



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA Y PROBLEMAS DEL TIPO  
ERDŐS-SZEKERES EN EL PLANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

PRESENTA:  
EDUARDO MIGUEL JIMÉNEZ ROSAS

DIRECTORES DE TESIS:  
M. EN C. JAVIER CANO VILA  
DR. JORGE URRUTIA GALICIA



2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

II

1. Datos del alumno:

Jiménez  
Rosas  
Eduardo Miguel  
58 48 40 24  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Ciencias de la Computación  
304163526

2. Datos del tutor:

M. en C.  
Javier  
Cano  
Vila

Dr.  
Jorge  
Urrutia  
Galicia

3. Datos del sinodal 1:

Dr.  
Carlos Bruno  
Velarde  
Velázquez

4. Datos del sinodal 2:

Dr.  
Ruy  
Fabila  
Monroy

5. Datos del sinodal 3:

M. en C.  
Adriana  
Ramírez  
Vigueras

6. Datos del trabajo escrito:

Teoría y problemas del tipo Erdős-Szekeres en el plano  
67p  
2013

*A mamá y papá  
Por enseñarme a leer, a sumar y a diferenciar,  
por ser mis maestros, mis padres y mis amigos.*

*A mis hermanos  
Por jugar, preguntar, leer, pensar y viajar conmigo,  
un día llegaré a ser como ustedes.*

*A mis tutores  
Por iniciarme en su arte con apoyo inmensurable,  
por hacer de la tesis la experiencia surrealista vital.*

*A mis amigos  
Por ser los bailarines cantantes del mundo.  
Nos encontraremos en el lugar donde no hay oscuridad.*



# Índice general

<b>1. Introducción y conceptos generales</b>	<b>1</b>
1.1. Posición general . . . . .	2
1.2. Poligonales y polígonos . . . . .	2
1.3. Convexidad . . . . .	4
1.4. Erdős-Szekeres . . . . .	5
1.5. Organización del trabajo . . . . .	5
<b>2. De puntos</b>	<b>7</b>
2.1. Poligonales y polígonos simples . . . . .	7
2.1.1. Siempre hay una poligonal simple . . . . .	7
2.1.2. Siempre hay un polígono simple . . . . .	9
2.1.3. ¿Siempre hay un polígono convexo? . . . . .	11
2.2. Ramsey . . . . .	11
2.2.1. Pichones y pichoneras . . . . .	12
2.2.2. Conocidos o desconocidos . . . . .	13
2.2.3. Teorema de Ramsey . . . . .	14
2.3. El problema del final feliz . . . . .	15
2.3.1. El acertijo de Esther . . . . .	16
2.3.2. Existencia . . . . .	17
2.3.3. Cantidad . . . . .	18
2.4. Hoyos . . . . .	24
2.4.1. El 5-hoyo . . . . .	25
2.4.2. Conjuntos de Horton . . . . .	25
<b>3. Sucesiones</b>	<b>29</b>
3.1. Sucesiones monotónicas . . . . .	30
3.2. Sucesiones unimodales . . . . .	31
3.2.1. La subsucesión unimodal más larga . . . . .	31
3.3. El peso de una sucesión . . . . .	36
3.3.1. La subsucesión monotónica más pesada . . . . .	36
3.3.2. La subsucesión unimodal más pesada . . . . .	37

<b>4. Puntos ponderados</b>	<b>39</b>
4.1. Caminos monotónicos . . . . .	39
4.2. Polígonos monotónicos . . . . .	42
4.2.1. Polígonos monotónicos convexos . . . . .	44
4.2.2. ¿Cuántos polígonos monotónicos ves? . . . . .	46
4.2.3. Cuadriláteros monotónicos vacíos . . . . .	47
4.3. Emparejamientos . . . . .	53
<b>5. Los alumnos copiones</b>	<b>59</b>
5.1. Los alumnos copiones . . . . .	59
5.1.1. Aristas visibles . . . . .	60
5.1.2. Aristas compartidas . . . . .	60
5.1.3. Entre hipótesis y conjeturas: Bárány-Károlyi . . . . .	62
5.1.4. Los alumnos se salieron con la suya . . . . .	64
<b>6. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Introducción y conceptos generales

*“Mientras contemplaba las [esTrellas], Tales cayó a un pozo. Una joven mujer le dijo: cómo es que pretendes entender el cielo si no ves lo que hay a tus pies.”*

---

Platón, Diálogos

Es común escuchar el nombre de Paul Erdős. Fue un prolífico matemático con una historia interesante. Con cientos de colaboradores, a lo largo de su vida escribió más artículos que cualquier otro matemático. Hay quienes afirman que era un vagabundo, un exiliado, sin hogar ni familia. Dicen que su único amor eran los números. La realidad es que sí tuvo muchos amigos, le daban alimento y asilo, pagaban sus impuestos y juntos convertían café en teoremas.

George Szekeres, por otra parte, empezó como químico. Al igual que Erdős, sufrió la mala suerte del exilio, sin embargo su vida fue relativamente convencional; formó una familia y acostumbraba reunirse con un grupo de estudiantes para resolver problemas matemáticos.

Entre muchos otros logros, estos dos personajes, pese a las circunstancias desfavorables en las que se vieron envueltos, consiguieron reanimar la teoría de Ramsey con el teorema mismo que será el tema principal de este trabajo.

Hablemos de puntos. Para entrar en contexto propongo una actividad: sal de la ciudad, ve a la costa por ejemplo, en México hay muchas playas adecuadas para este fin. Durante una noche sin luna recuéstate sobre la arena y observa hacia el cielo. Estás mirando una proyección del universo; un plano con puntos brillantes, inmóviles y en un completo desorden. ¿Es que acaso sólo ves puntos? Apuesto que ya te diste a la tarea de unirlos para formar figuras. Refirámonos a todos estos puntos con la letra  $T$  de esTrellas (si por algún motivo no viste las esTrellas, dirígete a la Figura 1.1).



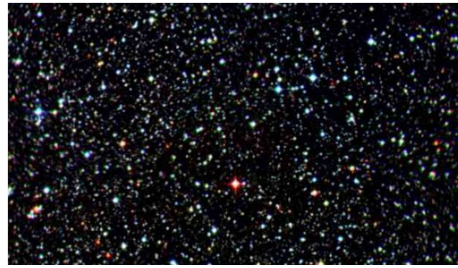


Figura 1.1: EsTrellas

## 1.1. Posición general

Empecemos con algo simple, busca tres puntos alineados, si lo consigues tendrás un bastón para tu abuelo. De lo contrario, habiendo ya verificado con todos, diremos que  $T$  se encuentra en *posición general* y tu perspectiva propone que te esfuerces un poco más (Figura 1.2).

**Definición 1.1.1** (Posición General). *Sea  $T$  un conjunto de puntos en el plano. Diremos que  $T$  está en posición general si y sólo si no hay 3 de sus elementos en una misma recta.*

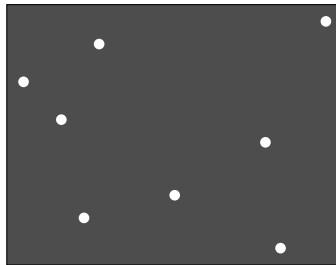


Figura 1.2: Puntos en posición general

## 1.2. Poligonales y polígonos

La siguiente figura que dibujaremos es conocida como *poligonal*. En la mayoría de los casos luce como una telaraña hecha por una araña sin dotes artísticos.

Imaginemos que una araña espacial está situada sobre un primer punto en  $T$ ; desde donde empezará a tejer. Después salta a un segundo punto, hasta aquí su tela tiene sólo una arista. Ahora ella salta a un tercer punto, distinto de los anteriores, dibujando así la segunda arista. Ella hace esto hasta cansarse y nunca visita dos veces el mismo punto. Supongamos que estuvo en  $n$  puntos, entonces le otorgaremos un reconocimiento por haber construido una *poligonal de longitud  $n$* .

Finalmente, si por alguna razón arácnida, cuando terminó de tejer el último punto, la araña tuvo que volver al punto de partida, estará entonces construyendo algo que llamamos una *poligonal cerrada*.

**Definición 1.2.1** (Poligonal y poligonal cerrada). Sea  $S = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  una sucesión de puntos en el plano, tal que  $p_i \neq p_j$  si  $i \neq j$ . Llamaremos *poligonal* (inducida por  $S$ ) al conjunto  $\cup_{i=0}^{n-2} \overline{p_i p_{i+1}}$ . Así también, el conjunto  $\cup_{i=0}^{n-1} \overline{p_i p_{i+1}}$  (con  $i$  módulo  $n$ ), será llamado *poligonal cerrada* (inducida por  $S$ ).

Sinceramente, dudo que nuestra araña estelar haya acertado los trazos de la Mona Lisa en su primer intento, sin embargo no es tan descabellado suponer que dibujó una poligonal sin cruces, es decir, si dos aristas se tocan es porque son *vecinas* (únicamente comparten uno de sus extremos). En este caso diremos que la telaraña es una *poligonal simple de longitud  $n$* , también conocida como *camino* (Figura 1.3).

**Definición 1.2.2** (Poligonal simple). Sea  $S = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  una sucesión de  $n$  diferentes puntos en el plano. Sea  $W$  la poligonal inducida por  $S$ . Si para toda  $i < j$  tal que  $\overline{p_i p_{i+1}} \cap \overline{p_j p_{j+1}} \neq \emptyset$  tenemos que  $j = i + 1$ , entonces diremos que  $W$  es una *poligonal simple*.

En el caso donde la araña haya tejido una poligonal cerrada y sin cruces, vemos que dividió al plano en tres partes: la poligonal, lo que está dentro de ella y lo que está por fuera. Acertaste, vamos a denotar a la poligonal junto con la región que encierra como *polígono simple con  $n$  vértices*, muchas veces  *$n$ -gono* a secas.

**Definición 1.2.3** (Polígono simple). Sea  $S = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  una sucesión de  $n$  diferentes puntos en el plano. Sea  $W$  la poligonal cerrada inducida por  $S$ . Si para toda  $i < j$  tal que  $\overline{p_i p_{i+1}} \cap \overline{p_j p_{j+1}} \neq \emptyset$  (con los índices módulo  $n$ ) tenemos que  $j = i + 1$  o  $i = j + 1$ , entonces diremos que  $W$  junto con la región que encierra forman un *polígono simple*.

No es complicado notar que un mismo polígono puede ser generado por sucesiones diferentes, por ejemplo, la sucesión  $[p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  genera el mismo polígono que  $[p_1, \dots, p_{n-1}, p_0]$ .

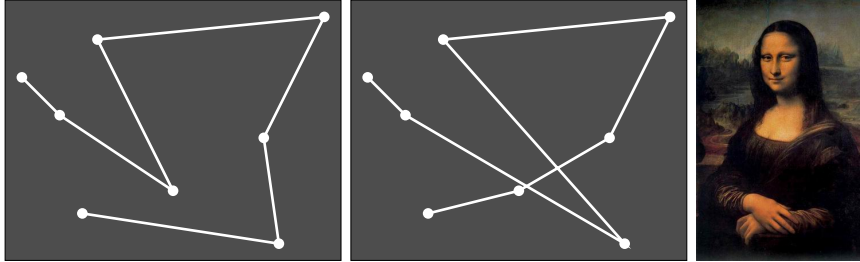


Figura 1.3: Encuentra la poligonal simple.

### 1.3. Convexidad

Si la araña estelar no ha conseguido dibujar más que helechos, dejemos que descansa un momento, mientras tanto hagamos otro ejercicio. Volvamos a  $T$ . Por cada pareja de puntos diferente que se pueda formar, traza la arista que los une, esto te llevará un rato, pues si tuvieras  $n$  puntos tendrías que dibujar poco menos de  $n^2$  líneas. Es factible suponer que el resultado de este experimento será un caos, sin embargo ocurre lo contrario.

La figura más notoria, es decir la que encierra todas las aristas que dibujamos, es una poligonal simple cerrada. El polígono simple que forma tiene otra propiedad: *convexidad*. Un *polígono convexo* es aquel que si tomas dos puntos cualesquiera sobre éste, observarás que el segmento que los une está completamente contenido en el polígono (Figura 1.4).

**Definición 1.3.1** (Polígono convexo). *Sea  $R$  un polígono simple. Diremos que  $R$  es convexo si y sólo si, dados dos puntos  $p, q \in R$  entonces  $\overline{pq} \subset R$ .*

Eso no es todo, a este polígono se le denomina *cierre convexo de  $T$* , por ser el polígono convexo de menor tamaño que contiene a  $T$ . En otras palabras, la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $T$ . (Ve nuevamente la figura 1.4).

**Definición 1.3.2** (Cierre convexo). *Sea  $T$  un conjunto de puntos en el plano. Llamaremos cierre convexo de  $T$  ( $CH(T)$ ) al conjunto convexo que contiene a  $T$  tal que si es  $H$  otro conjunto convexo que contiene a  $T$ , entonces  $CH(T) \subset H$ .*

Un forma rápida para encontrarlo es imaginar que, en lugar de estrellas, tenemos clavos en una tabla de madera. Necesitas también una liga imaginaria (banda elástica imaginaria). Estiramos la liga en todas direcciones hasta cubrir por completo  $T$  y luego la soltamos, esta quedará sostenida por los vértices del cierre convexo.

Diremos que un conjunto de puntos está en *posición convexa* cuando, una vez encontrado el cierre convexo, todos sus elementos son vértices de este polígono, es decir, no hay ninguno en el interior (Figura 1.5).

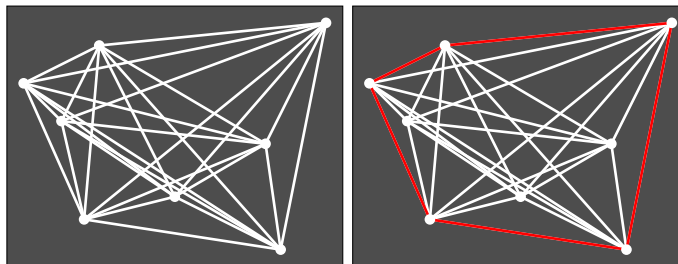


Figura 1.4: Las aristas rojas son la frontera del cierre convexo.

**Definición 1.3.3** (Conjunto de puntos en posición convexa). *Sea  $T$  un conjunto de puntos en el plano. Diremos que  $T$  está en posición convexa si y sólo si el conjunto de vértices de  $CH(T)$  es exactamente  $T$ .*

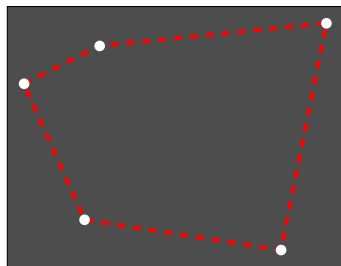


Figura 1.5: Puntos en posición convexa.

## 1.4. Erdős-Szekeres

Esta vez, Gützi, la araña galáctica, deberá resolver un acertijo antes de tejer su siguiente telaraña interestelar. Si le asignamos la tarea de construir un polígono convexo con cierta cantidad de vértices, digamos  $n$ , tendrá primero que asegurarse de que es posible encontrarlo. Por ejemplo, si  $T$  tiene en total  $n$  puntos, de ellos  $n - 1$  en posición convexa y uno en el interior del cierre convexo, entonces todos sus intentos serían vanos.

Hay unas tareas que son fáciles y rápidas, imaginar todos los diferentes escenarios donde no haya ningún  $n$ -gono convexo no es de esas. Gützi no será una gran artista, sin embargo sabe bien como usar Internet. Después de una ardua búsqueda encontró que en 1935, en el planeta Tierra, se publicó un artículo donde está demostrado que en cualquier conjunto de  $n$  puntos (en posición general), es posible dibujar un polígono convexo con aproximadamente  $\log(n)$  vértices (P. Erdős y G. Szekeres en [2]). Esto facilita un poco las cosas.

Como en las películas, las historias se entrelazan, pues ese es, nada más y nada menos que ¡el teorema principal de este trabajo! La araña pensó hacer un viaje en el tiempo para visitar a los escritores del artículo, Paul Erdős y George Szekeres, pero como ella no cree que se pueda viajar en reversa, entonces declinó y se conformó con la explicación que aparece en el capítulo siguiente.

## 1.5. Organización del trabajo

El objetivo de este trabajo es exponer, de una forma clara y didáctica, algunos resultados relacionados con el teorema de Erdős-Szekeres, o más general, de conjuntos de puntos en el plano. El trabajo consta de cinco capítulos, incluyendo éste, donde he dado los conceptos que se usarán en el resto de la tesis, además de una brevísima introducción.

En el segundo capítulo (“De puntos en el plano”) expongo el problema base de la tesis; el famoso “problema del final feliz”, orígenes, implicaciones y otros problemas fuertemente relacionados con aquel resultado, sin embargo reservamos sus alcances a subconjuntos finitos en  $\mathbb{R}^2$  sin características especiales.

En el tercer capítulo (“De sucesiones”), estudiaremos lo que ocurre cuando, en lugar de ver estos conjuntos como puntos, los vemos como sucesiones de números reales, es decir, limitando la primera de sus coordenadas a los números naturales.

En el capítulo cuarto (“De conjuntos ponderados”) hablaré de problemas similares pero considerando características adicionales en nuestros conjuntos de puntos. Los puntos tendrán asignado un valor real además de sus coordenadas, haciendo la analogía de que las estrellas también son de diferentes tamaños.

Finalmente, en el quinto y último capítulo (“Los alumnos copiones”) incluí, además de las conclusiones y el epílogo, un pequeño resultado que fue fruto de todo este estudio y muy relacionado con la conjetura de Bárány.

Normalmente exigiremos algunas reglas que permitirán hacer el trabajo más comprensible. Los conjuntos que usaremos estarán en posición general. Muchas veces, también será necesario pedir que no haya dos puntos que compartan una de sus coordenadas, es decir, que ningún par de puntos estén a la misma altura (coordenada  $y$  distinta) o uno exactamente arriba de otro (coordenada  $x$  distinta).

## Capítulo 2

# De puntos

*“Estoy dispuesto a creer cualquier cosa que parezca increíble.”*

---

Oscar Wilde

Si el capítulo anterior se titulara “*Nombra las figurillas*”, este se titularía “*Demuestra que existen*”, es decir *la cosa se pone fea*, así que vayamos por unas bebidas antes de leer lo que hay después de este primer punto.

Bien, abróchense los cinturones. ¿Por qué “*De puntos*”? No dice mucho, sino lo necesario. En efecto, a lo largo del capítulo hablaremos de puntos, puntos en el sentido más estricto de la palabra: puntos por aquí y puntos por allá, en anarquía y desorden, como las esTrellas.

### 2.1. Poligonales y polígonos simples

Hagamos un recuento. Gützi, la araña del capítulo pasado, sabe cuándo un conjunto de puntos está en posición general, sabe qué es una poligonal y una poligonal cerrada, una poligonal simple y un polígono simple, sabe qué es un polígono convexo y también puede distinguir un conjunto de puntos en posición convexa; no obstante, se siente más confundida que antes, en su feliz ignorancia.

Ella se pregunta cómo hallar todas aquellas figurillas, por ello va a visitar a su viejo amigo, el mago Merlín, que en realidad no es mago sino alquimista, todos sabemos que la magia no existe. Después de platicar largas horas sobre sus hazañas de los últimos siglos, Gützi expone la razón de su visita.

#### 2.1.1. Siempre hay una poligonal simple

–Mago Merlín –dice la araña–. ¿Cómo he de dibujar una poligonal (simple) en  $n$  puntos en posición general? –Merlín, el sabio, sólo responde preguntas que riman–.

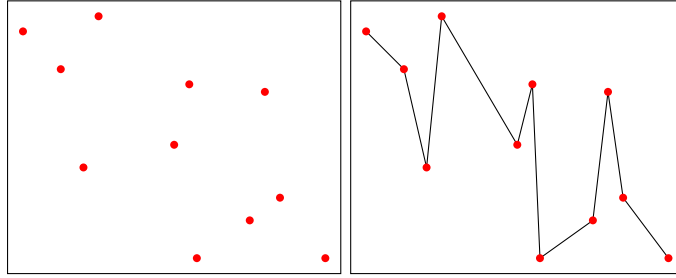


Figura 2.1: Una poligonal simple formada con todos los puntos del conjunto.

–Querida araña, –le contesta– por brillante nunca te has caracterizado, si no estás segura de que puedes obrar, no preguntes como has de hacerlo; mejor demuestra factibilidad.

Al sabio siempre le gusta confundirnos con sus respuestas en acertijo, lo que quiso decirle a la araña del espacio es que, para asegurarse de que puede dibujar todas esas figuras, primero tiene que demostrar su invariable existencia en cualquier conjunto de puntos  $T$  en posición general, por supuesto sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Demostrar que en todo conjunto  $T$ , de  $n$  puntos, es posible construir una poligonal simple de longitud  $n$  (i. e. tomando todos los elementos), no requiere gran intelecto. Para hacerlo usaremos una poligonal simple  $W$  que hace honor a su nombre (ya que es realmente simple). Dibujarla consiste de pocos pasos y siempre funciona, la araña espacial no tendrá problema en tejerla.

Vamos a empezar por describir la sucesión  $S$  que induce a esta poligonal tan especial. Toma todos los elementos de  $T$  y ordénalos de menor a mayor con respecto a su abscisa, supón que no hay dos distintos con el mismo valor (más tarde te explicaré por qué no se pierde generalidad). Nombra  $p_0$  al primer elemento, es decir, el que está más a la izquierda,  $p_1$  al segundo,  $p_2$  al tercero y así sucesivamente hasta llegar a  $p_{n-1}$ , siendo este el elemento más a la derecha en  $T$ . (Normalmente el resultado se ve como en la figura 2.1).

Formalmente, si para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  denotamos como  $x_i$  a la coordenada  $x$  del punto  $p_i$ , la sucesión  $S = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  es tal que si  $i < j$  entonces  $x_i < x_j$ .

Es tiempo de que Güitzi vaya a tejer. Pero ¡momento! Ella me cuestiona antes de empezar. Duda que la poligonal  $W$  inducida por  $S$  pueda ser simple, cree que al construirla encontrará algún cruce. Entendámosla, a nadie le gusta trabajar en vano.

¡Bien araña! Te explicaré. Imagina que terminaste de tejer  $W$  y descubres que no es una poligonal simple, significa que encontraste dos aristas diferentes  $\overline{p_i p_{i+1}}$  y  $\overline{p_j p_{j+1}}$  que, sin ser vecinas, se intersecan en algún punto.

De acuerdo a nuestra construcción, como  $p_i$  y  $p_{i+1}$  son elementos consecutivos, ningún punto de  $T$  tiene abscisa entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ . En particular  $p_j$  y  $p_{j+1}$ , es decir,  $x_j$  y  $x_{j+1}$  deben estar fuera del intervalo abierto  $(x_i, x_{i+1})$ , ya sea del mismo lado o en lados contrarios (recuerda que  $x_i < x_{i+1}$  para toda  $i$ ).

- Supongamos que  $x_j$  y  $x_{j+1}$  están del mismo lado del intervalo  $(x_i, x_{i+1})$ , digamos a la derecha. Si los segmentos  $\overline{p_i p_{i+1}}$  y  $\overline{p_j p_{j+1}}$  se intersecan en algún punto, la abscisa de éste debería pertenecer a la intersección de los intervalos  $[x_i, x_{i+1}]$  y  $[x_j, x_{j+1}]$ .

Como  $x_j$  y  $x_{j+1}$  están a la derecha del intervalo  $(x_i, x_{i+1})$ , entonces  $x_{i+1} \leq x_j < x_{j+1}$ . Lo que significa que  $[x_i, x_{i+1}] \cap [x_j, x_{j+1}]$  tendría que ser  $\{x_{i+1} = x_j\}$ .

Finalmente, como en  $T$  no hay puntos distintos con la misma abscisa, tenemos un problema, pues si  $x_{i+1} = x_j$ , entonces  $\overline{p_i p_{i+1}} \cap \overline{p_j p_{j+1}} = \{p_{i+1} = p_j\}$  y estamos hablando de aristas vecinas, por lo tanto, señoras y señores, llegamos a una contradicción. El caso donde  $x_j$  y  $x_{j+1}$  están a la izquierda es análogo.

