta recta de simetría cambia conforme desplazamos las sigmoides con los valores iniciales, pero la simetría es la misma.

²⁰Nótese que no me importa que las soluciones tengan partes correspondientes a “tiempos” negativos, al final de cuentas el cero “temporal” es relativo.

²¹O a la reflexión de ésta en el eje y para $r < -1$.

²²O, de nuevo, a su reflexión para el caso de r negativa.

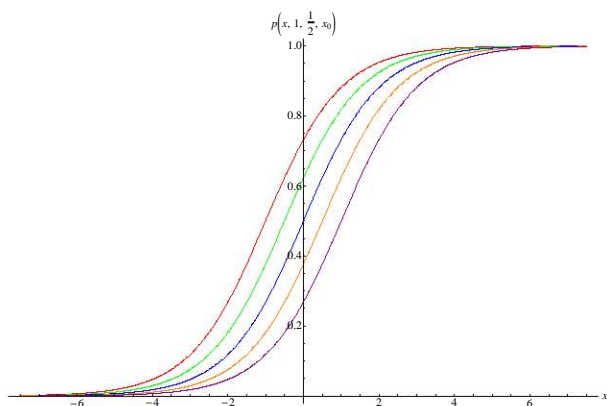


Figura 2.5: Sigmoides para $r = 1$, $p_0 = \frac{1}{2}$. Rojo: $x_0 = -1$. Verde: $x_0 = -0.5$. Azul: $x_0 = 0$. Naranja: $x_0 = 0.5$. Violeta: $x_0 = 1$.

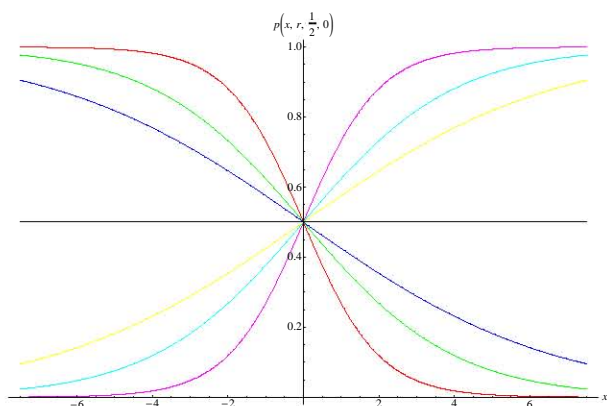


Figura 2.6: Sigmoides para $p_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$. Rojo: $r = -1$. Verde: $r = -0.5$. Azul: $r = -0.3$. Negro: $r = 0$. Amarillo: $r = 0.3$. Cian: $r = 0.5$. Magenta: $r = 1$.

ro el problema residiría en la parte curvada cerca de los valores asintóticos: ésta es la característica que nos permite representar un comportamiento de encendido-apagado junto con las propiedades de saturación e inicio suave que necesitamos para los flujos del SC.

En efecto, la propia presentación del modelo nos provee de la característica de saturación necesaria: cada vez es más difícil para la población reproducirse y tardarán más tiempo en alcanzar la población máxima y, al iniciar, es lento su crecimiento. Así en el caso que nos ocupa, la variable genérica x bien podría ser T , la temperatura, y p la tasa de disolución por unidad de tiempo de carbono en forma de GEI en el agua. En tal caso elegiríamos $r < 0$ ya que a mayor temperatura la solubilidad de gases en agua es menor. También podríamos tener la concentración de GEI en Atmósfera, siendo esta cantidad x , y p representando al forzamiento radiativo debido al efecto invernadero, del cual se sabe que a más concentración de GEI en la Atmósfera más forzamiento radiativo, pero con el efecto de saturación²³.

²³El forzamiento radiativo debido a los GEI no es simple de describir de forma realista ya que las matemáticas implicadas incluyen una ecuación integrodiferencial, pero es evidente que los procesos de absorción y emisión a escala microscópica no pueden crecer indefinidamente al aumentar el grosor óptico de una capa de GEI Atmosférico, ya que habrá reabsorciones y reemisiones que amortiguarán el forzamiento radiativo, lo cual se puede ver en términos de los coeficientes de transmisión los cuales son multiplicativos, así si tenemos τ_a el coeficiente de transmisión de una capa y τ_b el de una adyacente entonces $\tau_{ab} = \tau_a \tau_b$ es el coeficiente de transmisión del sistema de ambas capas con lo que será menor. Si se quiere profundizar en estos temas consultar, por ejemplo, [KiRa06] y en éste trabajo la sección 3.1.3.

Capítulo 3

La Cadena Energética.

I am completely operational, and all my circuits are functioning perfectly.

HAL 9000,

2001: a space odyssey.

Aparte de en los antecedentes, no he mencionado mas que lateralmente al SC como tal. En éste y el siguiente capítulo describiré los dos subsistemas del SC que tomé bajo estudio y los desmenuzaré para que el lector pueda entender al máximo lo que se ha discutido hasta ahora. En este capítulo me dedicaré a generar un modelo de lo que se llama Cadena Energética (CE).

La CE no es más que el subsistema que capta y distribuye la energía proveniente del Sol permitiendo que haya temperaturas superficiales aptas para la vida. Sin embargo, la vida también incide en este subsistema al cambiar el albedo y otros parámetros traslucéndose así el factor determinante que representa la vida en el drama que intento describir.

Divido el espectro electromagnético como generalmente se hace en la literatura climática, onda larga y onda corta. Como dije en los antecedentes: la Tierra se considera un cuerpo negro para radiación de onda larga, de modo que puedo considerar representativa la radiación emitida al espacio por ésta como una medida de su temperatura superficial a través de la ley de Stefan-Boltzmann. El Sol, por otro lado, se considera cuerpo negro en radiación onda corta: causa segura de que nuestros ojos hayan

evolucionado para ser sensibles en el visible, y en algunos animales hasta el ultravioleta cercano. Esto implica que la Atmósfera, considerada sin nubes, es transparente a onda corta, excepto por detalles que no afectan a la discusión general como se puede ver en [Houg77], cap. 2 p. 8 en donde se presenta la división entre onda corta y onda larga mostrando las curvas de la radiación de cuerpo negro, para uno con la temperatura del Sol y otro con la temperatura de la Tierra considerando áreas iguales y se puede ver que los espectros del Sol y de la Tierra son ajenos. De igual modo se presenta la absortividad de la Atmósfera sin nubes considerando los diversos gases presentes en la Atmósfera, la cual es prácticamente nula para onda corta. Otra referencia breve pero concisa es una sección de [Adem62A]. En la figura 3.1 reproduzco la figura de [Houg77].

Luego de lo discutido lo que haré aquí es un simple balance de entradas y salidas, por lo que el modelo es una ecuación de balance energético.

3.1. Diagrama de flujo de la CE.

El Sol, el cual es externo al SC, constituye la entrada energética principal. Todas las demás entradas, tanto que comuniquen el interior de la Tierra (a través de volcanes principalmente) con el SC o externas (rayos cósmicos), no son actores apreciables en este drama debido a la escala de tiempo en que suceden o su aporte energético, muy por deba-

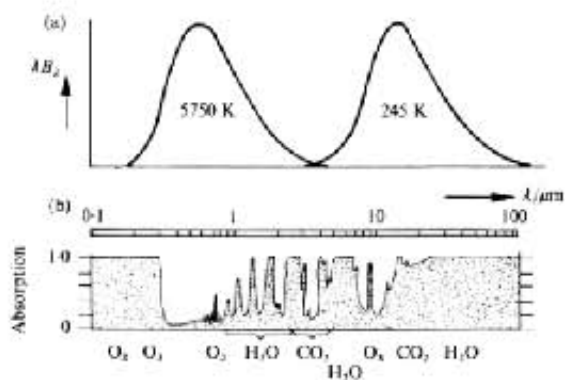


Figura 3.1: (a) Curvas de la distribución espectral de la radiación electromagnética de un cuerpo negro en función de la longitud de onda para 5750K (aproximadamente la temperatura superficial del Sol) y 245K (aproximando a la temperatura efectiva mostrada en la sección 3.1.1 del presente capítulo). (b) Coeficiente de absorción de los gases atmosféricos suponiendo una columna de atmósfera sin nubes señalando las bandas de absorción asociadas a los gases más notables. Adaptado de [Houg77].

jo del aporte solar¹. De este modo la única fuente que tomé como entrada energética fue el Sol. Otro asunto sobre el Sol es que su intensidad varía con el tiempo, debido a los ciclos de actividad solar² (endógenos al Sol) y variaciones en la órbita de la Tierra³. Sin embargo, la variación de la intensidad es pequeña cuando se ve a lo largo de los milenios de modo que la consideré constante.

¹Sin embargo, indirectamente podrían generar, en el caso de rayos cósmicos, la formación de nubes lo cual podría representar un proceso de segundo orden en las STBGV. En el caso volcánico podemos tener eventos aleatorios que afectaran el clima, pero al menos en el BGV no parecen tener una incidencia relevante. De igual forma el lector podría pensar en impactos meteoríticos, al menos los medianos, pero las evidencias en el intervalo temporal cubierto por el BGV no parecen indicar impactos meteoríticos relevantes.

²Definitivamente despreciable para el BGV ya que los ciclos son del orden de décadas y su variación es pequeña.

³Debido a la presencia de más de dos cuerpos en el sistema solar y a que la Tierra constituya un sistema doble junto con la Luna. Ésto en efecto fundamenta la teoría de Milankovich sobre mínimos y máximos en la intensidad solar. Ha habido otros autores que han querido aplicar la teoría de Milankovich para explicar de forma completa las variaciones del clima y en particular de lo observado en el BGV.

3.1.1. Irradiancia solar, albedo y calentamiento de la Superficie.

De toda la radiación que emite el Sol, la Tierra sólo recibe una fracción minúscula de todo el flujo. Esta fracción depende, como se puede suponer, del ángulo sólido que presenta la Tierra respecto del Sol. Suponiendo que el Sol, por la distancia Tierra-Sol comparada con el diámetro del Sol, es un emisor puntual, entonces el ángulo sólido que presenta la Tierra depende de la distancia⁴ y del tamaño de la Tierra i.e. su superficie. Al hacer la geometría necesaria se tiene que la Tierra (esférica) es un disco al captar la radiación solar.

Para calcularlo hacemos lo siguiente. En las afueras de la atmósfera superior la irradiancia⁵ solar se

⁴Lo cual sabemos ya que la intensidad de una fuente de radiación electromagnética puntual varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia: la famosa ley del inverso cuadrado.

⁵En radiometría potencia por unidad de área de radiación electromagnética que incide en una superficie perpendicular al rayo: $\frac{W}{m^2}$.

ha calculado⁶ que en promedio es

$$I_{\odot} = 1372 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (3.1.1)$$

De ese modo, considerando la Tierra como un disco plano, el flujo que recibe la Tierra es $\Phi_{\odot} = \pi r_{\oplus}^2 I_{\odot}$. Ahora, el planeta actúa como un emisor esférico de la radiación, producto de la absorción de la radiación solar exceptuando la reflejada al espacio. Por la ley de Stefan-Boltzmann, la superficie terrestre emitiría un flujo caracterizado por la irradiancia σT^4 con σ la constante de Stefan-Boltzmann: luego el flujo es $\Phi_{\oplus} = 4\pi r_{\oplus}^2 \sigma T^4$. El flujo que absorbe la superficie es $\Phi_{cal} = (1-a)\pi r_{\oplus}^2 I_{\odot}$ donde a es la fracción que es reflejada al espacio, es decir el albedo planetario que representa el efecto reflectivo de nubes, Criosfera, desiertos, bosques y otros elementos que hacen mas oscuro o brillante al planeta.

Ahora, el balance energético implicaría que $\Phi_{cal} = \Phi_{\oplus}$ lo cual da una fórmula para la temperatura en estas condiciones: $T = \sqrt[4]{\frac{1-a}{\sigma} \frac{I_{\odot}}{4}}$, fórmula que para $a = 0.31$ ⁷ da un resultado de $T \approx 254.17\text{K} \approx -18.97\text{C}$ la cual es llamada temperatura efectiva, valor por debajo de la temperatura promedio superficial global anual. Ésto implica la existencia de más estructura en la cadena energética que hace que la superficie sea más cálida.

De este cálculo también obtuvimos que la entrada energética recibida por la Tierra de parte del Sol, promediada por unidad de área ahora⁸, es

$$\Omega_{\odot} = \frac{I_{\odot}}{4} \quad (3.1.2)$$

Una vez mostrado que debe existir mayor estructura en la CE procedo a construirla. El flujo que será reflejado al espacio es

$$\phi_{reflx} = a\Omega_{\odot}$$

por lo que el flujo restante es

$$\phi_{abs} = (1-a)\Omega_{\odot}$$

Considerando las hipótesis que hice para la Atmósfera éste es en efecto el flujo que incide en la Superficie⁹ y es absorbido¹⁰.

3.1.2. Reemisión en onda larga y calentamiento de la Atmósfera.

La radiación representada por ϕ_{abs} es absorbida y transfiere su energía a los sólidos, líquidos y gases generando calentamiento¹¹. Recordando que la materia con temperatura por encima del cero absoluto¹² emite radiación electromagnética, entonces la Superficie emite radiación caracterizada por una irradiancia Ω_{\oplus} (radiación de onda larga). Parte de la energía de la irradiancia Ω_{\oplus} se invierte en procesos termodinámicos, en la Atmósfera, como cambios de estado (calor latente) y transferencias de calor (calor sensible) los cuales represento con la expresión

$$\phi_{conv} = c\Omega_{\oplus}$$

donde c es la fracción de radiación (o más propiamente su energía) emitida por la Superficie e invertida en generar convección, advección y cambios de fase. La radiación representada por el flujo

$$\phi_{rest} = (1-c)\Omega_{\oplus}$$

⁹Defino Superficie como Océano y Continente juntos.

¹⁰Si fuésemos más puntillosos consideraríamos la absorción de onda corta por la Atmósfera, de modo que ésta es $\phi_{absr,atm} = b(1-a)\Omega_{\odot}$ por lo que el flujo que incide en la Superficie es $\phi_{trms,atm} = (1-b)(1-a)\Omega_{\odot}$, donde b es la absorción de los gases presentes en la Atmósfera respecto de onda corta. Sin embargo, las hipótesis sustentadas que dí implican que si bien b no es nulo si se tiene que $b \rightarrow 0$. De otro modo se puede pensar que está incluida en el término de albedo planetario.

¹¹Todo el flujo ϕ_{abs} es absorbido por la Superficie ya que la reflexión está concentrada en el albedo. El calentamiento es debido a la absorción de ésta por la materia, en la que se excitan modos de vibración resultando en agitación térmica.

¹²Es decir, toda la materia, ya que el cero absoluto es inalcanzable como lo enuncia el Tercer Axioma de la Termodinámica.

⁶[DeWi00] y [Adem62A]. Esta irradiancia se solía llamar constante solar, ya que en un principio se creía que era constante.

⁷Valor actual del albedo.

