UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

"ESPACIOS HUREWICZ"

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

DANIEL BERNAL SANTOS

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO, D.F. OCTUBRE, 2011

Espacios Hurewicz

Daniel Bernal Santos

Director de Tesina: Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

Índice general

INTRODUCCIÓN

W. Hurewicz introdujo en [15] la siguiente propiedad para un espacio X: para cada sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X, existe una sucesión $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos finitos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\alpha_n \subset \gamma_n$ y $\bigcup \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de X. A los espacios topológicos que cumplen dicha propiedad, se les llaman ahora *espacios Hurewicz*.

Los espacios compactos y σ-compactos son espacios Hurewicz. La propiedad de ser espacio Hurewicz se preserva bajo subespacios cerrados, imagenes continuas y uniones numerables. Claramente todos los espacios Hurewicz son Lindelöf. En los siguientes párrafos veremos cómo éstas dos últimas definiciones son distintas, es decir, no todo espacio Lindelöf es Hurewicz (Ejemplo 1.13).

Se discutirá la relación que hay entre los espacios Hurewicz y los espacios que son imagenes continuas de los números irracionales (llamados espacios analíticos). En particular se probará que el espacio de los números irracionales no es Hurewicz. Uno de los teoremas más importantes sobre los espacios Hurewicz fue dado por Arkangel'skii; un espacio X^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si para cada $f \in C_p(X)$ y cualquier colección numerable $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de $C_p(X)$ tal que $f \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i}$, existe una familia $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos finitos tales que $B_i \subset A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $f \in \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i}$. Este resultado caracteriza la propiedad Hurewicz para espacios topológicos por una propiedad topológica del espacio $C_p(X)$ definido en el Capítulo 3. Como consecuencia de esta caracterización surge la siguiente pregunta: ¿La clase de los espacios Hurewicz se preserva bajo t-equivalencias? En el Capítulo 3 se presenta la demostración del teorema de Arkangel'skii y una respuesta parcial a esta última pregunta.

En la parte final del Capítulo 4 se podrá ver una aplicación de la Teoría de Juegos Topológicos a los espacios Hurewicz para demostrar que tales espacios son D-espacios. Además veremos como la definición de espacio Hurewicz puede ser generalizada de una manera muy natural para obtener otras propiedades tipo cubierta.

El trabajo presentado a continuación se basó en los artículos [5] y [24].

Capítulo 1

Espacios Hurewicz

Definición 1.1 *Sea X un espacio. Una cubierta abierta de X es una familia de abiertos de X cuya unión es X. Si $F \subset X$ un cubrimiento abierto de F es una familia de abiertos de X cuya unión contiene a F.*

Definición 1.2 *Un espacio X es Hurewicz si para cada sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X, existe una cubierta α de X tal que $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ donde $\alpha_n \subset \gamma_n$ y α_n es finita para cada $n \in \mathbb{N}$.*

W. Hurewicz introdujo en [15] esta propiedad y mostró que para un espacio métrico esta propiedad es equivalente a la propiedad E introducida por M. K. Menger en [25]. En la literatura clásica un espacio Hurewicz es llamado espacio Menger.

Con respecto a la definición anterior tenemos la siguiente observación. Si X es un espacio y F es un subconjunto de X, se tiene que de toda cubierta abierta de F se obtiene un cubrimiento abierto de F y viceversa. Así que podemos intercambiar una noción por la otra y decir que F es Hurewicz si de toda sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubrimientos abiertos de F, existe $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \subset \gamma_n$, α_n es finita y α es un cubrimiento abierto de F.

De esta manera podemos tratar los conceptos de cubierta y cubrimiento como si fueran el mismo concepto, cosa que haremos en este trabajo.

Definición 1.3 *Un espacio X es σ-compacto si es una unión numerable de subespacios compactos.*

Proposición 1.4 *Todos los espacios compactos y σ-compactos son espacios Hurewicz.*

Demostración: Sean X un espacio compacto y $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X. Dado que X es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una subcolección finita α_n de γ_n tal que α_n cubre a X. Por tanto la colección $\alpha = \bigcup \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de X. Esto prueba que X es Hurewicz.

Ahora supongamos que Y es un espacio σ-compacto. Sean $K_1, K_2, ...$ subespacios compactos de Y tales que $Y = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Entonces, si $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de Y, se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una subcolección finita α_n de γ_n tal que α_n es una cubierta de K_n. Por tanto la colección $\alpha = \bigcup \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de Y. Esto demuestra que Y es Hurewicz. ■

W. Hurewicz conjeturó en [15] que un subconjunto de números reales es Hurewicz si y sólo si es σ-compacto. Un subconjunto no numerable de números reales es un conjunto *Luzin* si es denso y tiene intersección numerable con cada subconjunto denso en ningún lugar de $\mathbb{R}$. La Hipótesis del Continuo implica la existencia de un conjunto Luzin (véase [22, pág. 205]). Sierpiński en [33] demostró que un conjunto Luzin es Hurewicz pero no σ-compacto. Entonces la existencia de conjuntos Luzin contradice la conjetura de Hurewicz. Sin embargo, en [19, pág. 27], se probó que existe (en ZFC) un espacio métrico separable de cardinalidad ω_1 que es Hurewicz pero no σ-compacto.

Proposición 1.5 *Cualquier subespacio cerrado de un espacio Hurewicz es Hurewicz.*

Demostración: Sean X Hurewicz y F un subespacio cerrado de X. Dada una sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas de F, por abiertos de X, se tiene que la colección $\{\gamma_n \cup \{X\backslash F\} : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una subcolección finita α_n de γ_n tal que $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ es una cubierta de X. Entonces, si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\beta_n = \alpha_n \backslash \{X\backslash F\}$, se tiene que β_n es una subcolección finita de γ_n y, dado que α es una cubierta de X, se sigue que $\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n$ es una cubierta de F por abiertos de X. Como toda cubierta de F por abiertos de F induce una cubierta de F por abiertos de X, y viceversa, se puede concluir que F es Hurewicz. ■

Definición 1.6 *Un espacio es σ-Hurewicz si es una unión numerable de subespacios Hurewicz.*

Un espacio σ-compacto no es compacto, en general. Pero para espacios σ-Hurewicz, sucede lo siguiente.

Proposición 1.7 *Cada espacio σ-Hurewicz es Hurewicz.*

Demostración: Supongamos que X es un espacio tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ donde F_n es un subespacio Hurewicz de X, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X. Nótese que, para cada $k \in \mathbb{N}$, la colección $\{\gamma_n : n \geq k\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de F_k. Y dado que F_k es Hurewicz, se tiene que, para cada $n \geq k$, existe una subcolección finita α_n^k de γ_n tal que la colección $\alpha^k = \bigcup_{n \geq k} \alpha_n^k$ cubre a F_k. De manera que, si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\beta_n = \bigcup \left\{\alpha_n^k : k \leq n\right\}$, entonces β_n es una subcolección finita de γ_n. Además, puesto que α^k cubre a F_k, para demostrar que $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ es una cubierta de X, es suficiente mostrar que α^k está contenida en β para cada $k \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $k \in \mathbb{N}$ y $U \in \alpha^k$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$ y $U \in \alpha_n^k$ y por tanto $U \in \beta_n \subset \beta$. Esto muestra que $\alpha^k \subset \beta$ para cada $k \in \mathbb{N}$. ■

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.8 *Si X es Hurewicz y F es un subespacio F_σ de X, entonces F es Hurewicz.*

Demostración: Supongamos que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ donde F_n es un subespacio cerrado de X para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.5, F_n es Hurewicz para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por la Proposición 1.7, $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es Hurewicz. ■

Proposición 1.9 *La imagen continua de un espacio Hurewicz es Hurewicz.*

Demostración: Sean X y Y dos espacios topológicos tal que X es Hurewicz, y supongamos que $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva. Dada una sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de Y se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $f^{-1}[\gamma_n]$, formada por las imagenes inversas de elementos de γ_n bajo la función f, es una cubierta abierta de X. Por tanto el conjunto $\{f^{-1}[\gamma_n] : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una subcolección finita α_n de $f^{-1}[\gamma_n]$ tal que $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ es una cubierta de X. Definiendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, β_n como la colección formada por los elementos de γ_n tal que su imagen inversa bajo f esta en α_n, se tiene que β_n es una subcolección finita de γ_n y que la colección $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ es una cubierta de Y. ■

De la proposición anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.10 *La propiedad de ser Hurewicz es una propiedad topológica.*

Demostración: Sean X y Y dos espacios homeomorfos y suponagamos que X es Hurewicz. Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces h es una función continua y $h[X] = Y$. De la Proposición 1.9, Y es Hurewicz. ■

Definición 1.11 *Un espacio X es Lindelöf si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.*

Con respecto a esta propiedad se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.12 *Todo espacio Hurewicz es Lindelöf.*

Demostración: Sea X un espacio Hurewicz. Dada una cubierta abierta γ de X, si definimos $\gamma_n = \gamma$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la colección $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X y, como X es Hurewicz, existe una subcolección finita α_n de γ_n para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ es una cubierta de X. Por tanto α es una subcubierta numerable de γ. ■

Sin embargo el recíproco de esta proposición no es válido. Para esto veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.13

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los números irracionales con la topología heredada de $\mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R}$ es segundo numerable y metrizable, se sigue que $\mathbb{P}$ es segundo numerable y metrizable. Por tanto $\mathbb{P}$ es Lindelöf (véase [38, pág. 112]). Dado que los espacios $\mathbb{P}$ y $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ son homeomorfos [38, pág. 184] donde $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es el producto numerable de $\mathbb{N}$. Para demostrar que $\mathbb{P}$ no es Hurewicz es suficiente ver que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ no es Hurewicz (Corolario 1.10). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $P_n : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^n$ la función dada por $P_n\left((i_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = (i_1, ..., i_n)$ y

$$\gamma_n = \left\{P_n^{-1}(i_1, ..., i_n) : (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n\right\}.$$

Notemos que $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\pi_n : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ la función proyección sobre la n-ésima coordenada. Entonces si para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es un subconjunto finito de γ_n, existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n \notin \pi_n\left[\bigcup \alpha_n\right]$. Por tanto el punto $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está contenido en ningún elemento de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Esto muestra que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ no es Hurewicz.

De los parrafos anteriores se puede concluir que el espacio $\mathbb{P}$ de los números irracionales, con la topología heredada de $\mathbb{R}$, es hereditariamene Lindelöf, no Hurewicz y, de acuerdo a la Proposición 1.4, no σ-compacto.

Como una consecuencia de la Proposición 1.12 se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.14 *Todo espacio regular y Hurewicz es normal.*

Demostración: Si X es un espacio Hurewicz, entonces por la Proposición 1.12, X es Lindelöf y, dado que los espacios regulares y Lindelöf son normales (véase [38, pág. 111]), se sigue que X es normal. ■

Sea $\mathbb{R}_K$ el conjunto de los números reales cuya topología está generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ junto con los conjuntos de la forma $(a,b)\setminus K$, donde $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Claramente $\mathbb{R}$ es Hurewicz (véase Proposición 1.4) y en consecuencia cualquier intervalo abierto es Hurewicz (Corolario 1.10). Ahora, nótese que $\mathbb{R}_K\setminus K$ es unión numerable de intervalos abiertos, se sigue de la Proposición 1.7 que $\mathbb{R}_K\setminus K$ es Hurewicz. Entonces, si $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una suceción de cubiertas abiertas de $\mathbb{R}_K$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un subconjunto finito α_n de γ_n tal que la colección de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ es una cubierta de $\mathbb{R}_K\setminus K$. Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento U_n de γ_n tal que $\frac{1}{n} \in U_n$, se tiene que $\alpha_n \cup \{U_n\}$ es un subconjunto finito de γ_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_n \cup \{U_n\})$ es una cubierta de $\mathbb{R}_K$. Esto muestra que $\mathbb{R}_K$ es un espacio Hurewicz. Pero $\mathbb{R}_K$ no es normal, ya que los conjuntos cerrados $\{0\}$ y K no pueden ser separados por abiertos ajenos en $\mathbb{R}_K$. Como consecuencia se tiene que la regularidad en la Proposición 1.14 es necesaria.

