UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORÍA DE PRERRADICALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

OCTAVIO CRUZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ RÍOS MONTES

2012

**Hoja de datos del jurado**

1. Datos del alumno
   Cruz
   Sánchez
   Octavio
   55 29 68 32 81
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   303196963

2. Datos del tutor
   Dr
   José
   Ríos
   Montes

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Alejandro
   Alvarado
   García

5. Datos del sinodal 3
   M en C
   José Cruz
   García
   Zagal

6. Datos del sinodal 4
   M en C
   Luis Ángel
   Zaldívar
   Corichi

7. Datos del trabajo escrito
   Algunos aspectos de la teoría de prerradicales
   121 p
   2012

# Índice general

# Introducción.

Este trabajo está basado en el artículo de los matemáticos: Francisco Raggi Cárdenas, José Ríos Montes, Hugo Alberto Rincón Mejía, Rogelio Fernández-Alonso y Carlos Signoret, titulado "The lattice structure of preradicals" ([6]), en el cual se estudian algunas propiedades importantes de $R$-pr (la gran retícula de prerradicales sobre $R$).

El objetivo principal de este trabajo es analizar la gran retícula $R$-pr, tal análisis parte de la obtención de algunos resultados importantes sobre los elementos de $R$-pr, bajo este contexto surgen algunas cuestiones, tales como:

1) ¿Es $R$-pr una gran retícula atómica?

2) ¿Es $R$-pr una gran retícula coatómica?

3) En caso de una respuesta afirmativa a las preguntas 1) ó 2), ¿en qué casos se puede expresar a los elementos de $R$-pr en términos de sus átomos ó coátomos?

Analizando a $R$-pr a través de $R$, y teniendo en cuenta que $R$-pr es en general una clase, surge la cuestión:

4) ¿En qué casos resulta ser $R$-pr un conjunto?

Este trabajo consta de 2 capítulos. Se presenta a continuación de forma breve el contenido de cada uno de ellos. En el capítulo 1 (el más extenso de los 2 capítulos) se presentan las definiciones y los resultados básicos sobre teoría de módulos, categorías, retículas y clases de anillos que serán necesarios para el desarrollo del capítulo 2.

El capítulo 2 consta de 3 secciones, en la primera sección se presenta la definición de prerradical y se define un orden para $R$-pr (Definición 2.1.3), con el cual resulta que $R$-pr es una gran retícula, se presentan además 2 clases de prerradicales muy importantes para el desarrollo posterior de la teoría, a saber $\alpha_N^M$ y $\omega_N^M$ (Definición 2.1.9), con los cuales se puede ver que $R$-pr es una gran retícula atómica y coatómica (Teorema 2.1.14) y con esto se da una respuesta a las preguntas 1) y 2). La sección 2 está dedicada a dos clases de prerradicales muy importantes: los prerradicales idempotentes y los prerradicales radicales, en esta sección se encuentran varios resultados acerca de estos 2 tipos de prerradicales. Finalmente en la sección 3 se dan caracterizaciones de algunos anillos, tales como los anillos Artinianos simples (Teorema 2.3.1), los anillos Artinianos semisimples (Teorema 2.3.2 y Teorema 2.3.4), los $V$-anillos (Teorema 2.3.7) y los anillos que son producto finito de anillos simples (Teorema 2.3.9), cabe mencionar que en el Teorema 2.3.2, donde se caracterizan a los anillos Artinianos semisimples, se da una respuesta a las preguntas 3) y 4). Desde luego las caracterizaciones que se dan en esta sección son en términos de propiedades de la retícula $R$-pr.

# Capítulo 1

# Conceptos preliminares.

En este capítulo se presentan las definiciones y resultados básicos sobre la teoría de Módulos y Categorías que se usaran en los capítulos siguientes.

## 1.1. Módulos y Categorías.

Sea $R$ un anillo asociativo con 1 y sea $M$ un grupo abeliano. Denotemos por $End(M)$ el anillo de endemorfismos de $M$, es decir el conjunto de todos los morfismos de $M$ en $M$, dotado de la estructura de anillo definida por las leyes de composición: Si $a \in M$

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Por $1_M$ denotaremos al elemento neutro o identidad de $End(M)$.

**DEFINICIÓN 1.1.1** Se llama *representación* de $R$ a todo morfismo de anillos

$$\varphi : R \longrightarrow End(M).$$

Entonces, para cada $r \in R$, $\varphi(r)$ es un morfismo de $M$ y se satisfacen las propiedades

$$\begin{aligned} \varphi(r_1 + r_2) &= \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \\ \varphi(r_1 r_2) &= \varphi(r_1)\varphi(r_2) \qquad (1) \\ \varphi(1) &= 1. \end{aligned}$$

En estas condicones decimos también que $R$ opera sobre $M$ y que los elementos de $R$ son operadores de $M$, y basándonos en esta observación escribimos

$$\varphi(r)m = rm$$

El hecho que $\varphi$ sea un morfismo de $M$ se traduce en las propiedades

$(i)$ $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$.

$(ii)$ $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$.

$(iii)$ $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$.

$(iv)$ $1m = m$.

en donde $r, r_1, r_2 \in R$ y $m, m_1, m_2 \in M$.

Podemos independizarnos, en solo una pequeña medida de $End(M)$ e imaginar una nueva estructura definida en $M$ por el anillo $R$. Especificamente, la estructura definida por las propiedades $(i)$, $(ii)$, $(iii)$ y $(iv)$.

**DEFINICIÓN 1.1.2** Sea $R$ un anillo asociativo (conmutativo o no conmutativo) con 1. Se llama estructura de módulo izquierdo sobre el anillo $R$ a la estructura determinada sobre $M$ por toda aplicación $R \times M \longrightarrow M$, tal que si

$$(r, m) \mapsto rm$$

se satisfacen las propiedades:

$(i)$ $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$.

$(ii)$ $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$.

$(iii)$ $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$.

$(iv)$ $1m = m$.

en donde $r, r_1, r_2 \in R$ y $m, m_1, m_2 \in M$.

Es posible definir sobre $M$ una estructura de módulo derecho sobre $M$. La única variante es que, en vez de $(iii)$, imponemos la condición

$$iii') \qquad (r_1r_2)m = r_2(r_1m)$$

En estas condiciones conviene más escribir los operadores a la derecha $mr$ en vez de $rm$, y entonces la definición de módulo derecho sobre $R$ es simétrica con la correspondiente a la izquierda. Si $R$ es un anillo conmutativo, entonces $iii)$ y $iii')$ son propiedades equivalentes y no es necesario hacer distinciones a la izquierda o a la derecha.

En adelante denotaremos por $R$-Mod a la clase de módulos izquierdos sobre $R$, mientras que Mod-$R$ denotará a la clase de módulos derechos sobre $R$. En la teoría de módulos interesa considerar también *bi*-módulos, es decir módulos simultaneamente a la izquierda y a la derecha, y aún casos en que se tiene una estructura de $R$-módulo y módulo-$S$, donde $R$ y $S$ son anillos no necesariamente iguales. En estos casos es importante la condición asociativa

$$(rx)s = r(xs)$$

si $r \in R$, $x \in M$, $s \in S$. En lo sucesivo se considerarán $R$-módulos, salvo pocas excepciones que se aclararan anticipadamente.

**EJEMPLO 1.1.3**

(1) Todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo. Para ello, basta definir la representación $\rho : \mathbb{Z} \longrightarrow End(M)$, $\rho(a)m = am$. Recordando que $am$ significa

$$m + m + ... + m \text{ ($a$ sumandos), si } a > 0$$

$$0, \qquad \text{si } a = 0$$

$$(-m) + (-m) + ... + (-m) \text{ ($-m$ sumandos), si } m < 0.$$

(2) Si $M = \{0\}$, entonces $M$ admite una única estructura de $R$-módulo, cualquiera que sea el anillo $R$. Denotaremos dicha estructura simplemente por $\{0\}$.

(3) Sea $R$ un anillo. El producto del anillo en $R$, $(r, x) \mapsto rx$ determina sobre $R$ una estructura de $R$-módulo.

(4) Todo grupo abeliano $M$ es un $End(M)$-módulo por la representación identidad $1_{End(M)}$.

**DEFINICIÓN 1.1.4** Sea $M \in R$-Mod. Diremos que un subconjunto $K$ de $M$ es un submódulo de $M$ si

1) $K$ es un subgrupo del grupo abeliano $M$.

2) Si $r \in R$ y $a \in K$, entonces $ra \in K$.

Utilizaremos la notación $K \leq M$ para decir que $K$ es un submódulo de $M$ y $K < M$ para decir que $K$ es un submódulo propio de $M$.

**PROPOSICIÓN 1.1.5** Si $K \subseteq M$ es submódulo de $M$ si y solo si

*i*) $K \neq \varnothing$.

*ii*) Si $x$, $y \in K$, entonces $x - y \in K$.

*iii*) Si $r \in R$, $x \in K$, entonces $rx \in K$.

***Demostración:***

Si suponemos que $K$ es submódulo de $M$, claramente se cumple *iii*). Además se cumplen *i*) y *ii*) ya que $K$ es subgrupo de $M$. Recíprocamente, si suponemos que se cumplen *i*), *ii*) y *iii*) entonces por *i*) y *ii*) se tiene que $K$ es subgrupo de $M$ y la condición *iii*) implica que si $r \in R$, $x \in K$, entonces $rx \in K$, por lo tanto $K$ es submódulo de $M$. ■

**EJEMPLO 1.1.6**

1) Si $M$ es un $R$-módulo entonces $\{0\}$ y $M$ son submódulos de $M$.

2) Por el **Ejemplo 1.1.3** inciso (1), se tiene que $R$ es un $R$-módulo, los submódulos de $R$ son los ideales izquierdos de $R$.

3) Sea $M \in R$-Mod y sea $m \in M$, entonces

$$Rm = \{rm \mid r \in R\}$$

es un submódulo de $M$. Más generalmente, si $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ es un conjunto de elementos de $M$, elconjunto $K$ de todas las combinaciones lineales

$$\sum_{i=1}^{n} r_i m_i, \qquad r_i \in R$$

es un submódulo de $M$.

4) Sea $M \in R$-Mod y sean $K$, $N$ submódulos de $M$. Sea

$$K + N = \{k + n \mid k \in K,\ n \in N\}.$$

Entonces $K + N$ es submódulo de $M$ y se denomina el submódulo suma de $K$ y $N$. Se tiene además que $K + N = N + K$, por se $M$ un grupo abeliano.

**DEFINICIÓN 1.1.7** Sean $M$, $N \in R$-Mod. Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación de $M$ en $N$. Se dice que $f$ es un $R$-morfismo de módulos o simplemente un morfismo, si para todo $x$, $y$, $m \in M$, $r \in R$, se cumplen las siguientes propiedades.

1) $f$ es monomorfismo de grupos: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2) $f$ preserva operadores: $f(ra) = rf(a)$.

**PROPOSICIÓN 1.1.8** Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de $R$-módulos. Entonces:

1) $Nuc(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ es un submódulo de $M$.

2) $Im(f) = f(M) = \{y \in N \mid \text{Existe } x \in M \text{ tal que } y = f(x)\}$ es submódulo de $N$.

3) $f$ es morfismo inyectivo si y solo si $Nuc(f) = \{0\}$.

***Demostración:***

1) Veamos que $Nuc(f) = \{x \mid f(x) = 0\}$ es un submódulo de $M$.

*i*) $Nuc(f) \neq \varnothing$ ya que $0 \in Nuc(f)$.

*ii*) Sean $x, y \in Nuc(f)$, entonces $f(x-y) = f(x)+f(-y) = f(x)+f(y) = 0-0 = 0$, por tanto $x - y \in Nuc(f)$.

*iii*) Sean $r \in R$ y $x \in Nuc(f)$, entonces $f(rx) = rf(x) = r0 = 0$, lo que implica que $rx \in Nuc(f)$.

Por la **Proposición 1.1.5** se tiene que $Nuc(f) \leq M$.

2) Ahora veamos que $Im(f) = f(M) = \{y \in N \mid \text{Existe } x \in M \text{ tal que } y = f(x)\}$ es submódulo de $N$.

*i*) $Im(f) \neq \varnothing$ ya que $f(0) = 0$ y por tanto $0 \in Im(f)$.

*ii*) Sean $y_1$, $y_2 \in Im(f)$, entonces existen $x_1$ y $x_2 \in M$ tales que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Luego, $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = y_1 - y_2$, lo que implica que $y_1 - y_2 \in Im(f)$.

*iii*) Sean $r \in R$ y $y \in Im(f)$, entonces existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$, por lo cual $f(rx) = rf(x) = ry$, lo que implica que $ry \in Im(f)$.

Por la **Proposición 1.1.5** se tiene que $Im(f) \leq N$.

3) Si $f$ es morfismo inyectivo y $x \in Nuc(f)$, se tiene entonces que $f(0) = f(x) = 0$, lo que implica que $x = 0$ y por tanto $Nuc(f) = \{0\}$. Recíprocamente, si $Nuc(f) = \{0\}$ y si $x_1, x_2 \in M$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$, lo que implica que $x_1 - x_2 \in Nuc(f) = \{0\}$, por lo cual $x_1 = x_2$ y por tanto $f$ es morfismo inyectivo. ■

**DEFINICIÓN 1.1.9** Se dice que un morfismo de $R$-módulos es:

*a*) *Monomorfismo*, si $f$ es inyectiva.

*b*) *Epimorfismo*, si $f$ es sobreyectiva.

*c*) *Endomorfismo*, si $M = N$.

*d*) *Isomorfismo*, si $f$ es monomorfismo y epimorfismo. Se escribe entonces $f : M \cong N$, ó $A \overset{f}{\cong} N$, ó $A \cong N$ y se sobreentiende la f.

*e*) *Automorfismo*, si $f$ es un isomorfismo y $M = N$.

**DEFINICIÓN 1.1.10** 1) Sean $M$, $N \in R$-Mod. Se define

$$Hom_R(M, N) = \{f : M \longrightarrow N \mid f \text{ es morfismo de } M \text{ a } N\}.$$

**PROPOSICIÓN 1.1.11** La ley de composición

$$Hom_R(M, N) \times Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, N)$$

tal que

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m)$$

define sobre $Hom_R(M, N)$ una estructura de grupo abeliano.

2) Si $R$ es conmutativo, la aplicación

$$R \times Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, N)$$

$$(r, f) \mapsto rf$$

tal que

$$(rf)(a) = rf(a)$$

define sobre el grupo abeliano $Hom_R(M,N)$ una estructura de $R$-módulo.

***Demostración:***

1) Primero veamos que $Hom_R(M,N)$ es un grupo abeliano con la estructura dada.

$(i)$ Dados $f, g \in Hom_R(M,N)$, vamos a demostrar que $f+g$ pertenece a $Hom_R(M,N)$. Sean $m$, $m' \in M$. Se tiene que:

$$(f+g)(m+m') = f(m+m') + g(m+m') = f(m) + f(m') + g(m) + g(m') =$$

$$= f(m) + g(m) + f(m') + g(m') = (f+g)(m) + (f+g)(m').$$

Lo que implica que $f+g \in Hom_R(M,N)$.

$(ii)$ Sean $f$, $g$, $h \in Hom_R(M,N)$, y $m \in M$ entonces:

$$(f+(g+h))(m) = f(m) + (g+h)(m) = f(m) + (g(m) + h(m)) =$$

$$= (f(m) + g(m)) + h(m) = (f+g)(m) + h(m) = ((f+g)+h)(m).$$

Por tanto $f+(g+h) = (f+g)+h$.

$iii)$ Sea $f_0 \in Hom_R(M,N)$ dado por $f_0(m) = 0$. Si $g \in Hom_R(M,N)$ y $m \in M$ entonces:

$$(g+f_0)(m) = g(m) + f_0(m) = g(m) + 0 = g(m).$$

Entonces $f_0$ es neutro aditivo de $Hom_R(M,N)$.

$iv)$ Sean $f \in Hom_R(M,N)$ y $f^* : M \longrightarrow N$ dado por $f^*(m) = -f(m)$, es fácil ver que $f^* \in Hom_R(M,N)$. Además:

$$(f+f^*)(m) = f(m) + f^*(m) = f(m) + (-f(m)) = 0 = f_0(m).$$

Lo que implica que $f + f^* = f_0$.

*v*) Sean $f,\ g \in Hom_R(M,N)$ y $m \in M$, entonces:

$(f+g)(m) = f(m)+g(m) = g(m)+f(m) = (g+f)(m)$.

Se tiene entonces que $f+g = g+f$.

Por lo tanto $Hom_R(M,N)$ es grupo abeliano.

2) Hay que verificar que si $r \in R,\ f \in Hom_R(M,N)$ entonces $rf \in Hom_R(M,N)$.

Es inmediato que

$$(rf)(m+m') = (rf)(m) + (rf)(m').$$

Por otro lado, si $r' \in R$ y $m \in M$, entonces:

$(rf)(r'm) = r(f(r'm)) = r(r'f(m)) = (rr')f(m) = (r'r)f(m) =$

$= r'(rf(m)) = r'((rf)(m))$.

Lo que prueba que $rf \in Hom_R(M,N)$.

Sean $m \in M,\ f,\ g \in Hom_R(M,N)$ y $r,\ r_1,\ r_2 \in R$, entonces:

*i*) $(r(f+g))(m) = r((f+g)(m)) = r(f(m)+g(m)) = rf(m)+rg(m) = (rf+rg)(m)$.

Lo que implica que $r(f+g) = rf+rg$.

*ii*) $((r_1+r_2)f)(m) = (r_1+r_2)(f(m)) = r_1f(m)+r_2f(m) = (r_1f+r_2f)(m)$.

Lo que implica que $(r_1+r_2)f = r_1f+r_2f$.

*iii*) $((r_1r_2)f)(m) = (r_1r_2)f(m) = r_1(r_2f(m)) = (r_1(r_2f))(m)$.

Lo que implica que $(r_1r_2)f = r_1(r_2f)$.

*iv*) $(1f)(m) = 1f(m) = f(m)$.

Lo que implica que $1f = f$. Por lo tanto $Hom_R(M,N) \in R$-Mod. ■

**DEFINICIÓN 1.1.12** Una categoría $\mathfrak{C}$ consta de lo siguiente:

i) Una clase de objetos de $\mathfrak{C}$. A tal clase de objetos se le denotará por $Ob(\mathfrak{C})$.

ii) Un conjunto $Hom(C, C')$ cuyos elementos son llamados $morfismos$ de $C$ a $C'$, para cada pareja ordenada $(C, C')$ de objetos de $Ob(\mathfrak{C})$.

iii) Una función $Hom(C', C'') \times Hom(C, C') \longrightarrow Hom(C, C'')$ llamada composición para cada terna ordenada $(C', C'', C''')$ de objetos de $\mathfrak{C}$.

Si $C, C', C'', C''', D$ y $D' \in Ob(\mathfrak{C})$, se debe cumplir:

**1.1.13** $Hom(C, C')$ y $Hom(D, D')$ son conjuntos ajenos si $(C, C') \neq (D, D')$.

**1.1.14** Si $\alpha \in Hom(C, C')$, $\beta \in Hom(C', C'')$ y $\gamma \in Hom(C'', C''')$ entonces $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$.

**1.1.15** Para cada objeto $C$ existe $1_C \in Hom(C, C)$ tal que $1_C\alpha = \alpha$ y $\beta 1_C = \beta$ para cualesquiera $\alpha \in Hom(C', C)$ y $\beta \in Hom(C, C'')$.

**EJEMPLO 1.1.16**

1) $\mathfrak{C}$ =**Sets**.

Los objetos en esta categoría son conjuntos, los morfismos son funciones y la composición es la composición usual de funciones.

2) $\mathfrak{C}$ =**Groups**

Los objetos en esta categoría son grupos, los morfismos son los morfismos entre grupos y la composición es la composición usual (los morfismos son funciones).

3) $\mathfrak{C} = {}_R\mathbf{Mod}$.

Los objetos en esta categoría son elementos de $R$-Mod, los morfismos son los $R$-morfismos (Ver **Definición 1.1.7**). Denotamos a los conjuntos $Hom(M, N)$ en ${}_R\mathbf{Mod}$ por $Hom_R(M, N)$ (Ver **Definición 1.1.10**).

Si $R = \mathbb{Z}$, entonces escribimos

$${}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}=\mathbf{Ab}$$

para recordar que los $\mathbb{Z}$-módulos son solo grupos abelianos.

**DEFINICIÓN 1.1.17** Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ dos categorías. Un *funtor* $T : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ asigna a cada objeto $B$ en $\mathfrak{B}$ un objeto $T(B)$ en $\mathfrak{C}$, y asigna a cada morfismo $\alpha \in Hom(B, B')$ en $\mathfrak{B}$ un morfismo $T(\alpha) : T(B) \longrightarrow T(B')$ en $\mathfrak{C}$ de tal forma que:

*i)* $T(\beta\alpha) = T(\beta)T(\alpha)$ para cada $\alpha \in Hom(B, B')$, $\beta \in Hom(B', B'')$ en $\mathfrak{B}$

*ii)* $T(1_B) = 1_{T(B)}$.

**DEFINICIÓN 1.1.18** Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ dos categorías. Un *funtor contravariante* $T : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ asigna a cada objeto $B$ en $\mathfrak{B}$ un objeto $T(B)$ en $\mathfrak{C}$, y asigna a cada morfismo $\alpha \in Hom(B, B')$ en $\mathfrak{B}$ un morfismo $T(\alpha) : T(B') \longrightarrow T(B)$ en $\mathfrak{C}$ de tal forma que:

*i)* $T(\beta\alpha) = T(\alpha)T(\beta)$ para cada $\alpha \in Hom(B, B')$, $\beta \in Hom(B', B'')$ en $\mathfrak{B}$.

*ii)* $T(1_B) = 1_{T(B)}$.

**EJEMPLO 1.1.19**

1) El funtor $Hom_R(M, \_) :\ _R\mathbf{Mod} \longrightarrow\ _{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.

Si $N \in R$-Mod, entonces por **Proposición 1.1.11** se tiene que $Hom_R(M, N) \in \mathbb{Z}$-Mod, por lo cual $Hom_R(M, \_)$ asigna a cada objeto de $_R\mathbf{Mod}$ un objeto de $_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.

Si $f : N \longrightarrow K$ es un morfismo de $R$-módulos, entonces queda definido

$$Hom_R(M, f) : Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, K)$$

$$\text{como } Hom_R(M, f)(h) = f \circ h.$$

De esta forma $Hom_R(M, \_)$ asigna a cada morfismo $f \in Hom_R(N, K)$ un morfismo $Hom_R(M, f) : Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, K)$.

Además:

*i)* Si $f \in Hom_R(N, K)$ y $g \in Hom_R(K, T)$, se tiene que $g \circ f \in Hom_R(N, T)$ y quedan definidos

$$Hom_R(M, g \circ f) : Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, T)$$

$$\text{como } Hom_R(M, g \circ f)(h) = (g \circ f) \circ h.$$

Y

$$Hom_R(M, g) \circ Hom_R(M, f) : Hom_f(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, T)$$

$$\text{como } (Hom_R(M, g) \circ Hom_R(M, f))(h) = Hom_R(M, g)(Hom_R(M, f)(h)) =$$

$$= Hom_R(M, g)(f \circ h) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h.$$

Lo que implica que $Hom_R(M, g \circ f) = Hom_R(M, g) \circ Hom_R(M, f)$ para todo $f \in Hom_R(N, K)$ y $g \in Hom_R(K, T)$.

*ii*) Sea $N \in R$-Mod y $1_N \in Hom_R(N, N)$, entonces queda definido:

$$Hom_R(M, 1_N) : Hom(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, N)$$

$$\text{como } Hom_R(M, 1_N)(h) = 1_N \circ h = h = 1_{Hom_R(M,N)}(h).$$

Lo que implica que $Hom_R(M, 1_N) = 1_{Hom_R(M,N)}$ para todo $N \in R$-Mod.

Se tiene entonces que $Hom_R(M, \_) :\ _R\mathbf{Mod} \longrightarrow\ _{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ es un funtor.

2) El funtor contravariante $Hom_R(\_, M) :\ _R\mathbf{Mod} \longrightarrow\ _{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.

Si $N \in R$-Mod, entonces por **Proposición 1.1.11** se tiene que $Hom_R(N, M) \in \mathbb{Z}$-Mod, por lo cual $Hom_R(\_, M)$ asigna a cada objeto de $_R\mathbf{Mod}$ un objeto de $_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.

Si $f : N \longrightarrow K$ es un morfismo de $R$-módulos, entonces queda definido

$$Hom_R(f, M) : Hom_R(K, M) \longrightarrow Hom_R(N, M)$$

$$\text{como } Hom_R(f, M)(h) = h \circ f.$$

De esta forma $Hom_R(\_, M)$ asigna a cada morfismo $f \in Hom_R(N, K)$ un morfismo $Hom_R(f, M) : Hom_R(K, M) \longrightarrow Hom_R(N, M)$.

Además:

*i*) Si $f \in Hom_R(N, K)$ y $g \in Hom_R(K, T)$, se tiene que $g \circ f \in Hom_R(N, T)$ y quedan definidos

$$Hom_R(g \circ f, M) : Hom_R(T, M) \longrightarrow Hom_R(N, M)$$

$$\text{como } Hom_R(g \circ f, M)(h) = h \circ (g \circ f).$$

Y

$$Hom_R(f,M) \circ Hom_R(g,M) : Hom_R(T,M) \longrightarrow Hom_R(N,M).$$

$$\text{como } (Hom_R(f,M) \circ Hom_R(g,M))(h) = Hom_R(f,M)(Hom_R(g,M)(h)) =$$

$$= Hom_R(f,M)(h \circ g) = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Lo que implica que $Hom_R(g \circ f, M) = Hom_R(f,M) \circ Hom_R(g,M)$ para todo $f \in Hom_R(N,K)$ y $g \in Hom_R(K,T)$.

*ii*) Sea $N \in R$-Mod y $1_N \in Hom_R(N,N)$, entonces queda definido:

$$Hom_R(1_N, M) : Hom(N,M) \longrightarrow Hom_R(N,M)$$

$$\text{como } Hom_R(1_N, M)(h) = h \circ 1_N = h = 1_{Hom_R(N,M)}(h).$$

Lo que implica que $Hom_R(1_N, M) = 1_{Hom_R(N,M)}$ para todo $N \in R$-Mod.

Se tiene entonces que $Hom_R(\_, M) : {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$ es un funtor contravariante.

**DEFINICIÓN 1.1.20** Sea $T : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un funtor. Un *subfuntor* de $T$ es un funtor $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, tal que $F(A) \hookrightarrow T(A)$ para cada objeto $A$ en $\mathfrak{A}$ y si $f \in Hom(A, A')$ entonces:

$$\begin{tikzcd}
F(A') \arrow[r, hook] & T(A') \\
F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, hook] & T(A) \arrow[u, "T(f)"']
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

**DEFINICIÓN 1.1.21** Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de objetos de la categoría. Un *producto* en $\mathfrak{C}$ para la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un objeto $P$ junto con una familia de morfismos $\{P \xrightarrow{P_\alpha} M_\alpha\}_{\alpha \in I}$, tales que si $P'$ es otro objeto junto con otra famila de morfismos $\{P' \xrightarrow{r_\alpha} M_\alpha\}$, entonces existe $\varphi \in Hom(P', P)$ único con la siguiente propiedad:

$$P_\alpha \circ \varphi = r_\alpha, \ \forall \alpha \in I.$$

Lo que implica que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "P_\alpha"] & M_\alpha \\ P' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "r_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Hay que notar que si el producto de una familia de objetos existe entonces es único salvo isomorfismos.

**TEOREMA 1.1.22** Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de $R$-Módulos, entonces $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tiene producto en $R$-Mod.

***Demostración:***

Definamos $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha := \{f : I \longrightarrow \bigcup M_\alpha \mid f(\beta) \in M_\beta,\ \forall\beta \in I\}$. Se demostrará que $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ es producto para la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$. De acuerdo con la **Definición 1.1.21** hay que probar 2 cosas:

1) $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \in R - Mod.$

2) Existe $\{\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \xrightarrow{P_\beta} M_\beta\}$ familia de morfismos que satisface la propiedad universal.

Comencemos mostrando que $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \in R$-Mod.

Sean $r, s \in R,\ \ f, f' \in \prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ y $\beta \in I$. Entonces:

i) $(r(f+f'))(\beta) = r((f+f')(\beta)) = r(f(\beta)+f'(\beta))$, donde $f(\beta), f'(\beta) \in M_\beta$ y como $M_\beta$ es un módulo, entonces $r(f(\beta)+f'(\beta)) = rf(\beta)+rf'(\beta) = (rf+rf')(\beta)$, por lo tanto $r(f+f') = rf+rf'$.

ii) $(r(sf))(\beta) = r(sf(\beta)) \in M_\beta$, entonces $r(sf(\beta)) = (rs)f(\beta)$, por lo tanto $r(sf) = (rs)f$.

iii) $((r+s)(f))(\beta) = (r+s)(f(\beta)) \in M_\beta$, entonces $(r+s)(f(\beta)) = rf(\beta)+sf(\beta)$, lo que implica que $(r+s)f = rf+sf$

$$\text{Por lo tanto } \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \in R\text{-Mod.}$$

Por otro lado, sea $\{\prod_{\alpha\in I} M_\alpha \xrightarrow{P_\beta} M_\beta\}_{\beta\in I}$ una familia de morfismos, donde $P_\beta(f) = f(\beta)$.

***Observación (i)***: $P_\beta$ es un epimorfismo para cada $\beta \in I$. En efecto, si $x \in M_\beta$, defínase $f : I \longrightarrow M_\beta$, como:

$$f(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ \\ x & \text{si} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

por lo cual $P_\beta(f) = f(\beta) = x$ y por tanto $P_\beta$ es epimorfismo. Llamaremos a $P_\beta$ la *proyección* sobre $M_\beta$ de $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$.

***Observación (ii)***: Si $f$ y $g$ estan en $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ y para toda $\beta \in I$ se tiene que $P_\beta(f) = P_\beta(g)$ entonces $f = g$. En efecto, si $P_\beta(f) = P_\beta(g)$ se tiene que $f(\beta) = g(\beta)$ y como esto es para toda $\beta \in I$, se concluye que $f = g$

Veamos que la familia de morfismos $\{\prod_{\alpha\in I} M_\alpha \xrightarrow{P_\beta} M_\beta\}_{\beta\in I}$ satisface la propiedad universal.

Sea $Q \in R$-Mod y $\{Q \xrightarrow{Q_\beta} M_\beta\}_{\beta\in I}$ una familia de morfismos. Definamos

$$\varphi \in Hom_R(Q, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha),$$
$$\text{dado por } \varphi(x) : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha$$
$$\text{y } \varphi(x)(\beta) = Q_\beta(x).$$

Si $x \in Q$ entonces $(P_\beta \circ \varphi)(x) = P_\beta(\varphi(x)) = \varphi(x)(\beta) = Q_\beta(x)$, por tanto $P_\beta \circ \varphi = Q_\beta,\ \forall \alpha \in I$.

Por ultimo veamos que $\varphi$ es único. Si $\psi$ es otro morfismo en $Hom_R(Q, \prod_{\alpha\in I} M_\alpha)$ tal que $P_\beta \circ \psi = Q_\beta$ para toda $\beta \in I$, entonces para toda $x \in Q$ se tiene que $P_\beta(\psi(x)) = (P_\beta \circ \psi)(x) = Q_\beta(x) = Q_\beta(x) = (P_\beta \circ \varphi)(x) = P_\beta(\varphi(x))$, así por la **observación (ii)** se tiene que $\psi(x) = \varphi(x)$ para toda $x \in Q$ y por lo tanto $\psi = \varphi$, lo que demuestra la unicidad de $\varphi$. ■

A partir de ahora, si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de $R$-Módulos, el producto de tal familia se denotará por $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$. Si además $M_\alpha = M$ para todo $M_\alpha \in \{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ocuparemos la siguiente notación $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha = M^I$.

**DEFINICIÓN 1.1.23** Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq Ob(\mathfrak{C})$. Un coproducto para $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un objeto $C \in Ob(\mathfrak{C})$ y una familia de morfismos $\{M_\alpha \xrightarrow{U_\alpha} C\}_{\alpha\in I}$ llamados inclusiones, tal que si $C' \in Ob(\mathfrak{C})$ y para cada $\alpha \in I$, $U'_\alpha : M_\alpha \longrightarrow C'$ es morfismo en $\mathfrak{C}$, entonces existe $\varphi : C \longrightarrow C'$ único tal que:

$$\varphi \circ U_\alpha = U'_\alpha \ \forall \alpha \in I.$$

Lo que implica que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, "U_\alpha"] \arrow[dr, "U'_\alpha"'] & C \arrow[d, "\varphi"] \\ & C' \end{tikzcd}$$

**TEOREMA 1.1.24** Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de $R$-Módulos entonces $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tiene coproducto en $R$-Mod.

***Demostración:***

Sea

$$\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha = \{f \in \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \mid f(\alpha) \neq 0 \ \textit{para un número finito } \alpha \in I\}.$$

Hay que observar que $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \leq \prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$, ya que $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \subseteq \prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$, además $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ es cerrado bajo la suma, producto por escalares y tiene al neutro aditivo de $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$. Por tanto $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \in R$-Mod.

De acuerdo con la **Definición 1.1.23** falta probar que existe $\{M_\beta \xrightarrow{U_\beta} \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha\}_{\beta\in I}$ familia de morfismos que satisface la propiedad universal.

Sea $\{M_\beta \xrightarrow{U_\beta} \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\}_{\beta\in I}$ una familia de morfismos, donde $U_\beta(x) : I \longrightarrow \bigcup M_\alpha$ y

$$U_\beta(x)(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha \neq \beta \\ \\ x & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

Veamos que $U_\beta$ es un morfismo de $R$-módulos.

Sean $x_1$, $x_2 \in M_\beta$.

Por un lado,

$$U_\beta(x_1)(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha \neq \beta \\ \\ x_1 & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

$$U_\beta(x_2)(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha \neq \beta \\ \\ x_2 & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

lo que implica que:

$$[U_\beta(x_1) + U_\beta(x_2)](\alpha) = \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha \neq \beta \\ \\ x_1 + x_2 & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

Por otro lado,

$$U_\beta(x_1 + x_2)(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha \neq \beta \\ \\ x_1 + x_2 & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

Además, como $U_\beta(x_1 + x_2)$ y $U_\beta(x_1) + U_\beta(x_2)$ tienen el mismo dominio, entonces $U_\beta(x_1 + x_2) = U_\beta(x_1) + U_\beta(x_2)$, lo que demuestra que $U_\beta$ es un morfismo de $R$-módulos para cualquier $\beta \in I$.

***Observación (i)***: Para cada $\beta \in I$ se tiene que $U_\beta$ es un monomorfismo. En efecto, si $x \in Nuc(U_\beta)$, se tiene por un lado que $U_\beta(x)(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in I$ y por otro lado

$$U_\beta(x)(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha \neq \beta \\ \\ x & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

lo que implica que $x = 0$, así $Nuc(U_\beta) = 0$ y por tanto $U_\beta$ es monomorfismo para cualquier $\beta \in I$. Llamaremos a $U_\beta$ la *inclusión* de $M_\beta$ en $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$.

***Observación (ii):*** Si $f \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$, entonces $f = \sum_{\alpha \in I} U_\alpha(f(\alpha))$. En efecto si consideramos las proyecciones $P_\alpha$ de la demostración del **Teorema 1.1.22** se tiene para toda $x \in M_\beta$ que:

$$(P_\alpha \circ U_\beta)(x) = P_\alpha(U_\beta(x)) = (U_\beta(x))(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \quad \alpha \neq \beta \\ x & si \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Entonces si $f \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$, se tiene que

$$P_\beta(f) = f(\beta) = (P_\beta \circ U_\beta)(f(\beta)) = P_\beta(U_\beta(f(\beta))) =$$

$$= \sum_{\alpha \in I} P_\beta(U_\alpha(f(\beta))) = P_\beta(\sum_{\alpha \in I} U_\alpha(f(\beta))).$$

Luego, por la **observación (ii)** hecha en la demostración del **Teorema 1.1.22** se tiene que $f = \sum_{\alpha \in I} U_\alpha(f(\alpha))$.

Veamos que la familia de morfismos $\{M_\beta \xrightarrow{U_\beta} \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha\}_{\beta \in I}$ satisface la propiedad universal.

