UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CICLOS HAMILTONIANOS EN TORNEOS MULTIPARTITOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

MÓNICA FABIOLA GAMA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
MAT. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ
2013

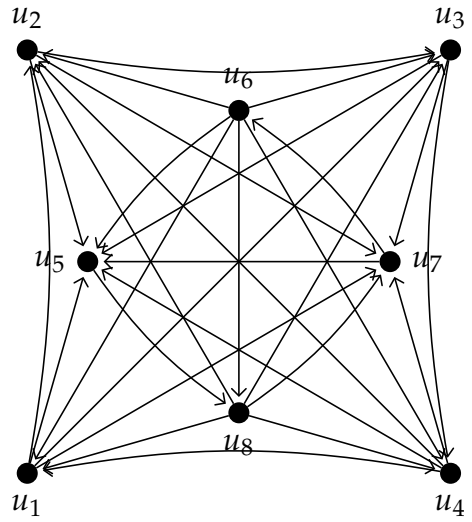
Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.


u_2
u_3
u_6
u_5
u_7
u_8
u_1
u_4

Índice general

Introducción **5**

1. Conceptos básicos de digráficas **7**

2. Torneos y torneos bipartitos **21**

3. Ciclos hamiltonianos en torneos multipartitos **33**

Conclusiones **61**

Bibliografía **63**

Introducción

El objetivo del presente trabajo es estudiar condiciones para que los torneos multipartitos sean hamiltonianos.

El trabajo de tesis está divido en tres capítulos. El primero se refiere a los conceptos básicos de digráficas. En el capítulo dos abordaremos el tema concreto sobre torneos, torneos bipartitos y daremos algunos resultados importantes para el desarrollo del tema.

En el capítulo tres estudiaremos una serie de resultados que nos llevarán a distinguir algunas condiciones de hamiltonicidad en los torneos multipartitos. Veremos que el teorema 3.7 [1] es crucial para nuestro objetivo y nos servirá para demostrar resultados de existencia de ciclos y trayectorias hamiltonianas en torneos multipartitos fuertes.

Adicionalmente daremos cuenta que hay subclases de torneos multipartitos para los cuales existen condiciones suficientes y necesarias para ser hamiltonianos.

Aunque el título de la tesis se refiere a torneos, en el desarrollo del capítulo 3 se habla siempre de digráficas semicompletas, debido a que éstas son un caso general de torneos, como veremos en el apartado de las definiciones.

El trabajo está basado en el artículo de Bang-Jensen, Gutin y Huang titulado «A sufficient condition for a semicomplete multipartitie digraph to be Hamiltonian». [1] Los resultados que aparecen en el último capítulo corresponden a tres secciones del artículo, donde los autores hacen las pruebas de lemas, teoremas y corolarios de forma simplificada. Por ello la labor principal en la realización de la tesis consistió en reproducir detalladamente las demostraciones para una comprensión más accesible.

[1] Página 46

Capítulo 1

Conceptos básicos de digráficas

Una gráfica dirigida D consiste en un conjunto finito no vacío de vértices y una colección de pares ordenados de distintos vértices, llamadas flechas. Damos la definición formal.

Definición 1.1 *Sea un par ordenado $(V(D), F(D))$ en el que $V(D)$ es un conjunto finito y no vacío y $F(D)$ es una relación binaria e irreflexiva sobre $V(D)$, a ese par ordenado le llamamos **digráfica**, a los elementos de $V(D)$ los llamamos **vértices** y a los de $F(D)$ **flechas**.*
*Se dice que D tiene **orden n** si el número de elementos de $V(D)$ es n.*

Si u y v son vértices y $(u, v) \in F(D)$ relaciona a u con v entonces diremos que D contiene una flecha que va de u a v; se escribe $u \to v$ donde u es la cola y v es la cabeza de la flecha.

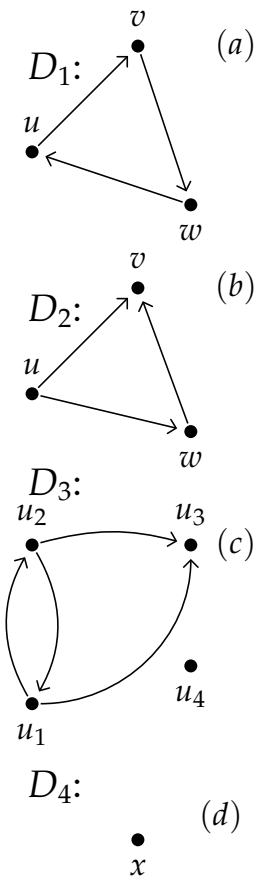
Un ejemplo de digráfica es el siguiente: $D = (V, F)$ con $V(D)$=$\{v_1$,v_2,v_3,v_4,v_5,$v_6\}$ y $F(D) = \{(v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_4)\}$. Por la definición, el conjunto F no contiene flechas que vayan de un vértice a él mismo, *i.e.*, no existen flechas de la forma (x, x) para todo x en $V(D)$ y tampoco hay dos o más flechas con cola y cabeza comunes entre dos vértices.

Representación gráfica

Las digráficas se representan por medio de diagramas, en ellos cada vértice está representado por puntos en el plano y cada flecha es un segmento de línea o

curva con un remate puntiagudo en uno de los extremos, indicando la relación de los dos vértices.

En la figura 1.1 se muestran cuatro ejemplos de digráficas: las digráficas de los dos primeros incisos son distintas, aunque el conjunto de vértices es el mismo las flechas no; la digráfica del inciso (c) tiene cuatro vértices, existe una doble flecha entre u_1 y u_2 cada una con sentido contrario, el vértice u_4 no tiene flecha que vaya a él o salga de él; y por último, la digráfica del inciso (d) que consta de un solo vértice, es llamada **trivial**. Las digráficas (a), (b), (c) y (d) tienen orden $3, 3, 4$ y 1 respectivamente.



(a) $V(D_1) = \{u, v, w\}$
$F(D_1) = \{(u, v), (v, w), (w, u)\}$

(b) $V(D_2) = \{u, v, w\}$
$F(D_2) = \{(u, v), (w, v), (u, w)\}$

(c) $V(D_3) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
$F(D_3) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_1), (u_2, u_3), (u_1, u_3)\}$

(d) $V(D_4) = \{x\}$
$F(D_4) = \emptyset$

Figura 1.1

Definición 1.2 *Sea D una digráfica.*
Si $(u, v) \in F(D)$ y $(v, u) \in F(D)$, decimos que (u, v) es una ***flecha simétrica****.*
Si $(u, v) \in F(D)$ y $(v, u) \notin F(D)$, decimos que (u, v) es una ***flecha asimétrica****.*

En el inciso (c) de la figura 1.1, la flecha (u_1, u_2) es simétrica, la flecha (u_2, u_3) es asimétrica.

Definición 1.3 *Una digráfica D es **simétrica** si toda flecha en $F(D)$ es simétrica. De igual forma, D es **asimétrica** si toda flecha en $F(D)$ es asimétrica.*

Definición 1.4 *Sea D una digráfica. Si existe una flecha de x a y en D decimos que x **domina a** y o que y **absorbe a** x (también decimos que los vértices son **adyacentes**). Si A y B son subconjuntos ajenos de $V(D)$ y no vacíos usamos las notaciones siguientes:*

- *$A \to B$ denota que $a \to b$ para algún par de vértices adyacentes $a \in A$ y $b \in B$.*
- *$a \to B$ denota que $a \to b$ para algún vértice $b \in B$ adyacente con a.*
- *$A \Rightarrow B$ significa que $A \to B$ y no hay vértices de B que dominen a vértices de A, i.e., no existe $B \to A$.*
- *$a \Rightarrow B$ significa que $a \to B$ y no hay vértices de B que dominen al vértice a.*

Definición 1.5 *Sean D una digráfica y v un vértice en $V(D)$, entonces el **in-grado** de v es el número de flechas que llegan a v, se escribe ${d^-}_D(v)$ y el **ex-grado** de v es el número de flechas que salen de él, se escribe ${d^+}_D(v)$.*

Del inciso (a) de la figura 1.1, ${d^-}_D(v) = 1$ y ${d^+}_D(v) = 1$; en (b) ${d^-}_D(v) = 2$ y ${d^+}_D(v) = 0$; y en el inciso (c) ${d^-}_D(u_4) = 0$ y ${d^+}_D(u_4) = 0$;

Definición 1.6 *Una **subdigráfica** H de una digráfica D, es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$ y la denotamos como $H \subset D$.*

Intuitivamente, una subdigráfica es como quitar algunas flechas o vértices, considerando que por cada vértice que se suprime, se suprimen también las flechas que parten o llegan a él. En la figura 1.2 hay tres ejemplos de subdigráficas de una digráfica D.

Si D es una digráfica no trivial y $v \in V(D)$, entonces $D - v$ es una subdigráfica de D cuyos vértices son el conjunto $V(D) \setminus \{v\}$ y cuyas flechas son $F(D)$ menos aquellas que llegan y salen de v. La subdigráfica D' de D en la figura 1.2 está dada por $D - v_{13}$.

Definición 1.7 *Sean D una digráfica y X un subconjunto no vacío de vértices de D, entonces la* ***subdigráfica de*** *D* ***inducida por*** *X es una digráfica denotada como $D\langle X\rangle$ en la que el conjunto de vértices es X y el conjunto de flechas son las flechas de D que hay entre los vértices en X.*

En la figura 1.2, la digráfica D''', es la subdigráfica de D inducida por el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

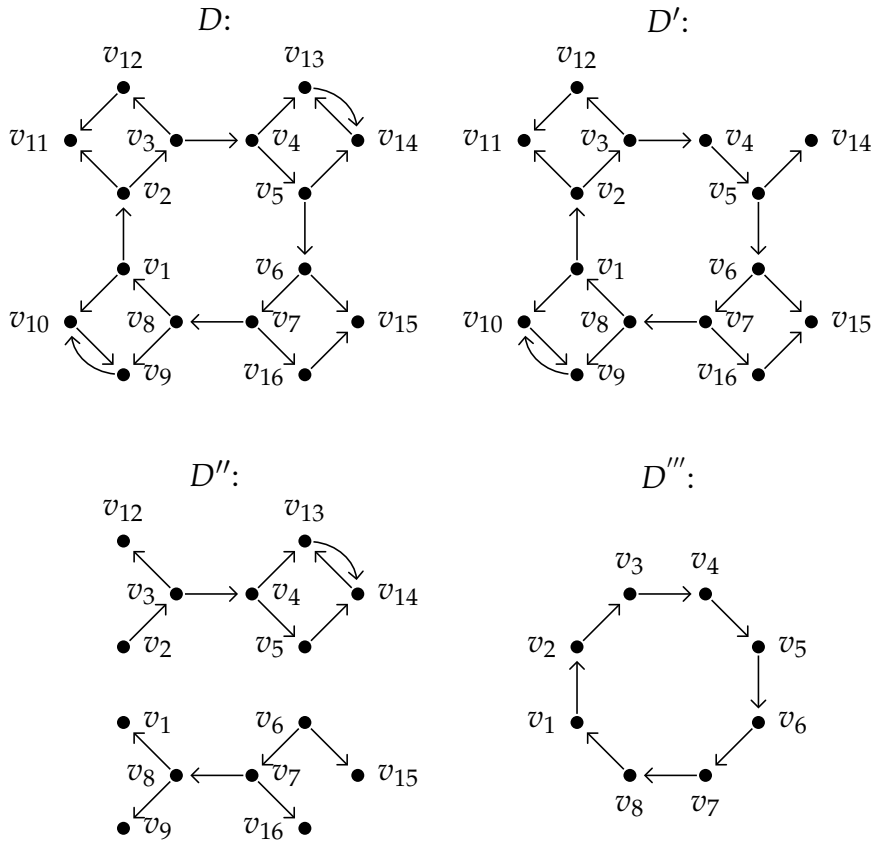


Figura 1.2: D es la digráfica de la cual se obtienen tres diferentes subdigráficas: D', D'' y D'''.

Definición 1.8 *Una digráfica D es* ***transitiva*** *si por cada tres vértices distintos x, y, z de D, tales que (x, y) y (y, z) están en $F(D)$, entonces (x, z) está también en $F(D)$.*

Definición 1.9 *Sea D una digráfica. Una* ***trayectoria*** *P en D es una sucesión de vértices distintos $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tales que para cualquier entero positivo $i < k$, existe la flecha $v_i \to v_{i+1}$ en D.*

- *Decimos que P es una trayectoria de v_1 a v_k o bien que P es una (v_1, v_k)-trayectoria.*

- *v_1 y v_k son los extremos de la trayectoria.*
- *La longitud de una trayectoria es el número de flechas que recorre, que es igual al número de vértices menos uno.*
- *$P[v_i, v_j]$ es la trayectoria que va de v_i a v_j con $i < j$, obtenida de un subconjunto de la sucesión de vértices y flechas asociado a P. En ese caso $P[v_i, v_j]$ es la subtrayectoria de P.*
- *La trayectoria P puede contener solamente un vértice, en tal caso la longitud de P es cero.*

En la figura 1.3 podemos observar dos trayectorias de una misma digráfica: en el inciso $a)$ la trayectoria (v_1, v_3, v_5), y en el inciso $b)$ la trayectoria (v_2, v_3, v_4, v_5).

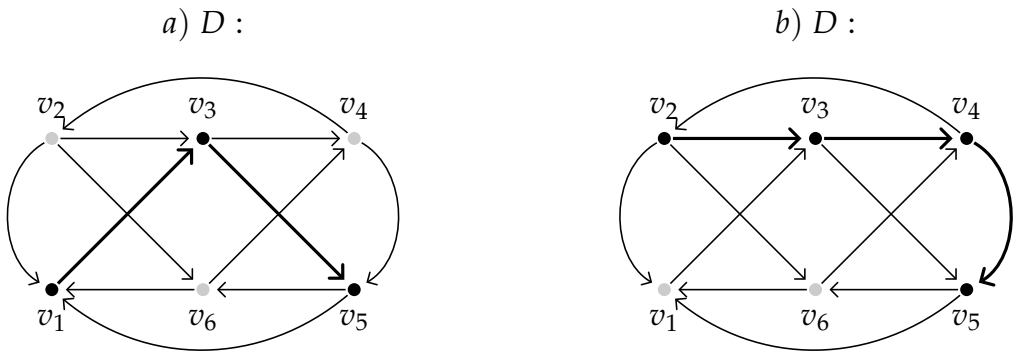


Figura 1.3:
$a)$ La trayectoria (v_1, v_3, v_5) es de longitud 2.
$b)$ La trayectoria (v_2, v_3, v_4, v_5) es de longitud 3.

Definición 1.10 *Sea D una digráfica. Un **ciclo** en D es una trayectoria cerrada y la longitud es el número de flechas que recorre, que es igual al número de vértices.*

Ejemplos de ciclos se muestran en la figura 1.4: (v_2, v_3, v_4, v_2) y $(v_1, v_3, v_5, v_6, v_1)$ en los incisos $a)$ y $b)$ respectivamente.

Definición 1.11 *Sea x un vértice en una trayectoria o ciclo Q. El vértice **predecesor** y el **sucesor** de x en Q se denotarán como ${x_Q}^-$ y ${x_Q}^+$ respectivamente. Cuando no quede lugar a duda de la trayectoria o ciclo sobre el que se hable, se prescindirá de los subíndices.*

En la figura 1.4 el vértice v_1 es predecesor de v_3 y v_5 es sucesor de v_3 en C_2, entonces $v_1 \to v_3 \to v_5$ se puede ver también como ${v_3}^- \to v_3 \to {v_3}^+$ en C_2.