A continuación damos un ejemplo de un espacio Hurewicz X tal que $X \times X$ no es Hurewicz.

Ejemplo 1.15

Sea X un (conjunto Luzin) subconjunto no numerable denso de la recta real $\mathbb{R}$ tal que si A es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ denso en ningún lugar en $\mathbb{R}$, entonces $A \cap X$ es numerable (véase [23, pág. 525]). Dotamos a X con la topología para la cual la intersección de X con los intervalos semi abiertos

$$[a, b) = \{r \in \mathbb{R} : a \leq r < b\}$$

constituye una base para los conjuntos abiertos de X. El espacio X es regular (véase [20, pág. 133]). Para ver que X es Hurewicz consideremos una sucesión $\{\gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X. Como X es denso en $\mathbb{R}$, existen puntos $x_i \in X$ tales que el conjunto $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$. Como γ_i es una cubierta abierta de X, existe un número $r_i > x_i$ tal que $X \cap [x_i, r_i)$ está contenido en un elemento G_i de γ_i. Entonces el conjunto

$$Y = \mathbb{R}\setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [x_i, r_i)$$

es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, y por tanto $Y \cap X$ es numerable. De manera que podemos escribir $Y \cap X = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Sea $\alpha_i \subset \gamma_i$ la colección de dos elementos formada por G_i y un elemento de γ_i que contiene a y_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Se sigue que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$ es una cubierta de X, lo cual prueba que X es Hurewicz. Para ver que $X \times X$ no es Hurewicz consideramos los subconjuntos

$$C = \{(x, -x) : x \in X\}\,,\ D = \{(x_i, x_j) : i, j \in \mathbb{N}\}$$

de $X \times X$. Claramente, C es un subespacio cerrado no numerable y discreto de $X \times X$. Por otro lado, D es un subespacio denso e infinito numerable de $X \times X$. Pero un espacio normal no puede contener subespacios C y D con estas últimas propiedades (véase [18, pág. 671]). Con esto se concluye que $X \times X$ no es normal. De la Proposición 1.14, se sigue que $X \times X$ no es Hurewicz.

Definición 1.16 *Sean X y Y dos espacios topológicos. Denotamos por X^Y al espacio $\prod_{y \in Y} X_y$ donde $X_y = X$ para cada $y \in Y$. Para cada $y \in Y$ definimos la función $\pi_y : X^Y \to X$ como $\pi_y(f) = f(y)$. Decimos que un subconjunto $\mathcal{F}$ de X^Y tiene la topología de la convergencia puntual si $\mathcal{F}$ tiene la topología de subespacio inducida por la topología producto de X^Y.*

Definición 1.17 *Decimos que un espacio es analítico si es imagen continua del espacio de los números irracionales $\mathbb{P}$.*

Definición 1.18 *Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de un espacio X es una red para X, si para cada punto $x \in X$ y cada conjunto abierto O de X que contiene a x, existe $M \in \mathcal{N}$ tal que $x \in M \subset O$.*

Definición 1.19 *Un espacio X es perfectamente normal si es normal y todo subconjunto cerrado de X es G_δ.*

Recordando que un *p-espacio* es un espacio completamente regular y Hausdorff en el cual todo G_δ es abierto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.20 *Todo espacio completamente regular, analítico y no σ-compacto contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{P}$.*

Demostración: Sea X un espacio analítico no σ-compacto. Como X es imagen continua de $\mathbb{P}$, entonces tiene una red numerable [22, pág. 448, Teorema 4.9], y por tanto es hereditariamente Lindelöf. Como los espacios regulares y Lindelöf son normales [38, pág. 111], X es normal. Luego, si O es un conjunto abierto de X, por la regularidad de X, para cada $x \in O$, existe un conjunto abierto U_x en X tal que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset O$. Entonces $\{U_x : x \in O\}$ es una cubierta abierta de O, de modo que existe un subconjunto numerable $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset O$ tal que $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de O. Por tanto $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{U_{x_i}}$. En consecuencia se tiene que todo conjunto abierto de X es F_σ. Esto implica que X es perfectamente normal. Por el Teorema 3.8.12 en [29, pág. 193], algún subespacio cerrado Y de X admite una función perfecta suprayectiva sobre $\mathbb{P}$. De acuerdo al Teorema 4.17 en [22, pág. 809], Y es un p-espacio. En consecuencia, Y tiene una base numerable ya que este tiene una red numerable (véase [22, pág. 446, Teorema 4.2]) y puesto que Y es regular, Y es metrizable [38, pág. 166, Teorema 23.1].

Por otro lado, como $\mathbb{P}$ no es σ-compacto (Ejemplo 1.13), Y tampoco lo es. Ahora veamos que Y es analítico. Dado que X es analítico, existe una función continua y suprayectiva $f : \mathbb{P} \to X$. Si $f^{-1}[Y] = \mathbb{P}$, entonces la restrición de f al conjunto $f^{-1}[Y]$ es una función continua y suprayectiva de $\mathbb{P}$ a Y. Supongase que existe $x \in \mathbb{P} \backslash f^{-1}[Y]$, como Y es un subespacio cerrado de X, el conjunto $f^{-1}[Y]$ es cerrado en $\mathbb{P}$, entonces existe un conjunto abierto y cerrado O en $\mathbb{P}$ que contiene a x y no intersecta a $f^{-1}[Y]$. Definiendo $g : \mathbb{P} \to Y$ como $g(z) = f(z)$, si $z \in \mathbb{P} \backslash O$ y $g(z) = y_0$ en otro caso, donde y_0 es un punto fijo de Y, se tiene que g es una función continua y suprayectiva de $\mathbb{P}$ en Y. Esto muestra que Y es analítico.

Usando el Lema 8.8 de [22, pág. 141], Y contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{P}$. ■

Dado que el espacio $\mathbb{P}$ no es Hurewicz (véase Ejemplo 1.13), se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.21 *Si X es un espacio completamente regular, analítico y Hurewicz, entonces X es σ-compacto.*

Demostración: Sea X un espacio analítico y Hurewicz. Supongamos que X no es σ-compacto. Entonces, por el Teorema 1.21, X contiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{P}$, lo cual es una contradicción al hecho que $\mathbb{P}$ no es Hurewicz y a la Proposición 1.5. ■

Proposición 1.22 *Un espacio X es compacto si y sólo si $X^{\mathbb{N}}$ es Hurewicz.*

Demostración: Si X es un espacio compacto, entonces $X^{\mathbb{N}}$ es compacto y, por la Proposición 1.4, $X^{\mathbb{N}}$ es Hurewicz. Supongamos que $X^{\mathbb{N}}$ es Hurewicz. Entonces por la Proposición 1.12, $X^{\mathbb{N}}$ es Lindelöf y como X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X^{\mathbb{N}}$, X es Lindelöf, y por tanto es suficiente demostrar que X es numerablemente compacto [38, pág. 125]. Pero si A es un subespacio infinito numerable cerrado y discreto de X, entonces $A^{\mathbb{N}}$ es un subespacio cerrado de $X^{\mathbb{N}}$ homeomorfo a $\mathbb{P}$ [38, pág. 184]. De manera que $\mathbb{P}$ es Hurewicz, lo cual es una contradicción al Ejemplo 1.13. ■

Capítulo 2

Espacios metrizables Hurewicz

Sea X un espacio métrico con métrica ρ. Si A es un subconjunto arbitrario no vacío de X, denotamos por $diám_{\rho}(A)$ al diámetro de A con respecto a la métrica ρ, es decir, $diám_{\rho}(A) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$.

Definición 2.1 *Sea X un espacio metrizable. Decimos que una colección α de subconjuntos de X es una sucesión cero si α es numerable y los diámetros de los elementos de α convergen a cero.*

Sea X un espacio metrizable. Si ρ es una métrica definida en X tal que la topología en X inducida por ρ coincide con la topología en X. Decimos entonces que ρ es una metrización de X.

Definición 2.2 *Sea α una colección de subconjuntos de un espacio X.*

1. *Decimos que α es punto finita en cada punto de X, si cada $x \in X$ pertence sólo a una cantidad finita de elementos de α.*

2. *Decimos que α es localmente finita en cada punto de X, si cada $x \in X$ tiene una vecindad que intersecta sólo a una cantidad finita de elementos de α.*

Dadas dos cubiertas α y β de un espacio X, decimos que α refina a β si cada elemento de α está contenido en algún elemento de β.

Definición 2.3 *Un espacio Hausdorff X es paracompacto si cada cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

Definición 2.4 *Sea X un espacio. Decimos que una colección α de subconjuntos de X es a lo más punto finita si para cada subconjunto abierto G de X, la colección $\{A \in \alpha : A \backslash G \neq \emptyset\}$ es punto finita en cada punto de G.*

Definición 2.5 *Sea X un espacio. Decimos que una colección α de subconjuntos de X es a lo más localmente finita si para cada subconjunto abierto G de X, la colección $\{A \in \alpha : A \backslash G \neq \emptyset\}$ es localmente finita en cada punto de G.*

En este capítulo probaremos que para un espacio metrizable X, X es Hurewicz si y sólo si X satisface alguna de las afirmaciones siguientes:

(a). Para cada metrización de X existe una cubierta α de X tal que α es una sucesión cero.

(b). Para cada metrización de X existe una base β para los conjuntos abiertos de X tal que β es una sucesión cero.

(c). Existe una metrización de X para la cual cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es una sucesión cero.

(d). Para cada metrización de X, cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es una sucesión cero.

(e). Para cada metrización de X, cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una base β para los conjuntos abiertos de X tal que β es una sucesión cero.

El siguiente diagrama muestra las implicaciones que serán probadas (flechas oscuras), mientras que el resto de las implicaciones se siguen de sus hipótesis correspondientes.

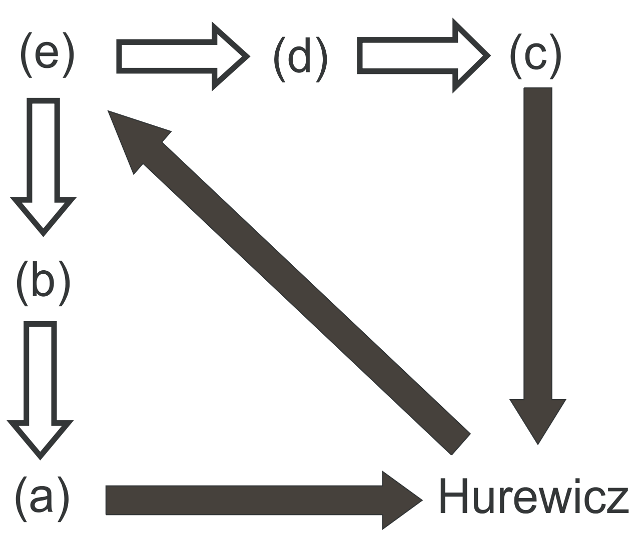

Diagrama 1

Y en el caso en que X es un espacio metrizable y separable, X es Hurewicz si y sólo si X satisface alguna de las afirmaciones siguientes:

(f). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es a lo más punto finita.