Sea $Q \in R$-Mod y $\{M_\beta \xrightarrow{Q_\beta} Q\}_{\beta \in I}$ una familia de morfismos. Definamos

$$\varphi \in Hom_R(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, Q),$$

$$\text{dado por } \varphi(f) = \sum_{\alpha \in I} Q_\alpha(f(\alpha)).$$

Sean $\beta \in I$ y $m \in M_\beta$, entonces $(\varphi \circ U_\beta)(m) = \varphi(U_\beta(m)) = \sum_{\alpha \in I} Q_\alpha(U_\beta(m)(\alpha)) = Q_\beta((U_\beta(m)(\beta))) = Q_\beta(m)$. Por lo tanto $\varphi \circ U_\beta = Q_\beta$ para cualesquiera $m \in M_\beta$ y $\beta \in I$.

Por ultimo veamos que $\varphi$ es único. Si $\psi$ es otro morfismo en $Hom_R(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, Q)$ tal que $\psi \circ U_\beta = Q_\beta$ para toda $\beta \in I$, entonces para toda $f \in \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ se tiene que:

$$\varphi(f) = \sum_{\alpha \in I} Q_\alpha(f(\alpha)) = \sum_{\alpha \in I} (\psi \circ U_\alpha)(f(\alpha)) =$$

$$= \sum_{\alpha \in I} \psi(U_\alpha(f(\alpha))) = \psi(\sum_{\alpha \in I} U_\alpha(f(\alpha))) = \psi(f),$$

la ultima igualdad se da por la **observación (ii)**. Por lo tanto $\varphi = \psi$. ■

En adelante denotaremos al coproducto de una familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de $R$-Módulos como $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ y cuando $M_\alpha = M$ para toda $\alpha \in I$ se ocupara la siguiente notación $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha = M^{(I)}$.

**OBSERVACIÓN 1.1.25** Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de $R$-módulos con $I$ finito, entonces

$$\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha = \prod_{\alpha\in I} M_\alpha.$$

**OBSERVACIÓN 1.1.26** Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de submódulos de $M \in R$-Mod, tal que $M$ es suma directa de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$, es decir que:

$$\sum_{\alpha\in I} M_\alpha = M \text{ y para cada } \beta \in I, \text{ se tiene que } M_\beta \bigcap \sum_{\alpha\in I,\ \alpha\neq\beta} M_\alpha = \{0\}.$$

Entonces

$$\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \cong \sum_{\alpha\in I} M_\alpha$$

En efecto, consideremos el morfismo

$$\varphi : \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \longrightarrow \sum_{\alpha\in I} M_\alpha,$$
$$\text{dado por } \varphi(f) = \sum_{\alpha\in I} f(\alpha).$$

Se tiene que $\varphi$ es un isomorfismo.

1) $\varphi$ es epimorfismo.

Si $m = \sum\limits_{\alpha\in I} m_\alpha \in \sum\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$, consideremos la función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha$$
$$\text{dada por } f(\alpha) = m_\alpha \text{ para toda } \alpha \in I.$$

Entonces $\varphi(f) = \sum\limits_{\alpha\in I} f(\alpha) = \sum\limits_{\alpha\in I} m_\alpha = m$, lo que implica que $\varphi$ es epimorfismo.

2) $\varphi$ es monomorfismo.

Sea $f \in Nuc(\varphi)$, entonces $\varphi(f) = \sum_{\alpha\in I} f(\alpha) = 0$, así para cualquier $\beta \in I$ se tiene que

$f(\beta) = -\left( \sum_{\alpha\in I,\ \ \alpha\neq\beta} f(\alpha) \right) \in M_\beta \bigcap \sum_{\alpha\in I,\ \ \alpha\neq\beta} M_\alpha = \{0\}$, lo que implica que $f$ es la función cero, esto implica que $\varphi$ es un monomorfismo.

Por lo tanto

$$\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \cong \sum_{\alpha\in I} M_\alpha.$$

En lo que resta de este trabajo si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un familia de submódulos de un $R$-módulo $M$, se utilizara la notación

$$M = \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$$

para decir que $M$ es suma directa de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

## 1.2. Teoremas de isomorfismo.

Sea $M \in R$-Mod y $K \leq M$. Entonces el conjunto de clases

$$M/K = \{x + K \mid x \in M\}$$

es un $R$-módulo relativo a la adición y multiplicación por escalares definidas mediante:

$$(x + K) + (y + K) = (x + y) + K, \qquad r(x + K) = rx + K.$$

En donde el neutro aditivo es

$$K = 0 + K$$

mientras que el inverso aditivo es:

$$-(x + K) = -x + K.$$

El $R$-módulo $M/K$ es llamado el *cociente (ó factor) de M módulo K.*

**TEOREMA 1.2.1 (Teoremas de Isomorfismo)** Sean $M, N \in R$-Mod.

1) **Primer Teorema de isomorfismo**. Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de módulos, entonces hay un isomorfismo de módulos:

$$\varphi : M/Nuc(f) \longrightarrow Im(f),$$

dado por

$$m + Nuc(f) \mapsto f(m).$$

2) **Segundo Teorema de isomorfismo**. Si $H \leq M$ y $T \leq M$, entonces $(H + T)/T \cong H/(H \cap T)$.

3) **Tercer Teorema de isomorfismo**. Si $T \leq L \leq M$, entonces $M/L \cong (M/T)(L/T)$.

***Demostración:***

1) Si consideramos a $M$ y $N$ solo como grupos abelianos, entonces por el primer Teorema de isomofismo para grupos se tiene que $\varphi : Nuc(f) \longrightarrow Im(f)$ es un isomorfismo de grupos abelianos. Se afirma que $\varphi$ es un morfismo de módulos. Sea $r \in R$ entonces $\varphi(r(m + Nuc(f))) = \varphi(rm + Nuc(f)) = f(rm)$, ya que $f$ es un morfismo de módulos se tiene que $f(rm) = rf(m) = r\varphi(m + Nuc(f))$. Por lo tanto $\varphi$ es un isomorfismo de módulos.

2) Sea $\pi : M \longrightarrow M/T$ el morfismo canónico, donde $Nuc(\pi) = T$, sea $\pi|_H : H \longrightarrow M/T$, entonces $Nuc(\pi|_H) = H \cap T$ y $Im(\pi|H) = (H + T)/T$, por el **primer Teorema de isomorfismo** se tiene que $(H + T)/T \cong H/(H \cap T)$.

3) Consideremos el morfismo $g : M/T \longrightarrow M/L$, dado por $m + T \mapsto m + S$. De esta forma $g$ esta bien definido, pues si $m + T = m' + T$, entonces $m - m' \in T \leq L$ y $m + L = m' + L$. Además $Nuc(g) = L/T$ e $Im(g) = M/L$. entonces por el **primer Teorema de isomorfismo** se tiene que $M/L \cong (M/T)(L/T)$. ■

## 1.3. Ley modular.

**TEOREMA 1.3.1 (Ley Modular)** Sean $M, N$ y $K$ submódulos de un $R$-Módulo $T$, tales que $M \leq N$ entonces $M + (N \cap K) = N \cap (M + K)$.

***Demostración:***

$\subseteq$) Sea $h = m + n \in M + (N \cap K)$ con $m \in M$ y $n \in N \cap K$, entonces $m \in M$ y $n \in K$, lo que implica que $h \in M + K$. Por otro lado, ya que $M \leq N$ se tiene que $m \in N$ y $n \in N$, así $h = m + n \in N$. Entonces $h \in N \cap (M + K)$ y por lo tanto $M + (N \cap K) \subseteq N \cap (M + K)$.

$\supseteq$) Sea $m + k \in N \cap (M + K)$ con $m \in M$, $k \in K$ y $m + k \in N$; sea $n = m + k$, entonces $k = n - m$ con $n \in N$ y $m \in M$, pero $M \leq N$, así $m \in N$, lo que implica que $k \in N$, se tiene entonces que $k \in N \cap K$ y por tanto $m + k \in M + (N \cap K)$. Se concluye que $N \cap (M + K) \subseteq M + (N \cap K)$

$$\therefore M + (N \cap K) = N \cap (M + K). \blacksquare$$

## 1.4. $End_{\mathbb{Z}}(M)$-Módulos.

Si $M$ es un grupo abeliano y $End_{\mathbb{Z}}(M)$ es el anillo de endomorfismos de $M$, se tiene que $M$ es un $End_{\mathbb{Z}}(M)$-Módulo de acuerdo con la siguiente multiplicación por escalares: Si $m \in M$ y $f \in End_{\mathbb{Z}}(M)$, $f \cdot m = f(m)$ y de esta forma se verifica:

1) $f(m + n) = f(m) + f(n)$.

2) $f(g \cdot m) = (f \circ g)m$.

3) $(f + g)m = f(m) + g(m)$.

Para cualesquiera $f,\ g \in End_{\mathbb{Z}}(M)$ y $m, n \in M$.

En vista de lo anterior se tiene el siguiente Teorema:

**TEOREMA 1.4.1** Sean $M \in R$-Mod e $I$ un ideal de $R$. Si

$$IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid a_i \in I \ \ y \ \ m_i \in M,\ n \in \mathbb{N}\} = \{0\},$$

entonces existe sobre $M$ una única estructura de $R/I - Módulo$ con la propiedad:

$$(r + I) \cdot a = r \cdot a$$

donde $a \in M$ y $r + I$ es la imagen de $r$ bajo el morfismo canónico $\pi : R \longrightarrow R/I$.

***Demostración:***

Hay que notar que la operación $(r+I)\cdot a = r\cdot a$ esta bien definida, ya que $r'-r \in I$ si y solo si $(r'-r)m = 0$.

Ahora veamos que si $M \in R$-Mod e $I$ es un ideal de $R$, son tales que

$$IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid a_i \in I \ \ y \ \ m_i \in M, \ n \in \mathbb{N}\} = \{0\},$$

entonces $M$ tiene estructura de $R/I$-Módulo.

Sean $x$, $y \in M$ y $a+I$, $b+I \in R/I$. Entonces:

1. $(a+I)(x+y) = a(x+y) = ax+ay = (a+I)x + (b+I)x$.

2. $((a+I)+(b+I))x = ((a+b)+I)x = ax+bx = (a+I)x+(b+I)x$.

3. $[(a+I)(b+I)]x = (ab+I)x = (ab)x = a(bx) = (a+I)(bx) = (a+I)[(b+I)x]$.

4. $(1+I)x = 1x = x$. ■

## 1.5. Sucesiones exactas.

**DEFINICIÓN 1.5.1** Una sucesión de morfismos de $R$-Módulos:

$$... \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} ...$$

se dice que es *exacta* en $M_i$ si $Nuc(\alpha_i) = Im(\alpha_{i-1})$. Decimos que la sucesión es exacta, si es exacta para cada $M_i$.

Decimos que una sucesión

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

es exacta corta si $\alpha$ es monomorfismo, $\beta$ es epimorfismo y $Nuc(\beta) = Im(\alpha)$.

**DEFINICIÓN 1.5.2** Sea

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de $R$-Módulos. Se dice que la sucesión se *escinde* si existe un morfismo $h : N \longrightarrow M$ tal que $g \circ h = 1_N$.

**TEOREMA 1.5.3** Si una sucesión

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

se escinde entonces $M \cong L \bigoplus N$.

***Demostración:***
Por hipótesis existe $h : N \longrightarrow M$ tal que $g \circ h = 1_N$. Considérese el siguiente morfismo

$$\varphi : L \bigoplus N \longrightarrow M,$$

dado por

$$\varphi(x, y) = f(x) + h(y).$$

$\varphi$ **es monomorfismo.**
Sea $(x, y) \in Nuc(\varphi)$ entonces $\varphi((x, y)) = f(x) + g(y) = 0$, aplicando $g$ se tiene:

$$0 = g(0) = g(f(x) + g(y)) = g(f(x)) + g(h(y)),$$

como $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es sucesión exacta corta, entonces $Im(f) = Nuc(g)$, por tanto $g(f(x)) = 0$ y además $g(h(y)) = I_N(y) = y$ esto implica que:

$$0 = g(f(x)) + g(h(y)) = y.$$

Luego, como $y = 0$, entonces $0 = \varphi((x, y)) = f(x)$ y como $f$ es monomorfismo se tiene entonces que $x = 0$, por lo tanto $(x, y) = (0, 0)$.

$\varphi$ **es epimorfismo.**
Sea $m \in M$, obsérvese que

$$g(m - (h \circ g)(m)) = g(m) - g((h \circ g)(m)) = g(m) - (g \circ h)(g(m)) =$$

$$= g(m) - (I_N)(g(m)) = g(m) - g(m) = 0,$$

por tanto $m - (h \circ g)(m) \in Nuc(g) = Im(f)$, lo que implica que existe $x \in L$ tal que $f(x) = m-(h\circ g)(m)$. Sea $(x, g(m)) \in L \bigoplus M$, entonces $\varphi(x, g(m)) = f(x)+h(g(m)) = m - (h \circ g)(m) + (h \circ g)(m) = m$.

Por lo tanto $\varphi$ es un isomorfismo y entonces $M \cong L \bigoplus N$. ■

**PROPOSICIÓN 1.5.4** Sea

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de $R$-Módulos. Son equivalentes:

1) La sucesión se escinde.

2) Existe $h \in Hom_R(M, N)$ tal que $h \circ g = 1_N$.

3) $Im(g)$ es sumando directo de $M$.

***Demostración:***

$(1) \Rightarrow (2)$
Si la sucesión se escinde, por el **Teorema 1.5.3** se tiene que $M \cong N \oplus K$. Notemos que $N \cong Im(g)$ ya que $g$ es monomorfismo y $g : N \longrightarrow Im(g)$ es epimorfismo. Así, $M \cong Im(g) \oplus K$.

Sea $\varphi : M \longrightarrow Im(g) \oplus K$ un isomorfismo tal que $\varphi(g(n)) = (g(n), 0)$, para cada $n \in N$.

Definamos la función $\rho : Im(g) \oplus K \longrightarrow N$, como $\rho((g(n), k)) = n$.

1) $\rho \in Hom_R(Im(g) \oplus K, N)$.

Sean $(g(n), k)$, $(g(n'), k') \in Im(g) \oplus K$ y $r \in R$. Entonces:

*i)* $\rho((g(n), k) + (g(n'), k')) = \rho((g(n) + g(n'), k + k')) = \rho(g(n + n'), k + k') = n + n' =$

$$= \rho((g(n), k)) + \rho((g(n'), k')).$$

*ii)* $\rho(r(g(n), k)) = \rho((rg(n), rk)) = \rho((g(rn), rk)) = rn = r\rho((g(n), k))$.

Por lo tanto $\rho \in Hom_R(Im(g) \oplus K, N)$.

2) Afirmamos que $1_N = (\rho \circ \varphi) \circ g$.

Sea $n \in N$, entonces:

$((\rho \circ \varphi) \circ g)(n) = (\rho \circ (\varphi \circ g))(n) = \rho(\varphi(g(n))) = \rho((g(n), 0)) = n = 1_N(n)$.

Por lo tanto $1_N = (\rho \circ \varphi) \circ g$.

Haciendo $h = \rho \circ \varphi$, se tiene por 2) que $h \circ g = 1_N$ como se queria mostrar.

$(2) \Rightarrow (3)$

Por hipótesis tenemos que existe $h \in Hom_R(M,N)$ tal que $h \circ g = 1_N$. Afirmamos que

$$M = Im(g) \oplus Nuc(h).$$

*i)* $Im(g) \cap Nuc(h) = \{0\}$.

Si $y = g(n) \in Im(g) \cap Nuc(h)$, entonces

$$0 = h(y) = h(g(n)) = (h \circ g)(n) = 1_N(n) = n,$$

lo que implica que

$$0 = g(0) = g(n) = y$$

y por tanto $Im(g) \cap Nuc(h) = \{0\}$.

*ii)* $M = Im(g) + Nuc(h)$.

Sea $m \in M$, entonces

$$h(m - g(h(m))) = h(m) - h(g(h(m))) = h(m) - (h \circ g)(h(m)) =$$

$$= h(m) - 1_N(h(m)) = h(m) - h(m) = 0,$$

lo que implica que $m - g(h(m)) \in Nuc(h)$, además $g(h(m)) \in Im(g)$, entonces

$$m = g(h(m)) + (m - g(h(m))) \in Im(g) + Nuc(h).$$

Se tiene así que $M = Im(g) + Nuc(h)$.

Por lo tanto de *i)* y *ii)* se tiene que $M = Im(g) \oplus Nuc(h)$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Por hipótesis $Im(g)$ es sumando directo de $M$ y por ser

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta, se tiene que $Im(g) = Nuc(f)$, por lo que $M = Nuc(f) \oplus T$ para algún submódulo $T$ de $M$. Demostraremos que $K \cong T$.

Sea $f' : T \longrightarrow K$ la restricción de $f$ a $T$. Afirmamos que $f'$ es un isomorfismo.

*i)* $f'$ **es un epimorfismo.**

Es claro que $Im(f') \subseteq Im(f)$, por ser $f'$ restricción de $f$ a $T$. Por otro lado, sea $m = n + t \in Nuc(f) \oplus T$, entonces

$$f(m) = f(n+t) = f(n) + f(t) = 0 + f(t) = f'(t) \in Im(f').$$

Lo que implica que $Im(f) \subseteq Im(f')$, entonces $Im(f) = Im(f')$. Y por ser $f$ un epimorfismo, se tiene que $f'$ es epimorfismo.

*ii)* $f'$ **es monomorfismo.**
Se tiene que $Nuc(f') = Nuc(f) \cap T = \{0\}$, y por tanto $f'$ es monomorfismo.

De *i)* y *ii)* se tiene que $f'$ es un isomorfismo y por tanto $K \cong T$. Se tiene así, que $M = Im(f) \oplus K \cong Im(f) \oplus T$, entonces existe $\varphi : Im(f) \oplus K \longrightarrow Im(f) \oplus T$ isomorfismo, tal que $f' \circ \varphi|_K = 1_K$. Consideremos $\iota : K \hookrightarrow Nuc(f) \oplus K$ la inclusión natural y sea $h = \varphi \circ \iota$. Afirmamos que $f \circ h = 1_K$. Sea $k \in K$, entonces

$$(f \circ h)(k) = (f \circ (\varphi \circ \iota))(k) = f(\varphi(\iota(k))) = f(\varphi((0,k))) = (f' \circ \varphi|_K)(0,k) = k = 1_K(k).$$

Por tanto $f \circ h = 1_K$ y la sucesión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} K \longrightarrow 0$$

se escinde. ■

**DEFINICIÓN 1.5.5** Sean $R$ y $R'$ anillos. Un funtor $T : {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{R'}\mathbf{Mod}$ es llamado exacto izquierdo si para cualquier sucesión exacta corta de $R$-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 0$$

se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow T(A) \xrightarrow{T(\iota)} T(B) \xrightarrow{T(\rho)} T(C)$$

es exacta.

**PROPOSICIÓN 1.5.6** El funtor

$$Hom_R(M, \_) : {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$$

es exacto izquierdo.

***Demostración:***

Recordemos que en el **Ejemplo 1.1.19** (1) se muestra que $Hom_R(M, \_)$ es un funtor.

Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de $R$-módulos.

Sean $\iota^* = Hom_R(M, \iota)$ y $\rho^* = Hom_R(M, \rho)$.

*i)* $Nuc(\iota^*) = \{0\}$.

Si $f \in Nuc(\iota^*)$ entonces $f \in Hom_R(M, A)$ y $\iota^*(f) = 0$, entonces para toda $m \in M$ se tiene que $0 = (\iota^*(f))(m) = (\iota \circ f)(m) = \iota(f(m))$, como $\iota$ es inyectivo, entonces $f(m) = 0$ para toda $m \in M$, lo que implica que $f = 0$. Por tanto $Nuc(\iota^*) = \{0\}$.

*ii)* $Im(\iota^*) \subseteq Nuc(\rho^*)$.

Si $g \in Im(\iota^*)$ entonces $g \in Hom_R(M, B)$ y $g = \iota^*(f) = \iota \circ f$ para algna $f \in Hom_R(M, A)$. Pero $\rho^*(g) = \rho \circ g = \rho \circ (\iota \circ f) = (\rho \circ \iota) \circ f = 0$ ya que la sucesicón original es exacta, entonces $Im(\iota) = Nuc(\rho)$, lo que implica que $\rho \circ \iota = 0$, así $g \in Nuc(\rho^*)$. Por tanto $Im(\iota^*) \subseteq Nuc(\rho^*)$.

*iii)* $Nuc(\rho^*) \subseteq Im(\iota^*)$.

Sea $g \in Nuc(\rho^*)$, entonces $g \in Hom_R(M, B)$ y $\rho^*(g) = 0$, así $0 = (\rho^*(g))(m) = (\rho \circ g)(m) = \rho(g(m))$ para toda $m \in M$, lo que implica que $g(m) \in Nuc(\rho) = Im(\iota)$. Entonces $g(m) = \iota(a)$ para algún $a \in A$, como $\iota$ es monomorfismo entonces el elemento $a$ es único. Luego, la función $f : M \longrightarrow A$ dada por $f(m) = a$, si $g(m) = \iota(a)$, está bien definida ya que $\iota$ es monomorfismo. Por otro lado, sean $m_1$, $m_2 \in M$ entonces $f(m_1) = a_1$, $f(m_2) = a_2$, donde $g(m_1) = \iota(a_1)$ y $g(m_2) = \iota(a_2)$; además:

$$g(m_1 + m_2) = g(m_1) + g(m_2) = \iota(a_1) + \iota(a_2) = \iota(a_1 + a_2),$$

lo que implica que:

$$f(m_1 + m_2) = a_1 + a_2 = f(m_1) + f(m_2).$$

Si $r \in R$, entonces $f(rm) = a$, donde $rg(m) = g(rm) = \iota(a)$ y $g(m) = \iota(a')$, se tiene entonces que $rg(m) = r\iota(a') = \iota(ra')$ y por ser $\iota$ monomorfismo se tiene que $ra' = a$, entonces

$$f(rm) = a = ra' = rf(m).$$

Por lo tanto $f \in Hom_R(M, A)$. Pero $\iota^*(f) = \iota \circ f$ y $\iota(f(m)) = \iota(a) = g(m)$ para toda $m \in M$, entonces $\iota^*(f) = g$, lo que implica que $g \in Im(\iota^*)$. Por lo tanto $Nuc(\rho^*) \subseteq Im(\iota^*)$.

De *i)*, *ii)* y *iii)* se sigue que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, A) \xrightarrow{\iota^*} Hom_R(M, B) \xrightarrow{\rho^*} Hom_R(M, C)$$

es exacta. ■

**DEFINICIÓN 1.5.7** Sean $R$ y $R'$ anillos. Un funtor contravariante $T : {}_R\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{R'}\mathbf{Mod}$ es llamado exacto izquierdo si para cualquier sucesión exacta corta de $R$-módulos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 0$$

se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow T(C) \xrightarrow{T(\rho)} T(B) \xrightarrow{T(\iota)} T(A)$$

es exacta.

**PROPOSICIÓN 1.5.8** El funtor contravariante

$$Hom_R(\_, M): \ _R\mathbf{Mod} \longrightarrow \ _{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$$

es exacto izquierdo.

***Demostración:***
Recordemos que en el **Ejemplo 1.1.19** (2) se muestra que $Hom_R(\_, M)$ es un funtor contravariante.

Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de $R$-módulos.

Sean $\iota^* = Hom_R(\iota, M)$ y $\rho^* = Hom_R(\rho, M)$.

*i)* $Nuc(\rho^*) = \{0\}$.
Si $h \in Nuc(\rho^*)$, entonces $h \in Hom_R(C, M)$ y $0 = \rho^*(h) = h \circ \rho$. Así, $h(\rho(b)) = 0$ para toda $b \in B$, por lo cual $h(c) = 0$ para toda $c \in Im(\rho)$. Como $\rho$ es epimorfismo, entonces $Im(\rho) = C$ y $h = 0$. Por lo tanto $Nuc(\rho^*) = \{0\}$.

*ii)* $Im(\rho^*) \subseteq Nuc(\iota^*)$.
Si $g \in Hom_R(C, M)$, entonces $\rho^*(g) \in Im(\rho^*)$ y $\iota^*(\rho^*(g)) = [\rho^*(g)] \circ \iota = (g \circ \rho) \circ \iota = g \circ (\rho \circ \iota) = 0$, debido a que la sucesión original es exacta corta se tiene que $Im(\iota) = Nuc(\rho)$, lo que implica que $\rho \circ \iota = 0$. Entonces $\rho^*(g) \in Nuc(\iota^*)$ para todo $g \in Hom_R(C, M)$. Por lo tanto $Im(\rho^*) \subseteq Nuc(\iota^*)$.

*iii)* $Nuc(\iota^*) \subseteq Im(\rho^*)$.
Si $g \in Nuc(\iota^*)$, entonces $g \in Hom_R(B, M)$ y $\iota^*(g) = g \circ \iota = 0$. Si $c \in C$, entonces $c = \rho(b)$ para alguna $b \in B$ ya que $\rho$ es epimorfismo. Definamos $f : C \longrightarrow M$ por $f(c) = g(b)$ si $c = \rho(b)$. Veamos que $f$ esta bien definida: Si $\rho(b) = \rho(b')$, entonces $b - b' \in Nuc(\rho) = Im(\iota)$, se tiene entonces que $b - b' = \iota(a)$ para alguna $a \in A$. Entonces:

$$g(b) - g(b') = g(b - b') = (g \circ \iota)(a) = 0$$

ya que $g \circ \iota = 0$. Es fácil ver que $f \in Hom_R(C, M)$. Finalmente, se tiene que $\rho^*(f) = f \circ \rho = g$, ya que si $c = \rho(b)$, entonces $g(b) = f(c) = f(\rho(b))$, lo que implica que $g \in Im(\rho^*)$. Por lo tanto $Nuc(\iota^*) \subseteq Im(\rho^*)$.

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se sigue que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_R(C, M) \xrightarrow{\rho^*} Hom_R(B, M) \xrightarrow{\iota^*} Hom_R(A, M)$$

es exacta. ■

## 1.6. Módulos libres y proyectivos.

**DEFINICIÓN 1.6.1** Un conjunto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de elementos de un $R$-módulo $M$ es linealmente independiente si para cualquier subconjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subseteq I$ y $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq R$ tal que

$$r_1 x_{\alpha_1} + r_2 x_{\alpha_2} + ... + r_n x_{\alpha_n} = 0,$$

se tiene que

$$r_1 = r_2 = ... = r_n = 0.$$

**DEFINICIÓN 1.6.2** Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un conjunto de elementos de $M \in R$-Mod. Decimos que $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una base de $M$, si $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un conjunto generador de $M$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es linealmente independiente.

**OBSERVACIÓN 1.6.3** Si $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es base de $M \in R$-Mod, entonces para toda $m \in M$ la representación

$$m = r_1 x_{\alpha_1} + r_2 x_{\alpha_2} + ... + r_n x_{\alpha_n}$$

$$\text{con } r_i \in R \quad \text{y} \quad x_{\alpha_i} \in \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$$

está únicamente determinada. En efecto, si

$$m = r'_1 x_{\alpha_1} + r'_2 x_{\alpha_2} + ... + r'_n x_{\alpha_n}$$

es otra representación de $m$, con $r'_i \in R$, se tiene que

$$0 = m - m = (r_1 x_{\alpha_1} + r_2 x_{\alpha_2} + ... + r_n x_{\alpha_n}) - (r'_1 x_{\alpha_1} + r'_2 x_{\alpha_2} + ... + r'_n x_{\alpha_n}) =$$

$$= (r_1 - r_1')x_{\alpha_1} + (r_2 - r_2')x_{\alpha_2} + ... + (r_n - r_n')x_{\alpha_n}.$$

Como el conjunto $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n}\} \subseteq \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es linealmente independiente, se tiene que

$$r_1 - r_1' = r_2 - r_2' = ... = r_n - r_n' = 0,$$

lo que implica que

$$r_1 = r_1', \quad r_2 = r_2', ..., \; r_n = r_n'.$$

**DEFINICIÓN 1.6.4** Sea $M \in R$-Mod, decimos que $M$ es *libre* si tiene una base.

**OBSERVACIÓN 1.6.5** Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un subconjunto de $M \in R$-Mod. Se tiene que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es base de $M$ si y solo si

$$M = \bigoplus_{\alpha\in I} Rx_\alpha,$$

donde $Rx_\alpha$ es el submódulo de $M$ generado por $x_\alpha$. En efecto, si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es base de $M$, entonces es un conjunto generador de $M$, por lo cual

$$M = \sum_{\alpha\in I} Rx_\alpha.$$

Además, si consideramos la intersección $M_\beta \bigcap \left( \sum_{\alpha\in I,\ \beta\neq\alpha} M_\alpha \right)$ para cualquier $\beta \in I$ y $m \in M_\beta \bigcap \left( \sum_{\alpha\in I,\ \beta\neq\alpha} M_\alpha \right)$, se tiene que $m = r_\beta x_\beta = \sum_{\alpha\in I,\ \beta\neq\alpha} r_\alpha x_\alpha$ con $r_\beta$ y $r_\alpha \in R$ para toda $\alpha \in I$, por lo cual $0 = \sum_{\alpha\in I,\ \beta\neq\alpha} r_\alpha x_\alpha - r_\beta x_\beta$ y por ser $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un conjunto lienealmente independiente, se tiene que $r_\beta = r_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in I$, así $m = 0$ y se tiene que $M_\beta \bigcap \left( \sum_{\alpha\in I,\ \beta\neq\alpha} M_\alpha \right) = \{0\}$ para toda $\beta \in I$ y por tanto:

$$M = \bigoplus_{\alpha\in I} Rx_\alpha.$$

Recíprocamente, si

$$M = \bigoplus_{\alpha\in I} Rx_\alpha,$$

entonces para todo $m \in M$ se tiene que $m = r_1 x_{\alpha_1} + r_2 x_{\alpha_2} + ... + r_n x_{\alpha_n}$, con $r_i \in R$, lo que implica que $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto generador de $M$.

Luego, por ser $M$ suma directa de los submódulos $Rx_\alpha$ con $\alpha \in I$ se tiene que para cualquier conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subseteq I$, si $0 = r_1x_{\alpha_1} + r_2x_{\alpha_2} + ... + r_nx_{\alpha_\alpha}$, con $\{r_1, r_2, ..., r_n\} \in R$, entonces para cualquier $j \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene que

$$r_jx_{\alpha_j} = -\left(\sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} r_ix_{\alpha_i}\right) \in Rx_{\alpha_j} \bigcap \left(\sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} Rx_{\alpha_i}\right) = \{0\},$$

lo cual implica que $r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$ y así $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una base de $M$.

**OBSERVACIÓN 1.6.6** Si $M \in R$-Mod y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una base de $M$, entonces $R \cong Rx_\alpha$ para toda $\alpha \in I$. En efecto, si consideremos para cada $\alpha \in I$ el morfismo $\rho_\alpha : R \longrightarrow Rx_\alpha$, dado por $\rho_\alpha(r) = rx_\alpha$, se tiene que $\rho_\alpha$ es isomorfismo.

1) $\rho_\alpha$ es monomorfismo.
Sea $x \in Nuc(\rho_\alpha)$, entonces $\rho_\alpha(x) = xm_\alpha = 0$ y por ser $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un conjunto linealmente independiente, se tiene que $x = 0$, así $Nuc(\rho_\alpha) = \{0\}$ y por tanto $\rho_\alpha$ es monomorfismo.

2) $\rho_\alpha$ es epimorfismo.
Sea $rx_\alpha \in Rx_\alpha$, con $r \in R$, entonces $\rho_\alpha(r) = rx_\alpha$ y por tanto $\rho_\alpha$ es epimorfismo.

Entonces $R \cong Rx_\alpha$ para toda $\alpha \in I$.

De la **observación 1.6.5** y la **observación 1.6.6** se tiene el siguiente:

**TEOREMA 1.6.7** Un $R$-módulo $M$ es libre si y solo si existe un conjunto no vacio $I$ tal que $M \cong R^{(I)}$.

**PROPOSICIÓN 1.6.8** Sea $L$ un $R$-módulo libre, y sea $B = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una base de $L$. Si $M$ es un $R$-módulo y si $\gamma : B \longrightarrow M$ es una función, entonces existe un único morfismo $g \in Hom_R(L, M)$ tal que $g(x_\alpha) = \gamma(x_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, dashed, "g"] & \\
B \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\gamma"'] & M
\end{tikzcd}$$

***Demostración:***
Todo elemento $l \in L$ tiene una única expresión de la forma

$$l = \sum_{\alpha\in I} r_\alpha x_\alpha,$$

donde $r_\alpha \in R$ y $r_\alpha \neq 0$ para un número finito de $\alpha' s$ en $I$. Definamos

$$g : L \longrightarrow M$$

$$\text{por } g(l) = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha \gamma(x_\alpha).$$

Afirmamos que $g \in Hom_R(L, M)$. Si $l$ y $n$ estan en $L$, entonces tienen representaciones únicas

$$l = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha x_\alpha \quad \text{y} \quad n = \sum_{\alpha \in I} r'_\alpha x_\alpha,$$

donde $r_\alpha,\ r'_\alpha \in R$ y $r_\alpha \neq 0$, $r'_\alpha \neq 0$ para un número finito de $\alpha' s$ en $I$. Entonces

$$g(l+n) = \sum_{\alpha \in I} (r_\alpha + r'_\alpha)\gamma(x_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha \gamma(x_\alpha) + \sum_{\alpha \in I} r'_\alpha \gamma(x_\alpha) = g(l) + g(n),$$

por lo tanto $g \in Hom_(L, M)$. Es claro que el morfismo $g$ satisface la propiedad

$$g(x_\alpha) = \gamma(x_\alpha) \text{ para toda } \alpha \in I.$$

Veamos que $g$ es el único morfismo en $Hom_R(L, M)$ que satisface la propiedad $g(x_\alpha) = \gamma(x_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$. Sea $f \in Hom_R(L, M)$ tal que $f(x_\alpha) = \gamma(x_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$. Como sabemos que todo elemento $l \in L$ tiene representación única

$$l = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha x_\alpha,$$

donde $r_\alpha \in R$ y $r_\alpha \neq 0$ para un número finito de $\alpha' s$ en $I$, entonces

$$g(l) = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha \gamma(x_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha f(x_\alpha) = f(\sum_{\alpha \in I} r_\alpha x_\alpha) = f(l),$$

lo que demuestra que $f = g$. ■

**TEOREMA 1.6.9** Todo $R$-Módulo $M$ es cociente de un $R$-módulo libre $L$.

***Demostración:***

Sea $L$ la suma directa de $|M|$ copias de $R$, por el **Teorema 1.6.7** se tiene que $L$ es un $R$-módulo libre y sea $\{x_m \mid m \in M\}$ una base de $L$. Por la **Proposición 1.6.8** existe $g \in Hom_R(L, M)$ dado por $g(x_m) = m$ para toda $m \in M$. Claramente $g$ es epimorfismo y por el **primer Teorema de isomorfismo** se tiene que

$$M \cong L/Nuc(g). \quad ■$$

**DEFINICIÓN 1.6.10** Sea $P \in R$-Mod, se dice que $P$ es *proyectivo* si para todo $M \in R$-Mod, $g \in Hom(M,N)$ epimorfismo y $f : P \longrightarrow N$ morfismo existe $\overline{f} : P \longrightarrow M$ tal que $g \circ \overline{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

**PROPOSICIÓN 1.6.11** Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de $R$-módulos. Entonces, $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ es proyectivo si y solo si $M_\alpha$ es proyectivo para toda $\alpha \in I$.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Sean $M$, $N \in R$-Mod, $g : M \longrightarrow N$ un epimorfismo y $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$ un morfismo.

$$\begin{tikzcd} & M_\beta \arrow[d, "f_\beta"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Consideremos para cada $\beta \in I$ el morfismo $P_\beta \in Hom_R(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha, M_\beta)$ dado por $P_\beta(f) = f(\beta)$, nótese que $P_\beta$ es la proyección de $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ en $M_\beta$ descrita en la demostración del **Teorema 1.1.22**. Entonces, se tiene el morfismo $f_\beta \circ P_\beta : \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \longrightarrow N$ y por ser $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ proyectivo existe $\varphi : \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \longrightarrow M$ tal que $g \circ \varphi = f_\beta \circ P_\beta$.

$$\begin{tikzcd} \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \arrow[r, "P_\beta"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & M_\beta \arrow[d, "f_\beta"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por otro lado, para cada $\beta \in I$ consideremos el morfismo $U_\beta \in Hom_R(M_\beta, \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha)$, dado por

$$U_\beta(x) : I \longrightarrow \bigcup M_\alpha$$

$$\text{y} \quad U_\beta(x)(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \quad \alpha \neq \beta \\ x & si \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Así cada $U_\beta$ es la inclusión de $M_\beta$ en $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ descrita en la demostración del **Teorema 1.1.24**. Entonces se tiene el morfismo $\varphi \circ U_\beta : M_\beta \longrightarrow M$.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \arrow[r, shift left, "P_\beta"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & M_\beta \arrow[l, shift left, "U_\beta"] \arrow[d, "f_\beta"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Además, el morfismo $\varphi \circ U_\beta$ es tal que

$$g \circ (\varphi \circ U_\beta) = (g \circ \varphi) \circ U_\beta = (f_\beta \circ P_\beta) \circ U_\beta = f_\beta \circ (P_\beta \circ U_\beta) = f_\beta \circ I_{M_\beta} = f_\beta.$$

Y por tanto $M_\beta$ es proyectivo para toda $\beta \in I$.