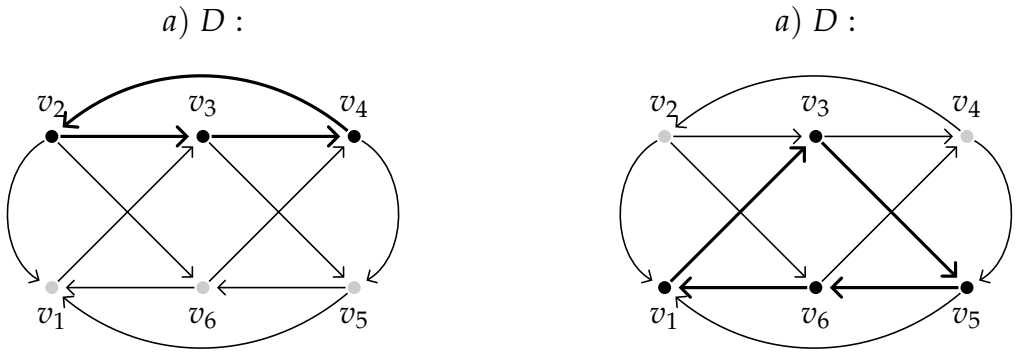


Figura 1.4:
a) El ciclo $C_1 = (v_2, v_3, v_4, v_2)$ es de longitud 3.
b) El ciclo $C_2 = (v_1, v_3, v_5, v_6, v_1)$ es de longitud 4.

Definición 1.12 *Una digráfica D es llamada **fuertemente conexa** (o simplemente **fuerte**), si existe una (x, y)-trayectoria y una (y, x)-trayectoria para cada par de vértices $x, y \in V(D)$. Por vacuidad, la digráfica trivial es fuertemente conexa.*

En la figura 1.5 hay un ejemplo de gráfica fuerte y otra que no es fuerte.

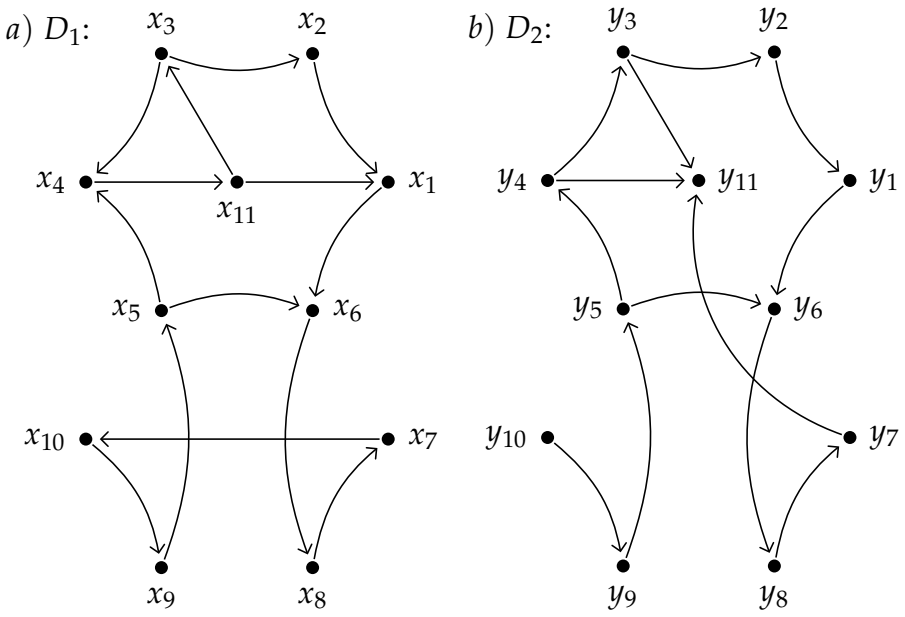


Figura 1.5:
a) D_1 es una digráfica fuertemente conexa.
b) D_2 no es una digráfica fuertemente conexa o no fuerte;
no hay trayectorias de y_{11} a cualquier otro vértice,
tampoco hay trayectorias de cualquier vértice a y_{10}.

Definición 1.13 *Sea D una digráfica. Si D tiene una trayectoria que recorre todos los vértices del conjunto $V(D)$, entonces se dice que D tiene una* ***trayectoria hamiltoniana****.*

Definición 1.14 *Si D tiene un ciclo que recorre todos los vértices de D, entonces se dice que D tiene un* ***ciclo hamiltonano*** *o que D es* ***hamiltoniana****.*

En la digráfica D_1 de la figura 1.5 tenemos al ciclo hamiltoniano:

$$(x_5, x_4, x_{11}, x_3, x_2, x_1, x_6, x_8, x_7, x_{10}, x_9, x_5)$$

y en la digráfica D_2 la trayectoria hamiltoniana:

$$(y_{10}, y_9, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1, y_6, y_8, y_7, y_{11}).$$

Definición 1.15 *Sea X una subdigráfica de D inducida por $V(X)$. Si X es fuerte y para cualquier vértice $u \in V(D) \setminus V(X)$ la subdigráfica inducida por $V(X) \cup \{u\}$ no es fuerte, entonces X es una* ***componente fuertemente conexa****.*

En la figura 1.6 tenemos dos ejemplos: en la digráfica D_1 del inciso $a)$ se puede ver una subdigráfica inducida por los vértices x_1, x_2 y x_3, que es una componente fuertemente conexa, sin embargo al agregar la flecha $x_4 \to x_3$ a D_1 obtenemos la digráfica del inciso $b)$ donde la subdigráfica inducida por los vértices x_1, x_2 y x_3 es fuerte, pero no es maximal (si agregamos al vértice x_4 la subdigráfica inducida por x_1, x_2, x_3 y x_4 es fuerte).

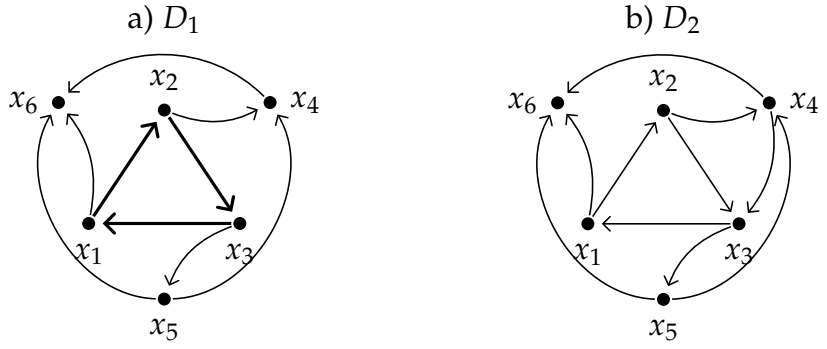


Figura 1.6:
$a)$ La subdigráfica de D_1 inducida por los vértices x_1, x_2 y x_3 forma una componente fuerte.
$b)$ La subdigráfica de D_2 inducida por los vértices x_1, x_2, x_3 y v_4 forma una componente fuerte.

Definición 1.16 *Una digráfica D es* ***completa*** *si para cada par de vértices $u, v \in V(D)$, existen las flechas (u, v) y (v, u) en D.*

Definición 1.17 *Una digráfica D es* ***semicompleta*** *si para cada par de vértices $u, v \in V(D)$ existe la flecha $u \to v$ o $v \to u$ o ambas flechas.*

Definición 1.18 *Sea T una digráfica. T es un* ***torneo*** *si cada vértice de T es adyacente a los demás y T es asimétrico. La digráfica trivial es un torneo de orden uno.*

Véase la figura 1.7 donde se muestran tres digráficas: completa, una semicompleta y un torneo. Hay que notar que en cada vértice de un torneo, la suma de in-grado más ex-grado es $n - 1$; en este ejemplo el grado de T es 5, ya que en cada vértice salen y entran 4 flechas.

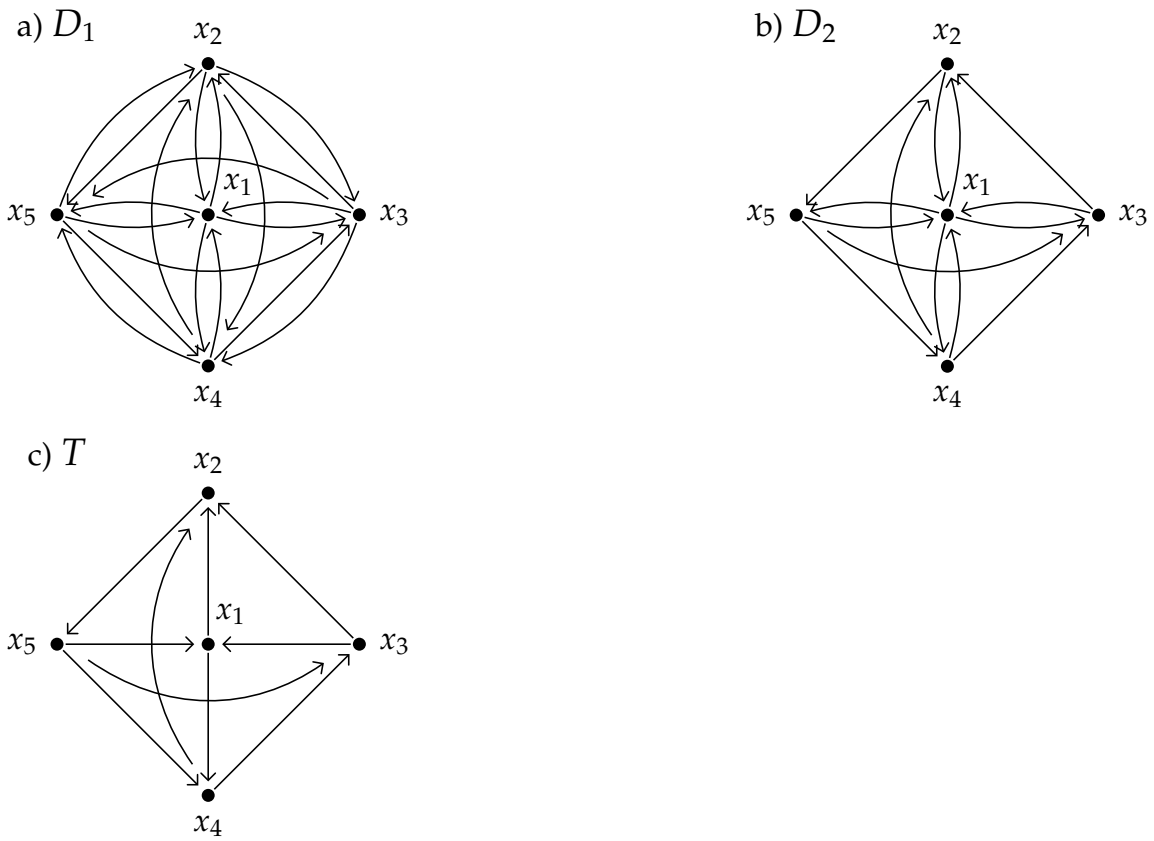


Figura 1.7:
a) La digráfica D_1 es completa.
b) La digráfica D_2 es semicompleta.
c) La digráfica T es un torneo.

Definición 1.19 *Sea D una digráfica para la que existe una partición de sus vértices en m partes, tales que para cualquier par de vértices adyacentes u y v en $V(D)$ pertenezcan a diferentes partes, es llamada digráfica* ***multipartita*** *o* ***m-partita****.*

Si $m = 2$, a la digráfica se le da el nombre de ***bipartita****.*

Para ver un ejemplo de digráfica multipartita con tres partes y una digráfica bipartita, véase la figura 1.8.

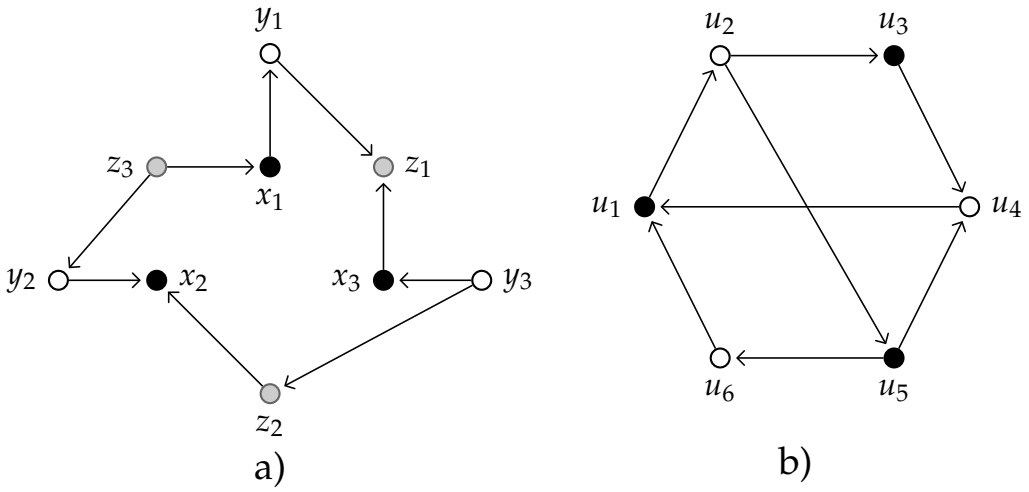


Figura 1.8:
a) Digráfica multipartita donde la partición tiene tres partes: $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{y_1, y_2, y_3\}$ y $\{z_1, z_2, z_3\}$.
b) Digráfica bipartita con la partición: $\{u_1, u_3, u_5\}$ y $\{u_2, u_4, u_6\}$.

Definición 1.20 *Una* ***digráfica multipartita semicompleta*** *es una digráfica multipartita donde todos los vértices que se encuentran en diferentes partes son adyacentes. A esta digráfica la abreviamos con las siglas* ***DMS*** *y si la digráfica es bipartita la abreviamos con las siglas* ***DBS****.*

Definición 1.21 *Una digráfica multipartita semicompleta D es llamada* ***ordinaria*** *si para cada par X, Y de elementos de la partición, la orientación de las flechas entre X e Y sucede en cualquiera de los tres casos:*

- $X \Rightarrow Y$.
- $Y \Rightarrow X$.
- *Para todo $x \in X$, $y \in Y$ existen en D las flechas (x, y) y (y, x).*

Definición 1.22 *Sea D una digráfica. Un* ***factor de ciclos*** *$\mathcal{F}$ de D es una colección de ciclos mutuamente ajenos $C_1, C_2, \ldots, C_t$ ($t \geq 1$), donde C_i es un ciclo para cada $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ y $\mathcal{F}$ contiene a todos los vértices de D.*

Lo denotamos como $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$.

Definición 1.23 *Sea D una digráfica. Un* ***casi-factor de ciclos*** *$\mathcal{L}$ de D, consiste en una colección conformada por una trayectoria P y algunos ciclos $C_1, C_2, \ldots, C_t$ ($t \geq 1$), mutuamente ajenos (ciclos y trayectoria) y $\mathcal{L}$ contiene a todos los vértices de D.*

Lo denotamos por $\mathcal{L} = P \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$.

Definición 1.24 *Una digráfica D es llamada* ***1-dirregular*** *si todos los vértices de D tienen in-grado y ex-grado igual a uno.*

Definición 1.25 *Una digráfica es llamada* ***casi 1-dirregular*** *si todos los vértices de D tienen in-grado y ex-grado igual a uno, excepto por uno y solo uno de los siguientes casos:*

- *Existe un vértice $x \in V(D)$ tal que ${d_D}^-(x) = 0$ y ${d_D}^+(x) = 0$.*
- *Existen dos vértices $x, y \in V(D)$ tal que ${d_D}^-(x) = 0$, ${d_D}^+(x) = 1$, ${d_D}^-(y) = 1$ y ${d_D}^+(y) = 0$.*

Un factor de ciclos $\mathcal{F}$ de una digráfica D es una digráfica **1-dirregular**. Así, un casi-factor es una digráfica casi 1-dirregular.

Definición 1.26 *Sean D una digráfica, P una (x, y)-trayectoria en D con longitud posiblemente cero y $Q = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$ una trayectoria o un ciclo en $D - P$. Decimos que la flecha $v_i \to v_{i+1}$ en Q es* ***socio*** *de P, si se cumple que para alguna $i = 1, 2, \ldots, t-1$, existen tanto $v_i \to x$ como $y \to v_{i+1}$. Se puede decir también que P tiene un* ***socio*** *en Q. Si $P = (x)$ entonces deben existir las flechas $v_i \to x$ y $x \to v_{i+1}$.*

Es posible formar un nuevo ciclo (si Q es ciclo) o una nueva trayectoria (si Q es trayectoria) donde el conjunto de vértices son la unión de los vértices de P más los de Q y sigue el recorrido $Q[v_1, v_i] \cup (v_i, x) \cup P \cup (y, v_{i+1}) \cup Q[v_{i+1}, v_t]$. En este caso decimos que P puede ser insertada en Q.

En la figura 1.9 se pueden apreciar ejemplos sencillos de socios.