- Si estuvieran en lados contrarios, tendríamos que  $x_j \leq x_i < x_{i+1} \leq x_{j+1}$ , pero como  $p_j$  y  $p_{j+1}$  son vértices consecutivos, no pueden haber puntos de  $T$  con abscisa entre  $x_j$  y  $x_{j+1}$ , por lo que esto sólo sería posible si  $x_j = x_i$  y  $x_{i+1} = x_{j+1}$ , lo que implica que  $p_j = p_i$  y  $p_{i+1} = p_{j+1}$  ya que en  $T$  no hay puntos distintos con la misma abscisa. Así concluimos que dos aristas diferentes son iguales; otra clara contradicción.

Si en algún momento encontramos un punto exactamente arriba de otro, es decir, dos elementos que comparten la abscisa, podemos reaccionar de distintas formas; corremos en círculos, buscamos un método para tratar estos casos o bien, hacemos trampa. La trampa siempre es la mejor opción.

Antes de hacer cualquier movimiento, rotamos  $T$  cierto grado  $\gamma$  hasta que se vea como deseamos, en este caso, cuando no haya dos puntos sobre una misma recta vertical. Alguien se encargó de demostrar que siempre existe esta  $\gamma$ . Después buscamos la poligonal en el conjunto de puntos rotado y finalmente invertimos la rotación. Nadie se dió cuenta de lo ocurrido. ¡A trabajar Güitzi!

### 2.1.2. Siempre hay un polígono simple

En la lista de pendientes, la tarea siguiente es demostrar que siempre podemos dibujar un polígono simple con todos los puntos de  $T$ . La estrategia es muy parecida a la de arriba, vamos a construir una poligonal simple que, además, asegure que al cerrarla no habrá ningún cruce. La única diferencia es que en lugar de ir de izquierda a derecha, literalmente, correremos en círculos.

Usaremos el reloj de manecillas de Merlín; uno de sus inventos más trascendentes. Este reloj funciona sobre conjuntos de puntos en posición general y tiene dos objetivos: dar la hora espacial y mostrar una poligonal simple que puede cerrarse. Naturalmente, sólo nos interesa el segundo.

El reloj cuenta con un soporte y una manecilla (semirrecta) que pende de éste. Para usarlo, primero hay que elegir un elemento  $o \in T$  que será el soporte y después él hará todo el trabajo sucio.

Tomemos como soporte al punto que se encuentra más a la izquierda en  $T$ . La manecilla (semirrecta) empieza señalando el elemento  $p_0$  que le da la mayor



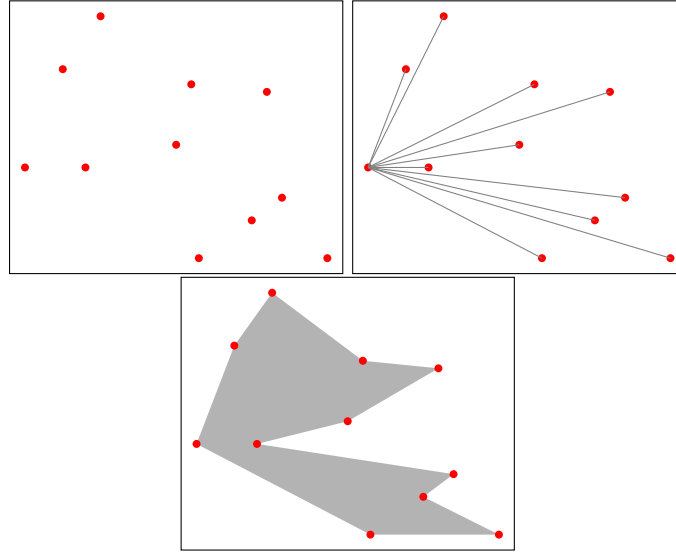


Figura 2.2: El polígono obtenido es un polígono simple.

pendiente. Gira despacio en el mismo sentido que las manecillas del reloj común. Disminuye su pendiente hasta chocar con el siguiente punto  $p_1$  en su camino, se detiene un instante y continúa con su recorrido (Ahora observa la figura 2.2). La manecilla se mueve en torno a su eje hasta chocar con un nuevo elemento  $p_2$ , etc.

Después de que su manecilla haya tocado todos los puntos de  $T$ , la sucesión queda de la forma  $S' = \{p_0, \dots, p_{n-2}\}$ , en la cual, si  $i < j$ , la pendiente del segmento  $\overline{op_i}$  es mayor que la pendiente de  $\overline{op_j}$ .

Si, en algún momento de su recorrido, la manecilla chocara con dos puntos a la vez, mostraría una semirrecta que contiene tres puntos de  $T$  (dos con los que choca y el soporte) y, al mismo tiempo, una recta que contiene estos tres puntos. Entonces el conjunto no estaría en posición general. Dicho de otra forma, la manecilla nunca choca con dos puntos a la vez.

Merlín demostrará que  $S'$  induce una poligonal simple  $W'$  y después, a partir de ésta, construirá una poligonal simple cerrada.

**Notación 1** (Pendiente de un segmento). Si  $\overline{AB}$  es un segmento, nos referiremos a su pendiente como  $M(\overline{AB})$ .

Empieza suponiendo que existen dos aristas en  $W'$ ,  $\overline{p_i p_{i+1}}$  y  $\overline{p_j p_{j+1}}$  con  $i < j$ , que, sin ser vecinas, se intersecan en un punto  $p$ . Como  $p \in \overline{p_i p_{i+1}}$ , entonces  $M(\overline{op_i}) \geq M(\overline{op}) \geq M(\overline{op_{i+1}})$ . De igual manera, como  $p \in \overline{p_j p_{j+1}}$ ,  $M(\overline{op_j}) \geq M(\overline{op}) \geq M(\overline{op_{j+1}})$ . Que las aristas no sean vecinas implica que  $i+1 < j$ , esto significa que  $M(p_{i+1}) > M(p_j)$ . Si hacemos más visual el problema  $M(\overline{op}) \geq M(p_{i+1}) > M(p_j) \geq M(\overline{op})$  ¡Vaya contradicción!

–¡Magnífico!– celebra Merlín –Si entendiste eso, estamos listos– Hasta ahora tenemos una poligonal simple de longitud  $n - 2$ , pero el objetivo es construir una poligonal simple cerrada de longitud  $n$ .

El siguiente paso es predecible. Veamos qué es lo que pasa si al final de  $S'$  pegamos el soporte del reloj, o sea el punto  $o$ . La nueva sucesión se vería como  $S = [p_0, \dots, p_{n-2}, o]$ . Llamemos  $W$  a la poligonal cerrada que induce  $S$ .  $W$  es parecida a  $W'$ , pues sólo incluye dos aristas más;  $\overline{op_0}$  y  $\overline{op_{n-2}}$ . Si Merlín logra convencernos de que estas dos aristas se intersecan únicamente con sus vecinas, su reloj conseguirá validez oficial avalada por el Presidente de los Estados Unidos Mexicanos.

Si hubiera una arista  $\overline{pq}$  (con  $p, q \in T - \{o, p_0\}$ ) que intersecara a  $\overline{op_0}$ , sus extremos deberían estar en lados contrarios de la recta  $l$  que contiene a  $\overline{op_0}$ . Además, como  $o$  es el elemento de  $T$  más a la izquierda,  $p$  y  $q$  tendrían que estar a su derecha.

Digamos que  $p$  es el punto que está por arriba de  $l$ . Si trazamos el segmento  $\overline{op}$  notaremos que su pendiente es mayor que la de  $l$  y, por lo tanto, mayor que la de  $\overline{op_0}$ . Sin embargo esto es una contradicción, puesto que  $p_0$  es el elemento que maximiza la pendiente de las rectas que pasan por  $o$  y cualquier otro punto de  $T$ .

Es muy parecida la razón por la cual  $\overline{op_{n-2}}$  no se interseca con ninguna arista que no sea su vecina, así que Merlín lo deja como ejercicio para el lector.

Ahora tenemos el derecho de afirmar que siempre hay una poligonal simple cerrada y, a su vez, un polígono simple cuyos vértices son los  $n$  elementos de  $T$ .

### 2.1.3. ¿Siempre hay un polígono convexo?

Ha llegado el momento de entregarnos a las dudas. Si siempre hay una poligonal simple que tiene como vértice cada elemento de  $T$ . Si siempre existe un polígono simple que tiene como vértice cada elemento de  $T$ . ¿Habría siempre un polígono convexo que tenga como vértice cada elemento de  $T$ ? Parece ser una buena pregunta, sin embargo se responde con un rotundo no.

Verlo es mucho más fácil en un conjunto pequeño. Cuatro puntos, tres de ellos dibujando un triángulo y el cuarto, ubicado en el interior. No hay un polígono convexo que tenga estos cuatro puntos como vértices. En realidad, los únicos conjuntos capaces de ser, por completo, los vértices de un polígono convexo son aquellos que están en posición convexa.

Si ya sabemos que no es con todos los elementos de  $T$ , la pregunta correcta sería: ¿cuál es el número máximo de puntos que están en posición convexa? Este acertijo tiene toda una historia, no te la pierdas en las siguientes secciones de este capítulo.

## 2.2. Ramsey

Casi al principio de este trabajo (en el tercer párrafo del primer capítulo, la primera palabra del tercer renglón), mencioné a un tal Ramsey. Este curioso

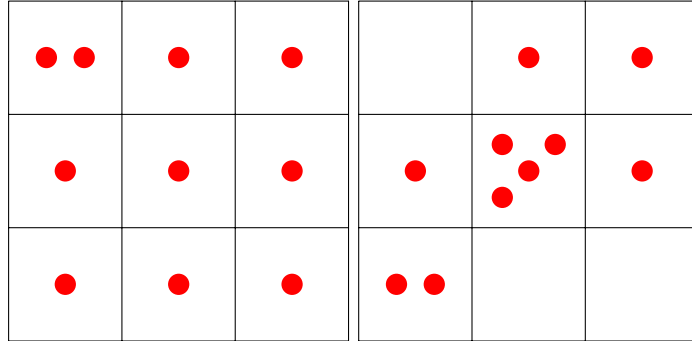


Figura 2.3: En 9 cajas que contienen 10 pelotas siempre encontraremos al menos una caja con dos o más pelotas.

personaje, a diferencia de Güitzi Araña y el mago Merlín, es real, mejor dicho, fue real. Escribió sobre temas de lógica, filosofía, economía y matemáticas. Dice la leyenda que aprendió alemán en tan sólo una semana. Finalmente, se dio el lujo de morir en 1930, a los 26 años. Posteriormente surgió una teoría con su nombre, por supuesto, basada en su trabajo sobre combinatoria.

Antes de continuar, quiero hacer una advertencia. La teoría de Ramsey no es apta para quien crea ciegamente en la existencia del caos, pues parece tener la capacidad de limitar los alcances del desorden. Pienso en eso cuando me dicen que los resultados del tipo Ramsey se generalizan como “toda estructura lo suficientemente grande, de cierto tipo, contiene una subestructura regular de un tamaño prescrito”.

### 2.2.1. Pichones y pichoneras

Para entender la teoría de Ramsey, y aunque parezca pleonazgo, es saludable empezar por un principio muy relacionado; el principio de Dirichlet, que habla sobre pichones. Establece que si tienes  $n$  pichoneras y  $n + 1$  pichones, hay por lo menos una pichonera con dos o más pichones (Observa nuestra simulación de pichonera en la figura 2.3). Formalmente se vería como el teorema siguiente y su demostración.

**Teorema 2.2.1** (Principio de la pichonera). *Si ponemos  $n$  pichones en  $k$  pichoneras, habrá una pichonera con, al menos  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  pichones, y otra con  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  pichones a lo más.*

*Demostración.* Probemos la primera parte por contradicción. Supón que ninguna pichonera contiene más de  $\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$  pichones. Recordemos que  $\lceil x \rceil - 1 < x$  para cualquier  $x$ . Entonces hay a lo más  $k(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1)$  pichones. Sin embargo,  $k(\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1) < k(\frac{n}{k}) = n$ , lo cual es una contradicción. La segunda parte es similar; suponiendo que todas las pichoneras tienen más de  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  pichones.  $\square$

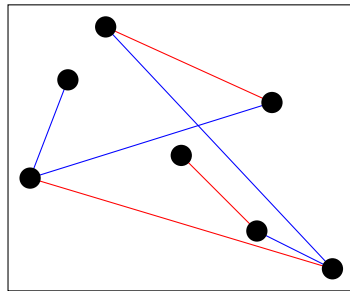


Figura 2.4: Gráfica bicoloreada

Si fuiste capaz de entenderlo, podrás resolver el problema que le aqueja a Merlín. Él debe llegar a tiempo a una fiesta hipotética, pero en su casa se fue la luz y no se ha puesto los calcetines. Sabe dónde los guarda, pero nunca los dobla, por lo cual están todos revueltos. Tiene calcetines de  $n$  colores diferentes. Su plan es tomar algunos calcetines y ponérselos en un lugar donde haya luz. ¿Cuántos calcetines debe tomar, como mínimo, para estar seguro de que lleva dos del mismo color?

### 2.2.2. Conocidos o desconocidos

Suponiendo que conseguiste resolver el problema de Merlín con ayuda de los pichones, podemos continuar. Esta vez, en lugar de molestar a las aves, vamos a organizar una cena para discutir como filósofos. Por desgracia, el recipiente temblor destruyó todos los platos, excepto seis.

Nadie dice que una cena con seis personas vaya a fracasar, sin embargo todos sabemos que para tener un buen resultado, al menos tres de los invitados deben conocerse mutuamente o desconocerse mutuamente. Es decir, debe haber tres personas  $p$ ,  $q$  y  $r$  tales que  $p$  y  $q$  se conocen,  $q$  y  $r$  se conocen y  $r$  y  $p$  se conocen, o que las tres se desconocen.

Ramsey afirma que será un éxito. Pues, por mera coincidencia, su famoso teorema de la amistad asegura que, en toda reunión de seis personas, hay tres que se conocen o se desconocen mutuamente.

Para verlo con claridad vamos a hacer un diagrama. Dibuja un punto (nodo) por cada persona, después, por cada pareja distinta de puntos, dibuja una línea que los una. Si los puntos corresponden a personas que se conocen, entonces la línea debe ser roja, en cambio, si se desconocen, la línea tendrá que ser azul. Este tipo de dibujos se denominan *gráficas bicoloreada* 2.4.

**Definición 2.2.1** (Gráfica bicoloreada). *Una gráfica bicoloreada es una gráfica en la que cada arista está pintada con uno de dos posibles colores (rojo y azul).*

Ahora, para demostrarlo, primero traduciremos el teorema de la amistad a términos de gráficas bicoloreadas.

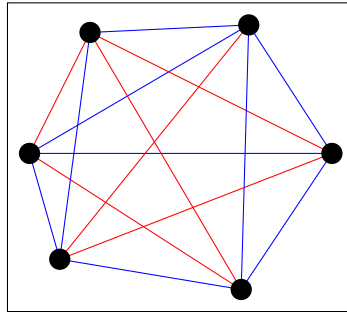


Figura 2.5: Toda gráfica bicolorada con 6 vértices tiene por lo menos un triángulo monocromático. ¿Ya lo encontraste?

**Teorema 2.2.2** (Teorema de la amistad). *Cualquier gráfica completa bicolorada con seis nodos contiene una subgráfica completa con tres nodos y aristas de un sólo color (triángulo rojo o azul).*

*Demostración.* Tomemos cualquier punto  $p$  de la gráfica. Éste tiene cinco aristas incidentes, por el principio de la pichonera, hay al menos tres,  $\overline{pq}$ ,  $\overline{pr}$  y  $\overline{ps}$ , que son de un mismo color, azul, por ejemplo.

Si alguna de las aristas  $\overline{qr}$ ,  $\overline{rs}$ ,  $\overline{sq}$  es azul, entonces esta arista junto con las dos aristas incidentes a  $p$  forman un triángulo azul. De otra manera, si  $\overline{qr}$ ,  $\overline{rs}$ ,  $\overline{sq}$  son rojas, entonces por sí mismas forman un triángulo rojo (para tenerlo más claro ve la figura 2.5).  $\square$

Si por alguna razón uno de tus invitados llegase a faltar, entonces debes preocuparte. Ramsey afirma que tu cena será un éxito si llegan todos, pero no garantiza nada cuando sean menos de seis.

Imagina que son cinco los invitados presentes. Dibuja un pentágono regular, cada nodo será un vértice, pinta de rojo las aristas que delimitan el pentágono y de azul las que están en el interior de éste. En la gráfica no encontrarás ningún triángulo rojo o azul.

### 2.2.3. Teorema de Ramsey

La fiesta no ha terminado, llegaron todos los invitados y la discusión se torna interesante. Han hablado de existencialismo, de políticas neoliberalistas, de historia del arte y de medicamentos genéricos. Ahora alguien propuso explicar el teorema de Ramsey. Lo hace, más o menos, de la manera siguiente.

De las distintas versiones disponibles, enunciaré la que está publicada en [2], conveniente para el autor de esta tesis. Sin embargo, todos los interesados pueden remitirse a la versión original de F. P. Ramsey en [11].

Imagina que eres el director de una obra de teatro; requerirás un guión y un conjunto  $T$  de  $n$  habilidades teatrales.

Organizas una audición para reclutar a los actores. Los primeros que llegan son actores independientes, por lo que sólo han conseguido desarrollar  $i$  habilidades teatrales. Por suerte, no hay dos que tengan el mismo conjunto de habilidades. Envía a una sala a los que te parezcan talentosos y a otra a los tontos.

Después llegaron los representantes de dos famosas escuelas de teatro, la del sur y la del norte. La del sur se empeña en enseñar  $k \geq i$  habilidades a cada uno de sus estudiantes, asegurándose de que haya un estudiante por cada posible combinación de  $k$  habilidades. Tienen la creencia de que dominando exactamente  $k$  habilidades pueden desempeñar el papel de un actor talentoso.

La escuela del norte, al igual que la del sur, tiene un estudiante por cada posible combinación de un número de habilidades; se especializa en enseñarles  $l \geq i$  habilidades teatrales exactamente. No obstante, los estudiantes de esta escuela siempre resultan interpretando papeles de actores tontos.

Puedes elegir entre dos opciones, podrías contratar a los actores independientes que ya están clasificados o también podrías contratar a la escuela del sur, que te proveerá de talentosos, y a la del norte, que te proveerá tontos.

Ramsey te recomendaría que contrataras a los actores libres por dos razones. La primera es porque ya están clasificados y la segunda es porque su teorema afirma que si  $n$  es lo suficientemente grande (i. e. si hay demasiadas características teatrales), entonces habrá un actor sureño que no podrá representar el papel de un talentoso o habrá un actor norteño que no podrá representar un papel de tonto. En otras palabras:

**Definición 2.2.2** ( $k$ -combinación). *Sea  $T$  un conjunto con  $n$  elementos. Llamaremos  $k$ -combinación a cualquier subconjunto de  $k$  elementos.*

**Teorema 2.2.3** (Ramsey). *Sea  $T$  un conjunto de  $n$  elementos. Supongamos que hay dos clases,  $\alpha$  y  $\beta$ , de  $i$ -combinaciones. Sean  $k, l \geq i$  enteros tales que cualquier  $k$ -combinación contiene una  $i$ -combinación de la clase  $\alpha$ , y cualquier  $l$ -combinación contiene una de la clase  $\beta$ . Para una  $n$  lo suficientemente grande esto no es posible.*

A todos los invitados les pareció increíble este teorema. Y por ahora, creo que estamos listos para continuar la fiesta en la siguiente sección de este capítulo.

## 2.3. El problema del final feliz

¡Felicidades! Has llegado a la parte más anhelada, la presentación formal del teorema de Erdős y Szekeres (en realidad encontrarás la mayoría de los resultados publicados por Erdős y Szekeres en [2]). Ahora observa, todos los invitados te miran con orgullo y aplauden, unos hasta están llorando de felicidad.

¡Momento! Empiezan a llegar más personas a nuestra reunión de seis, la casa está repleta. Güitzi, Merlín, incluso el mismísimo Quijote de la Mancha se encuentran presentes y dispuestos a hacer preguntas absurdas e interesantes.

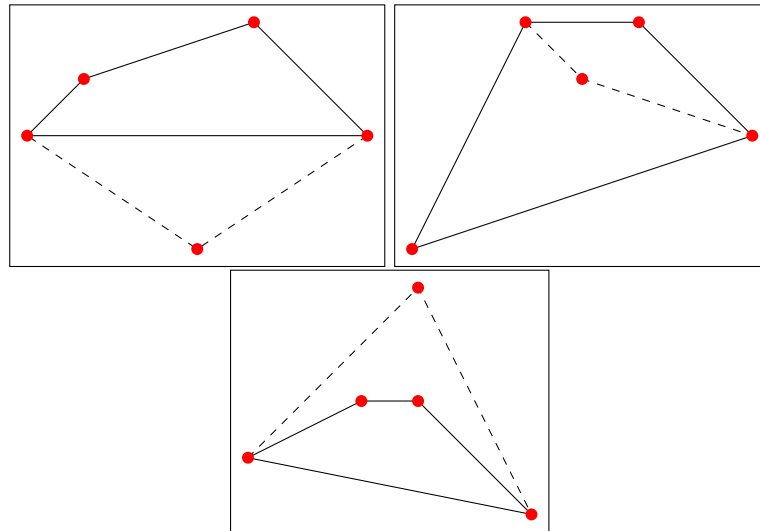


Figura 2.6: En 5 puntos siempre hay un cuadrilátero convexo.

### 2.3.1. El acertijo de Esther

–En la fiesta, una joven llamada Esther levantó la voz y dijo: –tengo un acertijo para ustedes. –Guardó silencio por un instante para captar toda la atención–. ¿Cuál es el mínimo número de elementos que debe tener cualquier conjunto de puntos, en posición general, para garantizar cuatro de ellos en posición convexa?–.

–No cesaban los intentos, transcurrió media hora, transcurrió una hora. Esther decidió revelar el secreto–. Señoritas, caballeros, se agotó el tiempo, la respuesta es cinco. Se los demostraré.

Digamos que  $T$  es un conjunto de cinco puntos. Si los cinco estuvieran en posición convexa, cualquier subconjunto de cuatro está en posición convexa.

Si el cierre convexo de  $T$  fuera un cuadrilátero, entonces su conjunto de vértices es el subconjunto que buscamos.

Finalmente, si el cierre convexo fuera un triángulo, entonces hay dos elementos de  $T$  en su interior. La línea recta que atraviesa estos dos puntos divide al triángulo en dos partes; una con un vértice y la otra con dos. En este caso vamos a tomar los dos puntos del interior y los dos vértices del triángulo que están del mismo lado de la recta (consúltalo en [2]). (Es mejor ver el dibujo 2.6).

Eso fue tan sólo una pista para el nuevo acertijo que he preparado. Ahora, en lugar de garantizar únicamente cuatro puntos en posición convexa, quiero que garanticen  $k$ . ¿Cuántos puntos debería tener  $T$ ?

### 2.3.2. Existencia

La reunión de seis se extendió algunos días. Los seis platos pasaban de mano en mano hasta que –¡Por fin! Hemos encontrado la respuesta– exclamaron dos jóvenes, Paul y George. Nadie lo podía creer.

–Parecía no haber respuesta –dijo George–, entonces decidimos hacer uso del consejo que el mago Merlín le dio a la araña espacial en la subsección 2.1.1, en el penúltimo renglón del primer párrafo. Fue entonces cuando cambiamos de enfoque y optamos por demostrar factibilidad.

–Antes de responder cuál sería tal número, cuestionamos su existencia. El resultado fue positivo; el número siempre existe –afirmó Paul–.

Lo primero que hicieron estos jóvenes fue leer detalladamente el problema, malearlo como plastilina, jugar al yoyo con él. Buscaron propiedades de los conjuntos convexos y encontraron una muy interesante:

**Teorema 2.3.1** (Carathéodory). *Sea  $T$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ , entonces, para cualquier punto  $p$  dentro del cierre convexo de  $T$ , existe un subconjunto  $T' \subset T$  con a lo más  $d + 1$  elementos, tal que su cierre convexo contiene a  $p$ .*

Lo cual implica directamente que:

**Lema 2.3.1.1.** *Sea  $T$  un conjunto de puntos. Si toda 4-combinación de  $T$  está en posición convexa, entonces  $T$  está en posición convexa.*

En ese momento percibieron su potencial como un problema del tipo Ramsey. Sólo tendrían que definir quién será  $i$  y cuáles serán las dos distintas clases  $\alpha$  y  $\beta$ . Sin embargo, pudieron rescatar algo más de la solución de la señorita Esther. (El teorema siguiente se encuentra en [2]).