$\Leftarrow$) Sean $M$, $N \in R$-Mod, $g : M \longrightarrow N$ un epimorfismo y $f : \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \longrightarrow N$ un morfismo.

$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Consideremos nuevamente para cada $\beta \in I$ la inclusión $U_\beta \in Hom_R(M_\beta, \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha)$, dada por $U_\beta(x) : I \longrightarrow \bigcup M_\alpha$ y

$$U_\beta(x)(\alpha) = \begin{cases} 0 & si \;\; \alpha \neq \beta \\ x & si \;\; \alpha = \beta \end{cases}$$

Se tiene así el morfismo $f \circ U_\beta : M_\beta \longrightarrow N$ y por ser $M_\beta$ proyectivo para cada $\beta \in I$ existe un morfismo $f_\beta : M_\beta \longrightarrow M$. Luego, por ser $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ el coproducto de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ existe un único morfismo $\varphi : \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \longrightarrow M$ tal que $\varphi \circ U_\beta = f_\beta$.

$$\begin{tikzcd}
& M_\beta \arrow[d, "U_\beta"] \arrow[ddl, "f_\beta"'] & \\
& \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Se tiene así que $(g \circ \varphi) \circ U_\beta = g \circ (\varphi \circ U_\beta) = g \circ f_\beta = f \circ U_\beta$ para toda $\beta \in I$ y por tanto $g \circ \varphi = f$. ■

**TEOREMA 1.6.12** Sea $M \in R$-Mod. Si $M$ es libre, entonces es proyectivo.

***Demostración:***
Sean $N$, $T \in R$-Mod, $g : N \longrightarrow T$ un epimorfismo y $f : M \longrightarrow T$ un morfismo.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "g"'] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sea $\{m_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base de $M$, entonces $\{f(m_\alpha)\}_{\alpha \in I} \subseteq T$, por ser $g$ epimorfismo, para cada $\alpha \in I$ existe $n_\alpha \in N$ tal que

$$g(n_\alpha) = f(m_\alpha).$$

Definamos la siguiente función:

$$\varphi : \{m_\alpha\}_{\alpha \in I} \longrightarrow N$$

$$\text{como } \varphi(m_\alpha) = n_\alpha$$

Por la **Proposición 1.6.8** se tiene que existe un único morfismo $\overline{\varphi} \in Hom_R(M, N)$ tal que $\overline{\varphi}(m_\alpha) = \varphi(m_\alpha) = n_\alpha$. Además, como $\{m_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es base de $M$, entonces todo $m \in M$ tiene una única representación

$$m = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha m_\alpha$$

$$\text{con } r_\alpha \in R \text{ para toda } \alpha \in I$$

Por lo cual, $\overline{\varphi}(m) = \overline{\varphi}(\sum\limits_{\alpha \in I} r_\alpha m_\alpha) = \sum\limits_{\alpha \in I} r_\alpha \overline{\varphi}(m_\alpha) = \sum\limits_{\alpha \in I} r_\alpha \varphi(m_\alpha) = \sum\limits_{\alpha \in I} r_\alpha n_\alpha$.

Entonces para toda $m \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} (g \circ \overline{\varphi})(m) = g(\overline{\varphi}(m)) = g(\sum_{\alpha \in I} r_\alpha n_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha g(n_\alpha) = \\ = \sum_{\alpha \in I} r_\alpha f(m_\alpha) = f(\sum_{\alpha \in I} r_\alpha m_\alpha) = f(m) \end{aligned}$$

Esto implica que $g \circ \overline{\varphi} = f$ y por tanto $M$ es proyectivo.

**TEOREMA 1.6.13** Sea $M \in R$-Mod. $M$ es módulo proyectivo si y solo si es sumando directo de un módulo libre.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Sea $M$ proyectivo, por el **Teorema 1.6.9** se tiene que $M$ es cociente de un $R$-módulo libre $L$. Entonces existe $f \in Hom_R(L, M)$ epimorfismo. Por otro lado consideremos al morfismo identidad $I_M : M \longrightarrow M$, por ser $M$ proyectivo, existe $\bar{f} \in Hom_R(M, L)$ tal que $f \circ \bar{f} = I_M$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[d, "I_M"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Luego, consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Nuc(f) \arrow[r, hook, "\iota"] & L \arrow[r, shift left, "f"] & M \arrow[l, shift left, "\bar{f}"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que se escinde, entonces por el **Teorema 1.5.3** se tiene que $L \cong M \oplus Nuc(f)$.

$\Leftarrow$)Supongamos que $M$ es sumando directo de un $R$-módulo libre $L$. Entonces

$$L = M \oplus N \text{ para algín submódulo } N \text{ de } L.$$

Por el **Teorema 1.6.12** se tiene que $L$ es proyectivo y por la **Proposición 1.6.11** se tiene que $N$ y $M$ son proyectivos. ■

## 1.7. Cápsulas inyectivas.

**DEFINICIÓN 1.7.1** Un divisor de cero en un anillo $R$, es un elemento $0 \neq x \in R$ tal que existe $0 \neq y \in R$ que verifica $xy = 0$.

**DEFINICIÓN 1.7.2** Sea $M \in R$-Mod. Decimos que $M$ es *divisible* si para cada $0 \neq r \in R$ no divisor de cero y $m \in M$ existe $y \in M$ tal que $m = ry$.

**PROPOSICIÓN 1.7.3**

1.– Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$-Mod. Si $M_\alpha$ es divisible para cada $\alpha \in I$, entonces $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ es divisible.

2.– Sea $M \in R$-Mod divisible. Si $N$ es submódulo de $M$ entonces $M/N$ es divisible.

***Demostración:***

1.– Sea $(m_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ y $0 \neq r \in R$ no divisor de cero. Como $M_\alpha$ es divisible para cada $\alpha \in I$, entonces existe $x_\alpha \in M_\alpha$ tal que $m_\alpha = rx_\alpha$, por lo que $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ y se tiene que $(m_\alpha)_{\alpha\in I} = r(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, lo que implica que $\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ es divisible.

2.– Sea $m+N \in M/N$ y $0 \neq r \in R$ no divisor de cero. Como $M$ es divisible, existe $x \in M$ tal que $m = rx$. Entonces $x+N \in M/N$ es tal que $r(x+N) = rx+N = m+M$, lo que implica que $M/N$ es divisible.

**LEMA 1.7.4 (Lema de Zorn)** Si $(\mathcal{X}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y todo subconjunto $\mathcal{C}$ totalmente ordenado de $\mathcal{X}$ esta acotado superiomente, entonces $\mathcal{X}$ tiene elementos máximos.

**DEFINICIÓN 1.7.5** Sea $K \in R$-Mod, se dice que $K$ es *inyectivo* si para todo $M \in R$-Mod, $g \in Hom(M,N)$ monomorfismo y $f : M \longrightarrow K$ morfismo existe $\overline{f} : N \longrightarrow K$ tal que $\overline{f} \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

**PROPOSICIÓN 1.7.6** Sea $E \in R$-Mod. Son equivalentes:

(1) $E$ es inyectivo.

(2) Para todo ideal izquierdo $I$ de $R$ y $f : I \longrightarrow E$ morfismo, existe $\bar{f} : R \longrightarrow E$ tal que $\bar{f}|_I = f$.

(3) Para todo ideal izquierdo $I$ de $R$ y $f : I \longrightarrow E$ morfismo, existe $y \in E$ tal que $f(r) = ry$ para todo $r \in I$.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean $I$ un ideal izquierdo de $R$, $f \in Hom_R(I,E)$ e $\iota \in Hom_R(I,R)$ la inclusión natural. Por ser $E$ inyectivo existe $\bar{f} \in Hom_R(R,E)$ tal que $f = \bar{f} \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Entonces si $x \in I$, se tiene que $f(x) = (\bar{f} \circ \iota)(x) = \bar{f}(\iota(x)) = \bar{f}(x) = \bar{f}|_I(x)$, lo que demuestra que $\bar{f}|_I = f$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sean $I$ un ideal izquierdo de $R$, $f \in Hom_R(I,E)$ e $\iota \in Hom_R(I,R)$ la inclusión natural.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & R \\ & E & \end{tikzcd}$$

Por hipótesis existe $\bar{f} \in Hom_R(R,E)$ tal que $\bar{f} = f|_I$. Sea $y = \bar{f}(1)$, entonces para toda $r \in I$ se tiene que:

$f(r) = \bar{f}|_I(r) = \bar{f}|_I(r1) = r\bar{f}|_I(1) = r\bar{f}(1) = ry.$

(3) $\Rightarrow$ (1) Sean $M, N \in R$-Mod, $\iota \in Hom_R(M,N)$ un monomorfismo y $f \in Hom_R(M,E)$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & N \\ & E & \end{tikzcd}$$

Sea $\mathfrak{F} = \{(H,g) \mid H \leq N,\ M \leq H,\ g \in Hom_R(H,E)\ y\ g|_M = f\}$. $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ ya que $(M,f) \in \mathfrak{F}$.

Sea $(H,g) \leq (H',g')$ si y solo si $H \leq H'$ y $g'|_H = g$, con este orden $\mathfrak{F}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Si $\mathfrak{T}$ es una cadena de $\mathfrak{F}$ entonces definamos $\bar{L}$ como la suma de todos los $L \in \mathfrak{T}$ y definamos $\bar{\varphi} : \bar{L} \longrightarrow E$ como el morfismo que extiende a todos los $\varphi \in \mathfrak{T}$, entonces $(\bar{L}, \bar{\varphi}) \in \mathfrak{F}$ y es una cota superior de $\mathfrak{T}$. Luego, $(\mathfrak{F}, \leq)$ satisface la hipótesis del **Lema de Zorn**. Sea $(T,\varphi)$ un máximo de $\mathfrak{F}$, así $T \leq N$ y $\varphi \in Hom_R(T,E)$ es tal que $\varphi|_M = f$.

Afirmamos que $T = N$.

Supongamos que existe $x \in N$ tal que $x \notin T$. Consideremos $T + Rx \leq N$. Vamos a demostrar que es posible extender $\varphi$ a $\psi : T + Rx \longrightarrow E$. Sea $(T : x) = \{r \in R \mid rx \in$

$T\}$, $(T : x)$ es un ideal izquierdo de $R$. Hay un morfismo $\sigma : (T : x) \longrightarrow E$ dado por $\sigma(r) = \varphi(rx)$ y por hipótesis existe $y \in E$ tal que $\sigma(r) = ry$ para todo $r \in (T : x)$. Ahora definamos $\psi : T + Rx \longrightarrow E$ como $\psi(z + rx) = \varphi(z) + ry$, donde $z \in T$. $\psi$ esta bien definida, ya que si $z + rx = z' + r'x$, entonces $z - z' = (r' - r)x$ implica que $r' - r \in (T : x)$ y entonces $\varphi(z) - \varphi(z') = \varphi((r' - r)x) = \sigma(r' - r) = (r' - r)y = r'y - ry$, es decir que $\varphi(z) + ry = \varphi(z') + r'y$, esto implica que $\psi \in Hom_R(T + Rx, E)$ y $\psi$ extiende a $\varphi$, así $(T + Rx, \psi) \in \mathfrak{F}$ y $(T, \varphi) < (T + Rx, \psi)$, lo cual es una contradicción, ya que $(T, \varphi)$ es máximo en $\mathfrak{F}$. Por lo tanto $T = N$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

Y se tiene que $E$ es inyectivo. ■

**OBSERVACIÓN 1.7.7** Si $R = \mathbb{Z}$, entonces cada elemento $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ no es divisor de cero, ya que $\mathbb{Z}$ es un dominio entero. De esta forma tenemos que $M \in \mathbb{Z}$-Mod es divisible si para cada $m \in M$ y cada $0 \neq z \in \mathbb{Z}$ existe $n \in M$ tal que $m = zn$. Se tiene entonces que $\mathbb{Q} \in \mathbb{Z}$-Mod es divisible. En efecto, si $0 \neq \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ entonces $p \neq 0 \neq q$, y si $0 \neq z \in \mathbb{Z}$ entonces $\frac{p}{zq} \in \mathbb{Q}$ es tal que $z\frac{p}{zq} = z(\frac{1}{z}\frac{p}{q}) = (z\frac{1}{r})(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$. Lo que demuestra que $\mathbb{Q}$ es divisible. Además, por la **Proposición 1.7.3 (1)** se tiene que $\mathbb{Q}^{(I)}$ es divisible para todo conjunto $I \neq \varnothing$. Y si $K \leq \mathbb{Q}^{(I)}$, entonces $\mathbb{Q}^{(I)}/K$ es divisible por la **Proposición 1.7.3 (2)**.

A continuación veremos algunos resultados importantes para los $\mathbb{Z}$-módulos divisibles, los cuales serán de gran importancia para resultados posteriores.

**TEOREMA 1.7.8** Sea $D \in \mathbb{Z}$-Mod. $D$ es divisible si y solo si es inyectivo.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Sea $n\mathbb{Z}$ un ideal izquierdo de $\mathbb{Z}$ y $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, D)$. Como $f(n) \in D$ y $n \in \mathbb{Z}$, por ser $D$ divisible, se tiene que existe $y \in D$ tal que $f(n) = ny$. Sea $nr \in n\mathbb{Z}$, entonces $f(nr) = f(rn) = rf(n) = r(ny) = (rn)y$ y por la **Proposición 1.7.6 (3)** se tiene que $D$ es inyectivo.

$\Leftarrow$) Sean $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, $d \in D$ y $n\mathbb{Z}$ ideal izquierdo de $\mathbb{Z}$. Sea $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}, D)$, dado por $f(nr) = rd$. Por ser $D$ inyectivo, entonces por la **Proposición 1.7.6 (3)** se tiene que para todo $nr \in n\mathbb{Z}$ existe $y \in D$ tal que $f(nr) = (nr)y$, por lo cual $d = f(n) = ny$, se tiene entonces que $D$ es divisible. ■

**PROPOSICIÓN 1.7.9** Todo $M \in \mathbb{Z}$-Mod se encaja en un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

***Demostración:***

Sea $M \in \mathbb{Z}$-Mod, por el **Teorema 1.6.9** se tiene que $M$ es cociente de un $L \in \mathbb{Z}$-Mod libre. Por el **Teorema 1.6.7** se tiene que $L \cong \mathbb{Z}^{(I)}$ para algún conjunto $I \neq \varnothing$, entonces $M \cong \mathbb{Z}^{(I)}/K$ para algún $K \leq \mathbb{Z}^{(I)}$. Sea $\mathbb{Q}^{(I)} \in \mathbb{Z}$-Mod, como $\mathbb{Z}^{(I)} \leq \mathbb{Q}^{(I)}$, se tiene que $M \cong \mathbb{Z}^{(I)}/K \leq \mathbb{Q}^{(I)}/K$, por la **Observación 1.7.7** se tiene que $\mathbb{Q}^{(I)}/K$ es divisible y por el **Teorema 1.7.8** se tiene que $\mathbb{Q}^{(I)}/K$ es inyectivo. ■

**PROPOSICIÓN 1.7.10** Sean $D \in \mathbb{Z}$-Mod y $R$ un anillo. Si $D$ es divisible, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un $R$-módulo inyectivo.

***Demostración:***

Primero veamos que a través de la acción:

$$R \times Hom_{\mathbb{Z}}(R, D) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$$

dada por $(r, f) \mapsto rf$, donde $rf : R \longrightarrow D$ es tal que $rf(x) = f(xr)$

tenemos que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un $R$-módulo.

Sean $f_1, f_2, f \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ y $r, r_1, r_2 \in R$, entonces:

1) Si $a \in R$, se tiene que:

$$[r(f_1 + f_2)](a) = (f_1 + f_2)(ar) = f_1(ar) + f_2(ar) = (rf_1)(a) + (rf_2)(a) =$$

$$= [rf_1 + rf_2](a),$$

lo que implica que $r(f_1 + f_2) = rf_1 + rf_2$.

2) Si $a \in R$, se tiene que:

$$[(r_1 + r_2)f](a) = f(a(r_1 + r_2)) = f(ar_1 + ar_2) = f(ar_1) + f(ar_2) =$$

$$= r_1 f(a) + r_2 f(a) = [r_1 f + r_2 f](a),$$

lo que implica que $(r_1 + r_2)f = r_1 f + r_2 f$.

3) Si $a \in R$, se tiene que:

$$[(r_1 r_2)f](a) = f(a(r_1 r_2)) = f((ar_1)r_2) = r_2 f(ar_1) = r_1(r_2 f(a)) = [r_1(r_2 f)](a).$$

lo que implica que $(r_1r_2)f = r_1(r_2f)$

4) Si $a \in R$, se tiene que:

$$(1f)(a) = f(a1) = f(a),$$

lo que implica que $1f = f$.

Por lo tanto $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un $R$-módulo.

Por otro lado, sean $I$ un ideal izquierdo de $R$, $\iota \in Hom_R(I, R)$ la inclusión natural y $f \in Hom_R(I, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & R \\ & Hom_{\mathbb{Z}}(R, D) & \end{tikzcd}$$

Si $a \in I$, $f(a) : R \longrightarrow D$, definamos $g : I \longrightarrow D$ por $g(a) = [f(a)](1)$. Afirmamos que $g \in Hom_{\mathbb{Z}}(I, D)$.

Sean $a,\ b \in I$, entonces:

$$g(a + b) = [f(a + b)](1) = [f(a) + f(b)](1) = [f(a)](1) + [f(b)](1) = g(a) + g(b).$$

Por tanto $g \in Hom_{\mathbb{Z}}(I, D)$. Luego, por ser $D$ divisible, por el **Teorema 1.7.8** se tiene que $D$ es inyectivo y por la **Proposición 1.7.6 (2)** se tiene que existe $\bar{g} \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ tal que $\bar{g}|_I = g$.

Ahora, para toda $a \in I$ y $r \in R$ se tiene que

$$(a\bar{g})(r) = \bar{g}(ra) = g(ra) = [f(ra)](1) = [rf(a)](1) = [f(a)](r).$$

Se tiene entonces que $f(a) = a\bar{g}$ para toda $a \in I$. Así, por el **Proposición 1.7.6 (3)** se tiene que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un $R$-módulo inyectivo. ■

**TEOREMA 1.7.11** Todo $R$-módulo $M$ se encaja en un módulo inyectivo.

***Demostración:***
Sea $M \in R$-Mod. Como $M$ es grupo abeliano, entonces $M \in \mathbb{Z}$-Mod. Definamos $\varphi : M \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ por $\varphi(m) = \varphi_m$, donde $\varphi_m(r) = rm$, de esta forma se tiene que $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, M))$. En efecto, si $m, m_1, m_2 \in M$ y $z \in \mathbb{Z}$, entonces:

*i)* $\varphi(m_1+m_2) = \varphi_{m_1+m_2}$, donde $\varphi_{m_1+m_2}(r) = r(m_1+m_2) = rm_1+rm_2 = \varphi_{m_1}(r)+\varphi_{m_2}(r)$, lo que implica que $\varphi_{m_1+m_2} = \varphi_{m_1} + \varphi_{m_2}$. Entonces:

$\varphi(m_1 + m_2) = \varphi_{m_1+m_2} = \varphi_{m_1} + \varphi_{m_2} = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$.

*ii)* $\varphi(zm) = \varphi_{zm}$, donde $\varphi_{zm}(r) = r(zm) = (rz)m = \varphi_m(rz) = z\varphi_m(r)$. Lo que implica que $\varphi_{zm} = z\varphi_m$. Entonces:

$\varphi(zm) = \varphi_{zm} = z\varphi_m = z\varphi(m)$. Y por lo tanto $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, M))$.

Afirmamos que $\varphi$ es monomorfismo. Si $\varphi(m) = \varphi(m')$, entonces $\varphi_m = \varphi_{m'}$, lo que implica que $rm = \varphi_m(r) = \varphi_{m'}(r) = rm'$ para toda $r \in R$, en particular para $r = 1$ se tiene que $m = m'$ y por tanto $\varphi$ es monomorfismo.

Por la **Proposición 1.7.9** existe $D \in \mathbb{Z}$-Mod inyectivo tal que $M$ se encaja en $D$. Sea $\iota \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, D)$ la inclusión natural. Aplicando el funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(R, \_)$ al morfismo $\iota$, se tiene por la **Proposición 1.5.6** que $\iota^* = Hom_R(R, \iota) : Hom_{\mathbb{Z}}(R, M) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un monomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos, luego $\iota^* \circ \varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$. Afirmamos que $\iota^* \circ \varphi \in Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$.

Sean $a \in R$ y $m_1, m_2, m \in M$, entonces:

1) Como $\iota^* \circ \varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$, se tiene que:

$$(\iota^* \circ \varphi)(m_1 + m_2) = (\iota^* \circ \varphi)(m_1) + (\iota^* \circ \varphi)(m_2).$$

2) Como $a[(\iota^* \circ \varphi)(m)] \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ y $D$ es un $\mathbb{Z}$-módulo divisible, por la estructura de $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ como $R$-módulo descrita en la demostración de la **Proposición 1.7.10** se tiene para toda $r \in R$ que:

$$a[(\iota^* \circ \varphi)(m)](r) = [(\iota^* \circ \varphi)(m)](ra).$$

Por lo que:

$$a[(\iota^* \circ \varphi)(m)](r) = [(\iota^* \circ \varphi)(m)](ra) = [\iota^*(\varphi(m))](ra) = \iota^*(\varphi_m(ra)) = \iota((ra)m) =$$

$$= (ra)m = r(am) = \iota(r(am)) = \iota^*(\varphi_{am}(r)) = [\iota^*(\varphi(am))](r) = [(\iota^* \circ \varphi)(am)](r).$$

Lo que implica que $a[(\iota^* \circ \varphi)(m)] = (\iota^* \circ \varphi)(am)$.

Por lo tanto, se tiene que $\iota^* \circ \varphi \in Hom_R(M, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$ y es monomorfismo. Luego, por la **Proposición 1.7.10** se tiene que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un $R$-módulo inyectivo, por lo tanto $M$ se encaja en $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$. ■

**PROPOSICIÓN 1.7.12** Sea $E$ un $R$-módulo inyectivo y $M$ un submódulo de $E$. Entonces $M$ es sumando directo de $E$ si y solo si $M$ es inyectivo.

***Demostración:***
$\Rightarrow$) Sean $K$, $L$ y $N \in R$-Mod, $f : K \longrightarrow L$ un monomorfismo y $g : K \longrightarrow M$ un morfismo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L \\ & M & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, consideremos la inclusión natural $\iota : M \longrightarrow E$, se tiene entonces que $\iota \circ g : K \longrightarrow E$ y por ser $E$ inyectivo existe $\varphi : L \longrightarrow E$ tal que:

$$\varphi \circ f = \iota \circ g.$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L \arrow[ddl, dashed, "\varphi"] \\ & M \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\ & E & \end{tikzcd}$$

Luego, si $M$ es sumando directo de $E$, existe $T \leq E$ tal que $E = M \oplus T$. Consideremos el morfismo $\rho \in Hom_R(M \oplus T, M)$ dado por $\rho(m + t) = m$. Entonces:

$$\rho \circ (\varphi \circ f) = \rho \circ (\iota \circ g).$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L \arrow[ddl, dashed, "\varphi"] \\ & M \arrow[d, hook, "\iota"'] & \\ & E = M \oplus T \arrow[d, "\rho"'] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

Como $\rho \circ \iota = 1_M$, se tiene entonces que:

$$(\rho \circ \varphi) \circ f = \rho \circ (\varphi \circ f) = \rho \circ (\iota \circ g) = (\rho \circ \iota) \circ g = I_M \circ g = g.$$

Por tanto el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & L \arrow[dl, dashed, "\rho\circ\varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

muestra que $M$ es inyectivo.

$\Leftarrow$) Sean $\iota : M \hookrightarrow E$ la inclusión natural y $\pi : E \longrightarrow E/M$ el morfismo canónico. Se tiene entonces la siguiente sucesión exacta corta de $R$-módulos:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} E/M \longrightarrow 0\ .$$

Por ser $E$ inyectivo existe $\varphi \in Hom_R(E, M)$ tal que $1_M = \varphi \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "1_M"'] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] & E/M \arrow[r] & 0 \\ & M & & & \end{tikzcd}$$

Por la **Proposición 1.5.4** se tiene que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} E/M \longrightarrow 0$$

se escinde y por el **Teorema 1.5.3** se tiene que $E = M \oplus E/M$. ■

**PROPOSICIÓN 1.7.13** Sea $E \in R$-Mod. $E$ es inyectivo si y solo si toda sucesión exacta corta de $R$-módulos

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se escinde.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Si $E$ es inyectivo, existe $\varphi \in Hom_R(B, E)$ tal que $\varphi \circ f = 1_E$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_E"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] & C \arrow[r] & 0 \\ & E & & & \end{tikzcd}$$

Por la **Proposición 1.5.4** se tiene que la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

se escinde.

$\Leftarrow$) Por el **Teorema 1.7.11** existe $M \in R$-Mod inyectivo, tal que $E$ se encaja en $M$, consideresmos $\iota \in Hom_R(E, M)$ la inclusión natural y $\pi \in Hom_R(M, M/E)$ el morfismo canónico, se tiene entonces ls siguiente sucesión exacta corta de $R$-módulos:

$$0 \longrightarrow E \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} M/E \longrightarrow 0\ ,$$

la cual se escinde por hipótesis. Luego, por el **Teorema 1.5.3** se tiene que:

$$M = E \bigoplus M/E.$$

Como $M$ es inyectivo se tiene por la **Proposición 1.7.12** que $E$ es inyectivo. ■

**DEFINICIÓN 1.7.14** Sea $M \in R$-Mod y $K \leq M$, decimos que $K' \leq M$ es pseudocomplemento de $K$ si $K \cap K' = \{0\}$ y $K'$ es máximo con esta propiedad, es decir que si $T \leq M$ y si $K' < T$ entonces $K \cap T \neq \{0\}$.

**DEFINICIÓN 1.7.15** Sean $M \in R$-Mod y $N$ un submódulo de $M$, se dice que $N$ es *esencial* en $M$ si $N \cap K = \{0\}$ implica que $K = \{0\}$ para todo $K$ submódulo de $M$. Utilizaremos la notación $N \trianglelefteq M$ para decir que $N$ es un submódulo esencial de M.

**PROPOSICIÓN 1.7.16** Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Si $T \leq M$ es un pseudocomplemento de $N$ en $M$, entonces

$$N \oplus T \trianglelefteq M.$$

Además

$$\frac{N \oplus T}{T} \trianglelefteq \frac{M}{T}.$$

***Demostración:***
Sea $H \leq M$ tal que $H \cap (N \oplus T) = \{0\}$. Consideremos $H + T \leq M$ y sea $x \in N \cap (H + T)$. Se tiene que $x \in N$ y $x \in T + H$, entonces $x = t + h$ para algunos $t \in T$ y $h \in H$, lo que implica que $h = x - t \in N \oplus T$ y $h \in H$, por hipótesis $h = 0$, así $x = t$. Por tanto $x \in T$ y $x \in N$, lo que implica que $x = 0$ y así $N \cap (H + T) = \{0\}$ pero $T$ es pseudocomplemento de $N$ en $M$, entonces $H + T = T$, se sigue que $H \subseteq T$, pero $H \cap (N \oplus T) = \{0\}$, lo que implica que $H = \{0\}$. Por lo tanto $N \oplus T \trianglelefteq M$.

Por otro lado, sea $K \leq M$, tal que $T \leq K$ y $K \cap (N \oplus T) \leq T$. Por la **Ley Modular (Teorema 1.3.1)** se tiene que

$$T \oplus (K \cap N) = K \cap (N \oplus T) \leq T$$

Entonces $K \cap N = \{0\}$ y por ser $T$ pseudocomplemento de $N$, se tiene que $K = T$. Se tiene entonces que si $\frac{K}{T} \leq \frac{M}{T}$, es tal que $\frac{K}{T} \cap \frac{N \oplus T}{T} = \{0\}$, entonces $\frac{K}{T} = \{0\}$, lo que implica que

$$\frac{N \oplus T}{T} \trianglelefteq \frac{M}{T}. \quad \blacksquare$$

**LEMA 1.7.17** Sea $E \in R$-Mod inyectivo y $M \leq E$. Si $M$ ya no tiene extensiones esenciales dentro de $E$, es decir que no existe $K \leq E$ tal que $M \trianglelefteq K$, entonces $M$ es inyectivo.

***Demostración:***

Primero demostraremos que $M$ no tiene extensiones esenciales en ningún $R$-módulo. Sea $M' \in R$-Mod y supongamos que $M \trianglelefteq M'$. Consideremos las inclusiones naturales $\iota : M \hookrightarrow M'$ e $\iota' : M \hookrightarrow E$ . Por ser $E$ inyectivo existe $f \in Hom_R(M', E)$, tal que $f \circ \iota = \iota'$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, hook, "\iota'"'] & M' \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

*i)* $f$ es monomorfismo.

Supongamos que $f$ no es monomorfismo. Sea $0 \neq x \in Nuc(f)$ entonces $Rx \neq \{0\}$, donde $Rx$ es el submódulo de $M'$ generado por $x$. Luego, por ser $M$ un submódulo esencial de $M'$ se tiene que $M \cap Rx \neq \{0\}$. Sea $0 \neq rx \in M \cap Rx$, entonces:

$$0 \neq rx = \iota'(rx) = (f \circ \iota)(rx) = f(\iota(rx)) = f(rx) = rf(x) = r \cdot 0 = 0,$$

lo cual es una contradicción. Se tiene entonces que $Nuc(f) = \{0\}$ y por tanto $f$ es monomorfismo.

*ii)* $M \subseteq Im(f)$.

Sea $m \in M$, entonces $m = \iota'(m) = (f \circ \iota)(m) = f(\iota(m)) = f(m) \in Im(f)$. Por tanto $M \subseteq Im(f)$.

*iii)* $M \trianglelefteq Im(f)$.

Sea $K \leq Im(f)$, tal que $K \cap M = \{0\}$. Supongamos que $K \neq \{0\}$, sean $0 \neq k \in K$ y $Rk$ el submódulo de $K$ generado por $k$. Como $K \leq Im(f)$, entonces $k = f(m)$ para algún $m \in M'$, además como $k \neq 0$, entonces $m \neq 0$. Luego, el submódulo $Rm \leq M'$ generado por $m$ es tal que $Rm \neq \{0\}$ y por ser $M \trianglelefteq M'$ se tiene que $Rm \cap M \neq \{0\}$, sea $0 \neq rm \in Rm \cap M$, entonces

$$0 \neq rm = \iota'(rm) = (f \circ \iota)(rm) = f(\iota(rm)) = f(rm) = rf(m) = rk \in Rk \leq K.$$

Se tiene entonces que $0 \neq rm \in K \cap M$, lo cual es una contradicción. Entonces $K = \{0\}$ y por lo tanto $M \trianglelefteq Im(f)$.

Luego, por *ii*) y *iii*) se tiene que $Im(f)$ es una extensión esencial de $M$ en $E$, pero por hipótesis $M$ no tiene extensiones esenciales dentro de $E$, por tanto $M = Im(f)$, lo que implica que $M = M'$. Concluimos entonces que $M$ no tiene extensiones esenciales en ningún $R$-módulo.

Por otro lado, sea $T$ un pseudocomplemento de $M$ en $E$, por el **segundo Teorema de isomorfismo** se tiene que $M \cong \frac{M \oplus T}{T}$ y por la **Proposición 1.7.16** se tiene que $M \cong \frac{M\oplus T}{T} \trianglelefteq \frac{E}{T}$. Como $M$ no tiene extensiones esenciales en ningún $R$-módulo, se tiene que $M \cong \frac{M\oplus T}{T} = \frac{E}{T}$, luego, por el Teorema de la correspondencia se tiene que $E = M \oplus T$ y por la **Proposición 1.7.12** se concluye que $M$ es inyectivo. ■

**DEFINCIÓN 1.7.18** Sea $M$ un $R$-Módulo. Una pareja $(E, \iota)$ es *cápsula inyectiva* de $M$ si $E \in R - Mod$ es inyectivo y además $\iota \in Hom(M, E)$ es un monomorfismo esencial, es decir que $\iota(M) \trianglelefteq E$.

**TEOREMA 1.7.19** Todo $R$-Módulo tiene cápsula inyectiva.

***Demostración:***
Sea $M \in R$-Mod, por el **Teorema 1.7.11** existe $E \in R$-Mod inyectivo tal que $M \leq E$.

$$\text{Sea } \mathcal{F} = \{K \leq E \mid M \trianglelefteq K\}.$$

Nótese que $\mathcal{F} \neq \varnothing$, ya que $M \in \mathcal{F}$. Además $(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cadena de $\mathcal{F}$. Consideremos a $\bigcup_{\alpha\in I} K_\alpha \leq E$, que es cota superior de la cadena $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Sea $x \in K_{\alpha_0}$ con $x \neq 0$ para algún $\alpha_0 \in I$, como $M \trianglelefteq K_{\alpha_0}$ entonces existe $r \in R$, tal que $0 \neq rx \in M$. Por lo tanto $M \trianglelefteq \bigcup_{\alpha\in I} K_\alpha$. Por el **Lema de Zorn** $\mathcal{F}$ tiene elementos máximos. Sea $K$ un elemento máximo de $\mathcal{F}$, entonces $K$ no tiene extensiones esenciales en $E$ ya que de tenerlas, si $T$ es una de tales extensiones esenciales de $K$ en $E$, entonces $M \trianglelefteq T$, lo que implica que $T \in \mathcal{F}$ y por ser $K$ máximo en $\mathcal{F}$, se tiene que $K = T$. Por el **Lema 1.7.17** se tiene que $K$ es inyectivo y $M \trianglelefteq K$, lo que implica que $K$ es la cápsula inyectiva de $M$. ■

Solo falta ver que un $R$-Módulo tiene cásula inyectiva única salvo isomorfismos, antes se demostrará el siguiente Lema:

**LEMA 1.7.20** Sean $M$, $F$ y $E \in R$-Mod, con $E$ inyectivo, $g : M \longrightarrow F$ un monomorfismo esencial (es decir que $g(M) \trianglelefteq F$) y $f : M \longrightarrow E$ un monomorfismo.

Entonces existe un monomorfismo $\bar{f} : F \longrightarrow E$ tal que $\bar{f} \circ g = f$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
 & E &
\end{tikzcd}
$$

***Demostración:***
Por ser $g$ monomorfismo, $f$ un morfismo y $E$ inyectivo, existe $\bar{f} \in Hom_R(F, E)$ tal que $\bar{f} \circ g = f$.