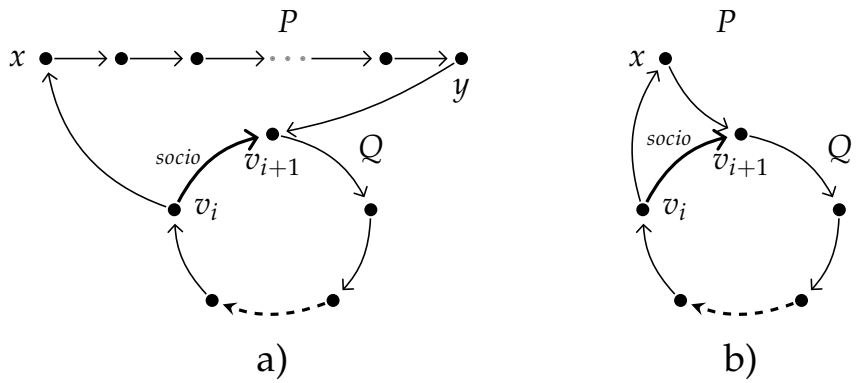


Figura 1.9:
a) Q es ciclo o trayectoria y $v_i \to v_{i+1}$ en Q es socio de P.
b) P contiene un solo vértice, Q es ciclo o trayectoria y $v_i \to v_{i+1}$ en Q es socio de P.

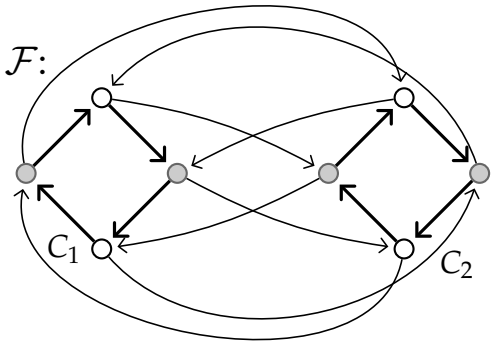
Definición 1.27 *Sean D una digráfica y $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2$ un factor o casi-factor de D, donde C_i es un ciclo o una trayectoria para $i = 1, 2$. Sea un vértice $x \in V(C_i)$.*

- *Es llamado **ex-singular** con respecto a C_{3-i} si $x \Rightarrow C_{3-i}$, para $i = 1, 2$.*
- *Es llamado **in-singular** con respecto a C_{3-i} si $C_{3-i} \Rightarrow x$, para $i = 1, 2$.*
- *Es llamado **singular** con respecto a C_{3-i} si es in-singular o ex-singular con respecto a C_{3-i}, para $i = 1, 2$.*
- *Es llamado **no-singular** (o no es singular) con respecto a C_{3-i} si x no es in-singular ni ex-singular con respecto a C_{3-i}, para $i = 1, 2$ (i.e., existen flechas que van a x desde el ciclo C_{3-i} y flechas que van a vértices del ciclo C_{3-i} desde x).*

Definición 1.28 *Sean D una digráfica multipartita semicompleta y $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$ un factor de ciclos en D. $\mathcal{F}$ es llamado un **buen factor** si para todo par de ciclos distintos C_i, C_j ocurre alguno de los casos siguientes:*

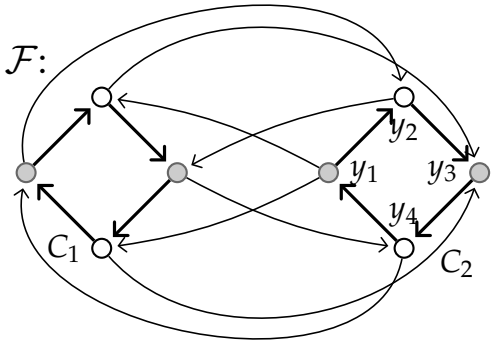
- *Todos los vértices de C_i son no-singulares con respecto a C_j o todos los vértices de C_j son no-singulares con respecto a C_i.*
- *Existen vértices in-singulares en C_i con respecto a C_j y existen vértices in-singulares en C_j con respecto a C_i.*
- *Existen vértices ex-singulares en C_i con respecto a C_j y existen vértices ex-singulares en C_j con respecto a C_i.*

Para entender mejor la definición de buen factor, se muestran las figuras 1.10, 1.11, 1.12 y 1.13. En la figura 1.14 se aprecia un factor que no es bueno.



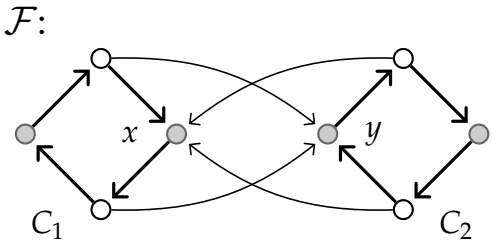
- Todos los vértices de C_1 son no-singulares (o no son singulares) con respecto a C_2
- Todos los vértices de C_2 son no-singulares (o no son singulares) con respecto a C_1

Figura 1.10: $\mathcal{F}$ es **buen** factor.



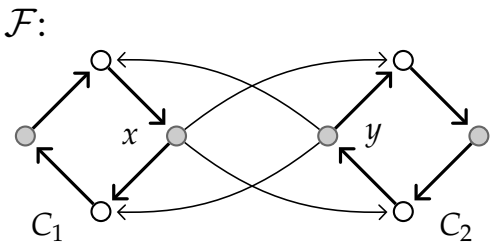
- Todos los vértices de C_1 son no-singulares con respecto a C_2
- $\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \in V(C_2)$
- y_1 es ex-singular con respecto a C_1
- y_2 es no-singular con respecto a C_1
- y_3 es in-singular con respecto a C_1
- y_4 es no-singular con respecto a C_1

Figura 1.11: $\mathcal{F}$ es **buen** factor.



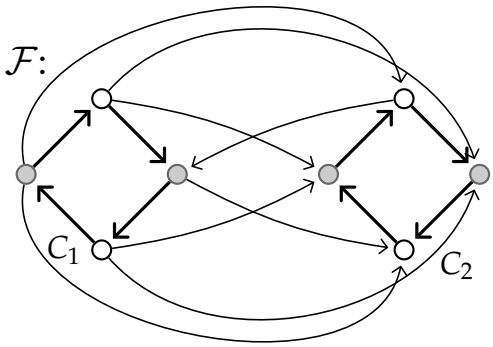
- $x \in V(C_1)$
- $y \in V(C_2)$
- x es in-singular con respecto a C_2
- y es in-singular con respecto a C_1
- Las flechas entre los vértices distintos de x e y pueden llevar cualquier dirección

Figura 1.12: $\mathcal{F}$ es **buen** factor.



- $x \in V(C_1)$
- $y \in V(C_2)$
- x es ex-singular con respecto a C_2
- y es ex-singular con respecto a C_1
- Las flechas entre los vértices distintos de x e y pueden llevar cualquier dirección

Figura 1.13: $\mathcal{F}$ es **buen** factor.



- En ambos ciclos no hay vértices ex-singulares con respecto al otro
- En ambos ciclos no hay vértices in-singulares con respecto al otro
- Ninguno de los dos ciclos tiene todos sus vértices no-singulares con respecto al otro

Figura 1.14: $\mathcal{F}$ **no es buen** factor.

Capítulo 2

Torneos y torneos bipartitos

Resultados importantes

Los teoremas 2.1 y 2.3 son resultados básicos para el desarrollo del capítulo 3, en el artículo «A sufficient condition for a semicomplete multipartitie digraph to be Hamiltonian» los autores los dan por ciertos.

En ésta sección proponemos las pruebas a los dos teoremas.

Teorema 2.1
Todo torneo T tiene una trayectoria hamiltoniana.

Demostración. La demostración la hacemos por inducción sobre el orden de T.

a) Si $n = 2$ tenemos dos vértices que son adyacentes, supongamos $x \to y$, entonces existe una trayectoria que recorre todos los vértices de T.

b) Como hipótesis inductiva supongamos que si el torneo tiene orden $n \geq 3$, entonces existe una trayectoria hamiltoniana. Debemos probar que si T es de orden $n + 1$ entonces posee una trayectoria hamiltoniana.

Demostración. Sea T' la subdigráfica inducida por cualquier subconjunto de $V(T)$ con n vértices. Como T' también es un torneo, entonces por hipótesis de

inducción, T' tiene una trayectoria hamiltoniana.

Supongamos que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es la trayectoria hamiltoniana en T' (llamada P) y debemos demostrar que existe una trayectoria con los vértices de T' y el vértice x que no está en T'. Supongamos, por contradicción, que no existe una trayectoria hamiltoniana en T.

Si existe la flecha $x \to v_1$, entonces se genera la trayectoria $(x, v_1) \cup P$ en T, pero hemos supuesto que T no tiene ninguna trayectoria hamiltoniana, situación similar ocurre si la flecha va de v_n a x. Por lo tanto en T existen las flechas $v_1 \to x$ y $x \to v_n$ (véase la figura 2.1). También existe la flecha de x hacia v_{n-1}, de lo contrario se forma la trayectoria hamiltoniana $P[v_1, v_{n-1}] \cup (v_{n-1}, x) \cup (x, v_n)$.

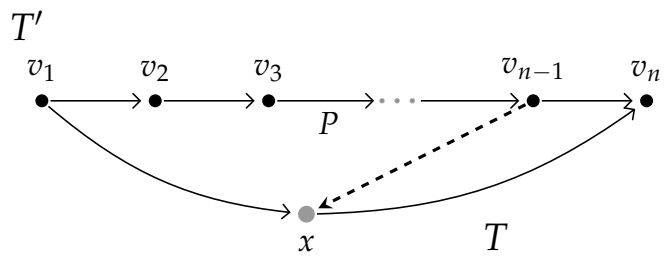


Figura 2.1: T' es la subdigráfica inducida por los vértices del conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$. Solo se indican las flechas de la trayectoria que existen en el torneo de orden n, las demás se omiten.

Sea F' el conjunto de flechas de T que van del vértice x a los demás vértices de P tal que F' no es un conjunto vacío y tiene más de un elemento (por el párrafo anterior, al menos $x \to v_n$ y $x \to v_{n-1}$). Por el principio del buen orden existe el subíndice i menor, tal que $x \to v_i$ (sabemos que i es mayor a uno ya que la flecha entre v_1 y x no pertenece a F') entonces existe la flecha $v_{i-1} \to x$ (véase la figura 2.2) que forma la trayectoria $P[v_1, v_{i-1}] \cup (v_{i-1}, x) \cup (x, v_i) \cup P[v_i, v_n]$, con esto existe una trayectoria que pasa por todos los vértices de T; lo que es una contradicción, pues supusimos que esto no era posible. Por lo tanto concluimos que todo torneo tiene una trayectoria hamiltoniana. ∎

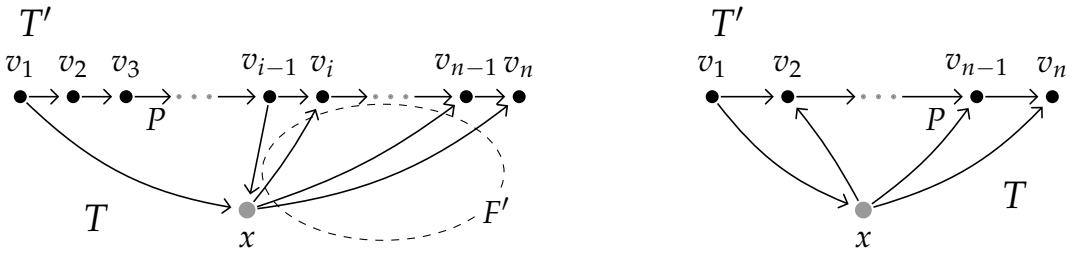


Figura 2.2: F' es el conjunto de flechas que van de x a los vértices de P; i es el subíndice menor tal que $x \to v_i$, v_i puede ser v_2.

Para el segundo resultado necesitamos preparar el terreno definiendo una relación de conexidad entre vértices, la cual es una relación de equivalencia.

Definición 2.1 *Sea D una digráfica. Si $u, v \in V(D)$ y existe una (u,v)-trayectoria y una (v,u)-trayectoria, entonces se dice que u y v* ***están fuertemente conectados*** *y se escribe $u \sim v$.*

Lema 2.2
La relación $u \sim v$ entre los vértices de un torneo T es una relación de equivalencia.

Demostración. Por demostrar que la relación es reflexiva, simétrica y transitiva.

i) Sea $u \in V(T)$, entonces (u) es una (u,u)-trayectoria, por lo tanto $u \sim u$ para toda $u \in V(T)$. Así $\sim$ es reflexiva.

ii) Sean u y v dos vértices en T tales que $u \sim v$, entonces por definición existe una (u,v)-trayectoria y una (v,u)-trayectoria. Por lo tanto $v \sim u$ y concluimos que $\sim$ es simétrica.

iii) Sean u, v y w tres vértices distintos de T tales que $u \sim v$ y $v \sim w$. Por demostrar que $u \sim w$.

Sean P_1 y P_2 las trayectorias de (u,v) y (v,w) respectivamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in V(P_1)$ es el primer vértice (en el recorrido de la trayectoria) que pertenece a $V(P_1) \cap V(P_2)$ (la intersección no es vacía ya que al menos contiene a v). Notemos que se forma la trayectoria $P_1[u,x] \cup P_2[x,w]$ en T, con esto concluimos que $u \sim w$. Por lo tanto $\sim$ es

transitiva. ∎

Estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.3
Si T es un torneo no fuerte entonces existe un orden $X_1, X_2, \ldots, X_t$ de sus componentes fuertemente conexas tales que $X_i \Rightarrow X_j$ si $1 \leq i < j \leq t$.

Demostración. La demostración la hacemos progresivamente a través de las siguientes cuatro afirmaciones.

Afirmación 1. Existe una partición de los vértices cuyas subdigráficas inducidas son las componentes fuertes de T.

Por la definición 2.1 y el lema 2.2, tenemos que la relación $\sim$ es de equivalencia, que nos proporciona una partición de $V(T)$ en s clases de equivalencia, $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Esta forma de agrupar los vértices nos dice que no existe un vértice w fuera de A_i con una (x, w)-trayectoria y una (w, x)-trayectoria en T, donde $x \in A_i$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, s\}$. Por lo tanto cada conjunto de vértices A_i genera una subdigráfica fuertemente conexa, que es máxima con respecto a la contención en sus vértices, *i.e.*, cada conjunto A_i es una componente fuerte de T.

En conclusión $A_1, A_2, \ldots, A_s$ es una partición de $V(T)$ donde cada A_i $(i \in \{1, 2, \ldots, s\})$ induce una componente fuertemente conexa de T. Además, si cada A_i induce una subdigrá1fica fuerte del torneo T, entonces esa subdigráfica es también un torneo y existe un ciclo C_{A_i} que recorre a todos los vértices de A_i.

Afirmación 2. Para dos enteros cualesquiera i, j con $0 \leq i < j \leq s$ se cumple que $A_i \Rightarrow A_j$ o $A_j \Rightarrow A_i$.

Por ser T torneo, todos los vértices de A_i y todos los vértices de A_j son adyacentes; tenemos que demostrar que $A_i \Rightarrow A_j$ o $A_j \Rightarrow A_i$. Supongamos por contradicción que existen los vértices x, x' en A_i e y, y' en A_j tal que $x \to y$ y $y' \to x'$. Como $x \sim x'$, existe una (x', x)-trayectoria (en A_i) a la que le llamaremos P y por ser $y \sim y'$ existe una (y, y')-trayectoria (en A_j) a la que llamaremos Q. El vértice x puede ser igual a x' o y igual a y' pero no los dos, ya que los torneos no tienen flechas simétricas, entonces existe alguna de las

tres trayectorias:

- a) $Q \cup (y', x') \cup P$, si $x \neq x'$ e $y \neq y'$.
- b) $Q \cup (y', x)$, si $x = x'$ e $y \neq y'$.
- c) $(y, x') \cup P$, si $x \neq x'$ e $y = y'$.

Y concluimos que existe una (x, y)-trayectoria y una (y, x)-trayectoria (véase la figura 2.3), así, x e y pertenecen a la misma clase de equivalencia, lo que es una contradicción porque A_i y A_j son diferentes clases de equivalencia. Por lo tanto tenemos que $A_i \Rightarrow A_j$ o $A_j \Rightarrow A_i$.