(g). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es a lo más localmente finita.

(h). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es punto finita.

(i). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es localmente finita.

(j). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una base β para los conjuntos abiertos de X tal que β es a lo más punto finita.

(k). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una base β para los conjuntos abiertos de X tal que β es a lo más localmente finita.

De hecho se probara que (e) implica (k) y como consecuencia si X es un espacio metrizable y separable, X es Hurewicz si y sólo si X satisface alguna de la afirmaciones (a)-(k). Un esquema de la demostración se muestra en el siguiente diagrama donde las flechas claras se siguen de las hipótesis correspondientes y las flechas oscuras serán probadas en los siguientes parrafos.

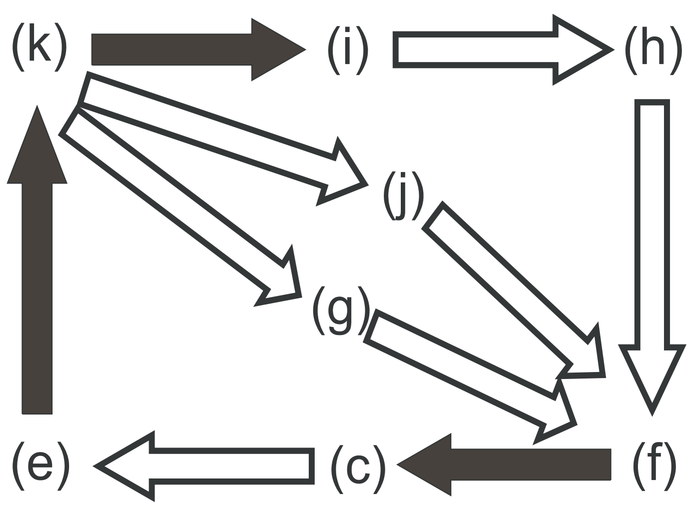

Diagrama 2

Definición 2.6 *Una pseudométrica sobre un espacio X es una función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y, z \in X$ satisface las siguientes propiedades:*

1. $\rho(x, y) \geq 0,$
2. $\rho(x, x) = 0,$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x),$
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$

Lema 2.7 *Si X es un espacio regular, Lindelöf y $\{\gamma_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas de X, entonces existen una pseudométrica p en X y una sucesión de cubiertas abiertas $\{\chi_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ de X tal que χ_i refina a γ_i para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y, para cada subconjunto $Y \subset X$ tal que*

$$diám_p(Y) < \infty \quad o \quad diám_p(Y) < 2^{-i}$$

Y intersecta sólo a una cantidad finita de elementos de χ_0 o χ_i, respectivamente, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demostración: Primero recordemos que los espacios regulares y Lindelöf son normales y paracompactos (véase [38, pág. 111, 146]). Como X es Lindelöf y paracompacto, existe una cubierta abierta numerable localmente finita $\{U_{i1}, U_{i2}, ...\}$ de X que refina a γ_i, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que X es normal, existe una cubierta abierta

$$\chi_i = \{G_{i1}, G_{i2}, ...\}$$

de X tal que $\overline{G_{ij}} \subset U_{ij}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (véase [20, pág. 171]). Por tanto χ_i refina a γ_i. Por el Lema de Urysohn, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y toda $j \in \mathbb{N}$, existe una función continua f_{ij} sobre X con valores reales tal que $f_{ij}(x) = j$ para $x \in G_{ij}$ y $f_{ij}(x) = 0$ para $x \in X \backslash U_{ij}$. Entonces es fácil ver que la función p definida por

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{0j}(x) - f_{0j}(y)| + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} mín \left\{1, \sum_{j=1}^{\infty} |f_{ij}(x) - f_{ij}(y)|\right\}$$

es una pseudométrica en X. En efecto, las series

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{0j}(x) - f_{0j}(y)|$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{ij}(x) - f_{ij}(y)|$$

convergen ya que las cubiertas abiertas $\{U_{i1}, U_{i2}, ...\}$ son localmente finitas (punto finitas). Por tanto $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$. El resto de las propiedades se siguen de la definición y de la desigualdad del triángulo del valor absoluto. Si un subconjunto $Y \subset X$ intersecta a una cantidad infinita de elementos de χ_i, entonces existen puntos $y_{ik} \in Y \cap G_{ij_k}$ donde $j_k < j_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que y_{i1} (como cualquier otro punto de alguna vecindad de y_{i1}) está en una cantidad finita de conjuntos U_{ij} para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_{ij_k}(y_{i1}) = 0$ para todo $k \geq N$. De manera que

$$|f_{ij_k}(y_{ik}) - f_{ij_k}(y_{i1})| = j_k,$$

para todo $k \geq N$. Entonces, si $i = 0$, se sigue que $p(y_{ik}, y_{i1}) \geq j_k$ para todo $k \geq N$, esto implica que $\textit{diám}_p(Y) = \infty$. Luego, si $i > 0$, se tiene que, para cada $k \geq N$,

$$\sum\nolimits_{j=1}^{\infty} |f_{ij}(y_{ik}) - f_{ij}(y_{i1})| \geq j_k \geq 1,$$

y por tanto

$$\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \textit{mín}\left\{1, \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} |f_{ij}(y_{ik}) - f_{ij}(y_{i1})|\right\} = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \geq 2^{-i},$$

de manera que $p(y_{ik}, y_{i1}) \geq 2^{-i}$. Esto prueba que $\textit{diám}_p(Y) \geq 2^{-i}$. ■

Lema 2.8 *Si X es un espacio metrizable que satisface la condición (a), entonces X es Lindelöf.*

Demostración: Como X es metrizable, es suficiente demostrar que X es segundo numerable [38, pág. 112]. Sea ρ una metrización de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $\rho_n : X \times X \to \mathbb{R}$ como $\rho_n(x,y) = \textit{mín}\left\{\rho(x,y), \frac{1}{n}\right\}$. No es difícil demostrar que ρ_n es una metrización de X, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que X satisface (a) y ρ_n es una metrización de X, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una cubierta α_n de X tal que α_n es una sucesión cero. En particular, α_n es numerable y cada uno de sus elementos tiene diámetro no mayor que $\frac{1}{n}$. Entonces la colección $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ es una red numerable de X. En efecto, dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $U \in \alpha_n$ tales que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y $x \in U$. Como $\textit{diám}_{\rho_n}(U) \leq \frac{1}{n}$, se tiene que U está contenido en la bola (con respecto a ρ_n) de radio ε al rededor de x. Se sigue de [12, pág. 255, Teorema 4.1.15], que X es segundo numerable. ■

Lema 2.9 *Si X es un espacio metrizable que satisface la condición (c), entonces X es separable.*

Demostración: Sea β una base para los conjuntos abiertos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\beta_n = \left\{U \in \beta : \textit{diám}\,(U) \leq \frac{1}{n}\right\}$. Nótese que β_n es una base para los conjuntos abiertos de X para cada $n \in \mathbb{N}$. De (c), se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una subcubierta α_n de β_n tal que α_n es una sucesión cero. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ es una base numerable de X. El resto de la demostración se sigue de [38, pág. 112]. ■

Teorema 2.10 *Sea X un espacio metrizable. Entonces X es Hurewicz si y sólo si X satisface alguna de las afirmaciones (a)-(e).*

Demostración: Un esquema de la demostración está dada en el diagrama 1, en el cual sólo tres implicaciones son no triviales y a continuación serán probadas.

Supongamos que X satisface (a). Sean p una metrización de X y $\{\gamma_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X. Por el Lema 2.8, X es Lindelöf. También X es regular pues es metrizable. Entonces por el Lema 2.7, existe una pseudométrica ρ y $\{\chi_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X tales que ρ y χ_i cumplen las condiciones del Lema 2.7. Entonces $\sigma = \rho + p$ es una metrización de X (véase [38, pág. 20] y definición de ρ en la demostración del Lema 2.7), y por (a), existe una cubierta $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ de X tal que $\textit{diám}_\sigma\,(A_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $\textit{diám}_\sigma\,(A_i)$ converge a cero cuando i tiende a infinito. De manera que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un entero positivo i_k tal que $i_k < i_{k+1}$, y si $i_k \leq i < i_{k+1}$, entonces $\textit{diám}_\sigma\,(A_i) < 2^{-k}$. En efecto, sea $i_0 = 1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$i_k = \textit{mín}\left\{n \in \mathbb{N} : n > i_{k-1} \text{ y para todo } j \geq n,\, \textit{diám}_\sigma\,(A_j) < 2^{-k}\right\}.$$

Como la sucesión formada por los diámetros de los conjuntos A_i converge a cero se sigue que i_k está bien definido y si i es un entero positivo tal que $i_k \leq i < i_{k+1}$, entonces $\textit{diám}_\sigma\,(A_i) < 2^{-k}$. Sea

$$\delta_k = \left\{G \in \chi_k : G \cap \bigcup_{i=i_k}^{i_{k+1}} A_i \neq \emptyset\right\}$$

para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que χ_k y $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ son cubiertas de X, entonces la unión $\bigcup_{i=0}^{\infty} \delta_i$ lo es. Se sigue de la desigualdad,

$$\textit{diám}_\rho\,(A_i) \leq \textit{diám}_\sigma\,(A_i)\,,$$

que A_i intersecta sólo una cantidad finita de elementos de χ_k siempre que $i_k \leq i < i_{k+1}$. En consecuencia, δ_k es finito para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pero $\delta_k \subset \chi_k$ y χ_k refina a γ_k, entonces cada elemento de δ_k está contenido en algún elemento de γ_k. De esta forma obtenemos una colección finita $\alpha_k \subset \gamma_k$ tal que $\bigcup \delta_k \subset \bigcup \alpha_k$ para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por tanto $\bigcup_{i=0}^{\infty} \alpha_i$ es una cubierta de X. Esto prueba que X es Hurewicz.

