



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

SINTONIZACIÓN DE UN CONTROLADOR DIFUSO  
PARA UN SISTEMA DE ÓPTICA ADAPTATIVA  
TIPO TIP-TILT CON PERTURBACIÓN  
ATMOSFÉRICA REAL

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
*INGENIERO ELÉCTRICO-ELECTRÓNICO*  
P R E S E N T A  
JOSÉ LEONARDO GARCÉS MEDINA

DIRECTOR DE TESIS  
M. I. RUBÉN A. FLORES MEZA



MÉXICO, D.F.

MAYO 2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CONTENIDO

Introducción .....	1
<i>Capítulo 1</i> Sistemas de Óptica Adaptativa. Caso de estudio: Instrumento LOLA .....	5
1.1.- Introducción.....	5
1.2.- El origen del problema: La turbulencia atmosférica.....	5
1.2.1.- Modelo de la turbulencia .....	6
1.2.2.- Los Modos de Zernike .....	7
1.2.3.- Perturbación de órdenes bajos ( <i>Tip-Tilt</i> ) .....	9
1.2.4.- Perturbación de órdenes altos .....	10
1.3.- La Óptica Adaptativa.....	10
1.3.1.- Corrección del frente de onda.....	11
1.3.2.- Corrección de órdenes bajos : <i>Tip-Tilt</i> y seguimiento de centroide.....	11
1.3.3.- Corrección de órdenes altos .....	12
1.3.4.- Evaluación de la corrección mediante la varianza residual de fase .....	12
1.3.5.- Espectro de potencia del movimiento del centroide .....	12
1.4.- El sistema de Óptica Adaptativa LOLA .....	13
1.4.1.- Consideraciones ópticas.....	15
1.4.2.- Componentes electro-mecánicos .....	16
1.4.3.- Componentes electrónicos .....	17
1.4.4.- Variación de la posición del centroide debido el espejo corrector .....	20
<i>Capítulo 2</i> Control Difuso .....	23
2.1.- Introducción.....	23
2.2.- Conceptos básicos.....	24
2.2.1.- Conjuntos difusos .....	24
2.2.2.- Operaciones básicas con conjuntos difusos .....	27
2.2.3.- Valores lingüísticos y Variable lingüística .....	30
2.2.4.- Razonamiento aproximado en lógica difusa .....	32
2.2.5.- Implicación difusa .....	33
2.3.- Estructura de un Control Difuso .....	34
2.3.1.- Normalización.....	35
2.3.2.- Fusificación .....	35
2.3.3.- Base de conocimiento .....	35
2.3.4.- Defusificación.....	37

2.3.5.- Representación .....	38
2.3.6.- Control difuso tipo PID .....	39
2.4 Sintonización de controladores difusos .....	39
Capítulo 3 Simulación del modelo dinámico del sistema.....	43
3.1 Introducción.....	43
3.2.- Modelo dinámico del sistema.....	44
3.2.1.- Descripción de cada bloque.....	46
3.3.- Verificación del modelo.....	52
3.4.- Datos reales de perturbación .....	53
Simulación continua con datos discretos.....	54
3.5.- Parámetros de simulación .....	54
Capítulo 4 Estructura y sintonización del Controlador difuso .....	55
4.1.- Introducción .....	55
4.2.- Definición de la estructura del controlador .....	56
4.2.1.- Modelo simplificado y lineal del sistema.....	56
4.2.2.- Controlador difuso tipo PID.....	59
4.2.3.- Controlador difuso a partir de un controlador lineal .....	60
4.2.4.- Integral de la salida del controlador .....	60
4.2.5.- Características del controlador .....	61
4.2.6.- Controlador difuso lineal.....	63
4.3.- Sintonización del controlador .....	65
4.3.1.- Parámetros de sintonización.....	66
4.3.2.- Parámetros de desempeño (o rendimiento) .....	66
4.4.- Procedimiento de sintonización del controlador difuso .....	67
4.4.1.- Aplicación del procedimiento de sintonización .....	72
Capítulo 5 Resultados .....	79
5.1.- Movimiento del centroide de la imagen vs movimiento corregido.....	80
5.2.- Determinación del espectro de potencia.....	82
5.3.- Varianza del movimiento del centroide .....	83
5.4.- Varianza de fase del frente de onda .....	84
Conclusiones y perspectivas.....	87
Conclusiones .....	87
Perspectivas .....	88

Bibliografía .....	90
Apéndices.....	93
Apéndice A. El entorno Simulink® de The Mathworks™ .....	93
<i>Solvers</i> en Simulink® .....	93
Apéndice B. Toolbox™ de lógica difusa.....	95
Apéndice C. Análisis del tipo de sistema.....	97
Apéndice D. Sintonización del control PID convencional.....	101
Método Ziegler-Nichols para sintonizar controladores PID lineales .....	101
Sintonización el controlador PID lineal utilizando el método CHR .....	103
Sintonización el controlador PID lineal utilizando Simulink® .....	104
Apéndice E. Esquema del controlador difuso con FAMs separadas. ....	108

# INTRODUCCIÓN

El estudio de los objetos astronómicos exige que las imágenes obtenidas por los telescopios sean cada vez más detalladas. En principio, esto se logra construyendo telescopios más grandes para mejorar la resolución espacial de éstas y por lo tanto mejorar su calidad, sin embargo, en los telescopios terrestres, la resolución está limitada por el movimiento turbulento y azaroso de los gases de la atmósfera que aberran la forma del frente de onda de la luz observada. Dicho de otra manera, la luz emitida por las estrellas, galaxias, nebulosas y demás objetos observables, esencialmente no se perturba en su largo viaje por el espacio exterior hacia las pupilas de los telescopios terrestres, sino hasta que atraviesan los gases que rodean la Tierra. Esto ha propiciado el desarrollo de tecnología para abatir esta limitación.

En fechas relativamente recientes, se ha desarrollado la técnica de Óptica Adaptativa (OA), con el propósito de corregir en tiempo real el frente de onda aberrado por un medio turbulento. Para lograrlo, se emplea un sistema de control que actúa sobre elementos ópticos que se deforman según el estado del frente de onda. Así, es posible obtener imágenes limitadas mayormente por las aberraciones de la óptica del telescopio, las cuales pueden ser corregidas mediante otra técnica llamada Óptica Activa, que trabaja en un régimen frecuencial menor que el de la OA.

Ciertamente, cuando se logran eliminar todas las aberraciones producidas por la atmósfera en el frente de onda de la luz, se obtienen imágenes equivalentes a las obtenidas por telescopios espaciales, pero sin el elevado costo y las dificultades técnicas de éstos. La técnica de OA se ha aplicado en Astronomía desde la década de 1980 por equipos multidisciplinarios de la mayoría de los observatorios del mundo y en fechas recientes continúa siendo un área de gran desarrollo. La relevancia de la técnica es tal que hoy en día no se diseñan telescopios de más de cuatro metros de diámetro sin contemplar instrumentos de OA [1].

La turbulencia atmosférica provoca cambios, principalmente, en la fase del frente de onda de la luz. De toda la aberración, aproximadamente el 87% corresponde a su inclinación [2], por lo que la corrección se realiza en dos etapas. La primera etapa tiene el mayor impacto y está dedicada a corregir únicamente la aberración en la inclinación, también conocida como aberraciones de órdenes bajos o modos *tip-tilt*. La segunda corrige los términos restantes, tales como desenfoque, astigmatismo, coma, etc., también conocidos como aberraciones de órdenes altos .

El establecimiento de la técnica de control del sistema de OA, define gran parte del desempeño total del sistema, porque éste debe ser capaz de responder a la entrada de perturbación aleatoria, producto del carácter aleatorio de la atmósfera terrestre, en el menor tiempo posible. Es por esto que la consideración de la dinámica de los componentes del sistema es preponderante en el diseño del sistema. Por otra parte, el procesamiento en tiempo real de la información del frente de onda para

generar los valores que actúan sobre los elementos ópticos móviles, provoca que el esfuerzo computacional sea considerable. Hasta hace algunos años, en el diseño de estos sistemas se consideraba la respuesta de los componentes como retrasos de tiempo puro y, en consecuencia, bastaría con aumentar la capacidad de cómputo para poder mejorar el desempeño del sistema. Esto ha empezado a cambiar y últimamente, cada vez son más los grupos que consideran el comportamiento dinámico de los actuadores y se han ocupado en plantear algoritmos de control adecuados [3], [4].

Con el propósito de iniciar con el desarrollo de instrumentos de Óptica Adaptativa, en el INSTITUTO DE ASTRONOMÍA (IA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) se creó un grupo especializado en el área, que tuvo como antecedente un estudio para realizar un instrumento de OA en el telescopio de 2.1 metros del Observatorio Astronómico Nacional (OAN) en San Pedro Mártir, Baja California [5]. Después, se realizó el diseño y construcción del *Low Order Little Aperture* (LOLA), un instrumento enfocado en corregir los términos de las aberraciones de órdenes bajos en el telescopio de 1 metro del OAN-Tonanzintla, Puebla, basado en un controlador PID [6]. A la par, se realizaron pruebas cambiando el algoritmo de control por un controlador difuso tipo PD, sintonizado para una entrada de perturbación escalón e implantado en un micro-controlador [7]. Los resultados en telescopio al aplicar ésta técnica de inteligencia artificial en un instrumento astronómico fueron alentadores, lo que dio pie a seguir desarrollando en este sentido. Más aún, el estado de arte indica que, aparte de LOLA, no existen desarrollos usando ambas técnicas, el control difuso y la OA, para aplicaciones astronómicas, aunque sí para otras aplicaciones similares como las comunicaciones LASER punto a punto [8].

Dentro de las perspectivas del trabajo de LOLA con el controlador difuso tipo PD, se planteó la posibilidad de mejorar el desempeño del sistema si se realizaban las adecuaciones necesarias a los parámetros del controlador. El control difuso es una técnica de control no lineal que permite trasladar el conocimiento experto, expresado en el lenguaje natural con reglas de la forma *SI-ENTONCES*, a una estrategia de control por medio de un algoritmo computacional [9], [10]. De las pruebas en el telescopio de 1 metro del OAN en Tonanzintla, Puebla, con LOLA y el controlador difuso se registraron datos de turbulencia atmosférica. Además, se cuenta con un modelo dinámico del instrumento mencionado en plataforma Simulink® de Matlab®.

El objetivo de este trabajo es plantear un método de sintonización de un controlador difuso, por medio de simulaciones del modelo dinámico del sistema, incluyendo los datos de turbulencia reales, para conseguir una sintonización adecuada del controlador. La aplicación del método aquí planteado en un instrumento de OA, implantado en una plataforma de hardware apropiada, servirá en la mejora de las imágenes obtenidas por un telescopio. Para lograr el objetivo, se evaluó el modelo dinámico de LOLA y se realizaron las adecuaciones necesarias para poder incluir la entrada de perturbación aleatoria. Por el esquema propio del instrumento, la simulación se realiza por medio del seguimiento del centroide de la intensidad de la imagen y se evalúa su rendimiento mediante la varianza residual de fase.

De manera general, el contenido de la tesis es el siguiente:

El Capítulo 1 está destinado a tratar lo relacionado a la Óptica Adaptativa y al Instrumento LOLA. Se comienza por describir brevemente a la turbulencia atmosférica, sus efectos, y cómo es que se modela. Después, se presentan los conceptos más importantes de la OA y la manera en que se realiza

la corrección para órdenes bajos y la forma en que se evalúa. Finalmente, se presenta el esquema general del sistema de Óptica Adaptativa LOLA y de sus componentes ópticos, electromecánicos y electrónicos.

Lo que respecta al control difuso se encuentra en el Capítulo 2. En éste, se presentan los conceptos más importantes de la Lógica Difusa en que se basa el Control Difuso. Se muestra la estructura de los controladores difusos, incluyendo la estructura PID, que es la más empleada. Además, se mencionan las maneras más comunes en que se realiza la sintonización de estos controladores.

En el Capítulo 3 se describe el modelo dinámico del sistema en el software Simulink® y se muestra a detalle cada uno de sus bloques. Se dan las características de los datos de turbulencia atmosférica obtenidos en telescopio y la manera en que se pueden utilizar para realizar la simulación.

El Capítulo 4 se divide en dos partes. En la primera, se fundamenta la estructura del controlador, a partir de los parámetros de un controlador PID convencional sintonizado para una versión simplificada y lineal del modelo dinámico del sistema y se expone la necesidad de incluir el término integral. En la segunda parte, se establece el procedimiento de sintonización del controlador difuso a partir de los parámetros de sintonización y su posterior evaluación a través de los parámetros de desempeño.

Los resultados del proceso de sintonización, como se planteó en el Capítulo 4 se muestran en el Capítulo 5. La manera en que se evalúan los resultados es por medio de la varianza residual de fase. Se presenta una comparación de rendimiento entre los resultados de las simulaciones realizadas entre el controlador PID convencional y el controlador difuso. Además, se someten los controladores a una prueba de robustez.

Finalmente, se analizan los resultados obtenidos en esta Tesis, que son la base para exponer las conclusiones finales y las perspectivas de trabajos futuros.



# *CAPÍTULO 1*

## **SISTEMAS DE ÓPTICA ADAPTATIVA. CASO DE ESTUDIO: INSTRUMENTO LOLA**

### **1.1.- INTRODUCCIÓN**

La atmósfera terrestre es una masa de gases que rodea la Tierra, formada hace millones de años. Su presencia ha permitido el desarrollo de organismos vivos, porque entre otras cosas, atenúa la mayoría de la radiación electromagnética emitida por el Sol. Este beneficio se convierte en un obstáculo para la observación astronómica puesto que, de igual manera, atenúa ciertas longitudes de onda de la radiación emitida por las estrellas, galaxias y otros objetos astronómicos. Buena parte de las observaciones astronómicas se realiza en el espectro visible y en el infrarrojo cercano. Por fortuna, para esa región del espectro y para las ondas de radio, la atmósfera no es opaca [11], pero se presentan aberraciones ópticas, producidas por la misma, que degradan la observación de los objetos astronómicos.

En esencia, la luz viaja sin perturbación por el espacio exterior por lo que su frente de onda es primordialmente plano, hasta que se encuentra con la atmósfera de la tierra. Esto provoca que las imágenes de los objetos astronómicos observadas difieran en su posición espacial original, es decir, que las imágenes observadas se aberran. Lo cual es un efecto indeseable que se busca disminuir tanto como sea posible.

Los sistemas de Óptica Adaptativa (OA) tienen como objetivo mejorar la observación en los telescopios terrestres, midiendo el frente de onda de la luz y modificándolo por medio de dispositivos ópticos móviles. La clasificación principal de estos sistemas se da en el tipo de perturbación que corrigen. Los sistemas de OA para órdenes bajos se diseñan para eliminar la perturbación más sencilla, pero que es a la vez, la que más distorsiona la imagen. El resto de la perturbación corresponde a los órdenes superiores, que son aberraciones más complejas y con régimen frecuencial mayor, pero su impacto es menor en la imagen, aunque no por eso son menos importantes.

### **1.2.- EL ORIGEN DEL PROBLEMA: LA TURBULENCIA ATMOSFÉRICA**

La perturbación de la luz de los objetos astronómicos tiene distintas causas, la de mayor impacto es la provocada por turbulencia de los gases que componen la atmósfera. La gran masa de gases recibe energía constante del Sol, y de la Tierra, formando celdas a diferentes temperaturas que se mueven de manera aleatoria desde escalas grandes, del orden de metros, a escalas pequeñas del orden de milímetros. Estos gradientes de temperatura provocan un cambio en el índice de refracción de los

gases ( $n$ ) como consecuencia del cambio en su densidad. El gradiente no permanece estático pues el efecto de convección forma corrientes entre los cúmulos de gases a diferentes temperaturas.

Cuando la luz se propaga por un medio que no es el vacío, o lo que es igual, con índice de refracción mayor a 1, su velocidad de propagación disminuye. Entonces, por la composición no homogénea y no estática de los índices de refracción en los cúmulos de gases presentes en la atmósfera, se provoca una variación en la fase de las ondas de la luz, lo que repercute en la forma de su frente de onda. Aunque también la amplitud de los rayos de luz se ve afectada (esta es la principal razón por la que vemos titilar a las estrellas), la mayor aberración se presenta en la fase.

### 1.2.1.- MODELO DE LA TURBULENCIA

La necesidad de contar con un modelo analítico del comportamiento turbulento de la atmósfera y de su impacto sobre el frente de onda de la luz que la atraviesa condujo al desarrollo teórico que realizó Andréi Kolmogorov en los años 1940. Lo que ahora se conoce como *turbulencia de Kolmogorov*, describe la manera en que la energía se disipa en la atmósfera a través de un modelo espacial de las fluctuaciones de velocidad de la turbulencia. Posteriormente, Tatarski ligó el modelo a las fluctuaciones en los índices de refracción de los gases [12]. Más adelante, Fried extendió este trabajo a una descripción de la distorsión en el frente de onda usando polinomios de Zernike.

En esta teoría, comúnmente se utiliza una *función de estructura* para describir la variación en el índice de refracción entre dos puntos del frente de onda separados por  $r = (r_1 - r_2)$ . La función de estructura, para la variación de índice de refracción de  $n(r)$ , está definida como:

$$\mathcal{D}_n(\mathbf{r}) = \langle |n(r_1) - n(r_2)|^2 \rangle = C_2^n r^{2/3} \quad (1)$$

Donde los corchetes indican el promedio y  $C_2^n$  es la medida de la intensidad de la turbulencia. Es decir, que el valor promedio del cuadrado de la diferencia entre los índices de refracción de dos puntos, es proporcional a la separación  $r$  elevada a la  $2/3$ . El valor  $C_2^n$  puede variar desde el valor de  $10^{-14} m^{-2/3}$ , a nivel de suelo, hasta  $10^{-18} m^{-2/3}$  arriba de los  $10 \text{ km}$  [11].

La intensidad de la turbulencia varía de un lugar a otro. Una manera de caracterizarla es por medio del parámetro de Fried  $r_0$ , que describe el tamaño de un área de la atmósfera para el que el frente de onda que la atraviesa es coherente, es decir, que se considera no perturbado. Dicho de otra manera, la turbulencia limita la resolución espacial de las observaciones de un sitio determinado y está dado por el parámetro de  $r_0$ . El parámetro de Fried es proporcional a la longitud de onda ( $\lambda$ ), aunque también depende del ángulo cenital donde se realiza la observación [1]. De manera general se tiene:

$$r_0 \propto \lambda^{6/5} \quad (2)$$

La resolución angular de un telescopio, cuando no existe perturbación alguna, se aproxima con el cociente  $\frac{\lambda}{D}$ , que depende de la longitud de onda  $\lambda$  y del diámetro del espejo primario del telescopio  $D$ ; a mayor diámetro, mejor resolución. En la práctica, la resolución angular se ve limitada por la turbulencia atmosférica, también conocida como *seeing*. Ésta indica la resolución máxima que se puede obtener en un telescopio cuando existe perturbación y se puede calcular a partir del valor del parámetro de Fried, según la **Ecuación (3)**:

$$seeing = \frac{\lambda}{r_0} \quad (3)$$

Otro parámetro relacionado con  $r_0$  es la escala de tiempo coherente  $\tau_0$ . Es el tiempo en que se mantiene una celda de tamaño  $r_0$  antes de que se disperse. En específico, es el tiempo en que la varianza de un frente de onda cambia en  $1 \text{ rad}^2$  y se define por la siguiente expresión:

$$\tau_0 = 0.314 \frac{r_0}{V_{viento}} \quad (4)$$

Nótese que  $\tau_0$ , es función inversamente proporcional de la velocidad efectiva del viento  $V_{viento}$  [12]. Las imágenes astronómicas de objetos tomadas con un tiempo de integración menor a  $\tau_0$  se denominan imágenes de exposición corta y cuando es mucho mayor a  $\tau_0$  se denominan de larga exposición. Una imagen tomada con tiempo de exposición corto tiene mejor resolución angular, pero por el reducido número de fotones que se logran integrar en el detector, por lo general en la práctica, sólo se realizan tomas de larga exposición.

### 1.2.2.- LOS MODOS DE ZERNIKE

Con base en el modelo de la turbulencia se puede describir analíticamente la forma de la aberración en fase del frente de onda. Para ello se recurre a una serie de polinomios radiales ortogonales definidos sobre el círculo unitario, conocidos como *polinomios de Zernike*. Con estos polinomios se puede describir, por separado, las distintas formas del frente de onda aberrado, cuyos efectos combinados describen a la perturbación en su totalidad. Los polinomios se definen de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} Z_{j \text{ par}} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos m \theta \\ Z_{j \text{ impar}} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin m \theta \end{aligned} \right\} m \neq 0 \quad (5)$$

donde  $R_n^m$  es una función de los valores enteros  $m$  y  $n$ . El valor de  $m$  está relacionado con la frecuencia acimutal del polinomio radial y con el grado radial  $n$ . Además, ambos deben satisfacer  $m \leq n, n - |m| = \text{par}$ . La inclinación del frente de onda está relacionada con la frecuencia acimutal.

Cualquier función angular  $\phi(r, \theta)$  definida sobre una apertura circular de radio  $R$ , como la aberración del frente de onda, se puede expresar en términos de polinomios de Zernike  $Z_j(\rho, \theta)$ . La función angular  $\phi(r, \theta)$  se define por su expansión en polinomios de Zernike de la siguiente manera:

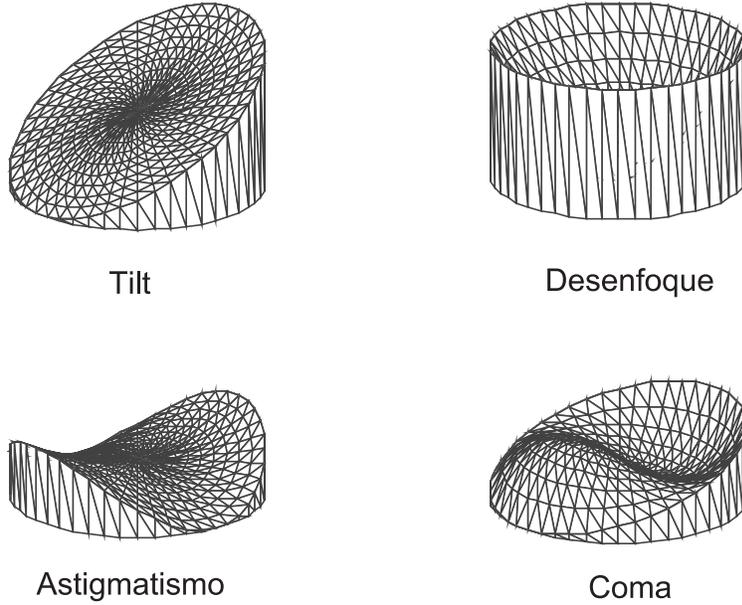
$$\phi(R\rho, \theta) = \sum_j a_j Z_j(\rho, \theta) \quad (6)$$

Con  $\rho = r/R$  y  $a_j = \int d^2\rho W(\rho)\phi(R\rho, \theta)Z_j(\rho, \theta)$

donde  $R$  es el radio del espejo primario del telescopio y

$$W(r) = \begin{cases} 1/\pi & r \leq 1 \\ 0 & r > 1. \end{cases}$$

La definición completa de los polinomios  $Z_j(\rho, \theta)$  se encuentra en [2]. Por ejemplo, para la aberración *tilt* se tiene que:  $\phi_{tilt} = 2r \sen\theta + 2r \cos\theta$ . En la **Figura 1**, se muestra una representación gráfica de los cuatro primero polinomios de Zernike que representan las aberraciones típicas, excluyendo al pistón, que es la primera aberración.



**Figura 1.-** Representación gráfica de cuatro modos de Zernike típicos. Las aberraciones en el frente son causadas por los retrasos de fase del frente de onda. La altura de las figura representan el atraso de la fase. Figuras generadas con MATLAB®.

En un sistema de OA es importante conocer el grado de corrección del frente de onda que se realiza, para ello se mide la perturbación remanente con la varianza residual de fase. Noll [2] desarrolló, a partir del trabajo de Fried, una versión normalizada de los polinomios de Zernike, estableciendo una manera analítica para calcular la contribución de cada polinomio que representa las aberraciones clásicas –*tilt*, desenfoque, astigmatismo, coma, etc. Además, desarrolló una expresión para conocer las varianzas remanentes, basada en los polinomios de Zernike. La contribución de los modos de Zernike a la aberración total se mide en términos de la varianza de fase en el tiempo. Con la expresión de la **Ecuación (7)**, donde  $M$  es el número de modos corregidos, se puede calcular la varianza residual de fase  $(\sigma_M)^2$  para los modos de Zernike, aunque aproxima mejor cuando  $M > 10$ .

$$(\sigma_M)^2 \approx 0.2944M^{-\sqrt{3}/2} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} [\text{rad}^2] \quad (7)$$

Cabe mencionar que la expresión anterior está en función de la relación  $\frac{D}{r_0}$ . Es decir, que la varianza de fase está relacionada con los parámetros definidos por el telescopio y por las condiciones de observación.

En la siguiente tabla se muestran las primeras ocho aberraciones, su expresión en términos de los polinomios de Zernike, su contribución individual en términos de la varianza de fase, y finalmente su varianza residual de fase.

**Tabla 1.- Polinomios de Zernike de las aberraciones más comunes. Tomado de [13].**

Término $Z_M$	Expresión	Descripción	Contribución individual $(\sigma_M)^2 [\text{rad}^2]$	Distorsión $(\sigma_M)^2 [\text{rad}^2]$
Todos	-	-	$1.0299(D/r_0)^{5/3}$	$1.0299(D/r_0)^{5/3}$
$Z_2$	$2r \sen\theta$	Tilt	$0.4479(D/r_0)^{5/3}$	$0.582(D/r_0)^{5/3}$
$Z_3$	$2r \cos\theta$	Tilt	$0.4479(D/r_0)^{5/3}$	$0.134(D/r_0)^{5/3}$
$Z_4$	$\sqrt{3}(2r^2 - 1)$	Desenfoque	$0.0232(D/r_0)^{5/3}$	$0.111(D/r_0)^{5/3}$
$Z_5$	$\sqrt{6}r^2 \sen 2\theta$	Astigmatismo	$0.0232(D/r_0)^{5/3}$	$0.088(D/r_0)^{5/3}$
$Z_6$	$\sqrt{6}r^2 \cos 2\theta$	Astigmatismo	$0.0232(D/r_0)^{5/3}$	$0.0649(D/r_0)^{5/3}$
$Z_7$	$\sqrt{8}(3r^2 - 2r)\sen\theta$	Coma	$0.0061(D/r_0)^{5/3}$	$0.0587(D/r_0)^{5/3}$
$Z_8$	$\sqrt{8}(3r^2 - 2r)\cos\theta$	Coma	$0.0061(D/r_0)^{5/3}$	$0.0525(D/r_0)^{5/3}$

### 1.2.3.- PERTURBACIÓN DE ÓRDENES BAJOS (*TIP-TILT*)

Los dos primeros términos de Zernike se refieren a la inclinación o *ángulo de arribo* del frente de onda y se conocen como modos *tip-tilt*, o solamente modos *tilt* (como se llaman en este trabajo). Los modos *tilt* representan alrededor del 87% de la aberración en la fase para pupilas circulares [2], porque la contribución de los dos términos respecto a la total es:

$$\frac{(\sigma_{tilts})^2}{(\sigma_{total})^2} \times 100\% = \frac{2(0.4479)(D/r_0)^{5/3}}{1.0299(D/r_0)^{5/3}} \times 100\% = 86.97\% \quad (8)$$

Por sí solos los modos *tilt* no producen deformación en la imagen cuando se toma con tiempo de exposición cortos [14], puesto que, por el reducido ancho de banda de su frecuencia temporal, producen imágenes equivalentes a imágenes a las que se les han corregido los modos *tilt*. La deformación de la imagen debido a estos modos ocurre cuando se adquieren imágenes de larga exposición, pues durante el proceso de integración el desplazamiento aleatorio de la inclinación del haz dispersa la intensidad luminosa sobre el detector. De manera que ésta es la principal causa de pérdida de resolución espacial. Los siguientes modos que contribuyen a la inclinación del frente de onda son los modos coma, pues igual que los *tilt*, su frecuencia acimutal es  $m = 1$  y su grado radial  $n$  es impar. Pero su efecto es mucho menor que la que aportan los modos *tilt*.

#### 1.2.4.- PERTURBACIÓN DE ÓRDENES ALTOS

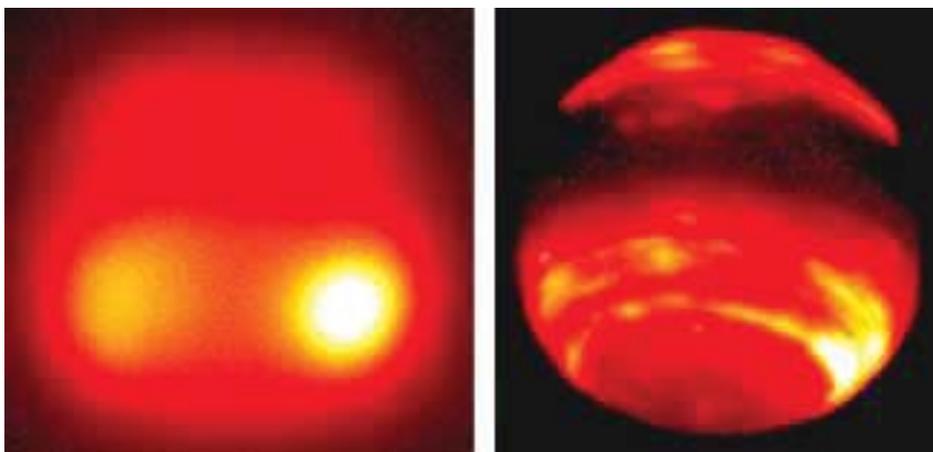
Los órdenes superiores de la perturbación están representados por todos los términos de Zernike, exceptuando los términos *tilt*. Aunque la contribución individual de cada término es poca, en su conjunto pueden representar la compleja forma del frente de onda aberrado. Como se mencionó en párrafos anteriores, los modos más conocidos son: el desenfoque, el astigmatismo, la coma, etc.

#### 1.3.- LA ÓPTICA ADAPTATIVA

La OA es una técnica desarrollada para corregir, en tiempo real, las aberraciones en el frente de onda de la luz cuando se propaga a través de un medio turbulento, con el objetivo de obtener imágenes al límite de difracción. En Astronomía, las aberraciones provocadas por la atmósfera son la principal causa por la que se obtienen imágenes de baja resolución y la óptica adaptativa es la técnica que las corrige. Hasta antes de la década de 1980, época en que el desarrollo de la técnica se potenció, la limitante máxima en los observatorios terrestres era el *seeing*. Muchos grupos alrededor del mundo han trabajado para desarrollar la técnica, que ha ido de la mano del incremento del poder de cómputo, y de la aplicación de diversos algoritmos de control [3]. Hoy en día, el diseño y construcción de nuevos observatorios no se concibe sin un instrumento de OA.

Los observatorios espaciales generan imágenes al límite de difracción, pero el costo económico y técnico es demasiado para la mayoría de los centros de investigación en Astronomía. Por eso, los beneficios de la OA en la Astronomía son enormes, aun cuando no es posible corregir totalmente al frente de onda. De hecho, la OA ha permitido la planeación de la construcción de telescopios extremadamente grandes (ELT, por su sigla en inglés) [15].

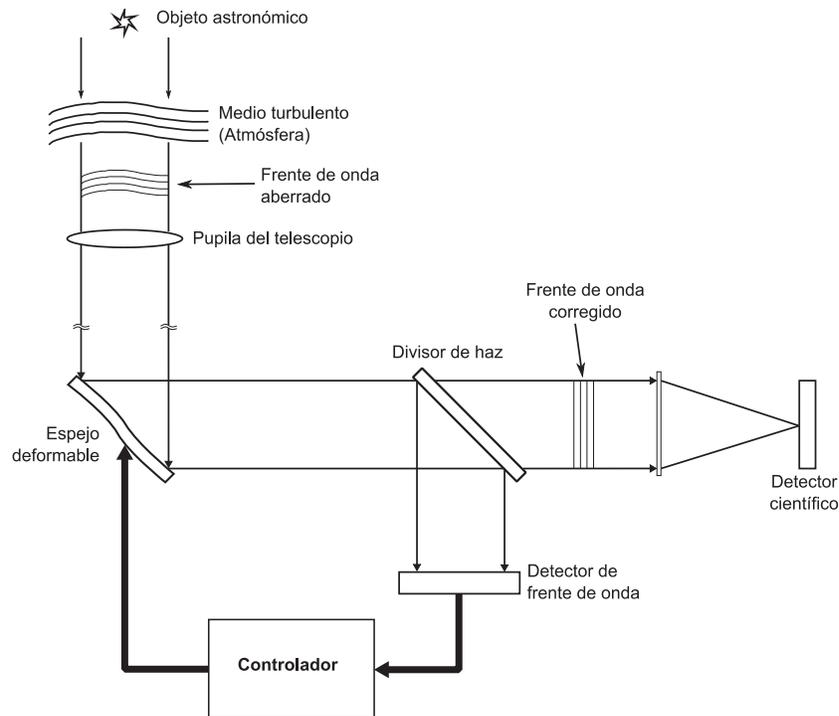
En la **Figura 2** se aprecian los efectos de aplicar la técnica en la observación de objetos astronómicos. Del lado izquierdo, se muestra la imagen del planeta Neptuno tomada sin OA. Al aplicar la técnica, según se aprecia en el lado derecho, la imagen aumenta la resolución espacial con lo que se mejora significativamente la calidad de la observación.



**Figura 2.-** Imágenes del planeta Neptuno tomada en el telescopio Keck, Hawai. En la izquierda se muestra la imagen sin el sistema de Óptica Adaptiva, y a la derecha con el sistema de OA. La mejora de la resolución de una imagen a otra es evidente.

### 1.3.1.- CORRECCIÓN DEL FRENTE DE ONDA

El esquema básico de un sistema de OA consta de un espejo deformable, un sensor de frente de onda para medir la distorsión y un algoritmo de control. Como se muestra en la **Figura 3**, la idea básica consiste en retroalimentar la información del frente de onda aberrado para mover o deformar el espejo con la intención de eliminar la deformación en el frente de onda proyectado sobre el detector científico. El algoritmo de control se debe implantar en esquema de hardware o software en tiempo real para poder responder a la dinámica de la perturbación aleatoria. De igual manera, el ancho de banda del espejo deformable y de los demás componentes del sistema en su conjunto debe ser mayor que la propia perturbación.



**Figura 3.-** Diagrama básico de los componentes de un sistema de Óptica Adaptativa.

### 1.3.2.- CORRECCIÓN DE ÓRDENES BAJOS : *TIP-TILT* Y SEGUIMIENTO DE CENTROIDE

Para la corrección de los modos *tilt*, en los instrumentos de OA para órdenes bajos, se pueden emplear dos métodos, que dependen en esencia, de la manera en que se realiza la medición de la perturbación, uno tiene que ver con el cálculo directo de la pendiente del frente de onda (o *ángulo de arribo*) y la otra con el cálculo del centroide de la intensidad de la imagen. El ángulo de arribo se aproxima con los modos *tilt* y representa el gradiente del frente de onda en el centro de la pupila, mientras que el centroide de la intensidad de la imagen representa el valor medio, o primer momento del frente de onda a través de la pupila [12]. La diferencia sustancial entre los dos casos es que, en el caso del centroide de la imagen, la información que se puede obtener del ángulo provocado por los modos *tilt* no es totalmente completa, pero su importancia radica en que el sensor que ocupa es de menor costo y su manejo es menos complejo [13].

La varianza del ángulo *tilt* es [2]:

$$(\sigma_{tilt_Z})^2 = 0.1819 \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} [\text{arcsec}^2] \quad (9)$$

Mientras que la varianza del movimiento del centroide de la imagen es:

$$(\sigma_{tilt_G})^2 = 0.1707 \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} [\text{arcsec}^2] \quad (10)$$

La consecuencia directa es que la corrección de los modos *tilt*, partiendo de la información del centroide, nunca podrá ser total.

### 1.3.3.- CORRECCIÓN DE ÓRDENES ALTOS

Después de corregir los primeros órdenes, la aberración remanente se corrige utilizando un espejo deformable por zonas. Para esto se necesita un detector más sofisticado, como el detector *Shack-Hartmann*. Típicamente la corrección se realiza retroalimentando la información del frente de onda directamente a los actuadores que deforman al espejo, sin tomar en cuenta retrasos de tiempo. Básicamente, se calcula una *matriz de influencia* que describe por zonas a la aberración, y sus valores inversos se inyectan proporcionalmente a los actuadores para formar la aberración inversa en el espejo [13]. Esta técnica de corrección se denomina *corrección zonal*.