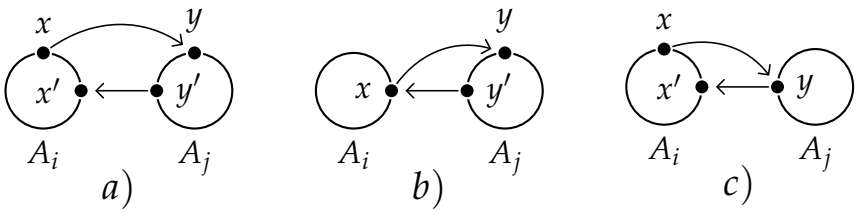


Figura 2.3: P es (x', x)-trayectoria y Q es (y, y')-trayectoria.
a) $x \neq x'$ e $y \neq y'$.
b) $x = x'$ e $y \neq y'$.
c) $x = x'$ e $y = y'$.

Definamos una nueva digráfica con vértices $u_1, u_2, \ldots, u_s$ donde cada u_i corresponda a A_i, y la flecha entre dos vértices $u_i \to u_j$ existe si y solo si $A_i \Rightarrow A_j$, para cada i. Por ser T un torneo, siempre existen flechas entre A_i y A_j y con ello también entre los vértices u_i, u_j (para toda $i \neq j$), por lo tanto la nueva digráfica es también un torneo. A este torneo se le conoce como la condensación T^* de T.

Afirmación 3. El torneo T^* es acíclico.

Supongamos que la afirmación es falsa. Entonces existe un ciclo con k vértices de T^*. Si reetiquetamos los vértices de T^* y los elementos de la partición de T, podemos ver al ciclo de la forma $(u_1, u_2, \ldots, u_k, u_1)$ donde u_i corresponde a A_i, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $k \leq s$.

Como $A_i \Rightarrow A_{i+1}$ para toda $1 \leq i < k$ y $A_k \Rightarrow A_1$, implica que existen dos vértices $x_i, y_i \in A_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tales que las flechas $y_i \to x_{i+1}$ $(1 \leq i < k)$ están en T y construimos la (x_1, y_k)-trayectoria dada por $P_1 \cup (y_1, x_2) \cup P_2 \cup (y_2, x_3) \cup P_3 \cup \ldots \cup P_{k-1} \cup (y_{k-1}, x_k) \cup P_k$, donde P_j

es una (x_j, y_j)-trayectoria en el recorrido de C_{A_j} $(j = 1, \ldots, k)$ (véase la figura 2.4) y como hay flecha que va de y_k a x_1, entonces $x_1 \sim y_k$, pero esto es una contradicción, porque esos dos vértices pertenecen a diferentes clases de equivalencia. Por lo tanto T^* es acíclica.

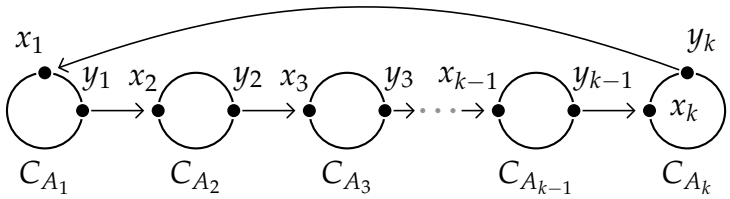


Figura 2.4: Si existe un ciclo en la condensación de T, entonces las k componentes fuertes de T pueden verse como en la figura.

Afirmación 4. Hay un orden en las componentes fuertes, $X_1, X_2, \ldots X_s$ tales que $X_i \Rightarrow X_j$ si $i < j$.

Por ser T^* un torneo, existe una trayectoria hamiltoniana, reenumeramos los vértices para ver la trayectoria de la forma $(u_1, u_2, \ldots, u_s)$, renombramos también las componentes conexas de la forma $X_1, X_2, \ldots, X_s$ tales que u_i en T^* corresponda a la componente conexa X_i en T, para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$. Entonces $X_i \Rightarrow X_{i+1}$ para toda $i \in \{1, \ldots, s-1\}$.

Por ser T^* acíclica no hay flechas que vayan de un u_i a otro vértice con subíndice menor, pues se formaría un ciclo, *i.e.*, $u_i \to u_j$ donde $i < j$, por lo tanto $X_i \Rightarrow X_j$ si $i < j$. ∎

Este resultado nos asegura que a un torneo no fuerte podemos asociarle otro torneo acíclico, que será precisamente la condensación T^* del torneo inicial. Este resultado es muy importante porque para ciertos análisis de torneos multipartitos, se reduce al análisis de T^*.

El cuarto y último resultado nos habla sobre la paridad de las longitudes de los ciclos en un factor de ciclos para los torneos bipartitos. El enunciado y la demostración vienen a continuación.

Teorema 2.4
Si B es un torneo bipartita y tiene un factor de ciclos $\mathcal{F}$, entonces cada ciclo en $\mathcal{F}$ es de longitud par.

Demostración. Sean C un ciclo de $\mathcal{F}(X, Y)$, la partición de los vértices de B, dado por $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$. Como los vértices de C pertenecen a las dos partes de B, suponemos (sin pérdida de generalidad) que $u_1 \in X$. El comportamiento de los demás vértices de C en el recorrido del ciclo es como sigue: $u_2 \in Y$, $u_3 \in X$ (diferente de u_1), $u_4 \in Y$ (puede ser el predecesor de u_1, si no continuamos), $u_5 \in X$, $u_6 \in Y$ (puede ser el predecesor de u_1, si no continuamos), así sucesivamente hasta llegar al predecesor de u_1 en el recorrido de C. Vemos que los vértices con subíndice impar pertenecen a X mientras que los vértices con subíndice par pertenecen a Y y solo un vértice con subíndice par puede ser el predecesor de u_1. Por lo tanto el ciclo C tiene una cantidad de vértices pares, entonces C tiene longitud par. ∎

Ciclos hamiltonianos en torneos 2-partitos y n-partitos

Hay dos casos particulares de torneos con m partes, cuando $m = 2$ y $m = n$, en donde las condiciones suficientes para que el torneo sea hamiltoniano son menores. El caso en que cada vértice del torneo multipartito sea el único elemento de cada parte de la partición, nos arroja un torneo; para él basta con que sea fuerte para tener un ciclo hamiltoniano.

Por lo tanto demostramos condiciones de hamiltonicidad en un torneo.

Teorema 2.5
Un torneo T de orden mayor o igual a tres es fuertemente conexo si y solo si es hamiltoniano.

Demostración. Sea T un torneo hamiltoniano. Sin pérdida de generalidad supongamos que $(v_1, v_2, \ldots v_n, v_1)$ es el ciclo hamiltoniano en T. Sean v_i, v_j en $V(T)$ tal que $i < j$, entonces existe una (v_i, v_j)-trayectoria dada por $C[v_i, v_j]$ y una (v_j, v_i)-trayectoria dada por $C[v_j, v_i]$. Por lo tanto T es fuertemente conexo.

Supongamos por contradicción que T es un torneo fuerte y no es hamiltoniano. Primero demostremos que T no es acíclico.

Sean u y v dos vértices en T con la flecha $u \to v$. Por ser T fuerte, existe una (v, u)-trayectoria, llamémosla Q, entonces se forma el ciclo $(u, v) \cup Q$. Con este argumento concluimos que T no es acíclico. Ahora, como supusimos que T no es hamiltoniano, entonces existe un ciclo $C = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_s, v_1)$ en T de longitud máxima donde $s < n$. Sea $x \in V(T) \setminus V(C)$, donde $V(T) \setminus V(C) \neq \emptyset$.

T es torneo, por ello x es adyacente a todos los vértices de C. A continuación veremos cómo es el comportamiento de las flechas entre x y C.

Supongamos que x absorbe a v_1 entonces x también absorbe a v_2 pues de lo contrario x podrá ser insertado en C al formar el ciclo:

$$(v_1, x) \cup (x, v_2) \cup C[v_2, v_1]$$

que es más largo que C. Así recursivamente hasta llegar al vértice v_n, por lo tanto una posibilidad es que x absorba a todos los vértices de C. En el otro caso en que v_i absorbe a x, el vértice ${v_1}^-$ (en el recorrido de C) que es v_n también absorbe a x, para que éste no pueda ser insertado en C; repitiendo el razonamiento anterior, tenemos como segunda opción que x domine a todos los vértices de C; éstas son las dos únicas opciones.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que x absorbe a todos los vértices de C. Por ser T fuerte existe una (x, v_1)-trayectoria, llamémosla P y además contiene a vértices que no están en C, en particular x^+ en P no es un vértice de C, pues x no absorbe a x^+.

Sean $y \in V(T) \setminus V(C)$ el primer vértice que va a algún otro de C en el recorrido de P, entonces (por el argumento anterior), y debe dominar a los demás vértices de C, en particular a v_2. De esta forma se obtiene el ciclo $(y, v_2) \cup C[v_2, v_1] \cup (v_1, x) \cup P[x, y]$ (véase la figura 2.5) que contiene a todos los vértices de C más los vértices de P, pero esto es una contradicción porque habíamos supuesto que C era el ciclo de mayor longitud en T.

Por lo tanto T es hamiltoniano. ∎

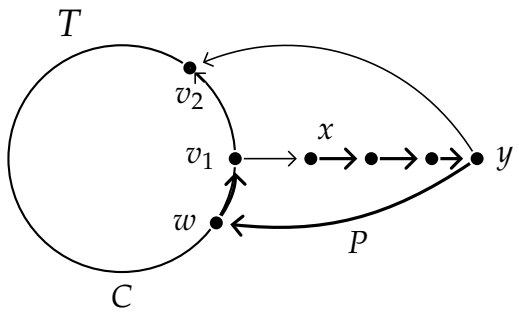


Figura 2.5: P es una (x, v_1)-trayectoria. Por existir la flecha $y \to w$ (w pertenece a C) implica que también exista la flecha $y \to v_2$.

Si $m = 2$ hablamos de un torneo bipartito B; para que sea hamiltoniano no es suficiente con pedir que la digráfica sea fuerte, como en el caso en que $n = m$. En la figura 2.6 vemos un torneo bipartito y fuerte, pero no es hamiltoniano, es fácil concluir esto ya que, de acuerdo con el teorema 2.4 [1], el orden de B es un número impar y por lo tanto no es posible encontrar un ciclo de longitud par que recorra a todos los vértices de B.

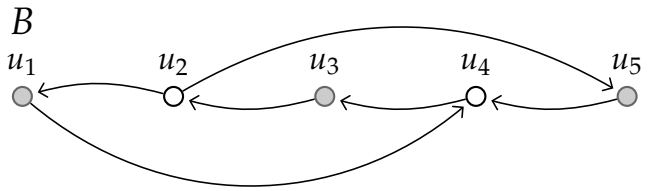


Figura 2.6:
- Torneo bipartito
- Fuerte
- No tiene factor de ciclos
- No es hamiltoniano

[1] Página 27

En el capítulo tercero demostraremos que toda digráfica bipartita semicompleta es hamiltoniana si y solo si es fuerte y tiene un factor de ciclos. En la figura 2.7 se muestra un ejemplo que ilustra esta afirmación.

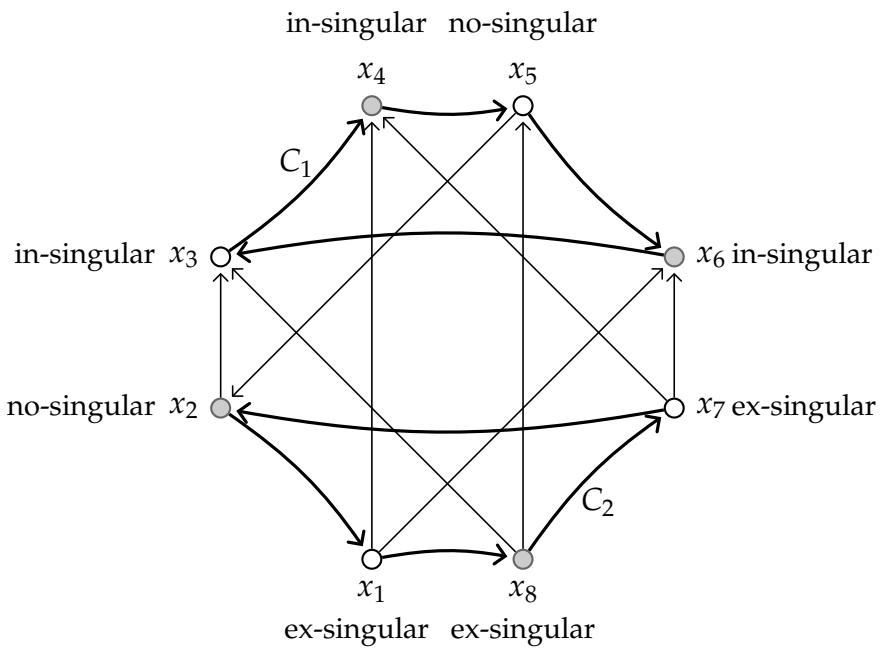


Figura 2.7:
- Torneo bipartito
- Fuerte
- Factor de ciclos $C_1 = (x_3, x_4, x_5, x_6, x_3)$ y
  $C_2 = (x_1, x_8, x_7, x_2, x_1)$, no es buen factor
- Ciclo hamiltoniano
  $(x_3, x_4, x_5, x_2, x_1, x_8, x_7, x_6, x_3)$

Para garantizar la existencia de un ciclo hamiltoniano en los casos generales de torneos multipartitos, no basta con pedir que éste sea fuerte o que sea fuerte y contenga un factor de ciclos (véase la figura 2.8), aunque nos podamos encontrar torneos multipartitos como el que se exhibe en la figura 2.9 que son fuertes y contienen un factor de ciclos y además son hamiltonianos.

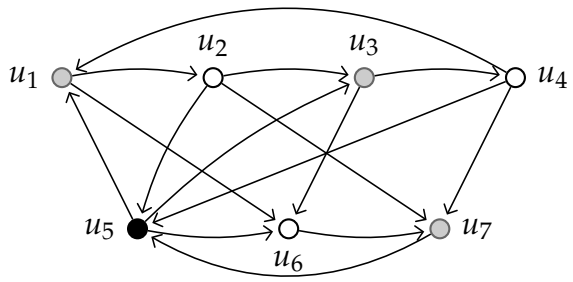


Figura 2.8:
- Torneo 3-partito
- Fuerte
- Factor de ciclos $C_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1)$ y
  $C_2 = (u_5, u_6, u_7, u_5)$
- No es hamiltoniano

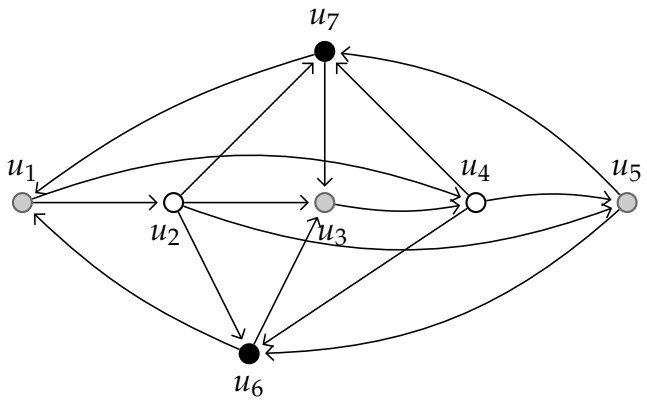


Figura 2.9:
- Torneo 3-partito
- Fuerte
- Factor de ciclos $C_1 = (u_1, u_2, u_6, u_1)$ y
  $C_2 = (u_3, u_4, u_5, u_7, u_3)$
- Ciclo hamiltoniano $(u_1, u_2, u_7, u_3, u_4, u_5, u_6, u_1)$

Capítulo 3

Ciclos hamiltonianos en torneos multipartitos

Los primeros tres resultados del presente capítulo, nos muestran que la existencia de socios con ciertas características son suficientes para garantizar que un ciclo y una trayectoria o dos ciclos pueden unirse en un solo ciclo.