Ahora, supongamos que X satisface (c) y elijamos una metrización ρ de X que satisface tales hipótesis. Sea $\{\gamma_i : i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X. Dada $x \in X$ y $r > 0$, denotamos por $B(x, r)$ la bola abierta con centro en x y radio r, con respecto a la métrica ρ en X. Como γ_i es una cubierta abierta de X, existen números $r_i(x) > 0$ tales que $r_i(x) < 2^{-i}$ y $B(x, r_i(x))$ está contenido en un elemento $G_i(x)$ de γ_i para $x \in X$. Sea

$$C_i = \left\{(x, y) \in X \times X : 2^{-i} \leq \rho(x, y) \leq 2^{1-i}\right\}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Denotamos por $I(X)$ al conjunto de puntos aislados de X. Entonces la colección

$$\beta = \{\{x\} : x \in I(X)\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{B(x, r_i(x)) \cup B(y, r_i(y)) : (x, y) \in C_i\}$$

es una base para los conjuntos abiertos de X. En efecto, sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Si x es un punto aislado, es claro que existe un elemento de β que contiene a x que se queda contenido en $B(x, \varepsilon)$. Supongamos que x no es aislado. Entonces, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $y_j \in X$ tal que $2^{-j} \leq \rho(x, y_j) \leq 2^{1-j}$, en particular, eligiendo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $2^{3-k} < \varepsilon$, se tiene que $(x, y_{k-1}) \in C_{k-1}$ y

$$B(x, r_{k-1}(x)) \cup B(y_{k-1}, r_{k-1}(y_{k-1})) \subset B(x, \varepsilon).$$

Esto muestra que β es una base para X. Por (c), existe una sucesión de enteros positivos i_j y una sucesión de pares $(x_i, y_i) \in C_{i_j}$ tales que

$$X \backslash I(X) \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B\left(x_j, r_{i_j}(x)\right) \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B\left(y_j, r_{i_j}(y_j)\right)$$

y *diám*$_\rho \left[B\left(x_j, r_{i_j}(x_j)\right) \cup B\left(y_j, r_{i_j}(y_j)\right)\right]$ converge a cero cuando j tiende a infinito. De manera que $\rho(x_j, y_j)$ también converge a cero y, en consecuencia, el conjunto C_i puede contener sólo una cantidad finita de pares ordenados (x_j, y_j). Se sigue que la colección

$$\varphi_i = \left\{G_{i_j}(x_j) : i_j = i\right\} \cup \left\{G_{i_j}(y_j) : i_j = i\right\}$$

es finita para cada $i \in \mathbb{N}$. Más aún, $X \backslash I(X)$ está contenido en la unión

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup \varphi_i$$

y dado que, de acuerdo a (c), X es separable (Lema 2.9), $I(X)$ debe ser numerable. Entonces podemos suponer que $I(X)$ está ordenado en una sucesión y sea G_i un elemento de γ_i que contiene el i-ésimo punto de esta sucesión. Entonces, tomando $\alpha_i = \varphi_i \cup \{G_i\}$, se obtiene una colección $\alpha_i \subset \gamma_i$ tal que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i$ es una cubierta de X. Esto nuevamente prueba que X es Hurewicz.

Finalmente, supongamos que X es Hurewicz y que ρ es una metrización de X. Para cada $i \in \mathbb{N}$, γ_i la colección formada por todos los elementos G de una base arbitraria para los conjuntos abiertos de X tal que $diám_\rho(G) < 2^{-i}$. Como X es Hurewicz, para cada $j \in \mathbb{N}$, existen cubiertas α_j de X tal que $\alpha_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_{ij}$ donde $\alpha_{ij} \subset \gamma_{i+j}$ y α_{ij} es finita. Entonces cada α_j es una sucesión cero y $diám_\rho(G) < 2^{-j}$ para cada $G \in \alpha_j$. Por tanto $\beta = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j$ es una sucesión cero también. Y dado que α_j es una cubierta abierta de X para cada $j \in \mathbb{N}$, β es una base para los conjuntos abiertos de X. Concluimos que X satisface (e). ∎

Los espacios topológicos metrizables que satifacen la propiedad (c) son llamados *fuertemente Lindelöf* y, como consecuencia del teorema anterior, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 2.11 *Cada espacio metrizable el cual es imagen continua de un espacio metrizable fuertemente Lindelöf es fuertemente Lindelöf.*

Demostración: Sean X y Y dos espacios metrizables, y sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es fuertemente Lindelöf, se sigue del Teorema 2.10 que X es Hurewicz. Aplicando la Proposición 1.9, Y es Hurewicz. Nuevamente aplicando el Teorema 2.10, concluimos que Y es fuertemente Lindelöf. ∎

Corolario 2.12 *Cada espacio metrizable que es unión numerable de subespacios fuertemente Lindelöf, es fuertemente Lindelöf.*

Demostración: Sea X un espacio metrizable tal que X es una unión numerable de subespacios fuertemente Lindelöf. Entonces, por el Teorema 2.10, X es unión numerable de subespacios Hurewicz. Se sigue de la Proposición 1.7 que X es Hurewicz y por el Teorema 2.10, X es un espacio fuertemente Lindelöf. ∎

Corolario 2.13 *Cada F_σ en un espacio metrizable fuertemente Lindelöf es fuertemente Lindelöf.*

Demostración: Sea X un espacio metrizable fuertemente Lindelöf, y sea F un subconjunto F_σ de X. Aplicando el Teorema 2.10, se tiene que X es Hurewicz. Luego, por el Corolario 1.8, F es un subespacio Hurewicz. De manera que, por el Teorema 2.10, F es un subespacio fuertemente Lindelöf. ∎

A continuación se demuestran las implicaciones oscuras del diagrama 2. Para esto recordemos las siguientes afirmaciones:

(c). Existe una metrización de X para la cual cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es una sucesión cero.

(e). Para cada metrización de X, cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una base β para los conjuntos abiertos de X tal que β es una sucesión cero.

(f). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una cubierta α de X tal que α es a lo más punto finita.

(k). Cada base para los conjuntos abiertos de X contiene una base β para los conjuntos abiertos de X tal que β es a lo más localmente finita.

Teorema 2.14 *Sea X un espacio metrizable y separable. Entonces X es Hurewicz si y sólo si X satisface alguna de las afirmaciones (a)-(k).*

Demostración: Un esquema de la prueba está dada en el diagrama 2. Por el Teroema 2.10, se tiene que (c) implica (e). Luego, las implicaciones, (k) implica (g), (k) implica (j), (g) implica (f), (j) implica (f), (i) implica (h) y (h) implica (f) se siguen de sus hipótesis correspondientes. Entonces sólo restan tres implicaciones, una de ellas es (k) implica (i), la cual está probada en [1, pág. 590], y su demostración no la incluimos aquí.

Supongamos que X satisface (e) y probemos (k). Sea $\mathcal{B}$ una base para los conjuntos abiertos de X. Por (e), $\mathcal{B}$ contiene una base β para los conjuntos abiertos de X tal que β es una sucesión cero Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\gamma_n = \left\{U \in \beta : \textit{diám}\,(U) \leq \frac{1}{n}\right\}$. Nótese que γ_n es una cubierta abierta de X. Se sigue de [12, pág. 193, Teorema 3.8.11], que existe una cubierta abierta α_n de X tal que α_n es un refinamiento localmente finito de γ_n. Claramente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ es una base para los conjuntos abiertos de X. Veamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ es a lo más localmente finito. Sean O un conjunto abierto de X y $x \in O$. Elejimos $n \in \mathbb{N}$ tal que la bola de radio $\frac{1}{n}$ al rededor de x, $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ está contenida en O. Si $k \geq 2n$, entonces para cada elemento $U \in \alpha_k$ tal que $U \cap B\left(x, \frac{1}{2n}\right) \neq \emptyset$, si tiene que $U \subset B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Por otro lado, para cada $m < 2n$, como α_m es localmente finita, existe un conjunto abierto W_m de x, tal que W_m intersecta sólo a una cantidad finita de elementos de α_m. Sea

$$W = \bigcap_{i=1}^{2n-1} W_i \cap B\left(x, n^{-1}\right).$$

Si $k \geq 2n$ y A es un elemento de α_k tal que $A \cap W \neq \emptyset$, como $W \subset B\left(x, \frac{1}{n}\right)$, se tiene que $A \subset O$, esto implica que $A \notin \left\{B \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n : B \backslash O \neq \emptyset\right\}$. Entonces

$$\left\{B \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n : B \backslash O \neq \emptyset\right\} \subset \bigcup_{i=1}^{2n-1} \alpha_n,$$

y dado que $W \subset \bigcap_{i=1}^{2n-1} W_i$, se tiene que W intersecta sólo a una cantidad finita de elementos de $\bigcup_{i=1}^{2n-1} \alpha_n$. Por tanto W intersecta sólo una cantidad finita de elementos de $\left\{B \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n : B \backslash O \neq \emptyset\right\}$.

Supongamos que X satisface (f). Como X es separable y metrizable, X puede ser encajado en un cubo de Hilbert [38, pág. 166, Teorema 23.1]. Sea ρ la métrica en X heredada por el cubo de Hilbert y sea β una base para los conjuntos abiertos de X. Como ρ es totalmente acotado, existen conjuntos finitos $F_i \subset X$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, $\rho(x, F_i) < 2^{-i}$ [38, pág. 182, 24B]. Sea

$$\gamma_i = \left\{G \in \beta : 2^{-i} \leq diám_\rho(G) \leq 2^{1-i}\right\}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Dada $G \in \gamma_i$, tomamos los puntos $x \in G$ y $y \in F_i$ tales que $\rho(x, y) < 2^{-i}$ y un elemento $U_i(G) \in \beta$ tal que $y \in U_i(G)$ y $diám_\rho(U_i(G)) < 2^{-i}$. Entonces

$$diám_\rho(G \cup U_i(G)) < 2^{1-i} + 2^{-i} + 2^{-i} = 2^{2-i}$$

para cada $G \in \gamma_i$ y $i \in \mathbb{N}$. Entonces la colección

$$\beta' = \{\{x\} : x \in I(X)\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{G \cup U_i(G) : G \in \gamma_i\}$$

es una base para los conjuntos abiertos de X y, por (f), existe una sucesión de colecciones $\varphi_i \subset \gamma_i$ tales que

$$\alpha' = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{G \cup U_i(G) : G \in \varphi_i\}$$

es a lo más punto finito y $X \backslash I(X) \subset \bigcup \alpha'$. Entonces podemos suponer que cada elemento de α' tiene exactamente una representación $G \cup U_i(G)$ donde $G \in \varphi_i$ y $i \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que φ_i es finito para todo $i \in \mathbb{N}$. Supongamos lo contrario, que φ_{i_0} es infinito. Como $U_{i_0}(G)$ intersecta a F_{i_0} para cada $G \in \varphi_{i_0}$, y F_{i_0} es finito, existe un punto $y_0 \in F_{i_0}$ tal que y_0 está en una cantidad infinita de conjuntos $G \cup U_{i_0}(G)$ donde $G \in \varphi_{i_0}$. Como $\varphi_{i_0} \subset \gamma_{i_0}$, estos conjuntos tienen diámetros no menores que 2^{-i_0}, y por tanto la colección

$$\alpha_0 = \left\{A \in \alpha' : A \backslash B\left(y_0, 2^{-2-i_0}\right) \neq \emptyset\right\}$$

los contiene a todos. En concecuencia, α_0 no es punto finito en y_0, esto es una contradicción al hecho que α' es a lo más punto finito.