**Teorema 2.3.2** (Erdős-Szekeres, primera demostración). *Para todo número natural  $m$  existe otro natural  $n$  tal que todo conjunto  $T \in \mathbb{R}^2$  de  $n$  puntos en posición general contiene un subconjunto de  $m$  puntos en posición convexa.*

*Demostración.* Si recordamos el teorema de Ramsey (Teorema 2.2.3) veremos que, para usarlo, primero necesitamos audicionar las  $i$ -combinaciones. Sea  $i = 4$ . Clasifiquemos las 4-combinaciones en dos tipos; las que están en posición convexa (talentosas) y las demás (tontas).

De inmediato llega la escuela del sur, con  $k = 5$ , afirmando que toda 5-combinación contiene al menos una 4-combinación talentosa. Y finalmente la escuela del norte, con  $l = m$ , afirmando que toda  $m$ -combinación contiene una 4-combinación tonta.

Lamentablemente una de las dos escuelas fallará para una  $n$  lo suficientemente grande, es decir, hay una 5-combinación que no contiene ninguna 4-combinación talentosa, o una  $m$ -combinación que no contiene ninguna 4-combinación tonta.

Hace algunos párrafos, Esther aseguró que la escuela del sur no puede equivocarse, en otras palabras, demostró que toda 5-combinación contiene una 4-combinación talentosa. Y por esta razón, para  $n$  lo suficientemente grande,



habrá una  $m$ -combinación que no tenga ninguna 4-combinación tonta, es decir, todas sus  $i$ -combinaciones serán talentosas (convexas).

Por último observemos esta  $m$ -combinación tal que todas sus  $i$ -combinaciones son convexas. Y por el lema 2.3.1.1 este conjunto está en posición convexa. Por lo tanto, para una  $n$  lo suficientemente grande, todo conjunto de  $n$  puntos contiene un subconjunto de  $m$  elementos en posición convexa.  $\square$

### 2.3.3. Cantidad

–George comentaba– cuando descubrimos esto, no había forma de detenernos. Restaba encontrar el número exacto, lo cual no sería fácil sino hasta recordar un viejo truco; la recurrencia.

–Para que entiendan bien nuestro resultado, es preciso exponer previamente dos problemas similares, aunque más sencillos, cuya solución alumbrará el camino de la demostración primordial –explicó George serenamente–.

Usaremos conjuntos de puntos en posición general con un par de propiedades más, la utilidad de incluir estas propiedades es simplificar la explicación. En el caso general los resultados no se ven afectados.

Simplemente, en cada conjunto de puntos que usemos, no habrá dos elementos que tengan la misma abscisa o la misma ordenada.

#### La rampa

Si los griegos hubieran tenido un dios que usara silla de ruedas, seguramente habría una constelación llamada “La rampa del dios de la silla de ruedas”. El primero de los problemas que explicaron hizo honor a esto. Y como el entretenimiento favorito de Gützi es dibujar constelaciones, pidámosle que dibuje una rampa con su telaraña.

**Definición 2.3.1** ( $k$ -rampa creciente y decreciente). *Sea  $V = \{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$  un conjunto de  $k$  puntos en el plano tal que para toda  $i < j$ ,  $p_i$  está a la izquierda de  $p_j$ . Si para toda  $i < j$ ,  $p_i$  está por abajo de  $p_j$ , entonces diremos que  $V$  es una  $k$ -rampa creciente. Y al contrario, si  $p_i$  está por arriba de  $p_j$  para toda  $i < j$ , entonces lo que tienes es una  $k$ -rampa decreciente (Ve una rampa en vivo en la figura 2.7).*

Por ahora no nos interesa si la rampa es creciente o decreciente, sin embargo, tiene que ser muy firme, así que debe estar formada por una cantidad respetable de puntos. He aquí la primera gran pregunta: ¿podemos garantizar la existencia de una rampa con cierto número de elementos de  $T$ ?

Primero hay que observar lo siguiente. Si  $T$  fuera por completo una  $n$ -rampa decreciente, veríamos que no contiene ninguna rampa creciente. Esto nos hace pensar que los dos tipos de rampas se complementan de cierta forma. Gracias a esto concluyeron el teorema siguiente (publicado en [2]):

**Teorema 2.3.3** (Erdős-Szekeres, rampas). *Sea  $T$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general. Siempre es posible encontrar una  $(\sqrt{n-1}+1)$ -rampa creciente o decreciente  $V$ .*

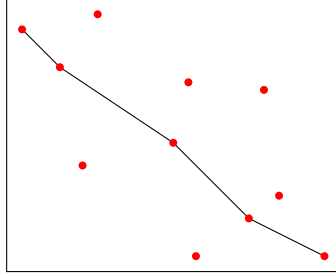


Figura 2.7: Poligonal remarcando una 5-rampa decreciente.

*Demostración.* Imagina que conoces el mínimo de número de puntos, en posición general, que garantizan la existencia de una  $k$ -rampa creciente o decreciente. A Paul y a George se les ocurrió llamarlo  $f(k, k)$ . La idea con el método recurrente sería calcular cuántos puntos, en términos de esta función, son necesarios para garantizar una  $(k + 1)$ -rampa creciente o decreciente.

Ahora deja de imaginar. Como si hubieras leído la última página de un libro antes de empezarlo, ellos afirmaron que  $f(k + 1, k + 1) = f(k, k) + 2k - 1$ . Es decir, para que un conjunto pueda garantizar una  $(k + 1)$ -rampa creciente o decreciente, debe tener por lo menos  $f(k, k) + 2k - 1$  puntos. La razón es la siguiente.

Digamos que  $T$  es un conjunto de  $f(k, k) + 2k - 1$  puntos. Enfoquémonos en los primeros  $f(k, k)$ , los que están más a la izquierda. Por hipótesis de inducción tenemos la certeza de que con ellos podemos formar una  $k$ -rampa creciente o decreciente. Vamos a apartar el punto que esté más a la derecha de esta  $k$ -rampa.

De los  $f(k, k)$  puntos que enfocamos, nos restan  $f(k, k) - 1$ . Para tener de nuevo un conjunto con  $f(k, k)$  vamos a tomar uno de los  $2k - 1$  elementos que ignoramos. Ahora podemos encontrar otra  $k$ -rampa. Hacemos lo mismo; apartamos el extremo derecho de esta nueva  $k$ -rampa y tomamos uno más de los restantes. Y así sucesivamente hasta que ya no queden más puntos.

En total construimos  $2k$   $k$ -rampas diferentes; una con los primeros  $f(k, k)$  puntos a la izquierda y una por cada elemento de los  $2k - 1$  a la derecha. Y como cualquier  $k$ -rampa puede ser creciente o decreciente, existen dos posibilidades: que más de la mitad sean  $k$ -rampas de un mismo tipo o que haya exactamente  $k$  crecientes y  $k$  decrecientes.

- Supongamos que más de la mitad de las  $k$ -rampas son crecientes, o sea, hay al menos  $k + 1$ . Recuerda que apartamos el extremo derecho de cada  $k$ -rampa, por esto hay por lo menos  $k + 1$  puntos que son extremo derecho de  $k$ -rampas crecientes.

Si en estos  $k + 1$  puntos hay dos,  $q$  y  $r$  con  $r$  a la derecha de  $q$ , tales que  $r$  está más arriba que  $q$ , entonces podemos completar la  $k$ -rampa que termina en  $q$ , agregándole  $r$ . Así formamos una  $(k + 1)$ -rampa creciente (Si no lo entiendes será porque te falta observar la figura 2.8).

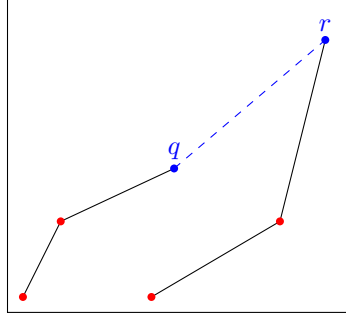


Figura 2.8: La rampa creciente que termina en  $q$  se completa con  $r$ .

Si no hay dos elementos que cumplan lo anterior, quiere decir que todo punto está por abajo de cada elemento a su derecha, entonces los  $k + 1$  puntos forman por sí mismos una  $k + 1$ -rampa decreciente. Es simétrico el caso donde hay más  $k$ -rampas decrecientes.

- Ahora supongamos que hay  $k$  crecientes y  $k$  decrecientes. Por el mismo argumento que arriba, los extremos correspondientes a las  $k$ -rampas crecientes deben formar una  $k$ -rampa decreciente y los extremos de las decrecientes deben formar una  $k$ -rampa creciente.

Veamos que ocurre con esas dos nuevas  $k$ -rampas. Toma el extremo derecho de ambas. Observa que cada uno de estos dos puntos es extremo derecho de una  $k$ -rampa creciente y a la vez de una decreciente. Cual sea que esté a la derecha, si está más arriba que el de la izquierda, entonces completa su  $k$ -rampa creciente y si está por abajo completa su  $k$ -rampa decreciente. Así volvemos a conseguir una  $(k + 1)$ -rampa.

Ya que estamos seguros de que  $f(k + 1, k + 1)$  garantizan una  $(k + 1)$ -rampa, resta mostrar que  $f(k, k) = (k - 1)^2 + 1$ . Hagámoslo con el protocolo de siempre; suponemos que  $f(k, k) = (k - 1)^2 + 1$  y demostramos que  $f(k + 1, k + 1) = k^2 + 1$ .

$$\begin{aligned}
 f(k + 1, k + 1) &= f(k, k) + 2k - 1 \\
 &= ((k - 1)^2 + 1) + 2k - 1 \text{ (por hipótesis de inducción)} \\
 &= (k^2 - 2k + 1 + 1) + 2k - 1 \\
 &= k^2 + 1.
 \end{aligned}$$

No es difícil comprobar la exactitud de esto, es decir, podemos dar  $(k - 1)^2$  puntos que no contengan ninguna  $k$ -rampa creciente o decreciente.  $\square$

### El taco gigante

El segundo problema está ubicado espacio temporalmente cuando vas al puesto de tacos más cercano y pides un taco gigante para compartir. Te dan tu taco y tú te las arreglas para llevarlo a la fiesta.

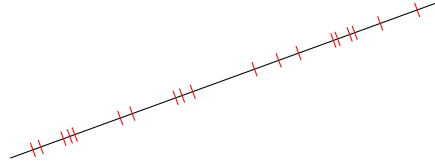


Figura 2.9: Simulamos el taco gigante con una recta y cada corte con un punto sobre ella. Los puntos inicial y final corresponden al principio y fin del taco.

Una vez que llegas, tus hambrientos invitados te exhortan a que les des un trozo. Entonces buscas un cuchillo para partirlo, pero en ese instante tu amigo ciego insiste en que él es el indicado para el trabajo, tú aceptas sin ningún problema. Cuando termina de dividirlo notas que todos los cortes están completamente disparejos. Lo único que puedes hacer es dar un dato curioso.

Imagina que el taco es una recta y los cortes, incluyendo el inicio y el fin del taco, son puntos sobre ella. Paul y George en [2] dieron el número de puntos que serían necesarios para que haya, de izquierda a derecha, por lo menos  $k$  puntos a distancias crecientes o  $l$  a distancias decrecientes, no necesariamente consecutivos (Observa la figura 2.9).

Esto funciona de la misma manera que en el problema anterior. Nombremos  $f_1(k, l)$  a ese número y vayamos nuevamente a la última página del libro, entonces observamos que  $f_1(k, l) = f_1(k - 1, l) + f_1(k, l - 1) - 1$ . En otras palabras tendría que usar como dos hojas, así que espero que esa expresión haya sido clara.

De modo que requerimos  $f_1(k - 1, l) + f_1(k, l - 1) - 1$  puntos sobre una recta para que haya  $k$  a distancias crecientes o  $l$  a distancias decrecientes.

Vamos a llamar  $q$  al punto que representa el inicio del taco y  $r$  al fin del taco. Situémonos exactamente en medio de estos dos. Si a nuestra izquierda no hay por lo menos  $f_1(k - 1, l)$  puntos, entonces a nuestra derecha habrá al menos  $f_1(k, l - 1)$ . Y al contrario, si a la derecha no hay  $f_1(k, l - 1)$  puntos, entonces a la izquierda habrá por lo menos  $f_1(k - 1, l)$  (Observa la figura 2.10).

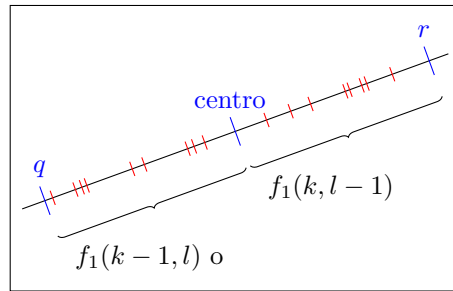


Figura 2.10: A la izquierda debe haber al menos  $f_1(k - 1, l)$  puntos o a la derecha por lo menos  $f_1(k, l - 1)$ .

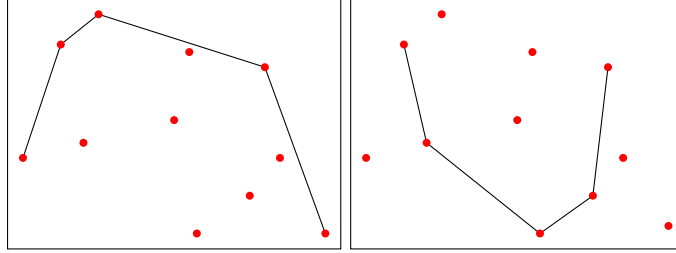


Figura 2.11: Un 5-gorro y una 5-taza señalados con poligonales.

- Supongamos que a nuestra izquierda tenemos  $f_1(k-1, l)$ . Por hipótesis de inducción significa que hay  $k-1$  puntos a distancias crecientes o  $l$  a distancias decrecientes. Si ocurre lo segundo, hemos terminado. En cambio, si es el primer caso, entonces podemos completar el conjunto con el punto  $r$ , así tendríamos  $k$  puntos a distancias crecientes.
- Si hay  $f_1(k, l-1)$  puntos a la derecha, por hipótesis de inducción, hay  $k$  puntos a distancias crecientes o  $l-1$  puntos a distancias decrecientes. De la misma manera que arriba, en el primer caso no hay más que hacer. En el segundo caso, sólo añadimos  $q$  al conjunto, así obtenemos  $l$  puntos a distancias decrecientes.

### De gorros y tazas

—Señoras y señores —anuncia Paul—. Estamos listos para abordar la respuesta al acertijo de Esther. Vamos a animar esta fiesta con gorritos y tazas de ponche. Así de sencillo.

**Definición 2.3.2** (*k-gorro y k-taza*). Sea  $T = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  un conjunto de puntos tal que para toda  $i < j$ ,  $p_i$  está a la izquierda de  $p_j$ . Diremos que  $T$  es un *k-gorro* si para toda  $i < j$ , la pendiente de  $\overline{p_i p_{i+1}}$  es menor que la pendiente de  $\overline{p_j p_{j+1}}$ . Y al contrario, si para toda  $i < j$ , la pendiente de  $\overline{p_i p_{i+1}}$  es mayor que la pendiente de  $\overline{p_j p_{j+1}}$ , lo que tenemos es una *k-taza*.

Nótese que un *k-gorro* o una *l-taza* son conjuntos en posición convexa (Los gorros y las tazas se ven comúnmente como en la figura 2.11). Hagamos lo mismo que en los dos problemas anteriores, hay que definir un número  $f_2(k, l)$  que garantice que cualquier conjunto, con esa cantidad de puntos, contiene un *k-gorro* o una *l-taza*.

Y la tan esperada solución; este número es  $f_2(k, l) = f_2(k-1, l) + f_2(k, l-1) - 1$  (publicada en [2]), lo cual, por obvias razones, tiene una prueba muy parecida a las dos anteriores.

**Teorema 2.3.4** (Erdős-Szekeres, segunda demostración). Si  $T$  es un conjunto con por lo menos  $\binom{2k-4}{k-2} + 1$  puntos, entonces contiene un *k-gorro* o una *k-taza*.

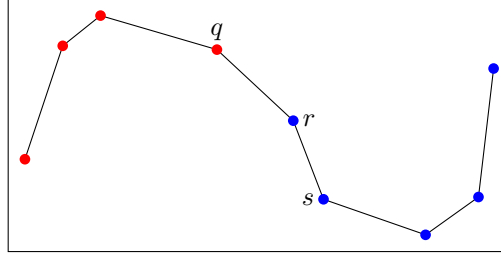


Figura 2.12: La pendiente de  $\overline{qr}$  es mayor que la de  $\overline{rs}$ , por lo tanto formamos un 6-gorro agregando  $s$  al 5-gorro que termina en  $r$ .

*Demostración.* Veamos primero cómo es que  $f_2(k-1, l) + f_2(k, l-1) - 1$  puntos en posición general siempre contienen un  $k$ -gorro o una  $l$ -taza.

Consideremos los primeros  $f_2(k-1, l)$  puntos. Si en ellos encontramos una  $l$ -taza entonces la fórmula  $f_2(k, l)$  se cumple. Si no, entonces hay un  $(k-1)$ -gorro. Apartemos el último punto de esta configuración. Para tener nuevamente  $f_2(k-1, l)$  elementos, hay que tomar uno de los  $f_2(k, l-1) - 1$  restantes. De nuevo, si hay una  $l$ -taza, entonces terminamos, si no entonces apartamos el último punto del nuevo  $(k-1)$ -gorro. Hacemos esto hasta terminar con todos los puntos restantes.

Así, en caso de no haber encontrado una  $l$ -taza, apartamos  $f_2(k, l-1)$  puntos, cada uno un es punto final de un  $(k-1)$ -gorro. Si en estos puntos encontramos un  $k$ -gorro, entonces terminamos. Supongamos que no ocurre, entonces hay una  $(l-1)$ -taza. Sean  $r$  y  $s$  el primero y segundo puntos de ésta, respectivamente. En particular  $r$  es punto final de un  $(k-1)$ -gorro, sea  $q$  el penúltimo punto de ese  $(k-1)$ -gorro.

Si la pendiente de  $\overline{qr}$  es mayor que la de  $\overline{rs}$ , entonces  $s$  junto con el  $(k-1)$ -gorro formarían un  $k$ -gorro. Y al contrario, si es menor, entonces  $q$  junto con la  $(l-1)$ -taza harían una  $l$ -taza (Observa el ejemplo).

Finalmente, por inducción, es fácil ver que:

$$f_2(k, k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1.$$

Lo que concluye la prueba.  $\square$

–¡Más sencillo de lo que parecía! –exclamó Paul–. Sin embargo, quedan misterios sin resolver, o están resueltos no tan concretamente como nos gustaría. Los valores exactos de la función  $f_2(k, l)$  no se han encontrado. De cualquier forma, tenemos más trabajo sobre ello y hemos obtenido cotas más justas en [3] (también escrito por P. Erdős y G. Szekeres), ¿no es cierto, George? ¿George? ¿Esther?.

**Teorema 2.3.5.** Si  $T$  es un conjunto con por lo menos  $\binom{2k-5}{k-2} + 2$  puntos, entonces contiene un  $k$ -gorro o una  $k$ -taza.

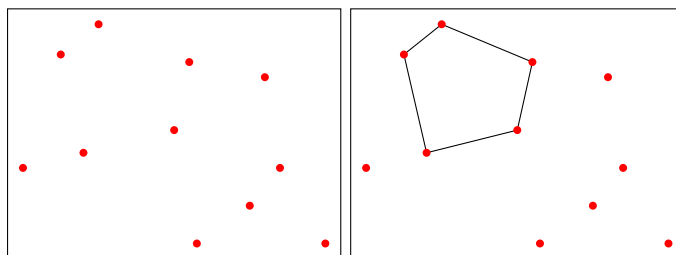


Figura 2.13: En esta imagen atrapamos a un 5-hoyo en acción.

La fiesta fue un éxito; terminó convirtiéndose en una retrospectiva apócrifa de la historia del problema del final feliz. El amigo George representó el papel de Szekeres y Paul, el papel de Erdős, además Esther interpretó a Esther Klein; la mujer quien propuso el problema. Algo es cierto, Erdős eligió ese título porque gracias a este problema Klein y Szekeres formaron una bonita familia.

## 2.4. Hoyos

Pero el trabajo nunca termina. A Erdős se le ocurrió una variante del problema; sugirió algo un poco más específico que, sin duda, surge del problema del final feliz.

Imagina que ya encontraste un conjunto en posición convexa, pero notas algo más: no hay ningún punto de todo  $T$  adentro del cierre convexo de este subconjunto convexo, como si hubieras encontrado un agujero en las estrellas. ¿Será posible dar un número de estrellas en posición general que garantice un hoyo con  $k$  vértices? (Ve a la figura 2.13).

**Definición 2.4.1.** (*k-hoyo*) Sea  $T$  un conjunto de puntos, un subconjunto  $H \subset T$  es llamado *k-hoyo* en  $T$  si está en posición convexa y  $CH(H) \cap T = H$ . En otras palabras, si  $H$  determina un *k-gono convexo* sin puntos de  $H$  en su interior.

—¡No necesariamente! —Exclama el señor Horton. Lo cual es verdad, en cualquier conjunto con al menos 5 puntos podremos encontrar un 4 hoyo, como demostró Esther Klein en [2], H. Harborth demostró que en 10 puntos siempre encontraremos un 5-hoyo en [12], habiendo una demostración alternativa de S. Yong y E. Kang en [10]. Finalmente C. M. Nicolás mostró, en [13], que en todo conjunto lo suficientemente grande habrá un 6-hoyo. T. Greken, en [14], dio una cota inferior (que el conjunto contenga un 9-gono convexo)—. Así es, yo puedo construir conjuntos arbitrariamente grandes sin algún 7-hoyo —dice Horton, muy confiado de su descubrimiento—.

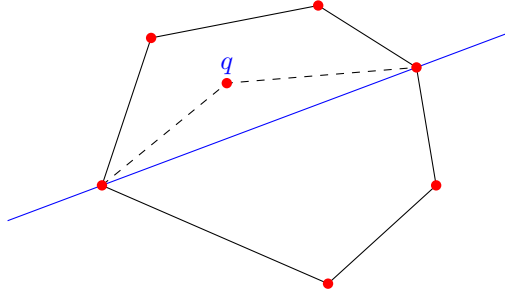


Figura 2.14: Con el punto del interior formamos un 5-hoyo.

### 2.4.1. El 5-hoyo

**Teorema 2.4.1** (5-hoyo). *Todo conjunto lo suficientemente grande contiene un 5-hoyo.*

**Lema 2.4.1.1.** *Por el teorema de Erdős-Szekeres, supondremos que estamos en un conjunto  $T$  con los puntos necesarios para contener un subconjunto  $H$  en posición convexa de 6-elementos, digamos que  $H$  es el que minimiza  $|T \cap CH(H)|$ . Sea  $I = CH(H) \cap (T - H)$  los puntos de  $T$  que están dentro del cierre convexo de  $H$ .*

- Si  $I = \emptyset$ , entonces tenemos un 6-hoyo.
- Si sólo hay un punto  $q \in I$ , veamos una diagonal del hexágono que lo divida en dos cuadriláteros. El punto  $q$  se encuentra en alguno de estos dos cuadriláteros. Los vértices del otro cuadrilátero junto con  $q$  forman un 5-hoyo (Figura 2.14).
- Si  $|I| \geq 2$ , elijamos una arista  $\overline{rs}$  de  $CH(I)$ . Sea  $\gamma$  el semiplano abierto acotado por la recta que contiene a  $\overline{rs}$  y que no contiene puntos de  $I$ .

*Si  $|\gamma \cap H| \geq 3$ , hay un 5-hoyo formado por  $r$ ,  $s$ , y tres puntos en  $\gamma \cap H$ . Si  $|\gamma \cap H| = 2$ . Al reemplazar esos dos vértices del hexágono por  $r$  y  $s$ , entonces tendríamos un nuevo conjunto convexo de 6 puntos con menos elementos de  $T$  en su interior que  $H$ , lo que es una contradicción. Cuando  $|\gamma \cap H| = 1$  ocurre algo similar, sólo se sustituye ese vértice por  $r$  o  $s$  (Observa la figura 2.15).*

### 2.4.2. Conjuntos de Horton

**Teorema 2.4.2** (7-hoyo). *Existen conjuntos arbitrariamente grandes que no contienen ningún 7-hoyo.*

Esta explicación, ligeramente más sencilla que la de [1], aparece redactada en [8] en el capítulo 3. Empezamos definiendo un conjunto (tipo de conjuntos) que presume de no tener 7-hoyos.