Lema 3.1
Sean D una digráfica, $P = (u_0, u_1, \ldots, u_r)$ una trayectoria en D y C un ciclo en $D - P$. Supongamos que para todo $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, la flecha $u_i \to u_{i+1}$ o el vértice u_i tiene un socio en C y además que u_r tiene un socio en C. Entonces D contiene un ciclo que pasa por $V(P) \cup V(C)$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre la longitud de P.

a) Si la longitud de P es cero entonces $r = 0$ y así $P = (u_0)$. Por hipótesis, existe una flecha $x \to y$ en C que es socio de u_0. Así el ciclo $(x, u_0, y) \cup C[y, x]$ contiene a los vértices de C y P (véase la figura 3.1).

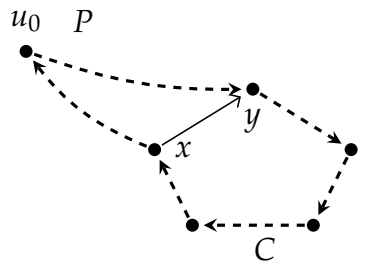


Figura 3.1: El ciclo marcado con líneas punteadas es el ciclo que pasa por P y C.

b) Supongamos que si la longitud de P es menor a r y satisface las hipótesis del lema, entonces existe un ciclo que pasa por los vértices de $V(P) \cup V(C)$. Por demostrar que si $P = (u_0, u_1, \ldots, u_r)$ es de longitud r y cumple con las hipótesis del lema, entonces D contiene un ciclo que pasa por los vértices de la trayectoria P y del ciclo C.

Demostración. Sea la flecha $x \to y$ socio en C de $u_0 \to u_1$ o del vértice u_0 por la hipótesis del lema. Elijamos el subíndice i más grande tal que $u_i \to y$, claramente $P[u_0, u_i]$ puede ser insertado en C, dando como resultado un nuevo ciclo $C^* = (x, u_0) \cup P[u_0, u_i] \cup (u_i, y) \cup C[y, x]$ y una nueva trayectoria $P^* = P[u_{i+1}, u_r]$.

Si $r = i$ ya terminamos la demostración. En caso contrario tenemos que P^* es una subtrayectoria de P y la trayectoria $C[y, x]$ está contenida en C^*, además los vértices de P^* y los de C^* son ajenos y contienen a todos los vértices de D (vértices que quitamos de P los contiene C^*). Asimismo, ninguna flecha o vértice de P^* tiene como socio a $x \to y$, porque por construcción i era el subíndice más grande tal que u_i domina a y, entonces toda flecha o vértice (incluyendo a u_r) de P^* que tenga socio en C, tiene socio en $C[y, x]$. Con todo esto concluimos que la trayectoria P^* y el ciclo C^* cumplen con las condiciones del lema (véase la figura 3.2), se cumple también la hipótesis de inducción dado que la longitud de P^* es menor a r. Por lo tanto D contiene un ciclo contenido en $V(C) \cup V(P)$.

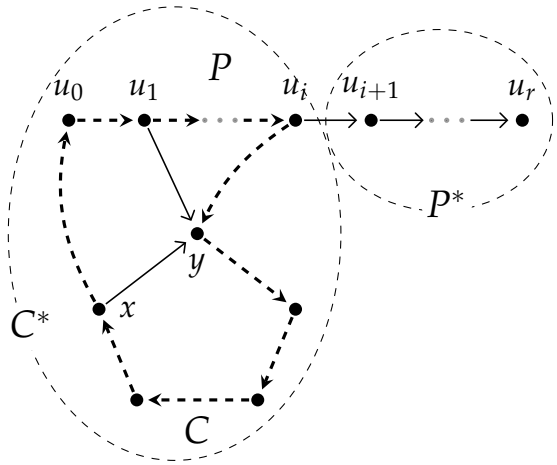


Figura 3.2: Aplicamos la hipótesis de inducción en el ciclo C^* (marcado con flechas punteadas) y la trayectoria $P[u_{i+1}, u_r]$.

■

Lema 3.2
Sean D una digráfica, $P = (u_0, u_1, \ldots, u_r)$ una trayectoria en D de longitud impar en D y C un ciclo en $D - P$. Supongamos que para cada j impar, la flecha $u_{j-1} \rightarrow u_j$ tiene un socio en C. Entonces D posee un ciclo que pasa por los vértices del conjunto $V(P) \cup V(C)$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre la longitud de P.

a) Si $P = (u_0, u_1)$, por la hipótesis del lema, existe una flecha $x \rightarrow y$ en C que es socio de $u_0 \rightarrow u_1$, por lo tanto el ciclo $(x, u_0, u_1, y) \cup C[y, x]$ contiene a los vértices de C y P.

b) Supongamos que la longitud de P es menor a r y que se satisfacen las hipótesis del lema, entonces existe un ciclo que contiene a $V(C) \cup V(P)$. Por demostrar que si $P = (u_0, u_1, \ldots, u_r)$ y se cumplen las hipótesis del lema entonces existe un ciclo contenido en la trayectoria P y el ciclo C.

Demostración. Por hipótesis existe $x \rightarrow y$ socio en C de $u_0 \rightarrow u_1$. Elijamos el índice impar i más grande, tal que la flecha $u_{i-1} \rightarrow u_i$ también tiene como socio a $x \rightarrow y$ (véase la figura 3.3). Con esto podemos insertar la trayectoria $P[u_0, u_i]$ en C, dando como resultado una nueva trayectoria: $P^* = (u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_r)$ de longitud impar y un nuevo ciclo: $C^* = (x, u_0) \cup P[u_0, u_i] \cup (u_i, y) \cup C[y, x]$.

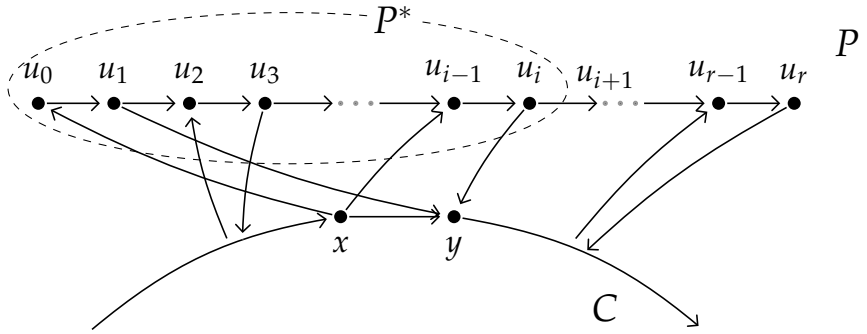


Figura 3.3: Los subíndices i y r son impares.

Si $r = i$ ya terminamos la demostración; si no, tenemos que P^* es una subtrayectoria de P y la trayectoria $C[y, x]$ está contenida en C^*. Como los vértices que quitamos de P están contenidos en C^*, entonces C^* es un ciclo en $D - P^*$. Además, ninguna flecha $u_{j-1} \rightarrow u_j$ (en P^*) con j impar y $j > i$, tiene como

socio a $x \to y$, porque por construcción $u_{i-1} \to u_i$ es la flecha más lejana de u_0 que la contiene; entonces toda flecha de P^* que tenga socio en C, tiene socio en $C[y, x]$ (contenida en C^*). Con todo esto concluimos que la trayectoria P^* y el ciclo C^* cumplen las condiciones del lema. Más aún, como la longitud de P^* es menor a r, satisface la hipótesis de inducción, por lo tanto D contiene un ciclo que pasa por $V(C) \cup V(P)$. ∎

Corolario 3.3
Sean D una digráfica, C un ciclo de longitud par en D y Q un ciclo en $D - C$. Supongamos que para cada flecha $u \to v$ en C, ésta flecha o el vértice u tiene un socio en Q. Entonces D contiene un ciclo que pasa por el conjunto de vértices $V(Q) \cup V(C)$.

Demostración. Sea $C = (u_0, u_1, \ldots, u_r, u_0)$, con r impar. Analicemos dos casos.

Caso 1. Si ningún vértice de C tiene socio en Q, entonces todas las flechas de C tienen socio en Q. Fijémonos en la trayectoria $C[u_0, u_r]$, ésta es de longitud impar y todas sus flechas tienen socio en Q, en particular aquellas de la forma $u_{j-1} \to u_j$ con j impar, cumpliéndose las hipótesis del lema 3.2. Por lo tanto, D contiene un ciclo que pasa por los vértices de los ciclos Q y C.

Caso 2. Si existe al menos un vértice u_i en C que tiene un socio en Q (véase la figura 3.4), entonces tenemos una trayectoria $C[u_{i+1}, u_i]$ que pasa por todos los vértices de C y cada flecha de la trayectoria o el vértice que está en la cola de cada flecha de la trayectoria, tiene un socio en Q. Así la trayectoria $C[u_{i+1}, u_i]$ y el ciclo Q cumplen con las condiciones del lema 3.1. Por lo tanto D contiene un ciclo que pasa por $V(Q) \cup V(C)$. ∎

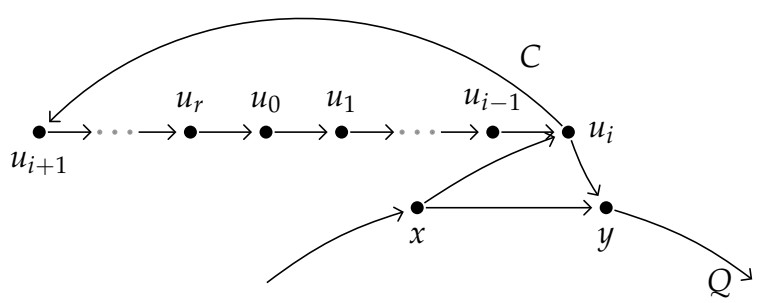


Figura 3.4: En el ciclo C, u_r tiene un socio en Q. La trayectoria $C[u_{i+1}, u_i]$ y el ciclo Q cumplen las condiciones del lema 3.1.

Los siguientes dos lemas nos ayudarán a demostrar otros resultados para digráficas multipartitas semicompletas.

Lema 3.4
Sean D una digráfica multipartita semicompleta y $Q \cup C$ un factor de ciclos de D. Si D no tiene ciclos hamiltonianos y el ciclo Q no tiene vértices singulares con respecto a C, entonces cada flecha $x \to y$ de Q tiene un socio en C o ambos vértices x e y tienen socios en C.

Demostración. Supongamos por contradicción que no se cumple la conclusión del lema, *i.e.*, que existe una flecha $x \to y$ en Q, tal que ni ella ni el vértice x tiene socio en C. Como Q no tiene vértices singulares con respecto a C, entonces entre x y los vértices de C hay flechas en ambas direcciones, tomemos una flecha que vaya de C a x y enumeremos los vértices de C a partir de éste.

Sea $v_i \in V(C)$ el vértice que absorbe a x más cercano a v_1 con $i > 1$, supongamos que v_{i-1} es adyacente a x. La flecha $x \to v_{i-1}$ no puede existir ya que v_i es el vértice más cercano a v_1 tal que $x \to v_i$, pero tampoco existe la flecha opuesta porque se tendría un socio en C del vértice x (hemos supuesto que x no tiene socio en C). En conclusión v_{i-1} y x pertenecen a la misma partición y por lo tanto v_{i-2} y x son adyacentes al igual que y y v_{i-1}; las flechas son $v_{i-2} \to x$ ($x \to v_{i-2}$ es imposible, ya que v_i es el más cercano a v_1 tal que $x \to v_i$) y $v_{i-1} \to y$ ($y \to v_{i-1}$ no es posible pues la flecha $v_{i-2} \to v_{i-1}$ sería socio de $x \to y$). Véase la figura 3.5.

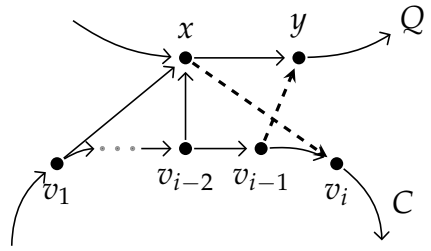


Figura 3.5: Con las flechas punteadas $x \to v_i$ y $v_{i-1} \to y$ se obtiene un ciclo hamiltoniano.

Entonces D contiene un ciclo hamiltoniano de la forma:

$$Q[y, x] \cup (x, v_i) \cup C[v_i, v_{i-1}] \cup (v_{i-1}, y)$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, cada flecha $x \to y$ de Q tiene socio

en C o ambos vértices tienen socio en C. ∎

Lema 3.5
Sea D una digráfica multipartita semicompleta que contiene un factor $C_1 \cup C_2$ tal que C_i no tiene vértices singulares con respecto a C_{3-i} (para $i = 1, 2$). Entonces D es hamiltoniana.

Demostración. Supongamos que D no es hamiltoniana. Notemos que D es una digráfica DMS, C_i y C_{3-i} son dos ciclos ajenos que son un factor de D, los vértices de C_i no tienen vértices singulares con respecto a C_{3-i} y D no es hamiltoniana. Por el lema 3.4 tenemos que toda flecha $x \to y$ en C_i o sus dos vértices, tienen un socio en C_{3-i} $(i = 1, 2)$.

La demostración la dividimos en tres proposiciones para llegar al final a un absurdo.

Proposición 1. Las longitudes de los ciclos C_1 y C_2 son impares.

Si C_1 o C_2 tuviera longitud par, entonces cumple las condiciones del corolario 3.3, lo que es una contradicción, ya que supusimos que D no es hamiltoniana. Por lo tanto la longitud de ambos ciclos es impar.

Proposición 2. Sólo las flechas de C_i tienen socio en C_{3-i} $(i = 1, 2)$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad que en C_1 hay un vértice x^* que tiene socio en C_2, enumeremos los vértices de C_1 desde u_1 hasta u_r y $x^* = u_r$ (notemos que r es impar). La trayectoria $P = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ y el ciclo C_2 son ajenos, donde todas las flechas de P y u_r (último vértice de P) tienen socio en C_2. Por el lema 3.1 tenemos que D contiene un ciclo cuyos vértices contienen al conjunto $V(P) \cup V(C_2)$ (véase la figura 3.6), pero eso querría decir que D contiene un ciclo hamiltoniano y, como eso no puede ocurrir, entonces no es cierto que C_1 posee vértices con socio en C_2.

Proposición 3. Todas las flechas de C_i tienen al menos dos socios en C_{3-i} $(i = 1, 2)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_1 \to x_2$ es una flecha en C_1. Por hipótesis x_1 y x_2 no son vértices singulares con respecto C_2 y no tienen socios en C_2 (por la proposición 2). Si aplicamos el mismo razonamiento que se usó

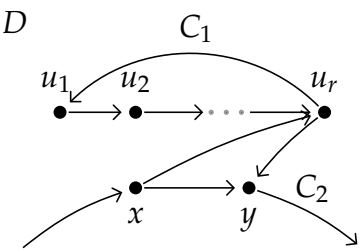


Figura 3.6: La trayectoria $P[u_1, u_r]$ y el ciclo C_2 satisfacen las hipótesis del lema 3.1, por lo tanto D posee ciclo hamiltoniano.

para demostrar el lema 3.4, existen en C_2 vértices y_1 e y_2 tales que ${y_1}^- \to x_1$, $x_1 \to {y_1}^+$, ${y_2}^- \to x_2$ y $x_2 \to {y_2}^+$ donde x_1, y_1 pertenecen a la misma parte y x_2, y_2 pertenecen a la misma parte (nótese que las partes son distintas porque x_1 y x_2 son adyacentes), es por ello que y_1 es necesariamente diferente a y_2; de ahí que x_1 e y_2 son adyacentes (así también son adyacentes x_2 e y_1). La figura 3.7 muestra lo anterior.

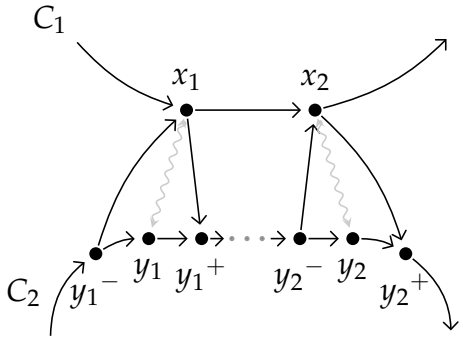


Figura 3.7: El vértice y_1 es diferente a y_2 y las flechas $x_1 \to y_1$, $y_1 \to x_1$, $x_2 \to y_2$ e $y_2 \to x_2$ (flechas grises) no existen.