⁸Al hacer la distribución sobre toda la superficie de la esfera.

se reparte en dos: es absorbido por la Atmósfera ya que ésta no es transparente a onda larga como es posible ver en la figura 3.1. La Atmósfera, en dado caso, se comporta como un cuerpo gris para onda larga. La restante escapa al espacio. Estos flujos los expreso como

$$\phi_{absr,atm} = d(1 - c)\Omega_{\oplus}$$

$$\phi_{extr} = (1 - d)(1 - c)\Omega_{\oplus}$$

respectivamente, donde d es la absortividad de la Atmósfera respecto de onda larga. La absorción por parte de la Atmósfera es a causa de los GEI y las nubes. Las longitudes en las que las moléculas de GEI y vapor de agua absorben radiación para luego volverla a emitir son exactamente las de radiación de onda larga y aquí nos enfrentamos al famosísimo efecto invernadero, que es lo que hace la diferencia respecto de la temperatura efectiva.

3.1.3. Efecto invernadero.

Las moléculas de GEI y vapor de agua que absorbieron la radiación $\phi_{absr,atm}$, al desexcitarse, emiten radiación de onda larga¹³. Esta radiación está representada por la irradiancia Ω_{Atm} . El tratamiento de este flujo considera que la capa de GEI respecto de la radiación antes referida sólo es una capa¹⁴, de manera que los fenómenos de reabsorción no están presentes, aunque quedarán descritos implícitamente. Así tendremos dos flujos de radiación, uno que es emitido hacia la Superficie, nuevamente, y otro que es emitido al espacio exterior según las siguientes definiciones

$$\phi_{absr,sup} = e\Omega_{Atm}$$

$$\phi_{extr2} = (1 - e)\Omega_{Atm}$$

¹³La cual será característica de las moléculas excitadas y la radiación que las excitó, de acuerdo con la Mecánica Cuántica.

¹⁴Que contiene todos los efectos de las multicapas que existen en la versión más realista del efecto invernadero como he mencionado en el capítulo anterior.

donde e es la fracción de la radiación emitida, por los GEI y vapor de agua, y absorbida por la Superficie. Si uno se da cuenta del proceso, aquí tenemos un mecanismo que hace que energía sea transferida de Atmósfera a Superficie y de Superficie a Atmósfera lo cual constituye el efecto invernadero. Para integrar todo esto se presenta en la figura 3.2 un diagrama de flujo de la CE, donde el efecto invernadero se puede ver como el bucle 6 – 8 – 9 – 11 – 12 – 6 en este diagrama de flujo¹⁵.

3.1.4. Discusión del diagrama de flujo.

En la figura 3.2 se puede ver como tengo dos reservorios: Superficie y Atmósfera. Aunque en principio el concepto de almacén de irradiancia (o energía) en este caso es un poco extraño; es justificable ya que no todo lo que absorbe la Superficie desde el Sol sale inmediatamente, es decir $\phi_{trns,atm} \neq \Omega_{\oplus}$. De esa misma manera $\phi_{absr2,atm} + \phi_{conv} + \phi_{absr,atm} \neq \Omega_{Atm}$. De esta manera justifico la existencia matemática de los reservorios de energía para la descripción correcta de los procesos.

3.2. Modelo de la CE.

Una vez tenemos el diagrama de flujo preguntémos cuáles son las ecuaciones dinámicas del subsistema. En principio se puede pensar que el sistema es lineal. Consideraré, con tal fin, una aproximación de Taylor de primer orden para ambos reservorios S (Superficie) y A (Atmósfera) los cuales tienen unidades de $\frac{J}{m^2}$. Sabiendo que la primera derivada en ambos casos debe de coincidir con el balance de las entradas y las salidas, se obtiene que

$$S(t + \Delta t) = S(t) + (Ent(t) - Sal(t))\Delta t + O(\Delta t^2)$$

donde las entradas son $Ent(t) = (1 - b)(1 - a)\Omega_{\odot} + e\Omega_{Atm}$ y las salidas son $Sal(t) = \Omega_{\oplus}$ y t es el tiempo.

¹⁵En este diagrama de flujo también se muestran los flujos descartados por la hipótesis $b \rightarrow 0$.

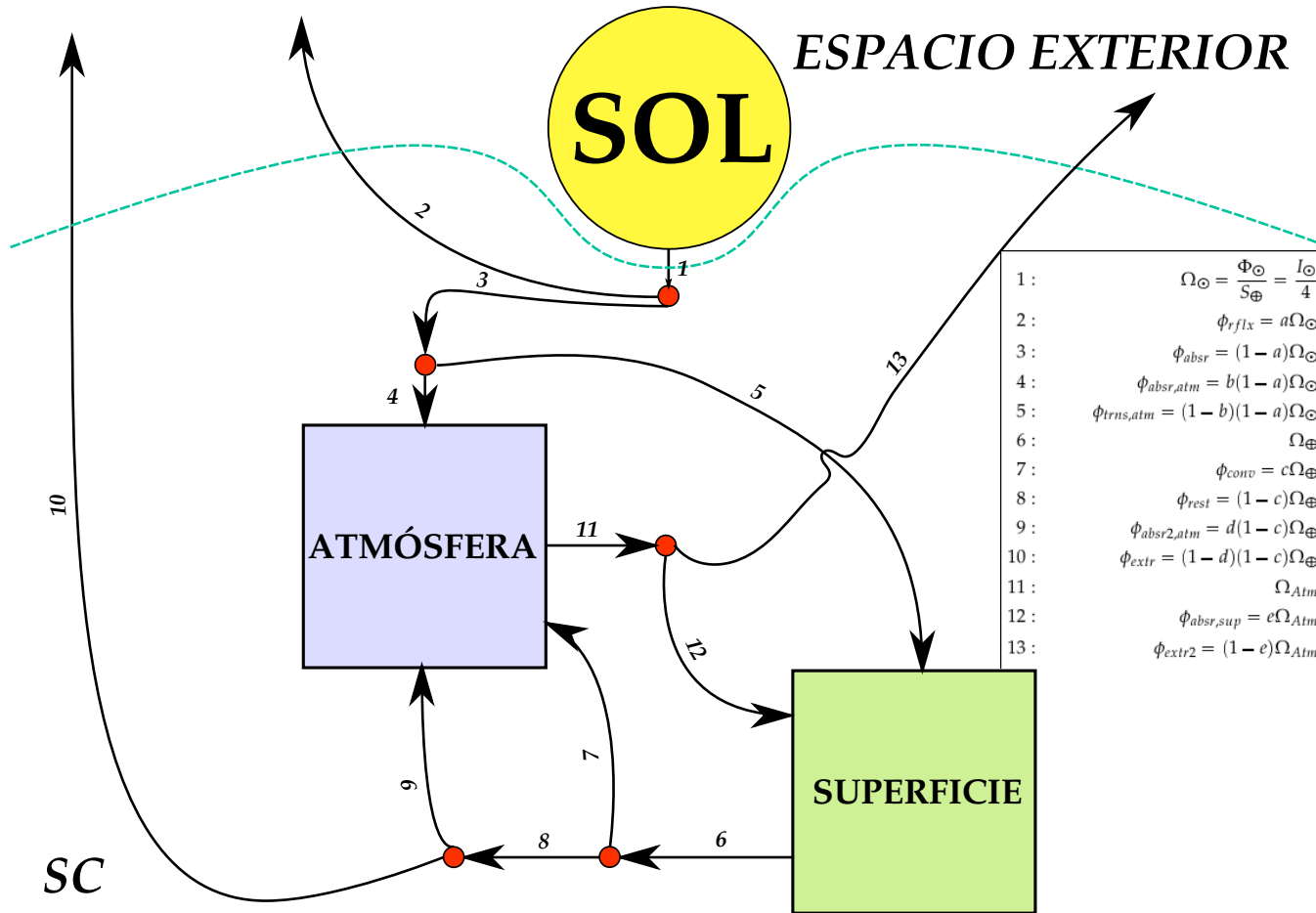


Figura 3.2: Diagrama de flujo de la CE.

Entonces considerando que es una aproximación de Taylor y teniendo que $\Omega_{\oplus} = S$ y $\Omega_{Atm} = A$ ¹⁶.

$$\frac{dS}{dt} = (1-b)(1-a)\Omega_{\odot} + eA(t) - S(t)$$

En el caso de A

$$A(t + \Delta t) = A(t) + (Ent(t) - Sal(t))\Delta t + O(\Delta t^2)$$

donde $Ent(t) = b(1-a)\Omega_{\odot} + c\Omega_{\oplus} + d(1-c)\Omega_{\oplus}$ y $Sal(t) = \Omega_{Atm}$. Análogamente al caso de S se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = b(1-a)\Omega_{\odot} + (c + d(1-c))S(t) - A(t)$$

Ya tenemos las ecuaciones dinámicas, y se presentan juntas como sistema acoplado que son

$$\begin{cases} \dot{S} = (1-a)\Omega_{\odot} - S(t) + eA(t) \\ \dot{A} = (c + d(1-c))S(t) - A(t) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

una vez que tenemos ésto, es posible resolver estas ecuaciones acopladas y encontrar T mediante Stefan-Boltzmann. La radiación relevante para Stefan-Boltzmann es la emitida por la Superficie, de forma que

$$T(t) = \sqrt[4]{\frac{(1-c)S(t)}{\sigma}} \quad (3.2.2)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y T es temperatura en K. Para convertir a Celsius simplemente usamos $T_C = T_K - 273.15$.

Ahora, he dicho que es posible obtener las soluciones a este problema, pero nunca he dicho que las soluciones se obtengan analíticamente. El sistema es lineal como puede verse de las ecuaciones, está acoplado, pero los coeficientes dependen de otras variables como la concentración de C en Atmósfera

que a su vez influye en T o también del estado de la Criosfera o la BC. Ése es el problema principal para la resolución del sistema de forma analítica. Sin embargo, por principio no conocemos la dependencia matemática explícita de los parámetros con los diversos factores. Más aún, las relaciones con esos factores son intrincadas. Sin embargo, para esa eventualidad ya los preparé: con un argumento simplificador aprovechemos lo que desarrollé en el capítulo anterior.

Los coeficientes son el albedo a , calor invertido en convección, advección y cambios de fase c , absortividad de la Atmósfera a onda larga d y la fracción de la radiación de onda larga que emite la Atmósfera hacia la Superficie e . Es claro que a , d y e son cantidades que presentan saturación con la concentración de CO_2 , el principal GEI en el contexto de este trabajo. Por simplicidad consideraré que toda la dependencia está en el ciclo de Carbono de forma que $a, d, e = f(C_{Atm})$; es decir, funciones de la concentración de Carbono en la Atmósfera. De esa forma tenemos que a disminuye, y d y e aumentan, cuando T aumenta y eso sucede cuando C_{Atm} aumenta; pero siempre queda Criosfera o desiertos que no permiten una absorción total y aunque haya mucho GEI la absorción no aumenta de manera infinita (debido a lo discutido sobre los coeficientes de transmisión). Así tenemos en a una sigmoide con $r < 0$ y d, e con $r > 0$. Habiendo razonado de esta forma, y en concordancia con mi diagnóstico cualitativo dado en el primer capítulo, es claro que a mayor temperatura mayor actividad de convección y advección, evaporación y precipitación; lo cual sucede en épocas con concentraciones altas de GEI, pero ésto no aumenta de manera indefinida y uniformemente, luego hay saturación. De esa forma también c es susceptible de una descripción sigmoidal con $r < 0$ ¹⁷.

Asignamos a los coeficientes del sistema dinámico 3.2.1, que es nuestro modelo matemático de la

¹⁶Por lo discutido antes sobre los reservorios como entes matemáticos y el hecho de que las irradiancias tienen unidades de $\frac{W}{m^2}$, es decir unidades de potencia por unidad de área y que podemos convertir S y A a unidades de irradiancia, suponiendo que sus contenidos son los que se dan por unidad de tiempo es decir $\frac{J \cdot s}{m^2}$.

¹⁷Por simplicidad de descripción asignaremos las siguientes equivalencias: $a = a_1$, $c = a_2$, $d = a_3$, $e = a_4$.

CE, el siguiente modelo genérico¹⁸

$$a_\ell(C_{atm}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_{0,\ell}} - 1\right) e^{-r_\ell(C_{Atm} - C_{0,Atm})}} \quad (3.2.3)$$

donde estoy proponiendo fijar un valor conocido de concentración de C Atmosférico que sirva para fijar $a_{0,\ell}$ para toda ℓ y donde las concentraciones de C están adimensionalizadas como luego veremos cuando les presente el Ciclo del Carbono¹⁹.

Por otra parte, es claro que $\Omega_\odot \geq S(t), A(t) \forall t$. Veamos que pasa con $S + A$. Sumando las dos ecuaciones de la CE se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{d(S + A)}{dt} \\ &= (1 - a)\Omega_\odot - (1 - d)(1 - c)S(t) - (1 - e)A(t) \\ &= \Omega_\odot - a\Omega_\odot - (1 - d)(1 - c)S(t) - (1 - e)A(t) \\ &= \Omega_\odot - \phi_{rflex} - \phi_{extr} - \phi_{extr2} \end{aligned}$$

lo cual era de esperarse, ya que como dije, el modelo es un modelo de balance energético (Entradas menos Salidas). Luego Ω_\odot es buena medida de referencia de los reservorios S, A . Luego adimensionalizamos las ecuaciones al dividir por Ω_\odot obteniendo

$$\begin{cases} \dot{S} = (1 - a) - S(t) + eA(t) \\ \dot{A} = (c + d(1 - c))S(t) - A(t) \end{cases}$$

donde, ahora sí, los coeficientes de los términos son adimensionales y $S(t), A(t) < 1$ ²⁰.

¹⁸Usando 2.1.3.

¹⁹Hay que hacer notar que para que el análisis dimensional de las ecuaciones sea correcto entonces a_1, a_3 serán adimensionales, mientras que a_2, a_4 tendrán unidades de $\frac{1}{s}$. La elección es más o menos arbitraria, aunque justificada por los papeles que juegan los coeficientes en las ecuaciones. En los términos que no tienen coeficiente se está suponiendo uno de la forma $1 \frac{1}{s}$.

²⁰En esencia debería de haber llamado S_{rel}, A_{rel} a las nuevas cantidades, pero para no complicar la notación retiro las etiquetas ya que no hay riesgo de confusión: nunca usaré las versiones de las ecuaciones que tengan dimensiones para hacer cálculos numéricos.

Por elegancia y brevedad podríamos considerar que la CE queda representada por el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = \Theta B + C \\ \Theta(t_0) = \Theta_0 \end{cases}$$

donde $\Theta = (S, A), C = (1 - a, 0)$ y

$$B = \begin{pmatrix} -1 & c + d(1 - c) \\ e & -1 \end{pmatrix}$$

y la temperatura superficial se obtiene de

$$T(t) = \sqrt[4]{\frac{(1 - c)S(t)\Omega_\odot}{\sigma}} - 273.15$$

Capítulo 4

El Ciclo de Carbono.

*Just what do you think you're doing, Dave?
Dave, I really think I'm entitled to an answer
to that question.*

HAL9000,
2001: a space odyssey.