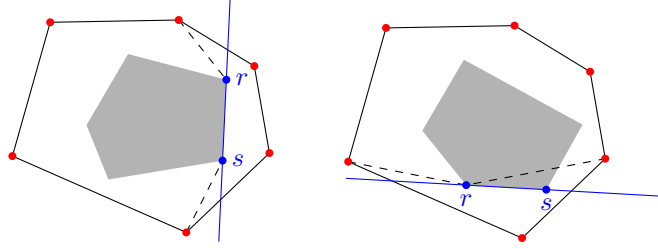


Figura 2.15: Cuando hay dos o más puntos en el interior, podemos formar un conjunto convexo de seis elementos con menos elementos dentro de él.

**Definición 2.4.2** (Muy arriba o muy abajo de). Sean  $A$  y  $B$  conjuntos finitos en el plano. Diremos que  $A$  está muy arriba de  $B$  (y que  $B$  está muy abajo de  $A$ ) si se cumple lo siguiente:

1. Ninguna recta determinada por dos puntos de  $A \cup B$  es vertical.
2. Cualquier recta determinada por dos puntos de  $A$  está por arriba de cualquier punto de  $B$ .
3. Cualquier recta determinada por dos puntos de  $B$  está por arriba de cualquier punto de  $A$ .

Para un conjunto  $T = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  sin dos puntos con la misma coordenada  $x$ , tales que si  $i < j$  entonces  $p_i$  tiene menor coordenada  $X$  que  $p_j$ . Definamos los subconjuntos  $T_0 = \{p_2, p_4, \dots\}$  (los puntos con índice par) y  $T_1 = \{p_1, p_3, \dots\}$  (los puntos con índice impar).

**Definición 2.4.3** (Conjunto de Horton). Un conjunto finito  $H \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto de Horton si  $|H| \leq 1$ , o si las siguientes condiciones se cumplen:  $|H| > 1$ ,  $H_0$  y  $H_1$  son conjuntos de Horton y  $H_1$  está muy arriba de  $H_0$  o  $H_0$  está muy abajo de  $H_1$ .

**Lema 2.4.2.1.** Existe un conjunto de Horton con cualquier cardinalidad  $n \geq 1$

*Demostración.* Nota que, si tuviéramos un conjunto de Horton muy grande, podríamos obtener uno de menor tamaño con sólo quitar puntos a la derecha. Ahora construyamos  $H^{(k)}$ , un conjunto de Horton de cardinalidad  $2^k$ , por inducción.

Definamos  $H^{(0)}$  como el punto  $(0, 0)$ . Supón que podemos construir el conjunto  $H^{(k)}$  con  $2^k$  puntos cuyas coordenadas  $x$  son  $0, 1, \dots, 2^{k-1}$ .

Sea  $A = 2H^{(k)}$  (i. e.  $H^{(k)}$  expandido al doble) y  $B = A + (1, h_k)$ , donde  $h_k$  es un número lo suficientemente grande. Diremos que  $H^{(k+1)} = A \cup B$ . Es fácil ver que si  $h_k$  es lo suficientemente grande,  $B$  está muy por arriba de  $A$ , y entonces  $H^{(k+1)}$  sería un conjunto de Horton (Puedes ver un conjunto de Horton en la figura 2.16).  $\square$

**Definición 2.4.4** (Cerrado por arriba y cerrado por abajo). Sea  $T$  un conjunto de en  $\mathbb{R}^2$ . Diremos que  $T$  es  $k$ -cerrado por arriba si para cualquier  $k$ -taza en  $T$  existe un punto de  $T$  ubicado arriba de la  $k$ -taza (i.e. arriba o dentro de su cierre convexo). De forma similar definimos un conjunto  $k$ -cerrado por abajo usando  $k$ -gorros.

**Lema 2.4.2.2.** Todo conjunto de Horton es 4-cerrado por arriba y 4-cerrado por abajo.

*Demostración.* Haremos inducción sobre la cardinalidad del conjunto de Horton. Sea  $H$  un conjunto de Horton, supongamos que  $H_0$  está muy abajo de  $H_1$  (el otro caso es análogo). Sea  $C \subset H$  una 4-taza.

Si  $C \subset H_0$  o  $C \subset H_1$ , por hipótesis de inducción, hay un punto que cierra  $C$  por arriba. Digamos entonces que  $C \cap H_0 \neq \emptyset \neq C \cap H_1$ .

Debe haber a lo más dos puntos de  $C$  en  $H_1$  (la parte de arriba): Si hubiera 3 puntos, digamos  $q$ ,  $r$  y  $s$  (ordenados de izquierda a derecha), entonces  $H_0$  está abajo de las rectas que contienen a  $\overline{qr}$  y a  $\overline{rs}$ . Entonces el punto restante de  $C$ , que supuestamente está en  $H_0$ , no puede formar una 4-taza con  $\{q, r, s\}$ .

Esto significa que  $C$  tiene al menos 2 puntos  $q$  y  $r$  en la parte inferior  $H_0$ . Como los puntos  $H_0$  y  $H_1$  alternan a lo largo del eje  $x$ , hay un punto  $s \in H_1$  entre  $q$  y  $r$  (de acuerdo a su coordenada  $x$ ). Este punto ( $s$ ) está arriba del segmento  $\overline{qr}$ , entonces cierra  $C$  por arriba. El argumento es similar para un 4-gorro.  $\square$

**Lema 2.4.2.3.** Ningún conjunto de Horton contiene algún 7-hoyo.

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que hay un 7-hoyo  $X$  en nuestro conjunto de Horton reglamentario  $H$ . Si  $X \subset H_0$  o  $X \subset H_1$ , usamos inducción. En otro caso, tomamos la parte ( $H_0$  o  $H_1$ ) que contiene la mayor cantidad de elementos de  $X$ ; ésta debe tener al menos 4 puntos de  $X$ . Si esta parte es, por ejemplo,  $H_0$ , y se encuentra muy abajo de  $H_1$ , estos cuatro puntos deberían formar una 4-taza en  $H_0$ , pues si 3 de ellos formarían un 3-gorro, ningún punto de  $H_1$  podría completarlo para formar un conjunto en posición convexa. Por el lema 2.4.2.2, por ser un conjunto de Horton, hay un punto que cierra la 4-taza por arriba. Tal punto debe estar contenido en el cierre convexo del 7-hoyo  $X$ , lo que es una contradicción.  $\square$

Aprende de sucesiones y más puntos, nos leemos en el siguiente capítulo.

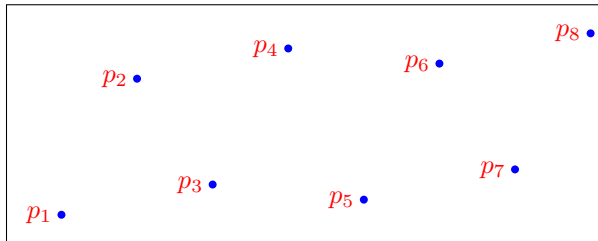


Figura 2.16: Un conjunto de Horton de 8 elementos.



## Capítulo 3

# Sucesiones

*“¿Qué puedo saber? ¿Qué debo hacer? ¿Qué me cabe esperar? ¿Qué es el hombre?”*

---

Kant

En este capítulo y en el siguiente estaremos enfocados en estudiar los resultados sobre temas de sucesiones y conjuntos de puntos con pesos, (expuestos en [6, 5]), obtenidos recientemente por Jorge Urrutia, de la Universidad Nacional Autónoma de México y Toshinori Sakai, de la Universidad de Tokio.

Estos resultados, en su mayoría, son interesantes aplicaciones del teorema de Erdős-Szekeres o de algunas de sus implicaciones y problemas relacionados, mismos que hemos estudiado a lo largo de este trabajo. Observaremos que algunas de las pruebas son claras y sencillas, sin embargo otras tantas incluyen maniobras habilidosas.

Ahora empecemos con sucesiones. ¿Sucesiones? ¿No se supone que este trabajo hablaría de puntos en el plano? Desde luego, cada sucesión puede ser interpretada como un conjunto de puntos en el plano. Por ejemplo, una sucesión de números reales puede ser la siguiente:

$$[1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2],$$

y el conjunto de puntos correspondiente se vería como:

$$\{(1, 1), (2, -2), (3, \pi), (4, 0), (5, -3), (6, 4), (7, -2)\}.$$

Nota que estamos tomando como coordenada  $x$  la posición  $i$  y como coordenada  $y$  el valor  $s_i$ . ¿Podemos seguir? Anteriormente ya hemos usado algunas sucesiones, son tan intuitivas que apenas si es necesario definir las.

**Definición 3.0.5** (Sucesión). *Sea  $H$  un conjunto distinto del vacío. Diremos que  $S = [s_1, \dots, s_n]$  es una sucesión de  $H$ , de longitud  $n$ , si y sólo si  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $s_i \in H$ , además, si  $S' = [s'_1, \dots, s'_m]$  también es una sucesión de  $H$ , entonces  $S = S'$  si y sólo si  $n = m$  y  $s_i = s'_i$ .*

Claramente, dos sucesiones no podrán ser iguales si difieren en al menos un elemento, incluso si sólo se hubiesen intercambiado dos elementos diferentes. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2] &\neq [-2, 1, \pi, 0, -3, 4, -2] \\ [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2] &\neq [1, -2, \pi, 0, 3, 4, -2] \end{aligned}$$

Un concepto importante, y más vale tenerlo siempre presente, es el de subsucesión. Digamos que para construir una subsucesión de una sucesión dada, únicamente debemos desplazarnos sobre la primera, dato por dato, de izquierda a derecha, seleccionando algunos elementos, reescribiéndolos en el mismo orden. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2] &\subset [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2] \\ [\pi, 0, -3, -2] &\subset [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2] \\ [1, 4, \pi, 0] &\not\subset [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2] \end{aligned}$$

**Definición 3.0.6** (Subsucesión). *Sea  $S = [s_0, s_1, \dots, s_{n-1}]$  una sucesión de un conjunto  $H \neq \emptyset$ , diremos que una sucesión  $T = [t_0, t_1, \dots, t_{k-1}]$  de  $H$ , con  $k \leq n$ , es una subsucesión de  $S$  ( $T \subset S$ ) si y sólo si  $\forall j < j' \in \{0, 1, \dots, k-1\} \exists i < i' \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tales que  $t_j = s_i$  y  $t_{j'} = s_{i'}$ .*

Sólo hace falta la siguiente definición para empezar a jugar. Vamos a situarnos en  $\mathbb{R}$ ; el conjunto de nuestro interés. Con el ejemplo de siempre, construiremos una subsucesión pero ahora con una restricción más, únicamente podremos tomar números más grandes (pequeños) que el anterior; el primero puede ser cualquiera. Esto es lo que se conoce como una sucesión creciente (decreciente).

Una subsucesión creciente podría verse como sigue:

$$[-2, \pi, 4] \subset [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2]$$

y una subsucesión decreciente:

$$[1, 0, -3] \subset [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2]$$

### 3.1. Sucesiones monotónicas

**Definición 3.1.1** (Sucesión monotónica). *Sea  $S = [s_0, \dots, s_{n-1}]$  una sucesión de  $\mathbb{R}$ ,  $S$  será creciente (decreciente), si y sólo si  $\forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$  con  $i < j$ , tenemos que  $s_i < s_j$  ( $s_i > s_j$ ). Finalmente, si la sucesión es creciente o decreciente será nombrada sucesión monotónica.*

Si recordamos el teorema 2.3.3, veremos que tiene una interpretación para sucesiones. Dice que en cualquier conjunto encontraremos una  $(\sqrt{n-1} + 1)$ -rampa creciente o decreciente, esto, interpretado en términos de sucesiones, es que hay una subsucesión monotónica de longitud  $(\sqrt{n-1} + 1)$ .

Y para que veas que no es tan difícil encontrar una subsucesión monotónica de longitud  $k$ , o una  $k$ -rampa si estuviéramos en el plano, empezaremos a contarlas en el lema siguiente (probado en [6]).

**Lema 3.1.0.4.** Sean  $k \geq 3$  y  $n$  enteros tales que  $n \geq (k-1)^2 + 1$ . Cualquier sucesión  $S$ , de  $n$  números reales distintos, contiene al menos  $\binom{n}{k} / \binom{(k-1)^2+1}{k}$  diferentes subsucesiones monotónicas de longitud  $k$ .

*Demostración.* Sea  $m = (k-1)^2 + 1$  y sea  $D$  el conjunto de las subsucesiones de  $S$  de longitud  $m$ . Es fácil notar que  $|D| = \binom{n}{m}$ . Como cada  $S' \in D$  tiene una longitud de  $m = (k-1)^2$  entonces, por el Teorema 2.3.3,  $S'$  tiene por lo menos una subsucesión monotónica de longitud  $k$ , que además es una subsucesión monotónica de  $S$ . Y finalmente, como cada subsucesión monotónica de  $S$ , de longitud  $k$ , es subsucesión de  $\binom{n-k}{m-k}$  elementos de  $D$ , entonces  $S$  contiene al menos  $\binom{n}{m} / \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{k} / \binom{m}{k}$  distintas subsucesiones monotónicas.  $\square$

## 3.2. Sucesiones unimodales

Ahora imaginemos el dibujo de una parábola en el plano cartesiano, y construimos una sucesión eligiendo, de izquierda a derecha, la coordenada  $y$  de un número finito de puntos de esta función. Si lo hicimos bien, obtendremos una sucesión con un elemento en particular, tal que todos los datos a su izquierda están organizados de forma creciente y a su derecha, de forma decreciente, o viceversa; a una sucesión de este tipo la catalogaremos como antiunimodal o unimodal, respectivamente. Una subsucesión unimodal podría verse como:

$$[1, \pi, 4, -2] \subset [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2]$$

y antiunimodal:

$$[1, -2, 0, 4] \subset [1, -2, \pi, 0, -3, 4, -2].$$

Una buena pregunta es: ¿si tuviésemos una sucesión  $S$  de  $\mathbb{R}$ , cuál sería la subsucesión unimodal (o antiunimodal)  $T \subset S$  de mayor longitud?

**Definición 3.2.1** (Sucesión unimodal). Sea  $S = [s_1, \dots, s_n]$  una sucesión de  $\mathbb{R}$ , diremos que  $S$  es unimodal (antiunimodal) si y sólo si existe  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , tal que  $s_1 < \dots < s_{m-1} < s_m > s_{m+1} > \dots > s_n$  ( $s_1 > \dots > s_{m-1} > s_m < s_{m+1} < \dots < s_n$ ).

### 3.2.1. La subsucesión unimodal más larga

La idea es igual que en muchos otros problemas, lo que se pretende es probar que en cualquier sucesión en  $\mathbb{R}$  de cierta longitud  $n$ , podremos encontrar una subsucesión unimodal de un tamaño predeterminado, en función de  $n$ . El teorema (demostrado por Urrutia y Sakai en [5]) se enuncia de manera simple, sin embargo tiene una prueba de mucha complejidad, habrá que tener paciencia.

**Teorema 3.2.1.** Sea  $n$  un entero positivo, entonces cualquier sucesión de  $n$  números reales distintos contiene una subsucesión unimodal o antiunimodal con una longitud de al menos  $\lceil \sqrt{3n-3}/4 - 1/2 \rceil$ .

La demostración está dividida en tres partes. En la primera elegimos todas las subsucesiones que nos interesan y las expresamos en términos de su longitud. Suponemos que las longitudes de las subsucesiones crecientes, decrecientes y antiunimodales son menores que  $m = \lceil \sqrt{3n - 3/4} - 1/2 \rceil$ , para mostrar que esto implica la existencia una subsucesión unimodal con longitud mayor que  $m$ .

En la segunda parte intersecamos el conjunto de las sucesiones unimodales con el conjunto de todas las posibles sucesiones que tuvieran longitud menor que  $m$ . Dividimos el resultado en dos subconjuntos independientes. Y calculamos la cardinalidad del primero.

En la tercera parte, calculamos la cardinalidad del segundo subconjunto creando un mapeo inyectivo hacia un conjunto del cual conocemos su tamaño. Y finalmente mostramos que la suma de las cardinalidades de ambos conjuntos es menor que la cardinalidad del conjunto de sucesiones unimodales.

### Demostración, primera parte

Sea  $S = [s_1, \dots, s_n]$  una sucesión de  $n$  reales distintos, y sea  $m = \lceil \sqrt{3n - 3/4} - 1/2 \rceil$ . Como  $0 \leq m - 1 < \sqrt{3n - 3/4} - 1/2$ , tenemos que  $(m - 1/2)^2 < 3n - 3/4$ , por lo cual:

$$n > \frac{m^2 - m + 1}{3}. \quad (3.1)$$

Para cada  $1 \leq i \leq n$  denotaremos como:

$a_i$  a la longitud de la subsucesión *creciente* más larga que *termina* en  $s_i$ ,  
 $b_i$  a la longitud de la subsucesión *decreciente* más larga que *empieza* en  $s_i$ ,  
 $c_i$  a la longitud de la subsucesión *decreciente* más larga que *termina* en  $s_i$  y  
 $d_i$  a la longitud de la subsucesión *creciente* más larga que *empieza* en  $s_i$ .

Con esto podemos decir que  $a_i + b_i - 1$ ,  $a_i + d_i - 1$ ,  $c_i + b_i - 1$  y  $c_i + d_i - 1$  son las longitudes de las subsucesiones de  $S$  (unimodales, crecientes, decrecientes y antiunimodales respectivamente) más largas que contienen a  $s_i$ .

Vamos a suponer que todas las que corresponden a subsucesiones crecientes, decrecientes y antiunimodales son menores que  $m$ :

$$\forall i \ a_i + d_i - 1, \ c_i + b_i - 1, \ c_i + d_i - 1 < m \quad (3.2)$$

para mostrar que existe por lo menos una subsucesión unimodal que tiene longitud mayor o igual que  $m$ :

$$\exists j \text{ tal que } a_j + b_j - 1 \geq m. \quad (3.3)$$

Es fácil ver que se cumple el siguiente lema.

**Lema 3.2.1.1.** *Sean  $i$  y  $j$  enteros tales que  $1 \leq i < j \leq n$  entonces:*

1. Si  $s_i < s_j$ , entonces  $a_i < a_j$  y  $d_i > d_j$ .
2. Si  $s_i > s_j$ , entonces  $b_i > b_j$  y  $c_i < c_j$ .

Lo cual implica que no hay dos subsucesiones unimodales o dos antiunimodales con la misma longitud:

$$\begin{aligned} \text{si } i &\neq j \text{ entonces} & (3.4) \\ (a_i, b_i) &\neq (a_j, b_j), \\ (c_i, d_i) &\neq (c_j, d_j), \end{aligned}$$

pero además se cumple que:

$$(a_i, c_i) \neq (a_j, c_j).$$

### Demostración, segunda parte

Llamaremos  $Q$  al conjunto de las longitudes de las subsucesiones unimodales definidas anteriormente, pero vistas como puntos, en los cuales la primera coordenada corresponde a la longitud de la parte creciente, y la segunda coordenada, a la parte decreciente:

$$Q = \{(a_i, b_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Y sea  $T$  el conjunto de los puntos con coordenadas enteras positivas tales que la suma de éstas es a lo más  $m$ :

$$T = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } a + b \leq m\}.$$

En (3.4) vemos que, de las subsucesiones unimodales que estamos considerando, no hay dos con el mismo tamaño, lo cual implica que  $|Q| = n$ .

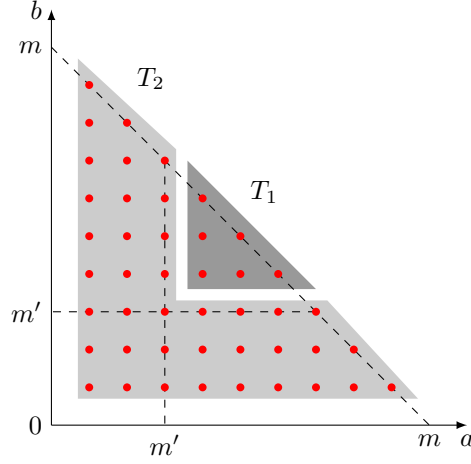
Ahora veamos qué ocurre al intersecar  $Q$  con  $T$ . Obtenemos el conjunto de todas las subsucesiones unimodales que tienen una longitud menor que  $m$ . Si la cardinalidad de esta intersección fuera exactamente  $n$ , estaríamos en problemas, pues significaría que todas las subsucesiones unimodales tienen longitud menor que  $m$ .

No obstante, eso no ocurre. Veremos que  $|Q \cap T| < n$ , lo que implica que hay por lo menos una subsucesión unimodal que no ha sido considerada en la intersección, lo que prueba (3.3).

Sea  $m' = \lfloor (m+1)/3 \rfloor$ . Dividamos  $T$  en dos subconjuntos  $T_1 = T \cap \{(a, b) : a, b \geq m' + 1\}$  y  $T_2 = T - T_1$  (ahora es cuando debes observar la figura 3.1). Como  $|Q \cap T| = |Q \cap T_1| + |Q \cap T_2|$ , entonces calcularemos lo de la derecha. Observa que:

$$\begin{aligned} |Q \cap T_1| &\leq |T_1| & (3.5) \\ &= 1 + 2 + \cdots + (m - 2m' - 1) \\ &= \frac{(m - 2m')(m - 2m' - 1)}{2}. \end{aligned}$$



Figura 3.1:  $T_1$  y  $T_2$ .**Demostración, tercera parte**

Ahora empieza la parte divertida, vamos a calcular el valor de  $|Q \cap T_2|$ .

**Lema 3.2.1.2.**  $|Q \cap T_2| \leq (m-1) + (m-2) + \dots + (m-m') = (2m-m'-1)m'/2$ .

*Demostración.* Sea  $I = \{i : (a_i, b_i) \in Q \cap T_2\}$ , y para cada  $i \in I$  sea  $c'_i = \max\{c_i, m - b_i - d_i + 1\}$  y  $d'_i = \max\{d_i, m - a_i - c_i + 1\}$ . Usaremos el siguiente mapeo  $f : Q \cap T_2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$f(a_i, b_i) = \begin{cases} (c_i, d'_i) & \text{si } a_i \leq b_i \\ (c'_i, d_i) & \text{si } a_i > b_i. \end{cases} \quad (3.6)$$

**Observación 1.** Podemos interpretar a  $f$  como una composición de dos mapeos  $h \circ g$ . El primero,  $g$ , envía el punto  $(a_i, b_i)$ , con  $a_i \leq b_i$ , al punto  $(c_i, d_i)$ . Si  $(c_i, d_i)$  está por arriba de la recta  $c + d = m - a_i + 1$ , entonces el mapeo  $h$  deja intacto a  $(c_i, d_i)$ , en caso contrario, sube  $(c_i, d_i)$  al punto, sobre la recta  $c + d = m - a_i + 1$ , que tenga como abscisa  $c_i$ . De igual forma,  $g$  mapea el punto  $(a_i, b_i)$ , con  $a_i > b_i$ , hacia  $(c_i, d_i)$  y  $h$  no lo toca si está arriba de la recta  $c + d = m - b_i + 1$ , de lo contrario lo recorre hasta el punto sobre la recta  $c + d = m - b_i + 1$  con ordenada  $d_i$ .

Por (3.4) podemos decir que hay una biyección entre los elementos de  $Q \cap T_2$  y los elementos de  $I$ , entonces, para simplificar la notación, nos referiremos a  $f(a_i, b_i)$  como  $f(i)$ .

Ahora vamos a mostrar que  $f$  es un mapeo inyectivo de  $Q \cap T_2$  al conjunto  $S = \{(c, d) \mid c, d \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } m - m' + 1 \leq c + d \leq m\}$ . Antes observa que la cardinalidad de  $S$  es  $(m-1) + (m-2) + \dots + (m-m') = (2m-m'-1)m'/2$ , con lo cual podremos concluir que  $|Q \cap T_2| \leq |S| = (2m-m'-1)m'/2$ .