Si existiera la flecha $x_1 \to y_2$ o $y_1 \to x_2$, entonces D tendría el ciclo hamiltoniano $C_1[x_2, x_1] \cup (x_1, y_2) \cup C_2[y_2, {y_2}^-] \cup ({y_2}^-, x_2)$ o el ciclo $C_1[x_2, x_1] \cup (x_1, {y_1}^+) \cup C_2[{y_1}^+, y_1] \cup (y_1, x_2)$. Por lo tanto existen las flechas $y_2 \to x_1$ y $x_2 \to y_1$. Véase la figura 3.8.

Si entre y_1 e y_2 hay dos o más vértices dentro de C_2, los vértices ${y_1}^-$, y_1, ${y_1}^+$, ${y_2}^-$, y_2 e ${y_2}^+$ contenidos en C_2 son diferentes entre sí, entonces la flecha $x_1 \to x_2$ en C_1 tiene dos socios en C_2, los cuales son: ${y_1}^- \to y_1$ e $y_2 \to {y_2}^+$, como se muestra en la figura 3.9.

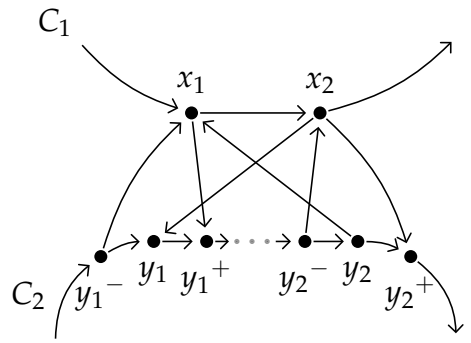


Figura 3.8: Existen las flechas $y_2 \to x_1$ y $x_2 \to y_1$.

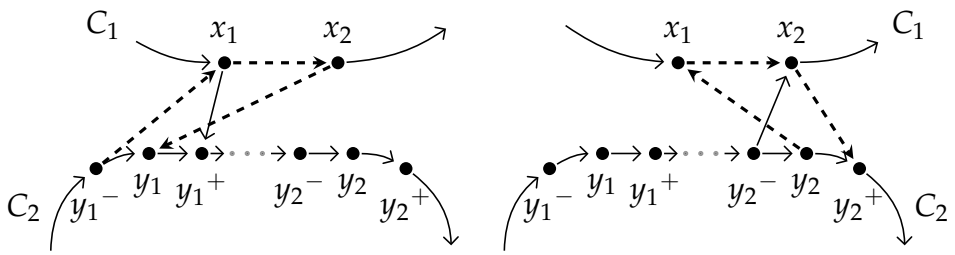


Figura 3.9: En cada figura se observa un socio en C_2 de la flecha $x_1 \to x_2$ de C_1.

Ahora bien, si entre y_1 e y_2 hay uno o ningún vértice, notemos en la figura 3.10, que $x_1 \to x_2$ también tiene dos socios en C_2 y son los mismos que en la proposición 2.

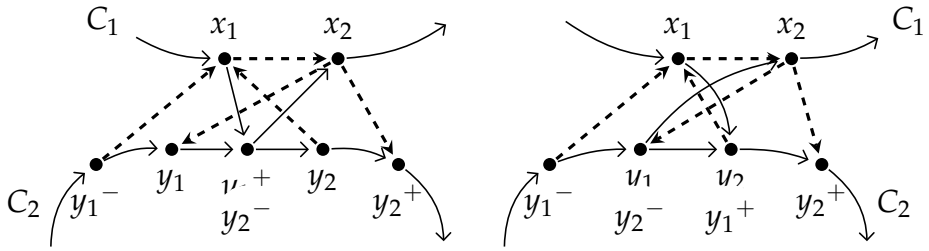


Figura 3.10: En la figura de la derecha, y_1 e y_2 tiene solo un vértice entre ellos, sobre el ciclo C_2; en la figura de la izquierda no hay vértices intermedios.

Observemos que los dos socios de la proposición 3 son $y_1{}^- \to y_1$ e $y_2 \to y_2{}^+$, pero esto es considerando que los vértice $y_1{}^-$, y_1, $y_1{}^+$, $y_2{}^-$, y_2 e $y_2{}^+$ en el ciclo C_2 son diferentes. Analicemos lo que sucede si el vértice y_1, su predecesor o sucesor coincide con alguno de los vértices y_2, su predecesor o sucesor, que como vemos en la figura figura 3.11 hay tres posibilidades.

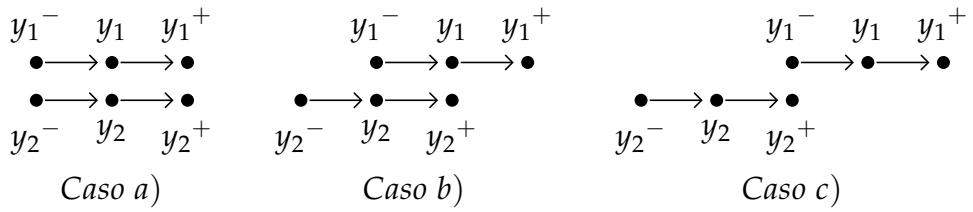


Figura 3.11: Los incisos (a), (b) y (c) muestran los tres casos en que pueden coincidir los vértices $y_1{}^-$, y_1 e y_2, $y_2{}^+$.

Caso a) $y_1{}^- = y_2{}^-$, $y_1 = y_2$ y $y_1{}^+ = y_2{}^+$.

Este caso no puede darse por que y_1 es diferente a y_2.

Caso b) $y_1{}^- = y_2$ e $y_1 = y_2{}^+$.

Este caso no puede darse. Recordemos que $x_1 \to x_2$ tiene a $y_1{}^- \to y_1$ como socio en C_2 (véase la figura 3.12). Sea C^* el ciclo:

$$C_1[x_2, x_1] \cup (x_1, y_1{}^+) \cup C_2[y_1{}^+, y_2{}^-] \cup (y_2{}^-, x_2)$$

que contiene a todos los vértices del conjunto $V(C_1) \cup V(C_2)$, excepto por los vértices de la flecha $y_1{}^- \to y_1$ en C_2. Por la proposición 2, sabemos que $y_1{}^- \to y_1$ tiene un socio en C_1, ese socio no puede ser $x_1 \to x_2$, pues y_1 no domina a x_2; recordemos que si esto es cierto, se formaría el ciclo hamiltoniano:

$$C_1[x_2, x_1] \cup (x_1, y_1{}^+) \cup C_2[y_1{}^+, y_1] \cup (y_1, x_2).$$

Entonces $y_1{}^- \to y_1$ tiene un socio en la trayectoria $P[x_2, x_1]$ que pertenece a C^*, formando así un ciclo hamiltoniano de D, lo cual no es posible porque supusimos lo contrario. Por lo tanto, este caso tampoco puede darse.

Caso c) $y_1{}^- = y_2{}^+$.

Similarmente al caso anterior, cuando examinamos que si entre y_1 e y_2 no hay vértices sobre el ciclo C_2, entonces $x_1 \to x_2$ tiene dos socios en C_2. Podemos observar este caso en la figura 3.13. Con esto terminamos la demostración de la proposición 3.

Concluimos que todas las flechas de C_i tienen al menos dos socios en C_{3-i} para

$i = 1, 2$.

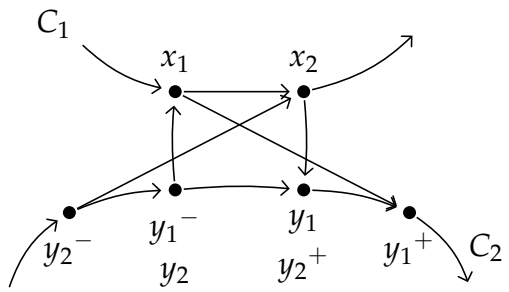


Figura 3.12: *Caso b)* $y_2 = y_1{}^-$ y $y_2{}^+ = y_1$.

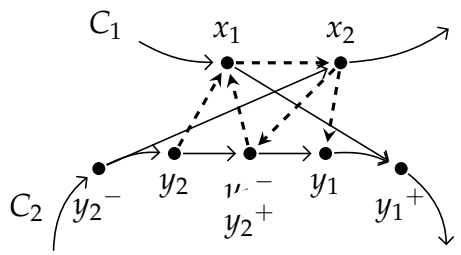


Figura 3.13: *Caso c)* $y_1{}^- = y_2{}^+$.

Por último, supongamos sin pérdida de generalidad que la longitud de C_1 es igual o mayor a C_2, por la proposición 3 cada flecha en C_1 tiene dos socios en C_2. Por lo tanto, en C_1 existen dos flechas $x_i \to y_i$ $(i = 1, 2)$ con un socio común $u \to v$ en C_2. Como C_1 es impar, una de las trayectorias $Q = C_1[y_1{}^+, x_2{}^-]$ y $P = C_1[y_2{}^+, x_1{}^-]$ tiene longitud impar y la otra par. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la trayectoria Q es impar; tenemos que:

$$C^* = C_2[v, u] \cup (u, x_2) \cup C_1[x_2, y_1] \cup (y_1, v)$$

es un ciclo de D que deja fuera a los vértices de la trayectoria Q. De igual forma que en la proposición 3, cada flecha de Q tiene un socio en C_2 diferente de $u \to v$; por lo tanto, cada flecha de Q tiene socio en C^*.

Notemos que Q es trayectoria de longitud impar, C^* es el ciclo con vértices en $D - Q$ y todas las flechas en Q (en particular las de la forma $u_i \to u_{i+1}$ con i impar) tienen un socio en C^*. Entonces por el lema 3.2 D contiene un ciclo cuyos vértices contienen al conjunto $V(C^*) \cup V(Q)$, obteniendo un ciclo hamiltoniano, lo cual contradice la suposición inicial.

Por lo tanto D contiene un ciclo hamiltoniano. ∎

El lema 3.6 nos proporciona nuevas condiciones suficientes para que una DMS sea hamiltoniana. El resultado es importante ya que servirá para demostrar el teorema 3.7.

Lema 3.6
Sea D una digráfica multipartita semicompleta. Si D contiene un buen factor $C_1 \cup C_2$, entonces D es hamiltoniana.

Demostración. La demostración se divide en casos.

Caso 1. Alguno de los dos ciclos no tiene vértices singulares.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que C_1 no tiene vértices singulares con respecto a C_2.

Caso a) C_2 no tiene vértices singulares.

Por el lema 3.5, D tiene un ciclo hamiltoniano.

Caso b) C_2 tiene vértices singulares.

Como C_1 no tiene vértices singulares con respecto a C_2, entonces en C_2 hay flechas que salen y entran, por lo tanto los vértices de C_2 no pueden ser todos in-singulares ni todos ex-singulares con respecto a C_1.

Caso b.1) C_2 tiene al menos un vértice ex-singular.

Sea $x \in V(C_2)$ un vértice ex-singular con respecto a C_1, tal que x^+ no es ex-singular, de ahí que x^+ absorbe a un vértice del ciclo C_1. Sea y en $V(C_1)$ que domina a x^+.

Si x e y son adyacentes, la flecha entre ambos es $x \to y$ pues x es ex-singular, entonces $x \to x^+$ es socio de y. Supongamos que D no es hamiltoniana, por el lema 3.4 cada flecha de C_1, el vértice de la cola o el de la cabeza de la flecha tiene socio en C_2. Consideremos la trayectoria $C_1[y^+, y]$ y observemos que cumple las condiciones del lema 3.1, por lo tanto existe un ciclo cuyos vértices contienen tanto a los vértices de $C_1[y^+, y]$ como de C_2. Dado que éstos vértices abarcan todos los vértices de D, entonces D es hamiltoniana, lo cual es una contradicción. Por lo tanto para el caso en que exista la flecha $x \to y$, existe un ciclo hamiltoniano en D (véase la figura 3.14).

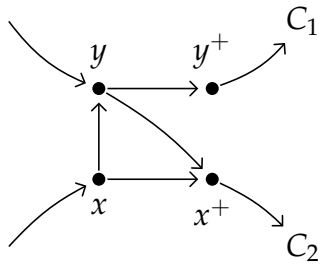


Figura 3.14: El vértice x es ex-singular con respecto a C_1 y son adyacentes x e y.

Si x e y no son adyacentes entonces pertenecen a la misma parte. Así x e y^+ son adyacentes, con lo que tenemos la flecha $x \to y^+$ porque x es ex-singular con respecto a C_2. Se forma el ciclo:

$$C_1[y^+, y] \cup (y, x^+) \cup C_2[x^+, x] \cup (x, y^+)$$

que pasa por todos los vértices de D y por lo tanto es hamiltoniana (véase la figura 3.15).

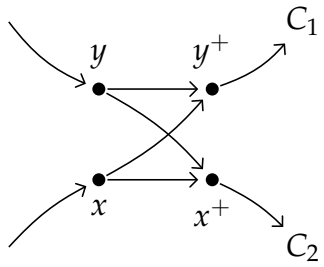


Figura 3.15: El vértice x es ex-singular con respecto a C_1 y no son adyacentes x e y.

Caso b.2) C_2 tiene al menos un vértice in-singular.

Sea $x \in V(C_2)$ un vértice in-singular con respecto a C_1, tal que x^- no es in-singular, de ahí que x^- domina a un vértice del ciclo C_1. Sea $y \in V(C_1)$ tal que $x^- \to y$. Al igual que en el inciso b.1), se analiza el caso en que x e y son adyacentes y el caso en que no son adyacentes la demostración es similar (véase la figura 3.16).

Caso 2. Ambos ciclos tienen vértices singulares.

Por la definición de buen factor, C_1 y C_2 tienen vértices in-singulares o ambos tienen vértices ex-singulares.

Figura 3.16:
a) El vértice x es in-singular con respecto a C_1 y son adyacentes x e y. La flecha $x^- \to x$ es socio de y.
b) El vértice x es in-singular con respecto a C_1 y no son adyacentes x e y. Se forma el ciclo hamiltoniano $C_1[y^+, y] \cup (y, x) \cup C_2[x, x^-] \cup (x^-, y^+)$.

Caso a) C_1 y C_2 tienen vértices ex-singulares.

Sea x un vértice ex-singular de C_1 y sea y un vértice ex-singular de C_2. El vértice x no puede ser adyacente a y, por lo tanto pertenecen a la misma partición, de ahí que $x \to y^+$ e $y \to x^+$ forman el ciclo hamiltoniano:

$$C_1[x^+, x] \cup (x, y^+) \cup C_2[y^+, y] \cup (y, x^+).$$

Véase la figura 3.17.

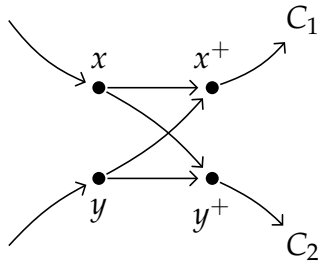


Figura 3.17: El vértice x es ex-singular con respecto a C_2 e y es ex-singular con respecto a C_1, los dos vértices pertenecen a la misma partición. Se forma el ciclo $C_2[y^+, y] \cup (y, x^+) \cup C_1[x^+, x] \cup (x, y^+)$

Caso b) C_1 y C_2, tienen vértices in-singulares.

Sean x un vértice in-singular de C_1 e y un vértice in-singular de C_2. Esos vértices pertenecen a la misma partición, porque no pueden ser adyacentes, entonces tenemos que $x^- \to y$ e $y^- \to x$, con ello se forma el ciclo hamiltoniano:

$$C_2[y, y^-] \cup (y^-, x) \cup C_1[x, x^-] \cup (x^-, y).$$

Véase la figura 3.18.

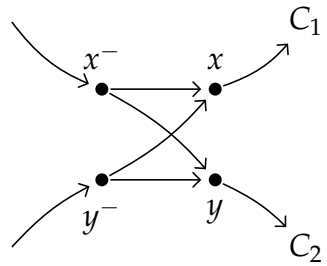


Figura 3.18: El vértice x es in-singular con respecto a C_2 e y es in-singular con respecto a C_1, los dos vértices pertenecen a la misma partición. Se forma el ciclo $C_2[y, y^-] \cup (y^-, x) \cup C_1[x, x^-] \cup (x^-, y)$.