El otro subsistema del SC que estudiaré, y que es crucial para entender el Metabolismo Biogeofísico-químico de la Tierra por la amplitud de aspectos en los que interviene, es el Ciclo del Carbono (CC). En el caso del CC, no podemos esperar que el modelo sea lineal, ya que tenemos un ciclo y como mostraré las relaciones entre reservorios dependerán tanto del que aporta C como del que recibe C.

Consideremos un CC lo más simple posible. En principio el C estará presente en diversas formas: Bióxido de Carbono, Monóxido de Carbono, Metano, Carbonatos, Ácido Carbónico, etcétera. Sin embargo consideré un Carbono genérico que fluye entre reservorios. Ahora podemos tener un reservorio y subreservorios, producto de las diversas presentaciones de C, los cuales tendrían flujos entre ellos representando las transformaciones de Carbono entre diversos compuestos. Como consecuencia de la simplificación reduje los reservorios a tres: Continente, Océano y Atmósfera, dejando implícitas las diversas formas de Carbono en los coeficientes de mi modelo.

4.1. Diagrama de flujo del CC.

Entre estos reservorios habrá dos interacciones y un proceso. Las interacciones son Continente - Atmósfera y Océano - Atmósfera, mientras que el proceso es Continente - Océano. La interacción Continente - Atmósfera contiene en su descripción la respiración de los seres vivos, su decaimiento y otros fenómenos que absorben C de o liberan C a Atmósfera desde Continente. En cuanto a Océano - Atmósfera contiene en su descripción los procesos de disolución y exsolución¹ los cuales aportan también información sobre la capacidad de la BO para almacenar C. El proceso Continente - Océano da cuenta del aporte de C en compuestos orgánicos² provenientes de BC y que son introducidos en la BO a través de la escorrentía. El diagrama de flujo del CC antes descrito lo muestro en la figura 4.1.

4.1.1. Discusión del diagrama de flujo.

Por cuestiones de notación haré las siguientes asignaciones: al contenido de Carbono en Continente le llamaré C_1 , en Atmósfera C_2 y en Océano C_3 , coincidiendo en todo lo relacionado al CC los índices 1, 2, 3 con Continente, Atmósfera y Océano, respectivamente. Además estas etiquetas se usan para designar también los reservorios para simplificar la

¹Nombre que le doy al proceso inverso de disolver C en el Océano.

²Que en la CT constituiría un flujo de Alimento.

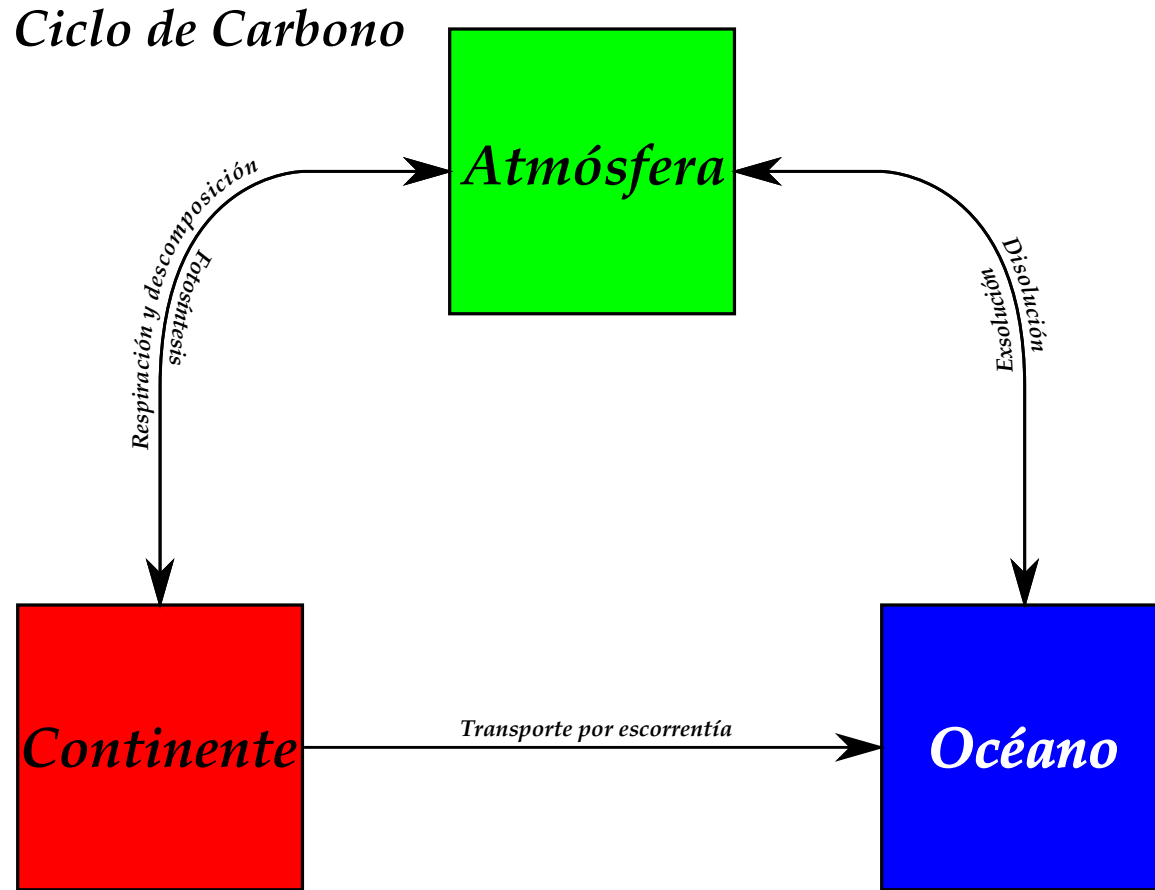


Figura 4.1: Diagrama de flujo del CC.

discusión.

Pensemos en dos reservorios de un fluido de trabajo entre los que se da una interacción; el flujo entre ambos dependerá de tres factores: la geometría, el material del que está hecho el conducto entre ambos y la cantidad de fluido en los reservorios. Es decir, por más fluido que pueda pasar de uno a otro, si el reservorio origen no tiene fluido entonces no habrá flujo en esa dirección, lo mismo si el reservorio destino está lleno.

De la misma forma, el diagnóstico propuesto en los capítulos anteriores me lleva a concluir que el flujo de C entre reservorios a un tiempo dado debe estar limitado por el contenido de C presente en los reservorios y las propias características intrínsecas del fenómeno que genera el flujo. Las características intrínsecas del fenómeno de flujo las podemos modelar con las herramientas del capítulo 2, mientras que el factor del contenido disponible en los reservorios debe de plantearse de otra manera.

En principio, ésto implicaría que a parte de los términos lineales, similares a los de CE, debería de haber términos no lineales en las ecuaciones suponiendo que estamos buscando, como en el caso de la CE, las ecuaciones dinámicas del sistema. Así, sería posible buscar un modelo no lineal que fuese simple. Lo primero que me viene a la mente, y que es lo más razonable si se requiere simplicidad, es pensar que los términos no lineales de las ecuaciones dinámicas son productos de las concentraciones de los reservorios cuya interacción se necesita describir. Una razón más sólida sería hacer una analogía con los sistemas mecánicos y pensar en particular en los sistemas Hamiltonianos en los cuales las ecuaciones de movimiento (que son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden) generalmente son no lineales y con productos de las variables dinámicas³. Así con mayor generalidad las ecuaciones

serían del tipo

$$\dot{C}_\ell = \alpha_\ell + \sum_{n=1}^3 \beta_{n\ell} C_n + \sum_{m=1}^3 \gamma_{\ell m} C_m C_\ell$$

para cada ℓ donde $\ell = 1, 2, 3$. Nótese que ésto no es más que una expansión de Taylor de C_ℓ (para cada ℓ) hasta segundo orden. De ese modo he mostrado el modelo no lineal más simple para este tipo de sistemas (ciclos) en los cuales he destacado la no linealidad proveniente de la dependencia del flujo en las cantidades del que recibe y el que aporta. El lector seguramente preguntará ¿cuál es la razón para no haber hecho ésto en la CE, en particular en el bucle del efecto invernadero? La respuesta viene en dos partes. Primero, el modelo de la CE es un modelo de balance. Segundo, y más importante, supuse que las salidas de los reservorios eran todo lo que tenían en un instante dado. Sin embargo en este caso los reservorios son físicos y reales, no un artificio matemático sin mucho contacto con la realidad: la analogía con los sistemas mecánicos, vistos con el formalismo energético de Hamilton es ahora propia, ya que el equivalente de la energía en este caso es el C que fluye entre reservorios, y aunque la CE tiene que ver con energía no estamos viendo la energía como se vería en Mecánica.

Veamos el significado de cada término en las ecuaciones anteriores.

- α_ℓ : Estos términos representan procesos internos al reservorio C_ℓ ; expresiones en este modelo simplificado de la acción de los subreservorios en el contenido que cada reservorio tiene disponible para su intercambio con otro reservorio⁴, luego serían, en general, funciones de los procesos internos al reservorio.
- $\beta_{n\ell} C_n$: Estos términos lineales representan procesos controlados por el contenido en el reservorio C_n y cuyo sentido vendrá dado por el

³Además es correcto pensar, tomando como referencia la teoría de colisiones en Mecánica Estadística, que sólo habrá interacciones a pares, ya que la interfase entre dos subsistemas es una superficie mientras que la interfase entre los tres sería un punto.

⁴Puede pensarse, por ejemplo, que el reservorio C_1 está formado por una serie de subreservorios entre ellos uno que representa el contenido disponible para pasar a otros reservorios.

signo de la función $\beta_{n\ell}$ que representa el fenómeno que produce el flujo visto desde el reservorio ℓ .

- $\gamma_{\ell m} C_m C_\ell$: Estos términos no lineales representan interacciones controladas por el contenido en los reservorios C_m y C_ℓ y la función $\gamma_{\ell m}$ representa el fenómeno que produce el flujo visto desde el reservorio ℓ considerando ya el flujo neto, i.e. entradas menos salidas. En particular para cuando $m = \ell$ representan otro tipo de procesos internos al reservorio, en este caso procesos internos que dependen de cuál es el contenido disponible a intercambiar con otros reservorios.

De ese modo, como los subreservorios y su acción los consideré despreciables en las escalas de tiempo que manejo, designo que $\forall \ell a_\ell = 0$. Como sólo tenemos un proceso entonces deberán aparecer en las ecuaciones términos de la forma $\beta_{n\ell} C_n$ que inmediatamente identificamos que serán $\beta_{11} C_1$ y $\beta_{13} C_1$. Como sólo tenemos dos interacciones tendremos los términos $\gamma_{12} C_2 C_1$, $\gamma_{21} C_1 C_2$, $\gamma_{23} C_3 C_2$, $\gamma_{32} C_2 C_3$. Finalmente, como estamos ignorando los subreservorios entonces $m = \ell \rightarrow \gamma_{\ell m} = 0$. De esa manera hemos simplificado el sistema.

4.2. Modelo del CC.

De lo discutido en la sección anterior es claro que el modelo matemático, con las hipótesis simplificatorias propuestas, será

$$\dot{C}_1 = \beta_{11} C_1 + \sum_{m=1}^3 \gamma_{m1} C_m C_1$$

$$\dot{C}_2 = \sum_{m=1}^3 \gamma_{m2} C_m C_2$$

$$\dot{C}_3 = \beta_{13} C_1 + \sum_{m=1}^3 \gamma_{m3} C_m C_3$$

o pasando a una notación mas compacta⁵

$$\dot{C}_\ell = C_m \beta_{m\ell} + C_m \gamma_{mn} \Delta_{n\ell}$$

o en notación matricial

$$\dot{C} = C\beta + C\gamma\Delta$$

donde $C = (C_1, C_2, C_3)$,

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & \beta_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$$

y

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} \\ 0 & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora otra cosa clara es que tampoco tenemos tantos coeficientes. Por ejemplo los flujos descritos por β_{11} y β_{13} en realidad representan el mismo Proceso de Continente a Océano sólo que visto desde reservorios distintos es decir β_{11} es el coeficiente de flujo visto desde Continente mientras que β_{13} es el coeficiente de flujo visto desde el Océano: luego $\beta_{13} = -\beta_{11}$ donde claramente $\beta_{11} \leq 0$ y por tanto $\beta_{13} \geq 0$. Así tenemos solamente un coeficiente independiente. De la misma manera existen dos Interacciones representadas por los coeficientes de la matriz γ y se sigue que $\gamma_{nm} = -\gamma_{mn}$; sin embargo, ahora sin la restricción de que los coeficientes sean positivos o negativos, así de cuatro coeficientes sólo hay dos independientes. Luego, en total hay tres coeficientes que nos determinan las Interacciones y el Proceso implicados. Así también es inmediato ver el significado de los coeficientes γ_{mn} en términos de las Interacciones: γ_{mn} es la Interacción entre los reservorios de m y n vista desde el reservorio n . La Interacción implica que lo que representa este coeficiente es la tasa de C entrante menos la de C saliente

⁵Convenio de Einstein.

visto desde el reservorio n , mientras que como antes dijimos $\gamma_{nm} = -\gamma_{mn}$ ya que ahora estamos viendo la interacción desde m .

Algo que hemos mencionado casi desde el primer capítulo es la conservación del carbono total. Ésto implica que en el tiempo la derivada total de $C_1 + C_2 + C_3$ debería ser nula. En efecto $\frac{dC_1+C_2+C_3}{dt} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_3$ y entonces al sumar las ecuaciones para cada componente se obtiene en efecto 0⁶. De ésta forma el modelo incorpora ya la conservación de la cantidad de carbono de manera automática⁷.

En este caso para adimensionalizar y normalizar el sistema simplemente haremos que $C_{\ell,rel} = \frac{1}{C_1+C_2+C_3} C_\ell$. Las ecuaciones no cambian en nada por hacer este cambio y como no usaré mas que las cantidades normalizadas retiraré la etiqueta sin posibilidad de confusión⁸.

4.3. Modelos de los coeficientes de flujo.

Ahora, como hicimos en el caso de la CE necesitamos encontrar un modelo para los coeficientes de flujo. Como se puede sospechar utilizaremos las herramientas del capítulo 2 para tal fin. Sin embargo estoy adelantando demasiado.

4.3.1. Interacción Continente - Atmósfera.

En el caso de la Interacción Continente - Atmósfera⁹ tenemos que los Procesos que componen esta interacción dependerán de la abundancia de la

⁶Si introdujéramos los procesos internos a cada reservorio entonces necesariamente los coeficientes de la diagonal de γ y las α requieren cumplir ciertas condiciones que hagan 0 la suma.

⁷Lo interesante de este modelo es que en toda esta discusión no hemos mencionado otras hipótesis sobre el C mas que su conservación. De ese modo no sería descabellado pensar que el Ciclo del Agua podría ser modelado con este mismo esqueleto considerando que el Agua se conserva así como el C.

⁸De ese modo también los coeficientes se vuelven adimensionales.

⁹Representada por el coeficiente γ_{21} .