Solo falta ver que $\bar{f}$ es monomorfismo. Sea $x \in Nuc(\bar{f}) \cap g(M)$, como $x \in g(M)$ se tiene que existe $m \in M$ tal que $g(m) = x$, entonces $f(m) = (\bar{f} \circ g)(m) = \bar{f}(g(m)) = \bar{f}(x) = 0$ ya que $x \in Nuc(\bar{f})$, entonces $m \in Nuc(f)$ y por ser $f$ un monomorfismo se tiene que $m = 0$, así $x = g(m) = g(0) = 0$. Entonces $Nuc(\bar{f}) \cap g(M) = \{0\}$ y como $g(M) \trianglelefteq F$ se tiene que $Nuc(\bar{f}) = \{0\}$. Por lo tanto $\bar{f}$ es monomorfismo. ■

**TEOREMA 1.7.21** La cápsula inyectiva de $M \in R$-Mod es única salvo isomorfismos.

***Demostración:***
Supongamos que $E_1$ y $E_2$ son dos cápsulas inyectivas de $M$, entonces existen $f_1 : M \longrightarrow E_1$ y $f_2 : M \longrightarrow E_2$ monomorfismos esenciales. Por el **Lema 1.7.20** existe un monomorfismo $\bar{f} : E_2 \longrightarrow E_1$ tal que $\bar{f} \circ f_2 = f_1$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & E_2 \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
 & E_1 &
\end{tikzcd}
$$

Solo falta ver que $\overline{f}$ es epimorfismo. Por el **primer Teorema de isomorfismo** tenemos que $E_2/Nuc(\overline{f}) \cong Im(\overline{f})$. Luego, por ser $\overline{f}$ monomorfismo se tiene que $Nuc(\overline{f}) = \{0\}$, por lo cual $E_2 \cong Im(\overline{f})$ y por ser $E_2$ inyectivo se tiene que $Im(\overline{f})$ es inyectivo. Se tiene entonces que $Im(\overline{f})$ es un submódulo inyectivo de $E_1$, entonces por la **Proposición 1.7.12** se tiene que $E_1 = Im(\overline{f}) \oplus T$ para algún submódulo $T$ de $E_1$.

Por otro lado,

$$f_1(M) = (\bar{f} \circ f_2)(M) = \bar{f}(f_2(M)) \subseteq Im(\bar{f}),$$

lo que implica que

$$f_1(M) \cap T \subseteq Im(\bar{f}) \cap T = \{0\}.$$

Entonces $f_1(M) \cap T = \{0\}$, lo que implica que $T = \{0\}$ (ya que $f_1(M) \trianglelefteq E_1$), así $E_1 = Im(\bar{f})$, lo que muestra que $\bar{f}$ es epimorfismo. Por lo tanto $E_1 \cong E_2$. ■

En adelante si $M \in R$-Mod, denotaremos por $E(M)$ a la cápsula inyectiva de $M$.

## 1.8. Módulos generadores y cogeneradores.

**DEFINICIÓN 1.8.1** Un módulo $M \in R$-Mod es finitamente generable si existe un subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq M$ tal que $< \{x_1, x_2, ..., x_n\} >= M$.

**PROPOSICIÓN 1.8.2** $M \in R$-Mod es finitamente generable si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $\varphi : R^n \longrightarrow M$.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Por hipótesis $M$ es finitamente generable, sea $\{m_1, m_2, ..., m_n\} \subset M$ un conjunto generador de $M$, entonces $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Rm_i$. Luego, el morfismo $\varphi : R^n \longrightarrow M$ dado por $\varphi((r_1, r_2, ..., r_n)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i m_i$ resulta ser un epimorfismo.

$\Leftarrow$) Por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $\varphi : R^n \longrightarrow M$. Consideremos el conjunto $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset R^n$ tal que

$$e_i = (\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{i\text{-lugares}}, 0, ..., 0)$$

Y sea $\{m_i, m_2, ..., m_n\} \subset M$ tal que $m_i = \varphi(e_i)$. Afirmamos que $\{m_i, m_2, ..., m_n\}$ es un conjunto generador para $M$. Sea $x \in M$, por ser $\varphi$ epimorfismo existe $(r_1, r_2, ..., r_n) \in R^n$ tal que $\varphi((r_1, r_2, ..., r_n)) = x$, entonces:

$$x = \varphi((r_1, r_2, ..., r_n)) = \varphi(r_1e_1 + r_2e_2 + ... + r_ne_n) = r_1\varphi(e_1) + r_2\varphi(e_2) + ... + r_n\varphi(e_n) =$$

$$= r_1m_1 + r_2m_2 + ... + r_nm_n.$$

Por lo tanto $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ es un conjunto generador de $M$. ■

**TEOREMA 1.8.3** La siguiente es una sucesión exacta corta de $R$-módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0.$$

Si $M$ es finitamente generable, entonces $T$ es finitamente generable.

***Demostración:***
Si $M$ es finitamente generable, por la **Proposición 1.8.2** existe $n \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $\varphi : R^n \longrightarrow M$.

$$\begin{tikzcd} & & R^n \arrow[d, "\varphi"] & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $g$ y $\varphi$ son epimorfismos, entonces la composición $g \circ \varphi : R^n \longrightarrow T$ es un epimorfismo y por la **Proposición 1.8.2** se tiene que $T$ es finitamente generable. ■

**LEMA 1.8.4** Todo $M \in R$-Mod, con $M \neq \{0\}$ y $M$ finitamente generable tiene al menos un submódulo máximo.

***Demostración:***
Sea $M \in R$-Mod y sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los submódulos propios de $M$, parcialmente ordenado por la inclusión. Si $\mathcal{T}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{M}$. Sea $\bar{L} = \sum\limits_{i \in I} L_i$, con $L_i \in \mathcal{T}$. Entonces $\bar{L} \neq M$, pues en caso contrario se tendría que $\bar{L}$ contiene un conjunto generador finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ para M, donde cada $x_i$ está en un elemento de $\mathcal{T}$, lo que implica que $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset L$ para algún $L \in \mathcal{T}$ (ya que $\mathcal{T}$ es totalmente ordenado por la inclusión), lo que implica que $L = M$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathcal{L} \neq M$, esto implica que $\bar{L}$ es cota superior de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{M}$, entonces por el **Lema de Zorn** se tiene que $\mathcal{M}$ tiene elementos máximos, por tanto $M$ tiene al menos un submódulo máximo. ■

**DEFINICIÓN 1.8.5** $M \in R$-Mod es *cogenerador* de $R$-Mod si para todo $K \in R$-Mod existe un monomorfismo $f : K \longrightarrow M^I$ para algún conjunto $I$ no vacio.

**DEFINICIÓN 1.8.6** $M \in R$-Mod es *generador* de $R$-Mod si para todo $K \in R$-Mod existe un epimorfismo $f : M^{(I)} \longrightarrow K$, para algún conjunto $I$ no vacio.

**LEMA 1.8.7** Sean $M$ y $N \in R$-Mod. Si para cada $x \in N$ con $x \neq 0$, existe un morfismo $f \in Hom_R(N, M)$ tal que $f(x) \neq 0$ entonces $M$ cogenera a $N$. Si esto mismo se tiene para todo $N \in R$-Mod, entonces $M$ es cogenerador de $R$-Mod.

***Demostración:***
Sea $N \in R$-Mod, por hipótesis se tiene que para cada $x \in N$ con $x \neq 0$ existe un $f_x \in Hom_R(N, M)$ tal que $f_x(x) \neq 0$, sea:

$$I = \{f_x \in Hom_R(N, M)|\ f_x(x) \neq 0,\ con\ x \in N\ y\ x \neq 0\}.$$

Entonces

$$\varphi : N \longrightarrow M^I$$

donde

$$\varphi(n) = (f_x(n))_{x \in N}$$

es un monomorfismo. En efecto si $\bar{0}$ denota al neutro aditivo de $M^I$, $n \in N$ con $n \neq 0$, entonces $\varphi(n) = (f_x(n))_{x \in N} \neq \bar{0}$, ya que $f_n(n) \neq 0$, además $\varphi(0) = (f_x(0))_{x \in N} = \bar{0}$, entonces $Nuc(\varphi) = \{0\}$, lo que implica que $M$ cogenera a $N$. Si esto mismo se tiene para cada $N \in R$-Mod, entonces $M$ cogenera a $R$-Mod. ■

**DEFINICIÓN 1.8.8** Sea $S \in R$-Mod con $S \neq \{0\}$, se dice que $S$ es un módulo *simple* si no tiene submódulos propios distintos de los triviales.

Un $R$-Módulo $S$ es simple si y solo si $S \cong R/I$, para algún ideal izquierdo máximo $I$ de $R$. Puesto que los ideales izquierdos de $R$ forman un conjunto, entonces las clases de isomorfismos de $R$-módulos simples constituyen un conjunto.

Se utilizara la notación $R$-simp para representar un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismos de $R$-módulos simples.

**TEOREMA 1.8.9** $(\prod E(S_\alpha))_{S_\alpha \in R-simp}$ es cogenerador de $R$-Mod.

***Demostración:***
Sean $M \in R$-Mod y $x \in M$ tal que $x \neq 0$; considerese a $Rx$ el módulo generado por $x$, como $Rx$ es generado por $x$, entonces por el **Lema 1.8.4** $Rx$ tiene un submódulo máximo $K$; nótese que $\underline{x\ no\ esta\ en\ K}$, pues de lo contrario se tendría que $K = Rx$. Como $K$ es submódulo máximo de $Rx$ entonces $Rx/K \in R$-simp.

Sean $\pi : Rx \longrightarrow Rx/K$ el morfismo canónico y $(E(Rx/K), \iota)$ la cápsula inyectiva de $Rx/K$, como $E(Rx/K)$ es inyectivo entonces existe $h_x : M \longrightarrow E(Rx/K)$ morfismo que extiende al morfismo $\iota \circ \pi : Rx \longrightarrow E(Rx/K)$.

Por otro lado, considerese la inclusión:

$$\bar{\iota}_x : E(Rx/K) \hookrightarrow (\prod E(S_\alpha))_{S_\alpha \in R-simp}$$

Entonces la composición:

$$\bar{\iota}_x \circ h_x : M \longrightarrow (\prod E(S_\alpha))_{S_\alpha \in R-simp}$$

es tal que $(\bar{\iota}_x \circ h_x)(x) \neq 0$, pues si $(\bar{\iota}_x \circ h_x)(x) = 0$ entonces $h_x(x) \in Nuc(\bar{\iota}_x)$, como $\bar{\iota}_x$ es monomorfismo entonces $h_x(x) = 0$, pero $x \in Rx$, lo que implica que $0 = h_x(x) = (\iota \circ \pi)(x)$, entonces $\pi(x) \in Nuc(\iota)$, al ser $\iota$ monomorfismo se tiene que $\pi(x) = K$ pero $\pi(x) = x + K$, lo que implica que $x \in K$, lo cual es una contradicción.

Por el **Lema 1.8.7** se concluye que

$$(\prod E(S_\alpha))_{S_\alpha \in R-simp}$$

cogenera a $R$-Mod. ■

A continuación se presenta una definición dual a la **Definición 1.8.1**.

**DEFINICIÓN 1.8.10** Sea $M \in R$-Mod. Decimos que $M$ es *finitamente cogenerable* si para toda familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de submódulos de $M$, tal que $\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \{0\}$, existe $X \subseteq I$ finito, tal que $\bigcap_{\alpha \in X} M_\alpha = \{0\}$.

**EJEMPLO 1.8.11** Sea $S \in R$-simp y $E(S)$ la cápsula inyectiva de $S$. Veamos que $E(S)$ es finitamente cogenerable.

*Observación i)* Si $K \neq \{0\}$ es un submódulo de $E(S)$, por ser $S \trianglelefteq E(S)$ se tiene que $K \cap S \neq \{0\}$ y como $K \cap S \subseteq S$ entonces $K \cap S = S$ (ya que $S$ es simple), esto implica que $S \subseteq K$ para todo submódulo $K \neq \{0\}$ de $E(S)$.

Entonces por la *observación i)* se tiene que, si $\{M_i\}_{i \in I}$ es una familia de submódulos de $E(S)$ tal que $\bigcap_{i \in I} M_i = \{0\}$, necesariamente $M_j = \{0\}$ para algún $j \in I$, lo que implica que para todo $J \subseteq I$ finito tal que $j \in J$ se tiene que $\bigcap_{i \in J} M_i = \{0\}$. Por lo tanto $E(S)$ es finitamante cogenerable.

**PROPOSICIÓN 1.8.12** Sea $M \in R$-Mod. Son equivalentes:

(1) $M$ es finitamente cogenerable.

(2) Para toda familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de $R$-módulos y todo monomorfismo

$$\varphi : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} M_\alpha,$$

existe un conjunto finito $X \subseteq I$ y un monomorfismo

$$\bar{\varphi} : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in X} M_\alpha.$$

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (2) Para cada $\beta \in I$ consideremos a $P_\beta : \prod_{\alpha\in I} M_\alpha \longrightarrow M_\beta$ la proyección descrita en la demostración de **Teorema 1.1.22**. Y sea $\varphi : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ un monomorfismo. Se tiene el morfismo $P_\beta \circ \varphi : M \longrightarrow M_\beta$. Sea $N_\beta = Nuc(P_\beta \circ \varphi)$.

Afirmamos que $Nuc(\varphi) = \bigcap_{\beta\in I} N_\beta$.

$\subseteq$ Si $x \in Nuc(\varphi)$ entonces $\varphi(x) = 0$, lo que implica que $(P_\beta \circ \varphi)(x) = P_\beta(\varphi(x)) = P_\beta(0) = 0$ para toda $\beta \in I$, así $x \in Nuc(P_\beta \circ \varphi) = N_\beta$ para toda $\beta \in I$, entonces $x \in \bigcap_{\beta\in I} N_\beta$. Por lo tanto $Nuc(\varphi) \subseteq \bigcap_{\beta\in I} N_\beta$.

$\supseteq$ Si $x \in \bigcap_{\beta\in I} N_\beta$, entonces $0 = (P_\beta \circ \varphi)(x) = P_\beta(\varphi(x))$ para toda $\beta \in I$, lo que implica que $\varphi(x) = 0$, se tiene entonces que $x \in Nuc(\varphi)$, por lo cual $Nuc(\varphi) \supseteq \bigcap_{\beta\in I} N_\beta$.

Por lo tanto $Nuc(\varphi) = \bigcap_{\beta\in I} N_\beta$. Luego, como $Nuc(\varphi) = \{0\}$ y por ser $M$ finitamente cogenerable, existe un conjunto finito $X \subseteq I$ tal que $\bigcap_{\beta\in X} N_\beta = \{0\}$. Por otro lado la familia de morfismos $\{P_\beta \circ \varphi\}_{\beta\in X}$ induce el morfismo:

$$\bar{\varphi} : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in X} M_\alpha,$$

donde $P_\beta \circ \bar{\varphi} = P_\beta \circ \varphi$ y $Nuc(P_\beta \circ \bar{\varphi}) = Nuc(P_\beta \circ \varphi)$ para toda $\beta \in X$. Entonces $Nuc(\bar{\varphi}) = \bigcap_{\beta\in X} Nuc(P_\beta \circ \bar{\varphi}) = \bigcap_{\beta\in X} N_\beta = \{0\}$. Y por tanto $\bar{\varphi}$ es monomorfismo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de submódulos de $M$, tal que $\bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha = \{0\}$. Consideremos para cada $\alpha \in I$ a $\pi_\alpha : M \longrightarrow M/N_\alpha$ el morfismo canónico, entonces por la **Propiedad Universal del Producto** existe $\varphi : M \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in I} M/N_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \prod\limits_{\alpha\in I} M/N_\alpha \arrow[dl, "P_\alpha"] \\
M/N_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que $\varphi$ es monomorfismo. Si $x \in Nuc(\varphi)$ entonces $\varphi(x) = 0$, lo que implica que $P_\alpha(0) = P_\alpha(\varphi(x)) = \pi_\alpha(x) = N_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, donde $P_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in I} M/N_\alpha \longrightarrow M/N_\alpha$ es la proyección descrita en la demostración del **Teorema 1.1.22**. Se tiene entonces que $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha$, y por tanto $Nuc(\varphi) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in I} N_\alpha = \{0\}$, lo que implica que $Nuc(\varphi) = \{0\}$ y entonces $\varphi$ es monomorfismo. Por hipótesis existe un conjunto finito $X \subseteq I$ tal que el morfismo $\bar{\varphi} : M \longrightarrow \prod\limits_{\alpha\in X} M/N_\alpha$ inducido por $\{P_\alpha \circ \varphi\}_{\alpha\in X}$ es monomorfismo. Esto implica que $\bigcap\limits_{\alpha\in X} N_\alpha = Nuc(\bar{\varphi}) = \{0\}$ y por tanto $M$ es finitamente cogenerable. ■

## 1.9. Módulos semisimples.

**DEFINICIÓN 1.9.1** Sea $M \in R$-Mod, decimos que $M$ es un módulo *semisimple* si todo submódulo de $M$ es sumando directo de $M$. Decimos que un anillo $R$ es semisimple si como $R$-Módulo es semisimple.

**PROPOSICIÓN 1.9.2** Sea $M$ un $R$-módulo semisimple y sea $N$ un submódulo de $M$. Entonces $N$ y $M/N$ son módulos semisimples.

***Demostración:***
Sea $L$ un submódulo de $N$, por tanto también es submódulo de $M$. Entonces como $M$ es semisimple, existe $W \leq M$ tal que $W \oplus L = M$. Utilizando la ley modular para módulos tenemos que

$$N = N \cap M = N \cap (W \oplus L) = (N \cap W) + L.$$

Además, la ultima suma es directa, ya que $N \cap W \subseteq W$. Por lo tanto $N$ es semisimple.

Por otra parte, como $N$ es submódulo de $M$ se tiene que $M = N \oplus N'$ para algún $N' \leq M$.

Así por el **segundo Teorema de isomorfismo** se tiene que

$$M/N \cong (N \oplus N')/N \cong N'.$$

Y por lo anterior sabemos que $N'$ es semisimple. Es claro que la propiedad de ser semisimple es preservada bajo isomorfismos, por tanto $M/N$ es semisimple. ■

**PROPOSICIÓN 1.9.3** Sea $M \in R$-Mod. $M$ es semisimple si y solo si $M$ se descompone como suma directa de módulos simples.

***Demostración:***

$\Rightarrow$)

Supongamos que $M$ es semisimple, es decir, que todo submódulo de $M$ es sumando directo de $M$.

1) $M$ tiene submódulos simples.

Sea $0 \neq a \in M$ y $\mathfrak{A} = \{L \leq M \mid a \notin L\}$; $\mathfrak{A} \neq \varnothing$ pues $\{0\} \in \mathfrak{A}$. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{A}, \subseteq)$. Con el **Lema de Zorn** demostraremos que $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ tiene un elemento máximo. Sea $\mathfrak{C}$ una cadena en $\mathfrak{A}$. Pongamos $T = \bigcup_{L \in \mathfrak{C}} L$. Claramente $L \subset T$ para todo $L \in \mathfrak{C}$. Veamos que $T \in \mathfrak{A}$, esto es, $T$ es submódulo de $M$ y $a \notin T$. Por ser $\mathfrak{C}$ una cadena es claro que $T$ es un submódulo de $M$, además como $a \notin L$ para toda $L \in \mathfrak{A}$, entonces $a \notin T$.

Así, toda cadena en $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ tiene cota superior en $\mathfrak{A}$. Como se cumplen las hipótesis en el **Lema de Zorn**, entonces $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ tiene un elemento máximo $M'$.

Por hipótesis $M'$ es un sumando directo de $M$, es decir $M = M' \oplus N$ para algún $N \leq M$, nótese que $N$ es no nulo. En efecto, $a$ es de la forma $a = m' + n$, con $m' \in M'$ y $n \in N$. Luego, $n \neq 0$, ya que si $n = 0$ tendriamos que $a = m' \in M'$, lo cual es una contradicción.

Aseguramos que $N$ es simple. Para esto supongamos que existe $N' \leq N$ tal que $\{0\} \subsetneq N' \subsetneq N$, por la **Proposición 1.9.2** tenemos que $N'$ es sumando directo de $N$, es decir, $N = N' \oplus N''$, para algún $N'' \leq N$, donde $N' \neq \{0\}$. Luego

$$M' \subsetneq M' \oplus N' \quad \text{y} \quad M' \subsetneq M' \oplus N''$$

y como $M'$ es máximo en $\mathfrak{A}$ se tiene que

$$a \in M' \oplus N' \quad \text{y} \quad a \in M' \oplus N''.$$

Entonces, existen $m_1$, $m_2 \in M'$, $n' \in N'$ y $n'' \in N''$ tales que

$$a = m_1 + n' = m_2 + n'',$$

de modo que
$$m_1 - m_2 = n'' - n' \in M' \cap N = \{0\}$$

Por lo tanto $m_1 = m_2$ y $n' = n''$. Por otra parte, $n' = n'' \in N' \cap N'' = \{0\}$, por consiguiente $n' = n'' = 0$. Así pues $a = m_1 = m_2 \in M'$, pero esto contradice que $M' \in \mathfrak{A}$. Por lo tanto $N$ es simple.

2) $M$ es suma directa de módulos simples.
Sea
$$\mathfrak{B} = \{J \subseteq \mathfrak{F} \mid \sum_{S \in J} S \text{ es suma directa}\}.$$

donde $\mathfrak{F} = \{S \leq M \mid S \text{ es simple}\}$. Como ya hemos visto $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, lo que implica que $\mathfrak{B} \neq \varnothing$. Claramente $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Afirmamos que $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ satisface la hipótesis del Lema de Zorn. Sea $\mathfrak{C}$ una cadena en $\mathfrak{B}$. Es claro que $\bigcup \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$, entonces para mostrar que $\bigcup \mathfrak{C}$ es cota superior de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{B}$ basta probar que la suma $\sum\limits_{S \in \bigcup C} S$ es directa. Supongamos que $\sum\limits_{t=1}^{n} x_t = 0$ donde $x_t \in S_t$ y $S_t \in \bigcup \mathfrak{C}$ para todo $t \in \{1, ..., n\}$. Como $S_t \in \bigcup \mathfrak{C}$, entonces existe $J_t \in \mathfrak{C}$ tal que $S_t \in J_t$. Por ser $\mathfrak{C}$ una cadena existe un $t_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $J_t \subseteq J_{t_0}$ para todo $t \in \{1, ..., n\}$. Lo cual implica que $S_t \in J_{t_0}$ para todo $t \in \{1, ..., n\}$, entonces
$$0 = \sum_{t=1}^{n} x_t \in \bigoplus_{S \in J_{t_0}} S$$

por lo que $x_t = 0$ para todo $t \in \{1, ..., n\}$. Así pues, $\mathfrak{B}$ tiene un elemento máximo. Sea $J_0$ máximo en $\mathfrak{B}$, y pongamos $L = \bigoplus\limits_{S \in J_0} S$. Afirmamos que $L = M$, y así tendriamos que $M$ es suma directa de módulos simples. En efecto, supongamos que $L \subsetneq M$. Por hipótesis $L$ es sumando directo de $M$, es decir, existe $L' \leq M$ tal que $M = L \oplus L'$. Ahora, por el argumento 1) de esta implicación y por la **Proposición 1.9.2**, podemos asegurar que $L'$ tiene un sumando directo simple, esto es, $L' = T \oplus T'$ donde $T$ es simple. Luego, $J_0 \subsetneq J_0 \cup \{T\}$ y $J_0 \cup \{T\} \in \mathfrak{B}$, pues $\sum\limits_{S \in J_0 \cup \{T\}} S = L \oplus T$. Pero esto es una contradicción, ya que $L$ es un máximo en $\mathfrak{B}$. Por lo tanto $M = L = \bigoplus\limits_{S \in J_0} S$.

$\Leftarrow$)
Supongamos que
$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

donde cada $M_i$ es un submódulo simple de $M$. Tomemos $N$ un submódulo de $M$ y sea
$$\mathfrak{A} = \{J \subseteq I \mid (\bigoplus_{i \in J} M_i) \cap N = \{0\}\}$$

Si $\mathfrak{A} = \varnothing$, entonces $M_i \cap N \neq \{0\}$ para todo $i \in I$, y por ser $M_i$ simple, se tiene que $M_i \cap N = M_i$, lo que quiere decir que $M_i \subseteq N$ para todo $i \in I$. Así que $M = N$. Por tanto $N$ es submódulo directo de $M$. Así que podemos suponer que $\mathfrak{A} \neq \varnothing$.

1) El conjunto parcialmente ordenado $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ tiene un elemento máximo. Para esto utilizaremos el **Lema de Zorn**. Sea $\mathfrak{C}$ una cadena en $\mathfrak{A}$. Pongamos $B = \bigcup\limits_{J\in\mathfrak{C}} J$. Es claro que $J \subseteq B$ para todo $J \in \mathfrak{C}$. Así que solo falta probar que $B \in \mathfrak{A}$, es decir que $(\bigoplus\limits_{i\in B} M_i) \cap N = \{0\}$. Tomemos $x \in (\bigoplus\limits_{i\in B} M_i) \cap N$. Entonces

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}.$$

donde $x_{i_k} \in M_{i_k}$ e $i_k \in B$. Ya que $B = \bigcup\limits_{J\in\mathfrak{C}} J$, para cada $k \in \{1, ..., n\}$ existe $J_k \in \mathfrak{C}$ tal que $i_k \in J_k$. Por ser $\mathfrak{C}$ una cadena existe un $k_0 = \{1, ..., n\}$ tal que $J_k \subseteq J_{k_0}$ para todo $k = \{1, ..., n\}$. Así pues, $x \in (\bigoplus\limits_{s\in J_{k_0}} M_s) \cap N$. Pero $J_{k_0} \in \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$, así que $(\bigoplus\limits_{s\in J_{k_0}} M_s) \cap N = \{0\}$, por lo que $x = 0$ y entonces $B \in \mathfrak{A}$. Como se cumple la hipótesis del **Lema de Zorn**, entonces $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ tiene un elemento máximo $J_0$.

2) Aseguramos ahora que $M = N' \oplus N$, donde $N' = \oplus_{i\in J_0}$. Como $J_0 \in \mathfrak{A}$ se tiene que $N' \cap N = \{0\}$. Basta ver entonces que $M = N' + N$ y, como tenemos que $M = \oplus_{i\in I} M_i$, es suficiente probar que $M_i \subseteq N' + N$ para todo $i \in I$. Si $i \notin J_0$, por ser $J_0$ máximo tenemos que $(N' + M_i) \cap N \neq \{0\}$. Ahora, sea $0 \neq x \in (N' + M_i) \cap N$. Entonces

$$x = n' + m_i.$$

donde $n' \in N'$, $m_i \in M_i$, y además $x \in N$. Nótese que $m_i \neq 0$ pues si $m_i = 0$ tendriamos que $0 \neq x \in N' \cap N$, lo cual no puede ser. Ahora,

$$m_i = x - n' \in M_i \cap (N' + N)$$

y por tanto $M_i \cap (N' + N) \neq \{0\}$. Pero $M_i$ es simple, por lo que $M_i = M \cap (N' + N)$, y luego $M_i \subseteq N' + N$. por lo tanto, $M = N' \oplus N$. ■

**COROLARIO 1.9.4** Sea $R$ un anillo.

*i*) La suma directa de $R$-módulos semisimples es semisimple.

*ii*) Un $R$-módulo $M$ semisimple y finitamente generable es suma directa de un nímero finito de módulos simples. En particular, un anillo semisimple es suma directa de un número finito de ideales izquierdos mínimos.

***Demostración:***
$i)$ Es claro, por las propiedades de la suma directa.

$ii)$ Sea $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ un conjunto generador de $M$. Como $M$ es semisimple, $M$ es suma directa de $R$-módulos simples, es decir, $M = \bigoplus_{j \in J} S_j$, donde $S_j$ es un $R$-módulo simple para todo $j \in J$.

Ahora, cada $m_i = \sum_{j \in J_i} s_{ij}$ con $s_{ij} \in S_{j_i}$ y $J_i$ finito para todo $i = 1, ..., n$. Así que, $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ está contenido en $\bigoplus_{k \in \widehat{J}} S_k$, donde $\widehat{J} = \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ es finito ya que cada $J_i$ es finito. Entonces

$$M = \langle \{m_1, m_2, ..., m_n\} \rangle \subseteq \bigoplus_{k \in \widehat{J}} S_k \subseteq M.$$

Por lo tanto $M$ es suma directa de un número finito de $R$-módulos simples. ■

**DEFINICIÓN 1.9.5** Sea $R$ un anillo, y sea $e \in R$. Decimos que $e$ es un elemento *idempotente* de $R$, si $e^2 = e$. Dos elementos idempotentes $e_1$ y $e_2$ tales que $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ se llaman *ortogonales*.

**PROPOSICIÓN 1.9.6** Sean $I_1,\ I_2,\ ...,\ I_n$ ideales izquierdos del anillo $R$. El anillo $R$ se puede escribir como suma directa

$$R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$$

si y solo si existen $e_1,\ e_2,\ ..., e_n \in R$ tales que:

1) $e_1,\ e_2,\ ..., e_n$ son idempotentes ortogonales dos a dos;

2) $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$;

3) $I_i = Re_i$, para todo $i = 1, ..., n$.

***Demostración:***
$\Rightarrow)$ Supóngase que $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$. Entonces el uno de $R$ se puede escribir de manera única como $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$ para elementos $e_j \in I_j$. Para cualquier $x \in I_j$ se tiene que

$$x = xe_1 + xe_2 + ... + xe_n.$$

La representación única en la suma directa implica que $x = e_j$ y $xe_k = 0$ para $k \neq j$. De donde se tiene que $I_j = Re_j$ y $e_1, e_2, ..., e_n$ son idempotentes ortogonales dos a dos.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que existen elementos $e_1, e_2, ..., e_n$ en $R$ tales que satisfacen las condiciones 1), 2) y 3). Como $1 = e_1 + e_2 + ... + e_n$, entonces para cualquier $r \in R$ se tiene $r = re_1 + re_2 + ... + re_n$, por lo que $Re_1 + Re_2 + ... + Re_n = R$. Si

$$a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n,$$

multiplicando por la derecha por $e_j$ se tiene que $a_je_j = b_je_j$, por lo que la representación en $Re_1 + Re_2 + ... + Re_n$ es única. Luego, por la condición 3), se sigue que $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$. ■

**LEMA 1.9.7**
*i*) Sea $R$ un anillo, y sea $I$ un ideal de $R$. Si $I$ es sumando directo $R$, entonces existe $e \in I$ idempotente con $I = Re$.

*ii*) Sea $I$ un ideal izquierdo mínimo de un anillo semisimple $R$, y sea $M$ un $R$-módulo simple. Entonces $I \cdot M \neq \{0\}$ si y solo si $I \cong M$.

***Demostración:***
*i*) Es consecuencias inmediata de la **Proposición 1.9.6**.

*ii*) Supongamos que $I \cdot M \neq \{0\}$. Entonces, existe un elemento $x_0 \in I$ y un elemento $m \in M$ tal que $x_0m \neq 0$, así $Im \neq \{0\}$. Luego $Im$ es un submódulo de $M$, y por ser $M$ semisimple tenemos que $Im = M$. Ahora, consideremos la función $f : I \longrightarrow M$ dada por $f(x) = xm$. Claramente, $f$ es un epimorfismo y, como $Nuc(f)$ es un ideal izquierdo de $R$ contenido en $I$ e $I$ es mínimo, se tiene que $Nuc(f) = \{0\}$. Así que $f$ es un isomorfismo y por tanto $I \cong M$.

Inversamente, supongamos que $I \cong M$ y sea $f \in Hom_R(I, M)$ un isomorfismo. Por ser $R$ semisimple, $I$ es un sumando directo de $R$, y por *i*), existe un elemento idempotente $e \in R$ tal que $I = Re$. Sea $m_0 = f(e)$. Como $f(re) = rf(e) = rm_0$, para todo $r \in R$, se tiene que $m_0 \neq 0$. Entones $m_0 = f(e) = f(e^2) = ef(e) = em_0$, por tanto $I \cdot M \neq \{0\}$. ■

**PROPOSICIÓN 1.9.8** Sea $R = \bigoplus_{i\in\beta} I_i$ una descomposición de un anillo semisimple $R$ como suma directa de ideales izquierdos mínimos. Entonces todo $R$-módulo simple no nulo $M$ es isomorfo a algún $I_i$.

***Demostración:***
Sea $M$ un $R$-módulo simple. Entonces $\{0\} \neq M = R \cdot M = \bigoplus_{i\in\beta}(I_i \cdot M)$. Luego, debe existir un índice $t$ tal que $I_t \cdot M \neq \{0\}$, entonces por el **Lema 1.9.7**, inciso *ii*), tenemos que $I_i \cong M$. ■

**DEFINICIÓN 1.9.9** Un anillo $R$ es *simple* si sus únicos ideales bilaterales son $R$ y $\{0\}$.

**DEFINICIÓN 1.9.10** Sea $I$ un ideal izquierdo de un anillo $R$. Definimos

$$B_I = \sum_{j \in \mathfrak{F}} J$$

donde $\mathfrak{F} = \{_R J \leq R \mid J \cong I\}$.

**PROPOSICIÓN 1.9.11** Sea $R$ un anillo e $I$ un ideal izquierdo mínimo de éste. Entonces $B_I$ es un ideal bilateral de $R$.

***Demostración:***

Tenemos que $B_I$ es un ideal izquierdo de $R$, ya que suma de ideales izquierdos de $R$. Entonces sólo hay que mostrar que $B_I \cdot r \subseteq B_I$ para todo $r \in R$. Como $B_I = \sum_{J \in \mathfrak{F}} J$, donde $\mathfrak{F} = \{_R J \leq R \mid J \cong I\}$, probaremos que $J \cdot r \subseteq B_I$ para todo $r \in R$ y todo $J \in \mathfrak{F}$.

Sean $r \in R$ y $J \in \mathfrak{F}$. Además, como $I$ es un ideal izquierdo mínimo, es decir, un $R$-módulo izquierdo simple, y $J \cong I$ para todo $J \in \mathfrak{F}$, se sigue que $J$ es simple para todo $J \in \mathfrak{F}$.

1) $J \cdot r$ es un ideal izquierdo de $R$. Sean $x \in R$ y $z_1 = j_i r$, $z_2 = j_2 r \in J \cdot r$. Por ser $J$ un ideal izquierdo de $R$ tenemos

$$z_1 + z_2 = j_1 r + j_2 r = (j_1 + j_2)r \in J \cdot r$$

$$xz_1 = x(j_1 r) = (xj_1)r \in J \cdot r$$

2) Definimos $\varphi : J \longrightarrow J \cdot r$ tal que $\varphi(j) = jr$ con $j \in J$. Entonces $\varphi$ es un epimorfismo de $R$-módulos izquierdos:

Si $j_i, j_2 \in J$ y $x \in R$, entonces

$$\varphi(j_1 + j_2) = (j_1 + j_2)r = j_1 r + j_2 r = \varphi(j_1) + \varphi(j_2)$$

$$\varphi(xj_i) = (xj_1)r = x(j_1 r) = x\varphi(j_1)$$

y claramente $\varphi$ es suprayectiva. Entonces por el **primer Teorema de isomorfismo** se tiene que $J/Nuc(\varphi) \cong J \cdot r$. Como $J$ es simple, se tiene que $Nuc(\varphi) = \{0\}$ ó $Nuc(\varphi) = J$, entonces $J \cdot r = \{0\}$ ó $J \cdot r \cong J$. Si $J \cdot r = \{0\}$ entonces claramante $J \cdot r \subseteq B_I$. Por otra parte si $J \cdot r \cong J$, entonces $J \cdot r \cong I$, pues $J \cong I$, por lo que $J \cdot r \in \mathfrak{F}$. Así que en ambos casos se tiene que $J \cdot r \subseteq B_I$. ■

**PROPOSICIÓN 1.9.12** Sea $R$ un anillo semisimple. Entonces $R$ es simple si y solo si cualesquiera dos $R$-módulos simples son isomorfos.

***Demostración:***
$\Rightarrow$) Probaremos que $R$ tiene una descomposición $R = \bigoplus_{t \in T} I_t$ tal que todos los $I_t$ son mínimos e isomorfos entre sí. Luego por la **Proposición 1.9.8** tendríamos que cualesquiera dos $R$-módulos simples son isomorfos.