### 1.3.4.- EVALUACIÓN DE LA CORRECCIÓN MEDIANTE LA VARIANZA RESIDUAL DE FASE

Los términos de Zernike con frecuencia acimutal  $m = 1$  y grado radial  $n$  impar son los que contribuyen a la inclinación del frente de onda. De todos éstos, los términos *tilt* contribuyen en mayor medida, y después, en menor medida, los términos coma. La contribución de los términos restantes es despreciable. Entonces, la varianza de la fase del frente de onda, debido a su inclinación en un eje, es la suma de la varianza de la inclinación del frente de onda, es decir de los términos *tilt*, y de la contribución del término coma, tal como se muestra en la **Ecuación (11)**.

$$(\sigma_{tilt_Z})^2 = (0.448 + 0.017) \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3} [\text{rad}^2] \quad (11)$$

La varianza del movimiento de la imagen  $(\sigma_{tilt_G})^2$  (**Ecuación (10)**) y la varianza de la inclinación del frente de onda  $(\sigma_{tilt_Z})^2$  están relacionados linealmente de la siguiente manera:

$$(\sigma_{tilt_Z})^2 = 2.73 \frac{(\sigma_{tilt_G})^2}{\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2} [\text{rad}^2] \quad (12)$$

Siempre y cuando  $\sigma_{tilt_G}$  y  $\frac{\lambda}{D}$  estén ambos en segundos de arco o ambos en radianes.

### 1.3.5.- ESPECTRO DE POTENCIA DEL MOVIMIENTO DEL CENTROIDE

El espectro de potencia del movimiento del centroide es un buen indicador del desempeño de un sistema de OA. La evaluación se realiza para cada eje del centroide [16]. Es evidente que a menor variación del centroide, la concentración de intensidad de la imagen permanecerá al centro. Lo que

repercutirá en una forma menos ancha y más alta de la PSF. Como consecuencia, la razón de Strehl de la imagen observada está más cerca a la unidad.

Como el movimiento del centroide es de naturaleza aleatoria, su espectro de potencia  $EP_{xy}$  se obtiene de la siguiente manera [7]:

$$EP_{xy} = \langle |\mathfrak{F}(MC_{xy})|^2 \rangle \quad (13)$$

Dónde:

$\mathfrak{F}$  es la transformada de Fourier,  $MC_{xy}$  es el movimiento del centroide de la imagen y  $\langle \rangle$  es el operador valor promedio.

Es posible determinar la varianza del movimiento del centroide de la imagen a partir de la expresión anterior. Para un solo eje, se tiene que:

$$(\sigma_{tilt_G})^2 = \int EP_{xy} \quad (14)$$

La evaluación de los sistemas de OA, y en particular del su sistema de control, se puede evaluar considerando la expresión anterior.

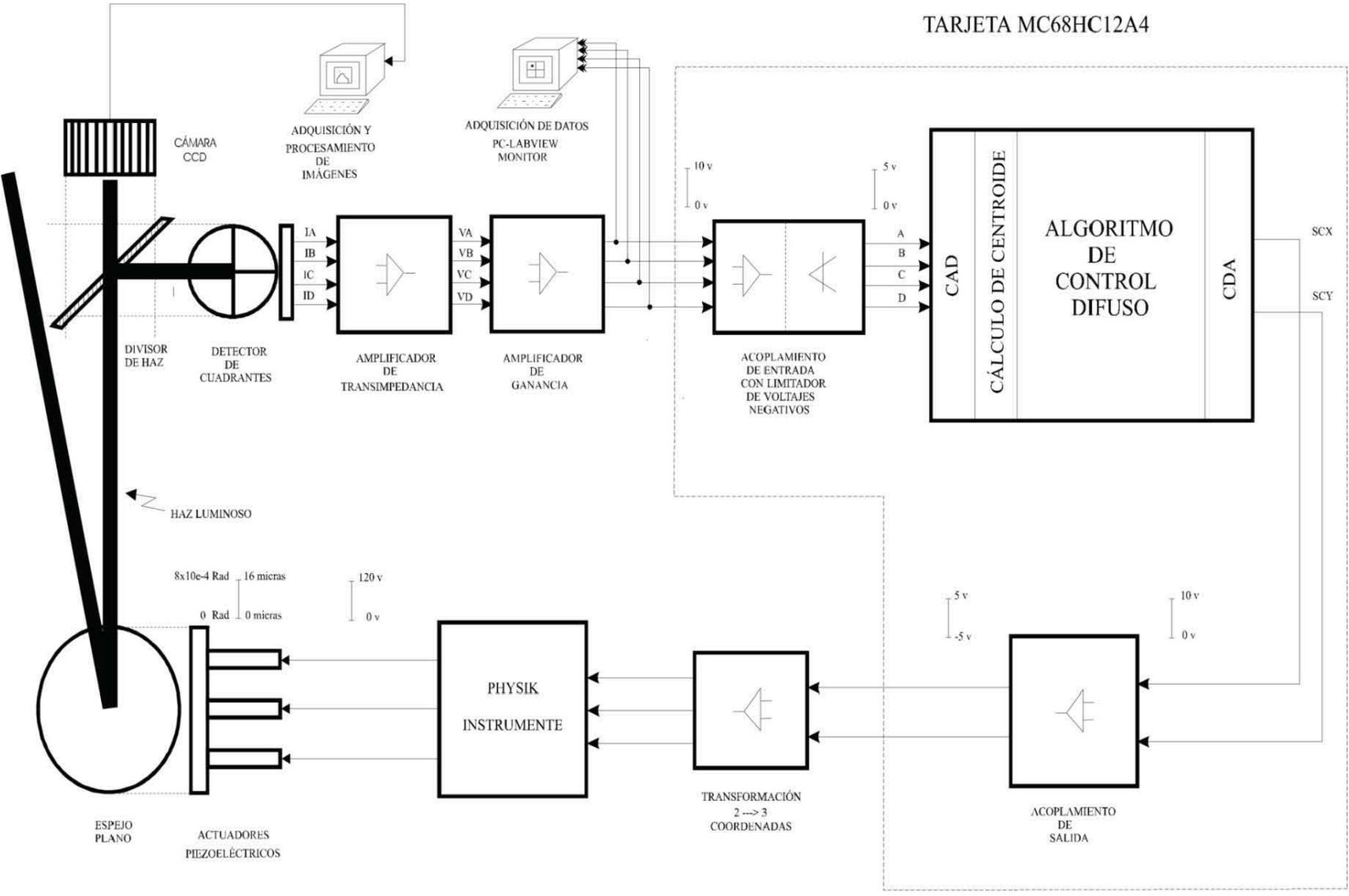
#### 1.4.- EL SISTEMA DE ÓPTICA ADAPTATIVA LOLA

El *Low Order-Little Aperture* o LOLA, por su acrónimo, es un instrumento de OA para perturbaciones de órdenes bajos, diseñado y construido por miembros del Departamento de Instrumentación del INSTITUTO DE ASTRONOMÍA de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) [6] para el telescopio de 1 metro del Observatorio Astronómico Nacional en Tonanzintla, Puebla. El acrónimo hace referencia a que el instrumento se diseñó para trabajar en un telescopio de apertura pequeña y para compensar la perturbación de primeros modos de Zernike.

Como se muestra en el diagrama a bloques de la **Figura 4**, LOLA corrige la inclinación, o ángulo de arribo del frente de onda, retroalimentando la posición del centroide de la imagen con el movimiento de un espejo corrector plano. La posición del centroide se calcula a partir de la información de la proyección de la imagen sobre un detector de cuadrantes, para lo cual dos etapas son necesarias, una etapa de amplificación y otra para acondicionar la señal antes de la entrada al micro-controlador. La señal de control para mover los actuadores piezo-eléctricos necesita de una etapa de acoplamiento y de transformación de coordenadas, antes de ser ingresadas al módulo *Physik Instrumente®*.

Desde el punto de vista de la teoría de control, el lazo de control del sistema de Óptica Adaptativa LOLA es un lazo cerrado sujeto a perturbaciones de naturaleza aleatoria, cuya entrada de referencia se fija en los valores del detector de cuadrantes cuando el centroide de la intensidad de la imagen se localiza en el centro del detector. Las perturbaciones del sistema que LOLA corrige son producto de las aberraciones *tilt* en el frente de onda de la luz del objeto astronómico observado, que provocan el movimiento de la imagen sobre el detector de cuadrantes, y por lo tanto, del valor del centroide de la imagen.

Figura 4.- Diagrama a bloques del instrumento LOLA, con el controlador difuso. Tomado de [7]



Debido a que la corrección de los modos *tilt* se hace a través del cálculo del centroide de la intensidad de la imagen sobre el detector, LOLA es en realidad un sistema de seguimiento de centroide. Como se mencionó anteriormente, el rendimiento teórico de éste último comparado con un sistema de corrección *tilt* es ligeramente menor, pero aun así es bueno [7].

A continuación, se hace una descripción de los componentes más importantes del instrumento, que incluye las siguientes partes: componentes electro-mecánicos, componentes electrónicos y componentes ópticos. La descripción del sistema nos permite plantear de mejor manera un modelo dinámico, tal como se hace en el Capítulo 3, para su posterior utilización en el desarrollo de la sintonización del controlador.

### 1.4.1.- CONSIDERACIONES ÓPTICAS

#### 1.4.1.1 Escala de placa del telescopio

La escala de placa es una relación que indica la magnitud lineal de la proyección sobre el plano focal del telescopio de un objeto en dimensiones angulares. Se obtiene del diámetro del espejo primario  $D$  y de la distancia focal efectiva  $f$ . Debido a que la dimensión angular más utilizada en Astronomía es el segundo de arco (*arcsec*) y que  $1 [rad] = 206265 [arcsec]$ , tenemos que:

$$EP = \frac{206265 [arcsec]}{D \cdot f / \# [mm]} \quad (15)$$

Donde  $f / \#$  es el *número f* o *razón focal* definido por:

$$f / \# = \frac{F}{D} \quad (16)$$

Para el telescopio de 1 metro del OAN-Tonantzintla  $D = 1000 [mm]$  y  $F = 15.468 [m]$ , entonces

$$\frac{f}{\#}_{\text{telescopio}} = 15.468 \quad (17)$$

La escala de placa del telescopio de OAN-Tonantzintla es:

$$EP_{\text{telescopio}} = \frac{206265 [arcsec]}{15468 [mm]} = 13.3349 \left[ \frac{arcsec}{mm} \right] \quad (18)$$

La escala de placa total de la óptica combinada del telescopio y de la óptica de LOLA se conoce sabiendo que la distancia focal equivalente en el detector es  $F = 28.8 [m]$  [6], entonces:

$$EP_{\text{total}} = \frac{206265 [arcsec]}{28800 [mm]} = 7.1620 \left[ \frac{arcsec}{mm} \right] \quad (19)$$

Esta relación indica que 7.162 segundos de arco en el cielo observados a través de la óptica combinada del telescopio se proyectan sobre 1 milímetro sobre el plano focal del detector. Si el diámetro del detector es de  $1.52 [mm]$ , el campo visual que se puede cubrir con el detector es:

$$\begin{aligned} \text{campo}[\text{arcsec}] &= EP_{\text{total}}(1.52 [\text{mm}]) = \\ \frac{206265 [\text{arcsec}]}{28800[\text{mm}]} (1.52 [\text{mm}]) &= 10.8862 [\text{arcsec}] \end{aligned} \quad (20)$$

#### 1.4.1.2 Tamaño del *seeing* en el detector

Teóricamente, se necesita una amplificación de 10.88 x para tener un *seeing* de 1 *arcsec* en el detector cuando el objeto se encuentra al límite de difracción [6]. En la práctica, por efecto de la turbulencia atmosférica, se necesitó una amplificación de sólo 2.5x para que el *seeing* abarcara el diámetro total del detector [7], entonces el campo angular máximo del centroide que puede resolver el detector es:

$$\begin{aligned} \text{campo}_{\text{seeing}} [\text{arcsec}] &= \frac{EP_{\text{total}}}{2.5} (1.52 [\text{mm}]) = EP_{\text{total}2.5X} (1.52 [\text{mm}]) = \\ \frac{7.1620 \left[ \frac{\text{arcsec}}{\text{mm}} \right]}{2.5} (1.52 [\text{mm}]) &= 2.8648 \left[ \frac{\text{arcsec}}{\text{mm}} \right] (1.52 [\text{mm}]) = 4.3520 [\text{arcsec}] \end{aligned} \quad (21)$$

### 1.4.2.- COMPONENTES ELECTRO-MECÁNICOS

#### 1.4.2.1 Actuadores piezo-eléctricos

Un actuador lineal piezo-eléctrico es un dispositivo de estado sólido que convierte la energía eléctrica a la energía mecánica manifestada como un desplazamiento lineal. Son usados en aplicaciones astronómicas por su rápido tiempo de respuesta y por la posibilidad de operarlos de manera continua, en particular, son usados ampliamente en los sistemas de OA. Es mediante los actuadores piezo-eléctricos que se logra el movimiento angular del espejo corrector plano. La respuesta dinámica de los actuadores es la más significativa en el lazo de control.

LOLA emplea un módulo de actuadores piezo-eléctricos de la marca *Physik Instrumente*®, modelo S-320. Por su distribución geométrica, el módulo de actuadores está compuesto de un circuito de transformación de coordenadas y por los siguientes sub módulos: módulo de control de los actuadores para reducir no-linealidades, módulo de amplificadores y fuente de alimentación.

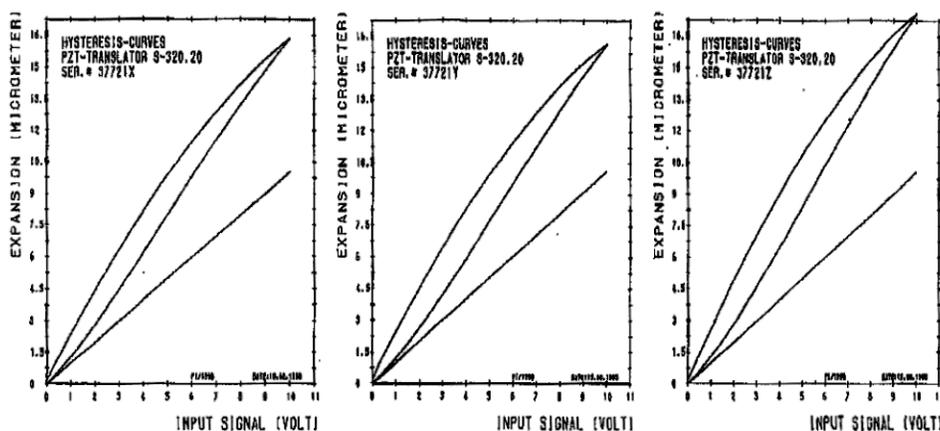
Los actuadores pueden operar en un intervalo de -20 a 120 Volts, pero el intervalo nominal se reduce de 0 a 100 Volts para proteger al material cerámico ante una eventual ruptura eléctrica. El efecto de histéresis, que es una no linealidad inherente a este tipo de actuadores, se presenta cuando el módulo se opera en lazo abierto. La función del módulo de control es la relacionar linealmente a las elongaciones con los voltajes de entrada del módulo de actuadores, a través de un lazo de control interno que retroalimenta la posición de los actuadores obtenida por celdas de carga distribuidas sobre el cuerpo de los mismos. Cuando el sistema se opera en lazo abierto se puede lograr una excursión de 0 a 16 micrómetros por cada actuador. En lazo cerrado la excursión es de 0 a 10 micrómetros aproximadamente, con una precisión de 0.1%.

El módulo que maneja los actuadores recibe un voltaje entre 0 y 10 Volts para el intervalo completo de elongación. Para lograr el voltaje nominal en que operan los actuadores el módulo de amplificadores opera con un ganancia de 10x. En la **Figura 5**, se muestran las curvas experimentales del comportamiento del módulo, para la entrada de voltaje y la salida de elongación para cada

actuador, en ella se puede ver claramente el efecto de histéresis vs la relación lineal una vez que ha sido corregida con el lazo de control interno del módulo que maneja los actuadores.

#### 1.4.2.2 Espejo corrector plano

Para mover el espejo corrector plano, se utilizan los tres actuadores piezo-eléctricos. Los actuadores están distribuidos de manera simétrica respecto al punto central con una separación de  $120^\circ$  entre ellos, tal como se muestra en la **Figura 6**. Debido a esta disposición, es necesario realizar una transformación de coordenadas que convierte las dos señales de entrada, una para cada eje, en tres señales correspondientes a los tres actuadores. En el sistema LOLA esta conversión se realiza en un circuito analógico de amplificadores operacionales [6].



**Figura 5.-** Gráficas de voltajes de entrada vs desplazamiento de los tres actuadores piezo eléctrico *Physik Instrumente*. Se muestra el comportamiento con histéresis cuando los actuadores se operan en lazo abierto y el comportamiento lineal cuando se operan con el lazo de control interno del módulo que los maneja. Tomado de [6].

### 1.4.3.- COMPONENTES ELECTRÓNICOS

#### 1.4.3.1 Algoritmo de control

En una primera versión del instrumento, el algoritmo de control se implementó en una PC con procesador Intel® Pentium® a 200 MHz con un software desarrollado en LabVIEW®, y una tarjeta de adquisición de propósito general. Para esa versión, el algoritmo de control era un controlador PID convencional auto-sintonizado en el propio LabVIEW® [6]. Para la segunda versión, el instrumento se actualizó a un software dedicado puesto en una tarjeta de desarrollo MC68HC12A4 de Motorola™, donde se implantó un controlador difuso [7]. Este último, según pruebas en telescopio, redujo en un factor de 25, aproximadamente, el movimiento del centroide [17].

#### 1.4.3.2 Transformación de coordenadas

La transformación se logra con un circuito de amplificadores operacionales que realizan la operación de transformación de ángulo en radianes al valor de desplazamiento para los tres actuadores. En forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} -\cos 30^\circ & \text{sen } 30^\circ \\ \cos 30^\circ & \text{sen } 30^\circ \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + L/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Donde los valores del lado izquierdo de la ecuación matricial  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son valores de distancia en micrómetros y los valores  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos de inclinación del espejo corrector plano en mili radianes. El valor de  $d$  es la distancia del punto de contacto de un actuador al centro del espejo. El término  $L/2$  representa la mitad de la excursión total de los actuadores o *stroke* y se agrega para maximizar el intervalo dinámico de la inclinación del espejo, es decir, que el espejo se “flota” en la mitad de la excursión total para maximizar su movilidad. Esta expresión matricial permite conocer el valor de las elongaciones a partir del valor de inclinación de cada eje.

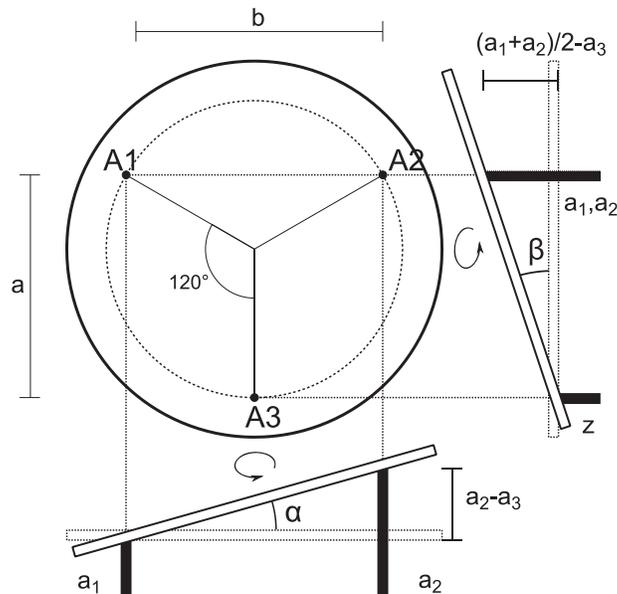
Para llevar a cabo la conversión en los amplificadores operacionales se requiere tener los valores en voltajes, para ello se hace corresponder los voltajes  $V_x$  y  $V_y$  de acuerdo a las ecuaciones matriciales siguientes:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (23)$$

La **Ecuación (23)** se sustituye en **Ecuación (22)** para obtener los valores de voltaje de cada uno de los actuadores, según la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.866 & 0.5 \\ 0.866 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} + L/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A partir de la **Figura 6**, se deducen las expresiones para obtener el ángulo de cada eje a partir del valor de elongación de los actuadores, es decir, se obtienen las expresiones inversas de las ecuaciones que permite conocer el valor de las elongaciones cuando se conocen los valores de inclinación en cada eje.



**Figura 6.-** Disposición de los tres actuadores sobre el espejo corrector y vistas laterales que muestran ángulos y elongaciones.

Las vistas laterales del espejo corrector plano son necesarias para encontrar las expresiones que relacionan a los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con la elongación  $a_1, a_2, a_3$  de los actuadores A1, A2 y A3. A partir de los triángulos formados por las posiciones del espejo sin inclinación y con inclinación y sabiendo que para ángulos pequeños, como los que se van a manejar, el ángulo  $\alpha = \text{sen } \alpha$ , se tiene que:

$$\alpha = \frac{a_2 - a_1}{b} \quad (25)$$

$$\beta = \frac{(a_1 + a_2)/2 - a_3}{a} \quad (26)$$

Donde las distancias  $a$  y  $b$  se obtienen a partir del diámetro  $\phi_1$  de la circunferencia que contiene los tres puntos de unión de los actuadores piezo-eléctricos con las siguientes relaciones:

$$b = \frac{3}{2\sqrt{3}}\phi_1, a = \frac{b}{2}\sqrt{3} \quad (27)$$

Según las dimensiones del módulo usado en LOLA<sup>1</sup>, si la distancia  $b = 8 \text{ mm}$ , el diámetro del espejo es  $\phi = 9.23 \text{ mm}$  y la distancia  $a = 6.92 \text{ mm}$

Las ecuaciones para los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  se pueden escribir de manera matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

La máxima inclinación depende de la excursión total de los actuadores y de la distancia total de éstos respecto al punto central. Para la determinación del ángulo de máxima inclinación se sabe que los actuadores S-302 manejan una elongación en lazo abierto de  $16 \mu\text{m}$ . En lazo cerrado es de  $10 \mu\text{m}$ , aproximadamente. Para ese valor se tienen los siguientes ángulos máximos:

$$\alpha_{max} = (a_{2min} - a_{1max})/b = 10 \mu\text{m}/8 \text{ mm} = 1.3 \text{ mrad} \quad (29)$$

$$\alpha_{total} = \pm 1.3 \text{ mrad}$$

$$\beta_{max} = [(a_{1max} + a_{2max})/2 - a_{3min}]/a = 10 \mu\text{m}/6.92 \text{ mm} = 1.4 \text{ mrad} \quad (30)$$

$$\beta_{total} = \pm 1.4 \text{ mrad}$$

#### 1.4.3.3 Detector de cuadrantes

El detector es un arreglo de cuatro fotodiodos, que convierten de manera proporcional la energía luminosa del haz a una corriente eléctrica. Realizando una operación con los valores de los detectores, se pueden conocer la información de la posición del centroide de la intensidad de la imagen. En el instrumento, el detector de cuadrantes de la marca EG&G Canada LTD, modelo C30927E-03. Está constituido por cuatro fotodiodos optimizados para una longitud de onda de  $\lambda = 800 \text{ nm}$ , con un intervalo  $\pm 50 \text{ nm}$ . Una de sus características importante son su respuesta rápida, del orden de  $3 \text{ ns}$ . El diámetro del área de los foto-detectores es de  $1.52 \text{ mm}$ .

---

<sup>1</sup> El valor de  $b$  es una aproximación del valor real que, debido a que no se encuentra reportado en los datos técnicos del fabricante, se tuvo que estimar a partir de mediciones realizadas sobre la parte exterior del cuerpo del módulo S-320.

Una etapa de acondicionamiento de señal transforma la señal de corriente a voltaje, con un amplificador de trans-impedancia. Luego, otra etapa de acondicionamiento de nivel, con amplificadores operacionales, es necesaria para introducir la señal al micro-controlador.

Las operaciones para calcular el centroide se llevan a cabo en el micro-controlador con la siguiente **ecuaciones** (31) y (32), si se tienen los voltajes  $A, B, C$  y  $D$  de las etapas de acondicionamiento de la señal del detector:

$$C_X = (A + D) + (B + C) \quad (31)$$

$$C_Y = (A + B) + (C - D) \quad (32)$$

Donde  $C_X$  y  $C_Y$  son las coordenadas cartesianas del centroide de la intensidad de la imagen.

#### 1.4.4.- VARIACIÓN DE LA POSICIÓN DEL CENTROIDE DEBIDO EL ESPEJO CORRECTOR

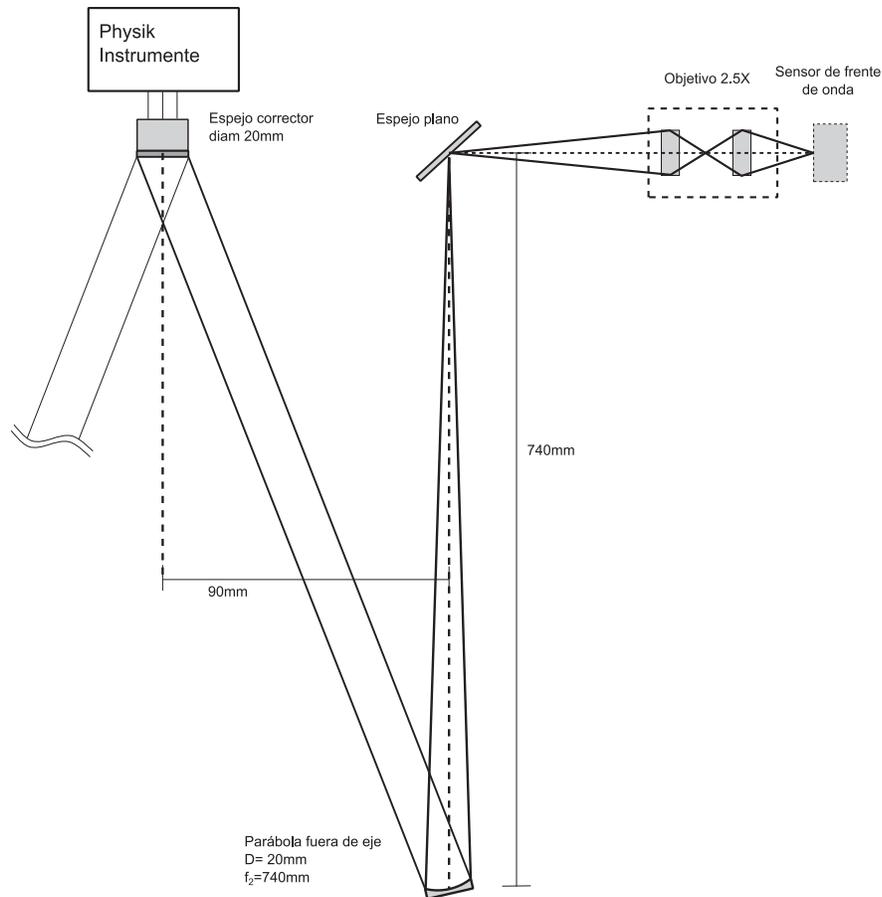
La óptica asociada a LOLA se muestra en la **Figura 7**. El haz de luz se refleja en el espejo corrector con un ángulo máximo de  $\theta_{max} = \pm 1 [mrad]$ , luego incide en el espejo parabólico fuera de eje con distancia focal  $f_2 = 740[mm]$ , finalmente se amplifica con el objetivo óptico de 2.5x, entonces, el desplazamiento del centroide de la imagen que se puede lograr debido a la excursión sobre el detector está dada por la **Ecuación (33)**.

$$\begin{aligned} desp_{centroide} &= \theta_{max} \cdot f_2 \cdot 2.5X = (\pm 1 [mrad])(740[mm])(2.5) = \pm 1.85 [mm] \\ &= 3.7 [mm] \end{aligned} \quad (33)$$

Que corresponden a un campo de:

$$\begin{aligned} campo_{excursión\ del\ espejo} [arcsec] &= EP_{total\ 2.5X} (3.7 [mm]) \\ &= 2.8648 \left[ \frac{arcsec}{mm} \right] (3.7 [mm]) = 10.59 [arcsec] \end{aligned} \quad (34)$$

Debido a que  $campo_{excursión\ del\ espejo} > campo_{seeing}$  se puede lograr una corrección en todo el intervalo del detector.



**Figura 7.-** Principales componentes ópticos de LOLA que modifican el haz de luz, por medio de los actuadores piezo eléctricos Physik Instrumente, hasta proyectarse en el sensor de frente de onda. Basado en el diagrama de [6].

#### 1.4.4.1.- Variación mínima de la posición del centroide

La resolución del actuador reportada por el fabricante es de  $50[nm]$ , lo que resulta en una inclinación mínima del espejo de  $5[\mu rad]$ . Para este ángulo un haz de luz se refleja en el espejo corrector e incide en el espejo parabólico fuera de eje con distancia focal  $f_2 = 740[mm]$ . Finalmente, se amplifica con el objetivo óptico de  $2.5x$ , entonces, el desplazamiento sobre el detector es:

$$\begin{aligned} desp. \text{mínimo}_{centroide} [\mu m] &= \theta_{min} \cdot f_2 \cdot 2.5X \\ &= (5 [\mu rad])(740[mm])(2.5) = 9.25 [\mu m] \end{aligned} \quad (35)$$

Que corresponden a un campo de:

$$\begin{aligned} campo \text{mínimo}_{excursión \text{ del espejo}} [arcsec] &= EP_{total, 2.5X} (9.25 [\mu m]) \\ &= 2.8648 \left[ \frac{arcsec}{mm} \right] (9.25 [\mu m]) = 26.499 \times 10^{-3} [arcsec] \end{aligned} \quad (36)$$



# CAPÍTULO 2

## CONTROL DIFUSO

### 2.1.- INTRODUCCIÓN

En muchas situaciones, el conocimiento adquirido por la experiencia para controlar plantas no-lineales se describe mejor con premisas de la forma “*si sucede esto entonces realiza aquello*”. Podemos llevar a algoritmos computacionales el razonamiento expresado en enunciados en el lenguaje natural, como el anterior, haciendo uso de los conceptos de la lógica difusa, y establecer estrategias para controlar plantas no-lineales. El control difuso es una técnica de control no-lineal, basada en los conceptos de la lógica difusa, que permite transferir el conocimiento experto a algoritmos de computación, por medio de heurísticas. Es una técnica de control no-lineal que puede controlar plantas tanto lineales como no lineales.

En el conocimiento experto, la información de las variables físicas involucradas en la planta, como presión, temperatura, o distancia, se representan en el lenguaje natural haciendo una descripción de las propiedades que las caracterizan e indicando el grado que éstas propiedades describen a las variables en un momento dado. Así, por ejemplo, una variable de *temperatura de agua* en el rango de 5 °C a 50 °C es descrita por un conjunto de etiquetas para indicar qué tanto el agua está *fría, tibia, caliente* o *muy caliente* y el grado de éstas, en vez de tener un valor concreto en grados centígrados en cierto momento.

La estrategia de control se concentra, en esencia, en un conjunto de reglas establecida a partir del conocimiento experto, o conocimiento teórico de un operador debido a la práctica que éste ha tenido operando un sistema, o por medio de datos estadísticos obtenidos de un proceso. Estas reglas relacionan las variables físicas con el objetivo de inferir una acción de control.

Una forma muy usada para aplicar el control difuso consiste en utilizar la estructura del controlador PID convencional porque, en sus múltiples variantes, se ha aplicado con éxito a numerosas plantas durante muchos años. Pero gracias a la estructura variable de los controladores difusos, se tiene la ventaja de poder obtener una acción de control no-lineal. En este caso, también se hace uso del conocimiento experto para establecer reglas de inferencia en el controlador.

Los conceptos de lógica difusa se fundamentan en la teoría de conjuntos difusos. En este capítulo, se mencionan solamente los conceptos mínimos de la lógica difusa en los que está basado el control difuso.

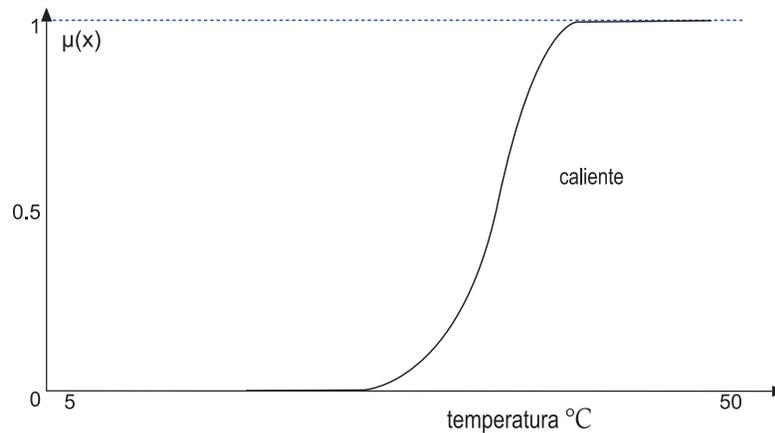
## 2.2.- CONCEPTOS BÁSICOS

### 2.2.1.- CONJUNTOS DIFUSOS

Los conjuntos difusos son una generalización de la lógica de conjuntos tradicional. Un conjunto difuso se caracteriza por una función que indica el grado de pertenencia de los elementos del conjunto universal al conjunto difuso. Esto es, no se limita a definir si un elemento pertenece o no a un conjunto, si no que indica *qué tanto pertenece* a ese conjunto. Con esto, podemos expresar analíticamente información vaga o imprecisa, como el conocimiento humano adquirido por la experiencia.

Un conjunto difuso  $F$  de un universo  $U$  tiene asociada una función en la que a cada elemento del universo  $U$  se le asigna un valor que indica su *grado de pertenencia* a dicho conjunto. Los valores que puede tomar la función se encuentran en el intervalo continuo unitario  $[0,1]$ , donde el extremo 0 significa que el elemento NO pertenece al conjunto y el extremo 1 significa que pertenece TOTALMENTE al conjunto. A esta función se le conoce como función de pertenencia  $\mu_F$  del conjunto difuso  $F$ .

Para ilustrar el concepto consideremos lo siguiente: La representación de *la percepción de calor* en una habitación debido a la temperatura ambiente se realiza con un conjunto difuso llamado “caliente”, en un intervalo de valores en grados Celsius. Una función, definida para todo el intervalo, indica el grado de pertenencia al conjunto “caliente” como se muestra en la **Figura 8**. Se aprecia que la percepción de calor se incrementa uniformemente cuando se incrementa la temperatura.



**Figura 8.-** Gráfica del conjunto difuso “caliente” para relacionar la temperatura en grados Celsius con la percepción de calor en una habitación.

#### 2.2.1.1.- Función de pertenencia

La función de pertenencia  $\mu_{\tilde{F}}$  de un conjunto difuso  $\tilde{F}$  es una función  $\mu_{\tilde{F}}: U \rightarrow [0,1]$  donde cada elemento  $u$  del universo  $U$  tiene un valor en el intervalo unitario que indica el grado de pertenencia  $\mu_{\tilde{F}}(u) \in [0,1]$  al conjunto difuso  $\tilde{F}$ .

### 2.2.1.2.- Universo de discurso

El universo de discurso es el dominio de las funciones de pertenencia. En otras palabras, son todos los valores, continuos o discretos, para el cual un conjunto difuso está definido a través de su función de pertenencia asociada. Cuando aplicamos los conceptos de la lógica difusa a un control difuso generalmente hablamos de universos de discurso que tienen un significado físico.

En el ejemplo representado en la **Figura 8**, el universo de discurso es  $U = [5^{\circ}\text{C}, 50^{\circ}\text{C}]$  y se trata de un dominio *estándar*. Cuando un dominio *estándar* es transformado de alguna manera a un dominio en el intervalo  $[-1, 1]$  se llama dominio *normalizado*.

### 2.2.1.3.- Conjunto Difuso (definición)

Un conjunto difuso  $F$  en un universo  $U$  se puede definir como el conjunto de pares ordenados

$$F = \{(x, \mu_F(x)) | x \in U\} \quad (37)$$

Donde  $\mu_F(x): U \rightarrow M$  indica el grado de pertenencia de  $x$  en  $F$  y  $M$  toma valores en el intervalo continuo  $[0, 1]$ , si  $M = \{0, 1\}$ , es un caso particular de un conjunto en lógica clásica.

La notación más utilizada en textos se muestra en el siguiente ejemplo.

Consideremos el universo discreto:

$U = \{\text{lunes, martes, viernes, primavera, verano, enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}\}$ .

El conjunto  $W$ , llamado “Meses con lluvia intensa en México” es  $W = \{..., (\text{marzo}, 0), (\text{abril}, 0.1), (\text{mayo}, 0.3), (\text{juno}, 0.9), (\text{julio}, 1), (\text{agosto}, 1), (\text{sept}, 1), (\text{octubre}, 0.7), \dots\}$ . Una notación conveniente consiste en enumerar sus elementos formando tuplas con grado de pertenencia:

$$F = \{(u, \mu_F(u)) | u \in U\} = \sum_{u \in U} \mu_F(u)/u \quad (38)$$

Con esta notación, el conjunto  $W$  se escribe:

$$W = 0/\text{marzo} + 0.1/\text{abril} + 0.3/\text{mayo} + 0.9/\text{juno} + 1/\text{julio} + 1/\text{agosto} + 1/\text{sept} \\ + 0.7/\text{octubre}$$

Cuando se trata de un conjunto continuo o no-contable, la notación es:

$$F = \{(u, \mu_F(u)) | u \in U\} = \int_U \mu_F(u)/u \quad (39)$$

### 2.2.1.4.- Soporte del Conjunto difuso

El soporte de un conjunto difuso son los valores del universo de discurso para los cuales el conjunto difuso tiene un grado de pertenencia mayor a cero.

$$\text{soporte}(F) = \{x \in U | \mu_F(x) > 0\} \quad (40)$$

### 2.2.1.5.- Singleton difuso

Si el soporte del Conjunto difuso sólo tiene un valor con  $\mu_F(x) = 1$  a éste valor se le conoce como singleton difuso.