**Afirmación 1.**  $f$  es un mapeo hacia  $S$ .

*Demostración.* Por la observación 1, podemos ver que  $f(i) \in \{(x, y) | x + y \geq m + 1 - a_i\}$  si  $a_i \leq b_i$ , y  $f(i) \in \{(x, y) | x + y \geq m + 1 - b_i\}$  si  $a_i > b_i$ . Además, como  $(a_i, b_i) \in T_2$  tenemos que  $\min\{a_i, b_i\} \leq m'$ , y como consecuencia  $f(i) \in \{(x, y) | x + y \geq m + 1 - m'\}$ . Finalmente, ya que  $c_i$  y  $d_i$  son enteros positivos tales que  $c_i + d_i \leq m$ , por (3.2), obtenemos entonces que  $f(i) \in S$ .  $\square$

**Afirmación 2.**  $f$  es un mapeo inyectivo.

*Demostración.* Supongamos que

$$f(i) = f(j). \quad (3.7)$$

Si  $f(i) = (c_i, d_i)$  y  $f(j) = (c_j, d_j)$  entonces, por (3.4),  $i = j$ . Ahora vamos a considerar el siguiente caso:

$$f(i) = (c_i, m - a_i - c_i + 1) \text{ con } m - a_i - c_i + 1 > d. \quad (3.8)$$

En este caso, por la definición de  $f$  tenemos:

$$a_i \leq b_i. \quad (3.9)$$

**Caso 1.**  $f(j) = (c_j, m - a_j - c_j + 1)$ : En este caso tenemos  $c_i = c_j$  y  $m - a_i - c_i + 1 = m - a_j - c_j + 1$ , por (3.7), por lo cual  $c_i = c_j$  y  $a_i = a_j$  y por lo tanto  $i = j$  por (3.4).

**Caso 2.**  $f(j) = (c_j, d_j)$ : Aquí tenemos:

$$c_i = c_j \text{ y } d_i < m - a_i - c_i + 1 = d_j. \quad (3.10)$$

por (3.7) y (3.8). Entonces como  $c_i = c_j$  y  $d_i < d_j$ , por el lema 3.2.1.1  $a_i > a_j$  y por (3.10)

$$d_j = m - a_i - c_i + 1 < m - a_j - c_j + 1, \quad (3.11)$$

por lo cual, la suposición del caso 2 implica que  $a_j > b_j$  y  $c_j \geq m - b_j - d_j + 1$ , lo que contradice (3.11).

**Caso 3.**  $f(j) = (m - b_j - d_j + 1, d_j)$  y  $m - b_j - d_j + 1 > m$ : En este caso, por la definición de  $f$

$$a_j > b_j \quad (3.12)$$

además, por (3.7) y (3.8)

$$c_i = m - b_j - d_j + 1 > c_j \text{ y } d_i < m - a_i - c_i + 1 = d_j. \quad (3.13)$$

Ahora, por (3.13),  $c_j > c_j$  y  $d_i < d_j$ , y por el lema 3.2.1.1

$$a_i > a_j \text{ o } b_i < b_j. \quad (3.14)$$

De otra forma, como  $c_i + d_j = m - b_j + 1 = m - a_i + 1$ , por (3.13), tenemos que  $a_i = b_j$ . Por lo tanto  $b_i \geq b_j$  y  $a_i < a_j$  por (3.9) y (3.12), pero esto contradice (3.14).

Los casos restantes se tratan esencialmente igual que los anteriores, con lo cual concluimos que  $f$  es inyectiva.  $\square$

Por lo tanto  $|Q \cap T_2| \leq (2m - m' - 1)m'/2$ .  $\square$

Y finalmente, por (3.1), (3.5) y el lema 3.2.1.2 tenemos:

$$\begin{aligned} |Q \cap T| &= |Q \cap T_1| + |Q \cap T_2| \\ &\leq \frac{(m - 2m')(m - 2m' - 1)}{2} + \frac{(2m - m' - 1)m'}{2} \\ &\leq \frac{m^2 - m + 1}{3} \\ &< n, \end{aligned}$$

por lo cual el teorema queda demostrado.

### 3.3. El peso de una sucesión

Ya molestamos a las longitudes, ahora les toca a los pesos: el peso de una sucesión en  $\mathbb{R}$  será la suma de sus elementos. De ahora en adelante, llamaremos  $S_n$  al conjunto de sucesiones  $S$  de los enteros  $\{1, \dots, n\}$ , de longitud  $n$  tales que sus elementos son diferentes dos a dos. En otras palabras, es posible ver cualquier elemento de  $S_n$  como una permutación de  $\{1, \dots, n\}$ .

**Definición 3.3.1** (Peso de una sucesión). Sea  $S = [s_0, \dots, s_{n-1}]$  en  $\mathbb{R}$ . Diremos que el peso de la sucesión  $S$  es  $w(S) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_i)$ .

**Definición 3.3.2** ( $S_n$ ). Sea  $n > 0$ . Llamaremos  $S_n$  al conjunto de sucesiones de  $\{1, \dots, n\}$ , tales que si  $S = [s_0, \dots, s_{m-1}] \in S_n$ , entonces  $m = n$  y además,  $s_i \neq s_j$  para  $i \neq j$ .

#### 3.3.1. La subsucesión monotónica más pesada

Ahora vamos a ver cómo Urrutia y Sakai obtuvieron una cota inferior para el máximo peso garantizable de una subsucesión (también puedes consultarlo en [6]).

**Teorema 3.3.1.** *Cualquier sucesión  $S \in S_n$  contiene una subsucesión monotónica de peso mayor que  $n\sqrt{n}/3$ . La cota es asintóticamente justa.*

*Demostración.* Para empezar requerimos la definición siguiente.

**Definición 3.3.3** (El punto asociado). Sea  $S = [s_0, \dots, s_{n-1}] \in S_n$ . Asociaremos a  $s_i$  el punto  $(x_i, y_i)$  tal que  $x_i$  es el máximo de los pesos de todas las subsucesiones crecientes de  $S$  que terminan en  $s_i$ , y  $y_i$  el máximo de los pesos de todas las subsucesiones decrecientes que terminan en  $s_i$ .

Sea  $S = [s_0, \dots, s_{n-1}] \in S_n$ , vamos a asociar a cada  $s_i$  el cuadrado  $C(i)$  cuyo vértice superior derecho es el punto  $(x_i, y_i)$  y su vértice inferior izquierdo, el punto  $(x_i - s_i, y_i - s_i)$ .

Ahora vamos a probar que si  $i \neq j$  entonces  $C(i)$  y  $C(j)$  tienen interiores disjuntos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $i < j$ , surgen dos casos. Primero supongamos que  $s_i < s_j$ . Entonces  $x_i < x_j - s_j$  y  $C(i)$  se encuentra a la izquierda de la recta vertical  $x = x_j - s_j$ . Si  $y_j \leq y_i - s_i$  entonces  $C(j)$  se encuentra por debajo de la recta horizontal  $y = y_i - s_i$ . Así, en ambos casos  $C(i)$  y  $C(j)$  tienen interiores disjuntos.

Sea  $\mathcal{C}$  un cuadrado cuyo vértice inferior izquierdo es el origen y su vértice superior derecho, el punto  $(\alpha, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es el máximo de todos los valores  $x_i$  y  $y_i$ . Como  $\mathcal{C}$  contiene todos los cuadrados  $C(i)$  con  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , entonces su área mide al menos:

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 > \frac{n^3}{3}$$

y así

$$\alpha > n\sqrt{\frac{n}{3}}$$

Por lo tanto, para alguna  $i$ ,  $x_i$  o  $y_i$  es mayor que  $n\sqrt{n/3}$ .

Para ver que la cota es asintóticamente justa haremos lo siguiente. Sean  $k = \sqrt[4]{4n^3/3}$  y  $m = \sqrt{3n}/2$ . Considera la permutación  $\Pi$  generada como sigue:

$$\begin{aligned} & [k], [k] - 1, \dots, 1, \\ & [\sqrt{2}k], [\sqrt{2}k] - 1, \dots, [k] + 1, \\ & [\sqrt{3}k], [\sqrt{3}k] - 1, \dots, [\sqrt{2}k] + 1, \\ & \vdots \\ & n, n - 1, \dots, [\sqrt{m-1}k] + 1. \end{aligned}$$

La permutación  $\Pi$  consiste de  $m$  bloques de enteros decrecientes tales que la suma de sus elementos es  $n\sqrt{n/3} + o(n)$ . Por otra parte, la subsucesión creciente de  $\Pi$  de mayor peso es la que contiene los elementos  $[k], [\sqrt{2}k], [\sqrt{3}k], \dots, n$ , misma que tiene un peso de  $n\sqrt{n/3} + O(n)$ , de lo que se sigue el resultado.  $\square$

### 3.3.2. La subsucesión unimodal más pesada

¿Qué pasaría si imponemos una restricción más? Digamos que la subsucesión tenga que ser unimodal. Jorge y Toshinori tienen la respuesta (publicada en [6]):

**Teorema 3.3.2.** *Cualquier sucesión  $S \in S_n$  contiene una subsucesión unimodal de peso mayor que  $n\sqrt{2n/3} - n$ .*

*Demostración.* Sea  $S = [s_0, \dots, s_{n-1}] \in S_n$ . Primero asociaremos cada  $s_i$  a su respectivo cuadrado  $C(i)$  como hicimos anteriormente, nota que para cada  $i$ ,  $x_i + y_i - s_i$  es la longitud de una subsucesión unimodal que contiene a  $s_i$ .

Como  $s_i \leq n$ , entonces hay una subsucesión unimodal de  $S$  que pesa al menos  $\max\{x_i + y_i\} - n$ . Sea  $l(r)$  una recta tal que cualquier punto  $(x, y) \in l(r)$ , cumple que  $x + y - n = r$ . El área del triángulo  $T(r)$  acotado por  $l(r)$ , el eje  $x$  y el eje  $y$  es  $(n+r)^2/2$ . Considere ahora el máximo  $r$  tal que  $l(r)$  pasa sobre un elemento de  $\{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ . Para esta  $r$ , todos los  $C(i)$  están por debajo de  $l(r)$ , por lo cual el área de  $T(r)$  es al menos:

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 > \frac{n^3}{3}$$

y en consecuencia:

$$\frac{(n+r)^2}{2} > \frac{n^3}{3}, \text{ y así } r > n\sqrt{\frac{2n}{3}} - n.$$

Y el resultado es inmediato. □

## Capítulo 4

# Puntos ponderados

“¿Lo crearás, Ariadna? –dijo Teseo–. El Minotauro apenas se defendió.”

---

Jorge Luis Borges

¿Ya notaste que hay unas estrellas más grandes que otras? Si no lo has hecho, espera aquí hasta que lo hagas. Yo apostaría a que ni siquiera hay dos del mismo tamaño. Ese será el nuevo condimento para los problemas de este capítulo. En otras palabras, cada punto  $p$  no sólo quedará representado por su posición, sino también por un valor real extra  $w(p)$  denominado *peso*.

**Definición 4.0.4** (Conjunto de puntos ponderado). *Llamaremos conjunto de puntos ponderado a un conjunto de puntos  $T = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$  tal que cada uno de sus elementos  $p_i$  tiene asignado un número real  $w(p_i)$ , se dirá que  $w(p_i)$  es el peso de  $p_i$ .*

Entonces, miremos nuestro conjunto ponderado  $T$  de  $n$  puntos, sí, cada elemento tiene un valor extra, no obstante sigue siendo un punto, por lo cual podemos dibujar todas las figuras que hicimos anteriormente.

### 4.1. Caminos monotónicos

Imagina una poligonal simple  $W$  con  $k$  elementos de  $T$ . Digamos que la sucesión  $S = [p_0, \dots, p_{k-1}]$  induce a  $W$ . Observa la sucesión en la cual el  $i$ -ésimo elemento es el peso del  $i$ -ésimo elemento de  $S$ . Esta se vería así  $S' = [w(p_0), \dots, w(p_{k-1})]$ .

**Definición 4.1.1** (Camino monotónico). *Sea  $T$  un conjunto de puntos ponderado, sea  $W$  una poligonal simple en  $T$ . Diremos que  $W$  es un camino monotónico si existe una sucesión  $S = [p_{i_0}, \dots, p_{i_{k-1}}]$  que induce a  $W$  tal que  $[w(p_{i_0}), \dots, w(p_{i_{k-1}})]$  es monotónica (figura 4.4).*

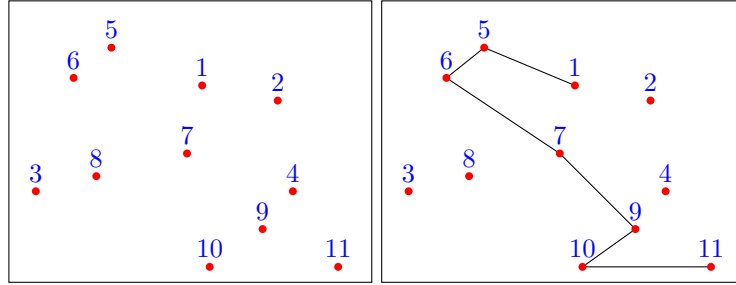


Figura 4.1: Ejemplo de un camino monotónico.

El objetivo general de este capítulo es ampliar nuestros horizontes. Si recuerdas, en el capítulo anterior, estudiamos algunos resultados actuales sobre sucesiones, entre ellas, la máxima longitud “garantizable” de subsucesiones monotónicas y unimodales.

Ahora, en el plano, interpretaremos a las sucesiones de reales como caminos, las sucesiones monotónicas como caminos monotónicos, etc. Así Toshinori Sakai y Jorge Urrutia aprovecharán las particularidades de algunos conjuntos de puntos (por ejemplo convexidad), para conseguir cotas más justas.

Cuando un conjunto de puntos está en posición convexa, es posible encontrar una sucesión con mayor peso en comparación con las que hemos construido anteriormente. Únicamente hay que dibujar el cierre convexo y tomar alguna de las sucesiones que inducen su frontera (la figura 4.2 es un ejemplo).

En este resultado, J. Urrutia y T. Sakai dan una cota inferior para la longitud del camino monotónico más largo, pero suponiendo que el conjunto está en posición convexa (puedes verlo en [5]).

**Teorema 4.1.1.** *Cualquier conjunto ponderado de  $n$  puntos en posición convexa contiene un camino monotónico con una longitud de al menos  $\lceil \sqrt{3n} - 3/4 - 1/2 \rceil$ .*

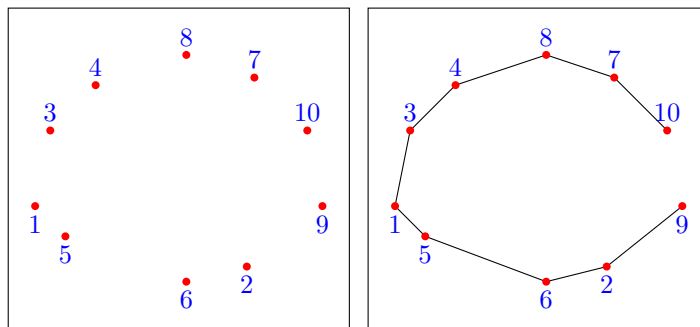


Figura 4.2: La sucesión  $[3, 1, 5, 6, 2, 9, 4, 7, 8, 10]$  aprovecha la convexidad del conjunto.

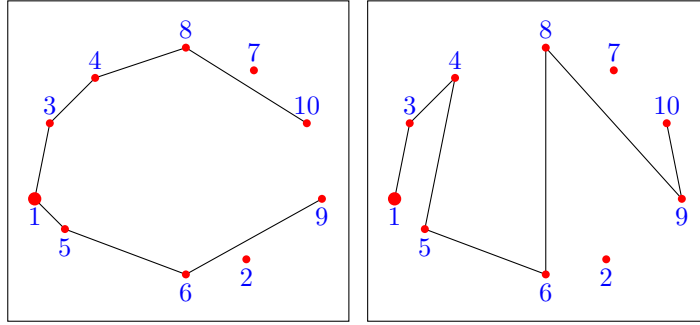


Figura 4.3: Construyendo un camino monotónico sobre un conjunto en posición convexa, partiendo de una sucesión unimodal.

*Demostración.* Sea  $T$  un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa, digamos que sus elementos  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$  están nombrados conforme las manecillas del reloj, a lo largo del cierre convexo.

Sea  $T' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\}$  un subconjunto de  $T$  con  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  tal que la sucesión  $[w(p_{i_1}), w(p_{i_2}), \dots, w(p_{i_k})]$  es unimodal o antiunimodal. Observa que la poligonal que conecta los puntos de  $T'$ , en orden creciente con respecto a sus pesos, es un camino monotónico (Observa la figura 4.3 y deduce que, en ningún caso, el camino tendrá cruces).

Pero, por el teorema 3.2.1, vemos que existe esa sucesión con  $\lceil k = \sqrt{3n - 3/4} - 1/2 \rceil$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

En alguna parte de esta historia hablamos sobre la hazaña de calcular el peso de una sucesión, no era más que la suma de los elementos. Naturalmente, al igual que la longitud, la definición del *peso de un camino* no es menos intuitiva.

**Definición 4.1.2** (Peso de un camino). *Sea  $S = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  una sucesión sobre un conjunto ponderado  $T$ . Sea  $W$  el camino inducido por  $S$ . Diremos que el peso de  $W$  es la suma de los pesos de sus vértices  $\sum_{i=0}^{n-1} w(p_i)$ .*

Hay que recordar que, para poder trabajar con el peso total de una sucesión, había que restringir el peso de cada elemento al conjunto de los naturales. De la misma forma, en este caso, si tenemos un camino de  $n$  vértices, diremos que cada uno tendrá un peso distinto en  $\{1, \dots, n\}$ . Veremos cómo Urrutia y Sakai, en [6], obtienen una cota máxima garantizable, para el peso de cualquier camino monotónico sin cruces.

**Teorema 4.1.2.** *Cualquier conjunto  $T$  de  $n$  puntos con distintos pesos en  $\{1, \dots, n\}$  tiene un camino monotónico sin cruces de peso mayor que  $n\sqrt{n/3}$*

*Demostración.* Usaremos la poligonal simple que construimos al principio del trabajo; aquella que ordena los puntos de izquierda a derecha. Tomemos la sucesión correspondiente  $S = [p_0, \dots, p_{n-1}]$  con  $p_i \in T$ . Sea  $\Pi = [w(p_0), \dots, w(p_{n-1})]$ . Recordemos que, por el teorema 3.3.1,  $\Pi$  tiene una subsucesión monotónica de



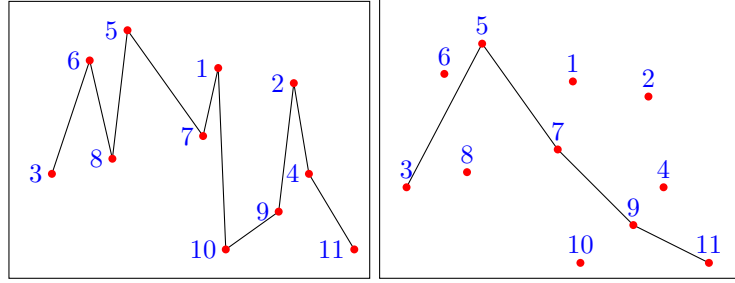


Figura 4.4: Camino monótonico construido a partir de la poligonal básica. Su peso es  $35 > 22 > 11\sqrt{\frac{11}{3}}$ .

peso mayor que  $n\sqrt{\frac{n}{3}}$ . Esta subsucesión induce un camino monótonico en  $T$ , cuyo peso es mayor que  $n\sqrt{\frac{n}{3}}$  (Observa la figura 4.4).  $\square$

Resulta que Urrutia y Sakai (en [6]) consiguieron un mejor resultado que el anterior si, en lugar de tomar cualquier conjunto, tomaban uno que estuviera en posición convexa. Esto se obtuvo a partir de una clara aplicación de uno de los teoremas vistos anteriormente.

**Teorema 4.1.3.** *Cualquier conjunto de  $n$  puntos con distintos pesos en  $\{1, \dots, n\}$ , en posición convexa, tiene un camino monótonico de peso mayor que  $n\sqrt{2n/3} - n$ .*

*Demostración.* La prueba es inmediata. Si tenemos un conjunto  $T$  en posición convexa y construimos una sucesión  $S = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  en la que los puntos están ordenados con respecto a la dirección de las manecillas de reloj, sobre el cierre convexo. Por el teorema 3.3.2 vemos que hay una subsucesión  $S' \subset S$  de peso mayor que  $n\sqrt{2n/3} - n$ , la cual induce un camino monótonico con la misma longitud (figura 4.5).  $\square$

## 4.2. Polígonos monótonicos

El caso es parecido a cuando, en lugar de hablar de caminos, preferimos hablar de polígonos simples. Diremos que un polígono simple será monótonico si existe alguna sucesión  $S$  que lo induce, misma que la sucesión de sus pesos es monótonica.

Nota que si un polígono  $R$  queda determinado por una sucesión  $[p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$  también es determinado por la sucesión  $[p_1, \dots, p_{n-1}, p_0]$ , pero si  $[w(p_0), \dots, w(p_{n-1})]$  fuera monótonica entonces  $[w(p_1), \dots, w(p_{n-1}), w(p_0)]$  dejaría de serlo.

**Definición 4.2.1** (Polígono monótonico). *Sea  $T$  un conjunto finito de puntos,  $W = [p_0, \dots, p_{n-1}]$  una sucesión de  $T$  tal que el polígono  $R$  inducido por  $W$  es*

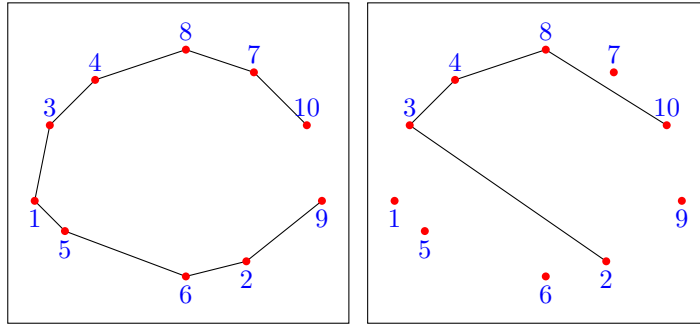


Figura 4.5: Camino monotónico en un conjunto en p. convexa de peso  $27 > 10\sqrt{20/3} - 10$ .

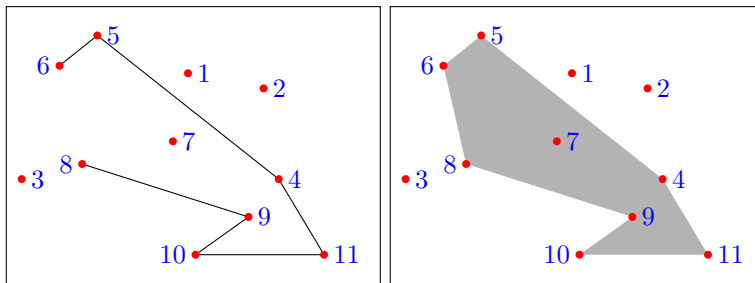


Figura 4.6: Un camino monotónico y el polígono monotónico que éste induce.

*simple. Diremos que  $R$  es monotónico si  $[w(p_0), \dots, w(p_{n-1})]$  es una sucesión unimodal o antiunimodal (ver figura 4.6).*

Ahora veamos cómo obtienen, Sakai y Jorge (en [5]), el mínimo número de vértices que debe tener el polígono monotónico con más vértices, en un conjunto de puntos en posición convexa.

**Teorema 4.2.1.** *Cualquier conjunto  $T$  de  $n \geq 2$  puntos en posición convexa, contiene un polígono monotónico con al menos  $\lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 2$  vértices. Esta cota es justa.*

*Demostración.* Nombremos los elementos de  $T$  como  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$  a lo largo de su cierre convexo y empezando desde el elemento con mayor peso  $p_0$ . Si ignoramos a éste, por el Teorema 3.3.1, la sucesión  $[w(p_1), \dots, w(p_{n-1})]$  tiene al menos una subsucesión monotónica  $[w(p_{i_1}), w(p_{i_2}), \dots, w(p_{i_k})]$  con  $k = \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$ . Como consecuencia podemos asegurar que la sucesión  $[w(p_0), w(p_{i_1}), w(p_{i_2}), \dots, w(p_{i_k})]$  es creciente o decreciente y por lo tanto el polígono formado por ella contiene  $k + 1 = \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 2$  vértices.