■

El teorema 3.7 proporciona condiciones suficientes para que torneos multipartitos en general sean hamiltonianos. Y en los resultados siguientes se aplica el teorema 3.7 para obtener información de hamiltonicidad en DMS que no cumplen todas las condiciones del teorema.

Teorema 3.7
Si D es una digráfica multipartita semicompleta fuerte que contiene un buen factor de ciclos $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$ $(t \geq 1)$, entonces D tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración. La demostración se sigue por inducción sobre el número de ciclos en el factor.

a) Para $t = 1$ es trivial y para el caso $t = 2$ queda demostrado con el lema 3.6.

b) Supongamos que si D' es una DMS, cumple con las hipótesis del teorema y su factor de ciclos tiene $t - 1$ elementos, entonces D' es hamiltoniana. Demostraremos que si el factor de D es $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$, entonces D tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración. La subdigráfica inducida $D\langle C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{t-1}\rangle$ tiene un factor de $t - 1$ ciclos. Notemos que es buen factor ya que un subconjunto de elementos de un buen factor también lo es, de ahí que es fuerte. Por lo tanto

al aplicar la hipótesis inductiva, tenemos que la subdigráfica tiene un ciclo hamiltoniano, llamemos H a tal ciclo.

Si H y C_t es un buen factor, por el lema 3.6, D tiene un ciclo hamiltoniano.

Si H y C_t no es un buen factor en D entonces, por la definición de buen factor, los dos ciclos tienen vértices singulares y por ser D fuerte tanto en C_t como en H hay vértices no-singulares. Si suponemos, sin pérdida de generalidad, que H tiene vértices ex-singulares con respecto a C_t (y por lo tanto C_t tiene vértices in-singulares con respecto a H) y denotemos a los subconjuntos de vértices como sigue (véase la figura 3.19):

- $V(H) = E \cup N$, donde E es el subconjunto de vértices ex-singulares y N el subconjunto de vértices no-singulares de H con respecto a C_t.

- $V(C_t) = I \cup S$, donde I es el subconjunto de vértices in-singulares y S el subconjunto de vértices no-singulares con respecto a H.

Ninguno de los cuatro subconjuntos es vacío por el argumento antes expuesto.

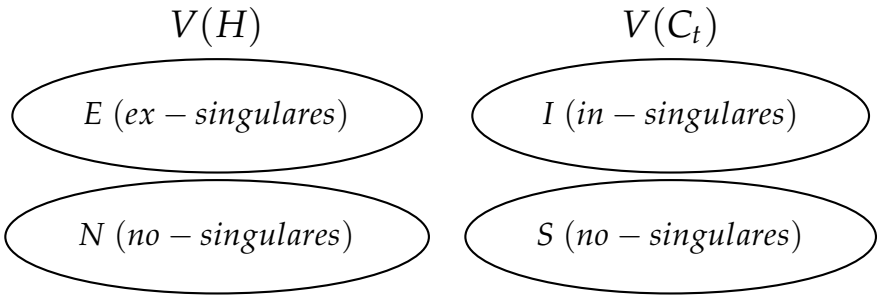


Figura 3.19: Agrupación de los vértices de H y C_t. Cada subconjunto es no vacío (H y C_t no es un buen factor).

Por hipótesis de inducción existe un ciclo hamiltoniano Q contenido en $D\langle\, C_2 \cup \ldots \cup C_t \,\rangle$. Como la digráfica inducida tiene un buen factor formado por $t-1$ ciclos, entonces es fuertemente conexa.

Si C_1 contiene solo vértices de N, entonces son no-singulares con respecto a Q (véase la figura 3.20) y por el lema 3.6 D es hamiltoniana.

Como C_1 contiene también vértices de E y por ser C_1 y C_t elementos de un buen factor, entonces existe un vértice $x \in V(C_t)$ ex-singular con respecto a C_1 y x pertenece necesariamente a S, ya que un vértice ex-singular de C_t

con respecto a C_1 no puede ser in-singular con respecto a H (véase la figura 3.21). El vértice x pertenece a Q y también es ex-singular con respecto a C_1, por lo tanto $H \cup C_t$ es un buen factor de D y por el lema 3.6, D tiene un ciclo hamiltoniano.

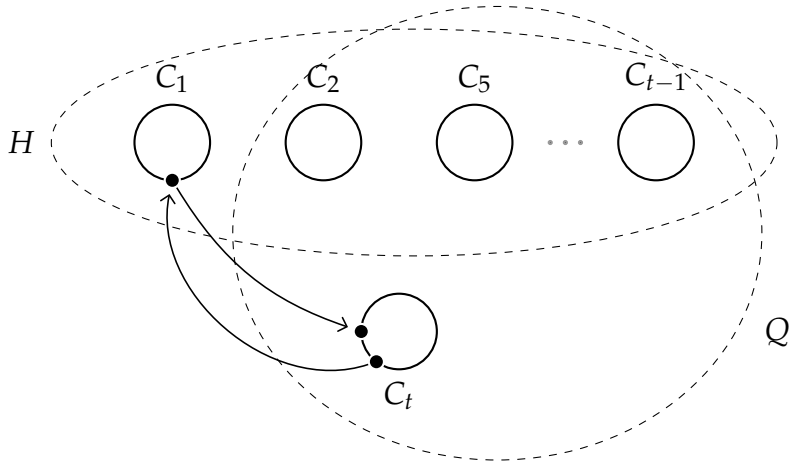


Figura 3.20: Los vértices no-singulares en C_1 con respecto a C_t también son no-singulares con respecto a Q.

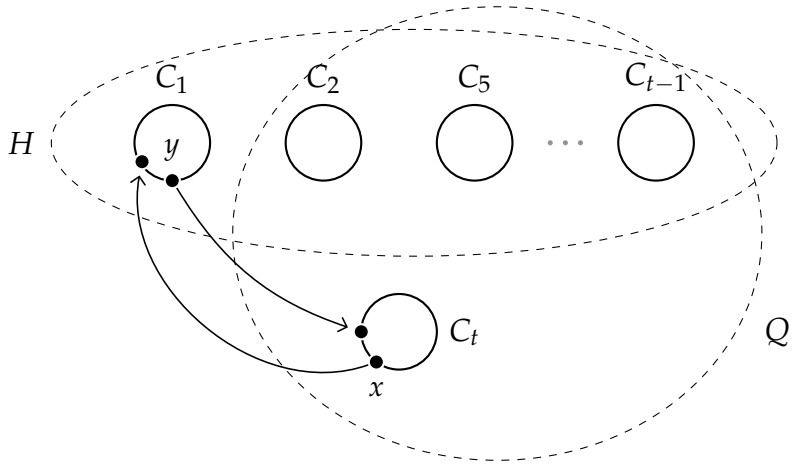


Figura 3.21: Hay un vértice y en C_1 ex-singular con respecto a C_t y por ser los dos ciclos elementos de un buen factor, entonces hay un vértice x en $V(C_t)$ ex-singular con respecto a C_1; $x \in S$ ya que un vértice ex-singular de C_t con respecto a C_1 no puede ser in-singular con respecto a H.

■

El recíproco del teorema 3.7 no es necesariamente cierto, un contraejemplo lo encontramos en la figura 2.9 [1], donde tenemos una digráfica semicompleta

[1] Página 31

3 - partita, fuerte con un factor de ciclos $C_1 \cup C_2$. Dicha digráfica es hamiltoniana pero $C_1 \cup C_2$ no es buen factor, ya que todos los vértices son no-singulares excepto dos: u_2 es ex-singular con respecto a C_2 y u_3 es in-singular con respecto a C_1.

Teorema 3.8
Una digráfica multipartita semicompleta D tiene una trayectoria hamiltoniana si y solo si tiene un casi-factor.

Demostración.
Si D tiene una trayectoria hamiltoniana P, entonces D tiene un casi-factor formado solo por la trayectoria P.

Para demostrar la suficiencia del teorema vamos a dividir el análisis en dos casos: cuando el casi-factor de D contiene una trayectoria P y un ciclo; y cuando contiene una trayectoria P y más de un ciclo.

Caso 1. $P \cup C$ es un casi-factor de D.

Demostraremos que existe una trayectoria P' que pasa por todos los vértices de D. Sean u y v los vértices inicial y final de P respectivamente.

Caso a) Si u es no-singular o es in-singular con respecto a C.

Existe un vértice x en el ciclo tal que $u \to x$ y se forma la trayectoria hamiltoniana $C[x^+, x] \cup P$.

Caso b) Si v es no-singular o es ex-singular con respecto a C.

Existe un vértice y en C tal que $y \to v$ que forma la trayectoria hamiltoniana $C[y^+, y] \cup P$. En la figura 3.22 se ilustran los casos $a)$ y $b)$.

Caso c) Si u es ex-singular y v es in-singular con respecto a C.

Sea D' la digráfica multipartita semicompleta obtenida al agregar un nuevo vértice w a D, así como la flecha $w \to u$ y las flechas $z \to w$ para todo vértice z en D excepto por u. El vértice w es el único vértice de una nueva parte, los ciclos C y C' (formados por $P[u, v] \cup (v, w) \cup (w, u)$), son un factor de ciclos de D' (véase la figura 3.23). Pero como el ciclo C' tiene vértices tanto ex-singulares como in-singulares con respecto a C, se sigue que son un buen factor de ciclos.

Por el lema 3.6, D' posee un ciclo hamiltoniano y al quitar el vértice w de dicho ciclo, obtenemos una trayectoria hamiltoniana en D.

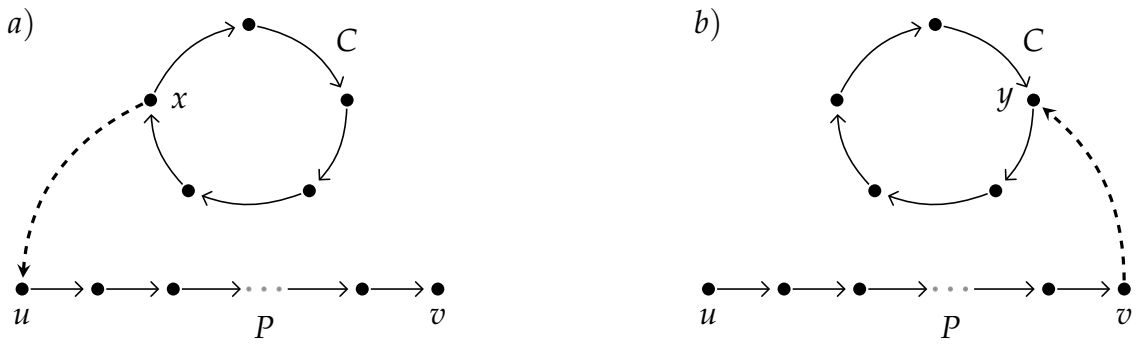


Figura 3.22:
a) El vértice u es no-singular o in-singular con respecto a C, se forma la trayectoria hamiltoniana $C[x^+, x] \cup P$, para algún vértice x de C y en donde x^+ es el sucesor de x en el ciclo.
b) El vértice v es no-singular o ex-singular con respecto a C, se forma la trayectoria hamiltoniana $C[y^+, y] \cup P$, para algún vértice y de C y en donde y^+ es el sucesor de y en el ciclo.

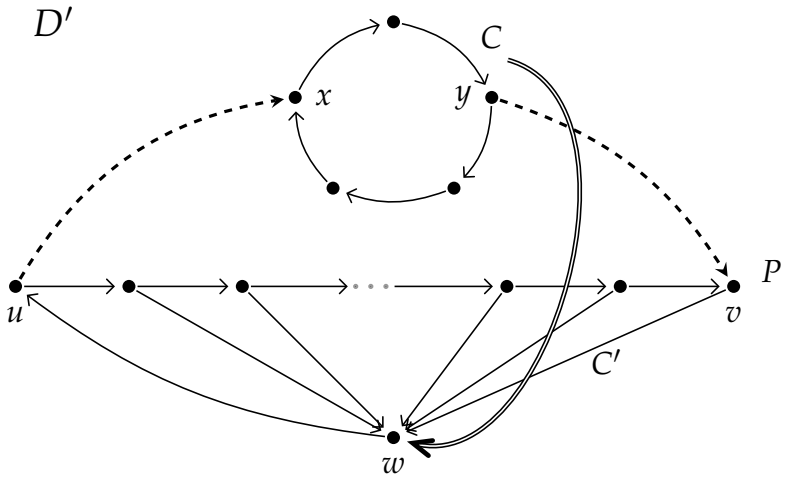


Figura 3.23: El vértice u es ex-singular y el vértice v es in-singular con respecto a C. Agregamos a D el vértice w para formar el ciclo C'.
El vértice x en C no es ex-singular y y en C no es in-singular con respecto a C'.

Caso 2. $P \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ es un casi-factor de D ($k > 1$).

Al aplicar recursivamente el caso 1) a la subdigráfica inducida por la trayec-

toria y uno de los ciclos del casi-factor, obtenemos la trayectoria hamiltoniana buscada. ∎

Lema 3.9
Sea D una digráfica multipartita semicompleta y fuertemente conexa, que contiene una subdigráfica 1-dirregular $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$ tal que para cada i, j $(1 \leq i \leq j \leq t)$ se tiene que $C_i \Rightarrow C_j$ o $C_j \Rightarrow C_i$. Entonces D tiene un ciclo de longitud al menos $|V(\mathcal{F})|$.

Demostración. Mostraremos que en D existe un ciclo que pasa por todos los vértices de $\mathcal{F}$ y por lo tanto tendrá longitud al menos el orden de $\mathcal{F}$.

Sea $T(\mathcal{F})$ el torneo que se obtiene al condensar C_i en c_i. Notemos que $c_1, c_2, \ldots, c_t$ son sus vértices y $c_i \to c_j$ si y solo si $C_i \Rightarrow C_j$ en D. Sea H la subdigráfica inducida por los vértices de $\mathcal{F}$ en D y W es una parte de D tal que C_1 pasa por ella.

Consideremos dos casos:

Caso 1. $T(\mathcal{F})$ es fuerte.

Notemos que $T(\mathcal{F})$ tiene un ciclo hamiltoniano. Sin pérdida de generalidad supongamos que dicho ciclo hamiltoniano es $(c_1, c_2, \ldots, c_t, c_1)$ en $T(\mathcal{F})$ (véase la figura 3.24); por lo tanto $C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_t \Rightarrow C_1$ en D.

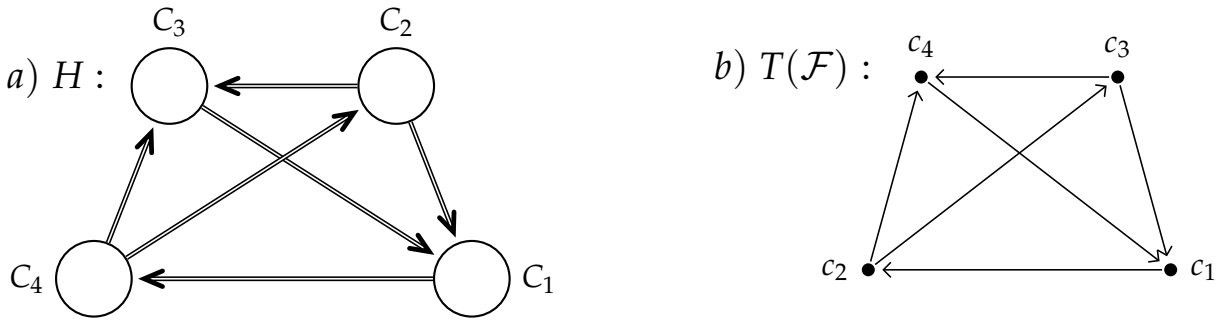


Figura 3.24:
a) $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ es una subdigráfica 1-dirregular y H es $D\langle C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \rangle$.
b) $T(\mathcal{F})$ es fuerte y tiene un ciclo hamiltoniano. Reenumeramos los vértices de forma tal que la numeración corresponda con el recorrido que hace el ciclo hamiltoniano.