### 2.2.1.6.- Kernel o núcleo

Son los valores del universo de discurso que pertenecen totalmente al conjunto.

$$\text{núcleo}(F) = \{x \in U \mid \mu_F(x) = 1\} \quad (41)$$

### 2.2.1.7.- Altura del conjunto difuso

Se define por el valor máximo de la función de membresía.

$$\text{altura}(F) = \max_x \mu_F(x) \quad (42)$$

### 2.2.1.8.- Conjunto Difuso Normal

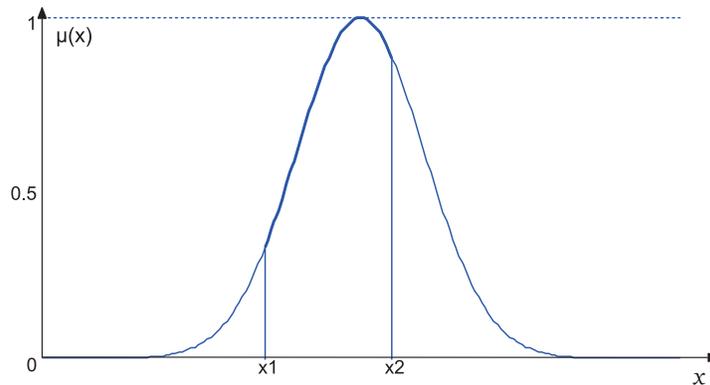
Cuando  $\text{altura}(F) = 1$  de un Conjunto difuso se dice que el conjunto difuso es *Normal*.

### 2.2.1.9.- Conjunto Difuso Convexo

Son conjuntos que sólo tienen un valor máximo global. Para dos valores cualesquiera,  $x_1$  y  $x_2$  del universo de discurso, como los que se muestran en la **Figura 9**, un conjunto difuso convexo está definido por:

$$\mu_F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_F(x_1), \mu_F(x_2)) \quad (43)$$

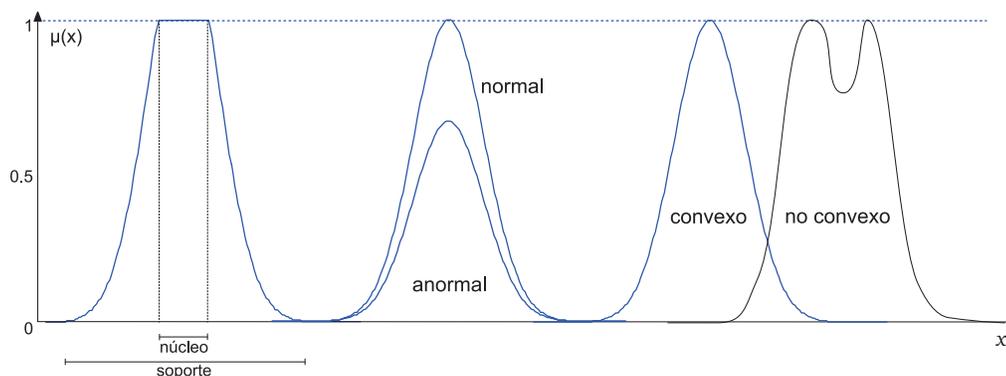
Donde  $x_1, x_2 \in U$ ,  $\lambda \in [0, 1]$



**Figura 9.-** Conjunto convexo. El valor de  $\mu_F(x_1)$  es el mínimo entre el intervalo de  $x_1$  y  $x_2$ .

En la

Figura 10 se ilustran algunas de las propiedades de los conjuntos difusos mencionadas hasta este punto.

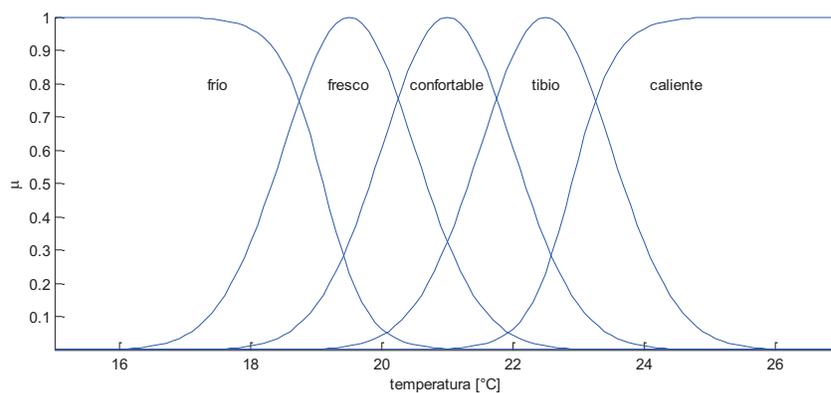


**Figura 10.-** Algunas propiedades de los conjuntos difusos. De izquierda a derecha: Soporte y núcleo, propiedad Normal, propiedad Convexo.

### 2.2.1.10.- Numero Difuso

Si el Conjunto difuso es Convexo y Normal entonces es un Número difuso.

En control difuso se usan conjuntos difusos, que son números difusos, para indicar propiedades de una variable, tales como un valor grande o alto, un valor pequeño o bajo o un valor intermedio. Para el ejemplo anterior, *la percepción de calor en una habitación debido a la temperatura ambiente*, se han agregado más conjuntos a lo largo del universo de discurso con el propósito de representar mejor la información. Los conjuntos se muestran en la **Figura 11**. La noción de ‘frio’ se representa por el conjunto de extrema izquierda y abarca los valores más bajos del universo de discurso. La noción de ‘caliente’ abarca los valores más grandes del universo de discurso.



**Figura 11.-** Funciones de pertenencia representadas por números difusos.

### 2.2.2.- OPERACIONES BÁSICAS CON CONJUNTOS DIFUSOS

Al igual que en la lógica clásica, en lógica difusa se definen las operaciones de unión, intersección y complemento para los conjuntos difusos a través de sus funciones de membresía.

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos en el universo de discurso  $U$  con funciones de pertenencia  $\mu_A(u)$  y  $\mu_B(u)$ , respectivamente.

Complemento. Indicado por  $\bar{A}$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in U \quad (44)$$

Intersección.  $A \cap B$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in U \quad (45)$$

Unión.  $A \cup B$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in U \quad (46)$$

Producto cartesiano. Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos difusos en  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , respectivamente. El producto cartesiano de  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es un conjunto difuso en el espacio producto  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  que tiene la siguiente función de membresía

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min[\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)] \quad (47)$$

$x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, \dots, x_n \in U_n$

Suma algebraica  $A + B$

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in U \quad (48)$$

Producto algebraico  $A \cdot B$

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad \forall x \in U \quad (49)$$

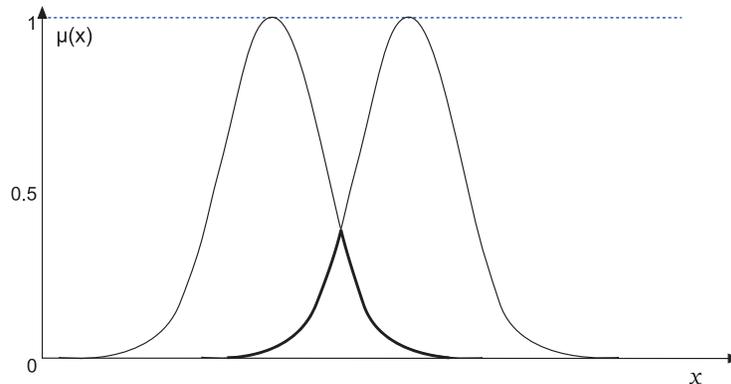
Suma acotada  $A \oplus B$

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\} \quad \forall x \in U \quad (50)$$

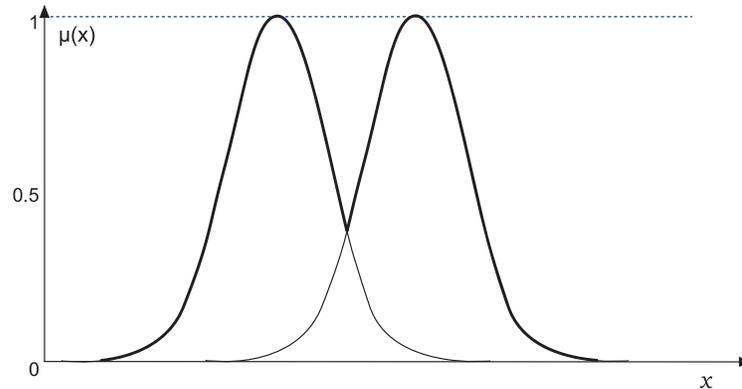
Diferencia acotada  $A \ominus B$

$$\mu_{A \ominus B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) - \mu_B(x)\} \quad \forall x \in U \quad (51)$$

En la **Figura 12** y **Figura 13** se ilustran las operaciones intersección y unión.



**Figura 12.-** Operación *min*. Es el conjunto intersección entre los dos conjuntos de la figura. Se muestra con una línea más gruesa.



**Figura 13.-** Operación *max*. Es la unión de los dos conjuntos. Se muestra con una línea más gruesa.

### 2.2.2.1.- Normas Triangulares y Co-normas Triangulares

Una *norma triangular* es una función  $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que incluye la intersección, producto algebraico, producto acotado y producto drástico. Las normas triangulares satisfacen los siguientes axiomas:

- Conmutatividad:  $T(a, b) = T(b, a)$
- Asociatividad:  $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- Monotonía:  $T(a, b) \leq T(b, c)$  si  $a \leq c$  y  $b \leq d$
- Elemento único:  $T(a, 1) = a$

Se definen como:

$$\forall x, y \in [0, 1]:$$

$$\text{(intersección)} \quad x \wedge y = \min\{x, y\} \quad (52)$$

$$\text{(producto algebraico)} \quad x \cdot y = xy \quad (53)$$

$$\text{(producto acotado)} \quad x \odot y = \max\{0, x + y - 1\} \quad (54)$$

$$\text{(producto drástico)} \quad x \hat{\cdot} y = \begin{cases} x, & y = 1 \\ y, & x = 1 \\ 0, & x, y < 1 \end{cases} \quad (55)$$

Una *co-norma Triangular* es una función  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que incluye la unión, suma algebraica, suma acotada, suma drástica y suma “desarticulada”. Se definen,

$$\forall x, y \in [0, 1]:$$

$$\text{(unión)} \quad x \vee y = \max\{x, y\} \quad (56)$$

$$\text{(suma probabilística)} \quad x \dot{+} y = x + y - xy \quad (57)$$

$$\text{(suma acotado)} \quad x \oplus y = \min\{1, x + y\} \quad (58)$$

$$\text{(suma drástica)} \quad x \dot{\vee} y = \begin{cases} x, & y = 0 \\ y, & x = 0 \\ 1, & x, y > 0 \end{cases} \quad (59)$$

### 2.2.3.- VALORES LINGÜÍSTICOS Y VARIABLE LINGÜÍSTICA

Una *variable lingüística* es una variable cuyos valores no son numéricos sino enunciados o palabras en el lenguaje natural o artificial. Los valores que toma la variable lingüística son llamados *valores lingüísticos*.

Como se mencionó antes, en un control difuso las variables del sistema se representan como conjuntos de etiquetas en el lenguaje natural o artificial para describir algunas características o propiedades de las variables. También se vio que un conjunto difuso puede representar a dichas etiquetas por medio de una función de pertenencia que indica el grado de pertenencia de dicho conjunto a lo largo del universo de discurso. A las etiquetas se les llama *valores lingüísticos* y al conjunto de ellas podemos llamarles *variable lingüística*.

Entonces, podemos emplear números difusos en particular y conjuntos difusos en general, para representar valores lingüísticos de una variable lingüística, que represente una variable física del sistema que sea de nuestro interés.

#### 2.2.3.1.- Relaciones difusas

Una relación de dos conjuntos en la lógica tradicional representa la presencia de una asociación o interacción entre dos elementos de los conjuntos. En una relación difusa esta relación representa el grado de asociación o interacción entre dos elementos de dos conjuntos difusos y es representado por otro conjunto difuso. Esto es:

$$R: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad (60)$$

Sea  $U$  y  $V$  dos universos de discurso continuos y sea  $\mu_R: X_1 \times X_2 \rightarrow [0,1]$ , entonces:

$$R(X_1, X_2) = \{((x_1, x_2), \mu_R(x_1, x_2)) | (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2\} \quad (61)$$

Que se puede representar por:

$$R = \int_{X_1 \times X_2} \mu_R(x_1, x_2) / (x_1, x_2) \quad (62)$$

Si  $U$  y  $V$  son universos discretos, entonces:

$$R = \sum_{X_1 \times X_2} \mu_R(x_1, x_2) / (x_1, x_2) \quad (63)$$

Ejemplo: La relación  $R =$  'aproximadamente igual' en  $U \times U$  cuando  $U = \{1, 2, 3\}$  puede ser:

$$\begin{aligned} &1/(1,1) + 1/(2,2) + 1/(3,3) + 0.8/(1,2) + 0.8/(2,3) + 0.8/(2,1) + 0.8/(3,2) + 0.3/(1,3) \\ &+ 0.3/(3,1) \end{aligned}$$

O en forma matricial:

		$U$		
		1	2	3
$U$	1	1	0.8	0.3
	2	0.8	1	0.8
	3	0.3	0.8	1

Las relaciones difusas son importantes para la estructura de un control difuso porque permiten describir cómo interactúan las variables lingüísticas para establecer reglas de inferencia cuyo resultado es una acción de control representada por un conjunto difuso.

### 2.2.3.2.- Operaciones sobre Relaciones Difusas

*Proyección.* Dada una relación difusa  $R(X, Y)$ ,  $[R \downarrow Y]$  indica la proyección de  $R$  en  $Y$ . Entonces,  $[R \downarrow Y]$  es un conjunto difuso (relación difusa) con función de pertenencia definida por:

$$\mu_{[R \downarrow Y]}(y) = \max_x \mu_R(x, y) \quad (64)$$

### 2.2.3.3.- Extensión cilíndrica.

Dada una relación difusa  $R(X)$ , o un conjunto difuso  $R$  en  $X$ ,  $[R \uparrow Y]$  indica la extensión cilíndrica de  $R$  en  $Y$ . Entonces,  $[R \uparrow Y]$  es una relación difusa en  $X \times Y$  con función de pertenencia definida por:

$$\mu_{[R \uparrow Y]}(x, y) = \mu_R(x) \quad \text{para toda } x \in X, y \in Y \quad (65)$$

### 2.2.3.4.- Operación Composición.

Hay dos tipos de operadores composición:  $\max, \min$  y  $\min, \max$  que se pueden aplicar a composiciones relación-relación y composiciones conjunto-relación. Sean  $P(X, Y)$  y  $Q(Y, Z)$  dos relaciones difusas en  $X \times Y$  y  $Y \times Z$ , respectivamente. La composición  $\max, \min$  de  $P(X, Y)$  y  $Q(Y, Z)$ , indicada por  $P(X, Y) \circ Q(Y, Z)$  está definida por:

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max, \min_{y \in Y} [\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)] \quad \text{para toda } x \in X, z \in Z \quad (66)$$

Las operaciones de intersección y unión se definen como sigue:

Sean  $R$  y  $S$  relaciones binarias definidas en  $X \times Y$ . La intersección de  $R$  y  $S$  está definida por medio de alguna norma triangular:

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)): \forall (x, y) \in X \times Y \quad (67)$$

La unión está definida por alguna co-norma triangular de la siguiente manera:

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)): \forall (x, y) \in X \times Y \quad (68)$$

### 2.2.4.- RAZONAMIENTO APROXIMADO EN LÓGICA DIFUSA

En contraste con la inferencia en lógica clásica, si se tienen proposiciones que representan valores aproximados se obtendrá un consecuente aproximado dado por conjuntos difusos. El razonamiento aproximado es usado para representar y “razonar” con información dada por enunciados en el lenguaje natural de la forma “*el Error tiene la propiedad de ser Negativo y a la vez Grande*”.

Si escogemos el símbolo  $E$  para indicar la variable física *error* y el símbolo  $NG$  para indicar el valor particular de “Negativo-Grande”, la representación simbólica del enunciado es  $E$  es  $NG$ . Ésta expresión es llamada proposición difusa y está definida por una función de pertenencia  $\mu_{NB}$  sobre el universo de discurso del error  $E$ .

#### 2.2.4.1.- Propositiones difusas

Con el fin poder realizar el razonamiento aproximado se debe hacer uso de los siguientes conceptos para formar proposiciones que son la base para el razonamiento aproximado:

*Predicado difuso.* Es la descripción difusa en el lenguaje natural, como *alto, enfermo, joven, poco, pesado*.

*Modificadores del predicado difuso.* En lógica tradicional el modificador es la negación NOT. En lógica difusa existe una variedad de modificadores como *muy, más o menos, ligeramente, extremadamente, etc.*

#### 2.2.4.2.- Razonamiento aproximado

En razonamiento aproximado se puede hacer uso de mecanismos o modos explícitos e implícitos para relacionar dos proposiciones difusas. El resultado de este razonamiento también puede ser una proposición difusa. Existen cuatro modos principales de razonamiento, pero sólo el *razonamiento categórico* y el *razonamiento cuantitativo* son de interés para el control difuso. Dentro del razonamiento categórico, un mecanismo explícito es la *regla de inferencia composicional*. Las reglas de inferencia difusa basadas en el *Modus Ponens Generalizado* (MPG) y en el *Modus Tollens Generalizado* (MTG) son mecanismos de razonamiento cuantitativo. De estas dos reglas de inferencia difusa sólo el MPG tiene un valor práctico porque representa la manera de inferir partiendo de datos conocidos expresados en las proposiciones para inferir un resultado y no de manera inversa como en el MTG.

Regla de inferencia composicional:

$$\begin{aligned} X \text{ es } A \\ (X, Y) \text{ es } R \\ Y \text{ es } A \circ R \end{aligned}$$

Donde  $A \circ R$  indica la composición *max, min* del conjunto difuso  $A$  y la relación difusa  $R$ .

*Modus Ponens Generalizado (MPG).* Si los conjuntos difusos  $A, A', B, B'$  de las variables lingüísticas  $x$  y  $y$  son predicados difusos de proposiciones difusas se tiene el siguiente esquema con premisas (o antecedentes) y un consecuente en la inferencia *MPG*:

Premisa 1:  $x$  es  $A'$

Premisa 2: si  $x$  es  $A$  entonces  $y$  es  $B$

Consecuencia:  $y$  es  $B'$

Un ejemplo en el lenguaje natural del *MPG* sobre una sola variable lingüística es la siguiente:

Premisa 1 (afirmación): *la curva es muy cerrada*

Premisa 2 (regla): *si la curva es cerrada entonces es peligrosa*

Consecuencia: *la curva es muy peligrosa*

Como se verá más adelante, el *MPG* da pie a las reglas implícitas de la forma:

*si se cumple un < antecedente > entonces se infiere un < consecuente >*

Del *MPG* se deriva la *regla de inferencia composicional* que tiene la siguiente forma:

Premisa 1:  $x$  es  $A'$

Premisa 2:  $x$  se relaciona a través de  $R$  con  $y$

Consecuencia:  $y$  es  $B'$

#### 2.2.4.3.- Razonamiento Cuantitativo

El razonamiento cuantitativo se refiere a un modo de razonamiento en donde la relación entrada-salida de un sistema es expresado como una colección de reglas *SI – ENTONCES* difusas en donde las premisas y los consecuentes son variables lingüísticas. Por ejemplo, si  $X$  y  $Y$  son las variables de entrada y  $Z$  es la variable de salida, la relación entre  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  puede expresarse como:

*SI  $X$  es  $A_1$  AND  $Y$  es  $B_1$ , ENTONCES  $Z$  es  $C_1$*

*SI  $X$  es  $A_2$  AND  $Y$  es  $B_2$ , ENTONCES  $Z$  es  $C_2$*

*SI ... AND ... ENTONCES ...*

*SI  $X$  es  $A_n$  AND  $Y$  es  $B_n$ , ENTONCES  $Z$  es  $C_n$*

Dónde:

$A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son conjuntos difusos en sus respectivos universos de discurso.

#### 2.2.5.- IMPLICACIÓN DIFUSA

Para la implicación difusa el razonamiento aproximado juega un papel importante. En específico, el *MPG* es relevante cuando se quiere inferir una conclusión a partir de unas premisas. En general, una regla difusa es una relación difusa que es expresada como una implicación  $R: A \rightarrow B$  cuya conclusión se puede obtener según la regla de inferencia composicional. Sin embargo, existen otros tipos de

operadores de composición difusa que sustituyen la regla de inferencia composicional. Esta es la operación *max-min* y la operación producto máximo que en realidad son norma-t.

Operador min (*Mamdani – R<sub>C</sub>*):  $a \rightarrow b = a \wedge b$ , su función de pertenencia es:

$$\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad (69)$$

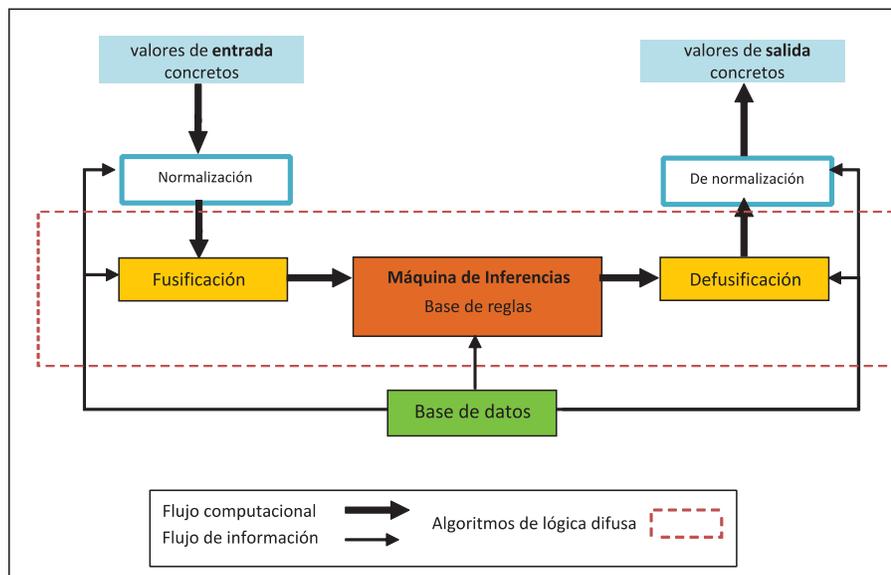
Operador producto (*Larse – R<sub>P</sub>*):  $a \rightarrow b = a \cdot b$ , su función de pertenencia es:

$$\mu_A(x) \cdot \mu_B(y) \quad (70)$$

### 2.3.- ESTRUCTURA DE UN CONTROL DIFUSO

La implementación de un control difuso se constituye, básicamente, con un conjunto de etapas con los algoritmos que se mencionan a continuación. En la primera etapa, se convierten los valores concretos de entrada a valores difusos a través de variables lingüísticas representadas por conjuntos difusos. Esta etapa es indispensable para que se realicen las inferencias difusas con la información de las variables de interés, que está expresada inicialmente en valores concretos. En la etapa siguiente, se realizan inferencias difusas en el núcleo o *kernel*, que emulan una decisión humana por medio de la implicación de conjuntos difusos de entrada, basándose en unas *reglas de inferencia*, para generar una acción de control. En la etapa final, la acción de control puesta en valores difusos se transforma a valores concretos para poder incrustarse en el lazo de control.

La estructura de un control difuso con sus bloques principales se muestra en la **Figura 14** y sus elementos son descritos en los siguientes párrafos. Las flechas gruesas indican el flujo computacional o flujo operativo, desde que la información concreta llega al controlador hasta que éste genera la salida, que será la acción de control en un esquema de control de un sistema en lazo cerrado. Las flechas delgadas representan el flujo de información surgida de la base de datos que contiene el conocimiento experto.



**Figura 14.-** Principales bloques que conforman a un controlador difuso.

### 2.3.1.- NORMALIZACIÓN

Realiza un cambio en la escala de los valores físicos de la variable de entrada a su correspondiente dominio normalizado. Éste bloque es opcional.

### 2.3.2.- FUSIFICACIÓN

La fusificación convierte los valores concretos de la o las variables de entrada a su representación en conjuntos difusos sobre universos de discurso de las variables. En la representación de los conjuntos se utilizan números difusos.

### 2.3.3.- BASE DE CONOCIMIENTO

La base de datos se construye a partir del conocimiento experto y es lo que caracteriza a los bloques de normalización-denormalización, fusificación-defusificación, reglas difusas y la distribución de los conjuntos difusos de las variables lingüísticas.

#### 2.3.3.1.- Reglas difusas

La función básica de las reglas difusas es representar de manera estructurada la estrategia de control de un operador experto planteando un conjunto de reglas "si – entonces" implementadas fácilmente como enunciados condicionales difusos de la forma

$$si < \begin{matrix} \text{valor lingüístico} \\ \text{del estado del proceso} \end{matrix} > \text{ entonces } < \begin{matrix} \text{valor lingüístico} \\ \text{de la acción de control} \end{matrix} > \quad (71)$$

Donde la parte que sigue a *si* de la regla es llamada *antecedente* y es una descripción actual del proceso en términos de combinaciones lógicas de proposiciones difusas. La parte posterior *entonces* es llamado *consecuente* y también es una descripción de la salida de control en términos de combinaciones lógicas de proposiciones difusas. Estas proposiciones establecen cuales variables va a tomar la salida de control cuando se cumplen, en cierto grado, las reglas antecedentes que describen el proceso del sistema.

El número de reglas está determinado por la cardinalidad de un conjunto de valores lingüísticos. Entre más reglas existan más tiempo tomará al control difuso en generar una acción de control.

#### 2.3.3.2.- Máquina de inferencias

Es el núcleo del controlador difuso porque es la parte que relaciona las variables lingüísticas de entrada (antecedentes) con las de salida (consecuentes). Una regla de control difuso de la forma *si < x es A > entonces < y es B >* es una relación difusa dada por una implicación difusa indicada por  $A \rightarrow B$ , donde  $A$  y  $B$  son conjuntos difusos en universos  $U$  y  $V$ , con funciones de pertenencia  $\mu_A$  y  $\mu_B$ , respectivamente. Se han propuesto varias funciones de implicación difusa donde los antecedentes y consecuentes son variables difusas, pero la más utilizada en los controles difusos, por su aplicación práctica, es la implicación Mamdani:

$$R_C = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / (u, v) \quad (72)$$

Para formar las reglas de inferencia, de la forma *si – entonces*, en la práctica se implementan de la siguiente manera:

Supongamos que tenemos las siguientes reglas de control difusas:

$$R_1: \text{ if } x \text{ es } A_1 \text{ and } y \text{ es } B_1 \text{ entonces } z \text{ is } C_1$$

$$R_2: \text{ if } x \text{ es } A_2 \text{ and } y \text{ es } B_2 \text{ entonces } z \text{ is } C_2$$

Para cada regla se obtiene el grado en que los conjuntos difusos están implicados a través de la implicación Mamdani:

$$\alpha_1 = \mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{B_1}(y) \quad (73)$$

$$\alpha_2 = \mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{B_2}(y) \quad (74)$$

El modo de razonamiento usa la implicación Mamdani para obtener la función de pertenencia de la acción de control por cada regla,

$$\mu_{C_i'} = \alpha_i \wedge \mu_{C_i}(w) \quad (75)$$

La función de pertenencia total es:

$$\mu_C = \mu_{C_1'} \vee \mu_{C_2'} = [\alpha_1 \wedge \mu_{C_1}(w)] \vee [\alpha_2 \wedge \mu_{C_2}(w)] \quad (76)$$

Al tomar los valores concretos de entrada y al verificar cuales conjuntos difusos están implicados en las variables lingüísticas de entrada se obtiene su grado de pertenencia para representarlos en los antecedentes de las reglas y en su caso disparar cada regla individual. Los conjuntos de salida se truncan de acuerdo al grado de pertenencia de los conjuntos antecedentes para obtener los conjuntos de salida en los consecuentes. Finalmente, cada conjunto de salida contribuye para formar un conjunto de salida total.

*Ejemplo.* Se tiene la regla  $R$ : *si* ( $x$  es  $PM$ )  $\xrightarrow{\text{entonces}}$  ( $z$  es  $NS$ ) y, operativamente, se tiene un valor igual a 4 en el universo de entrada  $x$  que corresponde al conjunto difuso  $PM$  con grado de pertenencia igual a  $1/3$ . Entonces, el consecuente implicado según la regla es el conjunto difuso  $NS$ . La función de pertenencia resultante de aplicar la regla es,

$$\mu_{CNS}(u) = \min(\mu_{PM}(4), \mu_{NS}(u)) = \min\left(\frac{1}{3}, \mu_{NS}(u)\right)$$

$$\mu_{CNS}(u) = \begin{cases} \mu_{NS}(u) & \text{si } \mu_{NS}(u) \leq \frac{1}{3} \\ \mu_{PM}(4) = \frac{1}{3} & \text{de otro modo} \end{cases}$$

La función de pertenencia generada según la regla  $R$  se representa en la **Figura 15**. La forma gaussiana representa la función  $\mu_{NS}(u)$  y la función remarcada es  $\mu_{CNS}(u)$ .

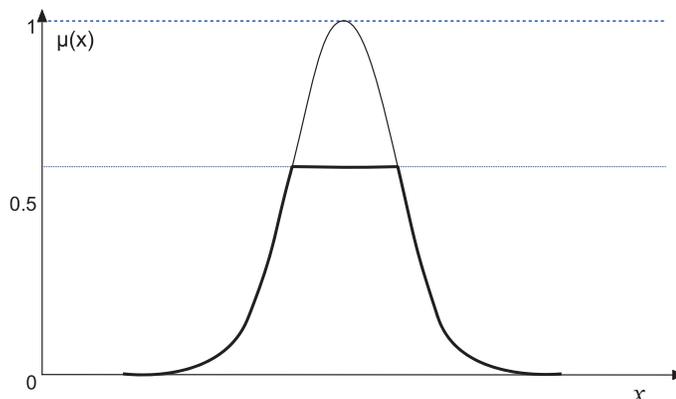


Figura 15.- Función de pertenencia CNS trunca.

### 2.3.4.- DEFUSIFICACIÓN

La salida del bloque de inferencia es un conjunto difuso que representa la *distribución de posibilidad* de la acción de control. En una aplicación práctica se requiere un valor de control concreto en vez de su representación difusa, entonces es necesario una estrategia de defusificación que mapee los valores del espacio difuso definido sobre el universo de discurso de salida al espacio de valores concretos de salida.

La estrategia de defusificación busca producir un valor concreto a partir de los conjuntos difusos inferidos por las reglas en la máquina de inferencias. Las estrategias comunes son: Método del criterio máximo, la Media del máximo y la del Centro de Área (COA).

La fórmula para el COA es:

$$z_0 = \frac{\int_{CS} cs \cdot \mu_{TOTAL}(cs) dcs}{\int_{CS} \mu_{TOTAL}(cs) dcs} \quad (77)$$

En la **Figura 16** se muestra una función de pertenencia en un universo de salida formado por la contribución de varias reglas disparadas. El valor concreto de salida se obtiene al aplicar alguna de las estrategias de defusificación sobre el conjunto generado.

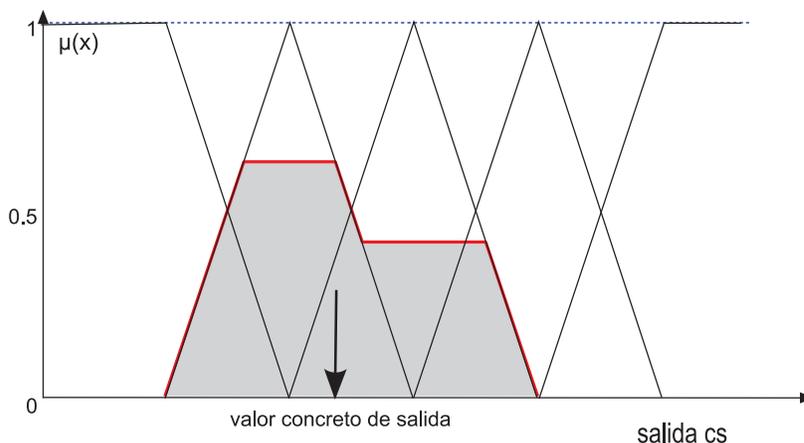


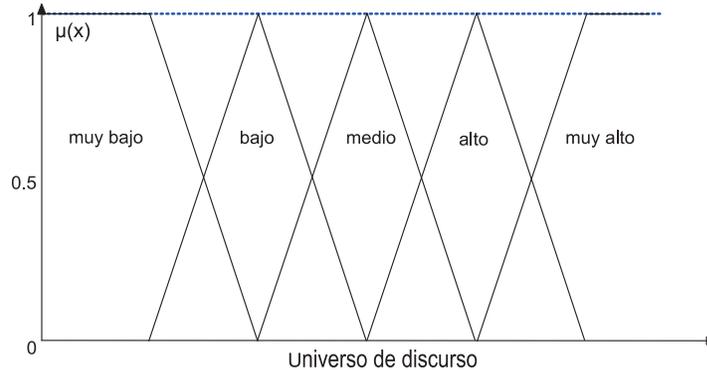
Figura 16.- Función de pertenencia de salida 'cs' generada por alguna base de reglas.

### 2.3.4.1.- Distribución de los conjuntos difusos

Un aspecto importante a considerar en el momento de definir la cantidad de valores lingüísticos de las variables lingüísticas de entrada es su distribución a lo largo del universo de discurso y su forma. Por simplicidad, la forma más usada en la implementación de conjuntos difusos es la forma triangular y la trapezoidal, debido al número de parámetros con que se pueden definir, además de que es una buena aproximación a la función de distribución gaussiana.

Intuitivamente, el controlador siempre debe proporcionar una acción de control para cualquier valor de entrada, lo cual no se logra si los conjuntos difusos no cubren todos los valores del universo de discurso. Se ha visto que las funciones de pertenencia deben estar traslapadas y que el punto de cruce entre dos adyacentes debe ser de 0.5 [18] [19], como se ve en la **Figura 17**, porque con ello la superficie de control es más suave.

Una variable lingüística de entrada con muchos conjuntos dará una acción de control más fina y suave, pero con un costo computacional mayor.



**Figura 17.-** Distribución uniforme de conjuntos y traslape a 0.5.

## 2.3.5.- REPRESENTACIÓN

### 2.3.5.1.- Matriz Asociativa Difusa

La Matriz Asociativa Difusa (*Fuzzy Associative Matrix*, FAM, en inglés) es una manera de presentar en forma tabular las reglas difusas. Generalmente, se construyen para sistemas MISO  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , aunque no se limitan a ello. Con la FAM, es posible tener una idea global de las reglas difusas para poder definir las y posteriormente realizar modificaciones.

### 2.3.5.2.- Superficie de control

Un controlador difuso es un mapeo estático  $F$  de valores precisos de entrada a valores precisos de salida.

$$F: \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z} \quad (78)$$

La superficie de control es una representación gráfica de todos los valores de entrada y salida para sistemas MISO  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . La superficie de control permite visualizar las pendientes de la acción de control, para deducir de manera intuitiva, si una acción de control es brusca o suave en ciertas regiones.

### 2.3.6.- CONTROL DIFUSO TIPO PID

La ecuación en el dominio del tiempo que representa a un controlador PID convencional es:

$$u = K_p \cdot e + K_D \cdot \dot{e} + K_I \cdot \int e \quad (79)$$

Para representar de manera lingüística al controlador PID convencional, en un controlador difuso tipo PID los antecedentes de las reglas difusas se escogen de manera que se tengan los tres términos: el proporcional, el integral y el derivativo.

De esta manera, los antecedentes son las siguientes variables lingüísticas siguientes:

- “error”,  $e$ .
- “cambio de error”,  $\Delta e$  o  $\dot{e}$ .
- “sumatoria de errores”,  $\delta e$ .

Para el consecuente de las reglas difusas, se escoge entre:

- “cambio en la salida de control”,  $\Delta u$ .
- “salida de control”,  $u$ .

En el caso del consecuente “cambio en la salida del error”, es necesario realizar una integración para poder obtener la salida de control. Se utiliza porque algunas veces se prefiere obtener la salida de un controlador tipo PI a partir de una configuración tipo PD porque resulta más intuitivo plantar las reglas difusas de esa manera [20] [9].