Sea $I \neq \{0\}$ un ideal izquierdo mínimo de $R$. Sabemos por la **Proposición 1.9.11** que $B_I$ es un ideal bilateral de $R$, luego entonces $B_J = R$, ya que por la hípótesis $R$ es simple y $\{0\} \neq I \subseteq B_I$. Tenemos que $B_I = \sum_{j \in \mathfrak{F}} J$, donde $\mathfrak{F} = \{{}_R J \leq R \mid J \cong I\}$. Consideremos ahora

$$\mathfrak{B} = \{T \subseteq \mathfrak{U} \mid \sum_{S \in T} S \text{ es suma directa } \},$$

donde $\mathfrak{U} = \{S \leq R \mid S \text{ es un ideal izquierdo mínimo } \}$. Claramente $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, y si procedemos como en la demostración del **Teorema 1.9.3** tenemos que $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ tiene un elemento máximo $T_0$. Sea $L = \bigoplus_{S \in T_0} S$. Aseguramos que $R = L$. Para esto basta ver que $J \subseteq L$ para todo $J \in \mathfrak{F}$. Sea $J \in \mathfrak{F}$. Si $J \cap L \neq \{0\}$, entonces $J \cap L$ es un ideal no nulo de $J$, y como $J$ es mínimo, se tiene que $J \cap L = J$, por lo que $J \subseteq L$. Por otro lado, si $J \cap L = \{0\}$ entonces $L + J$ es una suma directa, por lo que $T_0 \cup \{J\} \in \mathfrak{B}$, y además tenemos que $T_0 \subsetneq T_0 \cup \{J\}$. Pero esto contradice que $T_0$ es máximo en $\mathfrak{B}$. De lo anterior tenemos que $L = R$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $M$ y $M'$ son $R$-módulos simples, entonces $M \cong M'$.

Sea $B$ un ideal bilateral no nulo de $R$. Probaremos que $B = R$. Para esto, sea $I$ un ideal izquierdo mínimo de $R$, y consideremos $B_I = \sum_{J \in \mathfrak{F}} J$, donde $\mathfrak{F} = \{{}_R J \leq R \mid J \cong I\}$, que por la **Proposición 1.9.11** es un ideal bilateral.

1) $B_I = R$.

Por ser $R$ semisimpple, $R = \bigoplus_{t \in T} I_t$ donde cada $I_t$ es un ideal izquierdo mínimo de $R$, que por hipótesis es isomorfo a $I$. Así pues,

$$R = {}_{t \in T} I_t \subseteq \sum_{j \in \mathfrak{F}} J = B_I.$$

Por lo tanto $B_I = R$.

2) $B_I = B$.

Para esto mostraremos que $I_t \subseteq B$ para todo $t \in T$. Tomemos $t \in T$ fijo, y consideremos $B \cdot I_t = \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid x_i \in B \ e \ y_i \in I_t\}$. Ahora, $B \cdot I_t$ es un ideal izquierdo de $R$, y además

$$B \cdot I_t \subseteq B \cap I_t \subseteq I_t$$

pues $B$ es un ideal bilateral e $I_t$ es un ideal izquierdo. Luego, por ser $I_t$ mínimo tenemos que $B \cdot I_t = \{0\}$ ó $B \cdot I_t = I_t$.

Supongamos que $B \cdot I_t = \{0\}$. Para cualesquiera $t' \in T$ con $t' \neq t$, tenemos que $I_{t'} \cong I_t$, así que existe $\varphi : I_t \longrightarrow I_{t'}$ un isomorfismo de $R$-módulos. Sea $\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \in B \cdot I_{t'}$ con $x_i \in B$ y $z_i \in I_{t'}$. Como $\varphi$ es un isomorfismo existe para cada $z_i$ un $w_i \in I_t$ tal que $\varphi(w_i) = z_i$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(w_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i w_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i) = \varphi(0) = 0.$$

Así que $B \cdot I_{t'} = \{0\}$. Por tanto $B$ anula a todos los ideales que aparecen en la descomposición de $R$. De manera que

$$B = B \cdot R = B \cdot (\bigoplus_{t \in T} I_t) \subseteq \bigoplus_{t \in T} (B \cdot I_t) = \{0\}$$

Pero esto contradice que $B$ es no nulo.

Por tanto $B \cdot I_t = I_t$. Luego

$$I_t = B \cdot I_t \subseteq B \cap I_t \subseteq I_t$$

Así, $I_t = B \cap I_t$, lo cual implica que $I_t \subseteq B$.

De lo anterior tenemos que $B = B_1 = R$. ■

**TEOREMA 1.9.13** Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R.

1) R es semisimple.

2) Todo $M \in R$-Mod es semisimple.

3) Todo $M \in R$-Mod es proyectivo.

4) Todo $M \in R$-Mod es inyectivo.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $L \in R$-Mod un módulo libre, entonces existe un conjunto no vacio $I$ tal que $L = R^{(I)}$; como $R$ es semisimple entonces $R = \bigoplus_{\alpha \in I} S_\alpha$, donde $S_\alpha \in R$-simp para todo $\alpha \in I$, lo que implica que $L$ es semisimple, por lo tanto todo $R$-Módulo libre es semisimple.

Sea $M \in R$-Mod, por el **Teorema 1.6.9** $M$ es cociente de un $R$-Módulo libre $L$, por lo anterior sabemos que $L$ es semisimple y por el **Proposición 1.9.2** tenemos que todo módulo cociente de $L$ es semisimple, lo que implica que $M$ es semisimple. Por lo tanto todo $R$-Módulo es semisimple.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Si $M \in R$-Mod es semisimple, entonces por la **Proposición 1.9.3** se tiene que

$$M = \bigoplus_{i \in I} S_i$$

donde cada $S_i$ es un $R$-módulo simple. Si $0 \neq s_i \in S_i$, entonces $Rs_i = S_i$ para cada $i \in I$, lo que implica que $\{m_i\}_{i \in I}$ es base de $M$, entonces $M$ es libre y por el **Teorema 1.6.12** se tiene que $M$ es proyectivo.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Sea $I$ un ideal izquierdo de $R$, consideremos los siguientes morfismos:

La inclusión natural: $\iota : I \hookrightarrow R$.

El morfismo canónico: $\pi : R \longrightarrow R/I$.

Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow I \xhookrightarrow{\iota} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis todo $R$-módulo es proyectivo, entonces $R/I$ es proyectivo, y existe $f \in Hom_R(R/I, R)$ tal que $\pi \circ f = 1_M$,

$$\begin{tikzcd}
 & & & R/I \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "1_M"] & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "\iota"] & R \arrow[r, "\pi"] & R/I \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Entonces la sucesión $0 \longrightarrow I \xhookrightarrow{\iota} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$ se escinde. Luego, por el **Teorema 1.5.3** se tiene que $R = I \oplus R/I$ y como $I$ era un ideal izquierdo arbitrario de

$R$, se tiene que todo ideal izquierdo de $R$ es sumando directo de $R$ y por tanto $R$ es semisimple.

(3) $\Rightarrow$ (4)

Sean $M \in R$-Mod y $E(M)$ la cápsula inyectiva de $M$. Consideremos el morfismo:

$$f : E(M) \longrightarrow M,$$

$$\text{dado por } f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \in M \\ \\ 0 & si \;\; x \neq M \end{cases}$$

Se tiene entonces la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow Nuc(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} E(M) \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis, todo $R$-módulo es proyectivo, entonces $M$ es proyectivo, y se tiene que existe $g \in Hom_R(M, E(M))$ tal que $f \circ g = 1_M$

$$\begin{tikzcd} & & & M \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "1_M"] & \\ 0 \arrow[r] & Nuc(f) \arrow[r, hook, "\iota"] & E(M) \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Entonces la sucesión $0 \longrightarrow Nuc(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} E(M) \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ se escinde. Luego, por el **Teorema 1.5.3** se tiene que $E(M) = M \oplus Nuc(f)$, entonces $M \cap Nuc(f) = \{0\}$ y como $M$ es submódulo esencial de $E(M)$, se tiene que $Nuc(f) = \{0\}$, lo que implica que $M = E(M)$ y por tanto $M$ es inyectivo.

(4) $\Rightarrow$ (3)

Sea $M \in R$-Mod, por el **Teorema 1.6.8** $M$ es el cociente de un $L \in R$-Mod libre, sea $M = L/K$ para algún submódulo $K$ de $M$. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow K \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0\,,$$

donde $\iota$ es la inclusión natural y $\pi$ es la proyección natural. Por hipótesis todo $R$-Módulo es inyectivo, por tanto $K$ es inyectivo, entonces existe un morfismo $h : L \longrightarrow K$ tal que $I_K = h \circ \iota$, lo que implica que la sucesión se escinde, y por el **Teorema 1.5.3** se tiene que $L = K \oplus M$. Luego por el **Teorema 1.6.13** se tiene que $M$ es proyectivo. ■

## 1.10. Módulos neterianos y artinianos.

**DEFINICIÓN 1.10.1** Un módulo $M \in R$-Mod se dice que es *neteriano* si toda cadena ascendente de submódulos de $M$ es finita.

**PROPOSICIÓN 1.10.2** Sea $M \in R$-Mod. Son equivalentes:

(1) $M$ es neteriano.

(2) Cada familia no vacía de submódulos de $M$ contiene un elemento máximo.

(3) Cada submódulo de $M$ es finitamente generable.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de submódulos de $M$, y supongamos que $\mathfrak{F}$ no tiene un elemento máximo. Sea $N_1 \in \mathfrak{F}$. Entonces $N_1$ no es máximo en $\mathfrak{F}$, y entonces existe $N_2 \in \mathfrak{F}$ tal que $N_1 \subsetneq N_2$. Mediante este proceso se construye una cadena ascendente de submódulos de $M$ que no es finita, contradiciendo que $M$ es neteriano.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $N$ un submódulo de $M$. Definimos $\mathfrak{F}$ como la familia de todos los submódulos de $M$ finitamente generables contenidos en $N$. $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, pues $\{0\} \in \mathfrak{F}$. Por hipótesis, existe un elemento máximo $N_0$ en $\mathfrak{F}$. Ahora $N_0 \subseteq N$ porque $N_0 \in \mathfrak{F}$. Si $N_0 \subsetneq N$, entonces existe $a \in N$, con $a \notin N_0$. Luego el submódulo $W = N_0 + Ra$ es finitamente generable, ya que $N_0$ lo es. Así que $W \in \mathfrak{F}$, y además $N_0 \subsetneq W$, lo que contradice que $N_0$ es máximo en $\mathfrak{F}$. Por lo tanto $N_0 = N$, y entonces $N$ es finitamente generable.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que todo submódulo de $M$ es finitamente generable, y sea

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq ... \subseteq N_n \subseteq N_{n+1} \subseteq ...$$

una cadena ascendente de submódulos de $M$. Definimos $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Es claro que $N$ es un submódulo $M$. Por hipótesis existen $a_1, ..., a_m \in N$ tales que $N = \langle\{a_1, ..., a_m\}\rangle$. Ahora, para cada $i \in \{1, ..., m\}$ existen $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \in N_{n_i}$. Sea $k$ el mayor de todos los $n_{i's}$. Por consiguiente $N_{n_i} \subseteq N_k$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$, y entonces

$$N = \langle\{a_1, ..., a_m\}\rangle \subseteq N_k \subseteq N$$

es decir, $N = N_k$.

Luego, si $n \geqslant k$, entonces $N = N_k \subseteq N_n \subseteq N$, esto es, $N_n = N_k$. Por lo tanto la cadena

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq ... \subseteq N_n \subseteq N_{n+1} \subseteq ...$$

es finita. ■

**DEFINICIÓN 1.10.3** Un módulo $M \in R$-Mod se dice que es *artiniano* si toda cadena descendente de submódulos de $M$ es finita

**PROPOSICIÓN 1.10.4** Sea $M \in R$-Mod. Son equivalentes:

(1) $M$ es artiniano

(2) Cada familia no vacía de submódulos de $M$ contiene un elemento mínimo.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de submódulos de $M$, y supongamos que $\mathfrak{F}$ no tiene un elemento mínimo. Sea $N_1 \in \mathfrak{F}$. Entonces $N_1$ no es mínimo en $\mathfrak{F}$, luego existe un $N_2 \in \mathfrak{F}$ tal que $N_2 \subsetneq N_1$. Ahora, $N_2$ no es un elemento mínimo de $\mathfrak{F}$, y entonces existe $N_3$ tal que $N_3 \subsetneq N_2$. Mediante este proceso se construye una cadena descendente de submódulos de $M$ que no es finita, contradiciendo que $M$ es artiniano.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq ... \supseteq N_n \supseteq N_{n+1} \supseteq ...$$

una cadena descendente de submódulos de $M$.

Sea $\mathfrak{F} = \{N_n \mid n \geqslant 1\}$. Entonces, por hipótesis $\mathfrak{F}$ tiene un elemento mínimo, y por tanto existe $n_0 \geqslant 1$ tal que $N_{n_0}$ es mínimo en $\mathfrak{F}$. Ahora, tenemos que $N_{n_0} \supseteq N_{n_0+1}$ para todo $i \geqslant 1$, y por ser $N_{n_0}$ mínimo en $\mathfrak{F}$ se tiene que $N_{n_0} = N_{n_0+1}$ para $i \geqslant 1$. Por lo tanto la cadena

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq ... \supseteq N_n \supseteq N_{n+1} \supseteq ...$$

es finita. ■

**TEOREMA 1.10.5** Si $M$ es un $R$-Módulo semisimple entonces son equivalantes:

1) $M$ es finitamente generable.

2) $M$ es artiniano.

3) $M$ es neteriano.

***Demostración:***

(2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $M \in R$-Mod artiniano y semisimple. Sea $N \neq \{0\}$ un submódulo de $M$ y $0 \neq n_1 \in N$. Como $M$ es semisimple, por la **Proposición 1.9.2** se tiene que $N$ es semisimple, entonces $N = Rn_1 \oplus T_1$, para algún $T_1 < N$. Sea $0 \neq n_2 \in T_1$, como $N$ es semisimple entonces por la **Proposición 1.9.2** se tiene que $T_1$ es semisimple, por lo que $T_1 = Rn_2 \oplus T_2$, para algún $T_2 < T_1$. Procediendo de esta forma, se tiene la siguiente cadena descendente de submódulos de $M$:

$$M \supset N \supset T_1 \supset T_2 \supset ...$$

Como $M$ es artiniano, entonces la cadena es finita, por lo que $T_m = Rn_{m+1}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $N = \bigoplus_{i=1}^{m+1} Rn_i$, esto implica que $N$ es finitamente generable y por la **Proposición 1.10.2** se tiene concluye que $M$ es neteriano.

(3) $\Rightarrow$ (2)

Sea $M \in R$-Mod neteriano y semisimple. Consideremos la siguiente cadena descendente de submódulos de $M$

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq ...$$

Como $M$ es semisimple, por la **Proposicón 1.9.2** se tiene que los $M_i$ son semisimples. Entonces $M_1 = M_2 \oplus T_1$, para algún $T_1$ submódulo de $M_1$, a su vez $M_2 = M_3 \oplus T_2$ para algún submódulo $T_2$ de $M_2$, por lo que $M_1 = M_2 \oplus T_1 = M_3 \oplus T_2 \oplus T_1$, continuando de esta forma tenemos la siguiente cadena ascendente de submódulos de $M$

$$T_1 \subset T_1 \oplus T_2 \subset T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \subset ...$$

Como $M$ es neteriano, la cadena ascendente es finita, esto implica que $T_n = \{0\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo cual $M_t = M_{t+1}$ para todo $t \geq n$, entonces la cadena

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq ...$$

es finita y por tanto $M$ es artiniano.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Sea $M \in R$-Mod neteriano y semisimple. Por la **Proposición 1.9.3** se tiene que $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$, donde cada $S_n \in R$-simp. Consideremos la siguiente cadena ascendente de submódulos de $M$:

$$0 < S_1 < S_1 \bigoplus S_2 < S_1 \bigoplus S_2 \bigoplus S_3 < ...$$

la cual es finita ya que $M$ es neteriano, por tanto

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} S_i$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Como cada $S_i$ es simple entonces es cíclico, lo que implica que cada $S_i$ es generable por un elemento $0 \neq x_i \in S_i$ y por tanto $M$ es finitamante generable.

(1) $\Rightarrow$ (3)
Sea $M \in R$-Mod semisimple y finitamente generable. Sea $N$ un submódulo de $M$, por ser $M$ semisimple entonces $M = N \oplus T$, para algún submódulo $T$ de $M$.

Consideremos el morfismo canónico $\pi : M \longrightarrow M/T$, se tiene entonces la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow T \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \overset{\pi}{\longrightarrow} M/T \longrightarrow 0$$

Luego, por el **Teorema 1.8.3** se tiene que $M/T$ es finitamente generable. Por el **segundo Teorema de isomorfismo** se tiene que $M/T = (N \oplus T)/T \cong N$, entonces $N$ es finitamente generable, lo que implica que todo submódulo de $M$ es finitamente generable y por la **Proposición 1.10.2** se concluye que $M$ es neteriano. ■

**COROLARIO 1.10.6** Si $R$ es un anillo semisimple entonces es artiniano.

***Demostración:***
Como $R \in R$-Mod y es finitamente generable (a saber por 1), se sigue de 1) $\Rightarrow$ 2) del **Teorema 1.10.5** que $R$ es artiniano. ■

**COROLARIO 1.10.7** Si $R$ es un anillo semisimple entonces es neteriano.

***Demostración:***
Como $R \in R$-Mod y es finitamente generable (a saber por 1), se sigue de 1) $\Rightarrow$ 3) del **Teorema 1.10.5** que $R$ es neteriano. ■

**DEFINICIÓN 1.10.8** Sea $R$ un anillo. El *radical de Jacobson* $J(R)$ es la intersección de todos los ideales izquierdos máximos de $R$. Si $R = \{0\}$ entonces $R$ no tiene ideales izquierdos máximos, en este caso, definimos el radical de Jacobson como cero.

**PROPOSICIÓN 1.10.9** Sea $R$ un anillo. Entonces $J(R)$ es un ideal bilateral.

***Demostración:***
Como $J(R)$ es intersección de ideales izquierdos de $R$, tenemos que $J(R)$ es un ideal izquierdo de $R$. Por tanto basta probar que $J(R)$ es un ideal derecho de $R$. Para esto,

sea $r \in R$, y sea $I$ un ideal izquierdo máximo de $R$. Definimos

$$(I : r) = \{x \in R \mid xr \in I\}$$

*i)* $(I : r)$ es un ideal izquierdo de $R$.
Sean $x_1$, $x_2 \in (I : r)$ y $r' \in R$. Entonces $x_1 r$, $x_2 r \in I$, y así tenemos

$$(x_1 + x_2)r = x_1 r + x_2 r \in I$$

$$(r' x_1)r = r'(x_1 r) \in I$$

pues $I$ es un ideal izquierdo de $R$. Por tanto $x_1 r + x_2 r$, $r' x_1 \in (I : r)$.

*ii)* $(I : r)$ es un ideal izquierdo máximo de $R$ ó $(I : r) = R$.
Supongamos que $(I : r) \subsetneq R$ y sea $J$ un ideal izquierdo de $R$ tal que $(I : r) \subsetneq J$. Afirmamos que $J = R$.

Para $y \in J$, dado que $I$ es un ideal izquierdo máximo de $R$, se tiene que:

$$I + R(yr) = I \quad \text{ó} \quad I + R(yr) = R$$

Supongamos que $I + R(yr) = R$, para todo $y \in J$. Entonces para $y \in J$ tenemos $R(yr) \subseteq I$ lo que implica que $yr \in I$, esto es, $y \in (I : r)$. Luego se tiene que $J \subseteq (I : r)$ contradiciendo que $(I : r) \subsetneq J$.

Por lo tanto existe $y \in J$ tal que $I + R(yr) = I$. Entonces

$$r = i + x(yr)$$

donde $i \in I$ y $x \in R$, luego $(1 - xy)r = i \in I$, lo que implica que $1 - xy \in (I : r) \subseteq J$, así que $1 = xy + (1 - xy) \in J$. Por lo tanto $J = R$.

Sea $r \in R$. Entonces de lo anterior tenemos que $J(R) \subseteq (I : r)$ para todo ideal izquierdo máximo $I$ de $R$, por consiguiente, si $x \in J(R)$, entonces $x \in (I : r)$, para todo ideal izquierdo máximo $I$, es decir, $xr \in I$, por lo tanto

$$xr \in \bigcap_{I \text{ máximo}} I = J(R). \blacksquare$$

**TEOREMA 1.10.10 (Teorema Chino del Residuo)** Sea $R$ un anillo e $I_1, I_2, ..., I_n$ $(n \geq 2)$ ideales izquierdos máximos de $R$. Entonces son equivalentes:

1) $I_k \not\supseteq \displaystyle\bigcap_{i=1,\ i \neq k}^{n} I_i$

2) El morfismo $\varphi : R \longrightarrow \displaystyle\prod_{i=1}^{n} R/I_i$, dado por $\varphi(r) = (r + I_1, ..., r + I_n)$, es suprayectivo.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $(0, ..., \overline{a_k}, ..., 0) \in \prod_{i=1}^{n} R/I_i$. Por la hipótesis existe $c_k \in \bigcap_{i=1,\ i\neq k}^{n} I_i$ tal que $c_k \notin I_k$. Como $I_k$ es máximo, $Rc_k + I_k = R$ y si $a_k$ es un representante de $\overline{a_k}$, se puede escribir $a_k = rc_k + b_k$ con $r \in R$, $b_k \in I_k$ y es fácil ver que $\varphi(rc_k) = (0, ..., \overline{a_k}, ..., 0)$. Esto implica que el morfismo $\varphi$ es suprayectivo.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Si el morfismo $\varphi$ es suprayectivo, el elemento $(0, ..., \overline{a_k}, ..., 0)$ con $\overline{a_k} \neq 0$ proviene de un elemento que no pertenece a $I_k$ y que esta en $\bigcap_{i=1,\ i\neq k}^{n} I_i$. ■

**TEOREMA 1.10.11** Un anillo es semisimple si y solo si $R$ es artiniano y $J(R) = \{0\}$.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Supongamos que $R$ es semisimple, por el **Corolario 1.10.6** se tiene que $R$ es artiniano.

Por otro lado, por el **Corolario 1.9.4**, inciso **ii)** se tiene que $R$ es suma directa de un número finito de ideales izquierdos mínimos.

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i,$$

donde cada $I_i$ es un ideal izquierdo mínimo de $R$.

Consideremos:

$$K_1 = \bigoplus_{i=2}^{n} I_i,$$

$$K_2 = \bigoplus_{i=1,\ i\neq 2}^{n} I_i,$$

$$K_3 = \bigoplus_{i=1,\ i\neq 3}^{n} I_i,$$

$$\vdots$$

$K_n = \bigoplus_{i=1}^{n-1} I_i$.

Como cada $K_i$ es un ideal izquierdo máximo de $R$, se tiene que

$$J(R) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} K_i = \{0\}$$

Por lo tanto $J(R) = \{0\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $R$ es artiniano y $J(R) = \{0\}$.

Sea

$$\mathfrak{F} = \{I \leq M \mid I \text{ } es \text{ } intersección \text{ } finita \text{ } de \text{ } ideales \text{ } izquierdo \text{ } máximos \text{ } de \text{ } R\}.$$

Nótese que $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, ya que por ser $R$ finitamante generable, se tiene por el **Lema 1.8.4** que $R$ tiene almenos un submódulo máximo.

Como $R$ es artiniano, entonces por la **Proposición 1.10.4** se tiene que $\mathfrak{F}$ tiene elementos mínimos. Sea $K \in \mathfrak{F}$ un elemento mínimo, entonces $K = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, donde cada $I_i$ es un ideal izquierdo máximo de $R$ y $n \in \mathbb{N}$.

Es claro por la definición de $J(R)$ que:

$$J(R) \subseteq K.$$

Por otro lado, si $I$ es un ideal izquierdo máximo de $R$, entonces $K \cap I \subseteq K$, además se tiene que $K \cap I \in \mathfrak{F}$ y por ser $K$ elemento mínimo de $\mathfrak{F}$, se tiene que $K \subseteq K \cap I$, por lo tanto $K \cap I = K$, lo que implica que $K \subseteq I$ y como $I$ era un ideal izquierdo máximo arbitraro de $R$ se tiene que

$$K \subseteq J(R).$$

Por tanto

$$K = J(R) = \{0\}.$$

Consideremos la familia de morfismos $\{\pi_i : R \longrightarrow R/I_i\}_{i=1}^{n}$, donde cada $\pi_i$ es el morfismo canónico de $R$ a $R/I_i$. Por la **Propiedad Universal del Producto** existe un único $\varphi \in Hom(R, \prod_{i=1}^{n} R/I_i)$ tal que $\pi_i = P_i \circ \varphi$, para cada $i \in \{i, ..., n\}$ y donde cada $P_i$ es la proyección de $\prod_{i=1}^{n} R/I_i$ en $R/I_i$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \prod_{i=1}^{n} R/I_i \arrow[dl, "P_i"] \\ R/I_i & \end{tikzcd}$$

Notemos que $\varphi$ es monomorfismo ya que $Nuc(\varphi) = \bigcap_{i=1}^{n} I_i = K = \{0\}$.

Afirmamos que $\bigcap_{i=1,\ i\neq j}^{n} I_i \nsubseteq I_j$. Sea $j \in \{i, ..., n\}$, entonces $\bigcap_{i=1,\ i\neq j}^{n} I_i \in \mathfrak{F}$, además

$$\{0\} = K = \bigcap_{i=1}^{n} I_i \subset \bigcap_{i=1,\ i\neq j}^{n} I_i.$$

Por ser $K$ elemento mínimo de $\mathfrak{F}$ se tiene que $\bigcap_{i=1,\ i\neq j}^{n} I_i \neq \{0\}$. Supongamos que $\bigcap_{i=1,\ i\neq j}^{n} I_i \subset I_j$, esto implica que $\{0\} \neq \bigcap_{i=1}^{n} I_i = K$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\bigcap_{i=1,\ i\neq j}^{n} I_i \nsubseteq I_j$. Entonces por el **Teorema Chino del Residuo** se tiene que $\varphi$ es un epimorfimo. Por lo tanto $\varphi$ es un isomorfismo, entonces $R \cong \prod_{i=1}^{n} R/I_i$ y por ser $\prod_{i=1}^{n} R/I_i$ un producto finito se tiene que $\prod_{i=1}^{n} R/I_i = \bigoplus_{i=1}^{n} R/I_i$, lo que implica que $R \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/I_i$. Se concluye que $R$ es semisimple. ■

**COROLARIO 1.10.12** Si $R$ es un anillo artiniano simple entonces $R$ es semisimple.

***Demostración:***
Por la **Proposición 1.10.9** se tiene que $J(R)$ es ideal bilateral de $R$, como $R$ es simple entonces $J(R) = \{0\}$. Se tiene entonces que $R$ es artiniano y $J(R) = \{0\}$, por el **Teorema 1.10.11** se tiene que $R$ es semisimple. ■

## 1.11. Módulos uniformes y $V$-Anillos.

**DEFINICIÓN 1.11.1** Un $R$-módulo $M$ se dice que es *inescindible* si no se puede escribir como suma directa de 2 submódulos distintos de cero.

**DEFINICIÓN 1.11.2** Un $R$-módulo $M$ se dice que es *uniforme* si cada uno de sus submódulo es inescindible.

**PROPOSICIÓN 1.11.3** Sea $M \in R$-Mod. $M$ es uniforme si y solo si todo par de submódulos (distintos de cero) de $M$ tienen intersección no nula.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Sean $N \neq \{0\}$ y $K \neq \{0\}$ submódulos de $M$. Supongamos que $N \cap K = \{0\}$. Entonces $N+K$ es un submódulo de $M$ y no es inescindible, lo cual es una contradicción ya que $M$ es uniforme. Por lo tanto $N \cap K = \{0\}$.

$\Leftarrow$) Sea $N \neq \{0\}$ un submódulo de $M$. Supongamos que $N$ no es inescindible, entonces $N = N_1 \oplus N_2$ para algunos $N_1 \neq \{0\}$ y $N_2 \neq \{0\}$ submódulos de $N$, pero $N_1$ y $N_2$ tambien son submódulos de $M$ y $N_1 \cap N_2 = \{0\}$, lo cual contradice la hipótesis de que todo par de submódulos de $M$ (distintos de $\{0\}$) tienen intersección no nula, esto implica que $N$ es inescindible y por tanto $M$ es uniforme. $\blacksquare$

El siguiente ejemplo muestra que la cápsula inyectiva de cualquier módulo simple es uniforme.

**EJEMPLO 1.11.4** Sea $S \in R$-Simp y $E(S)$ la cápsula inyectiva de $S$, veamos que $E(S)$ es uniforme.

Sea $N \neq \{0\}$ un submódulo de $E(S)$, como $S$ es submódulo esencial de $E(S)$ se tiene que $S \cap N \neq \{0\}$, además $S \cap N \subseteq S$, lo que implica que $S \cap N = S$ ya que $S$ es simple, esto muestra que $S \subseteq N$ para todo $N \neq \{0\}$ submódulo de $E(S)$, entonces si $N_1 \neq \{0\}$ y $N_2 \neq \{0\}$ son dos submódulos de $E(S)$ se tiene que $\{0\} \neq S \subseteq N_1 \cap N_2$, lo que implica que cualquier par de submódulos no cero de $E(S)$ tiene intersección distinta de $\{0\}$, por la **Proposición 1.11.3** se sigue que $E(S)$ es uniforme.

**PROPOSICIÓN 1.11.5** Si $N$ es un submódulo uniforme de $M \oplus M' \in R$-Mod, y $\rho$, $\rho'$ son las proyecciones sobre $M$ y $M'$ respectivamente, entonces la restricción de $\rho$ a $S$ ó la restricción de $\rho'$ a $S$ es un monomorfismo.

***Demostración:***

Por la **Proposición 1.11.3** sabemos que por ser $S$ uniforme entonces cualquier par de submódulos de $S$ distintos de cero tiene intersección no nula. Si ninguna de las proyecciones $\rho$ ó $\rho'$ restringidas a $S$ es monomorfismo, tendríamos 2 submódulos distintos de cero $Nuc(\rho) \cap S$ y $Nuc(\rho') \cap S$ de $S$, cuya intersección es cero ya que $Nuc(\rho) \cap Nuc(\rho') = \{0\}$, esto es una contradicción ya que $S$ es uniforme. Por lo tanto la restricción de $\rho$ a $S$ ó la restricción de $\rho'$ a $S$ es monomorfismo. ■

**PROPOSICIÓN 1.11.6** Si $S$ es un submódulo uniforme de $\bigoplus_{i \in I} M_i = M \in R$-Mod, entonces para alguna $j \in I$, la restricción a $S$ de la $j$-ésima proyección $\rho_j$ es un monomorfismo.

***Demostración:***

Sean $0 \neq s \in S$ y $J \subseteq I$ el conjunto de todas las $i \in I$ tal que la $i$-ésima componente de $s$ es no cero. Entonces

$$M = \left( \bigoplus_{i \in J} M_i \right) \bigoplus \left( \bigoplus_{i \in I \setminus J} M_i . \right)$$

Por la **Proposición 1.11.5** tenemos que la restricción a $S$ de una de las 2 proyecciones asociadas es monomorfismo, no puede ser la proyección sobre el segundo sumando ya que esta proyección manda a $s$ en 0. Así, la proyección $S$ al primer sumando es monomorfismo, a tal proyección la denotaremos por $\rho$, y sea $S' = \rho(S)$. Como $S'$ es un submódulo de $\bigoplus_{i \in J} M_i$ y $J$ es un conjunto finito, podemos aplicar un número finito de veces la **Proposición 1.11.5** y así obtener un $j \in J$ para el cual la proyección $S'$ sobre $M_j$ es un monomorfismo. Luego, la composición de las proyecciónes de $S$ en $S'$ y de $S'$ en $M_j$ es un monomorfismo, como se quería. ■

En otras palabras, la **Proposición 1.11.6** nos dice que si un $R$-módulo uniforme $S$ se encaja en el coproducto de una familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de $R$-módulos, entonces se encaja en $M_j$ para algún $j \in I$.

**DEFINICIÓN 1.11.7** Decimos que un anillo $R$ es $V$-anillo izquierdo si cada $R$-Módulo izquierdo simple es inyectivo.

**TEOREMA 1.11.8** Sea $R$ un anillo. Son equivalentes:

1. $R$ es un $V$-anillo izquierdo.

2. Todo ideal izquierdo propio de $R$ es una intersección de ideales izquierdos máximos de $R$.

3. Cada $R$-módulo izquierdo tiene la propiedad de que el cero es una intersección de submódulos máximos.

4. La categoría de los $R$-módulos izquierdos tiene un cogenerador, el cual es una suma directa de $R$-módulos simples.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (3)

Sea $M$ un $R$-módulo izquierdo, donde $R$ es un $V$-anillo. Si $0 \neq x \in M$ entonces, por el **Lema de Zorn**, existe $Y \leq M$ el cual es máximo entre los submódulos $\mathcal{X}$ de $M$ con $x$ que no pertenece a $\mathcal{X}$.

sea $D = \bigcap\{S \leq M \mid Y < S\}$. Entonces, $x \in D$ y $D/Y \neq 0$ es simple, por lo tanto inyectivo. Luego,

$$0 \longrightarrow D/Y \longrightarrow M/Y$$

se escinde, de donde $M/Y = D/Y \oplus K/Y$, con $K \leq M$. Como $x$ no pertenece a $K$. entonces $Y \leq M$ es máximo. Así, $0 = \bigcap\{Y \leq M \mid Y \text{ } es \text{ } máximo\}$.

(3) $\Rightarrow$ (2)

Sea $I \leq R$. Viendo a $R/I$ como $R$-módulo izquierdo se tiene que $I = \bigcap\limits_{\alpha \in A} J_\alpha$, donde $J_\alpha \leq R$ es máximo para toda $\alpha \in A$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sean $S$ un $R$-módulo simple e $I \leq R$. Si $\alpha \in Hom_R(I, S)$ y si $K = Nuc(\alpha)$, entonces existe $M \leq R$ máximo tal que $K \leq M$ pero $I \nleq M$. Como $I/K$ es simple, $M \cap I = K$. Entonces, $R/M = (M + I)/M \cong I/M \cap I = I/K \cong S$. Así, $\alpha$ se puede extender a un $R$-morfismo $\alpha' \in Hom_R(R, S)$. Por lo tanto, $S$ es inyectivo.

(1) $\Rightarrow$ (4)

Consideremos $\bigoplus\limits_{S_\alpha \in R-simp} S_\alpha$.

Sea $M \in R$-Mod y $0 \neq m \in M$, consideremos $Rm$ el submódulo de $M$ generado por $m$. Sea $\iota : Rm \hookrightarrow M$ la inclusión natural. Como $Rm \in R$-simp y por hipótesis $R$ es $V$-anillo entonces $Rm$ es inyectivo, por lo que existe $\varphi \in Hom_R(M, Rm)$ tal que $1_M = \varphi \circ \iota$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rm \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "1_M"'] & M \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & Rm & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, al considerar la inclusión $U : Rm \hookrightarrow \bigoplus_{S_\alpha \in R-simp} S_\alpha$ se tiene que $U \circ \varphi \in Hom_R(M, \bigoplus_{S_\alpha \in R-simp} S_\alpha)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Rm \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "1_M"'] & M \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& Rm \arrow[d, "U"'] & \\
& \bigoplus_{S_\alpha \in R-simp} S_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Además, $(U \circ \varphi)(m) = (U \circ 1_M)(m) = U(1_M(m)) = U(m) \neq 0$ ya que $U$ es monomorfismo. Entonces por el **Lema 1.8.7** se tiene que $\bigoplus_{S_\alpha \in R-simp} S_\alpha$ cogenera a $M$ y por tanto $\bigoplus_{S_\alpha \in R-simp} S_\alpha$ cogenera a $R$-Mod.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Sean $C \in R$-Mod un cogenerador semisimple de $R$-Mod y $S \in R$-simp. Consideremos a $E(S)$ la cápsula inyectiva de $S$. Existe un conjunto $I \neq \varnothing$ y un monomorfismo

$$f : E(S) \hookrightarrow C^I .$$

Por el **Ejemplo 1.8.11** se tiene que $E(S)$ es finitamente cogenerable, entonces por la **Proposición 1.8.12** existe $\varnothing \neq J \subseteq I$ y un monomorfismo

$$f' : E(S) \hookrightarrow C^J = C^{(J)}$$

Por el **Ejemplo 1.11.4** sabemos que $E(S)$ es uniforme, entonces por la **Proposición 1.11.6** existe un monomorfismo

$$h : E(S) \hookrightarrow C.$$

Aplicando nuevamante la **Proposición 1.11.6**, existe $T \in R$-simp sumando directo de $C$ y un monomorfismo

$$h' : E(S) \hookrightarrow T,$$

esto implica que $E(S) = S \cong T$ y por tanto $S$ es inyectivo. ■

## 1.12. Retículas Booleanas.

**DEFINICIÓN 1.12.1** Sea $L \neq \varnothing$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $L$ es una *retícula* si para cada $a,\ b \in L$, el conjunto $\{a, b\}$ tiene un supremo y un ínfimo. Denotaremos por $a \vee b$ al supremo de $\{a, b\}$, mientras que $a \wedge b$ denotará al ínfimo de $\{a, b\}$.