Biosfera, el Alimento en el Continente y éstos a su vez de Agua y Temperatura. En principio, sin mayor evidencia que la que hemos acumulado hasta ahora y en concordancia con el diagnóstico presentado, ésto implica que $\gamma_{21} = f(T)$. Si no metemos el CA y la CT¹⁰, en épocas de control continental¹¹ hay más lluvias en promedio y la CTC es más activa y de la misma manera se puede considerar que en control oceánico hay menos lluvias en promedio y la CTC es menos activa, de ese modo podemos eliminar la acción de la CA y la CT considerando que toda la dependencia está en T . Sin embargo hay un detalle con el coeficiente: en control continental el coeficiente deberá ser positivo ya que es razonable pensar que la actividad continental implica una entrada neta de carbono para aumentar la BC¹², mientras que deberá suceder lo contrario en control oceánico¹³. Por otra parte el crecimiento de la BC no puede ser ilimitado con Temperatura creciente ya que llegaremos a un punto en el que la cantidad de C atmosférico sea insuficiente para que la BC continúe creciendo: de nuevo saturación. De la misma manera deberá existir la característica asintótica para Temperaturas bajas (control oceánico) de que la BC no muera. Sin embargo para que podamos representar correctamente deberemos de modificar la sigmoide un poco.

La sigmoide deberá de tener una parte negativa y otra positiva, es decir deberemos desplazar verticalmente la curva. Así existe una temperatura, que llamaré temperatura característica T_c , que representa el cambio de control entre un control Continental y un control Oceánico, i.e. entre interglacial y glacial. En principio tendríamos que

$$\gamma_{21}(T) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{21,0}} - 1\right) e^{-r_{21}(T-T_0)}}$$

¹⁰Ya que no tenemos datos de estos subsistemas con que comparar.

¹¹Cuando la Temperatura es alta, i.e. en el interglacial.

¹²Mientras que será negativo γ_{12} ya que ésto priva de carbono a la Atmósfera.

¹³Podríamos haber considerado ésto desde el punto de vista del Océano.

pero queremos que $\gamma_{21,nuevo}(T) = \gamma_{21}(T) + \Gamma$ de modo que para T_c se tiene $\gamma_{21,nuevo}(T_c) = \gamma_{21}(T_c) + \Gamma = 0$, de lo cual se deduce que $\Gamma = -\gamma_{21}(T_c)$. Luego eliminando el subíndice de distinción sin riesgo de confusión.

$$\gamma_{21}(T) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{21,0}} - 1\right) e^{-r_{21}(T-T_0)}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{21,0}} - 1\right) e^{-r_{21}(T_c-T_0)}} \quad (4.3.1)$$

siendo tal que $\gamma_{21} > 0$ si $T > T_c$ y $\gamma_{21} < 0$ si $T < T_c$ e inmediatamente es necesario que $r_{21} > 0$.

4.3.2. Interacción Océano - Atmósfera.

La interacción Océano - Atmósfera¹⁴, usando argumentos análogos basados en el diagnóstico, también es susceptible de ser descrita con una sigmoide desplazada. En este caso $\gamma_{23} < 0$ si $T > T_c$ y $\gamma_{23} > 0$ si $T < T_c$ pues en épocas de control continental la exsolución gana ya que la temperatura del Océano es más alta y la circulación termohalina se debilita por el derretimiento de la Criosfera disminuyendo de este modo la capacidad de almacenar Carbono en el Océano, mientras que en épocas de control oceánico sucederá lo contrario. El cambio en los siglos implica que $r_{23} < 0$.

$$\gamma_{23}(T) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{23,0}} - 1\right) e^{-r_{23}(T-T_0)}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{23,0}} - 1\right) e^{-r_{23}(T_c-T_0)}} \quad (4.3.2)$$

4.3.3. Proceso Continente - Océano.

En este caso $\beta_{11} < 0$ para todo T mientras que $\beta_{13} > 0$ para todo T . Por conveniencia tomamos β_{13} como referencia. La escorrentía es consecuencia de mayor precipitación y cuando ésto sucede es porque el Continente tiene el control y la BC está muy

activa, resultando en riqueza de materia orgánica susceptible de ser arrastrada al Océano por la escorrentía. Como esta entrada depende de la materia orgánica y ésta tiene una saturación y un inicio suave, características de la sigmoide, en este caso sin la necesidad de desplazar la sigmoide.

$$\beta_{13}(T) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\beta_{13,0}} - 1\right) e^{-r_3(T-T_0)}} \quad (4.3.3)$$

4.4. Resumen.

Para reunir todos los elementos (de forma elegante) que hemos descrito, tenemos que las ecuaciones dinámicas del CC son

$$\begin{cases} \dot{C} = C\beta + C\gamma\Delta \\ C(t_0) = C_0 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

donde $C = (C_1, C_2, C_3)$,

$$\beta = \begin{pmatrix} -\beta_{13} & 0 & \beta_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$$

y

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{21} & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & -\gamma_{32} \\ 0 & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

y los coeficientes están dados por las sigmoides 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3.

¹⁴Representada por el coeficiente γ_{23}

Parte III

La simulación.

Capítulo 5

Un mar de opciones... pero sólo una correcta.

Violence is the last refuge of the incompetent.

Salvor Hardin,
Foundation.

Una vez derivados los modelos para la CE y el CC como lo he mostrado a lo largo de los anteriores capítulos, toca comparar sus resultados con los datos del BGV.

El trabajo en sí mismo implica paciencia. Para realizar esta tarea usé como primer opción un programa, creado por mí, usando el lenguaje de programación Python. Sin embargo, la practicidad de este programa estaba lejos de ser óptima. De esa manera la investigación se hizo utilizando el conjunto de programas de solución numérica incluidos en Mathematica 8.0. Para ello use el solucionador numérico de ecuaciones diferenciales de Mathematica, NDSolve.

La idea es tomar, por ejemplo, el modelo de la CE, usar la serie de tiempo de CO_2 para alimentar las sigmoides del modelo de la CE, variar los parámetros libres de las sigmoides y para un conjunto de parámetros obtener una solución con NDSolve comparándola con la correspondiente serie de tiempo de CE. Sin embargo, dada la gran cantidad de parámetros en todas las sigmoides asociadas a un modelo, lo primero que tuve que hacer es explorar

como las soluciones con NDSolve se veían afectadas por la modificación de uno de los parámetros. Así una vez sabido como las soluciones varían con los parámetros también puedo hacer mas eficiente el ajuste de la solución a los datos observados correspondientes y obtener el conjunto de parámetros que dan el mejor ajuste.

5.1. La Cadena Energética. Simulación.

Para trabajar con la CE usé el código de Mathematica 8.0 en un notebook de éste que se muestra en las figuras 5.1 y 5.2.

5.1.1. Discusión del código.

Primero discutiré, línea por línea, la figura 5.1:

1. Carga los datos de Temperatura de las STBGV. Los datos crudos fueron modificados para que el intervalo temporal quedara como en la figura 1.1. Para hacer que en vez de anomalías se tengan temperaturas representativas de todo el globo, se usó la normal de 15C como representativa de la temperatura media anual global y se añadió a los datos del BGV.

```

Temp = Import["/home/elessar/Documentos/TESIS/TSTBGV.txt", "Table"];
Carb = Import["/home/elessar/Documentos/TESIS/CSTBGV.txt", "Table"];
refc = Carb[[2, 2]];
CA = 0.6;
Carb[[All, 2]] =  $\frac{CA * Carb[[All, 2]]}{refc}$ ;
To = Min[Temp[[All, 2]]];
Tf = Max[Temp[[All, 2]]];
Cao = Min[Carb[[All, 2]]];
Caf = Max[Carb[[All, 2]]];
to = Min[Temp[[All, 1]]];
tf = Max[Temp[[All, 1]]];
Cto = Min[Carb[[All, 1]]];
Ctf = Max[Carb[[All, 1]]];
Ω = 343;
Tt = Interpolation[Temp];
Cat = Interpolation[Carb];
GraphicsGrid[{{ListLinePlot[Temp, PlotRange -> {To, Tf}}, {ListLinePlot[Carb]}}];

A1[x_, y_, z_, Ca_] :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}\left[\left(y * \frac{refc}{CA}\right) * \left(Ca - \frac{CA * z}{refc}\right)\right]}$ 
A2[x_, y_, z_, Ca_] :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(y * \frac{refc}{CA}\right) * \left(Ca - \frac{CA * z}{refc}\right)\right]}$ 
A3[x_, y_, z_, Ca_] :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(y * \frac{refc}{CA}\right) * \left(Ca - \frac{CA * z}{refc}\right)\right]}$ 
A4[x_, y_, z_, Ca_] :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(y * \frac{refc}{CA}\right) * \left(Ca - \frac{CA * z}{refc}\right)\right]}$ 

a1 :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a10} - 1\right) \text{Exp}\left[\left(r1 * \frac{refc}{CA}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{CA * Ca0}{refc}\right)\right]}$ 
a2 :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a20} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r2 * \frac{refc}{CA}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{CA * Ca0}{refc}\right)\right]}$ 
a3 :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a30} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r3 * \frac{refc}{CA}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{CA * Ca0}{refc}\right)\right]}$ 
a4 :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a40} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r4 * \frac{refc}{CA}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{CA * Ca0}{refc}\right)\right]}$ 

```

Figura 5.1: Código para la simulación de la CE. Definición de variables.

2. Carga los datos de CO_2 de las STBGV. Los datos crudos recibieron el mismo tratamiento que los de temperatura en cuanto al tiempo. Como hipótesis se considera que los datos de CO_2 son una medida del C genérico en el reservorio de Atmósfera, i.e. C_2 .
 3. Se establece una referencia arbitraria, en este caso el segundo dato de la serie, para adimensionalizar los datos de C.
 4. Se establece cuál es la cantidad inicial relativa en Atmósfera del total de C genérico. Este valor se obtiene de experimentar con el CC.
 5. A partir de la referencia y la cantidad inicial relativa se adimensionalizan y normalizan los datos de C.
 6. Se extrae la temperatura mínima.
 7. Se extrae la temperatura máxima.
 8. Se extrae el contenido mínimo de C_2 .
 9. Se extrae el contenido máximo de C_2 .
 10. Se extrae el tiempo inicial de la serie de T.
 11. Se extrae el tiempo final de la serie de T.
 12. Se extrae el tiempo inicial de la serie de C. (Heredado de versiones anteriores y sin mucho sentido)
 13. Se extrae el tiempo final de la serie de C. (Heredado de versiones anteriores y sin mucho sentido)
 14. Se establece la irradiancia Ω_{\odot} .
 15. Se construye una función interpoladora para la serie de T. Se usa interpolación lineal entre cada punto de datos para extraer los valores entre éstos. Si usaba una interpolación de orden mayor se podían obtener comportamientos extraños.
 16. Se construye una función interpoladora para la serie de C. Se aplican los mismos comentarios que hice para la línea anterior.
 17. Se llama a las funciones gráficas de Mathematica para que muestren las series de tiempo cargadas. Ésto lo uso para corroborar que se hayan cargado correctamente.
 18. Las siguientes líneas presentadas en la figura son las definiciones de los coeficientes sigmoides. Las primeras cuatro se utilizan mientras que las cuatro siguientes son heredadas de intentos anteriores y no se usan pero se guardan ya que podrían servir en un futuro. Nótese que en las sigmoides hago una especie de desnormalización, ya que el desarrollo del modelo de energía como fue concebido en un principio no requería de la normalización y adimensionalización. El modelo de la CE es el que mas guarda rudimentos de etapas de desarrollo anteriores, sobre todo para no intentar cosas que podrían dar sorpresas inesperadas.
- Una vez cargados los datos y definidos los parámetros anteriores entonces se procede a la parte operativa, la cual se muestra en la figura 5.2. En ésta en realidad tenemos una sola línea de código. Esta línea de código llama a la función Manipulate, que nos permitirá, en teoría, manejar en tiempo real las soluciones manipulando los parámetros de las sigmoides y los valores iniciales. Dentro de Manipulate está anidada la llamada a NDSolve para resolver las dos ecuaciones de la CE indicando cuáles son las funciones a encontrar (s,a) y cuáles son los valores del tiempo para los cuales calculará la solución numérica. Además se especifica que método numérico se usará, el número de pasos máximo que deberá de hacer para parar si no converge y la precisión buscada. En los dos casos, CE y CC, el método se eligió como StiffnessSwitching ya que los sistemas con los coeficientes sigmoides presentan dificultades ante los métodos explícitos. StiffnessSwitching usa una batería de métodos numéricos tanto explícitos como implícitos de la familia de los Runge-

Kutta. También en ambos casos se hizo que usara todos los pasos posibles para llegar a converger (opción Infinity) y que la precisión a alcanzar fuera la más grande (opción Infinity). NDSolve obtiene la solución y lo manda a la variable sol la cual almacena las funciones interpoladoras para s, a obtenidas por el método numérico. Luego de hacer eso se invocan las funciones gráficas de Mathematica para obtener las gráficas de los coeficientes y evaluar las soluciones para obtener las gráficas de las series de tiempo de s, a y finalmente evalúa la expresión de la ley de Stefan-Boltzmann para obtener la serie de tiempos de temperatura, superponiéndola con la obtenida de la función de interpolación de los datos de temperatura y tener un marco de comparación. Además se tiene una representación del espacio fase del sistema. Posterior a estas instrucciones se le dice a Manipulate cuáles son los rangos de los parámetros y sus valores iniciales.

Al ejecutar estas instrucciones, Mathematica genera un panel de control con barras deslizables (y la posibilidad de introducir los valores a través de teclado) para modificar los parámetros y a su derecha mostrará las gráficas indicadas. La evaluación no es a tiempo real ya que le lleva bastante tiempo a Mathematica resolver la ecuación para cada selección de parámetros que se haga, así que se necesita paciencia para ver los resultados dado un conjunto de valores de parámetros. Un ejemplo del aspecto que tiene el panel para la CE se puede ver en la figura 5.3.

5.1.2. Parámetros de las sigmoides y condiciones iniciales. Mejor ajuste.

Para poder obtener un ajuste de las series de tiempo simuladas con las STBGV observadas es necesario variar los parámetros de las sigmoides y en último caso las condiciones iniciales. Por cada sigmoide tenemos tres parámetros, como vimos en los capítulos anteriores, a variar: r y el “valor inicial” dado por una abscisa y una ordenada.

En el caso de la CE tengo cuatro sigmoides por

lo que, en principio, tenemos 12 parámetros con los que jugar. Sin embargo no hay que apresurarse. Primero pensemos. Claramente todas las r para cada sigmoide son independientes, o tal dependencia es rebuscada y es mejor no intentar si quiera investigar. Así definitivamente tenemos cuatro parámetros confirmados que deberemos variar. Sin embargo nos enfrentamos ante los “valores iniciales” para las sigmoides.