Para ver que esta cota es justa hay que notar que para cualquier entero positivo  $m$ , existe un conjunto convexo  $T$ , de  $m^2 + 1$  elementos, tal que todo

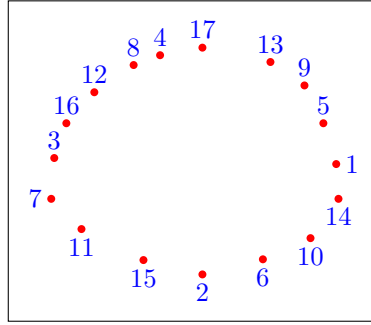


Figura 4.7: Cualquier polígono monotónico tiene a lo más  $\sqrt{17-2} + 2 = 5$  puntos.

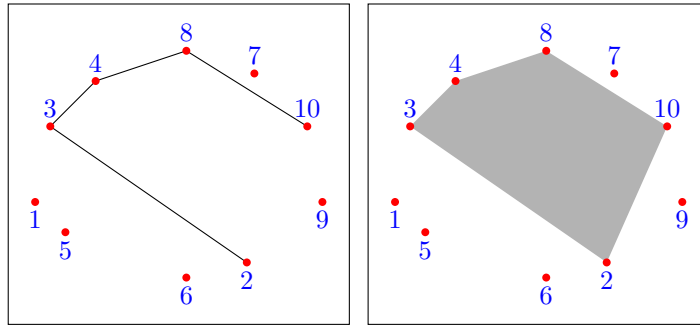


Figura 4.8: Polígono monotónico en un conjunto en posición convexa y el camino que lo induce.

polígono monotónico, con vértices en  $T$ , tiene a lo más  $m+1$  vértices. En la figura 4.7 (ver figura 4.7) se muestra como un conjunto de  $17 = 4^2 + 1$  elementos, en el cual todo polígono monotónico tiene a lo más  $5 = 4+1$  vértices. Tal construcción se puede generalizar fácilmente a conjuntos con  $n^2 + 1$  puntos con  $n > 2$ .

□

### 4.2.1. Polígonos monotónicos convexos

En orden de restricciones, después de los polígonos simples, se encuentran los polígonos convexos. En el siguiente teorema (publicado en [5]) Urrutia y Sakai nos mostraron cuál es el máximo polígono (con respecto a su número de vértices) monotónico convexo que se puede garantizar en cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición general (En la figura 4.8 encontrarás un bonito ejemplo).

**Notación 2.** Llamaremos  $c(k)$  al mínimo número tal que cualquier conjunto de puntos  $T$ , con esa cantidad de elementos, contenga  $k$  en posición convexa.

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $m = (c(k) - 1)^2 + 1$  con  $k \geq 3$ , y sea  $T$  un conjunto de  $m$  puntos, entonces  $T$  contiene un  $k$ -gono monotónico convexo.*

*Demostración.* Vamos a formar una sucesión  $S = [w(p_0), \dots, w(p_{m-1})]$  donde los  $p_i$  son todos los elementos de  $T$  ordenados de tal forma que la  $x$  de  $p_j$  es menor que la de  $p_k$  si  $j < k$ , para fines prácticos supondremos que todas éstas son diferentes. Por el teorema 2.3.3 podemos afirmar que  $S$  contiene una subsucesión monotónica  $S'$  de longitud:

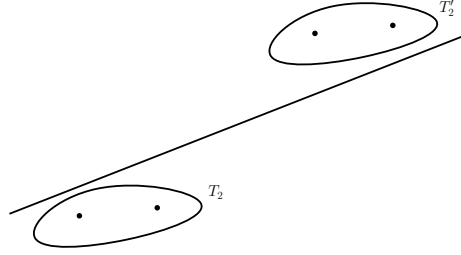
$$\begin{aligned} \lfloor \sqrt{m-1} \rfloor + 1 &= \lfloor \sqrt{((c(k) - 1)^2 + 1) - 1} \rfloor + 1 \\ &= \lfloor \sqrt{(c(k) - 1)^2} \rfloor + 1 \\ &= \lfloor (c(k) - 1) \rfloor + 1 \\ &= c(k) \end{aligned}$$

Sea  $Q \subseteq T$  el subconjunto de los puntos cuyos pesos aparecen en  $S'$ . Como  $|Q| = c(k)$ ,  $Q$  contiene una  $k$ -taza o un  $k$ -gorro tal que sus elementos conforman el conjunto de vértices de un camino monotónico. Al conectar los extremos de este camino obtenemos un polígono monotónico convexo.

Para mostrar que la cota es justa vamos a construir un conjunto de puntos con  $2^k$  elementos que no contenga  $2k + 1$  puntos en posición convexa. Sean  $s_0 < \dots < s_{k-1}$   $k$  pendientes positivas con  $s_0 > 0$ . Definamos los conjuntos  $T_i$  de la siguiente manera:

1.  $T_0$  contiene los puntos  $(0, 0)$  y  $(a, b)$  tales que distan, entre sí, una unidad y además la pendiente del segmento que los une es  $s_0$ .
2.  $T_{i+1}$  será construido a partir de  $T_i$ . Sea  $T'_i$  el conjunto de puntos obtenidos al trasladar  $T_i$  una distancia  $d_i$  ( $d_i$  lo suficientemente grande) en la dirección  $s_{i+1}$ , de tal manera que la pendiente de cualquier segmento de recta que conecte un elemento de  $T_i$  con otro de  $T'_i$ , está contenida a una  $\varepsilon$  de  $s_{i+1}$  ( $\varepsilon$  lo suficientemente pequeña), tal que los intervalos  $[s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon]$  son disjuntos por pares y muy pequeños. Diremos que  $T_{i+1} = T_i \cup T'_i$ . (Observa la figura 4.9).

Es fácil ver que  $T_k$  no contiene ningún conjunto de puntos en posición convexa con más de  $2k$  elementos. Para verlo hay que notar que cualquier polígono convexo con todos sus vértices en  $T$  contiene a lo más dos aristas con pendientes en  $[s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon]$ . Asignando los pesos  $1, 2, \dots, 2^k$  a los elementos de  $T_k$  de tal forma que si la recta horizontal a la altura de  $q$  se encuentra por encima de un punto  $p$  (con  $p, q \in T_k$ ), entonces  $w(p) < w(q)$ . Ahora observa que un polígono monotónico convexo  $\mathcal{R}$  contenido en  $T_k$  no contiene dos aristas disjuntas con pendientes dentro de alguno de los intervalos  $[s_i - \varepsilon, s_i + \varepsilon]$ , de esto se sigue que  $\mathcal{R}$  contiene a lo más  $k + 1$  vértices.  $\square$

Figura 4.9:  $T_k$  con  $k = 3$ 

### 4.2.2. ¿Cuántos polígonos monotónicos ves?

Hagamos algo diferente. Supongamos que  $T$  está en posición convexa, al tomar cualesquiera  $k \leq n$  de sus elementos, definimos un subconjunto también en posición convexa, esto a su vez define un único polígono convexo. Si tenemos el suficiente cuidado, podríamos elegir estos puntos de manera que el polígono formado sea monotónico. Vamos a ver cuántos de estos polígonos pudieron encontrar Toshinori y Jorge (en [5]).

**Notación 3.** Sea  $T$  un conjunto ponderado de  $n$  puntos. Llamaremos  $M_k(T)$  al número de  $k$ -gonos monotónicos distintos que contiene  $T$ .

**Teorema 4.2.3.** Sea  $n \geq (k-2)^2 + 2$  con  $k \geq 3$  y  $T$  un conjunto ponderado de  $n$  puntos en posición convexa, entonces  $M_k(T) \geq \frac{\binom{n}{k}}{\binom{k^2-4k+5}{k-1}} - O(k)$ .

*Demostración.* Etiquetemos los elementos de  $T$  como  $p_0, \dots, p_{n-1}$  a partir de cualquier punto al rededor del cierre convexo. Sea  $i$  un entero tal que  $1 \leq i \leq n - [(k-2)^2 + 1]$ , y supongamos que los pesos de los elementos de  $T$  son los enteros  $1, \dots, n$ . Sea  $p_j \in T$  tal que  $w(p_j) = i$  y considera la sucesión  $S_i = [w(p_j), w(p_{j+1}), \dots, w(p_{j+n-1})]$ , donde los índices son tomados módulo  $n$ . Denotaremos como  $S'_i$  a la subsucesión de  $S_i$  que contiene los elementos de  $S_i$  mayores que  $i$ . Entonces  $S'_i$  tiene  $n - i \geq (k-i)^2 + 1$  términos. Del lema 3.1.0.4 y de la identidad  $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$  para enteros  $m > k \geq 1$ , tenemos que  $S'_i$  contiene al menos

$$\frac{\binom{n-i}{k-1}}{\binom{(k-2)^2+1}{k-1}} = \frac{\binom{n-i+1}{k} - \binom{n-i}{k}}{\binom{k^2-4k+5}{k-1}} \quad (4.1)$$

subsucesiones monotónicas de longitud  $k-1$ . Sea  $[w(p_{j_1}), w(p_{j_2}), \dots, w(p_{j_{k-1}})]$  cualquiera de estas subsucesiones. Tenemos entonces que  $[w(p_j), w(p_{j_1}), \dots, w(p_{j_{k-1}})]$  o  $[w(p_j), w(p_{j_{k-1}}), \dots, w(p_{j_1})]$  es monotónicamente creciente, y por esta razón el  $k$ -gono formado por cualquiera de las dos es un  $k$ -gono monotónico tal que los pesos de sus elementos son mayores o iguales a  $i$ . Sumando (4.1) para toda  $i$  con  $1 \leq i \leq n - [(k-2)^2 + 1]$  obtenemos:

$$M_k(T) \geq \sum_{i=1}^{n-[(k-2)^2+1]} \frac{\binom{n-i+1}{k} - \binom{n-i}{k}}{\binom{k^2-4k+5}{k-1}} = \frac{\binom{n}{k} - \binom{k^2-4k+5}{k}}{\binom{k^2-4k+5}{k-1}},$$

lo que concluye la demostración.

Observa que para una  $k$  lo suficientemente grande y  $n$  lo suficientemente grande, con respecto a  $k$ , tendríamos

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{k^2-4k+5}{k-1}} \approx \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{k^{k+\frac{1}{2}} n^{n-k+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k^{k-\frac{1}{2}} (k^2)^{k^2-5k+6+\frac{1}{2}}}{(k^2)^{k^2-4k+5+\frac{1}{2}}} \approx \frac{n^k}{k^{2k-1}},$$

lo que implica que  $\frac{M_k(T)}{n^k} = \Omega\left(\frac{1}{k^{2k-1}}\right)$ .

Sea  $Q$  el conjunto de vértices de un  $n$ -gono regular  $[p_1, p_2, \dots, p_n]$ . Donde cada  $p_i$  con  $1 \leq i \leq n$  tiene peso de

$$\begin{aligned} & m, m-1, \dots, 1, \\ & 2m, 2m-1, \dots, m+1, \\ & \vdots \\ & n, n-1, \dots, n-m+1, \end{aligned}$$

respectivamente (esta sucesión consiste de  $k-1$  subsucesiones crecientes de longitud  $m$ ). Nota que los pesos de un  $k$ -gono monotónico creciente en  $Q$  está contenido en a lo más dos subsucesiones:  $im, im-1, \dots, (i-1)m+1$ , y  $jm, jm-1, \dots, (j-1)m+1$ . Por lo cual

$$M_k(T) \leq \binom{k-1}{2} \binom{2m}{k} \approx C_1 \cdot \frac{(2m)^k}{k^{k-\frac{3}{2}}} \approx C_2 \left(\sqrt{2}\right)^{2k-\frac{3}{2}} n^k,$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. Esto prueba que las cotas son asintóticamente justas.  $\square$

### 4.2.3. Cuadriláteros monotónicos vacíos

#### Un cuadrilátero monotónico vacío

Empecemos, al igual que Esther Klein, por un problema pequeño que nos permita tratar cada posible caso por separado. Tres puntos siempre forman un triángulo monotónico vacío. Después de los triángulos, siguen los cuadriláteros, este orden de complejidad sugiere la pregunta: ¿habrá un mínimo número de puntos que garantice la existencia de un cuadrilátero monotónico vacío? Urrutia y Sakai lo afirman (en [5]).

**Lema 4.2.3.1.** *Sea  $T$  un conjunto de 6 puntos con pesos, tal que el elemento con menor peso  $q$  está en el cierre convexo, entonces  $T$  contiene un cuadrilátero monotónico vacío con  $q$  como uno de sus vértices.*

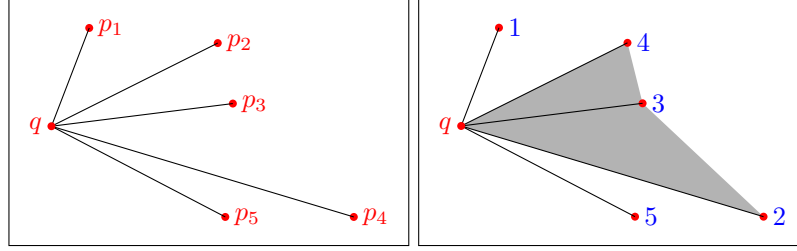


Figura 4.10:

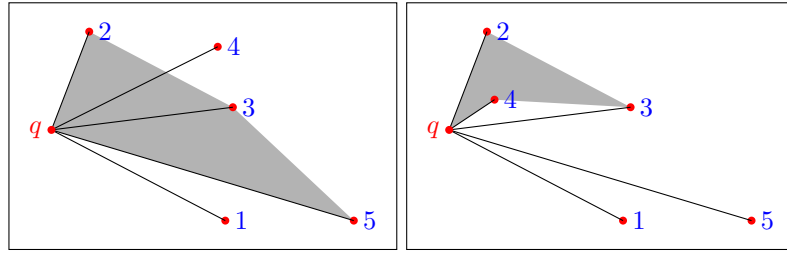


Figura 4.11:

*Demostración.* Hay que suponer, sin pérdida de generalidad, que  $q$  es el punto de  $T$  con menor coordenada  $x$  y que los elementos de  $T - \{q\}$  están etiquetados como  $p_1, p_2, \dots, p_5$  de tal forma que, para  $1 \leq i < j \leq 5$ , la pendiente del segmento  $\overline{qp_i}$  es mayor que la del segmento  $\overline{qp_j}$  (Figura 4.10, izquierda). Si para alguna  $i \leq 3$  la sucesión  $[w(p_i), w(p_{i+1}), w(p_{i+2})]$  es monotónica entonces el polígono formado por la sucesión  $[q, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}]$  es un cuadrilátero monotónico (Figura 4.10, derecha).

En otro caso, para  $i = 1$  o  $i = 2$  tenemos:

$$w(p_i) < w(p_{i+1}) > w(p_{i+2}) < w(p_{i+3}) \quad (4.2)$$

Supongamos, de nuevo sin perder generalidad, que para  $i = 1$  las desigualdades anteriores se cumplen (el caso de  $i = 2$  se demuestra con un análisis similar). Si  $w(p_1) < w(p_3)$ , entonces  $w(p_1) < w(p_3) < w(p_4)$ , notemos que si  $p_2 \notin \Delta qp_1 p_3$  entonces el cuadrilátero  $qp_1 p_3 p_4$  es monotónico (Figura 4.11, izquierda), de lo contrario  $qp_1 p_3 p_2$  será monotónico (Figura 4.11, derecha). De igual manera, si  $w(p_2) < w(p_4)$  entonces  $qp_3 p_2 p_4$  o  $qp_1 p_2 p_4$  será un cuadrilátero monotónico dependiendo de si  $p_3 \in \Delta qp_2 p_4$  o no.

Con lo anterior, supongamos que

$$w(p_1) > w(p_3) \text{ y } w(p_2) > w(p_4).$$

Entonces  $w(p_3) < w(p_1) < w(p_2)$  y  $w(p_3) < w(p_4) < w(p_2)$  por (4.2). Por esta razón si  $p_2 \in \Delta qp_2 p_4$ , entonces  $qp_3 p_1 p_2$  o  $qp_3 p_4 p_2$  es un cuadrilátero monotónico (Figura 4.12, izquierda), respectivamente. Así, supón además, que

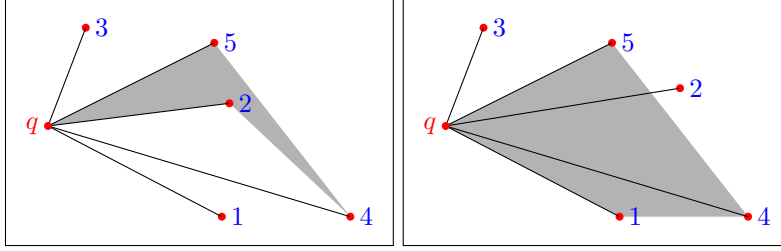


Figura 4.12:

$p_2 \notin \Delta qp_1p_3$ . En este caso, si  $w(p_5) < w(p_4)$ , entonces el cuadrilátero  $qp_5p_4p_2$  es monotónico (Figura 4.12, derecha), de lo contrario  $qp_3p_4p_5$  lo es.  $\square$

### Un “por lo menos” en cuadriláteros monotónicos vacíos

Eso solamente para conjuntos de 6, pero si  $T$  es un conjunto con más elementos, quizás podamos construir muchos más cuadriláteros monotónicos vacíos. Observemos cuántos pudieron contar Urrutia y Sakai (en [5]).

**Teorema 4.2.4.** *Sea  $n$  un número entero positivo y  $T$  un conjunto de  $n$  puntos, entonces  $T$  contiene al menos  $n^2/30 - O(n)$  cuadriláteros monotónicos vacíos.*

*Demostración.* Sean  $n \geq 17$ ,  $m$  un entero tal que  $\lfloor \frac{n-12}{5} \rfloor$ , y  $p \in T$  el punto que cumple  $w(p) = m$ . Llamaremos  $m'$  al mínimo entero tal que  $m \leq m' < n$  y  $n - m' \equiv 0 \pmod{3}$ . Entonces  $m' \leq m + 2$  (como  $n - m \geq 16$  tal  $m$  existe). Sea  $Q_m^- = \{q \in P : 1 \leq w(q) \leq m'\}$  y  $Q_m^+ = T - Q_m^-$ . Nombraremos los elementos de  $Q_m^+$  como  $q_0, q_1, \dots, q_{n-m'-1}$  en orden radial al rededor de  $p$ , con los índices tomados módulo  $n - m'$ . Para cada  $i$  con  $0 \leq i \leq n - m' - 1$ , denotaremos como  $A_i$  al dominio angular cerrado que contiene a los segmentos  $pq_i$  y  $pq_{i+1}$  en su frontera y ningún punto de  $Q_m^+$  en su interior. Supongamos que

$$|(A_0 \cup A_3 \cup A_6 \cup \dots \cup A_{n-m'-3}) \cap (Q_m^- - \{p\})| \leq \frac{m' - 1}{3}. \quad (4.3)$$

Para cada entero  $j$  con  $0 \leq j \leq \frac{n-m'}{3} - 1$ , sean

$$D_j = A_{3j} \cup A_{3j+1} \cup A_{3j+2} \cup A_{3j+3},$$

Ya que  $n \geq 17 > 9$ , todos, excepto a lo más dos, los  $D_j$ 's son convexos. Observa que  $|D_j \cap (Q_m^+ \cup \{p\})| = 6$ . Llamaremos  $\mathcal{D}$  al conjunto de los  $D_j$ 's con  $0 \leq j \leq \frac{n-m'}{3} - 1$ .

Sea  $\mathcal{D}' = \{D_j \in \mathcal{D} : D_j \cap (Q_m^- - \{p\}) = \emptyset \text{ y con } D_j \text{ convexo}\}$ . Ya que  $D_{j-1} \cap D_j = A_{3j}$ , si existe  $r \in A_{3j} \cap (Q_m^- - \{p\})$ , entonces  $r$  está contenido en  $D_{j-1}$  y en  $D_j$ . Así, si definimos  $a = |(A_0 \cup A_3 \cup A_6 \cup \dots \cup A_{n-m'-3}) \cap (Q_m^- - \{p\})|$ , entonces por 4.3 y por la afirmación de que a lo más dos elementos de  $\mathcal{D}$  son cóncavos, obtenemos



$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}'| &\geq |\mathcal{D}| - [2a + (|Q_m^- - \{p\}| - a)] - 2 \\
&\geq \frac{n - m'}{3} - \left[ (m' - 1) + \frac{m' - 1}{3} \right] - 2 \\
&= \frac{n - 5m' - 2}{3} \\
&\geq \frac{n - 5m - 12}{3}.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 4.2.3.1 podemos ver que para cada  $D \in \mathcal{D}'$ ,  $D \cap T$  contiene un cuadrilátero monotónico vacío con  $p$  como su vértice de menor peso. Como  $|(D \cap T) \cap (D' \cap T)| \leq 3$  para diferentes  $D, D' \in \mathcal{D}$ , los cuadriláteros son todos diferentes. Por consiguiente  $T$  contiene al menos  $\sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n-12}{5} \rfloor} \frac{n-5m-12}{3} = \frac{n^2}{30} - O(n)$  cuadriláteros monotónicos vacíos.  $\square$

### Recordando y construyendo con Horton

Jorge y Toshinori dicen que para entender el próximo teorema es necesario recordar un tipo de conjuntos vistos en un capítulo anterior. Ellos mostraron que, estos conjuntos, de cierta forma, son una cota superior para el número de cuadriláteros monotónicos vacíos diferentes que podríamos construir en cualquier conjunto de puntos.

Vamos a construir un conjunto ponderado a partir de un conjunto de Horton. Primero recordaremos rápidamente cómo es un conjunto de Horton (para más detalles dirígete al capítulo 2). Después asignaremos un peso distinto a cada punto (como lo hacen Jorge y Toshinori en [5]).

- $H_0 = \{(0, 0)\}$
- Para  $1 \leq i \leq k$  construimos  $H_i$  a partir de  $H_{i-1}$  de la siguiente manera:  
 Sea  $H'_{i-1} = \{(x + 2^{k-1}, y + c_i) : (x, y) \in H_{i-1} \text{ y } c_i \text{ lo suficientemente grande}\}$  ( $c_1$  puede ser cualquier entero positivo). Así  $H_i = H_{i-1} \cup H'_{i-1}$ . Elegimos  $c_i$ , con  $2 \leq i \leq k$ , de tal forma que cualquier elemento de  $H_{i-1}$  se encuentra por debajo de cualquier línea recta que contenga dos puntos diferentes de  $H'_{i-1}$  y cualquier elemento de  $H'_{i-1}$  que esté por encima de cualquier recta que cruce dos puntos distintos de  $H_{i-1}$ .

Para cada punto  $p \in H_k$  denotaremos como  $x_p$  y  $y_p$  a sus coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente. Ahora asignamos los pesos  $1, \dots, 2^k$  a cada punto en  $H_k$  de tal forma que si  $p, q \in H_k$  y  $y_p < y_q$ , entonces  $w(p) < w(q)$ . Denominaremos a este conjunto como *conjunto canónico de Horton ponderado* (Ver figura 4.13).

### Un “a lo más” en cuadriláteros monotónicos vacíos

Es momento de contar cuadriláteros. Urrutia y Sakai muestran, en [5], que existe un conjunto de  $n = 2^k$  puntos el cual tiene a lo más  $7n^2 - \Omega(n)$  cuadriláteros monotónicos vacíos.

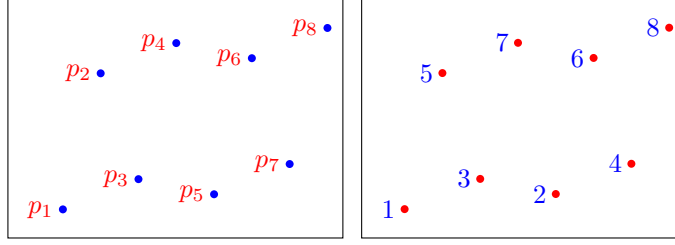


Figura 4.13: A la izquierda, el viejo conjunto de Horton de 8 elementos ( $H_3$ ). A la derecha, el nuevo y mejorado conjunto canónico de Horton ponderado.

No fue inútil la construcción de conjunto ponderado de Horton. La estrategia para contar estos cuadriláteros en  $H_k$  es la siguiente.

Sea  $\mathcal{Q}_{i,4-i}$  el conjunto de cuadriláteros monotónicos vacíos que tienen  $i$  vértices en  $H_{k-1}$  y  $4-i$  vértices en  $H'_{k-1}$ ,  $0 \leq i \leq 4$ . Claramente  $\mathcal{Q}_{0,4}$  y  $\mathcal{Q}_{4,0}$  contienen exactamente  $f(\frac{n}{2})$  cuadriláteros monotónicos vacíos.