Dado que X es separable, el conjunto $I(X)$ de los puntos aislados de X es numerable, y $x \in I(X)$ implica que $\{x\} \in \beta$. Se sigue que la colección

$$\alpha = \{\{x\} : x \in I(X)\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{U_i(G) : G \in \varphi_i\}$$

está contenida en β y $\bigcup \alpha = I(X) \cup \bigcup \alpha' = X$. Más aún, como φ_i son finitos para cada $i \in \mathbb{N}$, la cubierta α es una sucesión cero. Esto prueba que X satisface (c). ■

Los espacios topológicos que satisfacen la propiedad (a) son llamados *totalmente paracompactos*. Como consecuencia del Teorema anterior se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 2.15 *Cada espacio metrizable el cual es imagen continua de un espacio metrizable, separable y totalmente paracompacto es totalmente paracompacto.*

Demostración: Sea X un espacio metrizable, separable y totalmente paracompacto. Supongase que existe una función continua y suprayectiva, $f : X \to Y$, donde Y es un espacio metrizable. De la continuidad de f, y dado que X es separable, se tiene que Y es separable. Luego, puesto que X, por el Teorema 2.14, es Hurewicz, se sigue que Y también lo es (véase Proposición 1.9). Por tanto Y es Hurewicz y separable. Del Teorema 2.14 se concluye que Y es totalmente paracompacto. $\blacksquare$

Corolario 2.16 *Cada espacio metrizable separable que es la unión de una colección numerable de subespacios totalmente paracompacto es totalmente paracompacto.*

Demostración: Sea X un espacio metrizable y separable el cual es unión numerable de subespacios totalmente paracompactos. Entonces cada uno de estos subespacios son separables, y por tanto, aplicando el Teorema 2.14, son subespacios Hurewicz. De la Proposición 1.7, se tiene que X es Hurewicz, y por tanto totalmente paracompacto (véase Teorema 2.14). $\blacksquare$

Corolario 2.17 *Cada F_σ separable en un espacio metrizable totalmente paracompacto es totalmente paracompacto.*

Demostración: Sea X un espacio metrizable, separable y totalmente paracompacto. Supongase que F es un subconjunto F_σ de X. Del Teorema 2.14, se tiene que X es Hurewicz y, por el Corolario 1.8, F es Hurewicz. Dado que cualquier subespacio de X es separable, se concluye del Teorema 2.14 que F es un espacio totalmente paracompacto. $\blacksquare$

Capítulo 3

Espacios Hurewicz, estrechez y espacios de funciones continuas

Definición 3.1 *La estrechez de abanico de un punto x en un espacio X es el mínimo cardinal $\tau \geq \aleph_0$ tal que para cada familia $\{A_\alpha : \alpha < \tau\}$ de subconjuntos de X tal que $x \in \bigcap_{\alpha<\tau} \overline{A_\alpha}$, existen subconjuntos B_α de A_α tales que $|B_\alpha| < \tau$ y $x \in \overline{\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha}$; este cardinal es denotado por $vet\,(x, X)$. La estrechez de abanico de X es el supremo de todos los cardinales $vet\,(x, X)$ y es denotado por $vet\,(X)$.*

Algunos resultados acerca de esta definición son los siguientes.

Proposición 3.2 *Si Y es subespacio de un espacio X, entonces $vet\,(Y) \leq vet\,(X)$.*

Demostración: Sean $y \in Y$, $\tau = vet\,(y, X)$ y $\{A_\alpha : \alpha < \tau\}$ una colección de subconjuntos de Y tal que $y \in \bigcap_{\alpha<\tau} cl_Y\,(A_\alpha)$. Dado que $cl_Y\,(A) \subset cl_X\,(A)$ para cualquier subconjunto A de Y, se tiene que $y \in \bigcap_{\alpha<\tau} cl_X\,(A_\alpha)$. Entonces, para cada $\alpha < \tau$, existe un subconjunto B_α de A_α tal que $|B_\alpha| < \tau$ y $y \in cl_X\left(\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha\right)$. Por tanto $y \in cl_X\left(\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha\right) \cap Y = cl_Y\left(\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha\right)$. Esto muestra que $vet\,(y, Y) \leq \tau$. Y dado que y fue arbitrario y $\tau \leq vet\,(X)$, concluimos que $vet\,(Y) \leq vet\,(X)$. ■

Definición 3.3 *El caracter de un punto x en un espacio X es el mínimo cardinal de la forma $|B\,(x)|$ donde $B\,(x)$ es una base infinita de x en X; este cardinal es denotado por $\chi\,(x, X)$. El caracter de X es el supremo de los cardinales $\chi\,(x, X)$ y es denotado por $\chi\,(X)$.*

Definición 3.4 *La estrechez de un punto x en un espacio X es el mínimo cardinal $\tau \geq \aleph_0$ tal que para cualquier subconjunto A de X y cualquier punto x de X tal que $x \in \overline{A}$, existe un subconjunto B de A tal que $|B| \leq \tau$ y $x \in \overline{B}$; este cardinal es denotado por $t\,(x, X)$. La estrechez de X es el supremo de todos los cardinales $t\,(x, X)$ y es denotado por $t\,(X)$.*

Con respecto a estas dos definiciones se tiene la siguiente relación.

Proposición 3.5 *Para cualquier espacio X, $t(X) \leq vet(X) \leq \chi(X)$.*

Demostración: Sean $x \in X$, $\tau = vet(x, X)$ y A un subconjunto de X tal que $x \in \overline{A}$. Toman do $A_\alpha = A$ para cada $\alpha < \tau$, se tiene que, por definición de τ, existen subconjuntos B_α de A tales que $|B_\alpha| < \tau$ para cada $\alpha < \tau$ y $x \in \overline{\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha}$. Entonces $\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha$ es un subconjunto de A tal que

$$\left|\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha\right| \leq \tau$$

y $x \in \overline{\bigcup_{\alpha<\tau} B_\alpha}$. Esto muestra que $t(x, X) \leq \tau$. Dado que x fue arbitrario y $\tau \leq vet(X)$, concluimos que $t(X) \leq vet(X)$.

Sean $z \in X$, $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$ una familia de subconjuntos de X tal que $z \in \bigcap_{\alpha<\beta} \overline{A_\alpha}$ donde $\beta = \chi(z, X)$ y

$$B(z) = \{U_\alpha : \alpha < \beta\}$$

una base para z en X. Para cada $\alpha < \beta$, como $z \in \overline{A_\alpha}$, existe un elemento $y_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$. Tomando $B_\alpha = \{y_\alpha\}$ para cada $\alpha < \beta$, se tiene que $|B_\alpha| < \beta$ para cada $\alpha < \beta$ y $z \in \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha}$. De aquí se sigue que $vet(z, X) \leq \chi(z, X)$. Entonces, $vet(z, X) \leq \chi(z, X)$ para cada $z \in X$, y por tanto $vet(X) \leq \chi(X)$. ■

Recordando que un un subconjunto O de un espacio X es abierto regular si $int\left(\overline{O}\right) = O$ se tiene la siguiente definición.

Definición 3.6 *Dados dos espacios X y Y, decimos que una función $f : X \to Y$ es a lo más abierta, si la imagen de cada subconjunto regularmente abierto de X es abierto.*

A continuación se presentan dos resultados acerca de la estrechez de abanico. Las demostraciones de estos resultados pueden ser encontradas en [2].

Proposición 3.7 *Si $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y a lo más abierta, entonces $vet(Y) \leq vet(X)$.*

Teorema 3.8 *Si X es un espacio compacto de estrechez numerable, entonces $vet(X) = \aleph_0$. Y en este caso $vet(X) = t(X)$.*

Denotamos por $C_p(X)$ el espacio de funciones continuas con valores reales definidas en el espacio X. A $C_p(X)$ le damos la topología de la convergencia puntual (véase Definición 1.16). El siguiente teorema caracteriza el producto de espacios Hurewicz por una propiedad topológica del espacio de funciones $C_p(X)$.

A partir de aquí supondremos que todos nuestros espacios son T_1 y completamente regulares.

Teorema 3.9 *Para un espacio X las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a). *X^n es Hurewicz para todo número natural n;*

(b). *$vet\left(C_p\left(X\right)\right) = \aleph_0$.*

Demostración: Supongamos (b) y probemos (a). Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$ una colección numerable de cubiertas abiertas de X^n. Una colección μ de subconjuntos abiertos de X se dice que es γ_k-pequeña si para $V_1, ..., V_n \in \mu$, existe $G \in \gamma_k$ tal que $V_1 \times \cdots \times V_n \subset G$. Denotemos por $\mathcal{E}_k$ la familia de colecciones finitas γ_k-pequeñas de subconjuntos abiertos de X. Para $\mu \in \mathcal{E}_k$, sea

$$F_\mu = \{f \in C_p\left(X\right) : f\left[X \backslash \bigcup \mu\right] = \{0\}\}$$

y mostremos que el conjunto $A_k = \bigcup \{F_\mu : \mu \in \mathcal{E}_k\}$ es denso en $C_p\left(X\right)$.

Sean $f \in C_p\left(X\right)$ y K un subconjunto finito de X. Existe una familia finita θ de subconjuntos abiertos de X tales que para cada $(y_1, ..., y_n) \in K^n$ existen $V_1, ..., V_n \in \theta$ y $G \in \gamma_k$ tales que $y_i \in V_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $V_1 \times \cdots \times V_n \subset G$. En efecto, como γ_k es una cubierta abierta de X^n, para cada $y = (y_1, ..., y_n) \in K^n$ existe $G \in \gamma_k$ tal que $y \in G$, y dado que G es abierto en X^n, existen subconjuntos abiertos $V_1^y, ..., V_n^y$ de X tales que $y \in V_1^y \times \cdots \times V_n^y \subset G$. Tomando

$$\theta = \{V_i^y : y \in K^n,\ i \in \{1, ..., n\}\}$$

se obtiene la familia requerida. Es claro que $K \subset \bigcup \theta$. Para cada $x \in K$, sea

$$W_x = \bigcap \{V \in \theta : x \in V\},$$

y definamos $\mu_K = \{W_x : x \in K\}$. Obviamente $K \subset \bigcup \mu_K$.

La familia μ_K es γ_k-pequeña. En efecto, tomando cualquier $W_{x_1} \times \cdots \times W_{x_n}$, donde $x_i \in K$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existen $V_1, ..., V_n \in \theta$ y $G \in \gamma_k$ tales que $x_i \in V_i$ y $V_1 \times \cdots \times V_n \subset G$. Dado que $W_{x_i} \subset V_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se sigue que $W_{x_1} \times \cdots \times W_{x_n} \subset G$.

Probemos que existe una función $g \in C_p\left(X\right)$ tal que $g|_K = f|_K$ y $g\left[X \backslash \bigcup \mu_K\right] = \{0\}$. Dado que θ es finito, cada elemento de μ_K es abierto, más aún, podemos suponer que cualesquiera dos elementos de μ_K son ajenos (de lo contrario se puede remplazar la colección θ por $\theta \cup \alpha$ donde α es una colección finita de conjuntos abiertos ajenos dos a dos tal que, cada elemento de α, contiene un único elemento de K). Se sigue de la regularidad completa de X que para cada $w \in K$, existe una función continua $h_w : X \to \mathbb{R}$ tal que $h_w\left[X \backslash W_w\right] = \{0\}$ y $h_w\left(w\right) = 1$. Entonces $g = \sum_{w \in K} h_w \cdot f$ es la función requerida.

Obviamente, $g \in F_{\mu_K} \subset A_k$, y g está en cada vecindad canónica de f basada en el K-ésimo conjunto, es decir, $g \in \bigcap_{x \in K} \pi_x^{-1}[(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)]$ para cada $\varepsilon > 0$. Entonces $f \in \overline{A_k}$, y dado que f fue arbitraria, se tiene que A_k es denso en $C_p(X)$.

En particular si f es la función constante 1, se sigue que $f \in \overline{A_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $vet(C_p(X)) = \aleph_0$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito $B_k \subset A_k$ tal que $f \in \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k}$. De manera que, existe una subfamilia finita $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{E}_k$ tal que cada función $g \in B_k$ es μ-pequeña con respecto a alguna $\mu \in \mathcal{P}_k$, es decir, $g[X \backslash \bigcup \mu] = \{0\}$ con respecto a alguna $\mu \in \mathcal{P}_k$.

Sea $\mu \in \mathcal{P}_k$. Para cada $\xi = (V_1, ..., V_n) \in \mu^n$, elegimos un conjunto $G_\xi \in \gamma_k$ tal que $V_1 \times \cdots \times V_n \subset G_\xi$.