Con los antecedentes y el consecuente, las reglas difusas del controlador difuso tipo PID son de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} \text{SI } e \text{ es } < \begin{array}{c} \text{valor} \\ \text{lingüístico} \end{array} > \\ \text{AND } \Delta e \text{ es } < \begin{array}{c} \text{valor} \\ \text{lingüístico} \end{array} > \\ \text{AND } \delta e \text{ es } < \begin{array}{c} \text{valor} \\ \text{lingüístico} \end{array} > \end{array} \right\} \text{ ENTONCES } u \text{ es } < \begin{array}{c} \text{valor} \\ \text{lingüístico} \end{array} > \quad (80)$$

### 2.4 SINTONIZACIÓN DE CONTROLADORES DIFUSOS

Por lo general, la sintonización de controladores difusos es una tarea ardua porque son muchos los parámetros del controlador que se pueden sintonizar y cada uno de ellos puede generar no-linealidades que no se pueden describir analíticamente o la descripción resulta demasiado compleja [21]. Sin embargo, esta característica convierte al Control Difuso en una técnica de control poderosa aunque hasta el momento no existe algún método sistemático y generalizado de diseño y sintonización que se pueda aplicar a la mayoría de las plantas, pero sí se pueden encontrar, en la literatura, numerosos intentos para establecer dicho método [22]. Por lo tanto, para lograr el objetivo de este trabajo, es necesario establecer un método sistemático tanto para tratar de optimizar el tiempo durante la sintonización y evitar la redundancia en el mismo, así como para poder evaluar el controlador sintonizado. Además, se debe hacer una distinción entre los parámetros que provocan mayor impacto que otros.

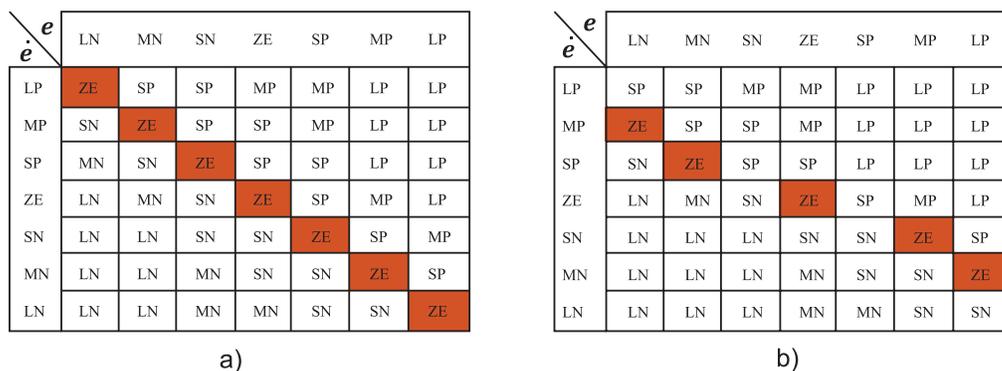
Como se mencionó, debido a las propiedades no-lineales del controlador, se tiene el potencial de lograr un mejor desempeño en comparación con los controladores lineales convencionales cuando se controlan plantas lineales o no-lineales, siempre y cuando los parámetros del controlador sean establecidos apropiadamente. Esto se puede lograr con el método de *intento-error*, apoyado por un operador experto en la dinámica de la planta, quien aporta el conocimiento experto.

La sintonización del controlador se hace sobre parámetros estructurales y sobre los elementos que lo conforman una vez establecida la estructura. Para ambos casos, es importante identificar el grado de alteración sobre el controlador de cada parámetro que se puede sintonizar. George K. I. Mann [23] propone una agrupación sobre aquellos parámetros que resultan en una alteración drástica y sobre aquellos parámetros que resultan en una alteración fina. Para el ajuste drástico, la sintonización es sobre los parámetros que conforman la base de conocimiento, para el ajuste fino se varían las ganancias de los factores de escala y los parámetros de los conjuntos difusos. Los parámetros de sintonización se resumen a continuación.

**Tabla 2.- Parámetros de sintonización de los controladores difusos**

Parámetros de estructura		Parámetros post diseño	
Elemento del controlador	Parámetros a sintonizar	Elemento del controlador	Parámetros a sintonizar
Conjuntos difusos	Número de conjuntos	Universos de discurso	Factores de escala
Reglas difusas	Número de reglas y establecimiento de las mismas	Funciones de membresía	Soportes, picos, puntos cruce
Inferencia	Mecanismos de inferencia		
Defusificación	Mecanismos de Defusificación		

Las reglas difusas contienen la información básica de la relación entrada-salida establecida en la etapa de diseño; el agregar, eliminar o modificar una regla representa un cambio drástico en la salida. Para controladores de dos dimensiones, por ejemplo tipo PD o tipo PI, el conjunto de reglas representada en una FAM generalmente se diseña en una disposición diagonal con la salida cero en el centro. Una estrategia de sintonización consiste en acentuar esta disposición diagonal haciéndola más horizontal para obtener una mayor respuesta cuando el sistema a controlar presenta retrasos de tiempo significativos [24] [25]. El desplazamiento se muestra en la **Figura 18**.



**Figura 18.- a) FAM original b) FAM desplazada.**

Un cambio en los factores de escala de los universos de discurso de las variables de entrada o salida no alteran la forma de la superficie de control, pero sí cambia su pendiente. Esta acción se asemeja a variar las ganancias de un control PID tradicional, lo que hace que su uso sea muy difundido a la hora de realizar una sintonización. Varios autores han desarrollado metodologías de sintonización partiendo de éste hecho [9] [26]. Es una buena idea establecer los factores de escala a partir de las ganancias sintonizadas de un controlador PID lineal obtenidas para la planta que se desea controlar, y después diseñar un control difuso tipo lineal y posteriormente realizar una sintonización no-lineal. Existen muchos procedimientos en este sentido reportados en los textos especializados [19] [10].

La sintonización fina se logra ajustando los parámetros de los conjuntos difusos. Hemos visto que por su simpleza, la función más empleada es la forma triangular. Los parámetros a ajustar de este tipo de funciones son la ubicación de los dos puntos soporte y del pico, y como consecuencia de esto, los puntos cruce entre dos funciones adyacentes. Como se mencionó anteriormente, es recomendable establecer los cruces entre dos funciones de pertenencia adyacentes por arriba de 0.5 para lograr una salida de control suave o con menores sobresaltos. Varios autores proponen establecer este punto de cruce justo a 0.5 [9] [18] [23].

Para los controladores difusos tipo PID, la sintonización fina se puede realizar alrededor del punto central de la superficie de control. Cuando las funciones de pertenencia se concentran hacia el centro del universo de discurso al que pertenecen, el efecto que se observa es un aumento de la inclinación solamente en la parte central de la superficie de control, lo que implica hacer menos lineal al controlador en ese punto. Con esto se logra una acción de control más fuerte alrededor del centro de los universos de discurso con lo que, eventualmente, se mejora la respuesta transitoria. Sin embargo, al hacer más fuerte la acción de control, esta sintonización puede llevar al sistema a presentar un comportamiento oscilatorio o, incluso, causar inestabilidad.



# CAPÍTULO 3

## SIMULACIÓN DEL MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA

### 3.1 INTRODUCCIÓN

De manera general, una simulación es experimentar con un modelo que reproduce las características más importantes de un sistema real. En ingeniería, las simulaciones se emplean a lo largo de todo el proceso de diseño de un sistema, y aún posterior a éste. Cuando el diseñador trabaja con un modelo adecuado del sistema que está desarrollando, puede adquirir un mayor conocimiento, al poder efectuar simulaciones con diferentes alternativas de diseño, lo que se ve reflejado en una mejora en la calidad del diseño final. Aún más, las ventajas de realizar una simulación se encuentra en la seguridad del propio sistema y de quienes lo operan, en el costo y en el tiempo de desarrollo, principalmente.

Los modelos se pueden construir de varias maneras, en particular, cuando se trata de un modelo matemático que se resuelve por medio de cálculos numéricos se habla de una simulación numérica. Las simulaciones numéricas son las más utilizada actualmente, porque es en una computadora donde se pueden realizar las operaciones que resuelven una ecuación diferencial ordinaria, para el caso continuo, o una ecuación en diferencias, en el caso discreto, que describe a un sistema en particular. En el primer caso se emplean métodos de integración numérica y para el segundo caso se resuelve la ecuación en diferencias. Otra razón por la que se utiliza una simulación por computadora es la versatilidad que se tiene para hacer cambios en el modelo y en los parámetros de simulación.

Una cosa muy importante a considerar cuando se realiza una simulación es el modelo que representa al sistema. La mayoría de los sistemas reales son demasiado complejos para modelarlos de manera exacta, de manera que el modelo debe ser representativo del sistema, y a la vez, simple para que se pueda manejar con facilidad. La *parametrización* de un modelo consiste en trasladar los parámetros del sistema real al modelo que representa al sistema. El modelo parametrizado se puede mejorar como resultado de la propia simulación. Este proceso, a grandes rasgos, es el siguiente: se comienza por establecer un modelo, se realiza la simulación con ese modelo, se evalúa el resultado y se toma nota de ello, después, se hacen las modificaciones necesarias para mejorar el modelo según la evaluación. Este proceso continúa de manera iterativa hasta que se obtiene el modelo que represente las características del sistema según se requiera.

En este trabajo de tesis, se hizo uso intensivo de la simulación de un modelo continuo del instrumento LOLA en el software Simulink®, y a la cual se incluyó la perturbación de los datos de turbulencia atmosférica real. Dicha simulación es la herramienta principal para sintonizar el controlador difuso. En el **Apéndice A**, se dan las características principales de este software.

Previo a este trabajo, se contaba con un modelo del sistema en el software mencionado, que se utilizó como base para continuar con la *parametrización* de acuerdo a las especificaciones de LOLA. En dicho modelo, se llevaron a cabo las modificaciones necesarias para tener un modelo que permitió realizar el proceso de sintonización del controlador difuso, de manera sistemática y considerando los datos reales de perturbación.

### 3.2.- MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA

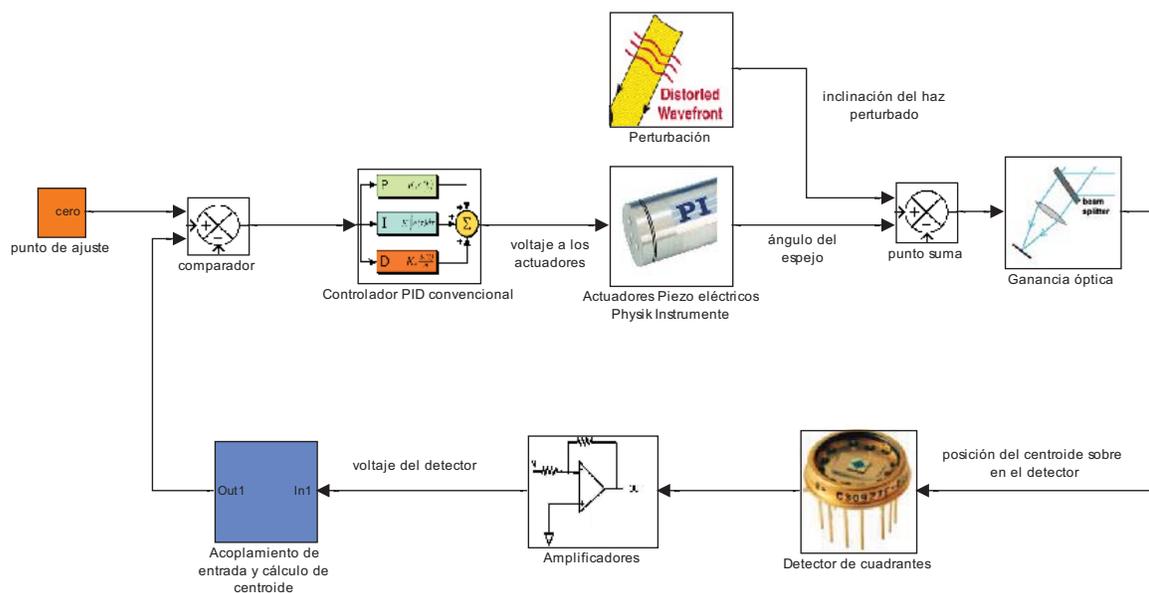
Una de las mayores dificultades para modelar el instrumento de óptica adaptativa LOLA es representar la inclinación o *ángulo de arribo* del haz luminoso que resulta de la perturbación *tilt* en el frente de onda. En el sistema real, el haz de luz tiene que recorrer la óptica del instrumento (incluyendo al espejo corrector) hasta el detector de cuadrantes, de allí se realiza el cálculo del centroide de la intensidad de la imagen en el plano. Como se trata de un sistema de posicionamiento del centroide, el enfoque que se le da en este modelo es solamente referido a la posición del centroide, que como ya se mencionó en el capítulo anterior, es una consecuencia de la inclinación del haz, y no se toman en cuenta parámetros ópticos como la intensidad de la imagen.

Hasta hace unos años, en el modelado de los sistemas de óptica adaptativa se consideraba que solamente transcurría un tiempo  $\tau_a$  desde que se medía al frente de onda y hasta que se realizaba su corrección [27]. Es decir, la dinámica de los actuadores y el algoritmo de control eran representados como un retraso de tiempo puro. Esto hacía muy inexacto al modelo. Una mejor manera de representar las características del sistema de OA es incluir el modelo dinámico de los actuadores, pues como se vio en el capítulo anterior, su respuesta dinámica es la que domina en el lazo de control.

La dinámica de los actuadores está representada por las funciones de transferencia encontradas con el método de identificación ARMAX [5]. También se contempla la respuesta dinámica de la electrónica asociada al detector y a la electrónica encargada de realizar la transformación de coordenadas, que, aunque no son las dinámicas dominantes en el sistema, se incluyen para tener un modelo mejor representado. Como contribución de este trabajo de tesis, al modelo en Simulink® con que ya se contaba, se le realizaron algunas modificaciones y actualizaciones para incluir la perturbación aleatoria, además de continuar con la *parametrización* para obtener un mejor resultado en la sintonización del controlador difuso.

El modelo que representa al sistema es un modelo MIMO de dos entradas y dos salidas, pero debido a las características de los elementos que componen a LOLA, el número de señales con que se interconectan cada uno de éstos puede variar de dos, tres o cuatro señal. Esto se encuentra contemplado en el modelo. En el instrumento, el detector de cuadrantes genera una señal de corriente proporcional al número de fotones para cada uno de los cuadrantes; en el modelo, el detector de cuadrantes recibe dos señales que representan la posición del centroide de la intensidad de la imagen sobre el detector y devuelve cuatro señales que corresponden a los voltajes de cada actuador según la posición del centroide. Estas señales son transformadas a una posición cartesiana que es la que recibe el controlador. El controlador devuelve otra señal cartesiana, que después se tiene que transformar a su equivalente a ángulo, después, ésta se transforma en las tres señales de desplazamiento para cada uno de los actuadores piezo-eléctricos. Una vista de los bloques que forman el modelo se puede ver en la **Figura 19**.

### Modelo del Sistema de Óptica Adaptativa LOLA



**Figura 19.-** Vista general del modelo en Simulink® del instrumento LOLA. La disposición de los principales bloques que lo constituyen corresponde a la estructura típica de lazo cerrado de control.

Aunque se está modelando un sistema en donde el algoritmo de control deberá implantarse en una plataforma digital, no se incluyen bloques de cuantización de señal y de muestra-retención para representar a un convertidor analógico-digital y a un convertidor digital-analógico. El modelo se generaliza a un algoritmo continuo para flexibilizar la elección de una plataforma de hardware o software en donde posiblemente se implante el controlador. De otro modo, al incluir los elementos discretos en el modelo en Simulink®, éste se convertiría en un modelo híbrido con elementos continuos y elementos discretos.

La planta en lazo de control es la combinación de la dinámica del actuador y del proceso a controlar [28] [29]. En otras palabras, es la dinámica localizada entre la variable de control y el proceso que contiene a la variable a controlar. De manera estricta, la variable a controlar es la posición del centroide del área iluminada por el haz sobre el detector, y son los actuadores piezo-eléctricos quienes mueven al espejo plano para realizar la corrección de la inclinación del haz para mantener al centroide al centro del detector. Sin embargo, la inclinación del haz, y consecuentemente el centroide sobre el detector, tiene retrasos de tiempo mínimos comparados con otras respuestas dinámicas del sistema, por lo que es la dinámica de los actuadores la que predomina. En consecuencia, son los actuadores piezo eléctricos quienes se consideran la planta a controlar.

El bloque punto de suma de la perturbación se coloca después de los actuadores piezo-eléctricos, porque la perturbación se efectúa sobre la posición angular del haz de luz y no en el voltaje que se inyecta a los actuadores. Cabe mencionar que en el modelo de retroalimentación con perturbación, usualmente utilizado en ingeniería de control, coloca el punto suma antes de la planta.

La señal de error es la diferencia entre la referencia cero, que es constante, y la posición del centroide. La referencia es cero en todo momento porque se necesita que el centroide de la imagen se mantenga en el origen de coordenadas, es decir, en el centro del detector. Un lazo de control con esquema de

regulación es aquel que disminuye las perturbaciones de la variable a controlar cuando la referencia se mantiene constante [28] [30] [31]. A partir de lo anterior, podemos asegurar que LOLA tiene un lazo de control con esquema de regulación.

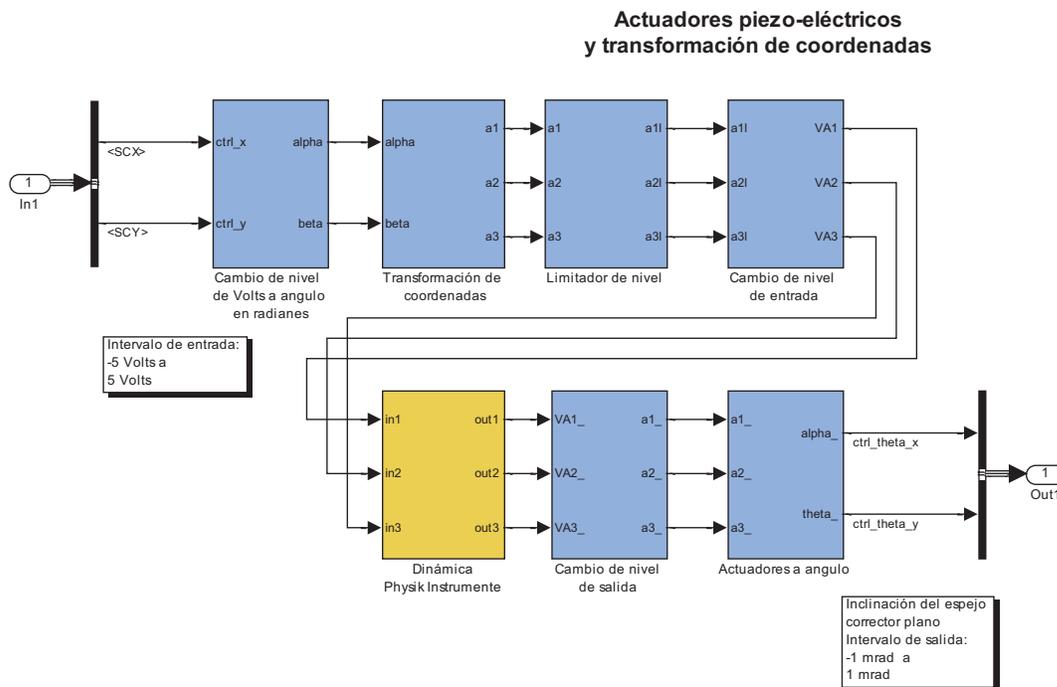
### 3.2.1.- DESCRIPCIÓN DE CADA BLOQUE

En los siguientes párrafos se describe el funcionamiento de cada subsistema que compone al modelo y se da una explicación de la operación que realiza. Se hace referencia inmediata al capítulo anterior para relacionar los parámetros de cada bloque con los parámetros del instrumento allí descritos.

#### 3.2.1.1.- Subsistema “Actuadores Piezoeléctricos Physik Instrumente”

El subsistema recibe dos señales en un intervalo de -5 a 5 [Volts], que corresponden a las señales de los ejes, generadas por el subsistema de control de control, y entrega dos señales, en el intervalo de  $-1e-3$  a  $1e-3$  [radianes], que representan la inclinación del haz reflejado en el espejo corrector plano, en los dos ejes. Incluye la dinámica de los tres actuadores piezo-eléctricos y las operaciones de transformación de coordenadas necesarias para obtener el valor de desplazamiento lineal de los actuadores, a partir de las señales de inclinación del espejo en los dos ejes. La **Figura 20** muestra los bloques que componen el subsistema.

Por la disposición geométrica de los actuadores, la inclinación en el eje que es coincidente con uno de los actuadores solamente necesita el desplazamiento de dos actuadores. Para el otro eje se necesita el desplazamiento de los tres actuadores. Por eso es importante introducir la dinámica individual de los actuadores, lo que implica hacer uso de un bloque de transformación de coordenadas.



**Figura 20.-** Bloques del subsistema “Actuadores piezo-eléctricos”. Los dos bloques de transformación de coordenadas son necesarios para incluir la dinámica por separado de los tres actuadores.

A continuación se da una descripción individual de los bloques y se indica la operación que realizan.

Bloque	Descripción
Cambio de nivel de Volts a ángulo en radianes	<p>Convierte la señal de entrada a su representación en radianes a partir de los valores máximos de la señal de entrada y de la inclinación del espejo. Se consideró el valor máximo de <math>\pm 5 \text{ Volts}</math> para la entrada, y <math>\pm 1 \text{ mrad}</math> de inclinación del espejo corrector como lo reporta el fabricante. La operación que realiza el bloque es:</p> $salida = \frac{\text{inclinación máxima}}{\text{entrada máxima}} \text{entrada} = \frac{1 \text{ mrad}}{5 \text{ Volts}} \text{entrada}$
Transformación de coordenadas	<p>Realiza la siguiente operación para obtener los valores de elongación de los tres actuadores a partir del valor de inclinación en ambos ejes:</p> $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} -\cos 30^\circ & \text{sen } 30^\circ \\ \cos 30^\circ & \text{sen } 30^\circ \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + L/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ <p>Las operaciones de este bloque, en LOLA, las realiza un circuito de amplificadores operacionales.</p> <p><math>L</math> es el valor de elongación máxima de los actuadores. Se añade la mitad de su valor a las elongaciones de los tres actuadores para simular la “flotación” del espejo que se tiene que considerar físicamente.</p>
Limitadores de nivel	Saturan la señal de entrada a 0 mínimo y $10 \cdot 10^{-6}$ máximo para simular el intervalo dinámico de los actuadores.
Cambio de nivel de entrada	<p>Cambia el nivel de elongación a su equivalente en voltaje para ser consistente con los niveles trabajados en la identificación de la dinámica de los actuadores. La operación es la siguiente:</p> $salida = \frac{\text{voltaje máximo}}{\text{elongación máxima}} \text{entrada} = \frac{10 \text{ Volts}}{10 \text{ micrometros}} \text{entrada}$
Dinámica <i>Physik Instrumente</i>	Contiene las funciones de transferencia para cada actuador obtenidas por el método ARMAX. Aunque se tienen diferentes funciones para cada actuador se eligió la más lenta (el peor de los casos) para los tres actuadores.
Cambio de nivel de salida	<p>Regresa el nivel salida de las funciones de transferencia a su equivalente en elongación. La operación es la siguiente:</p> $\begin{aligned} salida &= \frac{\text{elongación máxima}}{\text{voltaje máximo}} \text{entrada} \\ &= \frac{10 \text{ micrometros}}{10 \text{ Volts}} \text{entrada} \end{aligned}$
Actuadores a ángulo	<p>Este bloque realiza la transformación a ángulos a partir del valor de elongaciones de los actuadores según la siguiente ecuación matricial:</p> $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ <p>Físicamente, esta transformación es consecuencia del cambio de ángulo del haz debido al movimiento del espejo corrector plano.</p>

### 3.3.1.2.- Subsistema “Perturbación”

Este subsistema sirve para introducir los datos de perturbación real a la simulación. Realiza la conversión de los datos, en segundos de arco, a unidades de desplazamiento angular de la inclinación del frente de onda del haz luminoso después de que éste se refleja en el espejo corrector plano. El bloque Óptica del telescopio-Tip Tilt a theta contiene tres ganancias para realizar la conversión. Con una ganancia se convierte de segundos de arco a radianes. Una ganancia que está relacionada con la distancia focal efectiva del telescopio  $f_{telescopio} = 15.468$ , y una tercera ganancia que esta relacionada con la distancia focal del espejo colimador  $1/f_{colimador} = 2.518$ .

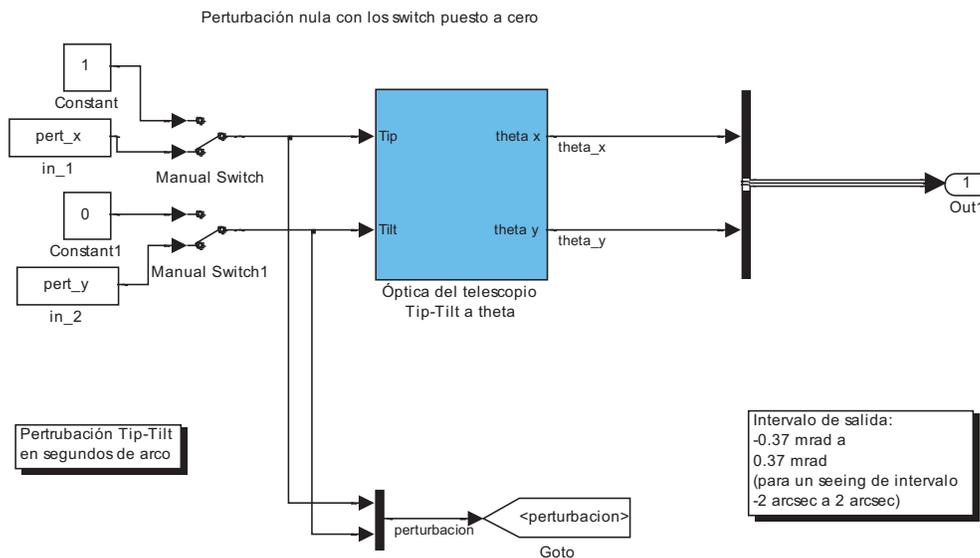
De modo que, para cada eje, la ganancia es:

$$4.8481 \times 10^{-6} \left[ \frac{rad}{arcsec} \right] \times f_{telescopio}[m] \times \frac{1}{f_{colimador}[m]}$$

$$= 4.8481 \times 10^{-6} \times \frac{15.468}{2.518} = 188.98 \times 10^{-6} \left[ \frac{rad}{arcsec} \right]$$

La amplitud máxima del frame de datos de perturbación es de  $2 \text{ arcsec}$ , que por la óptica del instrumento, representa  $0.37 \text{ mrad}$  de inclinación del haz. Recordemos que el espejo corrector puede corregir hasta  $1 \text{ mrad}$  de inclinación; pero la corrección por parte del instrumento está limitado por el tamaño del detector.

#### Perturbación generada a partir de datos tomados de telescopio

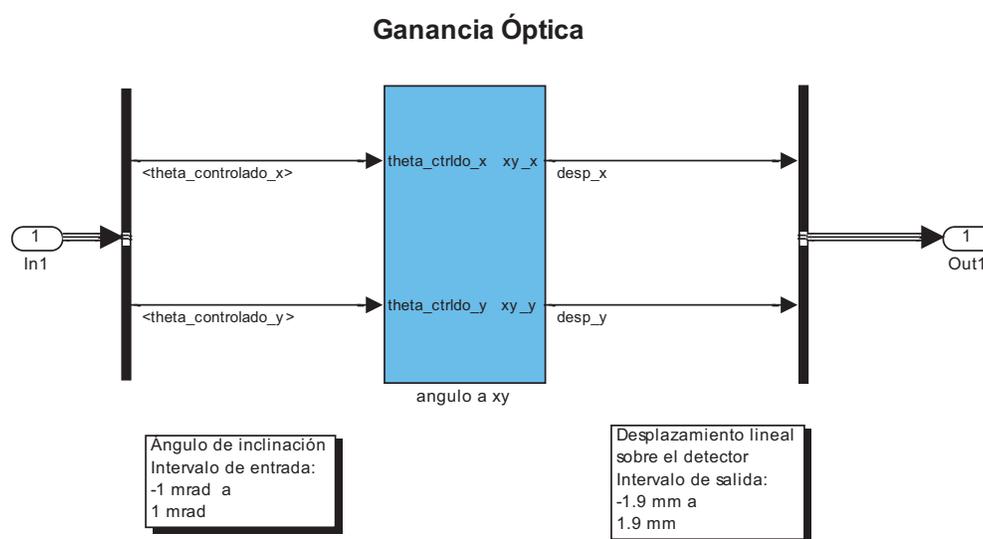


**Figura 21.-** Bloques del subsistema "Perturbación". Los interruptores manuales sirven para realizar pruebas con valores constantes de perturbación

### 3.3.1.3.- Subsistema “Ganancia óptica”

La inclinación del haz luminoso que se refleja en el espejo corrector plano es la suma de la inclinación del haz debido a la perturbación y la debida a la acción de compensación del espejo mismo. El haz proveniente del espejo sigue el camino hacia el detector de cuadrantes a través del espejo con forma de parábola fuera de eje, con distancia focal  $f_{parabólico} = 152.4 \text{ mm}$ , y del objetivo de  $2.5X$ . Este subsistema lleva a cabo la conversión de la inclinación del haz a su desplazamiento lineal resultante sobre el detector de cuadrantes. Una inclinación del haz de  $1 \text{ mrad}$  es equivalente a  $1.9 \text{ mm}$  en el detector.

Este subsistema incluye dos ganancias en serie para cada una de las señales. Las ganancias están relacionadas con la distancia focal  $f = 740 \text{ mm}$  del espejo fuera de eje y con el objetivo de  $2.5X$  de amplificación.



**Figura 22.-** Bloques del subsistema "Ganancia óptica". Este bloque solamente está compuesto por ganancias puras que representan a la óptica del instrumento.

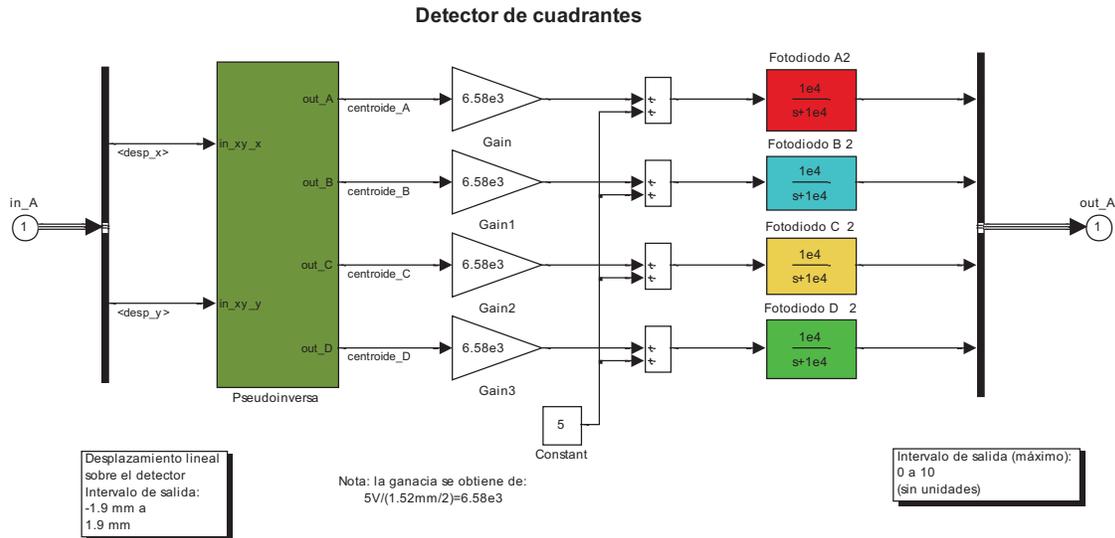
### 3.3.1.4.- Subsistema “Detector de cuadrantes”

Como se explicó en el capítulo anterior, los fotodiodos responden al haz luminoso que llega a su superficie y producen una corriente proporcional a la intensidad luminosa. Como no se está modelando la intensidad luminosa y el tamaño del área que el haz ilumina, sólo se representa la posición del centroide sobre el detector, por lo que se requiere una medida de la magnitud para cada fotodiodo que corresponda a la posición del centroide. La operación de pseudoinversa realiza esta función al descomponer la señal cartesiana del centroide en las cuatro señales de los fotodiodos.

Los bloques de ganancia escalan la señal generada por la operación de pseudoinversa a un nivel de  $5 \text{ Volts}$ , cuando el centroide se encuentra a  $1.52 \text{ mm}$ , que es el radio del detector. Un offset de la mitad del nivel máximo es necesario para que las señales de los fotodiodos trabajen en DC.

La descomposición de la señal se hace para incluir la dinámica individual de los cuatro fotodiodos que forman el detector. La respuesta dinámica de los actuadores es de primer orden, con un polo en  $-10^4$ .

El intervalo de entrada del subsistema es la posición del centroide de la imagen de  $-1.9\text{ mm}$  a  $1.9\text{ mm}$ , y produce cuatro señales de salida de  $0$  a  $100\ \mu\text{A}$ , que corresponden a las corrientes de los fotodiodos.



**Figura 23.-** Bloques del subsistema "Detector de cuadrantes". Una operación de pseudoinversa es necesaria para desacoplar las dos señales de desplazamiento del centroide a cuatro señales, para poder incluir la dinámica individual de los cuatro fotodiodos.

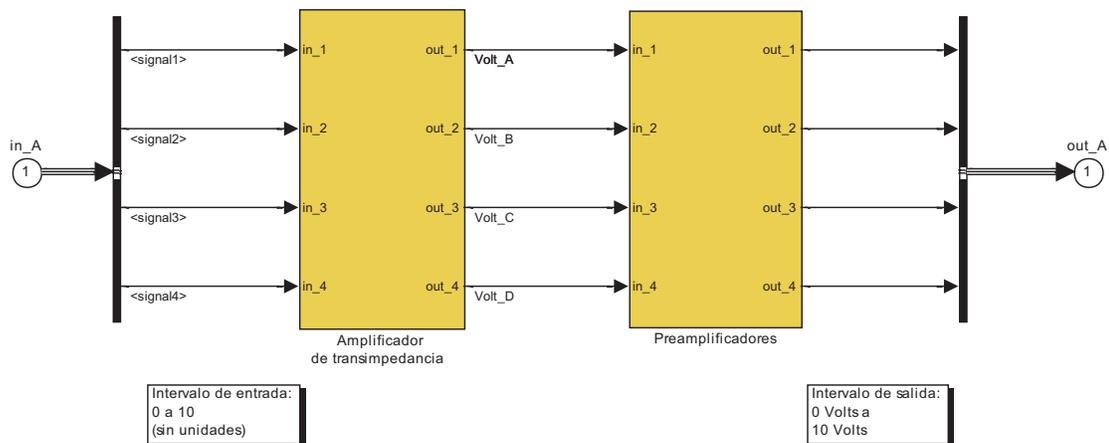
### 3.3.1.5.- Subsistema "Amplificadores"

Este subsistema incluye el modelo dinámico de la electrónica de los amplificadores, para las cuatro señales de los fotodiodos, como una función de transferencia de segundo orden con polos repetidos con valor de  $-10^3$ :

$$G(s) = \frac{(1000)(1000)}{(s - 1000)(s - 1000)} \quad (81)$$

Como se puede ver en la **Figura 24**, el intervalo de entrada es el mismo que el intervalo de salida pues solamente se incluye la dinámica que, además, no agrega un offset en el estado estable, es decir que cuando  $s = 0$  la ganancia es unitaria. Esto representa adecuadamente el comportamiento en el tiempo de la electrónica asociada al detector. Se aprecia que aunque se trata de una función de transferencia de segundo orden, la dinámica dominante sigue siendo la de los actuadores piezo-eléctricos.

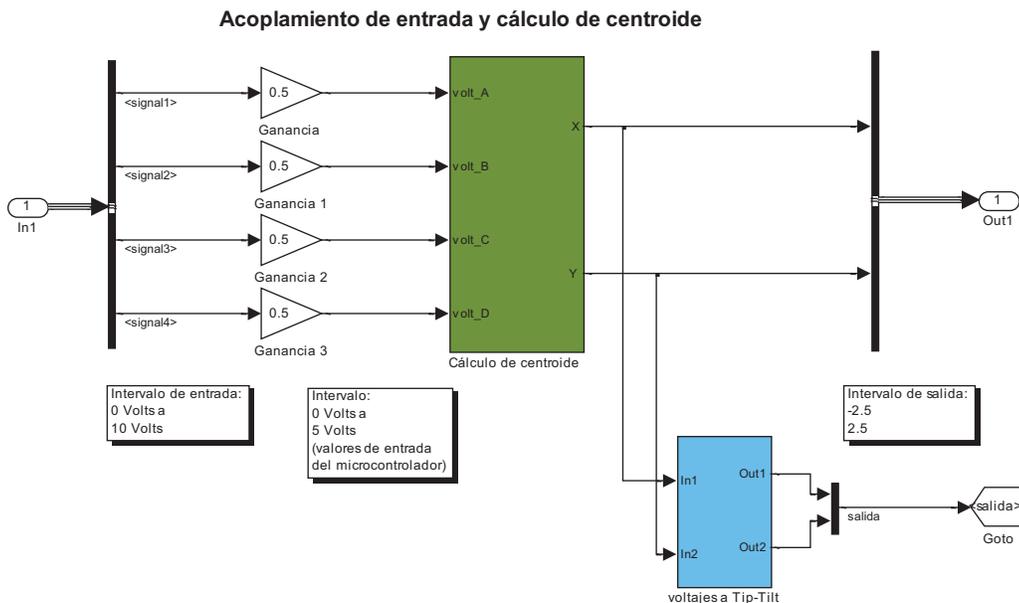
### Amplificadores -funciones de transferencia-



**Figura 24.-** Bloques del subsistema "Amplificadores". Estos bloques incluyen la dinámica de la electrónica asociada con la etapa de amplificación y acondicionador de las señales del detector de cuadrantes.