De la discusión general del capítulo 2 es posible deducir que si fijamos uno de los parámetros que definen el “valor inicial” de una sigmoide entonces al variar el restante, sea abscisa u ordenada, siempre será posible alcanzar cualquier otra sigmoide dada, ya que esta operación implica un corrimiento de la sigmoide original. De ese modo, y teniendo en cuenta que la abscisa, un valor de referencia de carbono, es mas artificial que el valor de la sigmoide en ese punto y junto con lo discutido antes, defino que las cuatro sigmoides del modelo de la CE tengan la misma “abscisa inicial” con lo que nos quedan sólo otros cinco parámetros a variar. De ese modo tenemos en total nueve parámetros a variar.

En cuanto a las condiciones iniciales de la CE lo que hice fue consultar [DeWi00] para encontrar algo razonable. En los ejercicios del capítulo de efecto invernadero es posible encontrar un estimado de los valores iniciales y basta dividirlos entre Ω_{\odot} y ponerlos en el modelo. Esa fue mi propuesta inicial.

Una vez establecido qué parámetros iba a variar y cuáles eran mis condiciones iniciales procedí a estudiar el comportamiento de cada uno de los parámetros en el sentido de qué pasa si dejo todos fijos y varío uno. Así es posible construir un ABC de lo que hace cada parámetro y sobre la marcha ir haciendo el ajuste. El asunto suena fácil, sin embargo puedo asegurar que son días completos de probar, frustrarse y volver a probar al día siguiente: un mar de soluciones y sólo una correcta.

En efecto, podría considerarse que el sistema al ser altamente parametrizado tiene abundantes combinaciones de parámetros que dan la respuesta correcta, sin embargo no es verdad. El mejor ajuste se

consigue en una franja muy estrecha de valores de los parámetros, lo cual de por sí es muy bueno. En la tabla 5.1 resumo cuáles son los comportamientos de los parámetros, lo que ayudó a mi investigación.

Jugando con estas características, y explorando mínimamente las condiciones iniciales, es posible llegar a la combinación de parámetros de mejor ajuste presentados en la tabla 5.2 y con las condiciones iniciales $S(0) = 1.43$ y $A(0) = 1.51$. La serie de tiempo de temperatura simulada en comparación con la correspondiente STBGV se muestra en la figura 5.4 y la evolución del sistema en el correspondiente espacio fase del sistema de ecuaciones se muestra en la figura 5.5. El criterio de ajuste fue puramente visual.

Nótese el gran parecido de la serie de tiempo simulada con la serie de tiempo observada. Sin embargo hay un detalle a destacar: cerca del tiempo 0 se tiene que la solución difiere bastante de la serie de tiempo observada. Ésto tendrá una mayor relevancia en el CC como veremos a continuación y tiene que ver con que las condiciones iniciales exactas de los reservorios de energía o carbono son difíciles, sino imposibles, de obtener. Sin embargo el caso del CC será más notable y en ese caso tendrá que ver también con la propia ecuación y los métodos numéricos, cosa en la que no abundaré mucho más.

5.2. El Ciclo de Carbono. Simulación.

Para trabajar con el CC usé el código de Mathematica 8.0 en un notebook de éste que se muestra en las figuras 5.6 y 5.7.

5.2.1. Discusión del código.

El código de la figura 5.6 comparte casi todas las líneas con el correspondiente código de la CE, así que aquí indico cuales son las líneas diferentes.

1. Las primeras tres líneas de la figura 5.6 son

iguales a las primeras tres líneas correspondientes a la CE.

2. A partir de la cuarta línea y hasta la decimosegunda de la figura 5.6 se dan las líneas desde la quinta hasta la decimotercera de la CE.
3. A partir de la decimotercera línea y hasta la decimoquinta de la figura 5.6 se dan las líneas desde la decimoquinta hasta la decimoséptima de la CE.
4. Las siguientes líneas, a partir de la decimoquinta, presentadas en la figura 5.6 son las definiciones de los coeficientes sigmoides. Las primeras tres se utilizan mientras que las tres siguientes son heredadas de intentos anteriores y no se usan pero se guardan ya que podrían servir en un futuro.

En este caso la normalización de los datos de C es parte del problema, ya que es la condición inicial del modelo para C_2 , como lo había adelantado en la sección anterior.

Una vez cargados los datos y definidos los parámetros anteriores entonces se procede a la parte operativa, como en la anterior sección sólo que cambiando un sistema de ecuaciones por otro, la cual se muestra en la figura 5.7. Un ejemplo del aspecto que tiene el panel de control para el CC se puede ver en la figura 5.8.

5.2.2. Parámetros de las sigmoides y condiciones iniciales. Mejor ajuste.

En el caso del CC, y siguiendo las ideas usadas para la CE, tendremos siete parámetros: los acostumbrados de las sigmoides más la temperatura T_c . En este caso las ordenadas de las sigmoides $\gamma_{ml0} = 0.1$ siendo esta designación arbitraria y basada en lo discutido anteriormente para el caso de la CE con lo que no hay pérdida real de libertad.

En este caso no es posible buscar condiciones iniciales, ya que no se conoce la relación entre carbono

Parámetro.	Intervalo de variación.	Comportamiento.
r_1	(0,1)	La amplitud de la serie de tiempo de T aumenta, pero más hacia temperaturas negativas que a temperaturas positivas. A partir de 0.1 el aumento es exagerado.
r_2	(0,1)	La amplitud de la serie de tiempo de T aumenta, pero más hacia temperaturas negativas que a temperaturas positivas. A partir de 0.1 el aumento es casi infinito. La diferencia con el anterior es que el aumento hacia temperaturas positivas es mayor.
r_3	(0,1)	La amplitud de la serie de tiempo aumenta, pero más hacia temperaturas negativas que a temperaturas positivas en menor medida que los anteriores. A partir de 0.001 el aumento es exagerado.
r_4	(0,1)	La amplitud de la serie de tiempo aumenta, pero más hacia temperaturas negativas que a temperaturas positivas en menor medida que los anteriores. A partir de 0.001 el aumento es exagerado. La diferencia es equivalente a la diferencia entre r_1 y r_2 .
$a_{1,0}$	(0,1)	Desplazamiento vertical hacia abajo de la serie de tiempo con cambio de amplitud.
$a_{2,0}$	(0,1)	Desplazamiento vertical hacia abajo de la serie de tiempo con cambio de amplitud mayor que el anterior.
$a_{3,0}$	(0,1)	Desplazamiento vertical hacia arriba de la serie de tiempo con cambio de amplitud.
$a_{4,0}$	(0,1)	Desplazamiento vertical hacia arriba de la serie de tiempo con cambio de amplitud mayor que el anterior.
$C_{2,0}$	(200,300)ppmv	Cambia la amplitud de la serie de tiempo.

Tabla 5.1: Parámetros de la CE. Intervalo de variación y comportamiento.

Parámetro.	Valor.
r_1	0.01
r_2	0.01
r_3	0.0001
r_4	0.0001
$a_{1,0}$	0.3
$a_{2,0}$	0.2
$a_{3,0}$	0.8
$a_{4,0}$	0.6
$C_{2,0}$	240ppmv

Tabla 5.2: Parámetros de mejor ajuste de la CE.

Atmosférico, carbono Continental y carbono Océánico como cantidades relativas ni se tienen datos en el BGV sobre ello. Sin embargo como se empieza en un máximo de las STBGV entonces propongo que el Océano tenga un contenido bajo. Por otra parte es posible intuir que el contenido en Atmósfera deberá ser alto ya que provee a la BC con suministro suficiente para que sea una BC rebosante. De ese modo propongo que en el pico inicial $C_{20} > C_{10} > C_{30}$. Sin embargo como estamos en control Continental necesariamente el contenido del Océano debe ser mucho menor que el contenido en Continente. De ese modo propuse que $C_{20} = 0.65$, $C_{10} = 0.25$ y por la conservación de carbono $C_{30} = 0.1$.

Una vez establecido qué parámetros iba a variar y cuáles eran mis condiciones iniciales procedí a estudiar el ABC de los parámetros. En la tabla 5.3 resumo cuáles son los comportamientos de los parámetros, usando la serie simulada de C_2 como referencia.

Jugando con estas características, y explorando mínimamente las condiciones iniciales, es posible llegar a la combinación de parámetros de mejor ajuste presentados en la tabla 5.4 y con las condiciones iniciales $C_1(0) = 0.3$ y $C_2(0) = 0.6^1$. La serie de tiempo de carbono simulada en comparación con la correspondiente STBGV se muestra en la figura 5.9 y la evolución del sistema en el correspondiente espacio fase del sistema de ecuaciones se muestra en la figura 5.10. El criterio de ajuste fue puramente visual.

Nótese el gran parecido de la serie de tiempo simulada con la serie de tiempo observada después del primer par de interglacial-glacial. Sin embargo hay un detalle a destacar: en los primeros 100ka se tiene que la solución difiere bastante de la serie de tiempo observada. Sin embargo cuando se modifican las condiciones iniciales la solución no se modifica apreciablemente en esta sección pero si lo puede hacer en las demás partes del sistema.

Ésto implica que el sistema requiere de una es-

pecie de calentamiento con lo que una técnica para evitar ésto es generar una especie de pasado previo al instante inicial para que el sistema ya traiga historia detrás que permita reproducir ese primer tramo de 100ka. Sin embargo tal exploración la he omitido ya que la serie de tiempo después de los 100ka está razonablemente ajustada.

Otra cosa que notar de la serie de tiempo es, que a diferencia de la de CE, no tiene tantas de las características secundarias. Las características secundarias más aplanadas de la serie de T provienen de que estamos usando la serie de CO_2 para los coeficientes. Sin embargo, y aunque usamos la serie de T del BGV, en el caso del CC el sistema es más complejo operativamente por lo que la influencia de la serie de T para el cálculo de los coeficientes se deja ver menos en el resultado final.

Pero el resultado más sorprendente², es observar la evolución en el diagrama fase del sistema en la figura 5.10. Es tanto increíble como hermoso lo que se puede ver en la figura, ya que tenemos un diagrama fase muy limpio en el que se muestra la evolución cíclica del sistema con ligeros desplazamientos de los ciclos³. Pero lo más destacable es que tienen una forma que recuerda a un diagrama fase de un sistema Lotka-Volterra. ¿No será acaso que el cambio de control Continente-Océano puede ser pensado como una competencia entre depredadores y presas? ¿Qué resultados teóricos trae consigo este descubrimiento? Eso lo trataré en el siguiente capítulo.

¹De ahí que en la CE se tome como valor para normalizar el carbono el 0.6.

²Que si no fuera por él no habría otro capítulo en esta tesis.

³La órbita del sistema no es cerrada.

Parámetro.	Intervalo de variación.	Comportamiento.
r_{21}	(0,1)	Conserva más o menos la amplitud y hace pasar la serie de una escalera ascendente (crecimiento continuo del contenido de C_2) hasta horizontalizarla, para valores mayores que 0.8 comienza a desplazar verticalmente hacia abajo la serie de tiempo.
r_3	(0,1)	Disminuye la amplitud y desplaza verticalmente hacia arriba notablemente la serie de tiempo, casi no afecta el extremo inicial.
r_{23}	(0,1)	Disminuye la amplitud y va curvando notablemente el centro de la serie de tiempo, casi no afecta los extremos.
T_{210}	(5.6, 18.23)	Conforme va creciendo va haciendo pasar la serie de un estado invertido de subida lenta bajada rápida a un estado de bajada lenta y subida rápida. Ésto junto con un desplazamiento vertical hacia arriba y para valores cercanos al límite superior una escalera.
T_{130}	(5.6, 18.23)	Conforme crece pasa de un estado saturado en el que C_2 se lleva casi todo el contenido de C hasta un estado en el que su contenido cae a cero y comienza a hacer oscilaciones escalonadas ascendentes.
T_{230}	(5.6, 18.23)	Oscilaciones crecientes tipo oscilador forzado que van pasando a un comportamiento más uniforme para luego degenerar, en el límite derecho del parámetro, en un decaimiento rápido a contenido casi nulo.
T_c	(5.6, 18.23)	Inicia desplazamiento vertical hacia arriba para terminar luego en aplanamiento de la señal y consecuente muerte del reservorio de C_2 .

Tabla 5.3: Parámetros del CC. Intervalo de variación y comportamiento.

Parámetro.	Valor.
r_{21}	0.596
r_3	0.76
r_{23}	0.696
T_{210}	12.25
T_{130}	15.265
T_{230}	11.85
T_c	10.8

Tabla 5.4: Parámetros de mejor ajuste del CC.

```

Manipulate[
sol = NDSolve[{{s'[t] ==  $\left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_{10}} - 1\right) \text{Exp}\left[\left(r_1 * \frac{r_{\text{refc}}}{\text{Ca}}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{\text{Ca} * \text{Ca}_0}{\text{refc}}\right)}\right)\right) - s[t] + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_{40}} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r_4 * \frac{r_{\text{refc}}}{\text{Ca}}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{\text{Ca} * \text{Ca}_0}{\text{refc}}\right)}\right)\right) a[t]},$ 
a'[t] ==  $\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_{20}} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r_2 * \frac{r_{\text{refc}}}{\text{Ca}}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{\text{Ca} * \text{Ca}_0}{\text{refc}}\right)}\right)} + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_{30}} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r_3 * \frac{r_{\text{refc}}}{\text{Ca}}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{\text{Ca} * \text{Ca}_0}{\text{refc}}\right)}\right)} \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_{20}} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r_2 * \frac{r_{\text{refc}}}{\text{Ca}}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{\text{Ca} * \text{Ca}_0}{\text{refc}}\right)}\right)}\right) s[t] - a[t], s[0] == s_0, a[0] == a_0},$ 
{s, a}, {t, Cto, Ctf}, Method -> "StiffnessSwitching", MaxSteps -> Infinity, PrecisionGoal -> Infinity]; GraphicsGrid[
{Plot[A1[a10, r1, Ca0, C], {C, Cao, Caf}, AxesLabel -> {{C2, Adim}, {a1[C2], Adim}}, PlotStyle -> Orange],
Plot[A2[a20, r2, Ca0, C], {C, Cao, Caf}, AxesLabel -> {{C2, Adim}, {a2[C2], Adim}}, PlotStyle -> Green],
Plot[A3[a30, r3, Ca0, C], {C, Cao, Caf}, AxesLabel -> {{C2, Adim}, {a3[C2], Adim}}, PlotStyle -> Black],
Plot[A4[a40, r4, Ca0, C], {C, Cao, Caf}, AxesLabel -> {{C2, Adim}, {a4[C2], Adim}}, PlotStyle -> Orange],
Plot[Evaluate[s[t] /. sol], {t, 0, Ctf}, AxesLabel -> {{t, Ka}, {S[t], Adim}}, PlotStyle -> Purple],
Plot[Evaluate[a[t] /. sol], {t, 0, Ctf}, AxesLabel -> {{t, Ka}, {A[t], Adim}}, PlotStyle -> Blue]},
{Plot[{{Evaluate[ $\left(\frac{\Omega}{5.6704 * A \cdot 8} \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a_{20}} - 1\right) \text{Exp}\left[-\left(r_2 * \frac{r_{\text{refc}}}{\text{Ca}}\right) * \left(\text{Cat}[t] - \frac{\text{Ca} * \text{Ca}_0}{\text{refc}}\right)}\right)}\right) s[t]\right)^{\frac{1}{4}} - 273.15} /. sol], Tt[t]}, {t, 0, Ctf},
AxesLabel -> {{t, Ka}, {T[t], Adim}}, PlotStyle -> {Purple, Red}],
ParametricPlot[Evaluate[{{s[t], a[t]} /. sol}, {t, 50, Ctf}, PlotRange -> All, ColorFunction -> Function[{x, y, t}, Hue[t]]]
}], {{s0, 1.43, "frac E S"}, 0, 2, 0.1}, {{a0, 1.51, "frac E A"}, 0, 2, 0.1}, {{a10, 0.3, "a10"}, 0, 1, 0.01},
{{a20, 0.2, "a20"}, 0, 1, 0.01}, {{a30, 0.8, "a30"}, 0, 1, 0.01}, {{a40, 0.6, "a40"}, 0, 1, 0.01}, {{Ca0, 240, "Ca0"}, Cao, 1.5 * Caf, 1},
{{r1, 0.01, "r1"}, 0, 1, 0.01}, {{r2, 0.01, "r2"}, 0, 1, 0.01}, {{r3, 0.0001, "r3"}, 0, 1, 0.01}, {{r4, 0.0001, "r4"}, 0, 1, 0.01]}$ 
```

Figura 5.2: Código para la simulación de la CE. Solución de la ecuación.