La familia $\lambda_k = \{G_\xi : \xi \in \mu^n, \mu \in \mathcal{P}_k\}$ es finita, pues $\mathcal{P}_k$ es finita y cada $\mu \in \mathcal{P}_k$ es finita. Obviamente, $\lambda_k \subset \gamma_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Veamos que la familia $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k$ cubre a X^n.

Tomemos cualquier elemento $(x_1, ..., x_n) \in X^n$, y sea

$$U = \{f \in C_p(X) : f(x_i) > 0,\ i \in \{1, ..., n\}\}.$$

El conjunto U es abierto en $C_p(X)$ y $f \in U$. Como $f \in \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k}$, existe $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap B_{k^*} \neq \emptyset$. Entonces $U \cap F_{\mu^*} \neq \emptyset$ para alguna $\mu^* \in \mathcal{P}_{k^*}$, es decir, existe una función $g \in U$ tal que que $g(x_i) > 0$ para cada $i \in \{1, ...n\}$, y $g(x) = 0$ para cada $x \in X \backslash \bigcup \mu^*$. Por tanto, $\{x_1, ..., x_n\} \subset \bigcup \mu^*$. Tomando $V_i \in \mu^*$ tal que $x_i \in V_i$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $(x_1, ..., x_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n \subset G_\xi$ para alguna $G_\xi \in \lambda_{k^*}$. En consecuencia, $(x_1, ..., x_n) \in \bigcup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k$.

Recíprocamente, sea X un espacio tal que X^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijamos $f \in C_p(X)$ y una familia $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de $C_p(X)$ tal que

$$f \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{A_k}.$$

También, fijemos n y k en $\mathbb{N}$. Para cada $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in X^n$, el conjunto

$$\bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}\left[\left(f(x_i) - n^{-1}, f(x_i) + n^{-1}\right)\right]$$

es un conjunto abierto de f (en $\mathbb{R}^X$), y dado que $f \in \overline{A_k}$, existe una función $g_{\overline{x},k} \in A_k$ tal que $g_{\overline{x},k} \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}\left[\left(f(x_i) - \frac{1}{n}, f(x_i) + \frac{1}{n}\right)\right]$, es decir,

$$|g_{\overline{x},k}(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n}$$

para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Como las funciones $g_{\overline{x},k}$ y f son continuas, existe una vecindad O_i de x_i tal que $|g_{\overline{x},k}(y_i) - f(y_i)| < \frac{1}{n}$ para todo $y_i \in O_i$. El conjunto $V_{\overline{x},k} = O_1 \times \cdots \times O_n$ es una vecindad de $\overline{x}$ en X^n. Por tanto, $\gamma_{n,k} = \{V_{\overline{x},k} : \overline{x} \in X^n\}$ cubre a X^n, y $|g_{\overline{x},k}(y_i) - f(y_i)| < \frac{1}{n}$ para todo $(y_1, ..., y_n) \in V_{\overline{x},k}$. Como X^n es Hurewicz, existen conjuntos finitos $P_{n,k} \subset X^n$ tales que la familia

$$\bigcup \{\lambda_{n,k} : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$$

cubre a X^n, donde $\lambda_{n,k} = \{V_{\overline{x},k} : \overline{x} \in P_{n,k}\}$. El conjunto $B_{n,k} = \{g_{\overline{x},k} : \overline{x} \in P_{n,k}\}$ es finito, y $B_{n,k} \subset A_k$. Entonces $B_k = \bigcup \{B_{n,k} : n \leq k\}$ también es un conjunto finito y $B_k \subset A_k$. Probemos que $f \in \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k}$. Tomando cualesquiera $y_1, ..., y_n \in X$ y cualquier $\varepsilon > 0$. Podemos suponer que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Existe $k^* \geq n$ tal que $(y_1, ..., y_n) \in \bigcup \lambda_{n,k^*}$. Entonces $(y_1, ..., y_n) \in V_{\overline{x},k^*}$ para algún $\overline{x} \in P_{n,k^*}$. De manera que $g_{\overline{x},k^*} \in B_{n,k^*}$ y $|g_{\overline{x},k^*}(y_i) - f(y_i)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Pero $B_{n,k^*} \subset B_{k^*}$ ya que $n \leq k^*$. Por tanto, $g_{\overline{x},k^*} \in B_{k^*}$ y $f \in \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k}$. Esto concluye la demostración del teorema. ■

Corolario 3.10 *Si X es un espacio analítico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a). $vet(C_p(X)) = \aleph_0$*;*

(b). *X es σ-compacto.*

Demostración: Supongamos que $vet(C_p(X)) = \aleph_0$. Entonces, por el Teorema 3.9, X es Hurewicz. De manera que, por el Teorema 1.21, X es σ-compacto.

Recíprocamente, si X es σ-compacto, dado que el producto finito de espacios σ-compactos es σ-compacto [38, pág. 126], se sigue que X^n es un espacio σ-compacto, y, por tanto, Hurewicz para cada $n \in \mathbb{N}$ (Proposición 1.4). La conclusión se sigue del Teorema 3.9. ■

Dos espacios X y Y son *t-equivalentes*, y escribimos $X \overset{t}{\sim} Y$, si los espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son homeomorfos.

Corolario 3.11 *Si $X \overset{t}{\sim} Y$ y X^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces Y^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Dado que X^n es Hurewicz para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.9, se tiene que $vet(C_p(X)) = \aleph_0$. Por otro lado, como $X \overset{t}{\sim} Y$, se sigue que los espacios, $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son homeomorfos, y por tanto $vet(C_p(Y)) = \aleph_0$. La conclusión se sigue del Teorema 3.9. ■

Corolario 3.12 *Si X es σ-compacto, Y analítico y $X \overset{t}{\sim} Y$, entonces Y es σ-compacto.*

Demostración: Como X es σ-compacto, de la Proposición 1.4 se tiene que X es Hurewicz, y por el Teorema 3.9, $vet\,(C_p\,(X)) = \aleph_0$. Pero el espacio $C_p\,(X)$ es homeomorfo a $C_p\,(Y)$, entonces $vet\,(C_p\,(Y)) = \aleph_0$. La conclusión se sigue del Corolario 3.10. ∎

Sea $Z = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{a\}$, donde $a \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Todos los puntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son aislados, y tomando como base local en a la familia de conjuntos $U_f = \{a\} \cup \{(n,k) : n \geq f\,(k)\}$, donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función arbitraria. Obtenemos un espacio conocido como el abanico de Fréchet-Urysohn y es denotado por $V\,(\aleph_0)$.

No es difícil verificar que $t\,(V\,(\aleph_0)) = \aleph_0 = |V\,(\aleph_0)|$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea

$$A_m = \{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k = m\}\,.$$

Dados $m \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq f\,(m)$ y en consecuencia $(n,m) \in U_f \cap A_m$. Esto muestra que $a \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{A_m}$. Luego, si, para cada $m \in \mathbb{N}$, B_m es un subconjunto finito de A_m, existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que si $(n,m) \in B_m$, entonces $n < k_m$. Definiendo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $g\,(m) = k_m$, se tiene que $U_g \cap B_m = \emptyset$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces $a \notin \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m}$. Por tanto $vet\,(V\,(\aleph_0)) > \aleph_0$. Haciendo uso de este hecho se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.13 *El espacio $V\,(\aleph_0)$ no puede ser encajado en $C_p\,(X)$ si X^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular, si X es σ-compacto.*

Demostración: Si X^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el Teorema 3.9, $vet\,(C_p\,(X)) = \aleph_0$. Por tanto para cualquier subespacio A de $C_p\,(X)$, se tiene que $vet\,(A) = \aleph_0$. Y dado que $vet\,(V\,(\aleph_0)) > \aleph_0$, concluimos que $V\,(\aleph_0)$ no puede ser encajado en $C_p\,(X)$.

Luego, si X es σ-compacto, entonces X^n es σ-compacto [38, pág. 126] para cada $n \in \mathbb{N}$. La conclusión se sigue de la Proposición 1.7. ∎

Dado un espacio X cualquiera, sea $\mathcal{F} : (C_p\,(X))^{\mathbb{N}} \to C_p\,(X \times \mathbb{N})$ una función definida de la siguiente manera. A cada elemento $F \in (C_p\,(X))^{\mathbb{N}}$ le asigna la función $\mathcal{F}\,(F) : X \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida como $\mathcal{F}\,(F)\,(x,n) = F\,(n)\,(x)$. Dado que $\mathbb{N}$ es discreto y la función $F\,(n) : X \to \mathbb{R}$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\mathcal{F}\,(F)$ es continua. De manera que $\mathcal{F}$ está bien definida. De hecho $\mathcal{F}$ es un homeomorfismo suprayectivo ya que es la restricción de un homeomorfismo (definido de una manera similar a $\mathcal{F}$) entre los espacios $\left(\mathbb{R}^X\right)^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{R}^{X\times\mathbb{N}}$.

Por otro lado, si X^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(X \times \mathbb{N})^n$ es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, los espacios $(X \times \mathbb{N})^n$, $X^n \times \mathbb{N}^n$ y $X^n \times \mathbb{N}$ son homeomorfos y éste último espacio es unión numerable de espacios Hurewicz, a saber, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X^n \times \{n\})$. Entonces, por la Proposición 1.7, $(X \times \mathbb{N})^n$ es Hurewicz.

Como consecuencia de esto se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.14 *Si* $vet\,(C_p\,(X)) = \aleph_0$*, entonces* $vet\left((C_p\,(X))^{\mathbb{N}}\right) = \aleph_0$*.*

Demostración: Por el Teorema 3.9, X^n es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo anterior $(X \times \mathbb{N})^n$ es Hurewicz para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Teorema 3.9, $vet\,(C_p\,(X \times \mathbb{N})) = \aleph_0$ y dado que $C_p\,(X \times \mathbb{N})$ es homeomorfo a $(C_p\,(X))^{\mathbb{N}}$ concluimos que $vet\left((C_p\,(X))^{\mathbb{N}}\right) = \aleph_0$. ■

Teorema 3.15 *Si* $X^{\mathbb{N}} \overset{t}{\sim} Y^{\mathbb{N}}$ *y* X *es compacto, entonces* Y *es compacto.*

Demostración: Como $X^{\mathbb{N}}$ es compacto, se sigue del Teorema 3.11 que $Y^{\mathbb{N}}$ es Hurewicz. El resto de la demostración se sigue de la Proposición 1.22. ■

El *peso* de un espacio X es el mínimo cardinal de la forma $|\mathcal{B}|$ donde $\mathcal{B}$ es una base para los conjuntos abiertos de X.