Probaremos que  $\mathcal{Q}_{2,2}$  tiene a lo más  $\frac{n^2}{2}$  elementos y que  $\mathcal{Q}_{1,3}$  y  $\mathcal{Q}_{3,1}$  tienen a lo más  $\frac{3n^2}{2}$  elementos. Así  $H_k$  tendrá a lo más  $f(n) \leq 2f(\frac{n}{2}) + \frac{n^2}{2} + 3n^2$  cuadriláteros monotónicos. Pero la recurrencia  $f(n) \leq 2f(\frac{n}{2}) + \frac{7n^2}{2}$  se simplifica a  $f(n) \leq 7n^2 - \Omega(n)$ , lo cual haría ciertas todas nuestras afirmaciones.

**Definición 4.2.2** (Segmento visible). Sea  $H_k = H_{k-1} \cup H'_{k-1}$  un conjunto de Horton. Sean  $p, q \in H_{k-1}$ , diremos que el segmento  $\overline{pq}$  es visible desde arriba si no hay ningún elemento de  $H_{k-1}$  arriba de  $\overline{pq}$ , de igual manera, si  $p, q \in H'_{k-1}$ , el segmento  $\overline{pq}$  será visible desde abajo si no hay ningún otro elemento de  $H'_{k-1}$  por abajo de  $\overline{pq}$ .

**Observación 2.** Para cualesquiera distintos  $p, q \in H_{k-1}$  y  $r \in H'_{k-1}$ ,  $\overline{pq}$  es visible desde arriba (abajo) si y sólo si  $\Delta pqr$  no contiene algún elemento de  $H_k$  en su interior.

Vamos a definir pares de elementos de un conjunto canónico de Horton ponderado  $H_k$  que usaremos en el siguiente teorema. Sean

$$\begin{aligned} A &= \{(p, q) : p, q \in H_{k-1}, x_p < x_q \text{ y } \overline{pq} \text{ visible desde arriba}\}, \\ B &= \{(p, q) : p, q \in H'_{k-1}, x_p < x_q \text{ y } \overline{pq} \text{ visible desde abajo}\}, \end{aligned}$$

sean también

$$\begin{aligned} A^+ &= \{(p, q) \in A : w(p) < w(q)\}, \\ A^- &= \{(p, q) \in A : w(p) > w(q)\}, \\ B^+ &= \{(p, q) \in B : w(p) < w(q)\}, \\ B^- &= \{(p, q) \in B : w(p) > w(q)\}. \end{aligned}$$

Hay que recordar que

$$w(p) < w(q) \text{ implica que } y_p < y_q. \quad (4.4)$$

Nota que si  $p = (x, y) \in H_{k-2}$ , el punto  $q = (x + 2, y + c_{k-1}) \in H'_{k-2}$  es el único elemento de  $H_{k-1}$  tal que  $(p, q) \in A^+$ . Con argumentos análogos podemos concluir:

$$\forall p \in H_{k-1}, \text{ hay a lo más un elemento } q \in H_{k-1} \text{ tal que } (p, q) \in A^+. \quad (4.5)$$

$$\forall p \in H'_{k-1}, \text{ hay a lo más un elemento } q \in H'_{k-1} \text{ tal que } (p, q) \in B^-. \quad (4.6)$$

Además, por la elección de  $c_i$  la siguiente observación se cumple:

$$\text{Si } (p, q), (q, r) \in A^+, \text{ entonces } [p, q, r] \text{ es un 3-gorro.} \quad (4.7)$$

Por (4.5) podemos obtener que  $|A^+| \leq H_{k-1}$  (más precisamente,  $|A^+| = |H_{k-1}| - 1$  ya que  $w(p) \neq \frac{n}{2}$  para  $(p, q) \in A^+$ ). De esto y de los análisis similares correspondientes a  $|A^-|$ ,  $|B^+|$  y  $|B^-|$  tenemos:

$$|A^+|, |A^-|, |B^+| \text{ y } |B^-| \leq \frac{n}{2}. \quad (4.8)$$

**Lema 4.2.4.1.** *Sea  $i$  un entero tal que  $1 \leq i \leq k$ , sean  $p, r \in H_i$ , suponga que  $x_p \leq x_r$  y que  $w(p) < w(r)$ , entonces existen a lo más dos elementos  $q \in H_i$  tales que  $\Delta pqr$  es vacío,  $x_r < x_q$  y  $w(p) < w(q) < w(r)$ .*

*Demostración.* Sean  $p, r \in H_i$ , si ambos se encuentran en  $H_{i-1}$  o en  $H'_{i-1}$  esto se resuelve mediante inducción. Por esto vamos a suponer que  $p \in H_{i-1}$  y  $r \in H'_{i-1}$ . Es fácil ver que para cualquier  $q$ ,  $(p, q) \in A^+$  o  $(r, q) \in B^-$ . De (4.5), hay a lo más un elemento  $q \in H_{i-1}$  tal que  $x_p < x_q$  y  $(p, q) \in A^+$ , y por (4.6), hay a lo más un elemento  $q \in H'_{i-1}$  tal que  $x_r < x_q$  y  $(r, q) \in B^-$ . Así, hay a lo más dos elementos de  $H_i$ , uno en  $H_{i-1}$  y el otro en  $H'_{i-1}$  por lo que  $\Delta pqr$  es vacío.  $\square$

**Teorema 4.2.5.** *Sea  $n$  una potencia de dos, entonces existe un conjunto ponderado  $T$ , de  $n$  puntos, que contiene a lo más  $7n^2 - \Omega(n)$  cuadriláteros monotónicos vacíos (no necesariamente convexos). Además  $H_k$  no contiene algún pentágono monotónico vacío convexo.*

*Demostración.* Sea  $n = 2^k$ , vamos a mostrar que el conjunto canónico de Horton ponderado satisface la propiedad. Vamos a denotar como  $f(n)$  al número de cuadriláteros monotónicos vacíos contenidos en  $H_k$ , y como  $\mathcal{Q}_{i,4-i}$ , con  $1 \leq i \leq 3$ , al conjunto de cuadriláteros monotónicos vacíos  $pqrs$  con  $i$  vértices en  $H_{k-1}$  y  $3-i$  en  $H'_{k-1}$ . Entonces

$$\mathcal{Q}_{4,0} = \mathcal{Q}_{0,4} = f\left(\frac{n}{2}\right). \quad (4.9)$$

Mostremos primero que  $|\mathcal{Q}_{2,2}| \leq \frac{n^2}{2}$ . Supongamos que  $p, q \in H_{k-1}$ , que  $r, s \in H'_{k-1}$  y que  $x_p < x_q$ . Como  $pqrs$  puede ser dividido en dos triángulos

vacíos (uno con  $p, q$  como vértices y el otro con  $r, s$ ), entonces, con la observación 2(b), se sigue que  $(p, q) \in A$  y  $(r, s) \in B$  o  $(s, r) \in B$ . Además, por 4.4 y por la elección de  $c_k$ , se puede verificar que  $(p, q) \in A^+$  y  $(r, s) \in B^-$  o que  $(p, q) \in A^-$  y  $(s, r) \in B^+$ . Así, por (4.8),  $|\mathcal{Q}_{2,2}| \leq 2(\frac{n}{2})^2 = \frac{n^2}{2}$ .

Ahora vamos a demostrar que  $|\mathcal{Q}_{3,1}| \leq \frac{3n^2}{2}$ . Primero supondremos que  $p, q, r \in H_{k-1}$ , que  $s \in H'_{k-1}$ , y que  $x_p \leq x_r$ , supondremos también que  $x_p < x_q < x_r$ . Entonces  $(p, q), (q, r) \in A^+$  o  $(p, q), (q, r) \in A^-$ . Ya que para cada  $(p, q) \in A^+$  ( $(q, r) \in A^-$ ), sólo si existen tenemos  $(q, r) \in A^+$  ( $(p, q) \in A^-$ ), el número de cuadriláteros de este tipo es a lo más  $(|A^+| + |A^-|)|H'_{k-1}| \leq 2(\frac{n}{2})^2 = \frac{n^2}{2}$ . Ahora, si suponemos que  $x_p < x_r < x_q$ , entonces  $(p, r) \in A^+$ . Por esto y por el lema 4.2.4.1, el número de cuadriláteros de este tipo es a lo más  $2|A^+||H'_{k-1}| \leq \frac{n^2}{2}$ . El argumento es análogo para el caso donde  $x_q < x_p < x_r$ , consecuentemente tenemos  $|\mathcal{Q}_{3,1}| \leq \frac{3n^2}{2}$ . Y de igual manera  $|\mathcal{Q}_{1,3}| \leq \frac{3n^2}{2}$ . Esto completa la primera parte de la demostración del teorema.

Finalmente mostraremos que  $H_k$  no contiene ningún pentágono convexo monotónico. Supongamos que existe un mínimo  $k$  para el cual  $H_k$  contiene un pentágono convexo monotónico, entonces  $H_{k-1}$  o  $H'_{k-1}$  contiene al menos tres vértices consecutivos  $p, q, r$  del pentágono. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $p, q, r \in H_{k-1}$ , también vamos a suponer que  $x_p < x_q$ . Por la elección de  $c_k$  debemos tener  $x_q < x_r$  y  $[p, q, r]$  es una 3-taza. Por otro lado, como el pentágono es monotónico,  $(p, q), (q, r) \in A^+$  o  $(p, q), (q, r) \in A^-$ . Entonces, por (4.7)  $[p, q, r]$  es un 3-gorro, ocurre lo mismo sobre  $A^-$ , lo que es una contradicción.  $\square$

### 4.3. Emparejamientos

Ésta es la parte más cursi del trabajo. Cuando Cupido (ese dios griego famoso por entrometerse en las vidas ajenas) pidió un día de descanso, Jorge y Sakai tuvieron que sustituirlo. Su trabajo, como todos sabemos, consta de formar parejas.

Imagina que  $T$ , nuestro conjunto ponderado, es un conjunto de personas. La misión es darle pareja a cada uno, es decir, formar pares de puntos uniéndolos con segmentos de recta.

**Definición 4.3.1** (Emparejamiento). *Sea  $T$  un conjunto de  $n$  puntos. Diremos que el conjunto  $\mathcal{M} = \{\overline{p_1q_1}, \dots, \overline{p_kq_k}\}$  tal que  $q_i, p_i \in T$  es un emparejamiento de  $T$  si, para cualesquiera dos elementos distintos  $\overline{q_r p_r}$  y  $\overline{q_s p_s} \in \mathcal{M}$ , ocurre que  $q_r \neq q_s$  y  $p_r \neq p_s$ . El emparejamiento será perfecto si para cada  $p \in T$  existe  $q \in T$  tal que  $\overline{pq} \in \mathcal{M}$ . Nota que  $\overline{pq} = \overline{qp}$ .*

Pero es Cupido y no es tonto. Él sabe que si dos parejas se intersecan sus relaciones tienden al fracaso. Por esta razón prefiere disparar sus flechas de tal forma que las parejas no se intersequen, formando *emparejamientos sin cruces*.

**Definición 4.3.2** (Emparejamiento sin cruces). *Sea  $\mathcal{M} = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$  un emparejamiento de  $T$ . Diremos que  $\mathcal{M}$  es un emparejamiento sin cruces si para*

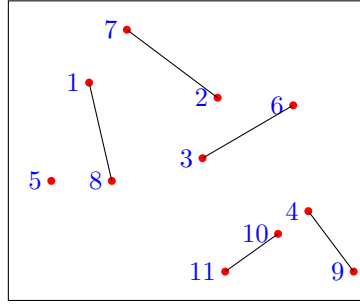


Figura 4.14: Emparejamiento sin cruces de peso  $1 + 2 + 3 + 4 + 10 = 20$ .

toda  $i \neq j$ , tenemos que  $\mu_i \cap \mu_j = \emptyset$ .

No tendría caso estar en la sección de puntos ponderados si no fuéramos a utilizar los pesos de cada punto, nuevamente restringidos, es decir, cada punto en  $T$  tendrá un peso diferente en  $\{1, \dots, n\}$ . Ahora bien, Cupido asigna como peso, a cada persona  $p$ , su nivel de felicidad  $w(p)$ . Éste es el último criterio que considera al formar parejas:

**Definición 4.3.3** (El peso de la pareja y del emparejamiento). Sea  $\mathcal{M} = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$  un emparejamiento de  $T$  tal que  $\mu_i = (p_i, q_i) \in \mathcal{M}$ . Diremos que el peso de la pareja  $\mu_i$  es  $w(\mu_i) = \min\{w(p_i), w(q_i)\}$ . Además, el peso del emparejamiento es  $w(\mathcal{M}) = \sum_{i=1}^k w(\mu_i)$  (Observa el ejemplo de la figura 4.14).

Entonces el emparejamiento que quisiéramos encontrar deja de ser cualquiera. El verdadero problema es calcular el peso máximo garantizable de algún emparejamiento, sin cruces, en un conjunto ponderado  $T$ . Urrutia y Sakai, en [6], resuelven el problema dando cotas justas.

Para abordar el problema ellos empezaron por algo más simple; hicieron cuentas para saber cuál sería el emparejamiento perfecto de mayor peso en un conjunto  $T$  en posición convexa. Observa que el emparejamiento más pesado no necesariamente será un emparejamiento perfecto.

Veámoslo de esta manera. Sea  $T$  un conjunto de  $n = 2m$  puntos en posición convexa. Vamos a colorear de rojo y azul los puntos de  $T$  de forma alternante. Cualquier pareja en un emparejamiento perfecto  $\mathcal{M}$  debe estar formada por un punto rojo con uno azul. Asigna los pesos  $\{1, \dots, m\}$  a los puntos rojos y  $\{m + 1, \dots, 2m\}$  a los azules. Observa que el peso de cualquier pareja está en  $\{1, \dots, m\}$ . Y como diferentes parejas en  $\mathcal{M}$  tienen diferentes pesos, entonces el peso del emparejamiento  $\mathcal{M}$  es  $\binom{m+1}{2}$ .

El peso máximo de un emparejamiento perfecto y sin cruces, de  $T$ , se podría obtener cuando sus elementos tienen los pesos  $\{1, 2, \dots, n\}$  en la dirección de las manecillas del reloj, a lo largo de su cierre convexo. En este caso, el máximo peso podría ser  $1 + 3 + \dots + (2m - 1) = m^2$ . En resumen:

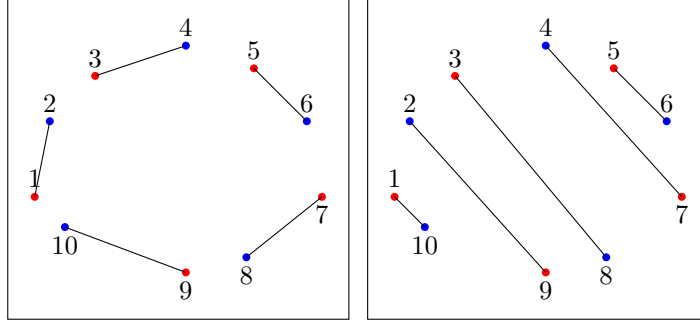


Figura 4.15: Emparejamientos perfectos de peso máximo y mínimo respectivamente, en un conjunto de puntos en posición convexa.

**Lema 4.3.0.1.** *Sea  $T$  un conjunto de  $n = 2m$  puntos en posición convexa. Entonces el peso de cualquier emparejamiento perfecto sin cruces es de al menos  $\binom{m+1}{2}$ , y a lo más  $m^2$ , estas cotas son justas (Observa la figura 4.15).*

Ahora supongamos que  $T$  tiene  $2m - 2r$  elementos, con distintos pesos en  $\{2r + 1, 2r + 2, \dots, 2m - 1, 2m\}$ . Con el mismo argumento de arriba, tenemos que el peso de cualquier emparejamiento perfecto de  $T$  es al menos:

$$\begin{aligned} (2r + 1) &+ (2r + 2) + \dots + [2r + (m - r)] \\ &= 2r(m - r) + [1 + \dots + (m - r)] \\ &= 2r(m - r) + \binom{m - r + 1}{2}. \end{aligned}$$

De igual manera, se puede probar que el peso de cualquier emparejamiento perfecto es a lo más:

$$\begin{aligned} (2r + 1) &+ (2r + 3) + \dots + (2m - 1) \\ &= (2r + 1) + (2r + 3) + \dots + [2r + 2(m - r) - 1] \\ &= 2r(m - r) + (m - r)^2. \end{aligned}$$

Formalmente:

**Lema 4.3.0.2.** *Sea  $T$  un conjunto de puntos en posición convexa tal que sus elementos tienen distintos pesos en  $\{2r + 1, 2r + 2, \dots, 2m\}$ . Entonces el peso de cualquier emparejamiento perfecto es al menos:*

$$(2r + 1) + (2r + 2) + \dots + [2r + (m - r)] = 2r(m - r) + \binom{m - r + 1}{2}$$

y a lo más:

$$(2r + 1) + (2r + 3) + \dots + (2m - 1) = 2r(m - r) + (m - r)^2.$$

En el lema siguiente empezaremos a considerar emparejamientos no necesariamente perfectos.

**Lema 4.3.0.3.** *Sea  $T$  un conjunto de puntos en posición convexa tal que algunos de sus elementos son rojos y otros azules. Entonces hay un emparejamiento sin cruces  $\mathcal{M}$  de  $T$  tal que empareja todos los puntos, excepto dos a lo más, de tal forma que los extremos cada arista (pareja) son del mismo color.*

*Demostración.* Si todos los puntos son del mismo color, el resultado es inmediato, por lo cual supondremos que  $T$  contiene al menos un punto azul y uno rojo.

Vamos a etiquetar los puntos como  $\{p_1, \dots, p_n\}$  en el orden de las manecillas del reloj, sobre el cierre convexo, de forma en que  $p_1$  sea azul y  $p_n$  sea rojo.

Dividamos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  en un número par de intervalos:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{p_1, \dots, p_{i_1}\} \\ I_2 &= \{p_{i_1+1}, \dots, p_{i_2}\} \\ &\vdots \\ I_{2k} &= \{p_{i_{2k-1}+1}, \dots, p_{i_{2k}}\} \end{aligned}$$

de tal manera que los elementos en intervalos de índice impar sean azules y en intervalos de índice par sean rojos (observa la figura 4.16). La demostración es por inducción sobre el número de intervalos:

Supongamos, primero, que sólo tenemos dos intervalos  $I_1, I_2$ , entonces emparejamos los elementos de  $I_1$  entre ellos mismos, dejando como máximo uno sin pareja (en el caso de que  $I_1$  tenga un número impar de elementos). Hacemos lo mismo con  $I_2$ , así construimos un emparejamiento  $\mathcal{M}$  en el cual los extremos de cada arista tienen el mismo color, y cada punto tiene pareja, excepto a lo máximo dos.

Ahora, si hay más de dos intervalos  $I_1, \dots, I_{2k}$  con  $k \geq 2$ . Si alguno tiene un número par de elementos haremos lo siguiente. Supongamos, sin perder generalidad, que  $I_2$  tiene un número par de puntos, entonces podemos emparejar perfectamente todos los elementos de este intervalo entre ellos mismos. Así continuamos sin volver a tomarlo en cuenta. Entonces  $T - I_2$  puede ser dividido en  $2k - 2$  intervalos  $I_1 \cup I_3, I_4, \dots, I_{2k}$ .

Por hipótesis de inducción, los elementos de  $T - I_2$  pueden ser emparejados entre sí, dejando a lo más dos sin pareja. Este emparejamiento junto con el de  $I_2$  forma el emparejamiento deseado.

Finalmente, si todos los intervalos tienen un número impar de elementos, nota que  $I_1 \cup I_{2k-1}, I_2 \cup I_{2k-2}, \dots, I_{k-1} \cup I_{k+1}$  tienen un número par de puntos, así que los elementos de cada  $I_j \cup I_{2k-j}$  pueden ser emparejados totalmente entre sí mismos.

Los únicos elementos que restan por emparejar son los que están en los intervalos  $I_k$  e  $I_{2k}$ . Ya que ambos tienen un número impar de puntos, podemos

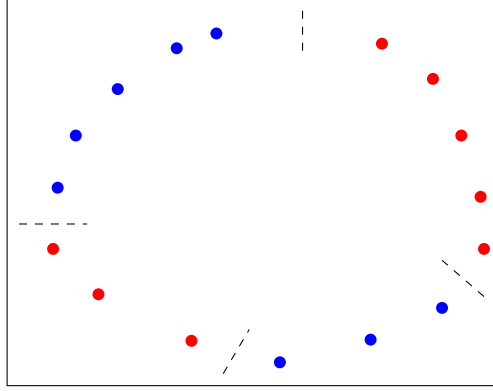


Figura 4.16: División en intervalos monocromáticos.

emparejar los elementos de cada intervalo entre ellos mismos, dejando sin pareja un elemento de  $I_k$  y uno de  $I_{2k}$ . Y éste es el resultado esperado.  $\square$

Y finalmente, volviendo al punto de partida, estamos listos para estudiar la prueba de Urrutia y Sakai del problema principal de la sección de emparejamientos: ¿cuál es el máximo peso garantizable de algún emparejamiento sin cruces, en un conjunto de puntos ponderado?

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $T$  un conjunto de puntos en posición convexa cuyos elementos tienen pesos en  $\{1, \dots, n\}$ . El emparejamiento de mayor peso de  $T$  tienen un peso de al menos  $\frac{n^2}{5} - O(n)$ .*

*Demostración.* Con el objetivo de hacer esta demostración fácil de entender, supondremos que  $T$  tiene  $10s$  elementos. Para empezar descartaremos los elementos con pesos en  $\{1, \dots, 2s\}$ . Ahora coloreamos con azul los elementos con pesos en  $\{2s+1, \dots, 6s\}$  y con rojo los que tienen peso en  $\{6s+1, \dots, 10s\}$ . Por el Lema 4.3.0.3, podemos encontrar emparejamientos  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  de  $\{2s+1, \dots, 6s\}$  y  $\{6s+1, \dots, 10s\}$  respectivamente, que permiten a lo más dos elementos de  $\{2s+1, \dots, 10s\}$  sin pareja.

Primero supongamos que todos los elementos de  $\{2s+1, \dots, 10s\}$  están emparejados. Entonces, por el lema 4.3.0.2, con  $r = s$  y  $m = 3s$ , el peso de  $\mathcal{M}'$  es al menos:

$$(2r - 1) + (2r + 2) + \dots + (4r - 1) + 4r.$$

De igual manera, aplicando el Lema 4.3.0.2, con  $r = 3s$  y  $m = 5s$ , el peso de  $\mathcal{M}''$  es por lo menos:

$$(6s + 1) + (6s + 2) + \dots + (8r - 1) + 8r.$$

Uniendo estos resultados (invirtiendo el orden del primero), obtenemos que la suma de los pesos de  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  es al menos:

$$2s(10s + 1) = \frac{n}{5}(n + 1).$$



Finalmente, consideremos el caso donde uno o dos elementos de  $\{2s+1, \dots, 10s\}$  no están emparejados. Es fácil ver que la suma de los pesos de  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  decrece en  $\frac{n(n+1)}{5}$  en a lo más  $2n$ , y así la suma de los pesos de  $\mathcal{M}'$  y  $\mathcal{M}''$  es  $\frac{n^2}{5} - O(n)$ . Esta cota es válida también para  $n \not\equiv 0 \pmod{10}$ .  $\square$

## Capítulo 5

# Los alumnos copiones

*“Teatro mágico. Entrada no para cualquiera. No para cualquiera.”*

---

Herman Hesse

Así es como llegamos al último capítulo, la dinámica será experimentar, estudiaremos un problema en particular, pues, gracias a todo este estudio en términos de demostraciones y teoremas, nos sentimos tan fuertes como para resolver...

–Siempre hay preguntas sin resolver –interrumpió Merlín con un tono arrogante, como sugiriendo la transgresión literaria que convertirá este trabajo en un viaje interestelar–. Tengo un nuevo acertijo para ti, no dormirás hasta que encuentres la respuesta, –dormir es una de mis actividades favoritas, pero Merlín siempre cumple lo que dice–, soy Merlín y siempre cumplo lo que digo –corroborar–.

Entonces, Merlín, con su inexistente magia, hace que la sala de estudio deje de serlo y tome forma de salón de clases. El lector se vuelve parte de la historia y el redactor sigue siendo el redactor.