#### 3.3.1.6.- Subsistema "Cálculo del centroide"

Este subsistema realiza el cálculo de la posición del centroide en coordenadas cartesianas, a partir de los cuatro valores de las señales de voltaje proporcionales provenientes de la electrónica asociada a los fotodiodos. En LOLA, este cálculo lo realiza el microprocesador [7]. El acoplamiento de entrada es una ganancia de 0.5, que cambia el nivel de voltaje de entrada al intervalo de 0 a 5 Volts que maneja el microcontrolador.

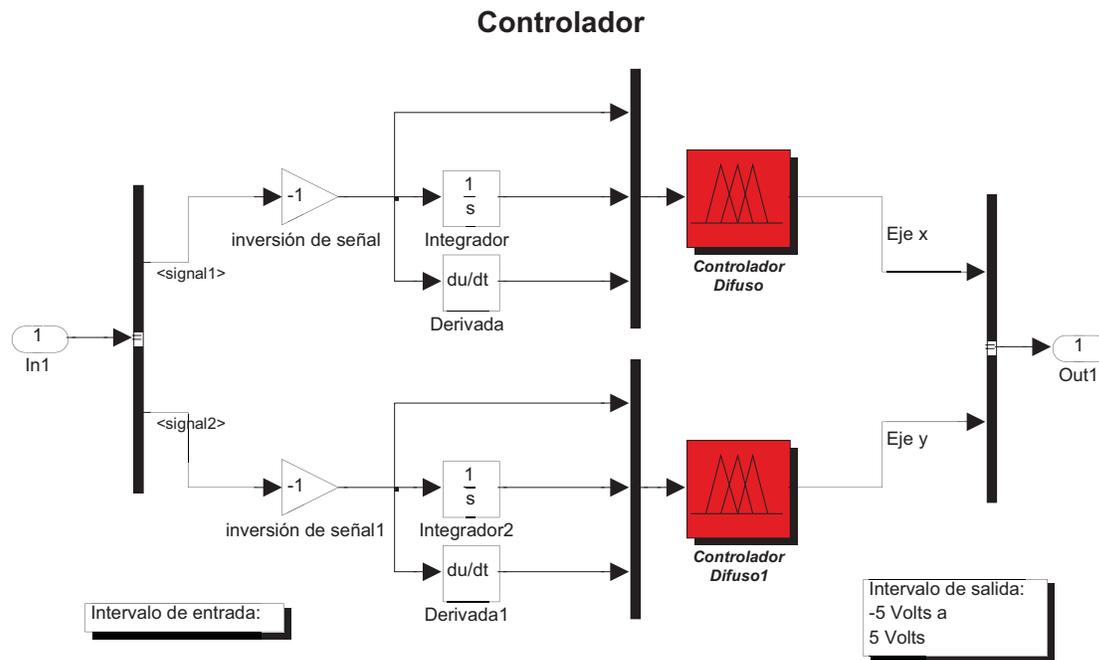


**Figura 25.-** Bloques del subsistema "Acoplamiento de entrada y cálculo de centroide". El bloque cálculo de centroide realiza la operación de las ecuaciones (31) y (32).

### 3.3.1.7.- Subsistema “Controlador”

Contiene los bloques necesarios para procesar la señal de error que se introduce al controlador difuso. Una ganancia invierte la señal de error para que sea consistente con las reglas de inferencias difusas del controlador. Una vez invertida, la señal se integra y se deriva para tener las tres señales de entrada del controlador difuso. Para el bloque de derivada, la constante de filtro se fija en un valor de  $N = 100$ , con el objetivo de evitar derivar las señales de alta frecuencia [31].

El bloque “Controlador difuso” es el bloque del Toolbox™ de lógica difusa de Simulink® que llama al Sistema de Inferencias Difusas (FIS), que contiene al controlador difuso. En el **Apéndice B** se da una descripción de las características principales de esta herramienta de MATLAB®.



**Figura 26.-** Bloques del subsistema "Controlador". El bloque de ganancia con valor de -1 es necesario para que la información de entrada en el controlador corresponda con el significado de las reglas difusas.

### 3.3.- VERIFICACIÓN DEL MODELO

La verificación del modelo dinámico en Simulink® es un procedimiento con fines similares a las pruebas en laboratorio del sistema real (ver Alineación del sistema óptico [7]). Para ambos casos la finalidad es verificar la condición de *estado estable cero* (en reposo).

Existen cuatro condiciones que se deben verificar en el modelo dinámico:

1. Simulación sin perturbación y con controlador difuso. Sirve para saber si el modelo está equilibrado, es decir, que se cumple el *estado estable cero*. En caso de que los niveles de operación entre los subsistemas del modelo no estén debidamente empatados, es decir, que exista un offset, puede ser causa de que se presente una respuesta impulsional provocada por una entrada escalón.

2. Simulación con perturbación y sin controlador difuso. Para esta condición, la perturbación no sufre corrección alguna, entonces, la señal en el detector deberá ser similar a la perturbación.
3. Simulación con perturbación y con controlador difuso. Es el caso para el cual se lleva a cabo la simulación para realizar la sintonización. Para llegar a este punto, se debieron corregir las ganancias e intervalos de operación en los bloques, si es que no se logró el estado estable cero.
4. Una cuarta condición es cuando no existe perturbación ni hay acción del controlador. En el modelo físico, sirve para ajustar la intensidad de la imagen en el detector y que los valores de voltaje en el detector de cuadrantes sea cero. En el modelo dinámico, no se considera esta condición.

### 3.4.- DATOS REALES DE PERTURBACIÓN

De algunas observaciones realizadas con el instrumento LOLA, en el Telescopio de 1 metro del Observatorio Astronómico Nacional en Tonantzintla, Puebla, se obtuvieron datos del movimiento del centroide de la imagen en dos ejes, correspondientes a la estrella Arturo ( $\alpha$  Bootis, magnitud  $m_v = 0.2$ ) [7]. La información registrada corresponde a los valores de los voltajes de los cuadrantes del detector cuando se observaba a la estrella con el lazo de control abierto, es decir, se registró el movimiento del centroide de la imagen sin corrección puesto que en ese estado el espejo corrector plano se encuentra inmóvil.

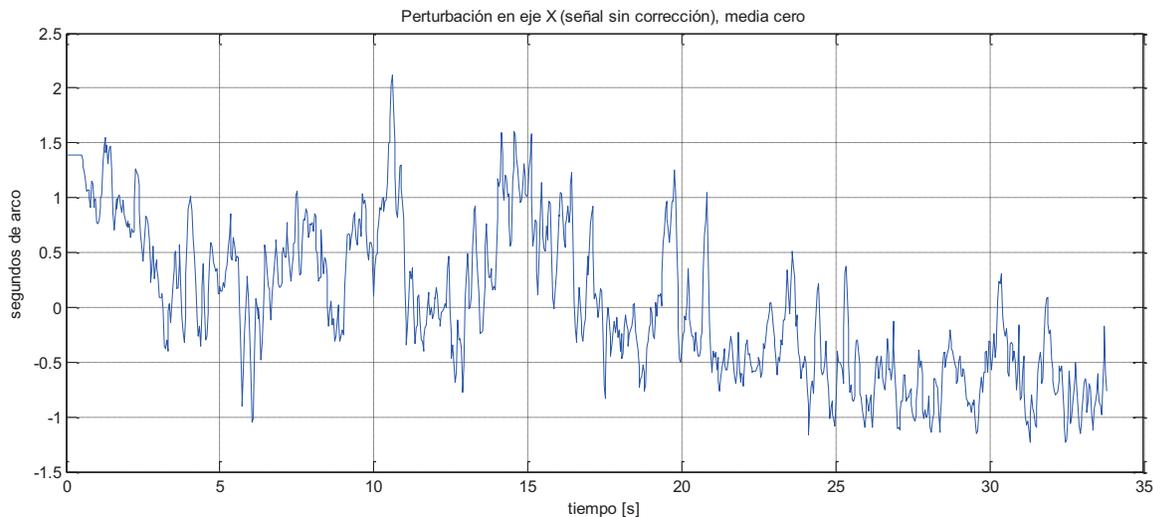
La frecuencia de muestreo de la señal es de  $f_s = 30 \text{ Hz}$ . Debido a que el ancho de banda de la frecuencia temporal de las aberraciones de órdenes bajos *tilt* es de 10 Hz, las muestras cumplen con la teoría de muestreo de Nyquist. También cumple con el criterio de Rayleigh, que establece el tiempo mínimo de adquisición necesario para recuperar una señal a partir de datos muestreados. El *frame* de datos de centroide de la imagen consta de 1000 muestras, lo que significa un tiempo de adquisición de 33.33 segundos, muy encima del tiempo establecido por el criterio.

Para hacer uso de los datos reales de perturbación en las pruebas de simulación, fue necesario realizar lo siguiente sobre los datos:

1. Calcular el centroide de la imagen a partir de los cuatro datos obtenidos de los detectores con las fórmulas de transformación de coordenadas.
2. Eliminar el offset causado por la deriva de voltaje en los detectores para ser coherente con el modelo de turbulencia de Kolmogorov, que establece que la turbulencia atmosférica es un proceso aleatorio y estacionario con media cero.
3. Escalar los valores, que en principio son valores de voltaje, a su correspondiente valor en segundos de arco. Esto se logra al multiplicar los datos por un factor de 0.236.

Como ilustración, se muestra la **Figura 27** el movimiento del centroide sobre el eje X, después de tomar en cuenta los puntos anteriores, de los datos registrados en el Archivo `Arturo45.txt`. Los datos del eje Y son similares.

A partir de lo anterior, se puede asegurar que con los datos adquiridos mediante telescopio es posible evaluar el rendimiento del controlador difuso, a través de la varianza residual de fase del movimiento del centroide.



**Figura 27.-** Frame de los datos registrados del movimiento del centroide de la intensidad de la imagen sin corrección sobre el eje X.

### SIMULACIÓN CONTINUA CON DATOS DISCRETOS

Como se tiene un modelo continuo, para poder realizar la simulación del sistema con el controlador difuso, se realizó una interpolación de los datos discretos del *frame* de datos reales de perturbación. La reconstrucción más sencilla de una señal continua, a partir de un conjunto de muestras, es el esquema de interpolación lineal, que consiste en unir los puntos de muestras con líneas rectas.

Simulink® realiza la interpolación lineal del conjunto de datos de entrada cuando se llaman a través del bloque *From Workspace*, siempre y cuando, los datos de entrada deben de formar una matriz de dos columnas, donde la primera columna son los valores de tiempo y la segunda son los valores de magnitud asociadas a cada valor de tiempo. Esta fue la manera en que se ingresaron los datos para que Simulink® realizara la interpolación.

### 3.5.- PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

La duración de la simulación para el *frame* de 33.3 segundos fue de 7 min 34 seg con los siguientes parámetros de software y de hardware:

Parámetros de Simulink® (versión 7.5 R2010a):

Tipo de *solver*: ode45 (paso variable).

Tolerancia relativa:  $1 \times 10^{-3}$ .

Tamaño de paso mínimo y tamaño de paso máximo: automático.

Características del equipo de cómputo:

PC con procesador Intel® Core™2 T5200 @1.60GHz

Memoria RAM: 4 GB

Sistema operativo: Windows 7 Professional (32 bits)

# CAPÍTULO 4

## ESTRUCTURA Y SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR DIFUSO

### 4.1.- INTRODUCCIÓN

El controlador difuso planteado en este trabajo tiene como antecedente al controlador difuso tipo PD utilizado en el instrumento de OA LOLA puesto que, de pruebas realizadas en el telescopio, demostró eficacia al corregir las aberraciones *tilt* al ser implantado en una plataforma de hardware embebida [7]. Dentro de las perspectivas mencionadas en el trabajo escrito sobre el diseño, prueba e implantación del controlador difuso en LOLA, está la incorporación y modificación de los parámetros del controlador para obtener mejores resultados. En cuanto a la sintonización del controlador difuso, se menciona que el procedimiento general utilizado fue el de prueba y error para modificar la distribución de los conjuntos difusos, con base a la observación de la respuesta a una entrada escalón, hasta cumplir con las especificaciones de desempeño del tiempo de establecimiento y del sobreimpulso máximo.

En este trabajo se plantea una nueva estructura del controlador difuso que incorpora nuevos parámetros al controlador, con el objetivo de mejorar aún más el rechazo a perturbaciones y elevar la robustez del controlador. Enseguida, se establece un procedimiento de sintonización cuya evaluación se basa en la varianza residual del movimiento del centroide de la intensidad de la imagen que, como se mencionó en el Capítulo 2, es una evaluación estadística del comportamiento del sistema en el estado estable que está relacionada con los parámetros de evaluación ópticos usados, generalmente, en la evaluación de los sistemas de OA. Las especificaciones de la respuesta transitoria, como el tiempo de establecimiento, también se toman en cuenta pero en menor medida, pues la evaluación de los sistemas de OA se hace sobre el desempeño en estado estable, es decir, cuando el sistema de control ha estabilizado el movimiento del centroide alrededor del origen de coordenadas.

Como se mencionó en el Capítulo 1, la sintonización de los controladores difusos puede dificultarse si no se definen los parámetros a sintonizar y si no se plantea un procedimiento sistemático para realizar la sintonización. En este sentido, una de las mayores contribuciones de este trabajo es el establecimiento de un procedimiento sistemático, basado en las características del sistema de OA y de la perturbación aleatoria, para sintonizar el controlador difuso planteado en este texto.

En el proceso de sintonización se utiliza de manera intensiva la simulación del modelo dinámico del sistema, en el software Simulink®, detallado en el Capítulo 3, que además incluye los datos reales de perturbación obtenidos en telescopio. Como sucede en la mayoría de los procesos de sintonización de

controladores difusos, éste se realiza de manera iterativa, basándose en parámetros de desempeño, los cuales para fines de este trabajo se definen más adelante.

A diferencia del controlador difuso probado en LOLA, la estructura del controlador difuso planteada en esta Tesis está desarrollada como un controlador continuo. La principal razón de esto es que, de esta manera, no se restringe su implantación a alguna plataforma de hardware específica.

## **4.2.- DEFINICIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL CONTROLADOR**

La estructura del controlador difuso está orientada, principalmente, a mejorar el rechazo a perturbaciones en el estado estable porque, como se ha mencionado en capítulos anteriores, es en este estado cuando se realiza la adquisición de las imágenes de larga duración. A partir de un análisis del error en estado estable sobre un modelo lineal y simplificado del sistema se definieron las características más importantes que complementan la estructura del controlador. El error en estado estable está relacionado con la capacidad de un controlador para eliminar las perturbaciones y, además, es una parte importante en el diseño de un sistema de control de precisión de posición [32]. Por otra parte, se establecieron los parámetros de un controlador PID convencional, también a partir del modelo simplificado, que sirvieron para establecer los parámetros iniciales del controlador difuso.

Para poder realizar el análisis de error en estado estable y para obtener los parámetros del controlador PID convencional, se estableció un modelo lineal y simplificado del sistema para un solo eje, derivado del modelo dinámico completo. El modelo dinámico completo del sistema contempla el acoplamiento de las señales para los dos ejes a través de las transformaciones de coordenadas necesarias para incluir la dinámica de los tres actuadores y de los cuatro fotodiodos de detector, razón por la cual no es posible utilizarlo de manera directa. Es importante señalar que estos análisis sirvieron solamente como punto de partida para, posteriormente, desarrollar las no linealidades del controlador difuso.

A continuación, se describe la obtención del modelo simplificado y lineal del sistema que se obtuvo a partir de los elementos principales del modelo dinámico en Simulink®. Después, se justifica la inclusión del término integral que completa los tres términos del controlador tipo PID, y dan las razones para aumentar el tipo de sistema en uno. Finalmente, se dan los motivos por lo que se utilizan los parámetros de un controlador PID convencional para iniciar la sintonización.

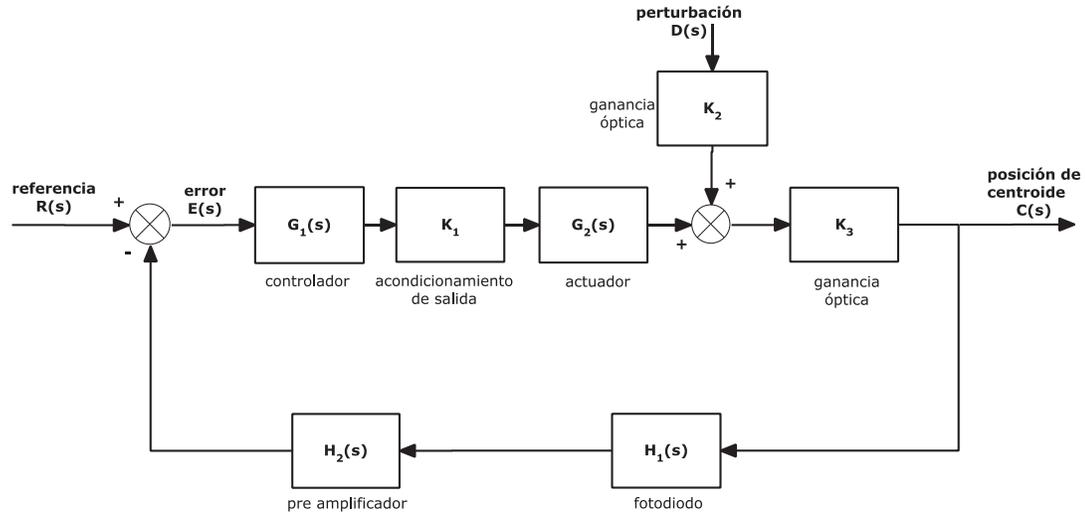
### **4.2.1.- MODELO SIMPLIFICADO Y LINEAL DEL SISTEMA**

El sistema en lazo cerrado de LOLA no tiene retroalimentación unitaria y está sujeta a perturbación aleatoria. Aunque la dinámica de los actuadores, en el modelo dinámico en Simulink®, está representada por tres funciones de transferencia, para cada uno de los tres actuadores que mueven el espejo plano, se puede hacer un desacoplamiento del eje que es coincidente con uno de los actuadores para tener una aproximación de la dinámica del espejo en su conjunto. La función de transferencia que se eligió fue la que tiene sus polos más cercanos al origen, para considerar el peor de los casos. Por esto se excluyen las transformaciones de pseudo-inversa necesarias para manejar al espejo corrector en el modelo completo del sistema, pero que en este caso, se omiten por simplicidad.

Para el caso de los fotodiodos y de su electrónica asociada, se consideró solamente una función de transferencia de los cuatro cuadrantes que componen al detector. Este es el motivo por el cual no se

incluyen las transformaciones de coordenadas. En general, el modelo simplificado sólo incluye bloques de una entrada y una salida.

En la **Figura 28**, se muestra la estructura general y representativa del sistema.



**Figura 28.-** Estructura reducida (a un eje) del modelo completo del sistema LOLA.

Donde  $G_1(s)$  representa a un controlador lineal y:

$$G_2(s) = \frac{-319s + 1.52 \times 10^6}{s^2 + 2 \times 10^3 s + 1.71 \times 10^6} \quad (82)$$

$$H_1(s) = \frac{12.1 \times 10^9}{s + 1 \times 10^4} \quad (83)$$

$$H_2(s) = \frac{0.5 \times 10^6}{(s + 1 \times 10^3)^2} \quad (84)$$

$$K_1 = 0.2 \times 10^{-3} \quad (85)$$

$$K_2 = 1.88 \times 10^{-4} \quad (86)$$

$$K_3 = 1.85 \quad (87)$$

Para simplificar el modelo, se hace una reducción de bloques. Del diagrama de bloques anterior se mueve el bloque de ganancia  $K_2$  de la entrada de perturbación y se incluye en el bloque de ganancia  $K_1$  como se muestra en la **Figura 29**.

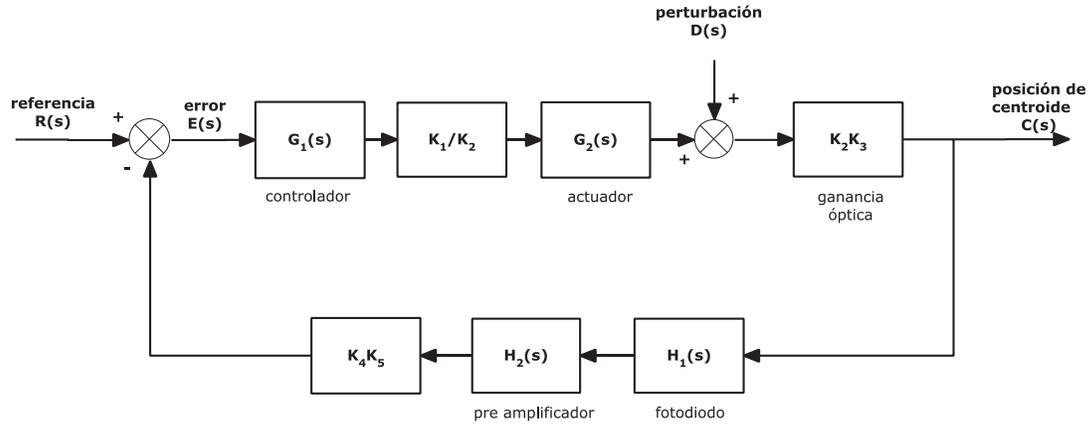


Figura 29.- Resultado de la reducción del bloque de ganancia óptica.

Finalmente, se combinan los bloques que están en serie y se obtiene la estructura de la Figura 30.

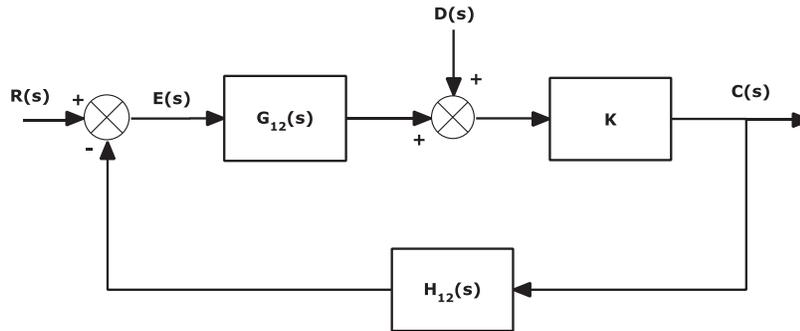


Figura 30.- Resultado de la reducción de bloques en serie. Estructura reducida (en un eje) del sistema LOLA.

Dónde:

$$G_{12}(s) = \frac{K_1}{K_2} G_1(s) G_2(s) \quad (88)$$

Sustituyendo (82) en (88) y simplificando se obtiene:

$$G_{12}(s) = \frac{-339.35s + 1.61 \times 10^6}{(s + 9.48 \times 10^3)(s - 7.48 \times 10^3)} G_1(s) \quad (89)$$

Para el bloque de realimentación:

$$H_{12}(s) = K_4 K_5 H_1(s) H_2(s) \quad (90)$$

Sustituyendo

$$H_{12}(s) = \frac{6 \times 10^{13}}{(s + 1 \times 10^4)(s + 1 \times 10^3)^2} \quad (91)$$

Para la ganancia  $K$ :

$$K = K_2 K_3 = (1.88 \times 10^{-4})(1.85) = 3.47 \times 10^{-4} \quad (92)$$

#### 4.2.2.- CONTROLADOR DIFUSO TIPO PID

El controlador difuso en LOLA carece de la parte integral de error (sumatoria de errores, en el caso discreto). Como parte de las perspectivas para mejorar la estructura del controlador, en [7] se sugiere que su incorporación mejoraría la eficacia del controlador, y por lo tanto, del sistema de OA. Para ello se hizo el análisis en estado estable, con el modelo simplificado, de donde se concluyó que, efectivamente, se necesita que el controlador sea de un orden mayor para poder eliminar el error en el estado estable debido a perturbaciones estándar tipo escalón (ver **Apéndice C**). Aunque una entrada escalón es una señal compuesta por armónicos a diferentes frecuencias, no representa a la perturbación *tilt* tomada en el telescopio, cuya amplitud cambia de manera aleatoria. Una representación más cercana se obtiene cuando se aumenta en uno el orden de la perturbación, lo que resulta en una entrada rampa, cuya amplitud no es constante sino que varía de manera uniforme, por lo tanto es una mejor aproximación a la entrada de perturbación aleatoria del movimiento del centroide. Más adelante se menciona la necesidad de agregar el efecto de una integral doble, para aumentar el orden del sistema y mejorar el desempeño del sistema en el estado estable.

Es bien sabido que la parte derivativa de un controlador PID convencional puede provocar un comportamiento oscilatorio [31], aún para valores pequeños de ganancia  $K_D$ , y aun cuando se filtra la señal de error. Normalmente, se incluye para mejorar la respuesta transitoria. Sin embargo, en un controlador difuso las ganancias del término derivativo son variables, por lo que existe la posibilidad de limitar su acción. En el controlador difuso ya implantado en LOLA, la parte derivativa se contempló en función de la variación de amplitud en la perturbación. Dado el buen rendimiento del controlador difuso PD en telescopio, por no presentarse un comportamiento oscilatorio, en el esquema aquí planteado la ganancia derivativa permanece pero se limita su acción a valores grandes de derivada de error con el propósito de asegurarnos que el lazo de control se cierre al momento de iniciar el sistema. Para valores pequeños, la ganancia es nula o casi nula, con el fin de eliminar la posibilidad de que se presenten oscilaciones.

Por lo expuesto en los dos párrafos anteriores, el esquema planteado incluye los tres términos: el proporcional, el integral y el derivativo. Una vez definidas las entradas para el controlador, se pueden plantear dos variantes de este esquema. Uno en donde se establezca un sistema de inferencias para cada término de entrada, es decir un sistema de una entrada-una salida, con el fin de manejar de manera directa las ganancias variables de cada uno de los términos del controlador. Aunque este esquema ha sido reportado en la literatura como muy efectivo [33], se pierde la ventaja de relacionar los tres términos de entrada directamente a través de las reglas difusas. Por otro lado, una configuración donde los tres términos estén relacionados significa una mayor complejidad del controlador al necesitar más reglas difusas, pero se saca provecho de las relaciones difusas, que es quizá la parte más relevante en un controlador difuso.

Con el propósito de comparar los resultados de las dos variantes del esquema de control difuso, uno con una sola FAM y el otro con FAMs separadas, se estableció un controlador según el segundo esquema (ver el **Apéndice E**) y realizaron pruebas escalando al doble la amplitud de la perturbación de la misma manera como se muestra en el Capítulo 5 para evaluar su desempeño. Los resultados obtenidos mostraron que el desempeño es similar pero inferior al esquema con una sola FAM. Por este motivo, en esta Tesis, el controlador difuso tiene un esquema donde se incluyen los tres términos

relacionados en una sola FAM, para poder explotar los conceptos de relación difusa y plantear y modificar las reglas de acuerdo a su significado físico.

#### 4.2.3.- CONTROLADOR DIFUSO A PARTIR DE UN CONTROLADOR LINEAL

En comparación con un controlador PID convencional implantado en LOLA y que fue auto-sintonizado en LabVIEW® [34], el desempeño del controlador difuso en telescopio mostró robustez al reducir los efectos no lineales de los actuadores y la deriva en los voltajes de los cuadrantes en el detector, además de presentar un buen rechazo a las perturbaciones [7]. Lo anterior, se explica porque no se puede usar un controlador lineal para controlar la planta con las no linealidades que se presentan en los sistemas de OA y con el tipo de perturbación aleatoria. Sin embargo, se puede comenzar con un controlador lineal obtenido con el modelo lineal y simplificado del sistema, y posteriormente hacer las modificaciones necesarias para obtener un controlador no lineal, con ganancias variables, adecuado para las restricciones de la planta.

Jantzen y Passino [19] [10] mencionan por separado que, como parte del procedimiento de diseño de controladores difusos, que se debe partir de un controlador lineal PID. En ambos casos se utilizan las constantes  $K_P$ ,  $K_I$  y  $K_D$  sintonizadas para construir un controlador difuso PID lineal similar a su contraparte lineal PID. Después, señalan estos autores, se realizan cambios en los parámetros difusos para hacer no lineal la superficie de control e iniciar con la sintonización.

Una de las razones principales que sustentan la idea de plantear el diseño del controlador difuso a partir de una estructura lineal y después explotar las ventajas del controlador difuso, es que la sintonización de los controladores lineales PID es sencilla comparada con la sintonización de controladores difusos porque los parámetros a sintonizar son pocos y se puede hacer uso de herramientas analíticas para evaluar el desempeño del sistema en lazo cerrado. Además, existen muchas técnicas de sintonización establecidas para muchos tipos de plantas. Es importante mencionar que un controlador lineal es un caso especial de un controlador difuso, por el hecho de que los controladores difusos son aproximadores universales de funciones. Se puede obtener un controlador difuso lineal cuando se seleccionan apropiadamente los parámetros de éste último [10], si bien no para toda la superficie de control difuso, sí en tramas de ésta.

En el **Apéndice D**, se muestra el análisis que se hizo en el modelo simplificado del sistema para establecer los parámetros de un control PID lineal que sirvieron como punto de inicio para el establecimiento de la estructura del controlador difuso y su posterior sintonización.

#### 4.2.4.- INTEGRAL DE LA SALIDA DEL CONTROLADOR

La estructura inicial del controlador es un controlador difuso tipo PID. Del análisis de tipo de sistema, cuando se considera la perturbación como una entrada estándar rampa, se concluye que es necesario volver a aumentar el tipo del controlador en uno para suprimir errores en estado estable (ver **Apéndice C**). Una manera de aumentar el tipo de controlar es agregar la variable de entrada “*doble integral del error*” al controlador difuso. Sin embargo, eso significa que la cardinalidad debe aumentar, y se deberían establecer más reglas difusas, lo que haría más complejo la estructura y el proceso de sintonización porque se deben establecer reglas difusas cuyo significado físico, en los antecedentes, son poco claros. En cambio, el mismo efecto se obtiene cuando se integra la salida del controlador y se suma a la salida, entonces se aumenta en uno el tipo de sistema y, al mismo tiempo, se conservan

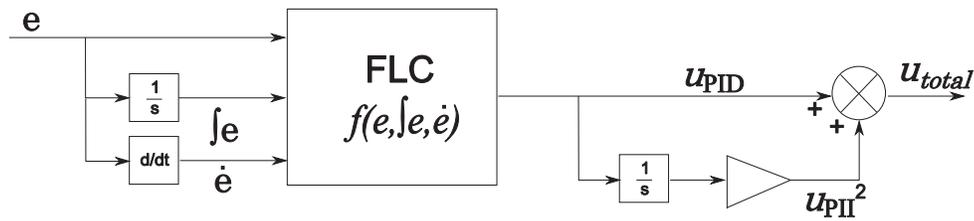
las entradas originales del controlador difuso tipo PID. Esta manera de integrar la salida del controlador difuso para obtener una nueva salida es muy utilizada [35]. La intención de sumar la salida con su integral es para conservar el término proporcional, de otra manera, el término proporcional solamente recaería sobre la parte derivativa, pero se sabe que su acción es nula en el estado estable.

En la **Figura 31**, se muestra la salida total como la suma de la salida original  $u_{PID}$  y de la salida con integrador  $u_{PII^2}$ . Como la ganancia derivativa se mantiene nula o casi nula durante la operación en estado estable, su contribución a la salida también lo es. Entonces, para ese caso, el término derivativo no se toma en cuenta. Al sumar ambas salidas, se tiene  $PI + II^2$ , como se aprecia en las **Ecuaciones (93) y (94)**.

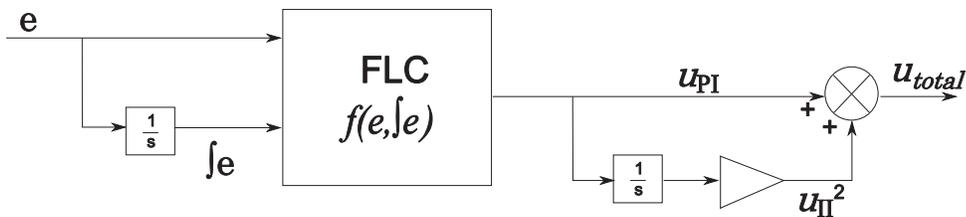
$$u_{total} = u_{PI} + u_{PII^2} \quad (93)$$

$$u_{PII^2} = G \int u_{PI} dt \quad (94)$$

La estructura sin la parte derivativa se observa en la **Figura 32**. Para la **Figura 31** y la **Figura 32**, el valor del bloque de la ganancia en serie con el integrador es un parámetro que se debe determinar, y por lo tanto, forma parte de los parámetros que se tiene que sintonizar.



**Figura 31.-** Controlador difuso con integración a la salida.



**Figura 32.-** Controlador difuso con integración a la salida y sin término derivativo.

#### 4.2.5.- CARACTERÍSTICAS DEL CONTROLADOR

##### 4.2.5.1.- Variables de entrada y de salida

Las variables involucradas en la descripción lingüística del controlador son el “error”  $e$ , “acumulación de error”  $\int e$  y “cambio en error”  $\dot{e}$ . Para generar la salida del controlador, la variable lingüística es “acción de control”  $u$ .

Las variables de entrada “error”  $e$  y “acumulación de error”  $\int e$  se componen de cinco valores lingüísticos cada una, con la que se puede realizar una buena descripción lingüística y, al mismo

tiempo, se mantiene una cardinalidad baja. La variable “*cambio en error*”  $\dot{e}$  sólo tiene tres valores lingüísticos porque su acción se espera que ocurra sólo en los transitorios, es decir, cuando se cierra el lazo de control. La variable de salida “*acción de control*”  $u$  se compone de nueve valores lingüísticos para poder describir más a detalle la acción de control.

Los valores lingüísticos de las variables lingüísticas son las siguientes:

“*error*”  $e$ : {negativo, negativo poco, cero, positivo poco, positivo}

“*acumulación de error*”  $\int e$ : {negativo, negativo poco, cero, positivo poco, positivo}

“*cambio en error*”  $\dot{e}$ : {negativo, cero, positivo}

“*acción de control*”  $u$ : {negexces, negmucho, negmod, negpoco, nada, pospoco, posmod, posmucho, posexces}

#### 4.2.5.2.- Universos de discurso

Las reglas que involucran a la variable “*error*” deben cubrir todos los posibles valores que puede tomar la diferencia entre la referencia (el origen de coordenadas) y el valor de centroide de la imagen obtenido a través del detector. Los valores máximos de error son los valores máximos que pueden obtener del *frame* de perturbación, es decir,  $c(t)_{max} = \max(\text{abs}[c(t)])$ . Para el *frame* de datos obtenidos de telescopio,  $c(t)_{max} = 2.1153 \text{ arcsec} \approx 2 \text{ arcsec}$ . De manera que:

$$\text{“error”}: \mathcal{E} = [-2, 2]$$

La variable “*acumulación de error*” actúa en caso de que el error acumulado tienda a causar inestabilidad, pero esencialmente actúa en el estado estable. El universo de discurso para esta variable se define de acuerdo a los valores máximos que tomó la integral de error cuando se realizó la prueba de simulación con el controlador PID convencional auto sintonizado. Entonces, el universo del discurso para esta variable es:

$$\text{“acumulación de error”}: \mathcal{AE} = [-0.01, 0.01]$$

El universo de discurso de la variable “*cambio en error*” es difícil de obtener porque la derivada del error amplifica los valores de este a altas frecuencias, su inclusión resulta problemática aun cuando se le agrega un filtro. Por esto, se decide definir el intervalo a partir de los valores máximos que se obtuvieron de la derivada del error en la prueba de simulación con el controlador lineal. El universo de discurso para el “*cambio en el error*” es:

$$\text{“cambio en error”}: \mathcal{CE} = [-500, 500]$$

Para la salida de control el intervalo del universo de discurso tiene que ver con el intervalo de salida definido en el modelo del sistema. Recordemos que la salida del controlador hacia la electrónica que maneja los actuadores va de 0 a 10 volts. En el intervalo de la variable de salida “*acción de control*” se incluye un *offset* para representar el ángulo nulo del espejo en valor cero.

$$\text{“acción de control”}: \mathcal{U} = [-5, 5]$$

#### 4.2.6.- CONTROLADOR DIFUSO LINEAL

Un controlador difuso lineal tipo PID es similar a un controlador PID convencional cuando se mantienen constantes las ganancias de los tres términos en todo el intervalo de entrada. Para que el controlador difuso tenga esas características se realiza lo siguiente:

Comenzar con las variables “*error*”  $e$  y “*acumulación de error*”  $\int e$ . La variable cambio en error se establecerá después. Constituir las reglas que relacionan a “*error*”  $e$  y “*acumulación de error*”  $\int e$  de manera que la FAM sea simétrica y la forma de los conjuntos difusos para las variables “*error*”  $e$  y “*acumulación de error*”  $\int e$  sean uniformes. Haciendo esto, la superficie de control será, en general, lo más lineal que se puede, aunque hay que mencionar que se obtiene una superficie de control más lineal cuando se usan conjuntos con forma gaussiana. Pero, en nuestro caso, los conjuntos difusos son de forma triangular porque es la forma que mejor se puede implementar en mediante *hardware*.