Proposición 3.16 *Si* X *es un espacio compacto de peso numerable, entonces* $C_p\,(X)$ *es un espacio analítico. Más aún, si* $C_p\,(X)$ *es Hurewicz, entonces* X *es finito.*

Demostración: El espacio de funciones continuas definidas sobre X con valores reales $C\,(X)$ dotado con la topologia uniforme es separable y de Banach (véase [38, pág. 282, 290]). Luego, dado que cada subconjunto abierto de $C_p\,(X)$ es abierto en $C\,(X)$, se tiene que la función identidad de $C\,(X)$ en $C_p\,(X)$ es continua. Entonces $C_p\,(X)$ es imagen continua de un espacio separable y Banach. Luego $C_p\,(X)$ es analítico [21, pág. 30, Teorema 2.4.4]. Si $C_p\,(X)$ es Hurewicz, entonces este es σ-compacto por el Teorema 1.21. Concluimos que X es finito [7, pág. 28]. ■

Un espacio X es *pseudocompacto* si toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

Teorema 3.17 *El espacio* $C_p\,(X)$ *es Hurewicz si y sólo si* X *es finito.*

Demostración: Supongamos que $C_p\,(X)$ un espacio Hurewicz. Veamos que X es pseudocompacto. Procedemos por contradicción, supongamos que X no es pseudocompacto. Entonces X contiene un subespacio numerable discreto A tal que toda función continua $g : A \to \mathbb{R}$ puede extenderse a una función continua definida en X [9, pág. 74, Lema 6.22]. De manera que $\mathbb{R}^A$ es imagen continua del espacio Hurewicz $C_p\,(X)$, y por tanto $\mathbb{R}^A$ es Hurewicz. Luego, dado que cada subespacio cerrado de un espacio σ-compacto es σ-compacto y $\mathbb{N}^A$ es un subespacio cerrado no σ-compacto (Ejemplo 1.13) de $\mathbb{R}^A$, se tiene que $\mathbb{R}^A$ no es σ-compacto. Pero $\mathbb{R}^A$ es analítico [21, pág. 29, 30, Teorema 2.4.2, 2.4.4], esto es una contradicción al Teorema 1.21. Por tanto X es pseudocompacto. Si X es infinito, entonces existe una función continua $\phi : X \to \mathbb{R}^A$ tal que el subespacio $\phi[X] \subset \mathbb{R}^A$ es infinito. En efecto, sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto numerable de X. Entonces, si, para cada $n > 1$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f_n(x_i) = 1$ para todo $i < n$ y $f_n(x_n) = 0$, se tiene que $\phi : X \to \mathbb{R}^A$ definida como $\phi(x) = \left(f_{h(a)}(x)\right)_{a \in A}$, donde $h : A \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva, es la función requerida. Como X es pseudocompacto, entonces $\phi[X]$ está contenido en un subespacio compacto de $\mathbb{R}^A$ y puesto que $\phi[X]$ es pseudocompacto, $\phi[X]$ es compacto [9, pág. 75, Lema 6.25]. Obviamente $\phi[X]$ tiene peso numerable. Como X es pseudocompacto, se tiene que el espacio $C_p(\phi[X])$ es mandado homeomorfamente sobre un subespacio cerrado de $C_p(X)$ (véase [6] y la definición de $\mathbb{R}$-cociente en [4]). Por tanto, $C_p(\phi[X])$ es Hurewicz. El resto de la demostración se sigue de la Proposición 3.16. ■

Christensen en [10, pág. 66, Teorema 3.7] (véase demostración) probó que si X es regular con base numerable, entonces $C_p(X)$ es analítico si y sólo si X es σ-compacto. En consecuencia de este resultado se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.18 *Si X es un espacio analítico con base numerable, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a). $C_p(X)$ *es analítico;*

(b). $vet(C_p(X)) = \aleph_0$*;*

(c). X *es σ-compacto.*

Demostración: Como $C_p(X)$ es analítico si y sólo si X es σ-compacto, se tiene que (a) y (b) son equivalentes. Y por el Corolario 3.10, las afirmaciones (b) y (c) son equivalentes. ■

Teorema 3.19 *Si X y Y son t-equivalentes, analíticos y con base numerable, y uno de ellos es σ-compacto, entonces el otro es σ-compacto.*

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que X es σ-compacto. Por el Teorema 3.18, $vet(C_p(X)) = \aleph_0$ y, como X es t-equivalente a Y, $vet(C_p(Y)) = \aleph_0$. El resto de la prueba se sigue del Teorema 3.18. ■

Capítulo 4

Espacios Hurewicz y otras propiedades tipo cubierta.

Finalmente, como una aplicación de los juegos topológicos se probará que todo espacio Hurewicz es un D-espacio.

Definición 4.1 *Definimos un juego entre los Jugadores I y II de la siguiente manera: el Jugador I elige, en cada n-entrada, una cubierta abierta γ_n cerrada bajo uniones finitas, y el Jugador II responde eligiendo un elemento $U_n \in \gamma_n$. El Jugador II gana si la colección $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ cubre a X.*

Con respecto a este juego se tiene la siguiente caracterización de los espacios Hurewicz.

Teorema 4.2 *Un espacio X es Hurewicz si y sólo si el Jugador I no tiene una estrategia ganadora.*

Demostración: Supongamos que el Jugador I tiene una estrategia ganadora. Entonces existe una sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas cerradas bajo uniones finitas tal que si elegimos un elemento de cada cubierta, entonces la colección formada por estos elementos no es una cubierta de X. De manera que, si para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es una subcolección finita de γ_n, se tiene que $\bigcup \alpha_n \in \gamma_n$, y por tanto la colección $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ no es una cubierta de X. Esto prueba que X no es Hurewicz.

Ahora supongamos que X no es Hurewicz. Entonces existe una sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X tal que si, para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es una subcolección finita de γ_n, entonces la colección $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ no es una cubierta de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos β_n como la colección formada por uniones finitas de elementos de γ_n. Claramente β_n es cerrada bajo uniones finitas para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que el Jugador I elige en cada n-entrada la cubierta β_n. Entonces, si para cada $n \in \mathbb{N}$, el Jugador II elije un elemento $O_n \in \beta_n$, de la definición de β_n, se sigue que existe una subcolección finita α_n de γ_n tal que $\bigcup \alpha_n = O_n$. Dado que la colección $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ no es una cubierta de X, se tiene que la colección $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es una cubierta de X. Esto prueba que el Jugador II no puede ganar, es decir, el Jugador I tiene una estrategia ganadora. ■

Definición 4.3 *Una asignación de vecindades para un espacio X con topología τ es una función $N : X \to \tau$ tal que $x \in N(x)$. Diremos que X es un D-espacio si para cada asignación de vecindades N, existe un subespacio cerrado discreto D de X tal que $N[D] = \{N(x) : x \in D\}$ es una cubierta de X.*

Dado un conjunto cualquiera X, $[X]^{<\omega}$ denota la colección de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X.

Teorema 4.4 *Todo espacio Hurewicz es D-espacio.*

Demostración: Supongamos que X es Hurewicz, y sea N una asignación de vecindades para X. Podemos suponer que $X \neq \bigcup \{N(x) : x \in F\}$ para todo $F \in [X]^{<\omega}$, de lo contrario la conclusión del teorema es inmediata. A continuación definimos una estrategia para el Jugador I. Sea

$$P_0 = \left\{\bigcup \{N(x) : x \in F\} : F \in [X]^{<\omega}\right\}$$

Como $\{N(x) : x \in X\} \subset P_0$, se tiene que P_0 es una cubierta abierta de X. Luego, si $U_1, ..., U_n \in P_0$, entonces existen $F_1, ..., F_n \in [X]^{<\omega}$ tales que $U_i = \bigcup \{N(x) : x \in F_i\}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, de manera que

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup \{N(x) : x \in F_1 \cup \cdots \cup F_n\} \in P_0.$$

Entonces podemos elejir a P_0 como la primera jugada del Jugador I. Si el Jugador II responde con $\bigcup \{N(x) : x \in F_0\}$ donde $F_0 \in [X]^{<\omega}$, entonces el Jugador I elige

$$P_1 = \left\{\bigcup \{N(x) : x \in F_0 \cup F\} : F \in [X]^{<\omega}, F \cap \left(\bigcup \{N(x) : x \in F_0\}\right) = \emptyset\right\}.$$

Veamos que tal jugada está bien definida. Sea $z \in X$, si $z \in N(y)$ para algún $y \in F_0$, como $X \neq \bigcup \{N(x) : x \in F_0\}$, existe $F_1 \in [X]^{<\omega}$ tal que $F \cap \left(\bigcup \{N(x) : x \in F_0\}\right) = \emptyset$, entonces z está contenido en $\bigcup \{N(x) : x \in F_0 \cup F_1\} \in P_1$. Luego si z no pertenece a $N(y)$ para todo $y \in F_0$, entonces $z \in \bigcup \{N(x) : x \in F_0 \cup \{z\}\} \in P_1$. Esto muestra que P_1 es una cubierta de X. Ahora, supongamos que $U_1, ..., U_n$ son elementos de P_1, existen $F_1, ..., F_n \in [X]^{<\omega}$ tales que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $U_i = \bigcup \{N(x) : x \in F_0 \cup F_i\}$ y $F_i \cap \left(\bigcup \{N(x) : x \in F_0\}\right) = \emptyset$. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = \bigcup \{N(x) : x \in F_0 \cup (F_1 \cup \cdots \cup F_n)\} \in P_1,$$

y por tanto P_1 es cerrada bajo uniones finitas. Similarmente, si la respuesta del Jugador II es $\bigcup\{N(x) : x \in F_0 \cup F_1\}$ donde $F_1 \in [X]^{<\omega}$ y $F_1 \cap (\bigcup\{N(x) : x \in F_0\}) = \emptyset$, el Jugador I juega con

$$P_2 = \left\{\bigcup\{N(x) : x \in F_0 \cup F_1 \cup F\} : F \in [X]^{<\omega}, F \cap (\bigcup\{N(x) : x \in F_0 \cup F_1\}) = \emptyset\right\},$$

de manera análoga se puede probar que P_2 es cubierta de X y que P_2 es cerrada bajo uniones finitas. Siguiendo con este proceso esto define una estrategia para el Jugador I. Dado que X es Hurewicz, por el Teorema 4.2, esta estrategia no puede ser ganadora. Por tanto, si $F_0, F_1, ...$ representan las jugadas del Jugador II, entonces la colección

$$\{\bigcup\{N(x) : x \in F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

es una cubierta de X. Sea $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Entonces $N[D]$ es una cubierta de X. Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $F_n \cap (\bigcup\{N(x) : x \in F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}\}) = \emptyset$. Sea $x \in D$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_n$. De la observación anterior se sigue que $N(x) \cap F_m = \emptyset$ para cada $m > n$. Luego, dado que el conunto $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ es finito, existe un conjunto abierto W de x tal que $W \cap (F_1 \cup \cdots \cup F_n) = \{x\}$. Entonces, $(W \cap N(x)) \cap D = \{x\}$. Esto demuestra que D es discreto. Ahora, supongamos que x es un punto de acumulación de D. Dado que $N[D]$ es una cubierta de X, existe $k \in \mathbb{N}$ y $y \in F_k$ tal que $x \in N(y)$. De manera que, $N(y) \cap F_m = \emptyset$ para cada $m > k$, y por tanto $N(y)$ es una vecindad de x que intersecta a D en una catidad finita de elementos de D. Esto implica que $x \in D$. Entonces D es cerrado y concluimos que X es un D-espacio. ■

La noción de un D-espacio parece que tuvo origen en un intercambio de cartas entre E. K. van Douwen y E. Michael a mediados de los 70's, pero la definición de D-espacio apareció por primera vez en 1979 en un artículo de van Douwen y W. Pfeffer [28]. La propiedad D es una propiedad tipo cubierta; no es difícil ver que los espacios compactos y σ-compactos son D-espacios, y que cualquier numerablemente compacto D-espacio es compacto. Parte de la fascinación con los D-espacios es que, a pesar de estos hechos, se sabe muy poco de las relaciones entre la propiedad D y las propiedades tipo cubierta estandares. Por ejemplo, no se sabe si una propiedad muy fuerte tal como hereditariamente Lindelöf implica D, y tampoco propiedades muy débiles tales como submetacompacto o submetalindelöf implican D. Para ver más sobre D-espacios véase [14].