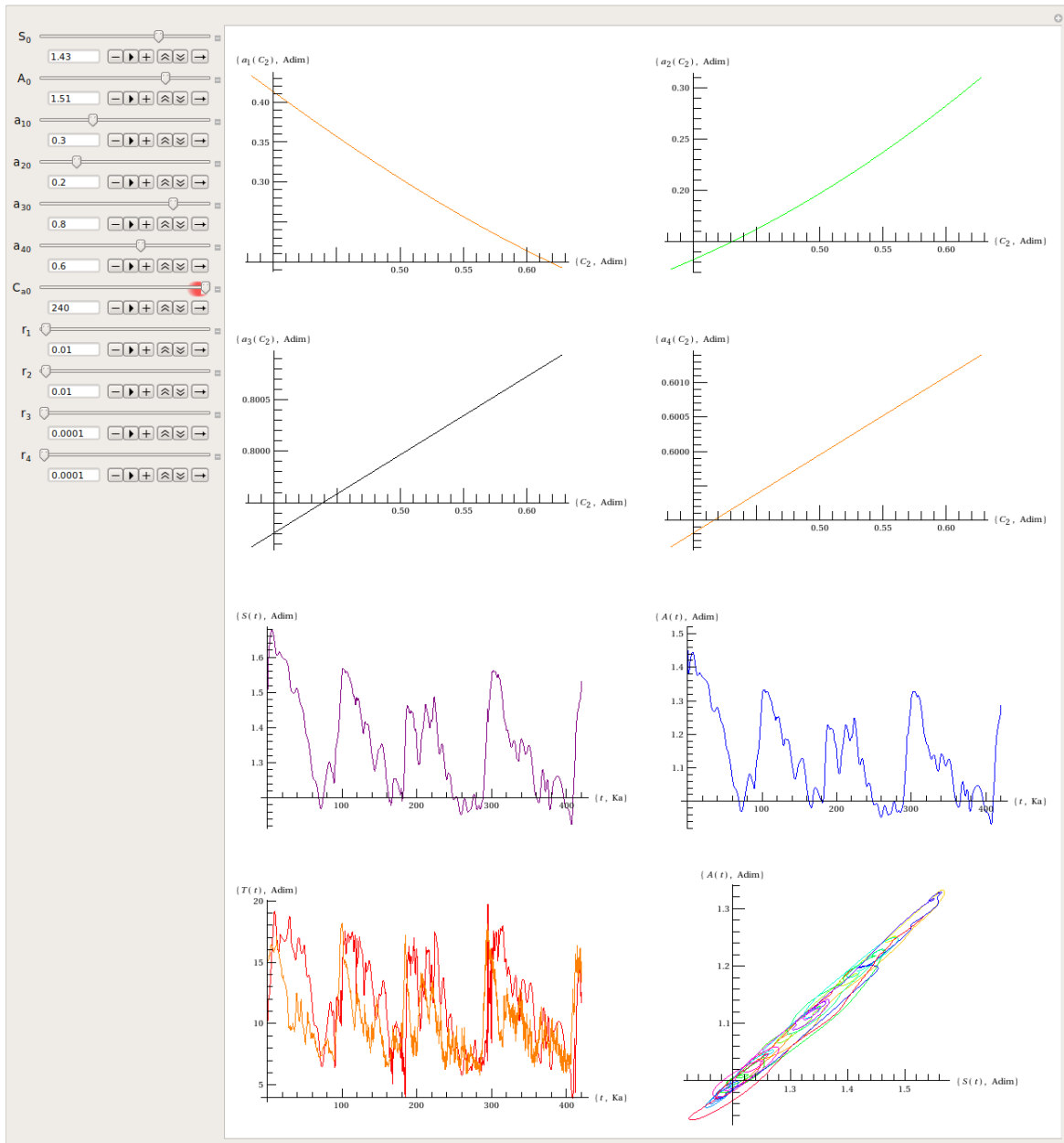


Figura 5.3: Panel de control de la simulación para la CE.

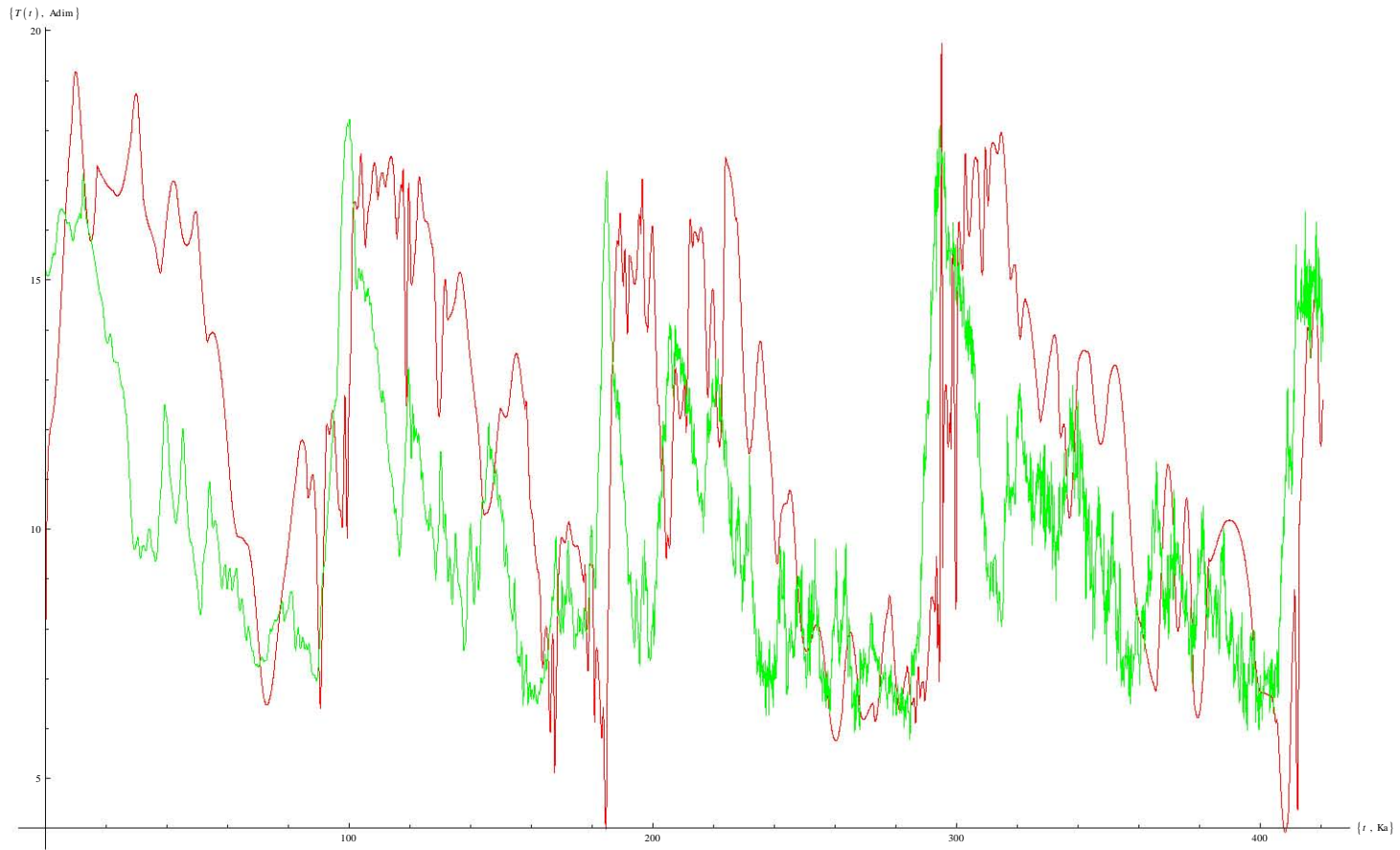


Figura 5.4: Serie de tiempo para T resultante de la simulación de la CE (rojo). Se compara con la STBGV para T con la modificación de 15C (en verde).

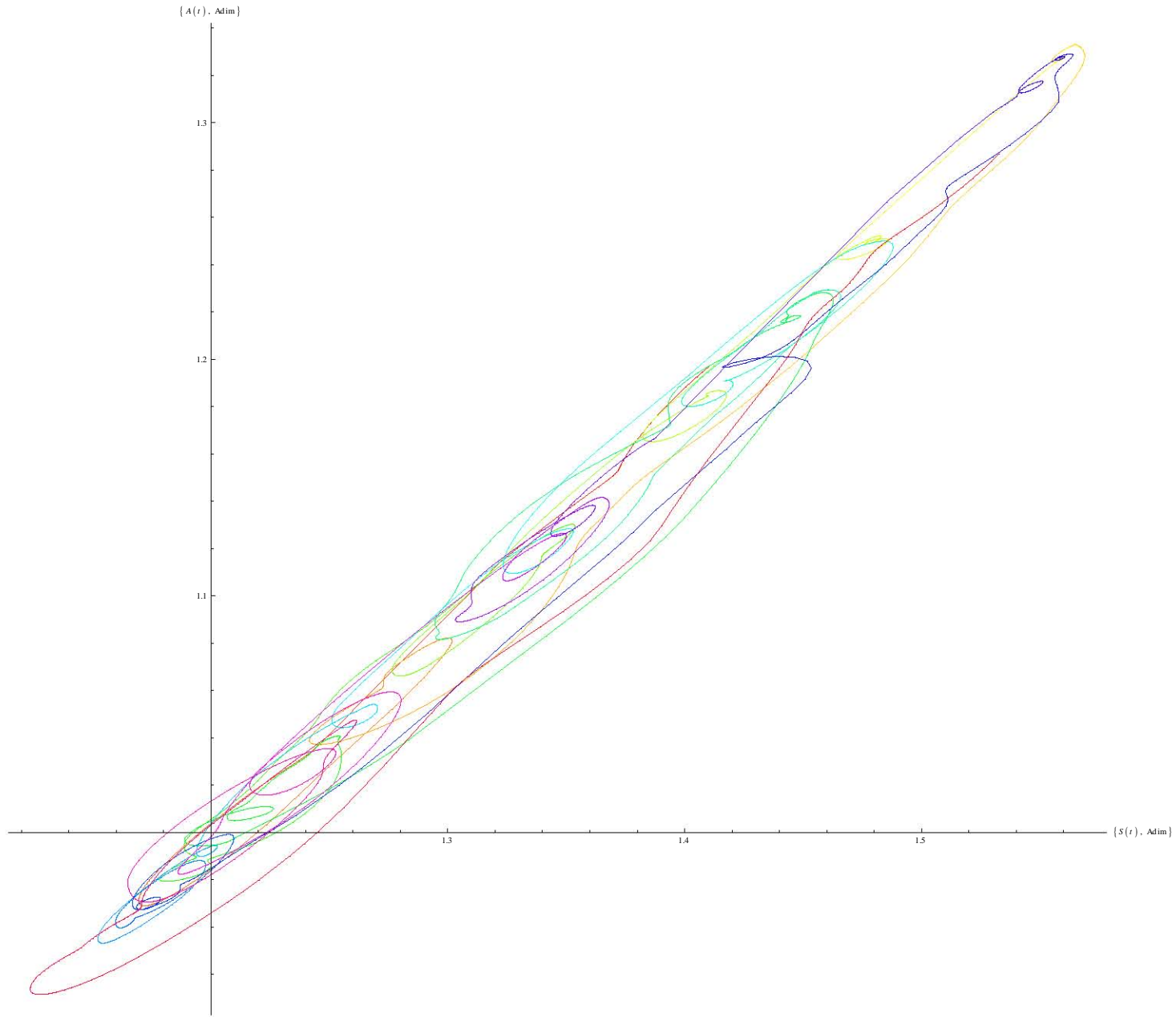


Figura 5.5: Evolución del sistema en el espacio fase de acuerdo a la simulación de la CE.

```

Temp = Import["/home/elessar/Documentos/TESIS/TSTBGV.txt", "Table"];
Carb = Import["/home/elessar/Documentos/TESIS/CSTBGV.txt", "Table"];
Carb[[All, 2]] =  $\frac{\text{Carb}[[\text{All}, 2]]}{\text{Carb}[[2, 2]]}$ ;
To = Min[Temp[[All, 2]]];
Tf = Max[Temp[[All, 2]]];
Cao = Min[Carb[[All, 2]]];
Caf = Max[Carb[[All, 2]]];
to = Min[Temp[[All, 1]]];
tf = Max[Temp[[All, 1]]];
cto = Min[Carb[[All, 1]]];
ctf = Max[Carb[[All, 1]]];
Tt = Interpolation[Temp];
Cat = Interpolation[Carb];
GraphicsGrid[{{ListLinePlot[Temp, PlotRange -> {To, Tf}}, {ListLinePlot[Carb]}}];
r21[x_, y_, z_, w_, T_] :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}[-y * (T - z)]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}[-y * (w - z)]}$ 
B3[x_, y_, z_, T_] :=  $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}[-y * (T - z)]}$ 
r23[x_, y_, z_, w_, T_] :=  $-\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}[-y * (T - z)]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \text{Exp}[-y * (w - z)]}\right)$ 
y21 :=  $\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_{210}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{21} * (Tt[t] - T_{210})]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_{210}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{21} * (Tc - T_{210})]}\right)$ 
beta3 :=  $\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\beta_{30}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{3} * (Tt[t] - T_{30})]}\right)$ 
y23 :=  $-\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_{230}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{23} * (Tt[t] - T_{230})]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_{230}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{23} * (Tc - T_{230})]}\right)$ 