**DEFINICIÓN 1.12.2** Una retícula $L$ es *completa* si todo subconjunto de $L$ tiene un supremo y un ínfimo. Si $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un subconjunto de $L$, utilizaremos la notación:

$\bigvee\limits_{\alpha \in I} x_\alpha = \bigvee \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para denotar al supremo del conjunto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, y

$\bigwedge\limits_{\alpha \in I} x_\alpha = \bigwedge \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para denotar al ínfimo del conjunto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

**DEFINICIÓN 1.12.3** Sea $L$ una retícula con elemento menor $\underline{0}$ y elemento mayor $\underline{1}$.

1) Un elemento $a \in L$, $a \neq \underline{0}$, se llama *átomo* si no existe $b \in L$ tal que $\underline{0} < b < a$.

2) Un elemento $c \in L$, $c \neq \underline{1}$, se llama *coátomo* si no existe $b \in L$ tal que $c < b < \underline{1}$.

**DEFINICIÓN 1.12.4** Sea $L$ una retícula con elemento menor $\underline{0}$ y elemento mayor $\underline{1}$.

1) Decimos que $L$ es *atómica* si para todo $\underline{0} \neq x \in L$ existe un átomo $a \in L$ tal que $a \leq x$.

2) Decimos que $L$ es *coatómica* si para todo $\underline{1} \neq x \in L$ existe un coátomo $c \in L$ tal que $x \leq c$.

**DEFINICIÓN 1.12.5** Sea $L$ una retícula con elemento menor $\underline{0}$ y elemento mayor $\underline{1}$. Un *complemento* de un elemento $x$ de la retícula $L$ es un elemento $y \in L$ tal que $x \wedge y = \underline{0}$ y $x \vee y = \underline{1}$. $L$ es llamada *complementada* si todo elemento de $L$ tiene complemento.

**DEFINICIÓN 1.12.6** Una retícula $L$ es *distributiva* si para todo $x,\ y,\ z \in L$ se tiene:

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

**LEMA 1.12.7** En una retícula distributiva $L$, un elemento $x \in L$ no puede tener más de un complemento.

***Demostración:***
Sea $x \in L$. Si $y_0$, $y_1 \in L$ son ambos complementos de $x$, entonces

$$y_0 = y_0 \wedge 1 = y_0 \wedge (x \vee y_1) = (y_0 \wedge x) \vee (y_0 \wedge y_1) = \underline{0} \vee (y_0 \wedge y_1) = y_0 \wedge y_1,$$

similarmente se tiene que $y_1 = y_0 \wedge y_1$, lo que implica que $y_0 = y_1$. ■

**DEFINICIÓN 1.12.8** Sea $L$ una retícula. Decimos que $L$ es *Booleana*, si $L$ es distributiva y complementada.

**PROPOSICIÓN 1.12.9** Si $L$ es una retícula Booleana completa, entonces:

1) $(\bigvee\limits_{i \in I} a_i) \wedge c = \bigvee\limits_{i \in I}(a_i \wedge c)$.

2) $(\bigwedge\limits_{i \in I} a_i) \vee c = \bigwedge\limits_{i \in I}(a_i \vee c)$.

Para cualquier familia $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ y $c \in L$.

***Demostración:***

1) Para cualquier $j \in I$ se tiene que $a_j \leq \bigvee\limits_{i \in I} a_i$, entonces $a_j \wedge c \leq (\bigvee\limits_{i \in I} a_i) \wedge c$, lo que implica que $\bigvee\limits_{i \in I}(a_i \wedge c) \leq (\bigvee\limits_{i \in I} a_i) \wedge c$. Se tiene entonces que $(\bigvee\limits_{i \in I} a_i) \wedge c$ es una cota superior para la familia $\{a_i \wedge c\}_{i \in I} \subseteq L$.

Sea $u \in L$ cota superior para la familia $\{a_i \wedge c\}_{i \in I}$ y sea $c^* \in L$ el complemento de $c$, entonces $c \vee c^* = \underline{1}$, como para cualquier $j \in I$ se tiene que $a_j \wedge c \leq u$ y $a_j \wedge c^* \leq c^*$, entonces:

$$a_j = a_j \wedge \underline{1} = a_j \wedge (c \vee c^*) = (a_j \wedge c) \vee (a_j \wedge c^*) \leq u \vee c^*$$

Así, $\bigvee\limits_{i \in I} a_i \leq u \vee c^*$, lo que implica que:

$(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c \leq (u \vee c^*) \wedge c = (u \wedge c) \vee (c^* \wedge c) = (u \wedge c) \vee \underline{0} = u \wedge c \leq u$. Se tiene entonces que $(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c$ es la mínima cota superior para la familia $\{a_i \wedge c\}_{i\in I}$ y por tanto

$$(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge c = \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge c).$$

2) Para cualquier $j \in I$ se tiene que $\bigwedge_{i\in I} a_i \leq a_j$, entonces $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c \leq a_j \vee c$, lo que implica que $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c \leq \bigwedge_{i\in I}(a_i \vee c)$. Se tiene entonces que $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c$ es una cota inferior para la familia $\{a_i \vee c\}_{i\in I} \subseteq L$.

Sea $u \in L$ cota inferior para la familia $\{a_i \vee c\}_{i\in I}$ y sea $c^* \in L$ el complemento de $c$, entonces $c \wedge c^* = \underline{0}$, como para cualquier $j \in I$ se tiene que $u \leq a_j \vee c$ y $c^* \leq a_j \vee c^*$, entonces:

$u \wedge c^* \leq (a_j \vee c) \wedge (a_j \vee c^*) = a_j \vee (c \wedge c^*) = a_j \vee \underline{0} = a_j$

Así, $u \wedge c^* \leq \bigwedge_{i\in I} a_i$, lo que implica que:

$u \vee c = (u \vee c) \wedge (\underline{1}) = (u \vee c) \wedge (c^* \vee c) = (u \wedge c^*) \vee c \leq (\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c$. Se tiene entonces que $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c$ es la máxima cota inferior para la familia $\{a_i \vee c\}_{i\in I}$ y por tanto

$$(\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee c = \bigwedge_{i\in I}(a_i \vee c). \blacksquare$$

**PROPOSICIÓN 1.12.10** Sea $L$ un retícula Booleana atómica completa. Si $\underline{0} \neq x \in L$ y $A_x = \{a_i\}_{i\in I} \subseteq L$, donde $a_i$ es átomo de $L$ y $a_i \leq x$, para toda $i \in I$. Entonces

$$x = \bigvee_{a_i \in A_x} a_i.$$

***Demostración:***

Sea $s = \bigvee_{a_i \in A_x} a_i$. Demostraremos que $x = s$.

Como $a_i \leq x$ para todo $i \in I$, se tiene que $s \leq x$. Por otro lado sea $s^* \in L$ el complemento de $s$, entonces

$$\underline{1} = s \vee s^* \leq x \vee s^*$$

lo que implica que

$$\underline{1} = x \vee s^*.$$

Supongamos que $x \wedge s^* \neq \underline{0}$, como $L$ es atómica, existe un átomo $a \in L$ tal que $a \leq x \wedge s^*$, lo que implica que $a \leq s^*$ y $a \leq x$, entonces $a \in A_x$. Sea $a = a_j$, para algún $j \in I$. Como $L$ es una retícula Booleana completa se tiene por la **Proposición 1.12.9** 1) que:

$$\underline{0} = s \wedge s^* = \left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) \wedge s^* \geq \left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) \wedge a_j = \bigvee_{i \in I}(a_i \wedge a_j) =$$
$$= \left(\bigvee_{i \in I \quad i \neq j} (a_i \wedge a_j)\right) \bigvee (a_j \wedge a_j) = \left(\bigvee_{i \in I \quad i \neq j} (a_i \wedge a_j)\right) \vee a_j = a_j$$

Entonces $a_j = \underline{0}$, lo cual es una contradicción. Como la contradicción resulto de suponer que $x \wedge s^* \neq \underline{0}$, entonces $x \wedge s^* = \underline{0}$ esto implica que $x$ es complemento de $s^*$ y po el **Lema 1.12.7** se tiene que $x = s$. ■

**COROLARIO 1.12.11** Sea $L$ un retícula Booleana atómica completa. Sea $\underline{1} \in L$ el elemento mayor y $A = \{a \in L \mid a \text{ es átomo de } L\}$, entonces

$$\underline{1} = \bigvee_{a \in A} a.$$

***Demostración:***
La demostración es clara por la **Proposición 1.12.10**. ■

**PROPOSICIÓN 1.12.12** Sea $L$ un retícula Booleana coatómica completa. Si $\underline{1} \neq x \in L$ y $C_x = \{c_i\}_{i \in I} \subseteq L$, donde $c_i$ es coátomo de $L$ y $x \leq c_i$, para toda $i \in I$. Entonces

$$x = \bigwedge_{c_i \in C_x} c_i.$$

***Demostración:***
Sea $s = \bigwedge_{c_i \in C_x} c_i$. Demostraremos que $x = s$.

Como $x \leq c_i$ para todo $i \in I$, se tiene que $x \leq s$. Por otro lado sea $s^* \in L$ el complemento de $s$, entonces

$$x \vee s^* \leq s \wedge s^* = \underline{0}$$

lo que implica que

$$x \wedge s^* = \underline{0}.$$

Supongamos que $x \vee s^* \neq \underline{1}$, como $L$ es coatómica, existe un coátomo $c \in L$ tal que $x \vee s^* \leq c$, lo que implica que $s^* \leq c$ y $x \leq c$, entonces $c \in C_x$. Sea $c = c_j$, para algún

$j \in I$. Como $L$ es una retícula Booleana completa se tiene por la **Proposición 1.12.9** inciso 2) que:

$$c_j = \left( \bigwedge_{i \in I \quad i \neq j} (c_i \vee c_j) \right) \wedge c_j = \left( \bigwedge_{i \in I \quad i \neq j} (c_i \vee c_j) \right) \wedge (c_j \vee c_j) = \bigwedge_{i \in I} (c_i \vee c_j) =$$
$$= \left( \bigwedge_{i \in I} c_i \right) \vee c_j \geq \left( \bigwedge_{i \in I} c_i \right) \vee s^* = s \vee s^* = \underline{1}.$$

Entonces $c_j = \underline{1}$, lo cual es una contradicción. Como la contradicción resulto de suponer que $x \vee s^* \neq \underline{1}$, entonces $x \vee s^* = \underline{1}$, esto implica que $x$ es complemento de $s^*$ y po el **Lema 1.12.7** se tiene que $x = s$. ■

**COROLARIO 1.12.13** Sea $L$ un retícula Booleana coatómica completa. Sea $\underline{0} \in L$ el elemento menor y $C = \{c \in L \mid c \text{ es coátomo de } L\}$, entonces

$$\underline{0} = \bigwedge_{c \in C} c.$$

***Demostración:***
La demostración es clara por la **Proposición 1.12.12**. ■

# Capítulo 2

# La estructura de la retícula de prerradicales.

En esta sección se verán las definiciones y algunos resultados importantes en la clase de los prerradicales sobre un anillo $R$, la cual se denotará por $R$-pr. Se presentarán sus operaciones y se definirán dos clases de prerradicales muy importantes (a saber $\alpha_N^M$ y $\omega_N^M$) con los cuales se verá que $R$-pr es una gran retícula con átomos y coátomos.

## 2.1. Definiciones y caracterizaciones.

**DEFINICIÓN 2.1.1** Un *prerradical* en $R$ es un funtor $\sigma : R$-Mod$\rightarrow R$-Mod que cumple 2 condiciones:

1. $\sigma(M) \leq M$ para cada $M \in R$-Mod.

2. Para cada $f : M \rightarrow N$, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ \sigma(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f|_{\sigma(M)}"'] & \sigma(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

De esta forma un *prerradical* es simplemente un *subfuntor del funtor identidad*.

**EJEMPLO 2.1.2** A continuación se mencionan algunos ejemplos de prerradicales.

i)*El Zoclo.*

$$Zoc(\_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}.$$

$$Zoc(M) = \sum_{\alpha \in I} \{S_\alpha \leq M | S_\alpha \text{ es simple }\}.$$

ii) *El Radical de Jacobson.*

$$Rad(\_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}.$$

$$Rad(M) = \bigcap_{\alpha \in I} \{M_\alpha < M | M_\alpha \text{ es máximo}\}.$$

iii) *La parte de Torsión.*

$$T(\_) : \mathbb{Z}\text{-Mod} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}.$$

$$T(M) = \{m \in M | \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } km = 0, \text{ con } k \neq 0\}.$$

iv) *La parte Singular.*

$$Z(\_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}.$$

$$Z(M) = \{m \in M | ann(m) \trianglelefteq R\}.$$

v) Sea $I \leq R$ un ideal izquierdo de $R$, se tiene el siguiente prerradical.

$$f(\_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}.$$

$$f(M) = IM.$$

vi) *El funtor identidad.*

$$\underline{1}(\_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}.$$

$$\underline{1}(M) = M.$$

vii) *El funtor cero.*

$$\underline{0}(\_) : R\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}.$$

$$\underline{0}(M) = \{0\}.$$

Denotaremos por $R$-pr a la clase de *prerradicales* en $R$-Mod.

A la clase de prerradicales se le puede asociar un orden parcial de la siguiente manera:

**DEFINICIÓN 2.1.3** Dos prerradicales $\sigma, \tau \in R$-pr estan relacionados por $\sigma \preceq \tau$ si $\sigma(M) \leq \tau(M)$, $\forall M \in R$-Mod.

Con esta relación de orden podríamos decir que $R$-pr es una "retícula", pero recordemos que la definición de retícula que hasta el momento tenemos es para conjuntos (Ver **Definición 1.12.1**) y en general $R$-pr no es un conjunto, es una clase. Es por esta razón que a $R$-pr le llamaremos *gran retícula*, para hacer notar el hecho de que $R$-pr es una clase con el orden parcial de la **Definición 2.1.3**, donde los supremos y los ínfimos pueden describirse como sigue:

Si $\boldsymbol{C}$ es una clase de prerradicales entonces

$\tau = \bigwedge\{\sigma \in \boldsymbol{C}\}$ esta dado por $\tau(M) = \bigcap\{\sigma(M) \mid \sigma \in \boldsymbol{C}\}$

$\eta = \bigvee\{\sigma \in \boldsymbol{C}\}$ esta dado por $\eta(M) = \sum\{\sigma(M) \mid \sigma \in \boldsymbol{C}\}$.

Se tienen además las operaciones producto y coproducto que se definen a continuación.

**DEFINICIÓN 2.1.4** Para $\sigma,\ \tau \in R$-pr y $\quad M \in R$-Mod

1. **Producto**

$$(\sigma \cdot \tau)(M) = \sigma(\tau(M)).$$

2. **Coproducto**

$$(\sigma : \tau)(M) \text{ es tal que } (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M) = \tau(M/\sigma(M)); \text{ es decir:}$$

$$(\sigma : \tau)(M) = \{x \in M \mid x + \sigma(M) \in \tau(M/\sigma(M))\}.$$

Hay que tener en cuenta que, a pesar de que en general $\boldsymbol{C}$ es una clase, resulta que para cada $M \in R$-Mod, $\{\sigma(M)|\sigma \in \boldsymbol{C}\}$ es un conjunto.

**LEMA 2.1.5** Sean $\sigma, \tau \in R$-pr, entonces $\sigma \cdot \tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$.

***Demostración:***
*i)* $\sigma \cdot \tau \preceq \sigma \wedge \tau$.
Sea $M \in R$-Mod, entonces por ser $\sigma$ un prerradical se tiene que $\sigma(\tau(M)) \leq \tau(M)$.

Por otro lado, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \tau(M) \arrow[r, hook, "\iota"] & M \\ \sigma(\tau(M)) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\iota|_{\sigma(\tau(M))}"'] & \sigma(M) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

muestra que $\sigma(\tau(M)) \leq \sigma(M)$.

Dado que $\sigma(\tau(M)) \leq \tau(M)$ y $\sigma(\tau(M)) \leq \sigma(M)$ se concluye que $\sigma(\tau(M)) \leq \sigma(M) \cap \tau(M)$, asi $\sigma \cdot \tau \preceq \sigma \wedge \tau$.

*ii)* $\sigma \wedge \tau \preceq \sigma \vee \tau$.
Es claro, ya que $\sigma(M) \cap \tau(M) \leq \sigma(M) + \tau(M)$.

*iii)* $\sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$.
Del siguiente digrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & M/\sigma(M) \\ \tau(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi|_{\tau(M)}"'] & \tau(M/\sigma(M)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

se tiene que $\frac{\tau(M)+\sigma(M)}{\sigma(M)} \leq \tau(M/\sigma(M)) = (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M)$, entonces por el Teorema de la Correspondencia se tiene que $\tau(M) + \sigma(M) \leq (\sigma : \tau)(M)$ y por tanto $\tau \vee \sigma \preceq (\sigma : \tau)$.■

**LEMA 2.1.6** Si $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de módulos y $\sigma \in R$-pr, entonces:

$i)$ $\sigma\left(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha\right) \leq \prod_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha)$.

$ii)$ $\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha)$.

***Demostración:***

$i)$ Sean $\beta \in I$, $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha \xrightarrow{\pi_\beta} M_\beta$ la proyección natural y $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \sigma\left(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$.

Consideremos el morfismo $\sigma(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha) \xrightarrow{{\pi_\beta}^*} \sigma(M_\beta)$ tal que ${\pi_\beta}^*$ es la restricción del morfismo $\pi_\beta$ a $\sigma\left(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$.

El siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\alpha\in I} M_\alpha \arrow[r, "\pi_\beta"] & M_\beta \\
\sigma(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha) \arrow[u, hook] \arrow[r, "{\pi_\beta}^*"'] & \sigma(M_\beta) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

muestra que $\pi_\beta(\sigma(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha)) \leq \sigma(M_\beta)$, así $\pi_\beta(x) = x_\beta$ y $x_\beta \in \sigma(M_\beta)$, lo que implica que $x \in \prod_{\alpha\in I}(\sigma(M_\alpha))$ y por tanto $\sigma(\prod_{\alpha\in I} M_\alpha) \leq \prod_{\alpha\in I}(\sigma(M_\alpha))$.

$ii)$Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de $R$-Módulos y sea:

$$\iota_\alpha : M_\alpha \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha$$

la inclusión natural para cada $\alpha \in I$.

Entonces para cada $\alpha \in I$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[r, hook, "\iota_\alpha"] & \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \\ \sigma(M_\alpha) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\iota_\alpha|_{\sigma(M_\alpha)}"'] & \sigma(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Luego, sea $\bigoplus\limits_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha)$ el coproducto de la familia de $R$-Módulos $\{\sigma(M_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, con la familia de inclusiones:

$$\{\ \sigma(M_\alpha) \overset{\bar{\iota}_\alpha}{\hookrightarrow} \bigoplus_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha)\ \}_{\alpha\in I}.$$

Entonces por la **Propiedad Universal del Coproducto** existe un único morfismo:

$$\varphi : \bigoplus_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha) \longrightarrow \sigma(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha)$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \sigma(M_\alpha) \arrow[r, hook, "\bar{\iota}_\alpha"] \arrow[d, hook, "\iota_\alpha|_{\sigma(M_\alpha)}"'] & \bigoplus\limits_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha) \arrow[dl, "\varphi"] \\ \sigma(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha) & \end{tikzcd}$$

Además $Nuc(\varphi) = \bigoplus\limits_{\alpha\in I} Nuc(\iota_\alpha|_{\sigma(M_\alpha)}) = 0$, por tanto:

$$\bigoplus_{\alpha\in I}\sigma(M_\alpha) \subseteq \sigma\left(\ \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\ \right)$$

.

Por otro lado, sea $\pi_\alpha : \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \longrightarrow M_\alpha$ la proyección natural entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo para cada $\alpha \in I$:

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] & M_\alpha \\
\sigma(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha) \arrow[u, hook] \arrow[r, "{\pi_\alpha}^*"'] & \sigma(M_\alpha) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

Donde ${\pi_\alpha}^*$ es la restricción del morfismo $\pi_\alpha$ a $\sigma\left(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$. Sea $(x_\beta)_{\beta\in I} \in \sigma\left(\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha\right)$, entonces $\pi_\alpha((x_\beta)_{\beta\in I}) = x_\alpha \in \sigma(M_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$, lo que implica que $(x_\beta)_{\beta\in I} \in \bigoplus\limits_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha)$ y por tanto:

$$\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right) \subseteq \bigoplus_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha).$$

Entonces:

$$\sigma\left(\bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in I} \sigma(M_\alpha). \quad \blacksquare$$

**COROLARIO 2.1.7** Si $\tau \in R$-pr entonces:

$$\tau = \underline{1} \text{ si y solo si } \tau(R) = R.$$

***Demostración:***
Si $\tau = \underline{1}$ es claro que $\tau(R) = R$.

Recíprocamente, si $\tau(R) = R$, por el **Lema 2.1.6. (ii)** se tiene para todo $R$-módulo libre $L = R^{(I)}$ que

$$\tau(L) = \tau(R^{(I)}) = (\tau(R))^{(I)} = R^{(I)} = L.$$

Por otro lado, si $K$ es un submódulo de $L$ y $\pi : L \longrightarrow L/K$ es el morfismo canónico, entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\pi"] & L/K \\
\tau(L) = L \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi|_{\tau(L)}"'] & \tau(L/K) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

muestra que $\pi|_{\tau(L)} = \pi$ (ya que $\pi$ y $\pi|_{\tau(L)}$ tienen el mismo dominio y la misma regla de correspondencia) y por ser $\pi$ un epimorfismo, tambien lo es $\pi|_{\tau(L)}$, entonces

$$\tau(L/K) = Im(\pi|_{\tau(L)}) = Im(\pi) = L/K.$$

Por el **Teorema 1.6.9**, para todo $M \in R$-Mod se tiene que $M = L'/K'$, donde $L'$ es un $R$-módulo libre y $K'$ es un submódulo de $L'$, y por lo que acabamos de probar $\tau(M) = \tau(L'/K') = L'/K' = M$, por lo tanto $\tau = \underline{1}$. ■

**DEFINICIÓN 2.1.8** Un submódulo $N \leq M$ se dice que es totalmente invariante si $f(N) \leq N$ para cada $R$-morfismo $f : M \to M$.

A continuación se describen dos clases importantes de prerradicales.

**DEFINICIÓN 2.1.9** Sea $N$ un submódulo totalmente invariente de $M$, se definen a $\alpha_N^M,\ \omega_N^M \in R$-pr como:

Para cada $K \in R$-Mod

$\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M, K)\}$.

$\omega_N^M(K) = \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(K, M)\}$.

**LEMA 2.1.10** Si $N$ es un submódulo totalmente invariante de $M$, entonces:

*i)* $\alpha_N^M(M) = N$.

*ii)* $\omega_N^M(M) = N$.

***Demostración:***
*i)* Como $1_M \in Hom_R(M, M)$, se tiene que $N = 1_M(N) \leq \alpha_N^M(M) = \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M, M)\}$, asi $N \leq \alpha_N^M(M)$.

Por otro lado, por ser $N$ un submódulo totalmente invariante de $M$, $f(N) \leq N$ para todo $f \in Hom_R(M, M)$ se sigue que $\alpha_N^M(M) = \sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(M, M)\} \leq N$.

$$\therefore\ \alpha_N^M(M) = N.$$

*ii)* Obsérvese que de $f(N) \leq N$ se tiene que $N \leq f^{-1}(N)\ \forall f \in Hom_R(M, M)$, lo que implica que $N \leq \omega_N^M(M) = \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(M, M)\}$.

Por otro lado, $N = 1_M{}^{-1}(M)$ entonces $\bigcap\{f^{-1}(N) \mid f \in Hom_R(M,M)\} \leq N$.

$$\therefore\ N = \omega_N^M(M). \blacksquare$$

**PROPOSICIÓN 2.1.11** Sea $\sigma \in R$-pr, $M \in R$-Mod y $N$ un submódulo totalmente invariante de $M$. Entonces $\sigma(M) = N$ si y solo si $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.

***Demostración:***
$\Rightarrow$) Si $K \in R-Mod$ y $f \in Hom_R(M,K)$. El siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & K \\
N = \sigma(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f|_N"'] & \sigma(K) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

muestra que $f(N) \leq \sigma(K)$, entonces $\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N) | f \in Hom_R(M,K)\} \leq \sigma(K)$, por lo tanto $\alpha_N^M \preceq \sigma$.

Por otro lado, sea $g \in Hom_R(K,M)$, entonces del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "g"] & M \\
\sigma(K) \arrow[u, hook] \arrow[r, "g|_N"'] & \sigma(M) = N \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

muestra que $g(\sigma(K)) \leq \sigma(M) = N$, entonces $\sigma(K) \leq g^{-1}(N)$, lo que implica que $\sigma(K) \leq \omega_N^M(K) = \bigcap\{f^{-1}(N) \mid f \in Hom_R(K,M)\}$ y por tanto $\sigma \preceq \omega_N^M$.

$\Leftarrow$) Como $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$, entonces $\alpha_N^M(M) \leq \sigma(M) \leq \omega_N^M(M)$, así $\alpha_N^M(M) = N = \omega_N^M(M)$ por el **Lema 2.1.10**, lo que implica que $N \leq \sigma(M) \leq N$ y asi $\sigma(M) = N$. $\blacksquare$

**LEMA 2.1.12** Sea $\sigma \in R$-pr. Si $\sigma(E(S)) = \{0\}$ para cada $S \in R$-pr, entonces $\sigma = \underline{0}$.

***Demostración:***

Sea $M \in R$-Mod, por el **Teorema 1.9.7** se tiene que $\prod\limits_{S_\alpha \in R-simp} E(S_\alpha)$ es cogenerador de $R$-Mod, por tanto existe un monomorfismo:

$$f : M \longrightarrow (\prod_{S_\alpha \in R-simp} E(S_\alpha))^X, \text{ para algún conjunto } X.$$

Entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & (\prod\limits_{S_\alpha \in R-simp} E(S_\alpha))^X \\ \uparrow & & \uparrow \\ \sigma(M) & \xrightarrow{f|_{\sigma(M)}} & \sigma((\prod\limits_{S_\alpha \in R-simp} E(S_\alpha))^X) \end{array}$$

y el **Lema 2.1.6** (**i**) muestran que:

$f(\sigma(M)) \leq \sigma((\prod\limits_{S_\alpha \in R-simp} E(S_\alpha))^X) \leq (\prod\limits_{S_\alpha \in R-simp} \sigma(E(S_\alpha)))^X = \{0\}$, esto implica que $\sigma(M) \subseteq Nuc(f)$, luego por ser $f$ monomorfismo se tiene que $Nuc(f) = \{0\}$, lo que implica que $\sigma(M) = \{0\}$ y por tanto $\sigma = \underline{0}$. ■

**LEMA 2.1.13** Si $K \leq N \leq M$, donde $K$ y $N$ son submódulos totalmente invariantes de $M$, entonces:

*i)* $\alpha_K^M \preceq \alpha_N^M$.

*ii)* $\omega_K^M \preceq \omega_N^M$.

***Demostración:***
i) Sea $H \in R$-Mod, como $K \leq N$ entonces $f(K) \leq f(N)$ $\forall f \in Hom_R(M, H)$, por lo que $\alpha_K^M(H) \leq \alpha_N^M(H)$ y así se tiene que $\alpha_K^M \preceq \alpha_N^M$.

ii) Sea $H \in R$-Mod, al ser $K \leq N$ se tiene que $f^{-1}(K) \leq f^{-1}(N)$ para todo $f \in Hom_R(H, M)$, entonces $\omega_K^M(H) = \bigcap\{f^{-1}(K)|f \in Hom_R(H, M)\} \leq \omega_N^M(H) = \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(H, M)\}$, por lo tanto $\omega_K^M \preceq \omega_N^M$. ■

**TEOREMA 2.1.14** *$R$-pr es una gran retícula atómica y coatómica. El conjunto de átomos es:*

$$\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R - Simp\}.$$

Y el conjunto de coatomos es:

$$\{\omega_I^R \mid I \text{ es ideal máximo de } R\}.$$

***Demostración:***
Sea $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma \neq \underline{0}$, por el **Lema 2.1.12**, existe $S \in R$-simp con la propiedad de que $\sigma(E(S)) \neq \{0\}$. Al ser $S$ un submódulo esencial en $E(S)$, se tiene que $S$ es el único submódulo simple de $E(S)$, por lo que $f(S) \leq S$ $\forall f \in Hom_R(E(S), E(S))$, es decir que $S$ es submódulo totalmente invariante de $E(S)$. Por otro lado $\sigma(E(S)) \leq E(S)$ y $S \cap \sigma(E(S)) \neq \{0\}$ implica que $S \cap \sigma(E(S)) = S$ (por ser $S$ un submódulo esencial de $E(S)$), entonces $S \leq \sigma(E(S))$, así de acuerdo al **Lema 2.1.13** se tiene que $\alpha_S^{E(S)} \preceq \alpha_{\sigma(E(S))}^{E(S)}$ y por la **Proposición 2.1.11** se tiene que $\alpha_{\sigma(E(S))}^{E(S)} \preceq \sigma$.

Supongamos ahora que $\tau \in R$-pr es tal que $\tau \prec \alpha_S^{E(S)}$, entonces $\tau(E(S)) < \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S$, por lo que $\tau(E(S)) = \{0\}$. Por otro lado si $S' \in R$-simp, $S' \ncong S$, entonces $\tau(E(S')) \leq \alpha_S^{E(S)}(E(S')) = \{0\}$, entonces por el **Lema 2.1.12**, se tiene que $\tau = \underline{0}$ y esto muestra la primera parte del Teorema.

Para probar la segunda parte, sea $\sigma \in R$-pr tal que $\sigma \neq \underline{1}$, entonces $\sigma(R) \neq R$. Sea $I$ un ideal máximo de $R$ tal que $\sigma(R) \leq I$, se tiene por la **Proposición 2.1.11** y el **Lema 2.1.13** que $\sigma \preceq \omega_{\sigma(R)}^R \preceq \omega_I^R$ . Finalmente sea $\omega_I^R \prec \tau$, entonces $I = \omega_I^R(R) < \tau(R)$, lo que implica que $I < \tau(R)$ y como $I$ es ideal máximo de $R$ se tiene que $\tau(R) = R$, entonces por el **Corolario 2.1.7** se tiene que $\tau = \underline{1}$. ■

## 2.2. Prerradicales Idempotentes y Radicales.

En esta sección se presentan las definiciones de prerradicales idempotentes y radicales, así como algunos resultados sobre estos dos tipos de prerradicales.

**DEFINICIÓN 2.2.1** Para $\sigma \in R$-pr se definen las siguientes 4 clases de módulos:

i) $\mathbb{T}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = M\}$.

ii) $\mathbb{F}_\sigma = \{M \in R\text{-Mod} \mid \sigma(M) = \{0\}\}$.

iii) $\overline{\mathbb{T}}_\sigma = \{\sigma(M) \mid M \in R\text{-Mod}\}$.

iv) $\overline{\mathbb{F}}_\sigma = \{M/\sigma(M) \mid M \in R\text{-Mod}\}$.

La clase definida en i) es llamada *clase de pretorsión* respecto a $\sigma$ y la clase definida en ii) es llamada *clase libre de pretorsión* respecto a $\sigma$.

**DEFINICIÓN 2.2.2** Para $\sigma \in R$-pr decimos que:

1. $\sigma$ es *radical* si $(\sigma : \sigma) = \sigma$.

2. $\sigma$ es *idempotente* si $\sigma \cdot \sigma = \sigma$.

3. $\sigma$ es $t$-radical si es radical y su clase libre de pretorsión $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes.

**LEMA 2.2.3** Sea $\sigma \in R$-pr, entonces $\sigma$ es radical si y solo si $\sigma(M/\sigma(M)) = \{0\}$ para todo $M \in R$-Mod.

***Demostración:***
Sea $M \in R$-Mod, $(\sigma : \sigma)(M) = \sigma(M)$ si y solo si $\sigma(M/\sigma(M)) = (\sigma : \sigma)(M)/\sigma(M) = \sigma(M)/\sigma(M) = \{0\}$. ■

**COROLARIO 2.2.4** Sea $\sigma \in R$-pr, entonces $\sigma$ es radical si y solo si $\mathbb{F}_\sigma = \overline{\mathbb{F}}_\sigma$.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Sea $M/\sigma(M) \in \overline{\mathbb{F}}_\sigma$, como $\sigma$ es radical entonces por el **Lema 2.2.3** se tiene que $\sigma(M/\sigma(M)) = \{0\}$, lo que implica que $M/\sigma(M) \in \mathbb{F}_\sigma$ y por tanto $\overline{\mathbb{F}}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\sigma$.
Por otro lado si $M \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces $M/\sigma(M) = M$ (ya que $\sigma(M) = \{0\}$), lo que implica que $M \in \overline{\mathbb{F}}_\sigma$ (por la definición de $\overline{\mathbb{F}}_\sigma$), y así se tiene que $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \overline{\mathbb{F}}_\sigma$.

$$\therefore \mathbb{F}_\sigma = \overline{\mathbb{F}}_\sigma$$

$\Leftarrow$) Sea $M \in R$-Mod, $M/\sigma(M) \in \overline{\mathbb{F}}_\sigma$, como $\mathbb{F}_\sigma = \overline{\mathbb{F}}_\sigma$ entonces $\sigma(M/\sigma(M)) = \{0\}$ y por el **Lema 2.2.3** se concluye que $\sigma$ es radical. ■

**LEMA 2.2.5** Sean $M \in R$-Mod, $N \leq M$ y $\sigma \in R$-pr. Si $N \leq \sigma(M)$ entonces $\sigma(M)/N \leq \sigma(M/N)$.

***Demostración:***
El siguiente digrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & M/N \\ \sigma(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi|_{\sigma(M)}"'] & \sigma(M/N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

muestra que: $\pi(\sigma(M)) = \frac{\sigma(M)+N}{N} \leq \sigma(M/N)$, y como $N \leq \sigma(M)$, se tiene entonces que $\sigma(M) + N = \sigma(M)$, asi $\frac{\sigma(M)+N}{N} = \sigma(M)/N$ y por lo tanto $\sigma(M)/N \leq \sigma(M/N)$.■

**TEOREMA 2.2.6** Sean $M \in R$-Mod, $N \leq M$ y $\sigma \in R$-pr. Si $N \leq \sigma(M)$ y $\sigma$ es radical entonces $\sigma(M)/N = \sigma(M/N)$.

***Demostración:***
Por el **Lema 2.2.5** tenemos que $\sigma(M)/N \leq \sigma(M/N)$, así que solo hace falta mostrar que $\sigma(M/N) \leq \sigma(M)/N$.

Como $\sigma$ es radical, por el **Lema 2.2.3** se tiene que $\sigma(M/\sigma(M)) = \{0\}$, entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M/N \arrow[r, "\pi"] & M/\sigma(M) \\ \sigma(M/N) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi|_{\sigma(M)}"] & \sigma(M/\sigma(M)) = \{0\} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

muestra que $\pi(\sigma(M/N)) = \{0\}$, lo que implica que $\sigma(M/N) \leq Nuc(\pi) = \sigma(M)/N$, por lo tanto $\sigma(M)/N = \sigma(M/N)$.■

**TEOREMA 2.2.7** Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Si $\sigma$ y $\tau$ son radicales entonces $\sigma = \tau$ si y solo si $\mathbb{F}_\sigma = \mathbb{F}_\tau$.

***Demostración:***
$\Longrightarrow$) Si $\sigma = \tau$ y $M \in R$-Mod es tal que $M \in \mathbb{F}_\sigma$, entonces $\sigma(M) = \{0\} = \tau(M)$, lo que implica que $M \in \mathbb{F}_\tau$ y así $\mathbb{F}_\sigma \subseteq \mathbb{F}_\tau$, de forma análoga se tiene que $\mathbb{F}_\tau \subseteq \mathbb{F}_\sigma$ y por tanto $\mathbb{F}_\sigma = \mathbb{F}_\tau$.