La definición de espacio Hurewicz puede ser generalizada de la siguiente manera. Sean X un espacio y, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ colecciones de cubiertas de X. Los siguientes enunciados son propiedades que puede o no tener X:

1. $\mathbf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: Para cada sucesión $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento $U_n \in \alpha_n$ tal que $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$.

2. $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$: Para cada sucesión $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un subconjunto finito β_n de α_n tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \in \mathcal{B}$.

3. $\mathbf{U}_{\text{fin}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$: Para cada suceción $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un subconjunto finito β_n de α_n tal que $\{\bigcup \beta_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{B}$.

Cuando $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ varian sobre algunas colecciones paticulares se obtienen propiedades ya estudiadas en varios contextos por algunos autores. A continuación damos algunos ejemplos.

Fijemos un espacio X, y sea $\mathcal{O}$ la colección de todas las cubiertas abiertas de X. En el caso de espacios métricos, $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ es la propiedad que Hurewicz probó ser equivalente a la propiedad de base de Menger [25], dicha propiedad está enunciada en (b) del Teorema 2.10, y $\mathbf{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ es la propiedad de Rothberger tradicionalmente conocida como C'' [30], la cual está relacionada con conjuntos de Borel.

Considerando un tipo especial de cubiertas se tienen algunas propiedades adicionales. Por cubierta entenderemos que no es trivial, es decir, que X no es un elemento de dicha cubierta. Sea α una cubierta abierta de X, α es una *ω-cubierta* de X si para cada subconjunto finito F de X, existe un elemento $U \in \alpha$ tal que $F \subset U$. Decimos que α es una *γ-cubierta* de X si ésta es infinita y para cada $x \in X$, x es un elemento de todos los miembros de α salvo una cantidad finita. Denotamos por Ω y Γ a las colecciones de todas las ω-cubiertas y γ-cubiertas, respectivamente. Entonces $\mathbf{U}_{\text{fin}}(\mathcal{O},\Gamma)$ es la propiedad Hurewicz [16], $\mathbf{S}_1(\Omega,\Gamma)$ es la *γ-propiedad* Gerlits-Nagy introducida en el contexto de espacios de funciones [13]. Otras propiedades de este tipo fueron estudiadas por Arkhangel'skii, Sakai, y otros. Algunas de estas propiedades son relativamente nuevas.

El estudio de las relaciones entre estas propiedades es muy grande y no puede ser examinado en un solo capítulo. Restringiremos nuestra atención a subconjuntos de números reales, estos incluyen espacios metrizables cero dimencionales separables, ya que tales espacios son homeomorfos a subconjuntos de $\mathbb{P}$. El diagrama 3 (donde las flechas indican implicación) muestra algunas relaciones entre estas propiedades y sus demostraciones pueden ser encontradas en [19] y [31]. Todos los problemas que se presentan a continuación son preguntas acerca de subconjuntos de números reales.

Problema 4.5 *[19]*

1. *¿Es* $\mathbf{U}_{\mathit{fin}}(\mathcal{O},\Omega) = \mathbf{S}_{\mathit{fin}}(\Gamma,\Omega)$*?*

2. *Y si no, ¿*$\mathbf{U}_{\mathit{fin}}(\mathcal{O},\Omega)$ *implica* $\mathbf{S}_{\mathit{fin}}(\Gamma,\Omega)$*?*

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{U}_{\text{fin}}(\mathrm{O},\Gamma) \arrow[r] & \mathsf{U}_{\text{fin}}(\mathrm{O},\Omega) \arrow[r] & \mathsf{S}_{\text{fin}}(\mathrm{O},\mathrm{O}) \\
 & & \mathsf{S}_{\text{fin}}(\Gamma,\Omega) \arrow[ur] & & \\
\mathsf{S}_1(\Gamma,\Gamma) \arrow[r] \arrow[uurr] & \mathsf{S}_1(\Gamma,\Omega) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathsf{S}_1(\Gamma,\mathrm{O}) \arrow[uur] & \\
 & & \mathsf{S}_{\text{fin}}(\Omega,\Omega) \arrow[uu] & & \\
\mathsf{S}_1(\Omega,\Gamma) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathsf{S}_1(\Omega,\Omega) \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathsf{S}_1(\mathrm{O},\mathrm{O}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

Diagrama 3

Problema 4.6 *[36]¿Existe en ZFC un conjunto X de números reales con la propiedad $\mathbf{S}_{fin}(\Omega, \Omega)$ tal que $|X| = \mathfrak{d}$?*

Una cubierta de X es una cubierta Borel si cada uno de sus elementos son subconjuntos Borel de X. Denotamos por B, B_Ω y B_Γ las colecciones de cubiertas numerables Borel, ω-cubiertas Borel y γ-cubiertas Borel, respectivamente. Todas las propiedades en el diagrama 3 son hereditarias bajo subconjuntos F_σ (véase [27] y [37]).

Problema 4.7 *[8]¿Son hereditarias las propiedades $\mathbf{S}_1(B_\Omega, B_\Omega)$ o $\mathbf{S}_{fin}(B_\Omega, B_\Omega)$?*

Una respuesta parcial a esta pregunta puede ser encontrada en [27]. En el diagrama 3 las únicas propiedades que se preservan bajo productos finitos son $\mathbf{S}_1(\Omega, \Gamma)$, $\mathbf{S}_1(\Omega, \Omega)$ y $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\Omega, \Omega)$ (véase [19]).

Problema 4.8 *[32]¿Las propiedades $\mathbf{S}_1(B_\Omega, B_\Omega)$, $\mathbf{S}_{fin}(B_\Omega, B_\Omega)$, $\mathbf{S}_1(B_\Omega, B_\Gamma)$ se preservan bajo productos finitos?*

En [35] se puede encontrar una discución mas detallada y una extensa lista de preguntas abiertas sobre todas estas propiedades.

Finalmente, en el Ejemplo 1.15 se prueba que el producto finito de espacios Hurewicz no es Hurewicz, sin embargo esta demostración hace uso de la existencia de un conjunto Luzin y por tanto de la Hipótesis del Continuo. Y O'Farrell en [26] demuestra esta mísma proposición haciendo uso del Axioma de Martin (ZFC+AM). ¿Existe en ZFC un espacio Hurewicz X tal que $X \times X$ no es Hurewicz? Hasta donde se sabe esta pregunta sigue abierta [19].

Bibliografía

[1] Arkhangel'skii, A. V., *On the metrization of topological spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), pp. 589-595.

[2] Arkhangel'skii, A. V., *Open and near open mappings. Connections between spaces*, Trudy. Moskov. Mat. Obsch. 15 (1966), 101-223; English transl. in Trans. Moscow Math. Soc. 15 (1966).

[3] Arkhangel'skii, A. V., *On a class of spaces containing all metric spaces and all locally bicompact spaces*, Mat. Sb. 67(109) (1965), 55-85; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 92 (1970).

[4] Arkhangel'skii, A. V., *Functors and Dimension*, Izdat. Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1985. (Russian).

[5] Arkhangel'skii, A. V., *Hurewicz spaces, analytics sets, and fan tightness of functions spaces*, Soviet Math. Dokl. 33(1986), pp. 396-399. (Translated from the Russian).

[6] Arkhangel'skii, A. V., *On R-quotient mappings of spaces with a countable base*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 287 (1986), 14-17; English transl. in Soviet Math. Dokl. 33 (1986).

[7] Arkhangel'skii, A. V., *Topological Function Spaces*, Klumer Academic Publishers, 1992.

[8] Bartoszyński, T., and Tsaban, B., *Hereditary topological diagonalizations and the Menger-Hurewicz Conjectures*, Proceedings of the American Mathematical Society 134 (2006), 605–615.

[9] Chandler E. R., *Hausdorff Compactifications*, Marcel Dekker, INC. 1976.

[10] Christensen, J. P. R., *Topology and Borel Structure*, North-Holland, 1974.

[11] Corson, H. H., McMinn, T. J., Michael, E. A., and Nagata, J. I., *Bases and local finitenes*, Notices Amer. Math. Soc. 6 (1959), p. 814

[12] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[13] J. Gerlits, J., and Nagy, Zs., *Some properties of C(X), I*, Topology and its Applications 14 (1982), 151–161.

[14] Gruenhage, G., *A note on D-spaces*, Topology Appl. 153 (2006), no. 13, 2229–2240.

[15] Hurewicz, W., *Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems*, Math. Z. 24 (1926), 401-421.

[16] Hurewicz, W., *Über Folgen stetiger Funktionen*, Fundamenta Mathematicae 9 (1927), 193–204.

[17] Hurewicz, W., *Relativ perfekte Teilevon Punktmengen und Menger(A)*, Fund. Math. (12) (1928), 78-109.

[18] Jones, F. B., *Concerning normal and completely normal spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), pp. 671-677.

[19] Just, W., Miller, A. W., Scheepers, M., and Szeptycki, P. J., *Combinatorics of open covers II*, Topology Appl. 73 (1996), 241-266.

[20] Kelley, J. L., *General Topology*, Princenton, 1955.

[21] Kuczma, M., *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities; Cauchy's Equation and Jensen's Inequality,* Second Edition, Springer, 2009.

[22] Kunen, K., *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland 1984.

[23] Kuratowski, K., *Topology*, vol. I, Warszawa, 1966.

[24] Lelek, A., *Some covering properties of spaces*, Fund. Math. 64:2 (1969), pp.209-218.

[25] Menger, M. K., *Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, 133 (1924), 421–444.

[26] O'Farrell, J. M., *Construction of a Hurewicz metric space whose square is not a Hurewicz space*, Fund. Math. 127 (1986), 41–43.

[27] Orenshtein, T., and Tsaban, B., *Linear σ-additivity and some applications*, Transactions of the American Mathematical Society 363 (2011), 3621–3637.

[28] Pfeffer. W., and van Douwen, E. K., *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math. 81 (1979), 371–377.

[29] Rogers, C. A., et al., *Analytic Sets* (Lectures, London, 1978), Academic Press, 1980.

[30] Rothberger, F., *Sur des families indenombrables de suites de nombres naturels, et les problémes concernant la proprieté C*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 37 (1941), 109–126.

[31] Scheepers, M., *Combinatorics of open covers I: Ramsey theory*, Topology and its Applications 69 (1996), 31–62.

[32] Scheepers, M., and Tsaban, B., *The combinatorics of Borel covers*, Topology and its Applications 121 (2002), 357–382.

[33] Sierpiński, W., *Sur un problème de M. Menger*, Fund. Math. 8 (1926), 223-224.

[34] Strong, P. L., *Quotient and pseudo-open images of separable metric espaces,* Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 33, No. 2, 1972, pp 582-586.

[35] Tsaban, B., *Selection principles and special sets of reals*, in: Open Problems in Topology II, edited by Elliott Pearl, Elsevier, 2007, 91–108.

[36] Tsaban, B., and Zdomskyy, L., *Scales, fields, and a problem of Hurewicz*, Journal of the European Mathematical Society 10 (2008), 837–866.

[37] Tsaban, B., and Zdomskyy, L., *Combinatorial images of sets of reals and semifilter trichotomy*, Journal of Symbolic Logic 73 (2008), 1278–1288.

[38] Willard, S., *General Topology*, Dover Publications, Inc., Minelao, New York, 2004.