```

Figura 5.6: Código para la simulación del CC. Definición de variables.

```

Manipulate[
solC =
NDSolve[
{c'[t] ==  $\left( \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{210}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{21} * (Tt[t] - T_{210})]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{210}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{21} * (Tc - T_{210})]} \right) * c[t] * a[t]$  +
 $\left( - \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\beta_{30}} - 1\right) \text{Exp}[-r_3 * (Tt[t] - T_{30})]} \right) * c[t] \right)$ ,
a'[t] ==  $\left( - \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{210}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{21} * (Tt[t] - T_{210})]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{210}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{21} * (Tc - T_{210})]} \right) * c[t] * a[t]$  +
 $\left( \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{230}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{23} * (Tt[t] - T_{230})]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{230}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{23} * (Tc - T_{230})]} \right) * a[t] * o[t] \right)$ ,
o'[t] ==  $\left( - \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{230}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{23} * (Tt[t] - T_{230})]} - \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_{230}} - 1\right) \text{Exp}[-r_{23} * (Tc - T_{230})]} \right) * a[t] * o[t]$  +
 $\left( \left( \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\beta_{30}} - 1\right) \text{Exp}[-r_3 * (Tt[t] - T_{30})]} \right) * c[t] \right)$ , c[0] == CC, a[0] == CA, o[0] == 1 - (CC + CA)}, {c, a, o}, {t, to, tf},
Method -> "StiffnessSwitching", MaxSteps -> Infinity, PrecisionGoal -> Infinity]; GraphicsGrid[{
{Plot[r21[\gamma210, r21, T210, Tc, T], {T, To, Tf}, AxesLabel -> {{T, C}, {\gamma21[T], Adim}}, PlotStyle -> Orange],
Plot[Evaluate[c[t] /. solC], {t, 0, tf}, AxesLabel -> {{t, Ka}, {c[t], Adim}}, PlotStyle -> Green]},
{Plot[\beta30[\beta30, r3, T30, T], {T, To, Tf}, AxesLabel -> {{T, C}, {\beta3[T], Adim}}, PlotStyle -> Black],
Plot[{Evaluate[a[t] /. solC], Cat[t] * CA}, {t, 0, Ctf}, AxesLabel -> {{t, Ka}, {a[t], Adim}}, PlotStyle -> {Red, Orange}]},
{Plot[r23[\gamma230, r23, T230, Tc, T], {T, To, Tf}, AxesLabel -> {{T, C}, {\gamma23[T], Adim}}, PlotStyle -> Purple],
Plot[Evaluate[o[t] /. solC], {t, 0, tf}, AxesLabel -> {{t, Ka}, {o[t], Adim}}, PlotStyle -> Blue]},
{ParametricPlot3D[Evaluate[{c[t], a[t], o[t] /. solC}, {t, 50, tf}, PlotRange -> All, ColorFunction -> Function[{x, y, z, t}, Hue[t]]],
}], {{CC, 0.3, "C Cont."}, 0, 1, 0.1}, {{CA, 0.6, "C Atm."}, 0, 1, 0.1}, {{Tc, 10.8, "Tc"}, To, Tf, 0.1}, {{\gamma210, 0.1, "\gamma210"}, 0, 1, 0.01},
{{\beta30, 0.1, "\beta30"}, 0, 1, 0.01}, {{\gamma230, 0.1, "\gamma230"}, 0, 1, 0.01}, {{T210, 12.25, "T210"}, To, 1.5 * Tf, 1}, {{T30, 15.265, "T30"}, To, 1.5 * Tf, 1},
{{T230, 11.85, "T230"}, To, 1.5 * Tf, 1}, {{r21, 0.596, "r21"}, 0, 1, 0.01}, {{r3, 0.76, "r3"}, 0, 1, 0.01}, {{r23, 0.696, "r23"}, 0, 1, 0.01]}

```

Figura 5.7: Código para la simulación del CC. Solución de la ecuación.

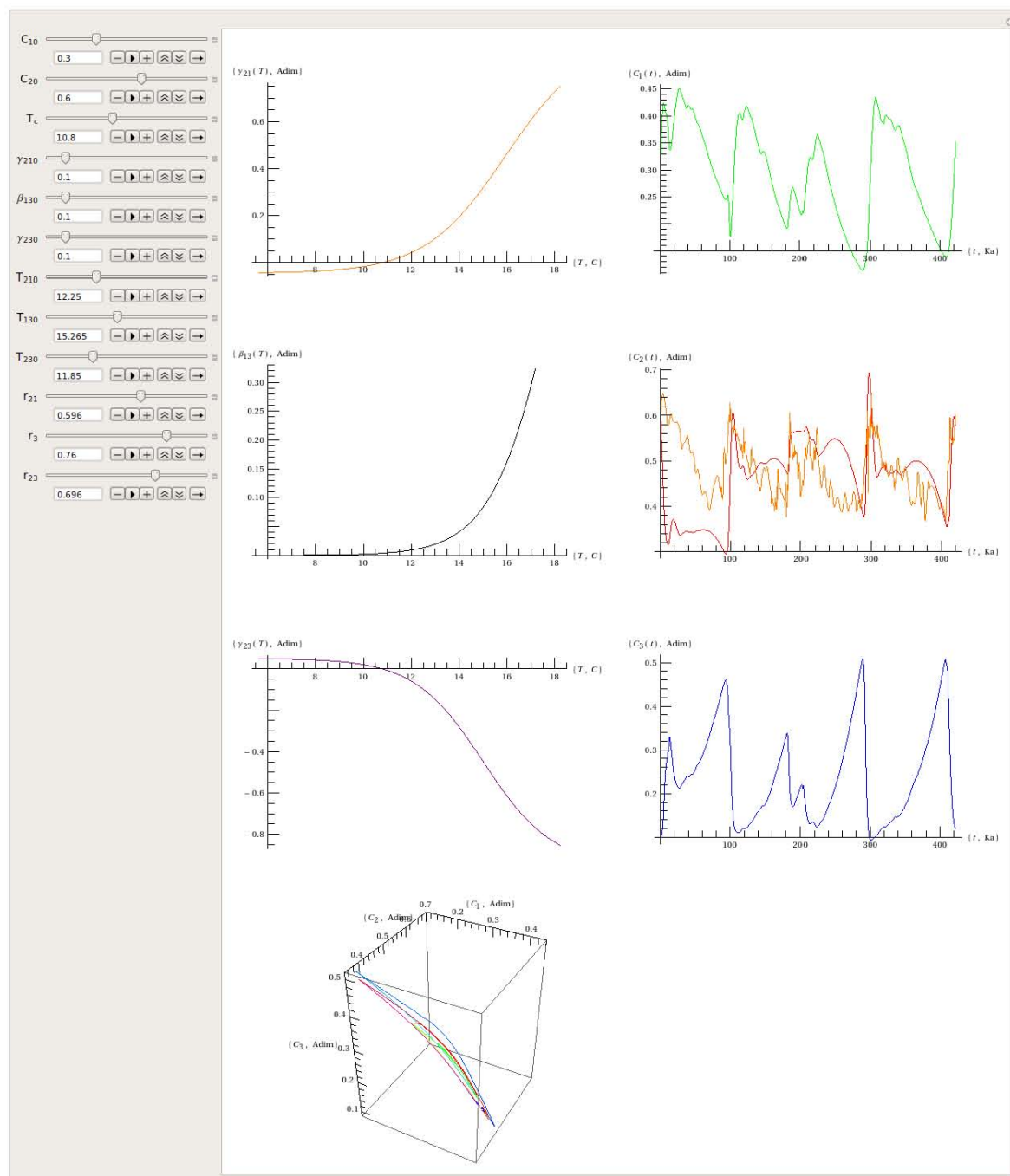


Figura 5.8: Panel de control de la simulación para el CC.

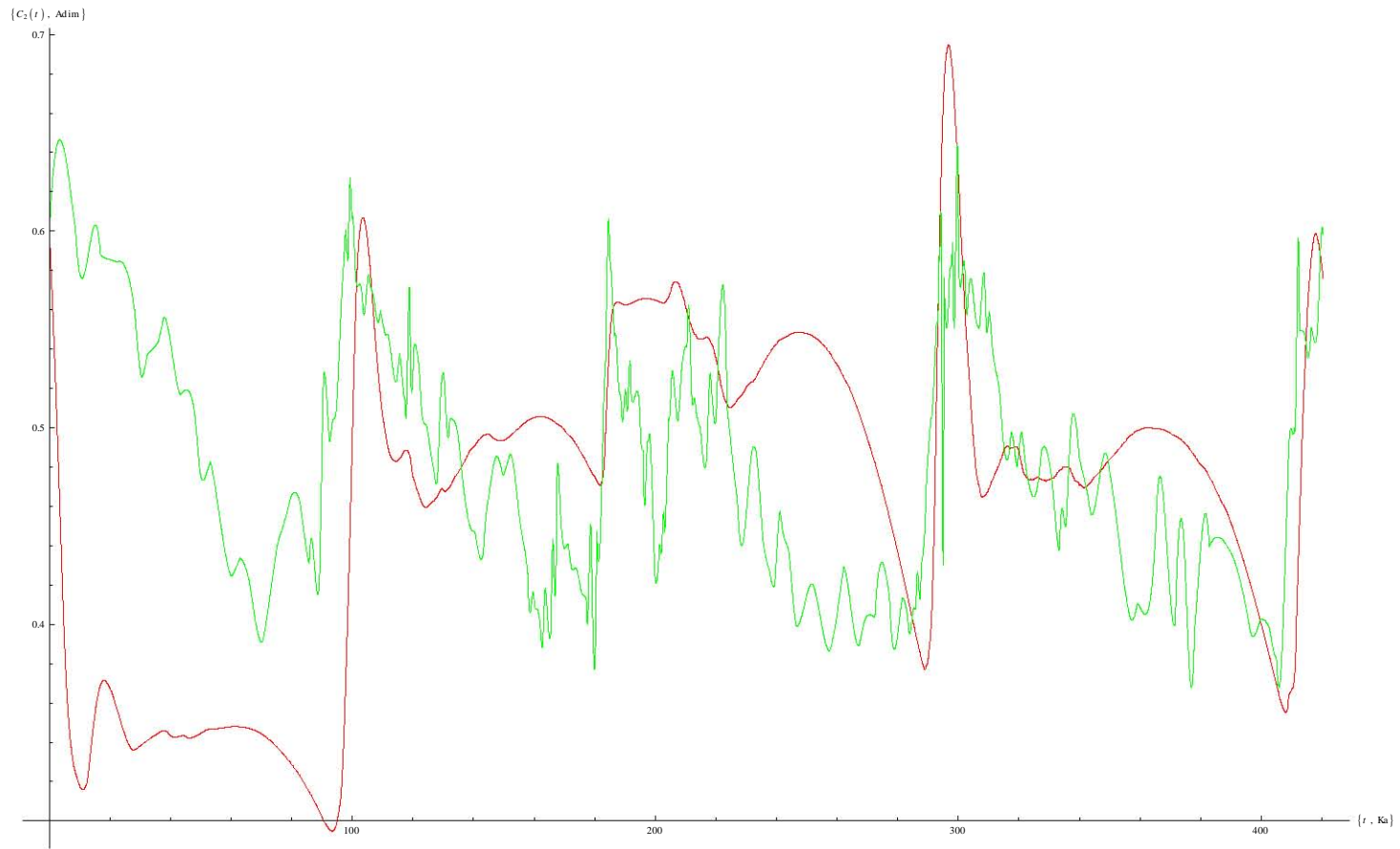


Figura 5.9: Serie de tiempo para C_2 resultante de la simulación del CC (rojo). Se compara con la STBGV para CO_2 normalizada (en verde).

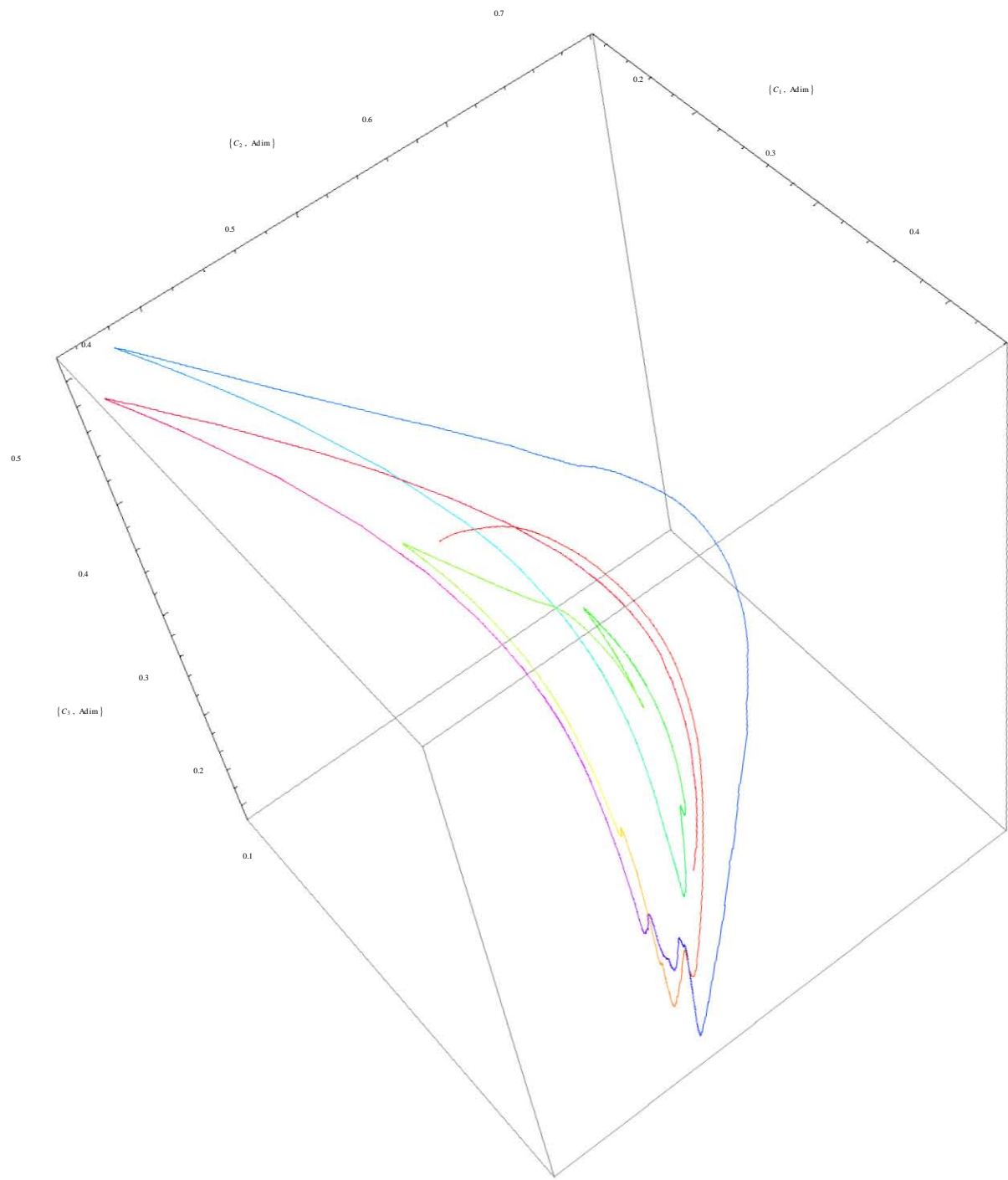


Figura 5.10: Evolución del sistema en el espacio fase de acuerdo a la simulación del CC.