De modo que la FAM, establecidas las consideraciones anteriores, queda como se muestra en la **Figura 33**.

		<i>cambio en error: cero</i>				
		<i>error</i>				
		<i>negativo</i>	<i>negativo poco</i>	<i>cero</i>	<i>positivo poco</i>	<i>positivo</i>
<i>Acumulación del error</i>	<i>positivo</i>	nada	negpoco	negmod	negmucho	negexces
	<i>positivo poco</i>	pospoco	nada	negpoco	negmod	negmucho
	<i>cero</i>	posmod	pospoco	nada	negpoco	negmod
	<i>negativo poco</i>	posmucho	posmod	pospoco	nada	negpoco
	<i>negativo</i>	posexces	posmucho	posmod	pospoco	nada

**Figura 33.-** FAM de las variables “*error*” y “*acumulación de error*” cuando el valor de la variable “*cambio en error*” es *cero*. La disposición es simétrica para establecer un controlador difuso lineal.

Una vez que la superficie de control es lineal, se tienen que escalar los intervalos de los universos de discurso de manera que las pendientes de la superficie de control sean iguales o cercanas a las pendientes de las variables del controlador PID convencional. Las pendientes del controlador lineal se obtienen de resultados de la auto-sintonización en Simulink® para un control *PID paralelo*. Estas son las mostradas en la Tabla 3.

**Tabla 3.-** Constantes del controlador PID convencional.

Eje x	Parte proporcional	$P = P_{ideal} = 0.5064$
	Parte integral	$I = P_{ideal}I_{ideal} = (0.5064)(466.8597) = 236.41$
	Parte derivativa	$D = 0, constante del filtro = 100$
Eje y	Parte proporcional	$P = P_{ideal} = 0.5010$
	Parte integral	$I = P_{ideal}I_{ideal} = (0.5010)(470.4039) = 235.67$
	Parte derivativa	$D = 0, constante del filtro = 100$

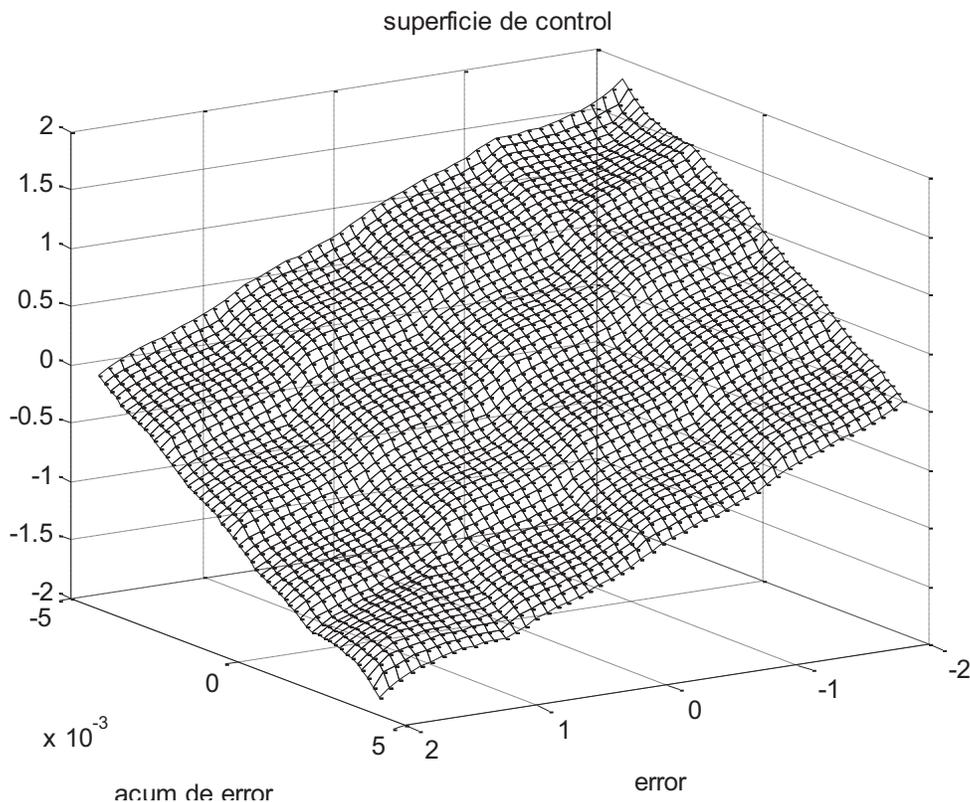
Para la variable “error”: si  $E = 2$ ,  $U_e = -P_{ideal}(E) = -1$

Para la variable “acumulación de error”:  $U_{f_e} = -I(AE)$

Si  $U_{f_e} = -1$ ;  $AE = \frac{1}{I} = 0.0042$

Entonces, modificamos el universo de discurso “acumulación de error”:  $\mathcal{AE} = [-0.0042, 0.0042]$

Con esto, las pendientes de la superficie de control son equivalentes a las del controlador lineal. En la **Figura 34** se observa que la superficie de control está cerca de ser totalmente lineal.



**Figura 34.-** Superficie de control para el controlador difuso lineal.

Las FAM para los valores de la variable “*cambio en error*” son las siguientes:

<i>cambio en error: negativo</i>						
		<i>error</i>				
		<i>negativo</i>	<i>negativo poco</i>	<i>cero</i>	<i>positivo poco</i>	<i>positivo</i>
<i>Acumulación del error</i>	<i>positivo</i>	posmod	pospoco	nada	negpoco	negmod
	<i>positivo poco</i>	posmucho	posmod	pospoco	nada	negpoco
	<i>cero</i>	posexces	posmucho	posmod	pospoco	nada
	<i>negativo poco</i>	posexces	posexces	posmucho	posmod	pospoco
	<i>negativo</i>	posexces	posexces	posexces	posmucho	posmod

**Figura 35.-** FAM de las variables “*error*” y “*acumulación de error*” cuando el valor de la variable “*cambio en error*” es “*negativo*”.

<i>cambio en error: positivo</i>						
		<i>error</i>				
		<i>negativo</i>	<i>negativo poco</i>	<i>cero</i>	<i>positivo poco</i>	<i>positivo</i>
<i>Acumulación del error</i>	<i>positivo</i>	negmod	negmucho	negexces	negexces	negexces
	<i>positivo poco</i>	negpoco	negmod	negmucho	negexces	negexces
	<i>cero</i>	nada	negpoco	negmod	negmucho	negexces
	<i>negativo poco</i>	pospoco	nada	negpoco	negmod	negmucho
	<i>negativo</i>	posmod	pospoco	nada	negpoco	negmod

**Figura 36.-** FAM de las variables “*error*” y “*acumulación de error*” cuando el valor de la variable “*cambio en error*” es “*positivo*”.

### 4.3.- SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR

Una vez establecida la estructura del controlador y sus características de acuerdo a las condiciones de la planta y a la perturbación, se establece un procedimiento de sintonización que comienza con determinar los parámetros de sintonización. En los primeros se priorizan aquellos parámetros cuya alteración tienen mayor impacto en la respuesta del sistema. Con esto, se discriminan los que no son relevantes para obtener el mejor rendimiento del sistema, aunque esto no implica que se excluyan dentro del procedimiento de sintonización. Después, se realizan los ajustes sobre los parámetros de sintonización seleccionados, empezando por los relevantes y finalizando con aquellos que no lo son.

La determinación de si cierta modificación es pertinente o no, se obtiene corriendo una simulación del sistema con los datos del *frame* de perturbación y evaluando el resultado a través de los parámetros de desempeño.

Las múltiples opciones que se tienen para alterar la configuración del controlador resultan en una poderosa herramienta de diseño, pero al mismo tiempo, elevan la complejidad del diseño. Al empezar con una sintonización ‘fuerte’ y terminar con una sintonización ‘fina’, se hace eficiente la sintonización.

Es posible valorar el impacto de los ajustes de los parámetros de sintonización por dos medio de dos formas. Una es por medio de entender el significado de cada una de las reglas difusas sobre la respuesta del sistema y la otra es observando el efecto de cada parámetro sobre la superficie de control. Durante el proceso de sintonización se emplean ambas maneras, pues si bien las relaciones difusas permiten expresar la estrategia de control en el lenguaje natural, observando las pendientes de superficie de control podemos darnos una idea de la manera en que cambia la acción del controlador. Por ejemplo, una pendiente elevada al centro significa una acción drástica que puede generar comportamientos oscilatorios en el estado estable

#### 4.3.1.- PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN

Los parámetros de sintonización son todos aquellos que, al modificar su valor, cambian la repuesta del controlador en mayor o menor medida. Mientras sean menos los parámetros a sintonizar el proceso de sintonización es más simple. En este trabajo se definieron los siguientes parámetros de sintonización, que se muestran empezando por los que generan un mayor efecto en el controlador:

- **Reglas difusas.** Alteran mayormente la respuesta global del controlador.
- **Universos de discurso.** Cambian la ganancia de manera de una variable uniforme.
- **Forma de los conjuntos difusos en los extremos.** Se refiere a la forma de los conjuntos difusos de los extremos, y la elección es entre forma triangular o forma trapezoidal.
- **Distribución de los conjuntos difusos.** El ajuste puede ser sobre los soportes y/o en la posición de los picos. Cuando se modifican los conjuntos difusos, el mayor impacto se da cuando se modifican los valores de los soportes más que cuando se modifica el valor de la posición del pico.

#### 4.3.2.- PARÁMETROS DE DESEMPEÑO (O RENDIMIENTO)

Los parámetros de desempeño resultan de la evaluación de la simulación del sistema con los datos de *seeing*. Fundamentalmente son dos:

- **Estado estable.** Es la parte más importante en la sintonización. Para el sistema de óptica adaptativa, el estado estable se refiere al momento es que el sistema estabilizó el centroide alrededor del origen y está actuando para mantenerlo en esa posición. Esto es, que el centroide de la imagen se debe encontrar al origen del sistema de coordenadas en todo momento. La varianza residual del movimiento del centroide es el criterio para determinar si la modificación de un parámetro es mejor que otra y se evalúa al realizar una corrida de simulación para los 33 segundos de duración del *frame* de perturbación.

- **Respuesta transitoria.** Cuando inicia la operación del instrumento no se conoce la posición del centroide de la imagen lo que resulta en una entrada escalón para el controlador, por eso es importante que el controlador sea capaz de cerrar el lazo en esas condiciones, aun cuando el valor de la perturbación sea alto. El sobrepaso de la respuesta transitoria debe ser lo más pequeño posible, aunque no es relevante al momento de tomar la imagen, porque ésta se realiza cuando el sistema está “estable”.

#### 4.4.- PROCEDIMIENTO DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR DIFUSO

1. Hacer lineal el controlador difuso con los parámetros del controlador PID convencional sin incluir la variable lingüística “*cambio en error*”. Realizar una simulación para verificar que el desempeño sea igual, o al menos, similar al controlador PID convencional.

**Sintonización Drástica.** Modificar las reglas difusas. La modificación del conjunto de reglas difusas tiene un efecto drástico en toda la estructura del controlador.

Cuando se acentúa la diagonal, se hace énfasis en eliminar el error acumulado porque la acción de control es más fuerte para valores de la variable lingüística de entrada “*acumulación de error*”. Para ilustrar este efecto, observamos que la siguiente regla, que pertenece a la FAM anterior a la modificación, infiere una acción de control nula cuando existe un error pequeño y negativo y, al mismo tiempo, la acumulación de error es pequeña y positiva:

*Si error es < negativo poco > Y acumulación de error es < positivo poco >  
ENTONCES acción de control es < nada >*

En cambio, después de acentuar la diagonal en la FAM, la regla anterior sí infiere un valor para la “*acción de control*”, que es negativo, que actúa para reducir la acumulación de error positiva.

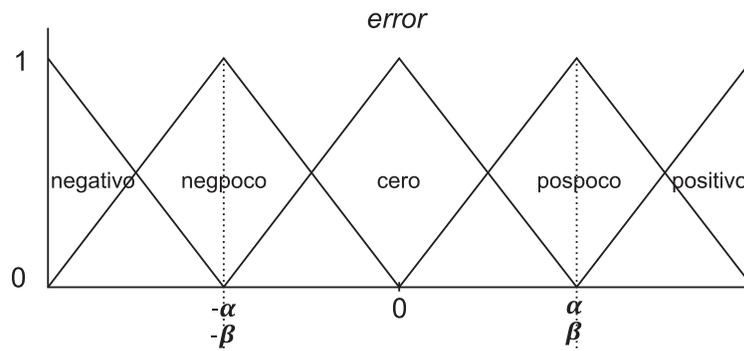
*Si error es < negativo poco > Y acumulación de error es < positivo poco >  
ENTONCES acción de control es < negpoco >*

2. Como primer intento se acentúa la disposición diagonal de la FAM para aumentar la ganancia en toda la superficie de control, como se mencionó en el capítulo uno.

Un efecto típico indeseable, después de acentuar la diagonal de la FAM, es que se provoque un comportamiento oscilatorio debido a una ganancia excesiva. Si al hacer estas modificaciones el desempeño empeora, entonces se deben escalar positivamente los universos de discurso de entrada para disminuir la pendiente de la superficie de control.

En el peor de los casos, es decir, que aun cuando se escalen los universos de discurso de entrada para disminuir la pendiente de la superficie de control continúa el comportamiento oscilatorio, no se debe acentuar la disposición diagonal de las reglas difusas, sino sólo intentar modificar algunas reglas.

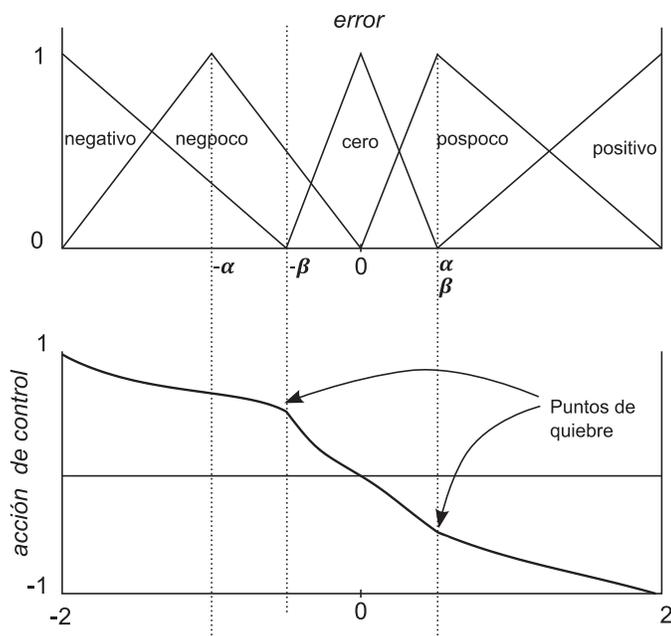
**Sintonización fina.** En esta metodología, la sintonización fina involucra cambiar la disposición de los conjuntos difusos de las variables de entrada y realizar pequeños escalamientos en los universos de discurso de las variables de entrada y de salida. Los parámetros para mover los conjuntos se designan a continuación. Como se muestra en la **Figura 37**, para la variable “error”, el conjunto “negativo” tiene su pico en el valor extremo izquierdo del universo de discurso y su soporte derecho en  $-\beta$ . Para el conjunto “negpoco”, su valor pico está en  $-\alpha$ , su soporte izquierdo y soporte derecho, se encuentran, respectivamente, en el valor extremo izquierdo del universo de discurso y en el origen del universo de discurso. Para el conjunto “cero”, su valor pico se encuentra en cero, su soporte izquierdo en  $-\beta$  y su soporte derecho en  $\beta$ . Los conjuntos “pospoco” y “positivo” tienen de sus picos y soportes se en los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , de manera simétrica a los anteriores.



**Figura 37.-** La ubicación de los picos de los conjuntos “negpoco” y “pospoco” se están relacionados con el valor de  $\alpha$ . La ubicación de los soportes de los conjuntos restantes están relacionados con el valor de  $\beta$ .

Si  $\alpha = \beta$  los cruces de las pendientes de los conjuntos son en 0.5.

El mayor efecto sobre la forma de superficie de control se presenta cuando se mueven los soportes, es decir, cuando se varía  $\beta$ , porque este valor define el punto de inflexión, o punto de quiebre, sobre la superficie. En cambio, el efecto que produce cambiar la ubicación de los picos de los conjuntos intermedios “negpoco” y “pospoco”, ligados al valor de  $\alpha$  solamente produce un cambio ligero pero no cambia el punto de inflexión. En la **Figura 38**, se observa el efecto cuando los cruces no son a 0.5. Mientras menos se haga coincidir el valor de  $\alpha$  y de  $\beta$ , menos suave es el punto de inflexión.



**Figura 38.-** Efecto sobre la salida de control cuando los cruces no son a 0.5.

Se modifica la disposición de los conjuntos difusos de la variable “*acumulación de error*”, porque es la parte integral la que puede generar más inestabilidad. Cuando se ajusta esta variable, se está modificando la parte de la ganancia de la acción de control que actúa principalmente en el estado estable. Pero al mismo tiempo se modifica la parte de la acción de control debido a la doble integración del error. Este efecto surge por la integral a la salida del controlador, que convierte la variable “*acumulación de error*” a lo que podría ser una variable llamada “*doble acumulación del error*”.

3. Comenzar ajustando los conjuntos “negativo poco”, “cero” y “positivo poco”. Mantener los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  iguales y acercarlos al centro. Como se dijo antes, con esto se conserva el cruce a 0.5 de todos los conjuntos. Cuando se ajustan de esta manera los conjuntos difusos, la pendiente de la superficie de control aumenta en el centro, lo que puede provocar inestabilidad en lazo de control.

Si ese es el caso, se debe disminuir la ganancia de esa variable escalando positivamente su universo de discurso.

4. Se alejan los picos de los conjuntos intermedios “negativo poco” y “positivo poco” hacia afuera. Esto es, mover alejar del centro  $\alpha$ . Aunque, según lo reportada en la mayoría de la literatura, es recomendable mantener los cruces en este valor, en este proceso de sintonización se permite su ajuste porque tiene un ligero efecto sobre la superficie de control que no afecta el punto de inflexión, por lo que se puede realizar una modificación sutil. Verificar si al hacer esto se mejora el desempeño.

5. Realizar el mismo proceso de ajuste que se hizo para la variable “*error*”.

Después de haber ajustado los parámetros del controlador para hacerlo no-lineal, para el cual se hace uso de la semántica de las reglas difusas, aún es posible hacer ajustes sobre las ganancias de toda la superficie de control modificando los universos de discurso de las variables de entrada y de salida. La idea es que exista un balance entre el aumento y disminución de las ganancias de manera que se acentúe la acción de las variables con mayor impacto, pero sin comprometer la estabilidad del controlador. Entonces, se realiza lo siguiente:

6. Disminuir el universo de discurso de la variable “*acumulación de error*” para aumentar la ganancia y a la vez aumentar el universo de discurso de la variable “*error*” para compensar posibles comportamientos oscilatorios.
7. Ahora, ajustar ligeramente el universo de discurso de “*acumulación de error*”, pero al mismo tiempo ajustamos el de la salida para compensar comportamientos oscilatorios.

Finalmente, nos enfocamos en la respuesta transitoria. La idea principal es que la acción derivativa actúe sólo para valores de los extremos del universo de discurso. Esto se puede lograr si en un intervalo del universo de discurso se deja solo al conjunto central, para que la aportación en la acción de control sea nula en ese intervalo pues una regla no se puede disparar si el valor de uno de sus antecedentes es nulo.

8. Incluir el término derivativo por medio de la variable lingüística “*cambio en error*”.
  - a. Modificar los conjuntos. Separar los conjuntos de los extremos hacia fuera del centro. En el intervalo donde solamente actúa el conjunto central, la salida será cero.

En la **Figura 39** se muestra el diagrama de flujo del proceso de sintonización antes descrito.

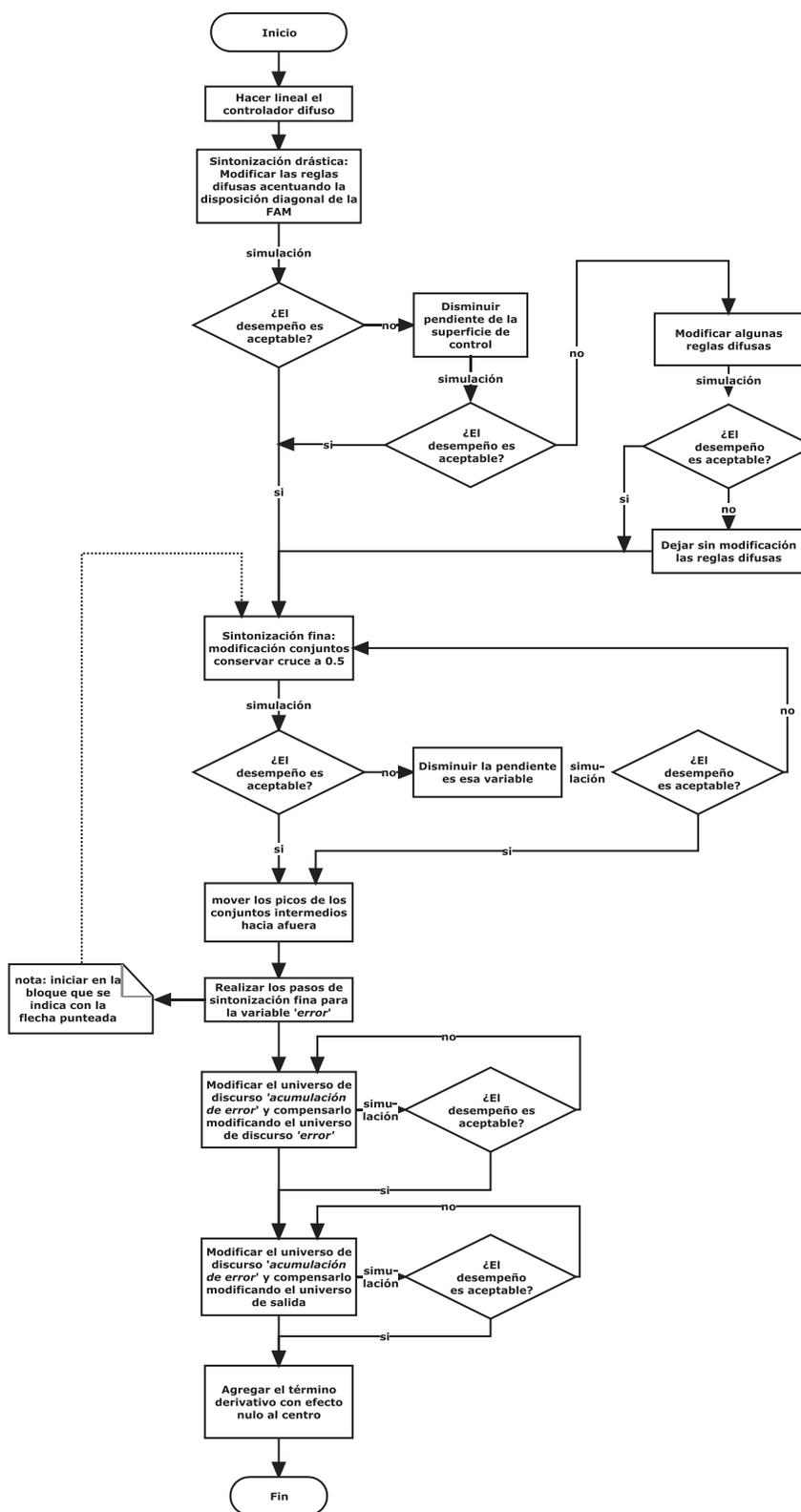


Figura 39.- Diagrama de flujo del proceso de sintonización.

#### 4.4.1.- APLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO DE SINTONIZACIÓN

A continuación, se describe la aplicación el proceso de sintonización al controlador difuso establecido en párrafos anteriores y se muestra el resultado por medio de la varianza residual para cada paso.

1. Se inició con el controlador difuso lineal.

**Consecuencia: los valores de varianza son aceptables porque, si bien no son mejores que los del controlador PID convencional, son muy similares a éstos.** Los valores son los siguientes:

$$\text{varianza eje } X = 570 [\mu\text{arcsec}^2]$$

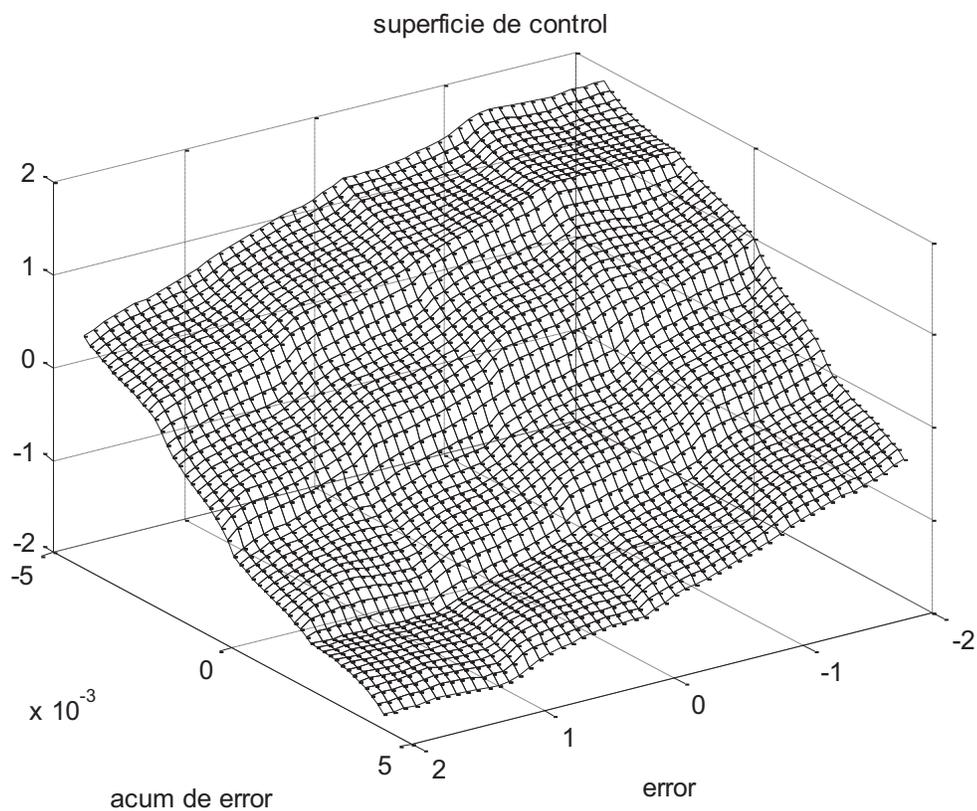
$$\text{varianza eje } Y = 1023 [\mu\text{arcsec}^2]$$

2. Se modificaron las reglas difusas acentuando la disposición diagonal para aumentar la ganancia en toda la superficie de control. La FAM con la diagonal acentuada quedó según la **Figura 40**:

		<i>cambio en error: cero</i>				
		<i>error</i>				
		<i>negativo</i>	<i>negativo poco</i>	<i>cero</i>	<i>positivo poco</i>	<i>positivo</i>
<i>Acumulación del error</i>	<i>positivo</i>	negpoco	negmod	negmucho	negexces	negexces
	<i>positivo poco</i>	nada	negpoco	negmod	negmucho	negmucho
	<i>cero</i>	posmod	pospoco	nada	negpoco	negmod
	<i>negativo poco</i>	posmucho	posmucho	posmod	pospoco	nada
	<i>negativo</i>	posexces	posexces	posmucho	posmod	pospoco

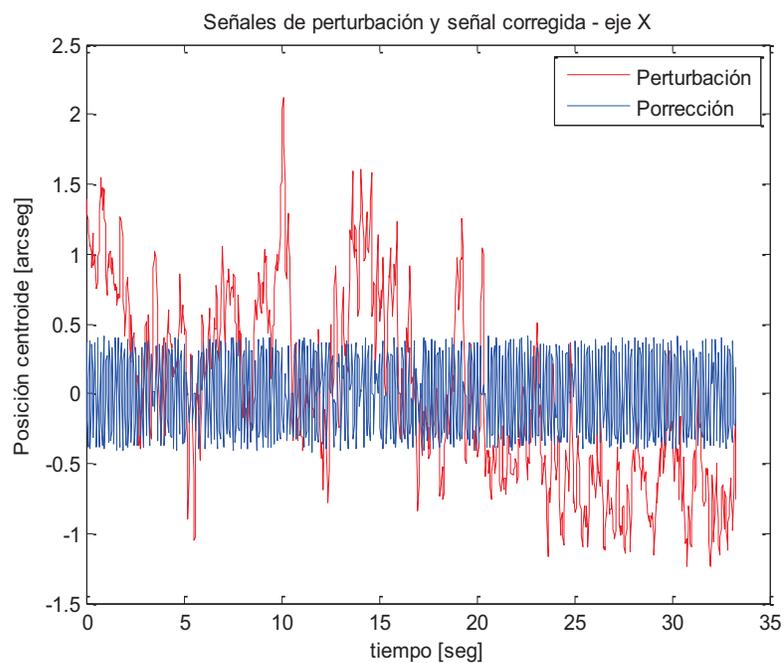
**Figura 40.-** FAM de las variables “error” y “acumulación de error” cuando el valor de la variable “cambio en error” es “cero”. La disposición diagonal se ha acentuado.

La superficie de control resultante se muestra en la **Figura 41**.



**Figura 41.-** Superficie de control lineal con la diagonal acentuada.

**Consecuencia:** en la simulación se presentó un comportamiento oscilatorio en el estado estable, según se muestra en la Figura 42.



**Figura 42.-** Comportamiento oscilatorio después de acentuar la diagonal de la FAM.

- Debido al comportamiento oscilatorio, se modificaron los universos de discurso con el objetivo de disminuir la pendiente de la superficie de control. Se amplió el universo de discurso de la variable “*acumulación de error*” de  $[-0.01, 0.01]$  a  $[-0.015, 0.015]$  porque es la parte integral la que puede generar una mala respuesta.

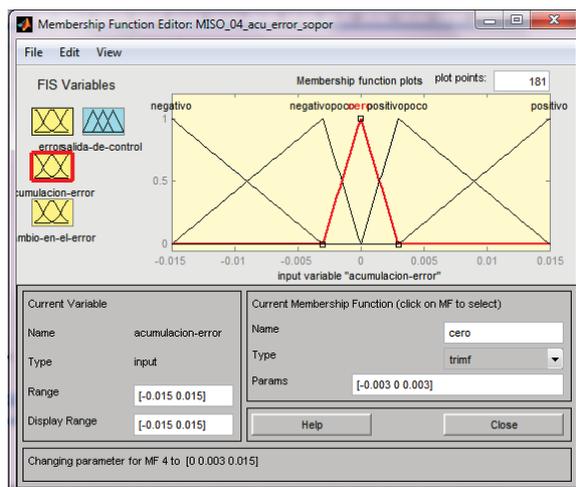
**Consecuencia: Haciendo esto se obtuvieron los siguientes resultados:**

$$\text{varianza eje } X = 117.7 [\mu\text{arcsec}^2]$$

$$\text{varianza eje } Y = 229.4 [\mu\text{arcsec}^2]$$

3. Ahora, se procede con la sintonización fina. Se modificó la distribución de los conjuntos difusos “negativo poco”, “cero” y “positivo poco”. Se disminuyó el valor  $\alpha$  y  $\beta$  para mover los conjuntos intermedios hacia el centro, conservando el cruce a 0.5, tal como se muestra en la **Figura 43**.

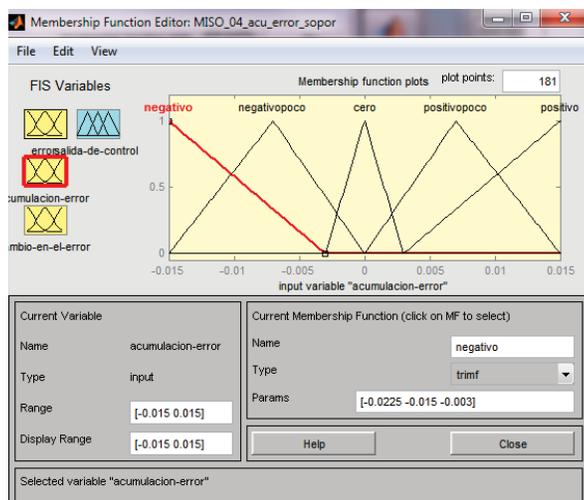
Cuando se ajustan los conjuntos la pendiente de la superficie aumenta en el centro.



**Figura 43.-** Distribución de los conjuntos difusos hacia el centro, conservando el cruce en 0.5.

**Consecuencia: Al reducir el conjunto central y mantener los picos de los dos conjuntos centrales en ese mismo valor (cruces en 0.5) se produce una ligera mejoría en el desempeño.**

4. Se alejaron los picos de los dos conjuntos intermedios del centro hacia afuera (se varió el valor de  $\alpha$  solamente) hasta mejorar el desempeño, tal como se ve en la **Figura 44**.

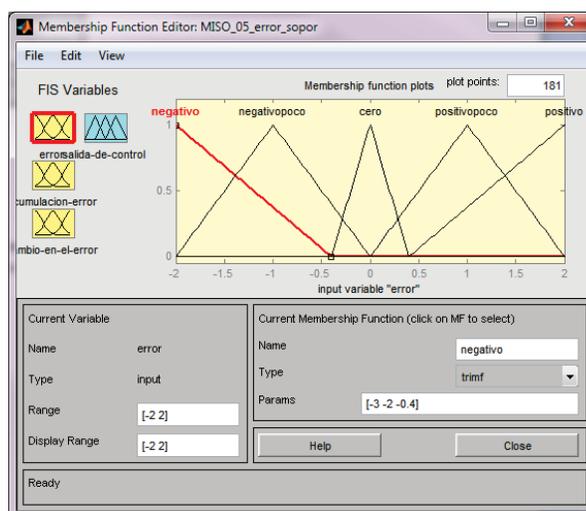


**Figura 44.-** Misma distribución que la mostrada en la figura anterior, pero con los picos de “negpoco” y “pospoco” alejados del centro.

**Consecuencia: las varianzas del movimiento del centroide son cada vez más pequeñas.**

$$\begin{aligned} \text{varianza eje } X &= 71 [\mu\text{arcsec}^2] \\ \text{varianza eje } Y &= 113.9 [\mu\text{arcsec}^2] \end{aligned}$$

5. Se realizó el mismo proceso de ajuste para la variable “error”. Después de llevar a cabo el ajuste en la distribución de los conjuntos de la variable, se llegó a la distribución mostrada en la **Figura 44**.



**Figura 45.-** Distribución de los conjuntos de la variable “error”, según el procedimiento descrito para sintonizar a los conjuntos de la variable “acumulación de error”.

**Consecuencia: Al parecer, no hay efecto al modificar los parámetros de la variable lingüística de “error”.**

$$\begin{aligned} \text{varianza eje } X &= 71 [\mu\text{arcsec}^2] \\ \text{varianza eje } Y &= 113.9 [\mu\text{arcsec}^2] \end{aligned}$$

6. Se disminuyó el intervalo del universo de discurso de la variable “*acumulación de error*” para aumentar la ganancia y a la vez se aumentó el intervalo del universo de discurso de la variable “*error*” para compensar posibles comportamientos oscilatorios. De esta manera, los universos de discurso se cambiaron de [-0.015 0.015] a [-0.007 0.007] y de [-2 2] a [-2.5 2.5], respectivamente para las variables “*acumulación de error*” y “*error*”.

**Consecuencia:** Al aumentar la ganancia de para todo el universo de discurso de la variable “*error*” se tienen mejores resultados. Al parecer, se necesitaba un ajuste mayor para ésta ganancia.

$$\text{varianza eje } X = 33.85 [\mu\text{arcsec}^2]$$

$$\text{varianza eje } Y = 50.28 [\mu\text{arcsec}^2]$$

7. Después, se ajustó el intervalo del universo de discurso de “*acumulación de error*”, pero al mismo tiempo ajustamos el de la salida para compensar comportamientos oscilatorios.