$\Longleftarrow$) Sea $M \in R$-Mod, por el **Lema 2.2.3** se tiene que $\sigma(M/\sigma(M)) = \{0\}$, entonces $M/\sigma(M) \in \mathbb{F}_\sigma = \mathbb{F}_\tau$ lo que implica que $\tau(M/\sigma(M)) = \{0\}$, de esta forma el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] & M/\sigma(M) \\ \tau(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi|_{\tau(M)}"'] & \tau(M/\sigma(M)) = \{0\} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

muestra que $\pi(\tau(M)) = \frac{\tau(M)+\sigma(M)}{\sigma(M)} \leq \tau(M/\sigma(M)) = \{0\}$, asi $\frac{\tau(M)+\sigma(M)}{\sigma(M)} = \{0\}$, entonces $\tau(M) + \sigma(M) = \sigma(M)$ y por tanto $\tau(M) \leq \sigma(M)$. De forma análoga se tiene que $\sigma(M) \leq \tau(M)$, lo que implica que $\tau(M) = \sigma(M)$ y por lo tanto $\tau = \sigma$. ■

**PROPOSICIÓN 2.2.8** Sea $M \in R$-Mod. Entonces $\omega^M_{\{0\}}$ es radical.

***Demostración:***
Sea $K \in R$-Mod y sea

$$k + \omega^M_{\{0\}}(K) \in \omega^M_{\{0\}}(K/\omega^M_{\{0\}}(K)) = \bigcap\{Nuc(f) | f \in Hom_R(K/\omega^M_{\{0\}}(K), M)\}.$$

Supongamos que $k \notin \omega^M_{\{0\}}(K) = \bigcap\{Nuc(f) | f \in Hom_R(K, M)\}$, entonces existe $g \in Hom_R(K, M)$ tal que $g(k) \neq 0$.

Luego, consideremos el morfismo canónico $\pi : K \longrightarrow K/\omega^M_{\{0\}}(K)$.

Sea $\bar{g} \in Hom_R(K/\omega^M_{\{0\}}(K), M)$ tal que $g = \bar{g} \circ \pi$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"'] & K/\omega^M_{\{0\}}(K) \arrow[dl, "\bar{g}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Entonces $0 \neq g(k) = (\bar{g} \circ \pi)(k) = \bar{g}(\pi(k)) = \bar{g}(k + \omega^M_{\{0\}}(K)) = 0$ (pues $k + \omega^M_{\{0\}}(K) \in \omega^M_{\{0\}}(K/\omega^M_{\{0\}}(K))$), lo cual es una contradicción, por lo tanto $k \in \omega^M_{\{0\}}(K)$.

Entonces $\omega^M_{\{0\}}(K/\omega^M_{\{0\}}(K)) = \{0\}$ y por la **Proposición 2.2.3** se tiene que $\omega^M_{\{0\}}$ es radical. ■

**LEMA 2.2.9** Sea $\sigma \in R$-pr, entonces $\sigma$ es idempotente si y solo si $\mathbb{T}_\sigma = \overline{\mathbb{T}}_\sigma$.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Sea $M \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces $\sigma(M) = M$, lo que implica que $M \in \overline{\mathbb{T}}_\sigma$ (por la definición de $\overline{\mathbb{T}}_\sigma$) y así $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \overline{\mathbb{T}}_\sigma$.

Por otro lado, sea $\sigma(M) \in \overline{\mathbb{T}}_\sigma$, por ser $\sigma$ idempotente se tiene que $(\sigma \cdot \sigma)((M)) = \sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$, lo que implica que $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$ y así $\overline{\mathbb{T}}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\sigma$ y por tanto $\mathbb{T}_\sigma = \overline{\mathbb{T}}_\sigma$

$\Leftarrow$) Sea $M \in R$-Mod, entonces $\sigma(M) \in \overline{\mathbb{T}}_\sigma$, al ser $\mathbb{T}_\sigma = \overline{\mathbb{T}}_\sigma$, se tiene que $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$, asi $(\sigma \cdot \sigma)(M) = \sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$, entonces $(\sigma \cdot \sigma) = \sigma$ y por tanto $\sigma$ es idempotente. ■

**TEOREMA 2.2.10** Sean $\sigma$, $\tau \in R$-pr. Si $\tau$ y $\sigma$ son idempotentes entonces $\sigma = \tau$ si y solo si $\mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_\tau$.

***Demostración:***

$\Longrightarrow$) Si $\sigma = \tau$ y $M \in R$-Mod es tal que $M \in \mathbb{T}_\sigma$, entonces $\sigma(M) = M = \tau(M)$, lo que implica que $M \in \mathbb{T}_\tau$ y asi $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$, de forma análoga se tiene que $\mathbb{T}_\tau \subseteq \mathbb{T}_\sigma$ y por tanto $\mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_\tau$.

$\Longleftarrow$) Sea $M \in R$-Mod, entonces por ser $\sigma$ idempotente se tiene que $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$, lo que implica que $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma = \mathbb{T}_\tau$ y así:

$$\tau(\sigma(M)) = \sigma(M) \qquad (1)$$

.

Por otro lado el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\sigma(M) \arrow[r, hook, "\iota"] & M \\
\tau(\sigma(M)) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\iota|_{\tau(\sigma(M))}"'] & \tau(M) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

muestra que $\iota(\tau(\sigma(M))) = \tau(\sigma(M)) \leq \tau(M)$ y por (1) se tiene que $\sigma(M) \leq \tau(M)$. De forma análoga se tiene que $\tau(M) \leq \sigma(M)$, lo que implica que $\sigma(M) = \tau(M)$ y por tanto $\sigma = \tau$. ■

**PROPOSICIÓN 2.2.11** Sean $\sigma$, $\eta \in R$-pr. Si $\sigma$ es idempotente entonces $\sigma = \sigma(\sigma : \eta)$.

***Demostración:***

Sea $M \in R$-Mod, por un lado se tiene que $(\sigma : \eta)(M) \leq M$, lo que implica que $\sigma((\sigma : \eta)(M)) = (\sigma(\sigma : \eta))(M) \leq \sigma(M)$ y así $\sigma(\sigma : \eta) \preceq \sigma$.

Por otro lado, por el **Lema 2.1.5** se tiene que $\sigma(M) \leq \sigma(M) + \eta(M) \leq (\sigma : \eta)(M)$, lo que implica que $\sigma(M) \leq (\sigma : \eta)(M)$, luego por ser $\sigma$ idempotente se tiene que $(\sigma \cdot \sigma)(M) = \sigma(M) \leq \sigma((\sigma : \eta)(M)) = (\sigma(\sigma : \eta))(M)$, entonces $\sigma(M) \leq (\sigma(\sigma : \eta))(M)$, lo que implica que $\sigma \preceq \sigma(\sigma : \eta)$ y por tanto $\sigma = \sigma(\sigma : \eta)$. ■

**LEMA 2.2.12** Sean $\sigma \in R$-pr y $M \in R$-Mod, entonces $\sigma(R)M \leq \sigma(M)$.

***Demostración:***

Considerese el morfismo $\varphi : R^{(M)} \to M$, definido por $\varphi((r_m)_{m\in M}) = \sum\limits_{m \in M} r_m m$, el cual induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
R^{(M)} \arrow[r, "\varphi"] & M \\
\sigma(R^{(M)}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_{\sigma(R^{(M)})}"'] & \sigma(M) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Luego, por el **Lema 2.1.6 (ii)** se tiene que $\sigma(R^{(M)}) = \sigma(R)^{(M)}$, entonces $\varphi(\sigma(R^{(M)})) = \varphi(\sigma(R)^{(M)}) = \{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i m_i \mid a_i \in \sigma(R) \quad y \quad m_i \in M\} = \sigma(R)M$ y como $\varphi(\sigma(R^{(M)})) \leq \sigma(M)$ (por el diagrama conmutativo), se concluye que $\sigma(R)M \leq \sigma(M)$. ■

**TEOREMA 2.2.13** Sea $\sigma \in R$-pr. $\sigma$ es $t$-radical, si y solo si $\sigma(M) = \sigma(R)M$ para todo $M \in R$-Mod.

***Demostración:***

$\Rightarrow$) Sea $M \in R$-Mod, como $\sigma$ es $t$-radical entonces $\sigma$ es radical y por el **Lema 2.2.3** se tiene que $\sigma(R/\sigma(R)) = \{0\}$.

Por otro lado, por el **Lema 2.2.12** se tiene que $\sigma(R)M \leq \sigma(M) \leq M$, entonces podemos hacer el cociente $M/\sigma(R)M$ y es tal que $\sigma(R)(M/\sigma(R)M) = \{0\}$, lo cual implica por el **Teorema 1.4.1** que $M/\sigma(R)M$ es un $R/\sigma(R)$-Módulo . Luego, por el **Teorema 1.6.9** se tiene que $M/\sigma(R)M$ es cociente de algún $R/\sigma(R)$-Módulo libre $(R/\sigma(R))^{(I)}$, sea $K \leq (R/\sigma(R))^{(I)}$ tal que $M/\sigma(R)M \cong (R/\sigma(R))^{(I)}/K$.

Luego, por el **Lema 2.1.6 (ii)** se tiene que $\sigma((R/\sigma(R))^{(I)}) = (\sigma(R/\sigma(R)))^{(I)} = \{0\}^{(I)} = \{0\}$, lo que implica que $(R/\sigma(R))^{(I)} \in \mathbb{F}_\sigma$ y como $\sigma$ es $t$-radical se tiene que $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes, entonces $(R/\sigma(R))^{(I)}/K \in \mathbb{F}_\sigma$ de donde se tiene que $M/\sigma(R)M \in \mathbb{F}_\sigma$, así $\sigma(M/\sigma(R)M) = \{0\}$; además por el **Lema 2.2.12** se tiene que $\sigma(R)M \leq \sigma(M)$, entonces como $\sigma$ es radical por el **Teorema 2.2.6** se tiene que $\{0\} = \sigma(M/\sigma(R)M) = \sigma(M)/\sigma(R)M$, lo que implica que $\sigma(M) = \sigma(R)M$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\sigma(M) = \sigma(R)M$ para todo $M \in R$-Mod, entonces $\sigma$ es radical ya que $\sigma(M/\sigma(M)) = \sigma(R)(M/\sigma(R)M) = \{0\}$.

Si $M \in \mathbb{F}_\sigma$ y $M/N$ es un cociente de $M$ entonces $\sigma(M/N) = \sigma(R)(M/N) = \{0\}$, por lo tanto $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo cocientes y por lo tanto $\sigma$ es $t$-radical. ■

**PROPOSICIÓN 2.2.14** Sea $I$ un ideal bilateral de $R$ y $\alpha_I^R \in R$-pr, entonces $\alpha_I^R$ es $t$-radical.

***Demostración:***

**1.** $\mathbb{F}_{\alpha_I^R}$ **es una clase cerrada bajo cocientes.** Sean $M \in \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, $K$ un submódulo de $M$, $\pi : M \longrightarrow M/K$ el morfismo canónico y $f \in Hom_R(R, M/K)$. Luego, $R$ es un $R$-módulo libre y por el **Teorema 1.6.12** $R$ es proyectivo, entonces existe $\overline{f} \in Hom_R(R, M)$ tal que $\pi \circ \overline{f} = f$ y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/K \end{tikzcd}$$

induce el siguiente diagrama que resulta ser tambien conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \alpha_I^R(R) = I \arrow[dl, "\overline{f^*}"'] \arrow[d, "f^*"] \\ \alpha_I^R(M) \arrow[r, "\pi^*"] & \alpha_I^R(M/K) \end{tikzcd}$$

Donde $\overline{f^*}$ es la restricción de $\overline{f}$ a $I$, $\pi^*$ es la restricción de $\pi$ a $\alpha_I^R(M)$ y $f^*$ es la restricción de $f$ a $I$. Como $M \in \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, entonces $\alpha_I^R(M) = \{0\}$, lo que implica que $g(I) = \{0\}$ para todo $g \in Hom_R(R, M)$, entonces $\{0\} = \overline{f}(I) = \overline{f^*}(I)$, lo que implica que $f(I) = f^*(I) = (\pi^* \circ \overline{f^*})(I) = \pi^*(\overline{f^*}(I)) = \pi^*(\{0\}) = K$. Se tiene entonces que $f(I) = K$ para cualquier $f \in Hom_R(R, M/K)$, por lo cual $\alpha_I^R(M/K) = \sum\{f(I) \mid f \in Hom_R(R, M/K)\} = \{0\}$, entonces $M/K \in \mathbb{F}_{\alpha_I^R}$, lo que demuestra que $\mathbb{F}_{\alpha_I^R}$ es una clase cerrada bajo cocientes.

**2.** $\alpha_I^R$ **es radical.** Para demostrar que $\alpha_I^R$ es radical primero se demostrará que $\alpha_I^R(M) = IM$ para cualquier $M \in R$-Mod.

$\subseteq$) Sea $x \in \alpha_I^R(M)$, entonces existen $f_1, ..., f_n \in Hom_R(R, M)$ y $r_1, ..., r_n \in I$ tales que $x = f_1(r_1) + f_2(r_2) + ... + f_n(r_n) = r_1 f_1(1) + r_2 f_2(1) + ... + r_n f_n(1) \in IM$, por lo tanto $\alpha_I^R(M) \subseteq IM$.

$\supseteq$) Sea $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i m_i \in IM$ con $r_i \in I$, $m_i \in M$ y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $i$ sea $f_i \in Hom_R(R, M)$ definido por $f_i(1) = m_i$. Entonces $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i f_i(1) = \sum_{i=1}^{n} f_i(r_i) \in \alpha_I^R(M)$, por lo cual $IM \subseteq \alpha_I^R(M)$.

Entonces para cualquier $M \in R$-Mod se tiene que $\alpha_I^R(M/\alpha_I^R(M)) = \alpha_I^R(M/IM) = I(M/IM) = \{0\}$, lo que implica que $\alpha_I^R$ es radical. ■

**LEMA 2.2.15** Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces $\underline{\sigma} = \alpha_{\sigma(R)}^R$, donde $\underline{\sigma}$ es el mayor $t$-radical tal que $\underline{\sigma} \preceq \sigma$.

***Demostración:***
Por la **Proposición 2.1.11** se tiene que $\alpha_{\sigma(R)}^R \preceq \sigma$.

Por la **Proposición 2.2.14** se tiene que $\alpha_{\sigma(R)}^R$ es $t$-radical.

Ahora sea $\tau \in R$-pr $t$-radical tal que $\tau \preceq \sigma$, entonces $\tau(R) \leq \sigma(R)$. Como $\alpha_{\sigma(R)}^R$ es $t$-radical entonces por el **Teorema 2.2.13** se tiene para todo $M \in R$-Mod que $\tau(M) = \tau(R)M \leq \sigma(R)M = \alpha_{\sigma(R)}^R(R)M = \alpha_{\sigma(R)}^R(M)$, por lo tanto $\tau \preceq \alpha_{\sigma(R)}^R$, para todo $\tau \in R$-pr $t$-radical tal que $\tau \preceq \sigma$. ■

En el siguiente teorema se muestran algunas de las propiedades en las que se relacionan las 4 operaciones de $R$-pr.

**TEOREMA 2.2.16** Sean $\sigma, \tau, \eta \in R$-pr, $\{\sigma_\alpha\}_\alpha \subseteq R$-pr y $M \in R$-Mod. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. (a) (Ley Modular) $\sigma \preceq \tau \Rightarrow \sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \eta)$ para todo $\eta \in R$-pr.
(b) Si $\{\sigma_\alpha\}_\alpha$ es una familia dirigida, entonces $\tau \wedge (\vee_\alpha \sigma_\alpha) = \vee_\alpha(\tau \wedge \sigma_\alpha)$.

2. (a) $(\wedge_\alpha \sigma_\alpha)\tau = \wedge_\alpha(\sigma_\alpha \tau)$.
$(b)$ $(\vee_\alpha \sigma_\alpha)\tau = \vee_\alpha(\sigma_\alpha)\tau$.
$(c)$ $(\tau : \wedge_\alpha \sigma_\alpha) = \wedge_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)$.

($d$) $(\tau : \vee_\alpha \sigma_\alpha) = \vee_\alpha(\tau : \sigma_\alpha)$.

3. (a) $(\tau : \eta)\sigma \preceq (\tau\sigma : \eta\sigma)$; $\sigma$ es radical si y solo si $(\tau : \eta)\sigma = (\tau\sigma : \eta\sigma)$ para todo $\tau$ y $\eta$.

(b) $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) \preceq (\sigma : \tau\eta)$; $\sigma$ es idempotente si y solo si $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) = (\sigma : \tau\eta)$ para todo $\tau$ y $\eta$.

***Demostración:***

1. (a) Sea $M \in R$-Mod, entonces $\sigma(M), \tau(M)$ y $\eta(M)$ son submódulos de $M \in R$-Mod. Además como $\sigma \preceq \tau$, se tiene que $\sigma(M) \leq \tau(M)$. Por el **Teorema 1.3.1** se tiene que:

$\sigma(M) + (\tau(M) \cap \eta(M)) = \tau(M) \cap (\sigma(M) + \eta(M))$ y por tanto $\sigma \vee (\tau \wedge \eta) = \tau \wedge (\sigma \vee \eta)$.

(b) Sea $M \in R$-Mod, entonces:

$(\tau \wedge (\vee_\alpha \sigma_\alpha))(M) = \tau(M) \cap (\Sigma_\alpha \sigma_\alpha(M)) = \Sigma_\alpha(\tau(M) \cap \sigma_\alpha(M)) = (\vee_\alpha(\tau \wedge \sigma_\alpha))(M)$, y por lo tanto $\tau \wedge (\vee_\alpha \sigma_\alpha) = \vee_\alpha(\tau \wedge \sigma_\alpha)$.

2. (a) Sea $M \in R$-Mod, entonces:

$(\wedge_\alpha(\sigma_\alpha \tau))(M) = \cap_\alpha \sigma_\alpha(\tau(M)) = (\wedge_\alpha \sigma_\alpha)\tau(M) = ((\wedge_\alpha \sigma_\alpha)\tau)(M)$, por lo tanto $(\wedge_\alpha \sigma_\alpha)\tau = \wedge_\alpha(\sigma_\alpha \tau)$.

(b) Sea $M \in R$-Mod, entonces:

$(\vee_\alpha(\sigma_\alpha \tau))(M) = \Sigma_\alpha \sigma_\alpha(\tau(M)) = (\vee_\alpha \sigma_\alpha)\tau(M) = ((\vee_\alpha \sigma_\alpha)\tau)(M)$, por lo tanto $(\vee_\alpha \sigma_\alpha)\tau = \vee_\alpha(\sigma_\alpha \tau)$.

(c) Sea $M \in R$-Mod, entonces:

$(\tau : \wedge_\alpha \sigma_\alpha)(M)/\tau(M) = (\wedge_\alpha \sigma_\alpha)(M/\tau(M)) = \cap_\alpha \sigma_\alpha(M/\tau(M)) =$
$= \cap_\alpha((\tau : \sigma_\alpha)(M)/\tau(M)) = (\wedge_\alpha(\tau : \sigma_\alpha))(M)/\tau(M)$, lo que implica que:
$(\tau : \wedge_\alpha \sigma_\alpha)(M) = (\wedge_\alpha(\tau : \sigma_\alpha))(M)$ y por tanto $(\tau : \wedge_\alpha \sigma_\alpha) = (\wedge_\alpha(\tau : \sigma_\alpha))$.

(d) Sea $M \in R$-Mod, entonces:

$(\tau : \vee_\alpha \sigma_\alpha)(M)/\tau(M) = (\vee_\alpha \sigma_\alpha)(M/\tau(M)) = \Sigma_\alpha \sigma_\alpha(M/\tau(M)) =$
$= \Sigma_\alpha((\tau : \sigma_\alpha)(M)/\tau(M)) = (\vee_\alpha(\tau : \sigma_\alpha))(M)/\tau(M)$, lo que implica que:
$(\tau : \vee_\alpha \sigma_\alpha)(M) = (\vee_\alpha(\tau : \sigma_\alpha))(M)$ y por tanto $(\tau : \vee_\alpha \sigma_\alpha) = (\vee_\alpha(\tau : \sigma_\alpha))$.

3. (a) Sea $M \in R$-Mod, entonces $((\tau : \eta)\sigma)(M)/\tau\sigma(M) = \eta(\sigma(M)/\tau\sigma(M))$. Por otro lado $\tau\sigma(M) \leq \sigma(M)$ entonces por el **Lema 2.2.5** se tiene que $\sigma(M)/\tau\sigma(M) \leq \sigma(M/\tau\sigma(M))$, asi $\eta(\sigma(M)/\tau\sigma(M)) \leq \eta(\sigma(M/\tau\sigma(M)))$, lo que implica que:

$((\tau : \eta)\sigma)(M)/\tau\sigma(M) = \eta(\sigma(M)/\tau\sigma(M)) \leq \eta(\sigma(M/\tau\sigma(M))) = \eta\sigma(M/\tau\sigma(M)) = (\tau\sigma : \eta\sigma)(M)/\tau\sigma(M)$, por el Teorema de la correspondencia se tiene que: $((\tau : \eta)\sigma)(M) \leq (\tau\sigma : \eta\sigma)(M)$ y por lo tanto $(\tau : \eta)\sigma \preceq (\tau\sigma : \eta\sigma)$.

Para la segunda parte, si $\sigma$ es radical y además $\tau\sigma(M) \leq \sigma(M)$, por el **Teorema 2.2.6** se tiene que $\sigma(M)/\tau\sigma(M) = \sigma(M/\tau\sigma(M))$, lo que implica que:
$((\tau : \eta)\sigma)(M)/\tau\sigma(M) = \eta(\sigma(M)/\tau\sigma(M)) = \eta(\sigma(M/\tau\sigma(M))) =$
$= (\tau\sigma : \eta\sigma)(M)/\tau\sigma(M)$, asi $((\tau : \eta)\sigma)(M) = (\tau\sigma : \eta\sigma)(M)$ y por tanto $(\tau : \eta)\sigma = (\tau\sigma : \eta\sigma)$.

Por otro lado si tenemos que $(\tau : \eta)\sigma = (\tau\sigma : \eta\sigma)$ para todo $\tau$ y $\eta$, haciendo $\tau = \eta = 1$, se tiene que $(1 : 1)\sigma = (1\sigma : 1\sigma)$, es decir que $\sigma = (\sigma : \sigma)$ y por tanto $\sigma$ es radical.

(b) Sea $M \in R$-Mod, como $\sigma((\sigma : \eta)(M)) \leq (\sigma : \eta)(M)$ se tiene el morfismo canónico $\pi : (\sigma : \eta)(M)/\sigma((\sigma : \eta)(M)) \longrightarrow (\sigma : \eta)(M)/\sigma(M)$, y el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\sigma : \eta)(M)/\sigma((\sigma : \eta)(M)) \arrow[r, "\pi"] & (\sigma : \eta)(M)/\sigma(M) \\
\tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma((\sigma : \eta)(M))) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi|_{\tau((\sigma:\eta)(M)/\sigma((\sigma:\eta)(M)))}"'] & \tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma(M)) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

muestra que $\tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma((\sigma : \eta)(M))) \twoheadrightarrow \tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma(M))$, entonces $((\sigma : \tau)(\sigma : \eta)(M))/\sigma((\sigma : \eta)(M)) = \tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma((\sigma : \eta)(M))) \twoheadrightarrow \tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma(M)) = \tau\eta(M/\sigma(M)) = (\sigma : \tau\eta)(M)/\sigma(M)$. Esto implica que $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta)(M) \leq (\sigma : \tau\eta)(M)$ y por tanto $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) \preceq (\sigma : \tau\eta)$.

Para la segunda parte, si $\sigma$ es idempotente entonces por la **Proposición 2.2.11** se tiene que $\sigma = \sigma(\sigma : \tau)$, lo que implica que $\tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma((\sigma : \eta)(M))) = \tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma(M))$, entonces $((\sigma : \tau)(\sigma : \eta)(M))/\sigma((\sigma : \eta)(M)) = \tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma((\sigma : \eta)(M))) = \tau((\sigma : \eta)(M)/\sigma(M)) = \tau\eta(M/\sigma(M)) = (\sigma : \tau\eta)(M)/\sigma(M)$. Por lo que $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) = (\sigma : \tau\eta)$ para todo $\tau$ y $\eta$ en $R - pr$. Recíprocamente, si $(\sigma : \tau)(\sigma : \eta) = (\sigma : \tau\eta)$ para todo $\tau$ y $\eta$ en $R - pr$ haciendo $\tau = \eta = 1$, se tiene que $(\sigma : 1)(\sigma : 1) = (\sigma : 1)$, lo que implica que $\sigma \cdot \sigma = \sigma$. ■

## 2.3. Caracterizaciones de Anillos.

El propósito de esta sección es dar caracterizaciones de algunos anillos $R$ en términos de propiedades de la retícula $R$-pr.

**TEOREMA 2.3.1** Para un anillo $R$ son equivalentes las siguientes condiciones:

1) $R$ es un anillo Artiniano simple.

2) $\alpha^M_{\{0\}} = \omega^M_{\{0\}}$ para cada $\{0\} \neq M \in R$-Mod.

3) $\alpha^M_N = \omega^M_N$ para cada $\{0\} \neq M \in R$-Mod y para cada submódulo $N$ de $M$ totalmente invariante.

4) $\alpha^M_M = \omega^M_M$ para cada $\{0\} \neq M \in R$-Mod.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (3)
Sea $\{0\} \neq M \in R$-Mod. Como $R$ es Artinano y simple, entonces por **Corolario 1.10.12** $R$ es semisimple, entonces $R$ es simple y semisimple, se tiene por la **Proposición 1.9.12** que todos los $R$-Módulos simples son isomorfos. Luego, por ser $R$ semisimple se tiene por el **Teorema 1.9.13** que todo $R$-módulo es semisimple, entonces $M$ es semisimple, así $M = S^{(I)}$, con $R$-simp= $\{S\}$.

Sea $N$ un submódulo totalmente invariante de $M$, entonces $N = \{0\}$ ó $N = M$.

Si $N = M$, entonces para cada $K \in R$-Mod se tiene que

$$\alpha^M_M(K) = \sum\{f(M) \mid f \in Hom_R(M,K)\} = K$$

y

$$\omega^M_M(K) = \bigcap\{f^{-1}(M) \mid f \in Hom_R(K,M)\} = K.$$

Si $N = \{0\}$, entonces para cada $K \in R$-Mod se tiene que

$$\alpha^M_{\{0\}}(K) = \sum\{f(0) \mid f \in Hom_R(M,K)\} = \{0\}.$$

Luego, por el **Teorema 1.9.13** se tiene que todo $R$-Módulo es inyectivo, entonces $S$ es inyectivo, así $E(S) = S$ y se sigue por el **Teorema 1.8.9** que $S$ es cogenerador de $R$-Mod, pero $M = S^{(I)}$, entonces $M$ es cogenerador de $R$-Mod, lo que implica que

$$\omega^M_{\{0\}}(K) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom_R(K,M)\} = \{0\}.$$

Por lo tanto $\alpha^M_N = \omega^M_N$.

(3) $\Rightarrow$ (2)
Es claro ya que $\{0\}$ es un submódulo totalmente invariante de $M$.

(3) $\Rightarrow$ (4)
Es claro ya que $M$ es un submódulo totalmente invariante de $M$.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Como $\alpha^M_{\{0\}} = \{0\}$, entonces $\omega^M_{\{0\}} = \{0\}$. Lo que implica que todo $K \in R$-Mod se encaja en un producto de copias de $M$, por tanto todo módulo $M$ es cogenerador de $R$-Mod.

Sean $S$, $T \in R$-simp, entonces $\omega^S_{\{0\}}(T) = \{Nuc(f) \mid f \in Hom_R(T, S)\} = \{0\}$, lo que implica que existe $g \in Hom_R(T, S)$ con $g \neq 0$ tal que $Nuc(g) = \{0\}$, así $g$ es un isomorfismo. Por lo tanto todos los $R$-módulos simples son isomorfos. Entonces $R$-simp= $\{S\}$ y se tiene que $S^{(I)}$ es un cogenerador para $R$-Mod para todo conjunto $I \neq \emptyset$, lo que implica por el **Teorema 1.11.8** que $R$ es $V$-anillo, así el único módulo simple $S$ de $R$-simp es inyectivo.

Luego, como $R \in R$-Mod es cogenerador para $R$-Mod se tiene que $\omega^R_{\{0\}}(S) = \cap\{Nuc(f) \mid f \in Hom_R(S, R)\} = \{0\}$, lo que implica que existe $g \in Hom_R(S, R)$ con $g \neq 0$ tal que $Nuc(g) = \{0\}$

$$g : S \hookrightarrow R\,.$$

Consideremos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow S \overset{g}{\hookrightarrow} R \xrightarrow{\pi} R/S \longrightarrow 0\,.$$

Ya que $S$ es un módulo inyectivo, se sigue de la **Proposición 1.7.13** que la sucesión exacta corta se escinde y por el **Teorema 1.5.3** se tiene que $S$ es sumando directo de $R$ y como $R$ es libre, se tiene entonces que $S$ es sumando directo de un módulo libre, por el **Teorema 1.6.13** se tiene que $S$ es proyectivo, entonces $R$ es semisimple (por [10] p. 169, Teorema 20.7). Luego, por ser $R$ semisimple se tiene por el **Corolario 1.10.6** que $R$ es artiniano. Por otro lado, como $R$ es semisimple y tenemos además que todos los $R$-módulos simples son isomorfos, entonces por la **Proposición 1.9.12** se tiene que $R$ es simple. Por lo tanto $R$ es artiniano simple.

(4) $\Rightarrow$ (1)
Ya que $\omega^M_M = \underline{1}$ se tiene que $\alpha^M_M = \underline{1}$ para todo $\{0\} \neq M \in R$-Mod. Sea $M = S \in R - simp$, entonces $S$ es generador para $R$-Mod, lo que implica que $R$ es artiniano simple (por [1], p. 153, proposición 13.5). ■

**TEOREMA 2.3.2** Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo $R$:

1. $R$ es un anillo Artiniano semisimple.

2. $R$-pr es una retícula Boolena finita.

3. $R$-pr es una retícula Booleana.

4. $R$-pr es una gran retícula Booleana.

5. Para cada $\sigma \in R$-pr, $\sigma = \vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid \alpha_S^{E(S)} \preceq \sigma\}$.

6. $\underline{1} = \vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\}$.

7. Para cada $\sigma \in R$-pr, existe $\mathcal{A} \subset R - simp$ tal que $\sigma = zoc_{\mathcal{A}}$, donde $zoc_{\mathcal{A}} = \sum\{S \leq M \mid S \cong T \in \mathcal{A}\}$.

8. Para cada $\sigma \in R$-pr, $\sigma = \wedge\{\omega_I^R \mid I$ es ideal bilateral máximo de $R$, $\omega_I^R \succeq \sigma\}$.

9. $\underline{0} = \wedge\{\omega_I^R \mid I$ es ideal bilateral máximo de $R\}$.

**Demostración:**

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)
Son inmediatas estas implicaciones.

(1) $\Rightarrow$ (2)
Por hipótesis todo $M \in R$-Mod es semisimple, lo que implica que todo prerradical queda totalmente determinado por los valores en $R$-simp. Por lo tanto $R$-pr es una gran retícula isomorfa a la retícula de subconjuntos de $R$-simp, además por ser $R$ un anillo artiniano se sigue que $R$-simp es un conjunto finito. Por lo tanto $R$-pr es una retícula boolena finita.

(4) $\Rightarrow$ (5)
Se sigue de la **Proposición 1.12.10**.

(5) $\Rightarrow$ (6)
Es claro.

(6) $\Rightarrow$ (7)

Por hipótesis $\underline{1} = \vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\}$. Entonces $E(S') = \underline{1}(E(S')) = \vee\alpha_S^{E(S)}(E(S')) = S'$ para todo $S' \in R$-simp, así $\underline{1} = \vee\alpha_S^{E(S)} = \vee\alpha_S^S$. Si $\sigma \in R$-pr, se tiene que $\sigma \preceq \underline{1} = \vee\alpha_S^S$, lo que implica que $\sigma$ es un zoclo.

(7) $\Rightarrow$ (1)

Por hipótesis $\underline{1} = zoc_{R-simp}$, entonces $R = zoc_{R-simp}(R)$, lo que implica que $R$ es un anillo semisimple artiniano.

(2) $\Rightarrow$ (8)

Se sigue de la **Proposición 1.12.12**.

(8) $\Rightarrow$ (9)

Es claro.

(9) $\Rightarrow$ (1)

Por dualidad. ■

**COROLARIO 2.3.3** $R$ es un anillo semisimple Artiniano si y solo si $[\alpha_N^M, \omega_N^M]$ es una retícula Booleana finita para cada $M \in R$-Mod y cada submódulo totalmente invariante $N$ de $M$.

***Demostración:***

Se sigue de ($1 \Leftrightarrow 2$) del **Teorema 2.3.2**. ■

A continuación se presenta una notación que será de gran utilidad:

$C_0 = \bigoplus\{S \mid S \in R\text{-simp}\}$.

$C_1 = \bigoplus\{E(S) \mid S \in R\text{-simp}\}$.

$P_0 = \prod\{S \mid S \in R\text{-simp}\}$.

Nótese que, para cada $M \in R$-Mod, $\alpha_{C_0}^{C_0}(M)$ es el zoclo de $M$ y $\omega_{\{0\}}^{C_0}(M)$ es el radical de Jacobson de $M$.

**TEOREMA 2.3.4** Para un anillo $R$ son equivalentes:

1. $R$ es un anillo semisimple Artiniano.

2. $\alpha_I^R = \omega_I^R$ para todo ideal $I$ bilateral de $R$.

3. $\omega_J^R$ es un $t$-radical, donde $J = \omega_{\{0\}}^{C_0}(R)$ (i. e. $J$ es el radical de Jacobson de $R$).

4. $\omega_J^R = \omega_{\{0\}}^{P_0}$, donde $J = \omega_{\{0\}}^{C_0}(R)$.

5. $\omega_I^R = \omega_{\{0\}}^{S}$ para cada ideal bilateral máximo $I$ de $R$, donde $S$ es un módulo simple tal que $I = ann(S)$.

6. $\omega_I^R$ es un $t$-radical para cada ideal bilateral máximo $I$ de $R$.

***Demostración:***

(1) $\Rightarrow$ (2)
Por el **Teorema 2.3.2** tenemos que $R$-pr es una retícula complementada. Denotemos por $\sigma^c$ al complemento de $\sigma$ en $R$-pr, así $\sigma^c \vee \sigma = 1$ y $\sigma^c \wedge \sigma = 0$. Por un lado, $R = \sigma(R) \times \sigma^c(R)$ (como un producto directo de anillos) y $M = \sigma(M) \times \sigma^c(M)$ para cada $M \in R$-Mod. Por otro lado $M = \sigma(R)M \times \sigma^c(R)M$. Ahora, sea $x \in \sigma(M)$, entonces $x = a + b$, con $a \in \sigma(R)M$ y $b \in \sigma^c(R)M$. Como $\sigma^c(R)M \subseteq \sigma^c(M)$ (por el **Lema 2.2.12**), entonces $b = x - a \in \sigma(M) \cap \sigma^c(M) = \{0\}$. Por tanto $x = a \in \sigma(R)M$, tenemos entonces que $\sigma(M) \subseteq \sigma(R)M$. Entonces $\sigma(M) \leq \sigma(R)M$ y por lo tanto $\sigma(M) = \sigma(R)M$ para cada $M \in R$-Mod. Así:

$$\alpha_I^R(R)R = \alpha_I^R(R) = I = \omega_I^R(R) = \omega_I^R(R)R,$$

lo que implica que

$$\alpha_I^R(R) = \omega_I^R(R)$$

y por lo tanto

$$\omega_I^R(M) = \alpha_I^R(R)M = \omega_I^R(R)M = \omega_I^R(M).$$

(2) $\Rightarrow$ (6)
Por hipótesis $\alpha_I^R = \omega_I^R$ para todo ideal bilateral $I$ de $R$, y por la **Proposición 2.2.14** sabemos que $\alpha_I^R$ es $t$-radical, entonces $\omega_I^R$ es $t$-radical.