Parte IV

Cuestiones sobre un modelo.

Capítulo 6

Epílogo. Sobre depredadores, presas, intermediarios y bihamiltonianos.

Hypothesis non fingo.

Sir Isaac Newton,
Philosophiæ Naturalis Principia
Mathematica.

El anterior capítulo dió validez a los modelos que construí a lo largo de los primeros capítulos, además de aportar, respecto de la realidad modelada, unos valores de los parámetros que nos dicen como varían el albedo o el transporte por escorrentía, por ejemplo, en el rango de contenidos de carbono y temperaturas respectivamente. Pero, aunque las hipótesis son innovadoras aún no podíamos explicar cuál era el origen de las ya casi olvidadas APV y ACREL, que al final de cuentas son el título de esta tesis.

Sin embargo para ello llegó al rescate el espacio fase de CC, para decirme y decirles a ustedes, queridos lectores, que estamos cerca de dar una interpretación (en términos de la realidad modelada) de lo que está sucediendo en el SC para que aparezcan las asimetrías, y de alguna manera hilar y unir completamente el diagnóstico y la simulación en un todo.

6.1. Conclusiones cualitativas a partir de trabajos sobre sistemas de Lotka-Volterra.

Al final del capítulo anterior dije que la evolución en el espacio fase de CC del SC me recordaba a las soluciones de un sistema de Lotka-Volterra. Si alguno de ustedes ha oído de este sistema de ecuaciones no lineales seguramente recordará que es un sistema bidimensional en el que tenemos la interacción de dos poblaciones, un depredador y una presa. Ése es el modelo que en 1910 propuso Alfred J. Lotka para describir reacciones químicas autocatalíticas y que, independientemente, consideró Vito Volterra en 1926 para sus investigaciones sobre poblaciones de peces y la pesca en el Adriático. Sin embargo ustedes recordarán que el sistema para el CC es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Como buen aprendiz de matemático les diré que es fácil decir ¿el modelo particular puede generalizarse? La respuesta es: sí.

Recordemos que construí el modelo del CC pensando en el modelo no lineal más simple, una expansión en Taylor a segundo orden¹ y una inspiración en Hamilton². Lo más grato es encontrar que

¹Inspirada por el modelo de la CE.

²Y en última instancia en el egregio Newton.

en efecto el modelo generalizado de Lotka-Volterra es exactamente el que se usa para simular sistemas no lineales en primera aproximación. Eso me dí cuenta hasta que leí los primeros párrafos de [SpWA05A].

De ese modo decidí buscar más y encontré la referencia [CPPW02A]. En este artículo se describe exactamente el sistema que tenemos, sólo que con coeficientes constantes y en un contexto distinto, de hecho uno de los originales, que es la competencia entre tres especies. Sin embargo, y sin meternos en las matemáticas más duras y sólo considerando sus resultados gráficos y conclusiones, es posible decir lo siguiente

1. Un sistema de Lotka-Volterra tridimensional tiene tres especies, una de las cuales actúa como mediadora en la interacción de las otras dos. Ésto lo podríamos traducir inmediatamente a nuestros términos como que C_2 es el reservorio mediador mientras que la competencia dura se da entre Océano y Continente. Ésto también puede verse al experimentar con los parámetros de las sigmoides y ver que en la mayoría de casos o el Océano gana o el Continente gana pero la Atmósfera siempre queda viva (o sea $\forall t C_2 \neq 0$), excepto con combinaciones de parámetros muy extremas y que serían poco realistas en el contexto del BGV.
2. Las soluciones presentan oscilaciones asimétricas con las asimetrías que requerimos (ACREL y APV) y sus períodos de oscilación y asimetrías dependen de los parámetros. Incluso para algunos de los parámetros se obtienen escaleras ascendentes o descendentes como las descritas en el capítulo anterior.

Así es inmediato concluir lo siguiente.

1. Considerando que el modelo del CC describe bien la realidad observada y sabiendo que es un sistema de Lotka-Volterra puedo concluir que las asimetrías APV y ACREL son intrínsecas al SC: su origen no está en los disparadores

sino en las características del SC y los procesos que suceden dentro de él³, que están dominados por el cambio de control entre Océano y Continente. Intuitivamente era correcto ésto, a partir del diagnóstico del primer capítulo, y ahora lo hemos confirmado. Pero también puedo decir que el origen de las asimetrías necesariamente debe estar en los subsistemas que son ciclos, no en las cadenas, que son los que en última instancia vendrán descritos, en forma simplificada, por un sistema Lotka-Volterra.

2. La Temperatura varía en la misma forma que el carbono Atmosférico debido a que el carbono fuerza a la CE a tener esa variación y no al revés.

Sin embargo también es necesario tener cuidado con estas conclusiones en un sentido filosófico que muchas veces olvidamos los físicos⁴ y que creo necesario remarcar: La realidad modelada no es la realidad. De esa forma no puedo decir que el SC funcione como un sistema Lotka-Volterra en sus ciclos sino que puedo modelarlo en primera aproximación de esa manera. Un modelo de la realidad que sea indistinguible de la realidad es casi imposible y de ser construido sería una mera curiosidad sin aplicaciones prácticas.

Las anteriores conclusiones también me impulsarían a considerar que posiblemente exista alguna combinación de parámetros para el sistema tridimensional de Lotka-Volterra con coeficientes constantes que podría, al menos, generar la existencia de ambas asimetrías y el espaciado de los máximos con la serie de C_2 simulada con nuestro modelo de coeficientes sigmoidales pero sin la riqueza en forma respecto de la STBGV de CO_2 que he con-

³Incluidos los que no pueden ser descritos correctamente por un modelo no lineal en primera aproximación.

⁴Como en el caso de muchos colegas que se dedican a la mecánica cuántica y ven en ésta la realidad física. Desgraciadamente lo que ellos quieren es responder preguntas que empiezan con ¿Por qué...? con las respuestas de preguntas que empiezan con ¿Cómo...?

seguido con el modelo que he presentado. Probablemente éste sea motivo de algún trabajo posterior⁵. éste es otro objetivo a futuro, formalizar y profundizar en estas cuestiones⁶.

6.2. Sistemas Bihamiltonianos.

Lo interesante de tener que la descripción del SC en cuanto al CC se puede hacer con un modelo de Lotka-Volterra es que existe, además de la teoría y práctica presentadas en [CPPW02A], un formalismo más consolidado para la descripción de sistemas de Lotka-Volterra n -dimensionales y que en particular se aplican a sistemas 3-dimensionales.

En [Plan96A] se da una discusión de las características que los sistemas de Lotka-Volterra deben cumplir para ser clasificados como Bihamiltonianos o Hamiltonianos. Recordemos que un sistema Hamiltoniano es uno que en cierto sistema de coordenadas se puede escribir como $\dot{x} = S\nabla H$ donde H es el hamiltoniano del sistema y es una cantidad conservada. Sin embargo en la Mecánica Clásica se nos enseña que el espacio fase de un sistema hamiltoniano tiene siempre dimensión par, proveniente de que hay tantas coordenadas generalizadas como momentos generalizados en éste.

[Plan96A] discute una nueva definición de sistema Hamiltoniano que incluye, además de los sistemas que conocemos como Hamiltonianos, sistemas con espacios fase de dimensión impar. Luego se dedica a discutir sistemas Bihamiltonianos, i.e. que aceptan una descripción de Hamiltoniano con dos Hamiltonianos distintos que dan dos representaciones del mismo sistema cada una asociada a una cantidad conservada. Y luego investiga las clasificaciones de los sistemas de Lotka-Volterra 3-dimensionales que son Hamiltonianos o Bihamiltonianos. Lo interesante de esto es que todo sistema así tiene otras cantidades conservadas o constantes de movimiento. Y como sabe todo físico, cuando se tienen constantes de movimiento extras hay que celebrar ya que el sistema puede decirnos más que lo que obtendríamos al resolverlo a fuerza bruta. Así,

⁵O tal vez mi tesis de matemático.

⁶Definitivamente un tema interesante para otra tesis.

Agradecimientos.

*I've seen things you people wouldn't believe.
Attack ships on fire off the shoulder of Orion. I
watched C beams glittering in the dark near
the Tannhäuser gate. All those moments will
be lost in time like tears in rain. Time to die.*

Roy Batty,
Blade Runner.

En los capítulos anteriores espero haber mostrado mi pasión por este tema. Me parece muy excitante, más que analizar el presente, el antropoceno, analizar el pasado. Ésto por dos razones: primero, representa un esfuerzo considerable reconstruir con pocos datos, y pocos parámetros, el pasado y, segundo, permite abrir una puerta para un diálogo interdisciplinar. Pero lo que más me satisface es que pude compartir con muchos esta pasión y al final me han acompañado literalmente por el camino.

La carrera de Físico debería de hacer que los estudiantes tuvieran esa pasión por un tema y también darles las herramientas necesarias para tal fin. Hay veces que estamos más preocupados por pasar que por investigar y deleitarse en lo que ésto implica. Está bien que la responsabilidad caiga sobre nosotros, pero el camino sería más fácil si fuéramos guiados. Por otra parte, también se nos debería de dar una formación obligatoria para entender la diferencia entre la realidad modelada y la realidad como tal. En ese sentido agradezco a todos mis profesores que por aleatoriedad encontré en mi camino como Físico por la Facultad.

Aunque en este momento es satisfactorio el resultado, muchas veces hubo frustración y desánimo al ver que el proyecto parecía desmesurado y nunca

se concretaría o que la meta era muy lejana en el tiempo. Tres años de trabajo han dado frutos y de hecho han sido los años que me han formado “espiritualmente” como Físico al haberme permitido realizar la mayor parte de la investigación y las hipótesis aventuradas por mí mismo y haber sentido una pequeña parte del asombro que debieron sentir Newton o Einstein al desarrollar sus teorías.

Agradezco, en general, la paciencia que tuvieron conmigo y la amistad que me mostraron mis amigos, la mayoría de mis profesores y mis familiares. Ésta será de las mejores épocas que viviré y seguro la mejor que he tenido en mi vida y la recordaré de ese modo.

En particular agradezco al M. en C. Manuel René Garduño López el apoyo que me ha dado tanto en el servicio social como en la realización de esta tesis y las discusiones fructíferas que se dieron durante su realización. También es justo agradecer al Dr. José Ernesto Marquina Fábrega por su contribución indirecta en mi pensamiento filosófico sobre la Física y que en particular he intentado mostrar a lo largo de esta tesis.

En cuanto a los amigos quiero agradecer, en particular, a Sebastián Alagón Carrillo, a Diana Gamborino Uzcanga y a Carlos Fernando Vergara Cervantes por su apoyo al haber comentado y corregido esta tesis desde una óptica *off-topic* muy importante, ya que uno desde dentro puede perder la perspectiva y no escribirla para el que la vaya a leer.

Les dedico esta tesis a mi abuela Susana Otero Carpio de Jiménez de la Cuesta que tanto me ha apoyado durante toda mi vida y que consideraré como mi segunda madre, a mi abuelo Javier Jiménez

nez de la Cuesta Zamora, que aunque no lo conocí, siempre me apoyó con la memoria que de él tiene mi familia, a mi tío Javier Jiménez de la Cuesta Otero por su apoyo continuo y las discusiones de las cuales me surgieron algunas ideas en momentos de frustración y, por supuesto, a mi madre Susana Jiménez de la Cuesta Otero que me ha apoyado incondicionalmente desde el momento en el que decidí que la ciencia iba a ser mi camino.

Así con esta tesis concluyo un esfuerzo continuo que ha durado cerca de 10 años. Pero en el horizonte se atisban nuevos retos.

Bibliografía

- [Adem62A] Julián Adem. *On the theory of the general circulation of the atmosphere*. Tellus, **14(1)**:102–115 [ene 1962]. ISSN 2153-3490.
- [Auea04A] Laurent Augustin et al. *Eight glacial cycles from an antarctic ice core*. Nature, **429(6992)**:623–628 [jun. 2004]. ISSN 0028-0836.
- [CPPW02A] Erica Chauvet, Joseph E. Paulet, Joseph P. Previtte y Zac Walls. *A Lotka-Volterra Three-species Food Chain*. Mathematics Magazine, **75(4)**:243–255 [oct. 2002]. ISSN 0025-570X.
- [Crov91A] Rosa Crovetto. *Evaluation of Solubility Data of the System Carbon Dioxide-Water from 273K to the Critical Point of Water*. J. Phys. Chem. Ref. Data, **20(3)**:575–589 [mayo 1991]. ISSN 0047-2689.
- [DeWi00] Michael L. Deaton y James J. Winebrake. *Dynamic modeling of environmental systems*. Springer [oct 2000]. ISBN 9780387988801.
- [Faea00A] Paul G. Falkowski et al. *The global carbon cycle: a test of our knowledge of Earth as a system*. Science, **290(13)**:291–296 [oct. 2000]. ISSN 0036-8075.
- [GaCrT05A] René Garduño et al. *Paleoclimatic cycles, anthropogenic break and global warming*. World Res. Rev., **17(2)**:189–195 [mayo 2005]. ISSN 1042-8011.
- [Houg77] John T. Houghton. *The physics of atmospheres*. Cambridge University Press [jun. 1977]. ISBN 0521214432.
- [KiRa06] Jeffrey T. Kiehl y Veerabhadran Ramanathan. *Frontiers of climate modeling*. Cambridge University Press [abr 2006]. ISBN 9780521791328.
- [Lide98] David R. Lide. *CRC Handbook of chemistry and physics*. CRC [ago 1998]. ISBN 9780849304798.
- [Peea99A] Jean R. Petit et al. *Climate and atmospheric history of the past 420000 years from the Vostok ice core, Antarctica*. Nature, **399(6735)**:429–436 [jun. 1999]. ISSN 0028-0836.
- [Plan96A] Manfred Plank. *Bi-hamiltonian systems and Lotka-Volterra equations: A three-dimensional classification*. Nonlinearity, **9(4)**:887–897 [jul 1996]. ISSN 0951-7715.
- [SpWA05A] Julien C. Sprott, Joseph C. Wildenberg y Yousef Azizi. *A simple spatiotemporal chaotic Lotka-Volterra model*. Chaos, Solitons & Fractals, **26(4)**:1035–1043 [nov 2005]. ISSN 0960-0779.
- [Stef00A] Will Steffen. *An integrated approach to understanding Earth's metabolism*. IGBP Newsletter, **11(1)**:9–17 [mayo 2000]. ISSN 0284-5865.

- [Verh38A] Pierre F. Verhulst. *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. Correspondance Mathématique et Physique de L'Observatoire de Bruxelles, **10**:113–121 [1838].
- [Verh45A] Pierre F. Verhulst. *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, **18**:14–54 [1845].
- [Verh47A] Pierre F. Verhulst. *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, **20**:142–173 [1847].