**Consecuencia:** Se mejora el desempeño en alrededor de 50%.

$$\text{varianza eje } X = 15.37 [\mu\text{arcsec}^2]$$

$$\text{varianza eje } Y = 23.05 [\mu\text{arcsec}^2]$$

8. Se incluyó el término derivativo por medio de la variable lingüística “*cambio en error*”. Se agregan dos nuevas FAM para completar la totalidad del conjunto de reglas difusas. Éstas quedaron de la siguiente manera:

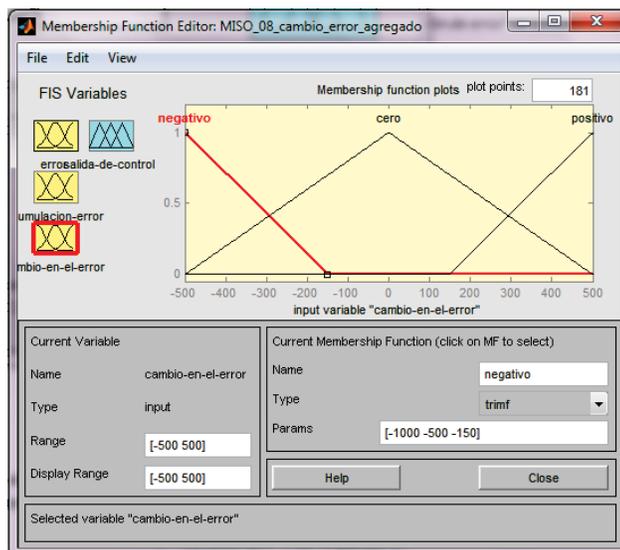
<i>cambio en error: negativo</i>						
		error				
		<i>negativo</i>	<i>negativo poco</i>	<i>cero</i>	<i>positivo poco</i>	<i>positivo</i>
Acumulación del error	<i>positivo</i>	posmod	nada	negpoco	negmod	negmucho
	<i>positivo poco</i>	posmucho	posmod	pospoco	nada	negpoco
	<i>cero</i>	posexces	posmucho	posmucho	posmod	pospoco
	<i>negativo poco</i>	posexces	posexces	posexces	posmucho	posmod
	<i>negativo</i>	posexces	posexces	posexces	posexces	posmucho

**Figura 46.-** FAM de las variables “*error*” y “*acumulación de error*” cuando el valor de la variable “*cambio en error*” es “*negativo*” después de realizar la sintonización.

		<i>cambio en error: positivo</i>				
		error				
		<i>negativo</i>	<i>negativo poco</i>	<i>cero</i>	<i>positivo poco</i>	<i>positivo</i>
Acumulación del error	<i>positivo</i>	negmucho	negexces	negexces	negexces	negexces
	<i>positivo poco</i>	negmod	negmucho	negexces	negexces	negexces
	<i>cero</i>	negpoco	negmod	negmucho	negmucho	negexces
	<i>negativo poco</i>	pospoco	nada	negpoco	negmod	negmucho
	<i>negativo</i>	posmucho	posmod	pospoco	nada	negmod

**Figura 47.-** FAM de las variables “error” y “acumulación de error” cuando el valor de la variable “cambio en error” es “positivo” después de realizar la sintonización.

Se modificaron los conjuntos. Se separar los conjuntos de los extremos hacia fuera del centro. En el intervalo donde solamente actúa el conjunto central, la salida será cero. Lo anterior puede apreciarse en la **Figura 48**.



**Figura 48.-** Distribución de los conjuntos de la variable “cambio en error”. En el centro del universo de discurso se dejó sola al conjunto “cero” con el propósito de que esta variable no aportara un valor de acción de control cuando el sistema opera en el estado estable.

**Consecuencia: Se mejora en el comportamiento transitorio, pero se sacrifica ligeramente el desempeño en el estado estable, como se puede verificar al calcular las varianzas:**

$$\text{varianza eje } X = 19.29 [\mu\text{arcsec}^2]$$

$$\text{varianza eje } Y = 30.72 [\mu\text{arcsec}^2]$$

Fin del proceso de sintonización.



# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS

De los resultados obtenidos en la simulación del lazo de control para realizar la corrección del movimiento del centroide, se necesita conocer la cantidad de movimiento de la señal corregida alrededor del origen pues, como se mencionó en el Capítulo 1, esto representa la posición del centroide de la intensidad de la imagen respecto al centro del detector de cuadrantes. Este movimiento, a su vez, está ligado de manera proporcional a las fluctuaciones de la inclinación del frente de onda, que es un proceso aleatorio [13]. De esta manera, para determinar la magnitud de la corrección que realiza el sistema de control y las características de ésta, se emplea un punto de vista estadístico.

En este trabajo se hace uso de dos parámetros de rendimiento para evaluar la corrección: el espectro de potencia y la varianza del movimiento del centroide de la imagen. Como se mencionó en el Capítulo 2, el espectro de potencia del movimiento del centroide es un buen indicador del desempeño de un sistema de OA para las diferentes frecuencias de la perturbación. Éste se obtiene a través de calcular la transformada de Fourier, por cada eje, de acuerdo con la Ecuación (95).

$$EP_{xy} = \langle |\mathfrak{F}(MC_{xy})|^2 \rangle \quad (95)$$

Derivado del espectro de potencia, se obtiene el valor de varianza del movimiento de centroide de la imagen y el valor de la varianza residual de fase. De esta última, se realiza un comparativo cuantitativo de los resultados de las diferentes simulaciones que para diferentes controladores con distintas amplitudes de perturbación.

Puesto que se contaba con los parámetros sintonizados del controlador PID convencional por dos métodos, *Ziegler-Nichols-CHR* y auto sintonización con Simulink® (Apéndice D), se realizaron las mismas pruebas de simulación con este controlador que las realizadas con el controlador difuso, sintonizado mediante la metodología establecida en esta Tesis, y se analizaron los resultados de la misma manera. El hecho de tener los resultados con los criterios de rendimiento para ambos controladores permite comparar al controlador difuso respecto a un controlador ampliamente utilizado.

La robustez del controlador en el lazo de control se prueba cambiando el parámetro que se espera pueda varíe al realizar una observación en el telescopio, de manera que no es necesario hacer una comprobación analítica al respecto. El tamaño de la perturbación atmosférica es un parámetro que aumenta, entre otras causas, cuando se realiza una observación con un ángulo cenital  $\theta$  alto, es decir,

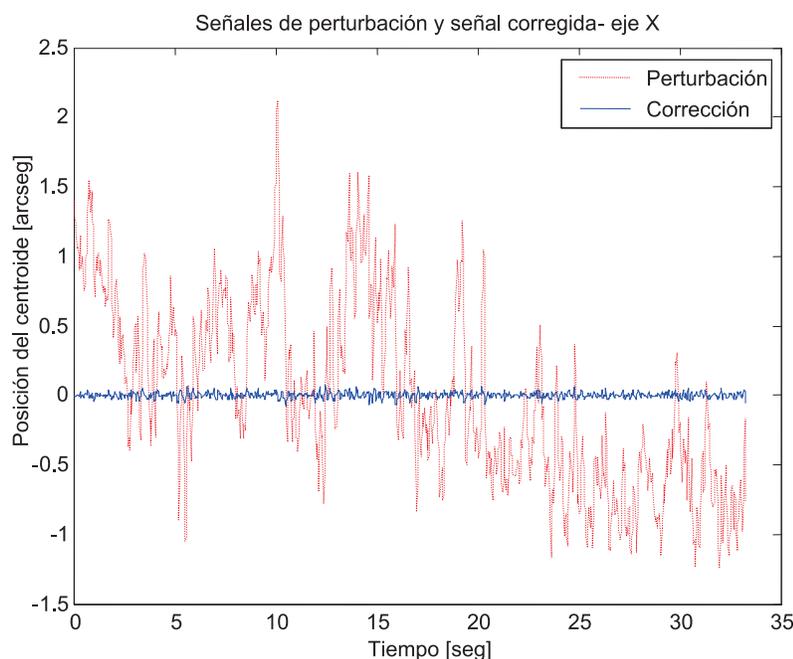
más cercana al horizonte. Una manera de aproximar este aumento de la turbulencia es escalando el parámetros de Fried  $r_0$  con la expresión  $(\sec \theta)^{3/5}$  [13], recordando que el parámetro de Fried y la turbulencia atmosférica están relacionados de manera inversamente proporcional.

De esta manera, para satisfacer la prueba de robustez del controlador, se realizaron corridas de simulación con los datos de perturbación escalados al doble y a la mitad de la amplitud original.

### 5.1.- MOVIMIENTO DEL CENTROIDE DE LA IMAGEN VS MOVIMIENTO CORREGIDO

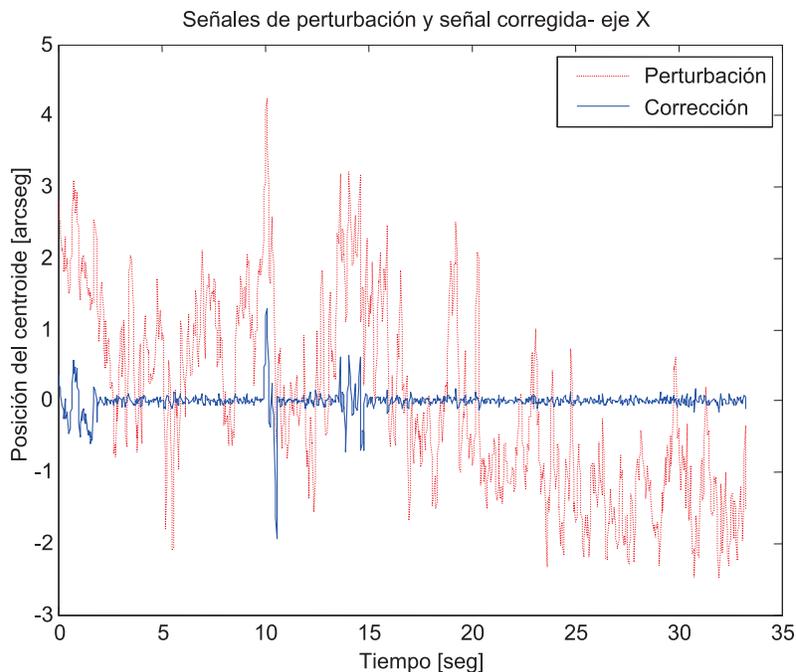
A continuación se muestran las gráficas en el tiempo del movimiento del centroide y su corrección por parte del controlador PID convencional y por parte del controlador difuso para el *frame* de 33 segundos de los datos obtenidos en telescopio.

En la **Figura 51** y **Figura 50** se muestran los resultados de las pruebas realizadas con el controlador PID convencional. En la **Figura 49**, cuando la amplitud de la perturbación se mantiene sin escalamiento, el controlador realiza la corrección para todo el *frame* manteniendo el centroide en el origen, pero la amplitud del movimiento del centroide corregido es mayor al realizado por el controlador difuso. Las diferencias entre la corrección de ambos controladores se muestran más adelante, de manera cuantitativa, con los valores de varianza residual.



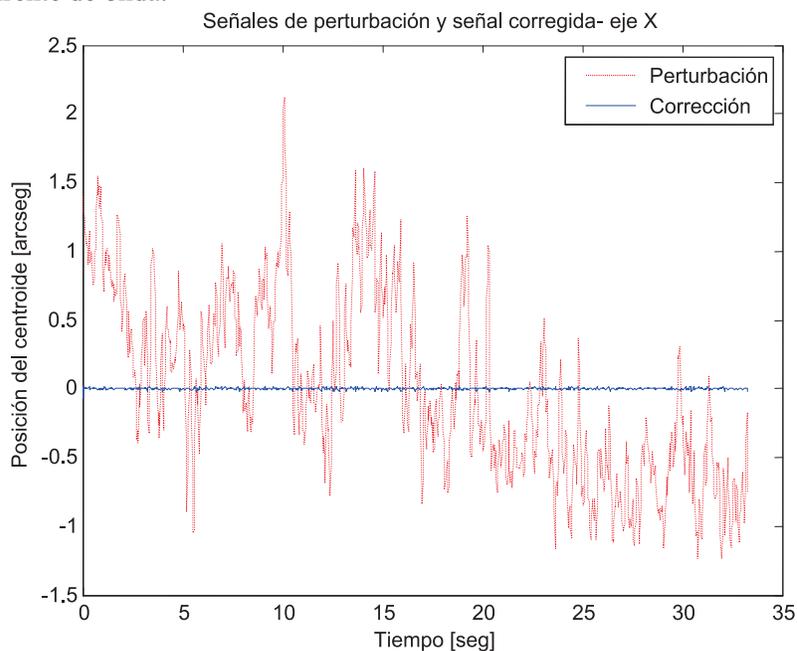
**Figura 49.- Movimiento del centroide, eje x. Amplitud original. Controlador PID convencional.**

En la **Figura 50** se muestra el comportamiento del controlador PID cuando la entrada de perturbación se escaló al doble de amplitud. El controlador no puede mantener al centroide cerca del origen para todo el *frame* de simulación. Al inicio, alrededor del segundo 10 y del segundo 15, la señal corregida presenta movimientos con amplitud por arriba de la amplitud observada en el resto de la simulación. Por supuesto, estos movimientos repentinos que alejan el centroide del origen generan pérdida de resolución espacial en la imagen.



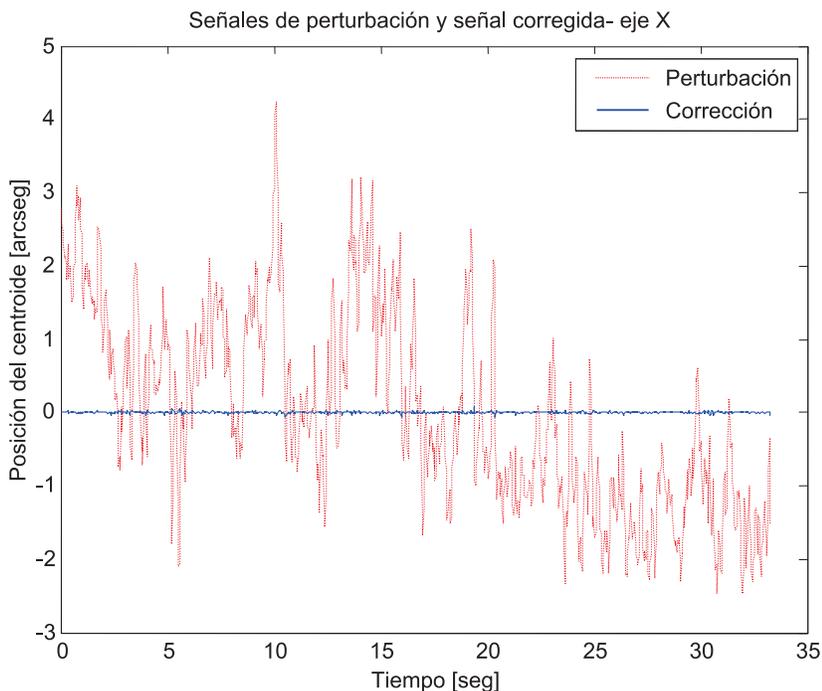
**Figura 50.- Movimiento del centroide, eje x. Amplitud al doble. Controlador PID convencional.**

En la **Figura 51**, la perturbación tiene la amplitud original. Se puede observar que el controlador difuso realiza la corrección para todo el *frame* de perturbación manteniendo la señal corregida alrededor del origen y con una amplitud cercana a cero. La varianza del movimiento del centroide calculada a partir del espectro de potencia, como se explica más adelante, es de  $0.000013524 [arcsec^2]$ . Para estas condiciones de corrección prácticamente se habría eliminado la inclinación del frente de onda.



**Figura 51.- Movimiento del centroide, eje x. Amplitud original. Controlador Difuso.**

En la **Figura 52**, la amplitud se escaló al doble. A pesar de ello, el controlador mantiene baja la amplitud de la señal corregida y el movimiento es alrededor del origen.



**Figura 52.- Movimiento del centroide, eje x. Amplitud al doble. Controlador Difuso.**

## 5.2.- DETERMINACIÓN DEL ESPECTRO DE POTENCIA

En seguida se muestran los espectros de potencia de la señal sin corrección y con corrección obtenidos con MATLAB®, a partir de la Ecuación (95). En la **Figura 53**, se observa el espectro de potencia distribuido para la señal de perturbación original y la señal corregida con el controlador PID convencional. La energía de la señal original cae conforme la frecuencia del centroide aumenta, en cambio la energía de la señal corregida por el controlador PID aumenta hasta una frecuencia de corte ubicada alrededor de 2 Hz.

En el caso del espectro de la señal corregida por el controlador difuso, misma que se puede observar en la **Figura 54**, la energía de la señal se mantiene casi constante desde las frecuencias menores hasta las frecuencias mayores.

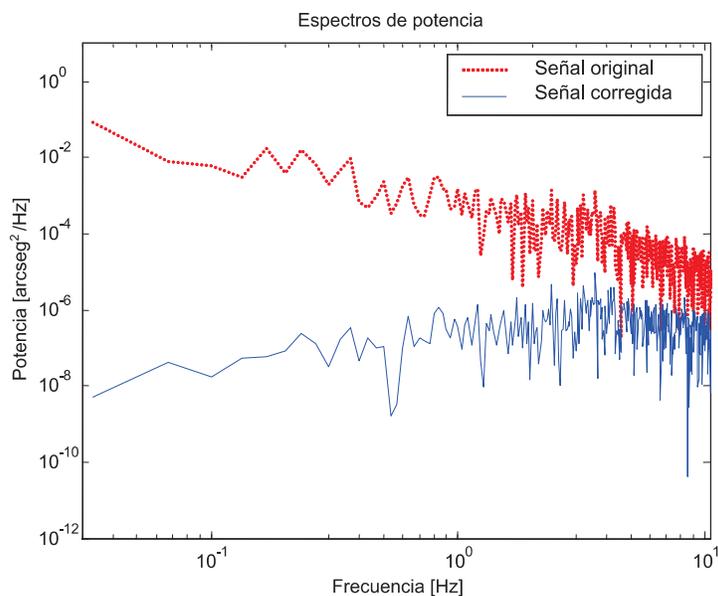


Figura 53.- Espectros de potencia de la perturbación original vs la corrección realizada por el controlador PID convencional

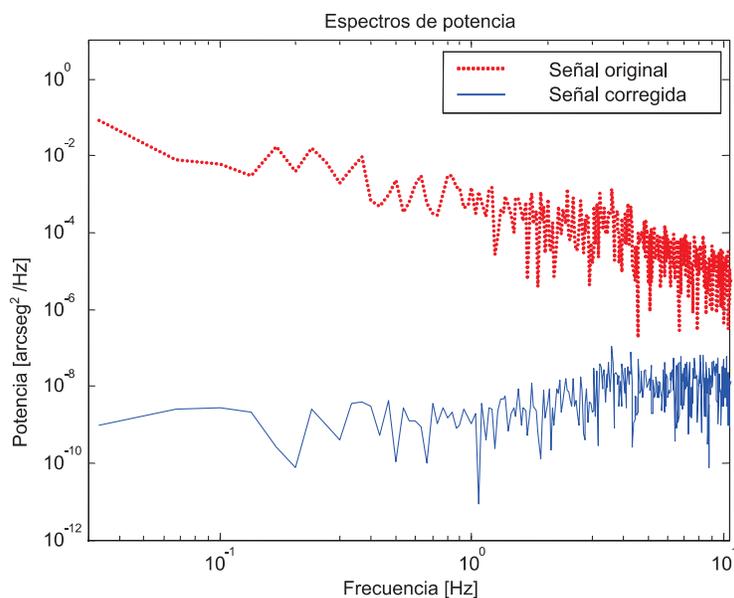


Figura 54.- Espectros de potencia de la perturbación original vs la corrección realizada por el controlador difuso.

### 5.3.- VARIANZA DEL MOVIMIENTO DEL CENTROIDE

Integrando el espectro de potencia se puede calcular la varianza del movimiento del centroide en un eje [16], como en la Ecuación (96):

$$\Delta\theta = \int EP_{xy} \quad (96)$$

En la **Tabla 4** se muestran los valores de varianza del movimiento del centroide, para los dos ejes y también su valor promedio, cuando la corrección se lleva a cabo por el controlador PID convencional y por el controlador difuso.

**Tabla 4.- Varianza en los dos ejes y varianza promedio del movimiento del centroide de la imagen.**

Escalamiento de la amplitud de la perturbación		Movimiento del centroide sin corrección		Movimiento corregido con el controlador PID convencional		Movimiento corregido con el controlador difuso	
		Varianza de cada eje [ $\mu\text{arcsec}^2$ ]	Varianza promedio [ $\mu\text{arcsec}^2$ ]	Varianza de cada eje [ $\mu\text{arcsec}^2$ ]	Varianza promedio [ $\mu\text{arcsec}^2$ ]	Varianza de cada eje [ $\mu\text{arcsec}^2$ ]	Varianza promedio [ $\mu\text{arcsec}^2$ ]
Mitad	Eje X	108930	99070.5000	115.2800	149.4600	3.0173	3.7215
	Eje Y	89211		183.6400		4.4256	
Original	Eje X	435710	396275	461.11	597.7800	13.524	18.7415
	Eje Y	356840		734.45		23.959	
Doble	Eje X	1742800	1585100	25154	26520	74.07	104.2700
	Eje Y	1427400		27886		134.47	

#### 5.4.- VARIANZA DE FASE DEL FRENTE DE ONDA

Puesto que se simuló un sistema de OA cuya corrección para órdenes bajos se realiza por medio del seguimiento del centroide de la imagen, los resultados obtenidos se evalúan con la varianza del movimiento residual de la imagen. Es posible utilizar la varianza de fase del frente de onda y de esa manera relacionar los resultados con los parámetros de la observación, es decir, con el diámetro del telescopio y la longitud de onda de la luz observada.

Como se señaló en el Capítulo 1, la varianza del movimiento del centroide de la imagen y la varianza de fase del frente de onda están relacionados linealmente con la siguiente expresión:

$$(\sigma_{\theta_z})^2 = 2.73 \frac{(\sigma_{\theta_G})^2}{\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2} [\text{rad}^2] \quad (97)$$

A partir de los datos de la primera tabla, se obtienen valores de varianza en ambos ejes y con el propósito de hacer un comparativo de los resultados obtenidos con el controlador PID convencional y el controlador difuso a diferentes amplitudes, se calcula el valor *rms* a partir de los valores de varianza. De los valores de *rms* se hace un comparativo respecto al valor del movimiento del centroide sin corrección, el cual se presenta en la tabla siguiente como “orden de corrección”.

**Tabla 5.- Varianza y valor *rms* promedio de la fase.**

amplitud de la perturbación	Sin corrección		PID convencional, auto-sintonizado			Controlador difuso		
	Varianza promedio [ $rad^2$ ]	Valor <i>rms</i> promedio [ $rad$ ]	Varianza promedio [ $rad^2$ ]	Valor <i>rms</i> promedio [ $rad$ ]	Orden de corrección	Varianza promedio [ $rad^2$ ]	Valor <i>rms</i> promedio [ $rad$ ]	Orden de corrección
mitad	5.0272	2.2421	0.0075	0.0866	51.78	0.0002	0.0141	318.02
original	20.1084	4.4842	0.0303	0.1740	25.77	0.0009	0.0300	149.47
doble	80.4335	8.9684	1.3457	1.1600	3.86	0.0053	0.0728	61.59

De la **Tabla 5** llegamos a las siguientes conclusiones: El controlador difuso redujo el valor *rms* promedio del movimiento de inclinación del frente de onda en un orden de 150 veces la perturbación original. Comparado con el desempeño del controlador PID convencional, para la misma amplitud de la perturbación, podemos asegurar que el controlador difuso ofrece un menor resultado pues sólo lograría disminuir la inclinación del frente de onda 25 veces respecto a la perturbación original. Ahora, si comparamos el desempeño de ambos controladores cuando la amplitud de la perturbación se escala a la mitad observamos que hay una mejoría en los dos controladores y ésta se encuentra cercana al 100% respecto a los resultados con la amplitud sin escalar. El comportamiento anterior no se observa cuando los controladores se someten a la perturbación escalada al doble. El orden de corrección del controlador PID convencional se reduce drásticamente a un valor cercano a 4 respecto al valor *rms* de la señal sin corregir, lo que resulta evidente en la **Figura 50** donde se puede ver que el controlador no es capaz de mantener la señal corregida para todo el *frame* de datos. Este comportamiento no se presenta en el controlador difuso. Para ese caso, cuando el controlador difuso tiene que corregir la perturbación escalada al doble, aunque el orden de corrección disminuye a 62, aproximadamente, la señal corregida se mantiene cercana al origen. Con esto se prueba que el controlador difuso es robusto ante el aumento de la amplitud de la perturbación, que es el parámetro que principalmente varía durante la observación en telescopio.



# CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

## CONCLUSIONES

Esta Tesis permitió seguir explorando la aplicación del Control Difuso y Óptica Adaptativa (OA) en un instrumento astronómico, para corregir las aberraciones de órdenes bajos del frente de onda de la luz observada en telescopio. El Control Difuso es una técnica que permite relacionar las variables involucradas en un proceso, por medio de reglas difusas de la forma *SI-ENTONCES*, para controlar una planta. La importancia de las aberraciones de órdenes bajos es que constituyen alrededor del 87% de la perturbación total generada por la atmósfera de la Tierra. El estado del arte indica que no existe desarrollo para este tipo de sistema que combine ambas técnicas, además del instrumento *Low Order Little Aperture* (LOLA) con el controlador difuso tipo PD. Por otro lado, es un hecho que en el diseño de instrumentos de OA, para bajos y órdenes altos, aun se pone nula o poca atención a la respuesta dinámica de los elementos que conforman el sistema, lo que influye negativamente en el desempeño final del instrumento. Esto es parte de lo que motivó el desarrollo de esta Tesis.

El objetivo principal de este trabajo fue establecer un método sistemático de sintonización de un controlador difuso, mediante un modelo dinámico del sistema en Simulink® del instrumento LOLA, que contempla la dinámica más significativa de sus componentes. Para esto se contó con datos del movimiento del centroide de la intensidad de la imagen tomados de telescopio, que se utilizaron para simular un lazo de control y, al evaluar el resultado, tener un criterio de rendimiento.

Después de revisar en la literatura sobre los distintos métodos de sintonización de controladores difusos, se optó por utilizar una metodología en la que se parte de los parámetros de un controlador PID convencional. Por lo anterior se tuvo que desarrollar un modelo lineal y simplificado del modelo dinámico del sistema, con el que se obtuvieron los parámetros de un controlador PID convencional, utilizando la variante CHR del método de Ziegler-Nichols para una planta sujeta a perturbación. El controlador difuso en el que se desarrolló la metodología de sintonización, parte de una estructura basada en un controlador PID convencional.

Luego de realizar un análisis en el modelo simplificado y lineal del sistema se concluyó que se necesitaba aumentar el tipo de sistema, agregando un integrador al controlador, para mejorar el rechazo a las perturbaciones. En ese sentido, un integrador se agregó a la salida del controlador, y así, la estructura final resultó en un controlador difuso  $PI + I I^2$ .

Una vez establecida la estructura del controlador, se generó un método para sintonizar al controlador difuso, el cual hace énfasis en aquellos parámetros del controlador que tienen mayor impacto en el desempeño total del sistema, pero que no descarta modificar aquellos parámetros que tienen una menor influencia. En el proceso de sintonización, los parámetros del controlador, como las reglas

difusas, la ubicación de los soportes y los picos de los conjuntos difusos, se modifican de acuerdo al impacto que tienen dentro del lazo de control. Con esto, se logró que la sintonización no fuera un proceso laborioso, pero sí efectivo.

El parámetro de rendimiento para evaluar al controlador fue la varianza residual del movimiento del centroide de la imagen, que es un parámetro estadístico asociado con parámetros ópticos utilizados en Astronomía. Puesto que se contaba con los parámetros del controlador PID convencional, se realizó la simulación con éstos para hacer una comparación de rendimiento entre ambos controladores. Esto sirvió para validar la idea de que, al basar la estructura del controlador difuso en los parámetros de un controlador PID convencional se estaba mejorando el rendimiento del controlador difuso sobre el controlador lineal.

Para probar la robustez se sometieron ambos controladores a una perturbación escalada al doble de la amplitud original, de manera similar a lo que sucede cuando aumenta el ángulo cenital en una observación en telescopio.

De las simulaciones realizadas, según la descripción anterior, se llegó a la conclusión de que el controlador difuso, propuesto en esta Tesis, se desempeña mejor que el controlador PID convencional porque es capaz de reducir el movimiento del centroide, alrededor del origen de coordenadas, 150 veces la perturbación original, en comparación con la reducción de 25 veces del controlador lineal. Además, de las simulaciones realizadas escalando la amplitud de la perturbación al doble, se afirma que el controlador PID convencional no es robusto en el sentido de que no es capaz de mantener el centroide de la imagen al centro para todo el *frame* de perturbación, lo que genera que la corrección sólo se mejore en un factor de 3. En cambio, el controlador difuso sí presenta robustez porque mantiene el centroide de la imagen alrededor del origen a lo largo de toda la simulación, aunque sólo reduce el movimiento en 61 veces la perturbación original, para esas condiciones.

Como conclusión final del trabajo desarrollado en esta Tesis se afirma lo siguiente:

Es posible mejorar el rendimiento de un instrumento de OA, para órdenes bajos, aplicado en Astronomía, utilizando un controlador difuso que permite relacionar las entradas y salidas del proceso mediante una descripción en el lenguaje natural, puestas en reglas de la forma *SI-ENTONCES*, siempre y cuando se establezca una metodología sistemática para determinar los parámetros óptimos del controlador. Si se procede de esta manera, el instrumento puede tener altos índices de rendimiento ante las perturbaciones aleatorias generadas por la atmósfera y, a la vez presentar robustez ante la variación de la magnitud de la perturbación, por ejemplo el debido al cambio en el ángulo cenital de la observación, sin que se tenga que resintonizar el controlador.

## **PERSPECTIVAS**

Por los resultados favorables obtenidos, se fortalece la idea de seguir desarrollando aún más la técnica de Control Difuso en Óptica Adaptativa. Uno de los problemas inmediatos a solucionar, que se presentan en el tipo de instrumento aquí descrito, es el aumento de la perturbación atmosférica ligada al cambio del ángulo cenital del telescopio. La solución radica en modificar de manera automática algún parámetro del controlador o algún componente óptico según lo requieran las condiciones de *seeing*. El controlador difuso tiene el potencial de resolver este problema al tener estructura variable,

por lo que es posible desarrollar un lazo de control que se adapte a la amplitud cambiante de la perturbación, mediante un esquema neuro-difuso, por ejemplo. Es un hecho que lo anterior no se podría lograr con el controlador PID convencional.

También, se pretende que este trabajo sea el antecedente para aplicar el Control Difuso en la corrección de perturbaciones de órdenes altos . Para esto se necesita conocer la respuesta dinámica de los actuadores que modifican la forma del espejo deformable y establecer un lazo de control para cada uno de ellos, similar al desarrollado y representado en este texto. Lo anterior supone un aumento considerable de la capacidad del hardware donde sea implantado el controlador. De esto se desprende otra perspectiva que se plantea que es la implantación del controlador difuso en una plataforma de hardware de arreglo de compuertas programable en campo (FPGA, por su sigla en inglés), porque permite realizar operaciones de forma paralela y con una latencia muy baja.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. K. Tyson, *Adaptive Optics Engineering Handbook*, Marcel Dekker, Inc., 2000.
- [2] R. J. Noll, «Zernike polynomials and atmospheric turbulence,» *Journal of the Optical Society of America*, p. 207, Octubre 1976.
- [3] E. Fedrigo, R. Muradore y D. Zilio, «High performance adaptive optics system with fine tip/tilt control,» *Control Engineering Practice*, n° 17, pp. 122-135, 2009.
- [4] D. P. Looze, "Discrete-Time of an Adaptive Optics System," *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2875-280, 2007.
- [5] F. Garfías Macedo, «Estudio de un sistema de óptica adaptativa,» *Tesis de licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM*, 1996.
- [6] J. P. Sotelo Díaz, «Desarrollo de un sistema de óptica adaptativa de órdenes bajos para uso astronómico,» *Tesis de Maestría. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM*, 2000.
- [7] R. A. Flores Meza, «Diseño e implantación de un controlador difuso en un sistema de óptica adaptativa tipo tip-tilt,» *Tesis de Maestría. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM*, 2001.
- [8] A. A. B. Raj y J. A. V. Selvi, «Lower-Order Adaptive Beam Steering System in Terrestrial Free Space Point-to-Point Laser Communication using Fine Tracking Sensor,» *Proceedings of 2011 International Conference on Signal Processing, Communication, Computing and Networking Technologies*, pp. 699-674, 2011.
- [9] D. Driankov, H. Hellendoorn y M. Reinfrank, *An Introduction to Fuzzy Control*, 2da, Ed., Springer, 1996.
- [10] K. M. Passino, *Fuzzy Control*, California: Addison-Wesley, 1998.
- [11] I. S. McLean, *Electronic imaging in astronomy, Detector and instrumentation*, UK: Springer, 2008.
- [12] A. Glindemann, «Relevant Parameters for Tip-Tilt Systems on Large Telescopes,» *Astronomical Society of the Pacific*, pp. 682-687, 1997.
- [13] M. Bass, *Handbook of optics*, vol. V, M. Bass, Ed., USA: MCGraw-Hill, 2010.
- [14] G.-m. Dai and V. N. Mahajan, "Zernike annular polynomials and atmospheric turbulence," vol. 24, no. 1, 2006.

- [15] P. Léna, «Adaptive optics: a breakthrough in astronomy,» *Experimental Astronomy*, vol. 26, n° 1-3, pp. 35-48, 2009.
- [16] A. Glindemann, M. J. McCaughrean, S. Hippler, C. Birk, K. Wagner y R.-r. Rohloff, «CHARM: A tip-tilt tertiary System for de Calar Alta 3.5-m telescope,» *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, n° 109, pp. 688-696, junio 1997.
- [17] R. Flores, P. Sotelo y F. Garfias, «Adaptive Optics Tip-Tilts Systems with Fuzzy Control,» *Adaptive Optics Systems Technology, Proceeding of SPIE Vol 4007*, pp. 81-91, 2000.
- [18] L. Zheng, «A PRACTICAL GUIDE TO TUNE OF Proportional and Integral (PI) LIKE FUZZY CONTROLLERS,» *YAMATAKE-HONEYWELL CO.*, 1992.
- [19] J. Jantzen, *Foundations of Fuzzy Control*, John Wiley & son Ltd., 2007, pp. 79-91.
- [20] G. K. I. Mann, B.-G. Hu and a. R. G. Gosine, "Analysis of direct action fuzzy PID controller structures," *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics-part B: cybernetics*, pp. Vol. 31, No. 2, pp. 263-269, April 2001.
- [21] J.-X. Xu, C.-C. Hang y C. Liu, «Parallel structure and tuning of a fuzzy PID controller,» *Automatica*, n° 36, 2000.
- [22] H. X. Li, H. B. Gatland and A. W. Green, "Fuzzy Variable Structure Control," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 27, no. 2, 1997.
- [23] G. K. I. Mann, B.-G. Hu y R. G. Gosine, «Two Level Tuning of Fuzzy PID Controllers,» *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 31, n° 2, abril 2001.
- [24] Y. Bai, H. Zhuang y Z. S. Roth, «Fuzzy Logic Control to Supress Noise and Coupling Effects,» *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, n° 1, enero 2005.
- [25] Gatland, H.-X. Li y H. B., «A New Methodology for Designing a Fuzzy Logic Controller,» *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 25, n° 3, marzo 1995.
- [26] B. Hu, G. K. I. Mann y R. G. Gosine, «New Methodology for Analytical and Optimal Design of Fuzzy PID Controllers,» *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, vol. 7, n° 5, octubre 1999.
- [27] D. L. Fried, «Time-delay-induced mean-square error in adaptive optics,» *Journal of Optical Society of America*, vol. 7, pp. 1224-1225 , 1990.
- [28] G. Franklin, D. Powel and A. Emami-Naeini, *Feedback control of dynamic systems*, 4ta ed., New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [29] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*, Pearson Education, 2003.

- [30] S. Thompson, Control Systems, Engineering and design, 1ra ed., Longman Group, 1989.
- [31] K. J. Åström, PID controllers, theory, design and tuning, Instrument Society of America, 1995.
- [32] N. S. Nise, Sistemas de control para ingeniería, Patria, 2010.
- [33] G. K. I. Mann y E. Harinath, "Design and Tuning of Standard Additive Model Based Fuzzy PID Controllers ofr Multivariable Process Systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, p. 667, 2008.
- [34] J. P. Sotelo Díaz, «Desarrollo de un sistema de óptica adaptativa de órdenes bajos para uso astronómico,» *Tesis de maestría, División de Estudios de Posgrado FI, UNAM*, 2000.