–Demuestren que todas esas páginas tapizadas de letras han servido de algo. –dice él como esperando que te pongas a trabajar, pues ahora yo estoy en un pupitre; soy un alumno y tú...–.

### 5.1. Los alumnos copiones

De pronto eres el profesor de una clase y ha llegado el día del examen. Entrás al salón y los alumnos hemos organizado las bancas a nuestro antojo, nada puedes hacer contra eso. Das las especificaciones de la prueba y repartes las hojas. El examen es individual, por lo tanto si ves a dos alumnos copiando deberás reportarlos.

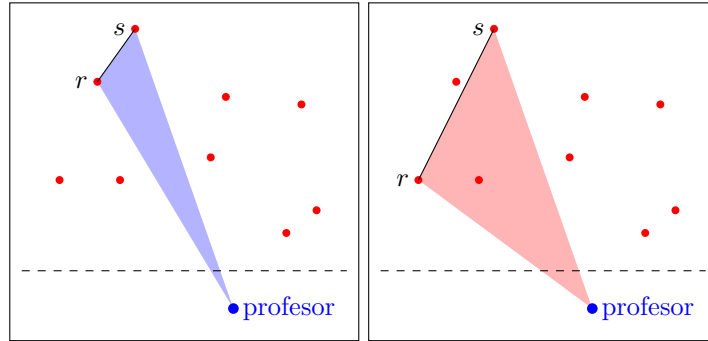


Figura 5.1: A la izquierda una arista visible, a la derecha una no visible.

### 5.1.1. Aristas visibles

Como todo buen profesor permaneces en tu asiento y vigilando con cuidado. Lamentablemente nadie tiene una visión capaz de atravesar objetos, por lo cual sólo podrás notar si dos alumnos se copian si eres capaz de ver su “línea de comunicación”, es decir, todo el segmento de recta que los une. En otras palabras diremos que: puedes ver si dos alumnos se copian solamente si el triángulo formado por ti y los dos alumnos no contiene ningún otro alumno en el interior (Ve el ejemplo de la figura 5.1).

**Definición 5.1.1** (Arista visible). *Sea  $T$  un conjunto de puntos en posición general y  $r, s \in T$ . Diremos que un punto  $p \in \mathbb{R}^2 - T$  ve a  $\overline{rs}$  (o que  $\overline{rs}$  es visible con respecto a  $p$ ) si  $(T - \{r, s\}) \cap \triangle prs = \emptyset$ .*

Si tuvieras  $n$  alumnos puedes ver por lo menos  $n - 1$  distintas líneas de comunicación; las que forman la poligonal construida ordenando radialmente los alumnos con respecto al profesor. El mínimo se alcanza cuando los alumnos formamos un  $k$ -gorro (con respecto al orden radial definido por el punto correspondiente al profesor y no a su coordenada  $x$ ). Al contrario, si ninguno tenía pensado copiar en la prueba, pudimos formar una  $k$ -taza, así es cuando verás todas las  $\frac{n(n-1)}{2}$  posibles líneas de comunicación (me entenderás si ves la figura 5.2).

Terminó el examen y tienes en la mira a los copiones. Finalmente los acusas con el director. Pero resulta que estos alumnos tienen muy buenos abogados y quedan impunes por falta de testigos. Eso te frustra un poco y decides tomar medidas más drásticas.

### 5.1.2. Aristas compartidas

En el siguiente examen, tomando en cuenta eso de la falta de testigos, le pides a un amigo que te acompañe, él se colocará de tu mismo lado, dejando siempre una línea recta  $l$  que separe a ambos del grupo. Así, cuando ambos vean un par de alumnos copiando, juntos podrán denunciarlos. Si esto ocurre diremos que la

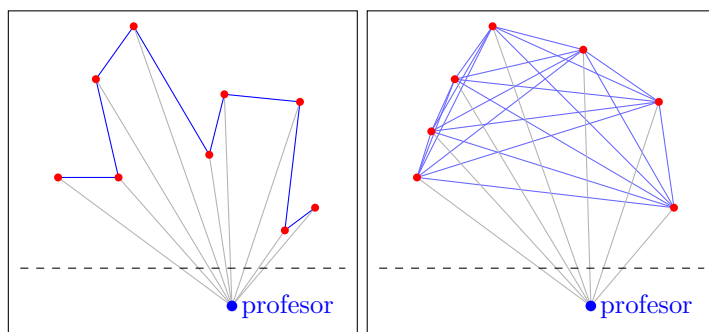


Figura 5.2: A la izquierda, una configuración cualquiera, se ven por lo menos  $n - 1$  aristas. A la derecha una configuración en la que se ven todas las aristas.

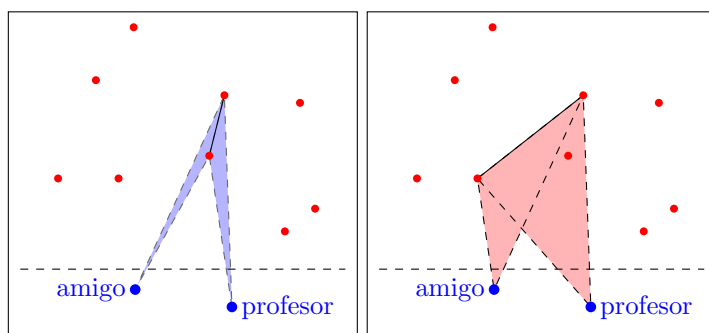


Figura 5.3: A la izquierda, arista que comparten el amigo y el profesor. A la derecha, el amigo ve la arista pero el profesor no.

línea de comunicación entre esos alumnos es una *arista compartida* (Ahora ve la figura 5.3).

**Definición 5.1.2** (Arista compartida). Sea  $T$  un conjunto de puntos y  $r, s \in T$ . Sean  $p, q \in \mathbb{R}^2 - T$ , diremos que  $\overline{rs}$  es una *arista compartida* (con respecto a  $p$  y  $q$ ) si  $p$  y  $q$  ven a  $\overline{rs}$ .

–Aunque, si lo piensas bien, llevar un amigo no te garantiza nada. ¿Qué tan seguro puedes estar de que tú y tu amigo comparten alguna arista? –Se escuchó al fondo, es Merlín nuevamente, sólo intenta hacerte dudar. En realidad siempre habrá una arista que comparten. Primero vamos a explicar cómo es esto, después veremos si únicamente podemos garantizar que comparten una–.

El secreto está en la línea  $l$  que separa del grupo. Ordena a los alumnos con respecto a la distancia que hay desde cada uno hasta la recta. Esto es dividir el plano en regiones limitadas por rectas paralelas a  $l$ , las cuales no tienen puntos de  $T$  en sus interiores. Toma los dos más cercanos, la arista que forman es una arista compartida, de lo contrario tendría que haber otro punto de  $T$  en la primera región, lo cual no es posible (Lo verás con claridad en la figura 5.4).

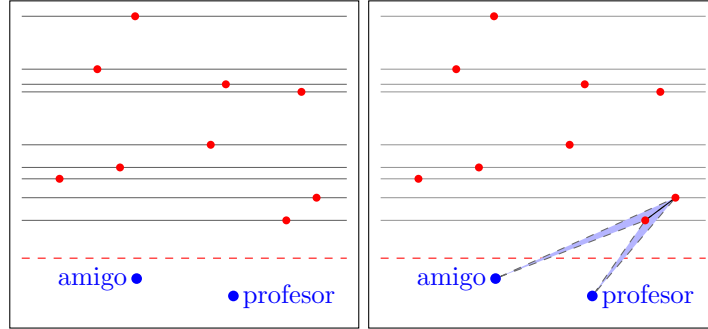


Figura 5.4: Una arista que siempre compartirán.

Pero generalmente los alumnos que ocupan los lugares de enfrente son quienes sí estudiaron y no tendrán la necesidad de copiar, por lo cual no es muy útil observar solamente sus líneas de comunicación.

### 5.1.3. Entre hipótesis y conjeturas: Bárány-Károlyi

Por ahora, diremos que cuando llegaste al salón, los asientos ya estaban organizados en posición general incluyendo el tuyo y el de tu amigo, sin embargo no necesariamente habrá una recta que los separe del grupo, es decir que los consideraremos como parte del conjunto  $T$ .

Observa que la recta  $l$  que pasa por ti y tu compañero, divide al grupo en dos partes, pero la definición de arista compartida no se altera.

Tras una noche de insomnio así conseguiste formalizar tu problema:

Como diría Esther Klein: Para todo entero  $m$  ¿existe un número  $M$  lo suficientemente grande tal que, en cualquier conjunto de puntos  $T \in \mathbb{R}^2 - l$ , con al menos  $M$  elementos, todo par  $p, q \in T$  comparte por lo menos  $m$  aristas?

Te sientes complacido por haberte inmiscuido en temas de ese nivel de abstracción, pero usualmente prefieres la forma sencilla que dice: “¿será cierto que, mientras más alumnos haya, más líneas de comunicación compartiremos mi amigo y yo?”.

En otras palabras: ¿hay una función  $f$  y divergente (que crece junto con el tamaño del conjunto), que acota inferiormente al número de aristas compartidas de todo par de puntos en  $T$ ?

En la contraparte preferimos pensar exactamente lo contrario; los alumnos creemos que siempre hay una configuración de los asientos, de tal forma que tú y tu amigo solamente compartan un número constante de aristas.

Antes de exponer la solución del dilema, vamos a analizar ambas posibilidades. Para ello definiremos el *conjunto de aristas compartidas*  $\mathcal{Z}_T$ .

**Definición 5.1.3** (Conjunto de aristas compartidas). *Sea  $T$  un conjunto de  $n$  puntos en posición general, sea  $E(T)$  el conjunto de aristas formadas por cada par de elementos de  $T$ . Llamaremos conjunto de aristas compartidas de  $T$  al*

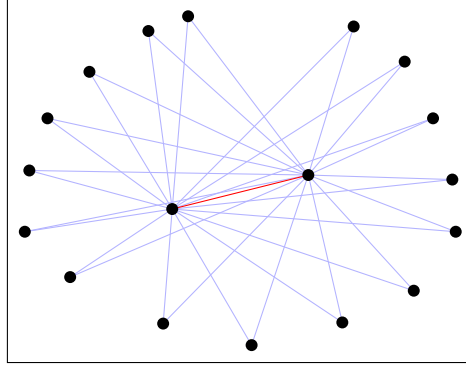


Figura 5.5: Una arista que está en  $n - 2$  triángulos vacíos.

conjunto  $(\mathcal{Z}_T)$  de ternas  $(p, q, a)$  con  $p, q \in T$  y  $a \in E(T)$ , tales que  $a$  es visible para  $p$  y  $q$ .

Digamos que  $|T| = n$ . Es fácil ver que la cardinalidad de  $\mathcal{Z}_T$  está delimitada superiormente por el número de distintas combinaciones de cuatro elementos en  $T$ , es decir  $|\mathcal{Z}_T| \leq \binom{n}{4}$ .

Por ahora digamos que lo que deseas es cierto para la configuración de asientos actual  $T$  (después veremos un contraejemplo), es decir, suponemos que hay una función  $f$  divergente que acota el mínimo número de aristas compartidas en cualquier par de puntos, entonces podríamos estimar rápidamente la cardinalidad de  $\mathcal{Z}_T$ , dando una cota inferior.

Tomamos un primer par, éste compartirá por lo menos  $f(n)$  aristas, tomamos otro par y lo mismo; compartirá por lo menos  $f(n)$  aristas. En general, por cada par distinto habrá al menos  $f(n)$  aristas compartidas y por lo tanto  $|\mathcal{Z}_T| \geq \binom{n}{2} f(n)$ . A simple vista, esto parecería no tener mucha importancia, no obstante, prestar más atención puede ser decisivo.

Vamos a calcular otra cota (esta vez superior) a partir de una famosa conjetura (más bien de su negación). I. Bárány y Gy. Károlyi en [7] afirman que en cualquier conjunto de  $n$  puntos, hay por lo menos una arista que pertenece a un número superconstante (i. e. que crece junto con el tamaño del conjunto) de triángulos vacíos (observa la figura 5.5).

Suponer que  $T$  no cumple la conjetura, sería afirmar que toda arista de  $T$  se encuentra en a lo más  $c \in \mathbb{N}$  triángulos vacíos. O en términos de aristas visibles, aquello implicaría que cada arista es vista por  $c$  puntos distintos, a lo más. Ahora, hablando de aristas compartidas, tendríamos la seguridad de que ninguna arista será compartida por más de  $\binom{c}{2}$  pares de puntos distintos.

Finalmente, diremos que la cardinalidad de  $\mathcal{Z}_T$  no puede ser mayor que  $\binom{c}{2} \binom{n}{2}$ . Lo que significa que  $\binom{n}{2} f(n) \leq |\mathcal{Z}_T| \leq \binom{n}{2} \binom{c}{2}$ , pero esto es imposible para una  $n$  lo suficientemente grande.

En pocas palabras, acabamos de mostrar que si tuvieras razón en tu afán de sorprender a los alumnos copiones y lo demostraras, a la vez estarías dando

una prueba de la conjetura Bárány-Károlyi. Por desgracia, al menos en este universo, no será posible.

Lástima, qué cerca estuviste. Aunque si deseas continuar con este nuevo reto, hay más pistas en [9] donde I. Bárány, J. Marckert y M. Reitzner consiguieron mostrar que, para ciertos conjuntos, aquella conjetura se cumple.

#### 5.1.4. Los alumnos se salieron con la suya

Siguiente examen, no pudiste demostrar nada. Llegas al salón de clases junto con tu amigo, quien hará el papel de testigo. Ambos toman su lugar y se dan cuenta de algo sorprendente ¡Los asientos están organizados de tal forma que solamente ven dos aristas en común! ¡Tus alumnos son unos genios malignos!

El problema está resuelto, los alumnos se colocaron en tres filas, de tal forma que los primeros de cada fila obstruían la visibilidad de las aristas formadas con/por los segundos, los segundos hacían lo mismo con los terceros, así sucesivamente (una vista desde arriba en la figura 5.6). De esa manera consiguieron aprobar todos el examen sin que pudieras hacer nada.

**Notación 4.** *De ahora en adelante nos referiremos a tu posición (profesor) como  $p$  y a la posición de tu amigo como  $q$ .*

Para analizar la construcción  $T$  usaremos *llantitas de apoyo*, como en la bicicleta, después notaremos que no eran realmente necesarias. Supondremos que el conjunto de alumnos  $T$  siempre tiene  $n = 3m$  elementos. Llamaremos  $T_1$  al conjunto  $\{a_1 = (0, 3), b_1 = (1, 1), c_1 = (3, 0)\}$ . Y finalmente colocaremos, por ahora estarás ubicado en el punto  $(0, -\infty)$  y tu amigo en  $(-\infty, 0)$ .

- Si  $m = 1$  entonces  $T = T_1$ .
- Cuando  $m > 1$  entonces  $T = T_{m-1} \cup \{md + a_1, md + b_1, md + c_1\}$  (con  $d = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ ).

Veremos cómo  $p$  y  $q$  comparten únicamente las aristas  $\overline{a_1b_1}$  y  $\overline{b_1c_1}$ . Para notarlo tomemos  $T_i$  con  $i > 1$ . Las tres aristas formadas con estos puntos:  $\overline{a_i b_i}$ ,  $\overline{b_i c_i}$  y  $\overline{c_i a_i}$  no son compartidas: observa como  $\triangle a_i b_i p$  contiene al punto  $c_{i-1}$ ,  $\triangle b_i c_i q$  contiene al punto  $a_{i-1}$  y finalmente  $\triangle a_i c_i q$  y  $\triangle a_i c_i p$  contienen al punto  $b_i$ . Esto demuestra que ninguna de las aristas formadas por los puntos de algún  $T_i$  con  $i > 1$  será compartida.

Resta mostrar que las aristas formadas por elementos de  $T'_i$ s distintos también quedan bloqueadas para  $p$  o para  $q$ . Comprobarlo es sencillo, digamos que  $i < j$ . No queda de otra más que tratar algunos casos, el resto de ellos se tratan de manera análoga:

- La arista  $\overline{a_i a_j}$  no es visible para  $p$  puesto que  $b_i$  se encuentra dentro del triángulo  $\triangle a_i a_j p$ .
- La arista  $\overline{b_i a_j}$  no es visible para  $q$  ya que  $a_i$  está dentro de  $\triangle b_i a_j q$ .

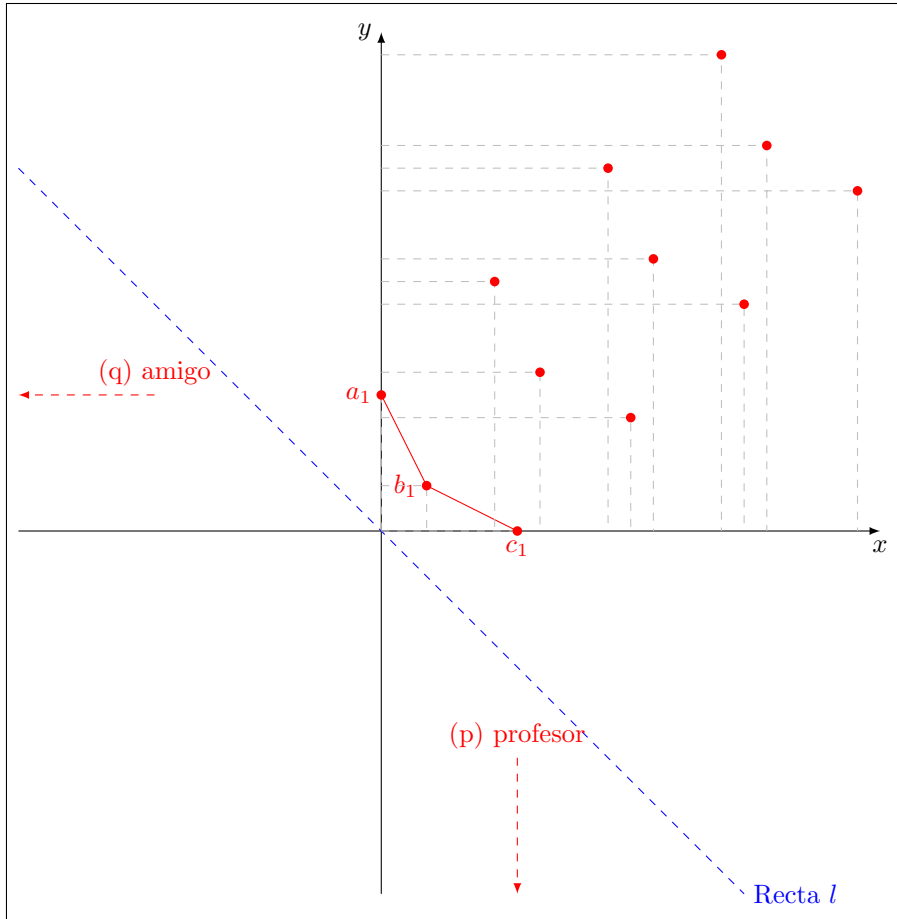


Figura 5.6: En este conjunto de 12 puntos,  $p$  y  $q$  comparten únicamente dos aristas (rojas).



- $\overline{c_i a_j}$  no es visible para  $q$  debido a que  $a_i$  y  $b_i$  están dentro del triángulo  $\triangle c_i a_j q$ .
- La arista  $\overline{a_i b_j}$  no es visible para  $p$  puesto que  $b_i$  se encuentra dentro del triángulo  $\triangle b_i a_j p$ .
- La arista  $\overline{b_i b_j}$  no es visible para  $q$  ni para  $p$ , en particular no es compartida porque el triángulo  $\triangle b_i b_j q$  contiene al punto  $a_i$ .

Efectivamente,  $p$  ni  $q$  pueden estar colocados en puntos al infinito, sin embargo, siempre hay un punto lo suficientemente abajo y lo suficientemente a la izquierda, tal que el orden radial (con respecto a él) de un conjunto finito de puntos, conserva el orden de las abscisas o de las ordenadas, respectivamente.

En realidad el conjunto definido no está en posición general, pero teóricamente tampoco representa un problema. La solución es simple, a cada punto  $r$  se le suma un  $\varepsilon_r$ , tal que sus coordenadas sean lo suficientemente pequeñas para dejar intacto el orden radial de los elementos con respecto a  $p$  y a  $q$ , obligando además a los puntos a estar en posición general.

—¡Bravo!— Exclamas frente a tus alumnos, te sientes superado y estás a punto de darles una gran noticia —Ustedes, por su incapacidad de estudiar para un examen, resolvieron mi problema, usaron sus sucias artimañas y ahora lo único que puedo hacer es otorgarles a todos la máxima calificación—. Merlín dice que eso te hace un profesor *barco*, pero está contento de que hayas conseguido la respuesta a su acertijo.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Efectivamente, la conclusión del trabajo es *per se* el capítulo anterior: si un conjunto de puntos cumple con la propiedad que cualquier par de ellos comparte un número superconstante de aristas, entonces éste mismo cumple la conjetura de Bárány-Karolyi.

No obstante, a pesar de que sería magnífico que todo conjunto de puntos cumpliera aquella propiedad, nuestro resultado revela lo contrario, pues existe un conjunto de puntos de cualquier cardinalidad (mayor o igual que 5) tal que contiene al menos un par de puntos que comparten únicamente un par de aristas.

No era modesto aspirar a encontrar la solución a un problema como el de Bárány, sin embargo el intento no fue en vano ya que, además de encontrar una manera de cómo no se demuestra el problema, hallamos un camino alternativo por el cual podríamos hacer el siguiente intento. Este nuevo enfoque consiste en contar *aristas compartidas* o calcular la cardinalidad del conjunto  $\mathcal{Z}_T$ .

Podría decirse que explicar a fondo y dar difusión de algunos problemas del tipo Erdős-Szekeres sería suficiente, sin embargo el motivo real de este trabajo fue, con base en el estudio de la teoría conocida como “teoría de Ramsey”, adquirir algunas herramientas, teóricas y prácticas, para resolver un problema del mismo género, lo cual se consiguió.

Así es, el objetivo de resolver un problema nuevo fue cumplido, sin embargo la respuesta a ese objetivo extra; explicar y difundir de una manera didáctica, sencilla y entretenida gran parte de los problemas y sus demostraciones, se mantiene latente. No sabremos si fuimos lo suficientemente claros hasta que alguien que no conozca los problemas Erdős-Szekeres y Urrutia-Sakai lea y comprenda nuestras explicaciones.



# Bibliografía

- [1] J. D. HORTON. Sets with no empty convex 7-gons. *Canad. Math. Bull.* 26 (4): 482-484. 1983.
- [2] P. ERDŐS, G. SZEKERES. A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* 2: 463-470. 1935.
- [3] P. ERDŐS, G. SZEKERES. On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 3-4: 53-62. 1960.
- [4] P. ERDŐS. Some more problems on elementary geometry, *Austral. Math. Soc. Gaz.* 5: 52-54. 1978.
- [5] T. SAKAI, J. URRUTIA. Monotonic polygons and paths of weighted point sets, *Lecture Notes in Computer Science* 7033: 164-175. Springer, 2011.
- [6] T. SAKAI, J. URRUTIA. On the heaviest increasing or decreasing subsequence of a permutation, and paths and matchings on weighted point sets, *Lecture Notes in Computer Science* 7579: 175-184. Springer, 2011.
- [7] I. BÁRÁNY, GY. KÁROLYI. Problems and results around the Erdős-Szekeres theorem, *Japanese Conference on Discrete Comp. Geometry*: 91-105. 2001.
- [8] J. MATOUSEK. *Lectures on discrete geometry* (Graduate texts in mathematics), 1ra ed: 35-39. Springer, 2002.
- [9] I. BÁRÁNY, J. MARCKERT, M. REITZNER. Many empty triangles have a common edge, *arXiv:1209.3928 [math.PR]*. 2012.
- [10] S. YOON, E. KANG. Empty convex 5-gons in planar point sets, *Honam Mathematical Journal* 31, issue 3: 315-321. 2009.
- [11] F. P. RAMSEY. On a Problem of Formal Logic, *Proc. London Math. Soc.* Vol. s2-30, no. 1. 1930.
- [12] H. HARBORTH. Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen, *Elem. Math.* 33: 116-118. 1978.

- [13] C. M. NICOLÁS. The empty hexagon theorem, *Discrete Comput. Geom.* 38: 389-397. 2007.
- [14] T. GERKEN. Empty convex hexagons in planar point sets. *Discrete Comput. Geom.* 39(1-3): 239-272. 2008.