(6) $\Rightarrow$ (5)

Sea $I$ un ideal bilateral máximo de $R$ y $S \in R$-simp tal que $I = ann(S)$. Si $\omega_I^R$ es $t$-radical, se tiene por el **Teorema 2.2.13** que

$$\omega_I^R(M) = \omega_I^R(R)M = IM, \text{ para todo } M \in R\text{-Mod}.$$

Como $I = ann(S)$, entonces

$$\omega_I^R(S) = IS = \{0\},$$

y por la **Proposición 2.1.11** se tiene que

$$\omega_I^R \preceq \omega_{\{0\}}^S. \qquad (i)$$

Por otro lado, sea $K$ un ideal izquierdo máximo de $R$ tal que $I \leq K$. Entonces $R/K \in R$-simp.

Sean $a \in R$ y $(K : a) = \{r \in R \mid ra \in K\}$.

**Observación i)** $\displaystyle\bigcap_{a\in R}(K : a) = I.$

Sea $a \in R$. Si $a \in K$, entonces $ra \in K$ para toda $r \in R$ ya que $K$ es ideal izquierdo de $R$, así $(K : a) = R$ para toda $a \in K$. Por otro lado, si $a \notin K$, entonces $ra \in K$ si y solo si $r \in I$ ya que $I$ es un ideal bilateral máximo de $R$, lo que implica que $(K : a) = I$ para toda $a \notin K$. Por lo tanto $\displaystyle\bigcap_{a\in R}(K : a) = R \cap I = I$.

**Observación ii)** $R/K = S$.

Sea $K \neq K + a \in R/K$, entonces por la **Observación i)** se tiene que $I(a + K) = Ia + K = K$, lo que implica que $I(R/K) = K$, entonces $ann(R/K) = I$ y por tanto $R/K = S$.

**Observación iii)** $\omega_{\{0\}}^S(R) = I$.

Por la **Observación ii)** tenemos que $\omega_{\{0\}}^{R/K}(R) = \omega_{\{0\}}^S(R)$.

$\subseteq$) Sea $0 \neq f \in Hom_R(R, R/K)$, entonces $f(1) = a + K \neq K$. Si $r \in \omega_{\{0\}}^{R/K}(R)$, se tiene que $f(r) = rf(1) = K$, entonces $r(a + K) = ra + K = K$, lo que implica que $ra \in K$ y así $r \in (K : a)$ y como $0 \neq f \in Hom_R(R, R/K)$ fue arbitrario, se tiene que $r \in \displaystyle\bigcap_{a\in R}(K : a) = I$, por tanto $\omega_{\{0\}}^S(R) \subseteq I$.

$\supseteq$) Si $r \in I$, entonces $ra \in K$ para toda $a \in R$. Si $0 \neq f \in Hom_R(R, R/K)$, se tiene que $f(1) = a + K \neq K$. Entonces $f(r) = f(1) = rf(1) = r(a + K) = ra + K = K$, lo que implica que $r \in \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom_R(R, R/K)\} = \omega_{\{0\}}^{R/K}(R) = \omega_{\{0\}}^S(R)$, por lo cual $I \subseteq \omega_{\{0\}}^S(R)$ y por lo tanto $\omega_{\{0\}}^S(R) = I$.

De la **Observación iii)** se tiene que $\omega_{\{0\}}^{S}(R) = I$ y por la **Proposición 2.1.11** se tiene que

$$\omega_{\{0\}}^{S} \preceq \omega_{I}^{R}. \qquad (ii)$$

Por $(i)$ y $(ii)$ se tiene que $\omega_{\{0\}}^{S} = \omega_{I}^{R}$.

(5) $\Rightarrow$ (1)

Sea $I$ un ideal bilateral máximo de $R$, y $S$ un $R$-módulo simple tal que $I = ann(S)$. Probaremos que existe un $R$-módulo simple $S' \leq R$ tal que $S' \cong S$ y $S' \cap I = \{0\}$.

Por hipótesis $\omega_{\{0\}}^{S} = \omega_{I}^{R}$, entonces $\mathbb{F}_{\omega_{\{0\}}^{S}} = \mathbb{F}_{\omega_{I}^{R}}$. Como $S \in \mathbb{F}_{\omega_{\{0\}}^{S}}$, entonces $S \in \mathbb{F}_{\omega_{I}^{R}}$, lo que implica que

$$\omega_{I}^{R}(R) = \bigcap\{f^{-1} \mid f \in Hom_R(S, R)\} = \{0\},$$

se tiene así que existe $g \in Hom_R(S, R)$ tal que para $0 \neq x \in S$ se tiene que $g(x) \notin I$, entonces: $(\pi \circ g)(x) = \pi(g(x)) = g(x) + I \neq I$

$$S \xrightarrow{g} R \xrightarrow{\pi} R/I$$

por el **Lema 1.8.7** se tiene que $R/I$ es cogenerador de $S$, entonces existe un conjunto $X \neq \varnothing$ y un monomorfismo

$$\iota : \ S \hookrightarrow (R/I)^X \ ,$$

lo que implica que

$$\iota : \ S \hookrightarrow R/I \ .$$

Por otro lado, nótese que $R/I$ es un anillo simple. En efecto, si $J/I$ es un ideal bilateral de $R/I$, se tiene que $J$ es un ideal bilateral de $I$, tal que $I \subset J$, lo cual no es posible, ya que $I$ es un ideal bilateral máximo de $R$. Por lo tanto $R/I$ es un anillo simple y contiene a $S$ como ideal mínimo izquierdo y por [10] p. 171, Proposición 20.11 se tiene que $R/I = S^n$, lo que implica que es semisimple.

Ahora por la **Proposición 2.2.8** $\omega_{I}^{R}$ es radical, entonces $\omega_{I}^{R}(R/\omega_{I}^{R}(R)) = \omega_{I}^{R}(R/I) = \{0\}$, esto implica que existe $0 \neq f \in Hom_R(R/I, R)$ tal que $f(0) = I$, $Im(f) \subsetneq I$, como $R/I$ es semisimple, entonces $f(R/I) = Im(f)$ es semisimple e $Im(f) \cap I = \{0\}$, esto implica lo que queríamos. por ultimo, podemos aplicar este hecho a un ideal bilateral máximo que contenga a $\alpha_{C_0}^{C_0}(R)$ en caso de que se tratára de un ideal propio. Así tenemos que $\alpha_{C_0}^{C_0}(R) = R$, lo que equivale a 1).

(2) $\Rightarrow$ (3)

Sea $J = \omega_{\{0\}}^{C_0}(R)$. Por hipótesis $\alpha_{J}^{R} = \omega_{J}^{R}$ y por la **Proposición 2.2.14** se tiene que $\alpha_{J}^{R}$ es $t$-radical, lo que implica que $\omega_{I}^{R}$ es $t$-radical.

(3) $\Rightarrow$ (4)
Sea $J = \omega_{\{0\}}^{C_0}(R)$, es decir que $J$ es el radical de Jacobson de $R$.

1°) $\omega_J^R \preceq \omega_{\{0\}}^{P_0}$.
Como $\omega_J^R$ es $t$-radical, entonces por el **Teorema 2.2.13** se tiene para todo $M \in R$-Mod que

$$\omega_J^R(M) = \omega_J^R(R)M = JM. \qquad (i)$$

Por otro lado, sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$ la familia de todos los ideales izquierdos máximos de $R$, entonces para cada $S \in R-simp$ se tiene que $S = R/I_\alpha$ para algún $\alpha \in X$, y así

$$J = \bigcap_{\alpha\in X} I_\alpha, \qquad P_0 = \prod_{\alpha\in X} R/I_\alpha.$$

Por $(i)$ y por ser $J$ ideal bilateral de $R$ (Ver **Proposición 1.10.9**), se tiene que

$$\omega_J^R(P_0) = JP_0 = \left(\bigcap_{\alpha\in X} I_\alpha\right)\left(\prod_{\alpha\in X} R/I_\alpha\right) = \{0\}.$$

Por la **Proposición 2.1.11** se tiene que

$$\omega_J^R \preceq \omega_{\{0\}}^{P_0}.$$

2°) $\omega_{\{0\}}^{P_0} \preceq \omega_J^R$.
Consideremos de nuevo a la familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$ de todos los ideales izquierdos máximos de $R$, y sea $\varphi \in (R, \prod_{\alpha\in X} R/I_\alpha)$ dado por $r \mapsto (r+I_\alpha)_{\alpha\in X}$, entonces $Nuc(\varphi) = \bigcap_{\alpha\in X} I_\alpha = J$, lo cual implica que

$$\omega_{\{0\}}^{P_0}(R) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom_R(R, P_0)\} \subseteq J. \qquad (ii)$$

Por otro lado, si $a \in J$ y $0 \neq f \in Hom_R(R, \prod_{\alpha\in X} R/I_\alpha)$ entonces $f(1) = (r_\alpha + I_\alpha)_{\alpha\in X} \neq (I_\alpha)_{\alpha\in X}$. Por ser $J$ un ideal bilateral de $R$, se tiene que $f(a) = af(1) = a(r_\alpha + I_\alpha)_{\alpha\in X} = (ar_\alpha + I_\alpha)_{\alpha\in X} = (I_\alpha)_{\alpha\in X}$, como $f$ se tomo arbritrario en $Hom_R(R, \prod_{\alpha\in X} R/I_\alpha)$, entonces $a \in \bigcap\{Nuc(f \mid f \in Hom_R(R, \prod_{\alpha\in X} R/I_\alpha))\} = \omega_{\{0\}}^{P_0}(R)$, lo que implica que

$$J \subseteq \omega_{\{0\}}^{P_0}(R). \qquad (iii)$$

Por $(ii)$ y $(iii)$ se tiene que $\omega_{\{0\}}^{P_0}(R) = J$ y por la **Proposición 2.1.11** se tiene que

$$\omega_{\{0\}}^{P_0} \preceq \omega_J^R$$

.

De 1°) y 2°) se tiene que $\omega^{P_0}_{\{0\}} = \omega^R_J$.

(4) $\Rightarrow$ (5)

1°) Para cada ideal bilateral máximo $I$ de $R$, se tiene que

$$\omega^S_{\{0\}} \preceq \omega^R_I,$$

donde $S \in R - simp$ es tal que $I = ann(S)$.

En efecto, sea $0 \neq f \in Hom_R(R, S)$, entonces $f(1) \neq 0$, así $f(R) = Rf(1) = S$, lo que implica que $ann(Rf(1)) = ann(S) = I$, y así $I(Rf(1)) = \{0\}$. Luego, si $r \in I$, entonces $f(r) = rf(1) \in I(Rf(1)) = \{0\}$, se tiene así que $f(r) = 0$ lo que implica que $r \in Nuc(f)$, por lo cual $I \subseteq Nuc(f)$, como $f$ se tomo arbitrario en $Hom_R(R, S)$, se tiene que

$$I \subseteq \bigcap \{Nuc(f) \mid f \in Hom_R(R, S)\} = \omega^S_{\{0\}}(R). \qquad (i)$$

Por otro lado, si $r \in \omega^S_{\{0\}}(R)$, entonces $0 \neq f(r) = rf(1)$ para todo $f \in Hom_R(R, S)$. Ya que $f(1) \in Rf(1)$ y $ann(Rf(1)) = I$, entonces $r \in I$, lo que implica que

$$\omega^S_{\{0\}}(R) \subseteq I. \qquad (ii)$$

De $(i)$ y $(ii)$ se tiene que $\omega^S_{\{0\}}(R) = I$ y por la **Proposición 2.1.11** se tiene que

$$\omega^S_{\{0\}} \preceq \omega^R_I.$$

Supongamos que existe $S' \in R$-simp tal que

$$\omega^{S'}_{\{0\}} \prec \omega^R_{I'},$$

donde $I' = ann(S')$.

Por un lado, si considereamos el morfismo inclusión

$$\iota : S' \hookrightarrow P_0,$$

entonces $\omega^{P_0}_{\{0\}}(S') \subseteq Nuc(\iota) = \{0\}$, entonces

$$\omega^{P_0}_{\{0\}}(S') = \{0\} = \bigwedge_{S \in R-simp} \omega^S_{\{0\}}(S').$$

Por otro lado, sea $X$ el conjunto de todos los ideales bilaterales máximos de $R$, se tiene que $\omega^R_I(R) = I$ para todo $I \in X$ y $\left(\bigwedge_{I \in X} \omega^R_I\right)(R) = \bigcap_{I \in X} I = J$, entonces por la **Proposición 2.1.11** se tiene que

$$\bigwedge_{I \in X} \omega^R_I \preceq \omega^R_J,$$

lo que implica que $\left(\bigwedge_{I\in X}\omega_I^R\right)(S') \leq \omega_J^R(S') = \omega_{\{0\}}^{P_0}(S') = \{0\}$, entonces

$$\left(\bigwedge_{I\in X}\omega_I^R\right)(S') = \{0\}.$$

Como estamos suponiendo que $\omega_{\{0\}}^{S'} \prec \omega_{I'}^R$, entonces $\{0\} = \omega_{\{0\}}^{S'}(S') < \omega_I^R(S')$, se tiene entonces que $\omega_I^R(S') = S'$, y como acabamos de ver que $\left(\bigwedge_{I\in X}\omega_I^R\right)(S') = \{0\}$, entonces $\omega_I^R(S') = \{0\}$ para algún $I \in X$. Por la **Proposición 2.1.11** se tiene que

$$\omega_I^R \preceq \omega_{\{0\}}^{S'}.$$

Sea $S \in R$-simp tal que $ann(S) = I$, entonces por 1°) se tiene que

$$\omega_{\{0\}}^S \preceq \omega_I^R \preceq \omega_{\{0\}}^{S'},$$

lo que implica que

$$S' = \omega_{\{0\}}^S(S') \leq \omega_{\{0\}}^{S'}(S') = \{0\},$$

lo cual es una contradicción. Como la contradicción resulto de suponer que existía $S' \in R$-simp tal que $\omega_{\{0\}}^{S'} \prec \omega_{I'}^R$, con $I' = ann(S')$, se tiene entonces que $\omega_{\{0\}}^S = \omega_I^R$ para todo ideal bilateral máximo $I$ de $R$ con $ann(S) = I$. ■

**PROPOSICIÓN 2.3.5** *$R$ es un anillo Artiniano semisimple si y solo si $Z \in R$-pr es $t$-radical, donde $Z$ es el prerradical que asigna a cada módulo su parte singular.*

***Demostración:***

$\Rightarrow$)

Si $R$ es anillo Artiniano semisimple entonces no tiene ideales propios esenciales, así $Z(R) = \{0\}$, lo que implica que $Z = \underline{0}$ (por [2] pag. 52, prop. 1.10.2). Por lo tanto $Z$ es $t$-radical.

$\Leftarrow$)

Si $Z$ es $t$-radical entonces:

$a$) $Z(M) = Z(R)M$ para todo $M \in R$-Mod.

$b$) $Z$ radical implica que $R$ es no singular, es decir que $Z(R) = \{0\}$.
,

Tenemos entonces que para todo $S \in R$-simp, $Z(S) = Z(R)S = \{0\}S = \{0\}$, es decir que todos los elementos de $R$-simp son no singulares y por lo tanto proyectivos. Por lo tanto $R$ es artiniano semisimple. ■

El siguiente Lema nos será de mucha utilidad en la demostración del **Teorema 2.3.7**.

**LEMA 2.3.6** Sea $\tau \in R$-pr. Son equivalentes:

1) $\tau$ es exacto izquierdo.

2) Para todo $M \in R$-Mod y $N \leq M$ $\tau(N) = \tau(M) \cap N$.

3) $\tau$ es idempotente y $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo submódulos.

***Demostración:***

(1) ⇒ (2) Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$, sean $\iota \in Hom_R(N, M)$ la inclusión natural y $\pi \in Hom_R(M, M/N)$ el morfismo canónico. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis $\tau$ es exacto izquierdo, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "\iota"] & M \arrow[r, "\pi"] & M/N \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau(N) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\iota|_{\tau(N)}"] & \tau(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\pi|_{\tau(M)}"] & \tau(M/N) \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

donde $\tau(N) = Im(\iota|_{\tau(N)}) = Nuc(\pi|_{\tau(M)}) = \tau(M) \cap N$, lo que implica que

$$\tau(N) = \tau(M) \cap N.$$

(2) ⇒ (1) Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$, sean $\iota \in Hom_R(N, M)$ la inclusión natural y $\pi \in Hom_R(M, M/N)$ el morfismo canónico. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0.$$

Aplicando el prerradical $\tau$ a la sucesión exacta se tiene que $\iota|_{\tau(N)}$ es monomorfismo ya que $\iota$ lo es

$$0 \longrightarrow \tau(N) \overset{\iota|_{\tau(N)}}{\hookrightarrow} \tau(M) \xrightarrow{\pi|_{\tau(M)}} \tau(M/N),$$

además $Im(\iota|_{\tau(N)}) = \tau(N)$ y $Nuc(\pi|_{\tau(M)}) = \tau(M) \cap N$ y por hipótesis $\tau(N) = \tau(M) \cap N$, entonces $Im(\iota|_{\tau(N)} = Nuc(\pi|_{\tau(M)})$, por lo tanto $\tau$ es un fontor exacto izquierdo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $M \in R$-Mod, como $\tau(M) \leq M$, se tiene por hipótesis que

$$\tau(\tau(M)) = \tau(M) \cap \tau(M) = \tau(M),$$

lo cual implica que $\tau \cdot \tau = \tau$ y por tanto $\tau$ es idempotente.

Por otro lado, sea $\{0\} \neq N \in \mathbb{T}_\tau = \{M \in R\text{-Mod} \mid \tau(M) = M\}$ y sea $\{0\} \neq K \leq N$, por hipótesis se tiene que $\tau(K) = \tau(N) \cap K = N \cap K = K$, lo que implica que $K \in \mathbb{T}_\tau$ y por tanto $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo submódulos.

(3) $\Rightarrow$ (2) Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$, como $\tau(N) \leq \tau(M)$ y $\tau(N) \leq N$, se tiene que

$$\tau(N) \leq \tau(M) \cap N. \qquad (i)$$

Por otro lado, por hipótesis $\tau$ es idempotente, entonces $\tau(\tau(M)) = \tau(M)$, se tiene así que $\tau(M) \in \mathbb{T}_\tau = \{M \in R\text{-Mod} \mid \tau(M) = M\}$. Además $\tau(M) \cap N \leq \tau(M)$ y por hipótesis $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo submódulos, entonces $\tau(M) \cap N \in \mathbb{T}_\tau$, lo que implica que

$$\tau(\tau(M) \cap N) = \tau(M) \cap N. \qquad (ii)$$

Tenemos además que $\tau(M) \cap N \leq N$ y por $(ii)$ se tiene que

$$\tau(M) \cap N = \tau(\tau(M) \cap N) \leq \tau(N). \qquad (iii)$$

De $(i)$ y $(iii)$ se sigue que

$$\tau(M) \cap N = \tau(N). \blacksquare$$

**TEOREMA 2.3.7** Para un anillo $R$ son equivalentes:

1. $R$ es $V$-anillo.

2. Cada átomo en $R$-pr es idempotente.

3. Cada átomo en $R$-pr es exacto izquierdo.

4. Para cada $S \in R$-simp, $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$.

5. Para cada $\underline{0} \neq \sigma \in R$-pr, existe $S \in R$-pr tal que $\alpha_S^S \preceq \sigma$.

6. $\vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\}$ es idempotente.

7. $\vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\}$ es exacto izquierdo.

8. $\vee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\} = \alpha_{C_0}^{C_0}$.

9. $\alpha_{\{0\}}^{C_0} = \omega_{\{0\}}^{C_0}$.

***Demostración:***

(3) $\Rightarrow$ (2)
Se sigue del **Lema 2.3.6**.

(4) $\Rightarrow$ (3)
Sean $M \in R$-Mod, $N \leq M$ y $S \in R$-simp, entonces

$$\alpha_S^S(M)\cap N = (\sum\{f(S) \mid f \in Hom_R(S,M)\})\cap N = \sum\{f(S)\cap N \mid f \in Hom_R(S,M)\} =$$

$$= \sum\{f(S) \mid f \in Hom_R(S,N)\} = \alpha_S^S(N).$$

Por hipótesis $\alpha_S^S = \alpha_S^{E(S)}$, entonces $\alpha_S^{E(S)}(M) \cap N = \alpha_S^{E(S)}(N)$ y por el **Lema 2.3.6** se tiene que $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente para cada $S \in R$-simp.

(4) $\Rightarrow$ (5)
Sea $\underline{0} \neq \sigma \in R$-pr. Supongamos que para todo $S \in R$-simp se tiene que $\sigma \prec \alpha_S^S$. Por hipótesis $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$, entonces $\sigma \prec \alpha_S^{E(S)}$ para todo $S \in R$-simp, se tiene entonces que $\sigma(E(S)) < \alpha_S^{E(S}(E(S)) = S$, así $\sigma(E(S)) = \{0\}$ para todo $S \in R$-simp, por el **Lema 2.1.12** se tiene que $\sigma = \underline{0}$, lo cual es una contradicción ya que $\sigma \neq \underline{0}$. La contradicción resulto de suponer que para todo $S \in R$-simp se tiene que $\sigma \prec \alpha_S^S$, por lo tanto $\alpha_{S'}^{S'} \preceq \sigma$ para algún $S' \in R$-simp.

(4) $\Rightarrow$ (8)
Sea $M \in R$-Mod. Por hipótesis se tiene que para cada $S \in R$-simp que $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$, entonces:

$$\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\}(M) = \bigvee\{\alpha_S^S \mid S \in R\text{-simp}\}(M) =$$

$$= \sum\{\alpha_S^S(M) \mid S \in R\text{-simp}\} = zoc(M) = \alpha_{C_0}^{C_0}(M).$$

Por lo tanto $\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\} = \alpha_{C_0}^{C_0}$.

$(8) \Rightarrow (7)$
Sea $\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\} = \alpha_{C_0}^{C_0}$.

Sean $N \leq M \in R-Mod$ y la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0\ ,$$

la cual induce la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow \alpha_{C_0}^{C_0}(N) \xhookrightarrow{\alpha_{C_0}^{C_0}(\iota)} \alpha_{C_0}^{C_0}(M) \xrightarrow{\alpha_{C_0}^{C_0}(\pi)} \alpha_{C_0}^{C_0}(M/N)\ ,$$

la cual es una sucesión exacta, pues:

$$Nuc(\alpha_{C_0}^{C_0}(\pi)) = \alpha_{C_0}^{C_0}(M) \cap N = [\sum\{f(C_0) \mid f \in Hom_R(C_0, M)\}] \cap N =$$

$$= \sum\{f(C_0) \cap N \mid f \in Hom_R(C_0, M)\} =$$

$$= \sum\{f(C_0) \mid f \in Hom_R(C_0, N)\} = \alpha_{C_0}^{C_0}(N) = Im(\alpha_{C_0}^{C_0}(\iota)).$$

Además, $\alpha_{C_0}^{C_0}(\iota)$ es un monomorfismo ya que $\alpha_{C_0}^{C_0}(\iota) = \iota|_{\alpha_{C_0}^{C_0}(N)}$.

Por lo tanto $\alpha_{C_0}^{C_0} = \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} \mid S \in R\text{-simp}\}$ es exacto izquierdo.

$(7) \Rightarrow (6)$
Se sigue del **Lema 2.3.6**.

$(5) \Rightarrow (1)$
Sea $S \in R$-simp, entonces por ser $\alpha_S^{E(S}$ se tiene que $\alpha_S^{E(S} \neq \underline{0}$, por hipótesis existe $S' \in R$-simp tal que $\alpha_{S'}^{S'} \preceq \alpha_S^{E(S)}$, como $\alpha_{S'}^{S'}(S') = S'$, se tiene que $\alpha_S^{E(S)}(S') = \sum\{f(S) \mid f \in Hom_R(E(S), M)\} = S'$, lo que implica que $S' \cong S$, por lo que $\alpha_S^S \preceq \alpha_S^{E(S)}$, entonces $S = \alpha_S^S(S) \leq \alpha_S^{E(S)}(S)$, así $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$, lo que implica que existe $0 \neq f \in Hom_R(E(S), S)$ tal que $f(S) \neq \{0\}$ y por ser $S$ simple, entonces $f(S) = S$, además, si $Nuc(f) \neq \{0\}$, por ser $S$ submódulo esencial de $E(S)$ se tiene que $S \subseteq Nuc(f)$, lo que implica que $f(S) = \{0\}$, lo cual no es posible ya que $f(S) = S$, por lo tanto $Nuc(f) = \{0\}$ y así

$$E(S) \hookrightarrow S\ .$$

Se tiene entonces que $E(S) = S$ y por tanto $S$ es inyectivo, lo que implica que $R$ es $V$-anillo.

(1) $\Rightarrow$ (4)

Por hipótesis $R$ es $V$-anillo, entonces cada $S \in R$-simp es inyectivo, por lo que $S = E(S)$, lo que implica que $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$.

(6) $\Rightarrow$ (2)

Sea $S \in R$-simp, como $\alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S$, entonces

$$(\alpha_S^{E(S)} \cdot \alpha_S^{E(S)})(E(S)) = \alpha_S^{E(S)}(\alpha_S^{E(S)}(E(S))) = \alpha_S^{E(S)}(S)$$

1°) $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente si y solo si $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$.

Si $M \in R$-Mod, entonces $\alpha_S^{E(S)}(M) \leq M$, lo que implica que $\alpha_S^{E(S)}(\alpha_S^{E(S)}(E(S))) \leq \alpha_S^{E(S)}(M)$, por lo que

$$\alpha_S^{E(S)} \cdot \alpha_S^{E(S)} \preceq \alpha_S^{E(S)} \qquad (i)$$

Luego, si $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$, entonces $(\alpha_S^{E(S)} \cdot \alpha_S^{E(S)})(E(S)) = \alpha_S^{E(S)}(\alpha_S^{E(S)}(E(S))) = \alpha_S^{E(S)}(S) = S$, se sigue de la **Proposición 2.1.11** que

$$\alpha_S^{E(S)} \preceq \alpha_S^{E(S)} \cdot \alpha_S^{E(S)} \qquad (ii)$$

Se sigue de $(i)$ y $(ii)$ que $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente.

Recíprocamente, si $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente se tiene que

$$S = \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = \alpha_S^{E(S)}(\alpha_S^{E(S)}(E(S))) = \alpha_S^{E(S)}(S),$$

lo que implica que $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$.

Ahora, si $T \in R$-simp entonces $(\vee\alpha_S^{E(S)})(T) = \alpha_T^{E(T)}(T)$ y como $\vee\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente por hipótesis, se tiene que

$$T = \alpha_T^{E(T)}(E(T)) = \vee\alpha_S^{E(S)}(\vee\alpha_S^{E(S)}(E(T))) = (\vee\alpha_S^{E(S)})(T) = \alpha_T^{E(T)}(T),$$

se sigue de 1°) que $\alpha_T^{E(T)}$ es idempotente para cada $T \in R$-simp.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $S \in R$-simp. Por hipótesis $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente, entonces por 1°) de (6) $\Rightarrow$ (2) se tiene que $S = \alpha_S^{E(S)}(S) = \sum\{f(S) \mid f \in Hom_R(E(S), S)\}$, lo que implica que existe $0 \neq f \in Hom_R(E(S), S)$ tal que $f(S) \neq \{0\}$ y por ser $S$ simple, entonces $f(S) = S$, además, si $Nuc(f) \neq \{0\}$, por ser $S$ submódulo esencial de $E(S)$ se tiene que $S \subseteq Nuc(f)$, lo que implica que $f(S) = \{0\}$, lo cual no es posible ya que $f(S) = S$, por lo tanto $Nuc(f) = \{0\}$ y así

$$E(S) \hookrightarrow S\ .$$

Se tiene entonces que $E(S) = S$ y por tanto $S$ es inyectivo, lo que implica que $R$ es $V$-anillo.

(1) $\Rightarrow$ (9)

Sea $M \in R$-Mod. Por un lado se tiene que $\alpha_{\{0\}}^{C_0}(M) = \{0\}$. Por hipótesis $R$ es $V$-anillo, por el **Teorema 1.11.8** se tiene que $C_0$ es un cogenerador para $R$-Mod, entonces $\omega_{\{0\}}^{C_0}(M) = \{0\}$, por lo tanto $\alpha_{\{0\}}^{C_0} = \omega_{\{0\}}^{C_0}$.

(9) $\Rightarrow$ (1)

Por hipótesis $\alpha_{\{0\}}^{C_0} = \omega_{\{0\}}^{C_0}$, lo que implica que $\omega_{\{0\}}^{C_0} = \underline{0}$. Entonces para cada $M \in R$-Mod se tiene que $\omega_{\{0\}}^{C_0}(M) = \bigcap\{Nuc(f) \mid f \in Hom_R(M, C_0)\} = \{0\}$, lo que implica que $M$ se encaja en un producto de copias de $C_0$, por tanto $C_0$ es cogenerador de $R$-Mod y sigue del **Teorema 1.11.8** que $R$ es $V$-anillo.

**LEMA 2.3.8** Sean $M, N \in R - Mod$, tal que $N = N_1 \oplus N_2$ es un submódulo totalmente invariante de $M = M_1 \oplus M_2$. Entonces $N_i$ es un submódulo totalmente invariante de $M_i$ $(i = 1, 2)$ y

1. $\alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2} = \alpha_N^M$.

2. $\omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2} = \omega_N^M$.

***Demostración:***

Es claro que $N_i$ es un submódulo totalmente invariante de $M_i$ $(i = 1, 2)$. Sean $\rho_j : M \longrightarrow M_j$ las proyecciones naturales e $\iota_j : M_j \longrightarrow M$ las inclusiones naturales con $j = 1, 2$.

1) Sea $K \in R - Mod$ y $f_j : M_j \longrightarrow K$ $(j = 1, 2)$. Entonces $f = f_j \circ \rho_j : M \longrightarrow K$ y $f_j(N_j) = (f_j \circ \rho_j)(N) = f(N) \leq \alpha_N^M(K)$, así $\alpha_{N_j}^{M_j}(K) \leq \alpha_N^M(K)$. Entonces $\alpha_{N_j}^{M_j} \preceq \alpha_N^M$ $(j = 1, 2)$, lo que implica que $\alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2} \preceq \alpha_N^M$.

Por otro lado, si $f : M \longrightarrow K$, entonces $f_j = f \circ \iota_j : M_j \longrightarrow K$ y $f(N) = f(N_1 \oplus N_2) = f(N_1) + f(N_2) = f(\iota_1(N_1)) + f(\iota_2(N_2)) = f_1(N_1) + f_2(N_2) \leq \alpha_{N_1}^{M_1}(K) + \alpha_{N_2}^{M_2}(K) = (\alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2})(K)$. Entonces $\alpha_N^M(K) \leq (\alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2})(K)$, lo que implica que $\alpha_N^M \preceq \alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2}$.

Por lo tanto $\alpha_N^M = \alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2}$

2) Sea $K \in R-Mod$ y $f : K \longrightarrow M$. Entonces $f_j = \rho_j \circ f : K \longrightarrow M_j$ $(j = 1,2)$ y $(\omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2})(K) = \omega_{N_1}^{M_1}(K) \cap \omega_{N_2}^{M_2}(K) \leq f_1^{-1}(N_1) \cap f_2^{-1}(N_2) = f^{-1}(N_1 \oplus N_2) = f^{-1}(N)$. Por tanto $(\omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2})(K) \leq \omega_N^M$, lo que implica que $\omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2} \preceq \omega_N^M$.

Por otro lado, si $f_j : K \longrightarrow M_j$ $(j = 1,2)$ se tiene que $f = \iota_j \circ f_j : K \longrightarrow M$, entonces $\omega_N^M(K) \leq f^{-1}(N) = f_j^{-1}(N_j)$. Entonces $\omega_N^M(K) \leq \omega_{N_j}^{M_j}(K)$, así $\omega_N^M \preceq \omega_{N_j}^{M_j}$ $(j = 1,2)$, lo que implica que $\omega_N^M \preceq \omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2}$.

Por lo tanto $\omega_N^M = \omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2}$. ■

**TEOREMA 2.3.9** Para un anillo $R$ son equivalentes:

1. $R$ es producto directo de un número finito de anillos simples.

2. Cada coátomo en $R$-pr es radical.

3. Cada coátomo en $R$-pr es radical y hay un número finito de estos.

***Demostración:***

(3) $\Rightarrow$ (2)
Es claro.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Sea $I$ un ideal bilateral máximo de $R$, por el **Teorema 2.1.15** $\omega_I^R$ es coátomo y radical por hipótesis, entonces:

$$\omega_I^R(R/I) = \omega_I^R(R/\omega_I^R(R)) = \{0\}.$$

Sea $J_I = \alpha_{R/I}^{R/I}(R)$, entonces $J_I$ es un ideal de $R$ y $J_I \nleq I$. De lo contrario se tendría que $f(R/I) \leq J_I \leq I$ para todo $f \in Hom_R(R/I, R)$, lo que implica que $f(R/I) \leq I$ así $R/I \leq f^{-1}(I)$, por lo que $R/I \leq \omega_I^R(R/I) = \{0\}$, lo cual es una contradicción ya que $I$ es un ideal bilateral máximo de $R$.

Luego, como $I$ es un ideal bilateral máximo de $R$, se tiene que $I + J_I = R$.

Hay que observar que para cada $f : R/I \longrightarrow R$, se tiene que $If(R/I) = \{0\}$, lo que implica que $IJ_I = \{0\}$.

Ahora, consideremos el ideal $J = \sum\{J_I \mid I$ es ideal bilateral máximo de $R\}$, se afirma que $J = R$. Si no es este el caso, existe un ideal bilateral máximo $K$ tal que $J \leq K$, lo que implica que $J_k \leq J \leq K$ lo cual es una contradicción. Entonces $1 \in J$, sea $1 = \sum_{s=1}^{n} a_s$ para algunos $a_s \in J_{I_s}$ y alguna $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in \bigcap_{s=1}^{n} I_s$, entonces $x = \sum_{s=1}^{n} xa_s = 0$ ya que $I_s J_{I_s} = \{0\}$ para cada $s \in \{1, ..., n\}$ (por la observación antes hecha), se tiene que $\cap_{s=1}^{n} I_s\{0\}$ y por el **Teorema chino del residuo** se tiene que el morfismo natural de anillos $\varphi : R \longrightarrow \prod_{s=1}^{n} R/I_s$ es un isomorfismo.

$(1) \Rightarrow (3)$

Supongamos que $R = \prod_{s=1}^{n} R_s$ donde cada $R_s$ es un anillo simple. Sea $I_s = \{x \in R \mid x_s = 0\}$ y $K_s = \{x \in R \mid x_t = 0 \ \ \forall t \neq s\}$, entonces $R = I_s \oplus K_s$ y $I_s = I_s \oplus \{0\}$. Por el **Teorema 2.1.14** los coátomos de $R-pr$ son los prerradicales $\omega_{I_s}^{R}$ con $s = 1, 2, ..., n$, lo que implica que hay un número finito de coátomos; aplicando el **Lema 2.3.8** se tiene que $\omega_{I_s}^{R} = \omega_{I_s}^{I_s} \wedge \omega_{\{0\}}^{K_s} = 1 \wedge \omega_{\{0\}}^{K_s} = \omega_{\{0\}}^{K_s}$ de la **Proposición 2.2.8** se sigue que $\omega_{I_s}^{R}$ es radical. ■

# Bibliografía


[1] Anderson, F. W., Fuller K. R., Rings and categories of modules, Springer- Verlag, 1991.

[2] Bican, L.; Kepka, T.; Nemec, P. Rings, Modules and Preradicals; Marcel Dekker: New York, 1982.

[3] Birkhoff, Garret, Mac Lane, Saunders, Algebra, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, 1991.

[4] Cárdenas, H.; Lluis, E. Módulos semisimples y representaciones de grupos finitos, Trillas, 1970.

[5] Gentile, Enzo R., Estructuras algebraicas II, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Departamento de Asuntos Científicos, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1971.

[6] Raggi, Francisco; Ríos Montes, José; Rincón, Hugo; Fernández-Alonso, Rogelio; Signoret, Carlos. The lattice structure of preradicals, Communications in Algebra, Volumen 30, No. 3, pp. 1533-1544, 2002.

[7] Rotman, Joseph, J., An introduction to homological algebra, Springer, 2009.

[8] Rotman, Joseph, J., Advanced modern algebra, Prentice Hall, 2003.

[9] Stenström, B., Rings of quotients, Springer-Verlag, 1975.

[10] Wisbauer, R., Foundations of module and ring theory, Gordon and Breach Science Publishers, 1991.