# APÉNDICES

## APÉNDICE A. EL ENTORNO SIMULINK® DE THE MATHWORKS™

MATLAB® es un software de la empresa Mathworks® para realizar computación en ciencias e ingeniería. Su uso se extiende desde el campo académico, de investigación e incluso en la industria automotriz, la aeroespacial, de medio ambiente, entre otras. Incluye el software Simulink® para modelar, analizar y simular una gran variedad de sistemas dinámicos por medio de su interface gráfica. Su librería de funciones está formada por bloques con los cuales se pueden construir intuitivamente el modelo de algún sistema. Su mayor ventaja es la integración directa con MATLAB® y la posibilidad de cambiar algunos parámetros de los elementos que forman un modelo de un sistema cuando se está realizando una simulación.

### SOLVERS EN SIMULINK®

Simulink® puede emplear diferentes *solvers* basados en distintos métodos numéricos para resolver y simular sistemas con dinámicas complejas (sistemas *stiff*) o sistemas con dinámicas más simples. En general, el desempeño de los *solvers* mejora cuando el esfuerzo de cómputo es mayor pero en cambio se sacrifica el tiempo en que se lleva a cabo simulación.

Los *solvers* se pueden clasificar en dos categorías básicas: *fixed-step* (paso fijo), *variable-step* (paso variable). En el paso fijo los intervalos de tiempo no cambian a lo largo de la simulación. También, siendo más específicos, se pueden clasificar en explícitos o implícitos. Un método implícito necesitará más esfuerzo computacional pero su precisión mejora bastante frente a los explícitos. En cuanto al paso de simulación, se pueden encontrar los *one-step* o *multistep*. En los *one-step* para computar  $y_n$  sólo se necesita la solución del punto calculado anteriormente  $y_{n-1}$ , en cambio, para los *multi-step* es necesario tener varios puntos precedentes a  $y_n$ . Dependiendo de los requerimientos del problema de valor inicial debe especificarse si el intervalo de tiempo es variable o fijo, un paso variable mejora el tiempo de simulación.

### Fixed-step solvers y Variable-step solvers

Los *Fixed-step solvers* o de paso fijo resuelven el sistema a intervalos constantes desde el inicio de la simulación hasta el final. Simulink® utiliza cinco métodos numéricos explícitos de paso fijo, y usa por *default* el método de Euler que es el de menor complejidad. Los métodos explícitos evalúan una sola vez la función derivativa por cada paso, mientras que los métodos implícitos necesitan conocer la función derivativa en el mismo punto en que se quiere conocer su solución haciendo uso de métodos, con el de Newton. Simulink® solamente tiene un método de paso fijo implícito, el ode14x.

Para los métodos de paso fijo la precisión depende del tamaño del intervalo de la variable independiente (tiempo o espacio). Si éste intervalo es pequeño se alcanza una mejor precisión pero se compromete el esfuerzo de cómputo, por el contrario, a mayor tamaño del intervalo la precisión será menor pero el resultado se tendrá en menor tiempo debido a un menor esfuerzo computacional.

### **Variable-step solvers**

En contraste, los *variable-step solvers* incrementan o reduce el intervalo dependiendo de la dinámica del sistema para cumplir con una tolerancia al error previamente especificada. Cuando la dinámica del modelo a resolver no es rápida no se necesitan intervalos grandes. Esto mejora notablemente el tiempo de simulación.

A continuación se presentan los distintos métodos de paso variable y algunas recomendaciones de su uso según la Guía del usuario de Simulink®.

**Ode45**: Está basado en el método explícito Runge-Kutta (4, 5) del par Dormand-Prince. Es un *solver* de paso simple. Ode45 se recomienda aplicarlo en un primer intento antes de usar cualquier otro método.

**Ode23**: basado en el método explícito Runge-Kutta (2, 3) del par Bogacki-Shampine. Puede llegar a ser más eficiente que Ode45 para tolerancias no muy rigurosas y para sistemas ligeramente *stiff*. Es un *solver* de un-paso o paso sencillo.

**Ode113**: Es un *solver* de orden variable basado en Adams-Bashforth-Moulton PECE. Puede ser más eficiente que el **Ode45** para tolerancias más rigurosas. Es un *solver* multipaso.

**Ode15s**: Es un *solver* de orden variable basado en las Fórmulas de Diferenciación Numéricas (NDFs). Se usa si se sospecha que un sistema es contiene ecuaciones diferenciales inestables (sistema *stiff*) o si **Ode45** falla o es muy ineficiente.

**Ode23s**: Está basado en la fórmula modificada de Rosenbrock de orden 2. Por ser un *solver* de un-paso puede ser más eficiente que el **Ode15s** para tolerancias no muy rigurosas. Puede resolver algunos tipos de problemas *stiff* en los cuales **Ode15s** no es efectivo.

**Ode23t**: Es una implementación de la regla trapezoidal usando un interpolador libre. Se usa este *solver* cuando el problema es moderadamente *stiff* y se necesita una solución sin sobrepaso numérico.

## APÉNDICE B. TOOLBOX™ DE LÓGICA DIFUSA

El Fuzzy Logic Toolbox™ de MATLAB® es un conjunto de funciones que permiten diseñar y simular sistemas basados en inferencias de lógica difusa<sup>2</sup>. Como parte del toolbox, el sistema de inferencias difusas (FIS, por sus siglas en inglés) incluye operaciones de fusificación, defusificación e inferencias que se pueden utilizar en los programas de MATLAB o se pueden integrar directamente al entorno Simulink®. Estos sistemas FIS se construyen desde la línea de comandos o desde una interface gráfica de usuario (GUI, por su acrónimo en inglés). Dentro de la interface gráfica de usuario del Toolbox de lógica difusa se encuentran los siguientes editores:

**Editor FIS.** Es donde se muestra la información global del sistema de inferencia difusa.

**Editor de funciones de pertenencia.** Muestra y permite editar las funciones de pertenencia asociadas con las entradas y las salidas del sistema FIS.

**Editor de Reglas.** Muestra las reglas difusas y permite agregar nuevas reglas o modificar las existentes.

**Visor de Reglas.** Muestra gráficamente los conjuntos de entrada y de salida de acuerdo a las reglas de inferencia difusa. Permite cambiar los valores de los universos de entrada y muestra el efecto que tiene en la salida.

**Visor de superficie.** Genera la superficie de los valores de salida para una o dos variables de entrada.

Entre las formas de los conjuntos difusos más importantes que se pueden utilizar en el toolbox están las formas lineales por tramas (triangular y trapezoidal), las formas *gaussianas* (campana y *gaussiana*), la forma *sigmoide* y las formas polinomiales cúbicas y cuadráticas (Z, S y Pi).

Los operadores difusos entre conjuntos que se pueden invocar son: operadores AND (*mínimum* y *producto*) y operadores OR (*máximum* y suma algebraica). Los operadores AND se utilizan como métodos de implicación difusa y los operadores OR como métodos de “agregación”.

Los métodos de defusificación en el toolbox son cinco: centroide, bisector, medio del máximo, el más grande del máximo y el más pequeño del máximo.

El toolbox de lógica difusa es una poderosa herramienta que contempla los operadores difusos y los métodos de defusificación más utilizados con los que se pueden diseñar cualquier sistema basado en las inferencias difusas. Su utilidad se extiende al entorno Simulink® además de poder ser invocado por un programa externo en Lenguaje C.

---

<sup>2</sup> The Mathworks. (2012, febrero) Fuzzy Logic Toolbox, Design and simulate fuzzy logic systems. [Online]. <http://www.mathworks.com/products/fuzzy-logic/>



### APÉNDICE C. ANÁLISIS DEL TIPO DE SISTEMA

El error en estado estable se define como la diferencia entre la salida y una entrada de referencia estándar (escalón unitario, rampa, parábola, etc.) conforme  $t \rightarrow \infty$ . Dependen del tipo de sistema y del tipo de entrada. Las entradas de prueba estándar brindan información del desempeño del sistema en el dominio del tiempo cuando el sistema se encuentra estable. Por ejemplo, la entrada escalón unitario es una entrada que fácilmente se puede analizar y al cambiar súbitamente permite evaluar tanto la respuesta transitoria como respuesta en estado estable.

Si definimos a la entrada, en el dominio de Laplace, como  $R(s)$ , a la salida como  $C(s)$ , el error  $E(s)$  será:

$$E(s) = R(s) - C(s) \quad (98)$$

Para conocer el valor del error cuando  $t \rightarrow \infty$ , hacemos uso del teorema del valor final para obtener  $e(\infty)$ :

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (99)$$

Un análisis del tipo de sistema es necesario para conocer el tipo de control necesario en términos del rechazo a perturbaciones, recordando que el tipo de sistema se define como el número de integradores puros en la trayectoria directa del lazo de control. Es decir, si en la trayectoria directa la función de transferencia es de la forma de la **Ecuación (100)**, se define el tipo de sistema como el valor de  $n$  en el denominador<sup>3</sup>.

$$G(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots}{s^n(s + p_1)(s + p_2) \cdots} \quad (100)$$

Sabemos que para las plantas con retroalimentación unitaria, sin perturbación y sin integradores en la trayectoria directa el error en estado estable se puede mejorar o eliminar si se coloca un integrador puro, o polo en el origen, en la trayectoria directa de control porque aumenta en uno el tipo de sistema. Pero hay que mencionar que cuando se aumenta el tipo de sistema, el problema de estabilidad del sistema aumenta.

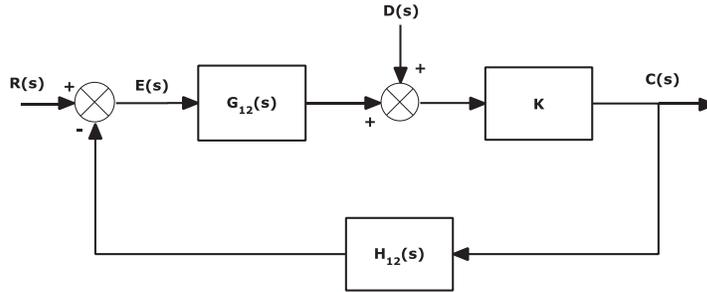
La **Tabla 6** muestra los errores en estado estable, según el tipo de sistema, para entradas estándar.

**Tabla 6.- Errores en el estado estable debido al tipo de sistema y al tipo de entrada estándar.**

Sistema	Errores en estado estable en respuesta a		
	Entrada escalón $r(t) = 1$	Entrada rampa $r(t) = t$	Entrada parábola $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
<b>Sistema tipo 0</b>	$cte \neq 0$	$\infty$	$\infty$
<b>Sistema tipo 1</b>	0	$cte \neq 0$	$\infty$
<b>Sistema tipo 2</b>	0	0	$cte \neq 0$

<sup>3</sup> Norman S. Nise, *Sistemas de control para ingeniería*, Séptima ed. México: Grupo Editorial Patria, 2010.  
Katsuhiko Ogata, *Ingeniería de control moderna.*: Pearson Education, 2003.

El caso del modelo simplificado del modelo dinámico en Simulink®, es un sistema con retroalimentación no unitaria y sujeto a perturbación (se reproduce nuevamente en la **Figura 55**). La ecuación general para el error en estado estable se deduce haciendo una superposición de los efectos aislados de la entrada de referencia y la entrada de perturbación, porque el modelo simplificado es un modelo lineal. De la suma de ambos efectos se obtiene la salida total  $C(s)$ , después se aplica el teorema del valor final para conocer el valor de la salida en el estado estable.



**Figura 55.- Modelo simplificado del sistema.**

La respuesta considerando una entrada de referencia cero es:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{K}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)} \quad (101)$$

Ahora, asumiendo que la perturbación es cero, se tiene:

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{KG_{12}(s)}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)} \quad (102)$$

La respuesta total es  $C(s) = C_R(s) + C_D(s)$ ,

$$C(s) = \frac{KG_{12}(s)}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)}R(s) + \frac{K}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)}D(s) \quad (103)$$

Del definición de error  $E(s) = R(s) - C(s)$ ,

$$E(s) = R(s) - \left( \frac{KG_{12}(s)}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)}R(s) + \frac{K}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)}D(s) \right) \quad (104)$$

Agrupando términos:

$$E(s) = \left( 1 - \frac{KG_{12}(s)}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)} \right) R(s) - \frac{K}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)} D(s) \quad (105)$$

Ahora aplicamos el teorema del valor final (ecuación (99)):

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \left( 1 - \frac{KG_{12}(s)}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)} \right) R(s) - \frac{K}{1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)} D(s) \right] \quad (106)$$

Considerando una perturbación escalón  $D(s) = \frac{1}{s}$  y una entrada  $R(s) = 0$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \left[ 0 - \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [K]}{\lim_{s \rightarrow 0} [1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)]} \right] = - \frac{K}{\lim_{s \rightarrow 0} [1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)]} \quad (107)$$

Para tener un error cero es necesario que:

$$\frac{K}{\lim_{s \rightarrow 0} [1 + KG_{12}(s)H_{12}(s)]} = 0 \quad (108)$$

La **Ecuación** (108) se cumple cuándo: 1) el sistema es estable; 2)  $G_{12}(s)$  es un sistema de, al menos, tipo 1 que hace que el denominador sea  $\infty$  y por tanto se tenga que  $\frac{K}{\infty} = 0$ ; 3)  $K$  y sea de tipo cero. Como el sistema es estable la condición 1) se cumple, la condición 3) se cumple porque  $K$  es una ganancia pura. La condición 2) solamente se cumple cuando  $G_{12}(s)$  tiene, al menos, un integrador puro. Concluimos que el controlador, que está incluido en  $G_{12}(s)$ , necesita un integrador para poder hacer cero el error en estado estable cuando la entrada en la perturbación es un escalón.

En el caso de que la entrada sea una rampa  $D(s) = \frac{1}{s^2}$  y la entrada de referencia siga siendo  $R(s) = 0$ :

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \left[ 0 - \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [K]}{\lim_{s \rightarrow 0} [s(1 + KG_{12}(s)H_{12}(s))]} \right] = - \frac{K}{\lim_{s \rightarrow 0} [s + sKG_{12}(s)H_{12}(s)]} \quad (109)$$

Para tener un error cero es necesario que:

$$\frac{K}{\lim_{s \rightarrow 0} sKG_{12}(s)H_{12}(s)} = 0 \quad (110)$$

Si  $G_{12}(s)$  es de tipo 2, esto es, que tiene dos integradores puros, entonces  $\lim_{s \rightarrow 0} sKG_{12}(s)H_{12}(s) = \infty$  y como  $\frac{K}{\infty} = 0$ , concluimos que el controlador necesita dos integradores para poder hacer cero una perturbación rampa. Cabe mencionar que de la misma manera  $H_{12}(s)$  pudiera tener los integradores que hagan cero el error en estado estable, pero se considera que es una dinámica que forma parte del sistema y que no se puede modificar.



## APÉNDICE D. SINTONIZACIÓN DEL CONTROL PID CONVENCIONAL

### MÉTODO ZIEGLER-NICHOLS PARA SINTONIZAR CONTROLADORES PID LINEALES

Ziegler y Nichols establecieron, de manera empírica, una serie de reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional  $K_p$ , el tiempo de integración  $T_i$ , y el tiempo derivativo  $T_d$  de un controlador PID ideal para obtener el mejor desempeño del controlador en el seguimiento de la señal de referencia. El método se basa en la observación de las características de la respuesta transitoria, en lazo abierto, a una entrada escalón de un modelo de primer orden con tiempo muerto que representa a la planta.

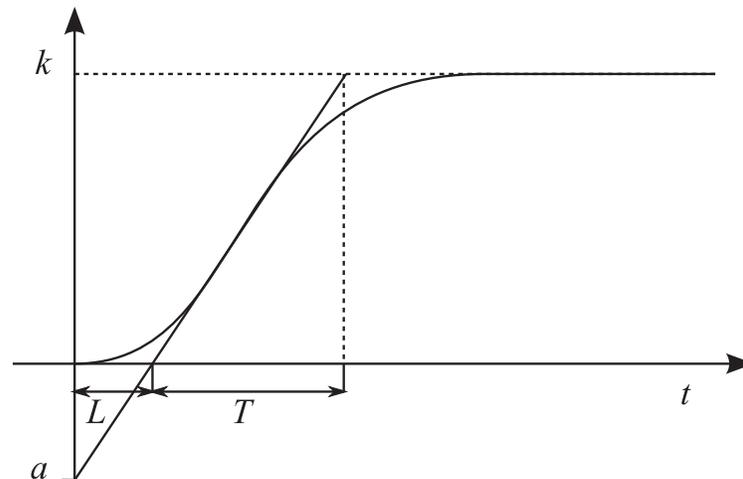
Un controlador PID ideal tiene la siguiente estructura, en el dominio del tiempo:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (111)$$

El modelo de planta de primer orden con tiempo muerto, en el dominio de la frecuencia, es el siguiente:

$$G_n(s) = \frac{ke^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (112)$$

El método establece que las constantes del controlador PID están relacionadas con los parámetros  $L$  y  $T$ , obtenidos de la intersección de la recta tangente al punto de inflexión, de la respuesta transitoria, con el eje de las abscisas. Además del valor  $k$  de la amplitud en estado estable. La curva de la respuesta transitoria se obtiene realizando experimentos físicamente o, cuando se tiene, haciendo un análisis del modelo de la planta. En la **Figura 56** se muestra una curva que representa la respuesta transitoria de una planta y sus parámetros asociados.



**Figura 56.-** Bosquejo de la respuesta del modelo de primer orden con tiempo muerto.

Un método analítico para encontrar los parámetros es el método de función de transferencia para sistemas de primer orden más tiempo muerto. A continuación se muestra la manera de encontrar los valores de  $L$  y  $T$ , considerando el modelo de primer orden con retardo  $G_n(s)$ .

Tomando la primera y segunda derivada de  $G_n(s)$  con respecto a  $s$ , encontramos que:

$$\frac{G_n'(s)}{G_n(s)} = -L - \frac{T}{1 + Ts} \quad (113)$$

$$\frac{G_n''(s)}{G_n(s)} - \left(\frac{G_n'(s)}{G_n(s)}\right)^2 = \frac{T^2}{(1 + Ts)^2} \quad (114)$$

Evaluando en  $s = 0$  la primera ecuación, tenemos:

$$T_{ar} = -\frac{G_n'(0)}{G_n(0)} = L + T \quad (115)$$

$$L = T_{ar} - T \quad (116)$$

Donde  $T_{ar}$  se conoce como tiempo de residencia promedio.

Para la segunda ecuación, evaluando en  $s = 0$ :

$$T^2 = \frac{G_n''(0)}{G_n(0)} - T_{ar}^2 \quad (117)$$

$$T = \sqrt{\frac{G_n''(0)}{G_n(0)} - T_{ar}^2} \quad (118)$$

Se han propuesto variantes al método para contemplar el rechazo a perturbaciones. El método de sintonización *Chien-Hrones-Reswick* (método CHR) es una variante del método tradicional *Ziegler-Nichols* que hace énfasis tanto en la regulación en torno a la señal de referencia como en el rechazo a perturbaciones<sup>4</sup>. Hace uso de los mismos parámetros  $k$ ,  $L$  y  $T$  para formar las constantes del controlador.

Con el valor de  $L$  y las fórmulas de la Tabla 7 se forman los valores para las constantes del control PID, teniendo en cuenta que:

$$a = \frac{kL}{T} \quad (119)$$

Donde el valor de  $dc$   $k$  se evalúa con  $G_n(0)$ .

---

<sup>4</sup> Karl Johan Åström, *PID controllers, theory, design and tuning.*: Instrument Society of America, 1995.

**Tabla 7.- Fórmulas de sintonización CHR para rechazo a perturbaciones.**

Tipo de controlador	Con 0% de sobrepaso			Con 20% de sobrepaso		
	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.3/a$			$0.7/a$		
PI	$0.6/a$	$4L$		$0.7/a$	$2.3L$	
PID	$0.95/a$	$2.4L$	$0.42L$	$01.2/a$	$2L$	$0.42L$

### SINTONIZACIÓN EL CONTROLADOR PID LINEAL UTILIZANDO EL MÉTODO CHR

La dinámica dominante en el sistema es la de los actuadores y, para fines prácticos, en este análisis no se toman en cuenta las demás dinámicas y ganancias, además, se supone que la dinámica para los ejes X y Y es la misma. La planta  $G(s)$  que se considera para la sintonización, por el método CHR, es la del actuador que es coincidente con uno de los ejes del espejo corrector plano. Los valores de  $L$  y  $T$  se obtienen con el método de función de transferencia haciendo uso del siguiente código de MATLAB®:

```

%% código para obtener los parámetros para sintonización Ziegler-
Nichols
clc
% método CHR
% página 197, libro Linear Feedback Control, Dingyu Xue

% planta
G=tf([-319 1.52e6],[1 2e3 1.71e6]);
% parámetros
k=dcgain(G);
[n1,d1]=tfderiv(G.num{1},G.den{1}); [n2,d2]=tfderiv(n1,d1);
K1=dcgain(n1,d1); K2=dcgain(n2,d2);
Tar=-K1/K; T=sqrt(K2/K-Tar^2); L=Tar-T;
a=k*L/T;
% para obtener las constantes de controlador PID para rechazo a
perturbacio
Kp=0.95/a
Ti=2.4*L
Td=0.42*L

function [e,f]=tfderiv(b,a)
f=conv(a,a); na=length(a); nb=length(b);
e1=conv((nb-1:-1:1).* b(1:end-1),a);
e2=conv((na-1:-1:1).* a(1:end-1),b); maxL=max(length(e1),length(e2));
e=[zeros(1,maxL-length(e1)) e1]-[zeros(1,maxL-length(e2)) e2];

```

Como resultado, se obtienen las constantes del controlador, derivado del método de sintonización CHR:

$$K_p = 0.4255$$

$$T_i = 0.0024$$

$$T_d = 4.1439e-004$$

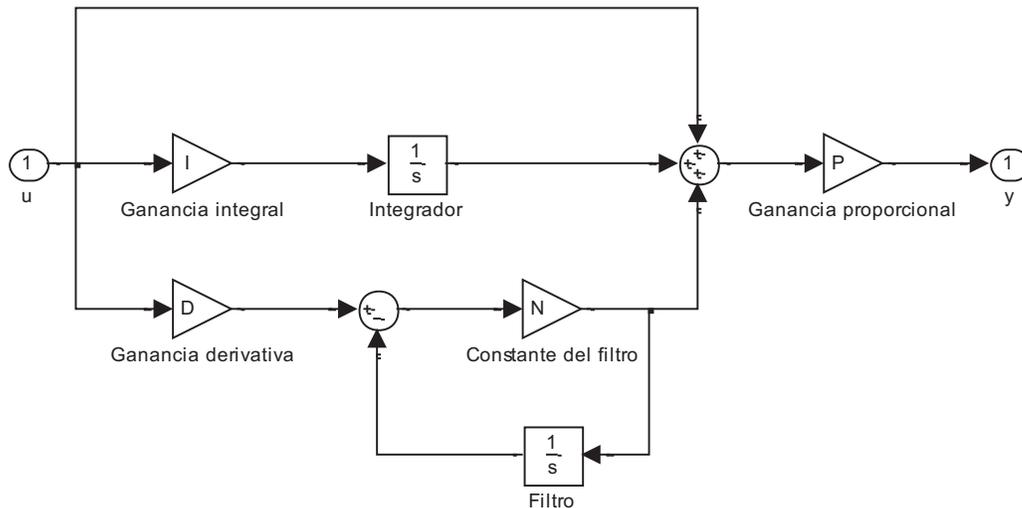
### SINTONIZACIÓN EL CONTROLADOR PID LINEAL UTILIZANDO SIMULINK®

La librería de Simulink®, en su versión 7.5, incluye un bloque llamado “PID Controller” que implementa las funciones de un controlador PID lineal. Las opciones de configuración del bloque, que se pueden modificar, incluyen tanto la forma paralelo como la forma ideal, el tipo (PID, PI, PD, etc.), las condiciones iniciales, límites de saturación a la salida y el dominio de tiempo, continuo ó discreto. Además, soporta las configuraciones prácticas como la integral de *wind-up* y filtro derivativo de primer orden. Simulink® ofrece una sintonización de las ganancias del bloque para lograr un balance entre desempeño y robustez<sup>5</sup>.

La función de transferencia, en tiempo continuo, de la forma ideal del controlador PID que se implementa en el bloque es:

$$C(s)_{ideal} = P \left[ 1 + I \left( \frac{1}{s} \right) + D \left( \frac{Ns}{s + N} \right) \right] \quad (120)$$

La **Figura 57** muestra la configuración a bloques de la ecuación anterior.



**Figura 57.- Configuración de los bloques que componen al controlador PID ideal de Simulink®.**

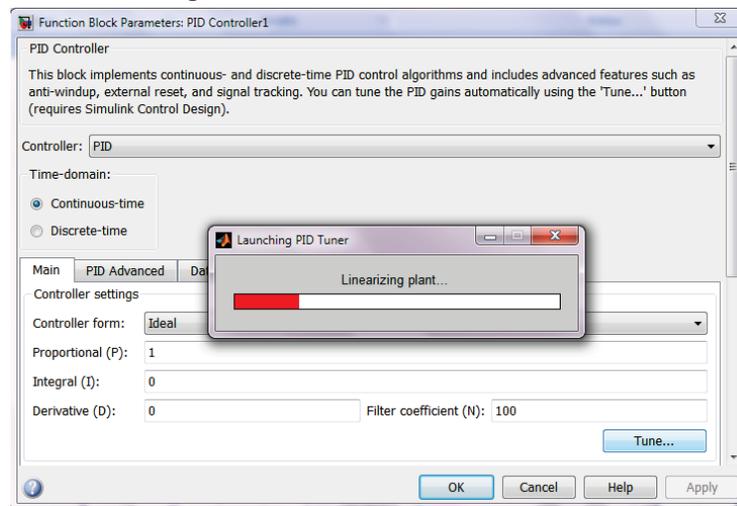
<sup>5</sup> MATLAB(r)&Simulink(r) 7 Reference.: The MathWorks inc, 2010.

Antes de realizar la sintonización se debe especificar si se trata esquema de seguimiento del punto de ajuste o de regulación para el rechazo a perturbaciones. Simulink® sintoniza automáticamente las ganancias PID en un modelo haciendo lo siguiente: genera un modelo lineal de todos los bloques del lazo de control en donde se encuentra el bloque PID, calcula las ganancias según el modelo lineal basado en un equilibrio en el desempeño y la robustez. Finalmente, provee una herramienta con interface gráfica (GUI, por su sigla en inglés) para modificar intuitivamente los parámetros de desempeño para cumplir algún criterio de diseño. El algoritmo que utiliza para dicho fin es propiedad de MathWorks™ y no se ofrece mayor información sobre ello.

La manera en que se sintonizó el controlador PID del modelo del sistema LOLA se realizó de la siguiente manera:

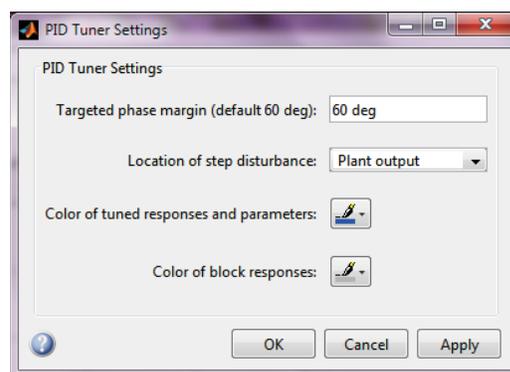
Se insertó un bloque PID en el lazo de control.

Se indicó la forma y el tipo de controlador y se inició la auto-sintonización y la interface GUI, como se muestra en la **Figura 58**.



**Figura 58.- Panorama de la interface GUI para sintonizar el bloque PID.**

Se indicó el esquema de control como un esquema de regulación y se indicó que la ubicación de la entrada de perturbación es después de la planta, como se muestra en la **Figura 59**. En la **Figura 60** se muestra el esquema del lazo de control seleccionado.



**Figura 59.- Configuración de la localización de la perturbación.**

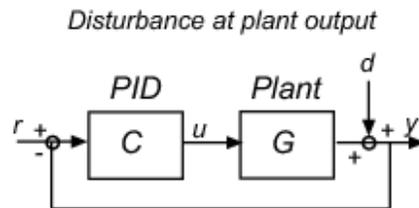


Figura 60.- Esquema de localización de la perturbación en el lazo de control.

Se ajustó la respuesta temporal con la barra de desplazamiento horizontal para tener una respuesta rápida pero sin un sobre paso grande. En la **Figura 61**, se muestra la gráfica de la respuesta al rechazo a una perturbación escalón. La línea tenue es la repuesta con los parámetros actuales del bloque y la línea más marcada es que repuesta según los parámetros que se están modificando en ese momento.

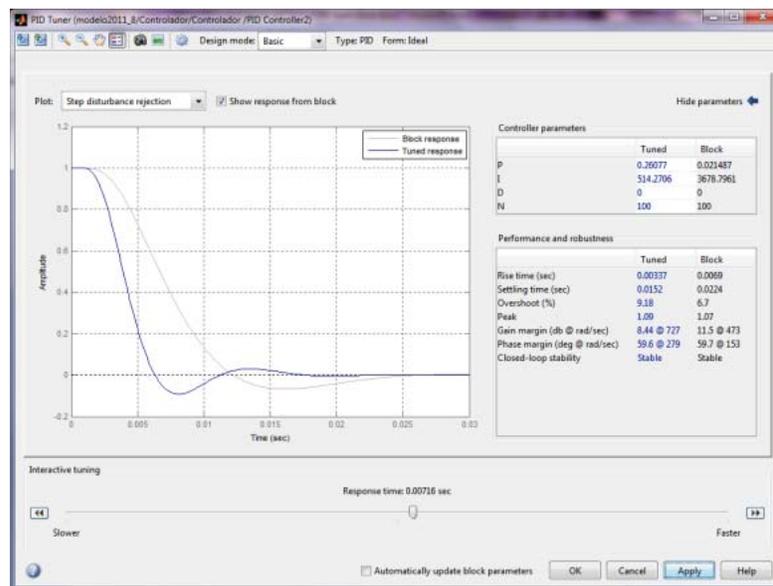


Figura 61.- GUI interactivo para visualizar la respuesta del controlador PID.

Se obtuvieron los valores de las constantes del controlador.

Tabla 8.- Resultados de la sintonización en Simulink® de las constantes del controlador PID.

		En Simulink®	Constantes del controlador
Eje x	Parte proporcional	$P_{ideal} = 0.5064$	$K_p = P_{ideal} = 0.5064$
	Parte integral	$I_{ideal} = 466.8597$	$T_i = \frac{1}{I_{ideal}} = \frac{1}{466.8597} = 0.0021$
	Parte derivativa	$D_{ideal} = 0$ constante de filtro $N = 100$	$K_d = D_{ideal} = 0$

Eje y	Parte proporcional	$P_{ideal} = 0.5010$	$K_p = P_{ideal} = 0.5010$
	Parte integral	$I_{ideal} = 470.4039$	$T_i = \frac{1}{I_{ideal}} = \frac{1}{470.4039} = 0.0021$
	Parte derivativa	$D_{ideal} = 0$ constante de filtro $N = 100$	$K_d = D_{ideal} = 0$

Los órdenes de magnitud de las constantes del controlador PID obtenidas con la sintonización en Simulink® son muy similares a los obtenidos utilizando el método analítico de sintonización *Chien-Hrones-Reswick*, *Ziegler-Nichols*, aun cuando en este último la entrada de perturbación se considera antes de la planta. En ambos casos el valor de la parte derivativa es prácticamente nulo.

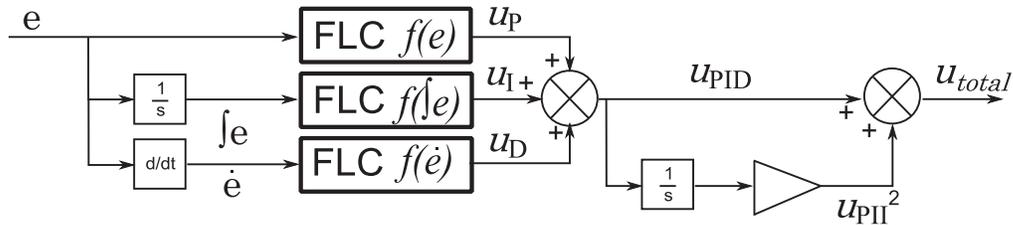
Nota: Un controlador PID difuso es equivalente, en su estructura, a un controlador PID convencional paralelo. Las equivalencias de las ganancias a partir de las ganancias del PID ideal son:

**Tabla 9.- Resultados de la sintonización en con el método Ziegler Nichols-CHR de las constantes del controlador PID**

Eje x	Parte proporcional	$P_{paralelo} = P_{ideal} = 0.5064$
	Parte integral	$I_{paralelo} = P_{ideal}I_{ideal} = (0.5064)(466.8597)$ $= 236.41$
Eje y	Parte proporcional	$P_{paralelo} = P_{ideal} = 0.5010$
	Parte integral	$I_{paralelo} = P_{ideal}I_{ideal} = (0.5010)(470.4039)$ $= 235.67$

### APÉNDICE E. ESQUEMA DEL CONTROLADOR DIFUSO CON FAMS SEPARADAS.

Un controlador difuso tipo PID con un esquema que maneja las ganancias proporcional, integral y derivativa por separado, mediante FAMS de una entrada y una salida (SISO, por si sigla en inglés) se muestra en la **Figura 62**. Una de las ventajas que presenta este esquema es que las ganancias variables de cada término del controlador se pueden tratar de manera independiente y que las superficies de control se representan mediante curvas. Otra ventaja que presenta es que debido a la baja cardinalidad, las reglas a establecer y modificar son pocas, lo que también repercute en un menor requerimiento del poder de cómputo.



**Figura 62.-** Esquema general de un controlador difuso con FAMS separadas.

Se realizaron pruebas sobre el modelo dinámico del instrumento LOLA con un esquema de este tipo, con las siguientes características:

Valores lingüísticos de la variable lingüística “error”  $e$ :

{negativo, negativo poco, cero, positivo poco, positivo}

Valores lingüísticos de la variable lingüística “acumulación de error”  $\int e$ :

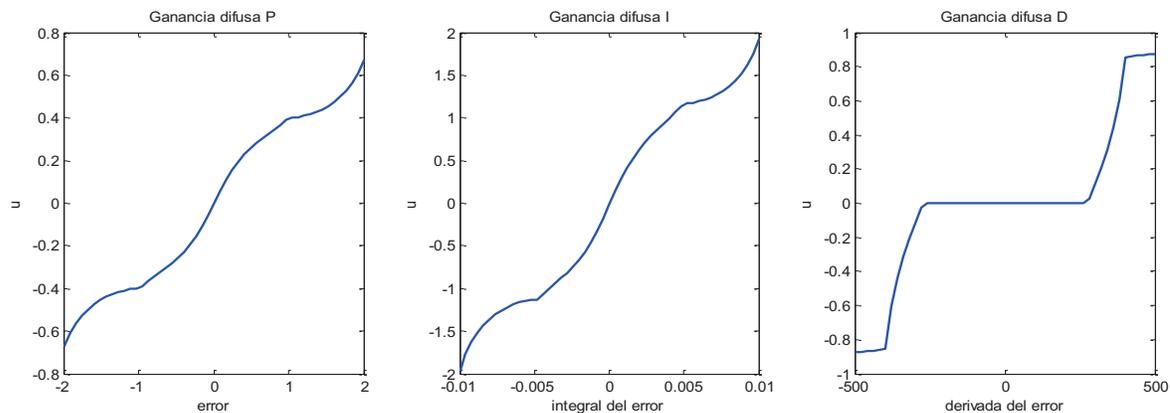
{negativo, negativo poco, cero, positivo poco, positivo}

Valores lingüísticos de la variable lingüística “cambio en error”  $\dot{e}$ :

{negativo, cero, positivo}

Valores lingüísticos de la variable lingüística “acción de control”  $u$ : { negmucho, negpoco, nada, pospoco, posmucho }

Después de realizar cambios a los parámetros de cada FAM, por medio de un proceso de ensayo-error, se obtuvieron las siguientes curvas de control, para las ganancias proporcional, integral y derivativa, que se muestran en la **Figura 63**.



**Figura 63.-** Disposición final de las curvas de las ganancias difusas obtenidas después de un proceso de sintonización.

En la Tabla 10, se muestra la varianza residual del movimiento del centroide de la imagen para la amplitud de la perturbación a la mitad, la amplitud original y al doble de amplitud en los dos ejes.

**Tabla 10.-** Resultados en varianza del movimiento del centroide para el esquema con FAM separadas.

Amplitud de la perturbación		Difuso, FAM separadas, Integración a la salida
<b>mitad</b>	<i>varianza eje X</i> [ $\mu\text{arcsec}$ ]	3.6289
	<i>varianza eje Y</i> [ $\mu\text{arcsec}$ ]	5.5869
<b>original</b>	<i>varianza eje X</i> [ $\mu\text{arcsec}$ ]	26.069
	<i>varianza eje Y</i> [ $\mu\text{arcsec}$ ]	30.881
<b>doble</b>	<i>varianza eje X</i> [ $\mu\text{arcsec}$ ]	536.89
	<i>varianza eje Y</i> [ $\mu\text{arcsec}$ ]	295.72