Sea $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ una colección de vértices donde a $w_i \in V(C_i)$ lo seleccionamos de la siguiente forma:

i) Para los ciclos C_i que pasan por W, elijamos un vértice $w_i \in V(C_i) \cap W$ (por la forma en cómo escogimos W sabemos que C_1 pasa por W).

ii) En los ciclos donde tanto C_i como C_{i+1} no pasan por W, elijamos un vértice w_i tal que ${w_i}^-$ y w_{i+1} no estén en la misma parte ($1 < i < t$).

iii) Si C_i no pasa por W pero C_{i+1} sí pasa por W, elijamos como w_i a cualquier vértice de C_i. En particular w_t es cualquier vértice de C_t.

Observación: Existe la flecha ${w_i}^- \to w_{i+1}$ con ${w_i}^- \in V(C_i)$ y $w_{i+1} \in V(C_{i+1})$ donde $1 \leq i < t$. Si C_t pasa por W, entonces existe ${w_t}^- \to w_1$. Si C_t no pasa por W, entonces cualquier vértice de C_t es adyacente a w_1 y existe la flecha ${w_t}^- \to w_1$.

Obtenemos en H el ciclo hamiltoniano:

$$C_1[w_1, {w_1}^-] \cup C_2[w_2, {w_2}^-] \cup \ldots \cup C_t[w_t, {w_t}^-] \cup ({w_t}^-, w_1).$$

Por lo tanto D tiene un ciclo de longitud $|V(\mathcal{F})|$.

Caso 2. $T(\mathcal{F})$ no es fuerte.

De acuerdo al teorema 2.3 [2] que demostramos en el capítulo 2, $T(\mathcal{F})$ tiene una colección ordenada de componentes fuertes $X_1, X_2, \ldots, X_s$ tal que $X_i \Rightarrow X_j$ si $i < j$. Nombremos a $\mathcal{L}$ como la subdigráfica 1-dirregular inducida por la colección de componentes. Notemos que $V(\mathcal{L}) = V(\mathcal{F})$. Definamos a $T(\mathcal{L})$ (conocido como la condensación de $T(\mathcal{F})$) como el conjunto de vértices $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ donde Z_i corresponde a X_i para toda $i = 1, \ldots, s$ condenso X_i en Z_i. Entonces $T(\mathcal{L})$ tiene una trayectoria hamiltoniana y si renombramos los vértices podemos expresarla como $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_s)$, donde cada Z_i es un ciclo de $\mathcal{L}$. Como $T(\mathcal{L})$ es acíclica, implica que no hay flechas que vayan de Z_j a Z_i con $i < j$ (véase la figura 3.25).

[2] Página 24

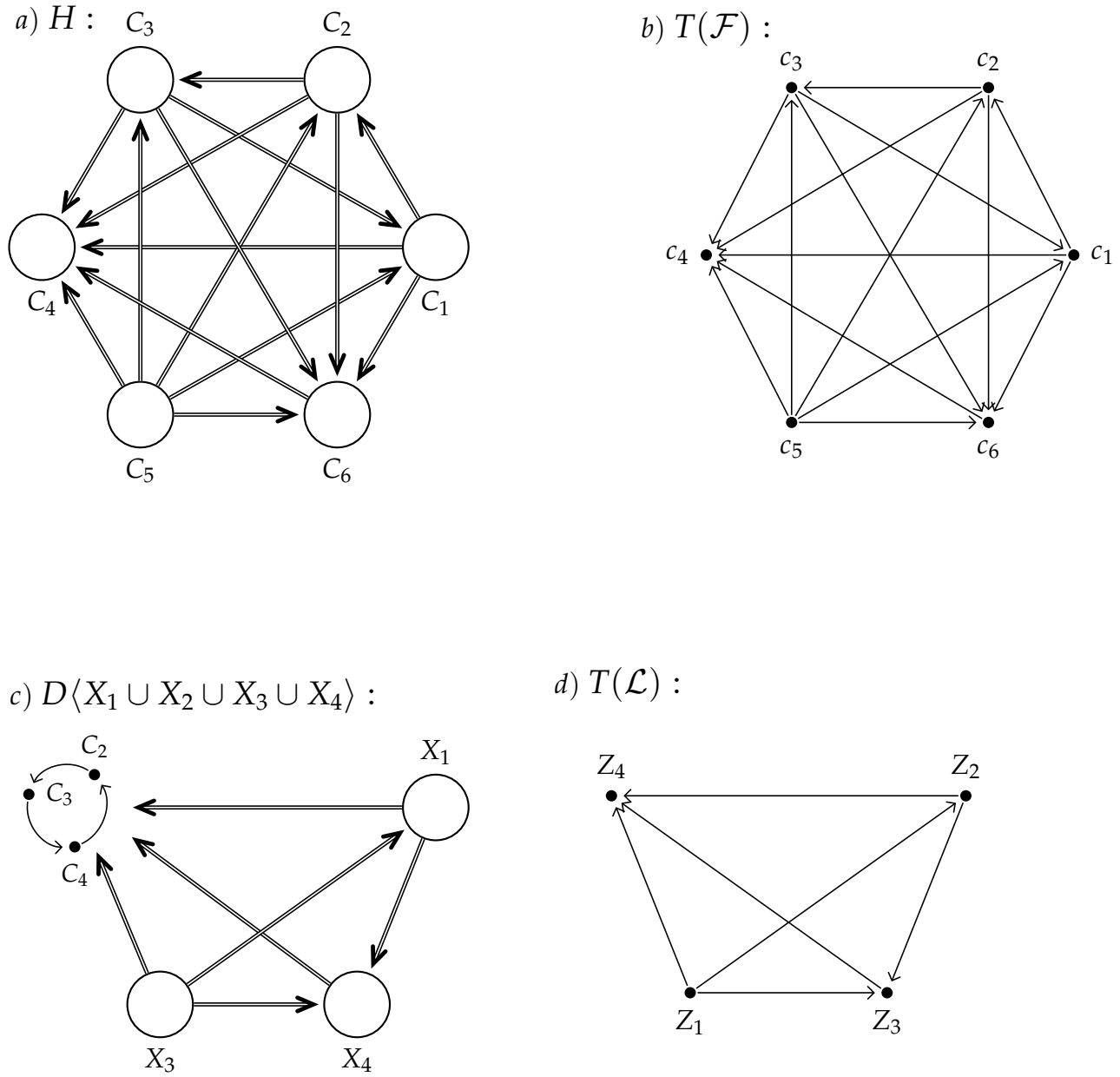


Figura 3.25:
a) $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$.
b) $T(\mathcal{F})$ no es fuerte. Los ciclos C_1, C_2 y C_3 forman una colección de ciclos que inducen una componente fuerte.
c) $\mathcal{L} = \langle X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \rangle$ es una subdigráfica 1-dirregular.
d) $T(\mathcal{L})$ no tiene ciclos. Se renombran los vértices para ver la trayectoria hamiltoniana de la forma (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4).

Por ser D fuerte, existen trayectorias que van de los vértices de Z_s a vértices de Z_i $(i < s)$ y para estas trayectorias son necesarias flechas que lleven el sentido opuesto al que tiene la subdigráfica inducida por $\mathcal{F}$, entonces necesariamente dichas trayectorias contienen por lo menos un vértice en el complemento de $V(\mathcal{F})$. Así podemos encontrar una trayectoria P que va de algún vértice de Z_s hacia un vértice en Z_q, donde $q < s$, siendo q el menor posible, tal que los vértices intermedios de P no estén en $\mathcal{F}$.

Sean $u_q \in V(Z_q)$ y $u_s \in V(Z_s)$ los extremos de P análogamente al ciclo del caso 1), construyamos una trayectoria que recorra todos los vértices de $Z_q \cup \ldots \cup Z_s$. Así tenemos la trayectoria:

$$Z_q[u_q, {u_q}^-] \cup Z_{q+1}[u_{q+1}, {u_{q+1}}^-] \cup \ldots \cup Z_s[{u_s}^+, u_s].$$

Si insertamos P a esta nueva trayectoria, obtenemos un ciclo:

$$Z^* = Z_q[u_q, {u_q}^-] \cup Z_{q+1}[u_{q+1}, {u_{q+1}}^-] \cup \ldots \cup Z_s[{u_s}^+, u_s] \cup P[u_s, u_q].$$

Véase la figura 3.26.

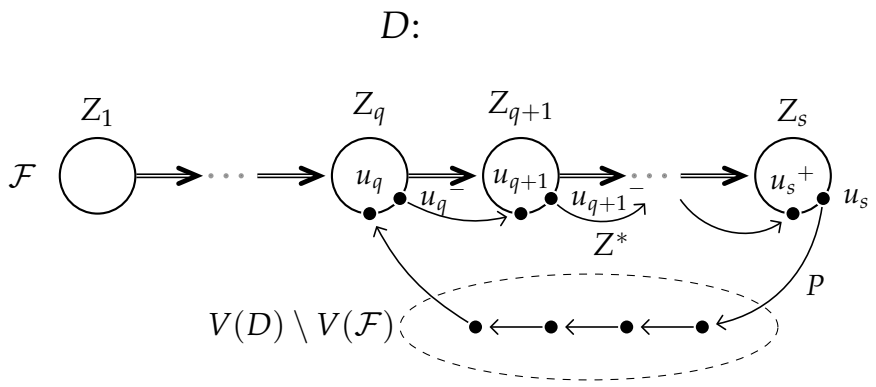


Figura 3.26: $P(Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_q \cup \ldots \cup Z_s)$ es una trayectoria hamiltoniana en $\mathcal{F}$.

D es fuerte, existe la trayectoria $P(u_s, u_q)$, los vértices intermedios pertenecen a $V(D) \setminus V(\mathcal{F})$. Es posible reemplazar los ciclos $P \cup Z_q \cup \ldots \cup Z_s$ por un solo ciclo Z^*.

Si reemplazamos los ciclos $Z_q, \ldots, Z_s$ por la subdigráfica 1-dirregular Z^*, obtenemos un número menor de ciclos $Z_1, \ldots, Z_{q-1}, Z^*$, que es una subdigráfica

de D y contiene los vértices de $\mathcal{F}$, más otros que no están en $\mathcal{F}$.

Procediendo recursivamente habremos construido un ciclo que pasa por todos los vértices de $\mathcal{F}$ y vértices que no están en $\mathcal{F}$, por lo tanto existe un ciclo en D de longitud al menos $|V(\mathcal{F})|$. ∎

Lema 3.10
Sea D una digráfica multipartita semicompleta fuerte tal que puede ser partida en dos ciclos C y C' que contienen a todos los vértices de D. Entonces D tiene un ciclo de longitud al menos $n-1$ que incluye a todos los vértices de C.

Demostración. La demostración la dividimos en dos casos.

Caso 1. C y C' son un buen factor de D.

Por el teorema 3.7, D es hamiltoniana y por lo tanto tiene un ciclo de longitud al menos $n-1$.

Caso 2. C y C' no son un buen factor de D.

Como no es un buen factor, ambos ciclos tienen vértices singulares con respecto al otro. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que todos los vértices singulares de C con respecto a C' son ex-singulares y que todos los vértices singulares de C' son in-singulares con respecto a C. Como D es fuertemente conexa, tanto C como C' deben tener vértices no-singulares.

Tomemos x un vértice de C que sea no-singular con respecto a C', tal que su predecesor x^- en C sea ex-singular e y un vértice en C' que domine a x. Si x^- es adyacente a y^+, entonces D tiene un ciclo hamiltoniano:

$$C[x, x^-] \cup (x^-, y^+) \cup C'[y^+, y] \cup (y, x).$$

Si x^- no es adyacente a y^+ entonces ambos vértices pertenecen a la misma parte; por lo tanto x^- e y^{++} pertenecen a partes distintas y como x^- es ex-singular, tenemos que $x^- \to y^{++}$ (véase la figura 3.27). Entonces D tiene un ciclo de longitud $n-1$ que contiene a todos los vértices de C y a los de C', menos el vértice y^+:

$$C[x, x^-] \cup (x^-, y^{++}) \cup C'[y^{++}, y] \cup (y, x). \ ∎$$

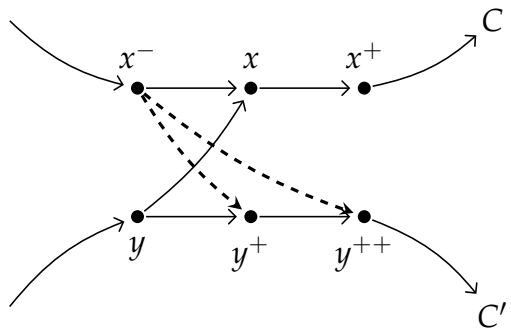


Figura 3.27: El vértice x es no-singular con respecto a C' y x^- es ex-singular con respecto a C'; hay flecha de x^- hacia y^+ o hacia y^{++}.

Teorema 3.11
Si D es una digráfica multipartita semicompleta fuerte y contiene una subdigráfica 1-dirregular $\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$ con p vértices ($p \leq n$), entonces para cada ciclo C_s existe un ciclo en D de longitud al menos $p - t + 1$, que pasa por todos los vértices de C_s.

Demostración.
Escojamos un ciclo C_s en $\mathcal{F}$. Si los vértices de algún par de ciclos de $\mathcal{F}$ inducen una subdigráfica fuerte en D entonces, por el lema 3.10, existe un ciclo C^* que excluye a lo más a un vértice de uno de los dos ciclos, evitando que sea de C_s. Con los ciclos restantes repetimos el proceso anterior tantas veces como sea necesario, cuidando que los vértices de C_s permanezcan en los nuevos ciclos, hasta llegar a cualquiera de los dos casos siguientes:

Caso a) Un solo ciclo que habrá perdido a lo más $t - 1$ vértices, y por lo tanto la longitud del ciclo es por lo menos $p - (t - 1)$, que por construcción contiene a los vértices de C_s.

Caso b) Un conjunto de ciclos $C'_1, C'_2, \ldots, C'_k$, tales que ningún par induzca digráficas fuertes y tal que para alguna i, los vértices de C_s estén en C'_i. Dicho conjunto de ciclos ha perdido a lo más $t - k - 1$ vértices. Las flechas entre cada par de ciclos C'_i y C'_j ($i \neq j$) van de C'_i a C'_j o de C'_j a C'_i (si hay flechas en ambas direcciones entonces C'_i y C'_j inducen una subdigráfica fuerte, lo cual no puede suceder). Aplicando el lema 3.9, obtenemos un ciclo con todos los vértices de $C'_1, C'_2, \ldots, C'_k$, de longitud por lo menos $p - t + k$, que es mayor o igual a $p - t + 1$. ∎

Corolario 3.12
Si una digráfica multipartita semicompleta D es fuerte y tiene una subdigráfica casi 1-dirregular $\mathcal{F} = P \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$ con p vértices, donde la trayectoria es $P = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$, entonces D contiene una trayectoria de longitud al menos $p - t - 1$, que comienza por x_0.

Demostración.
Agreguemos un vértice w a D junto con las flechas $z \rightarrow w$ para todo z en $\mathcal{F}$ excepto x_0 y la flecha $w \rightarrow x_0$. De esta forma obtenemos la digráfica D' que es multipartita con la misma partición que D, salvo que w queda en una parte, un ciclo $C' = P \cup (y, w)$ en D' y una subdigráfica 1-dirregular $\mathcal{F}' = C' \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$ (con $p + 1$ vértices) en D' (véase la figura 3.28).

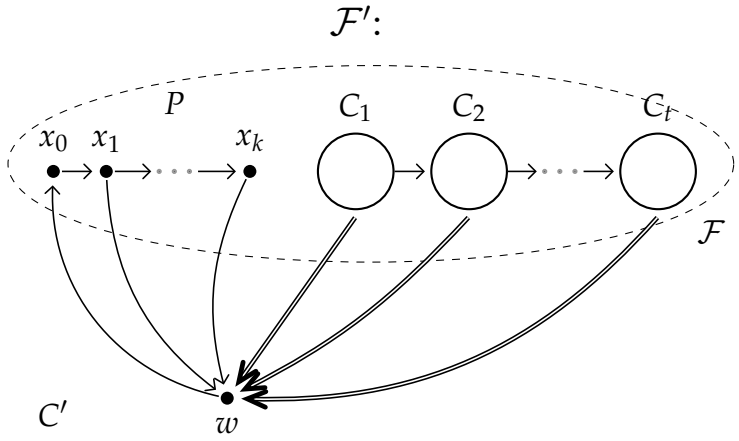


Figura 3.28: Al agregar el vértice w a D tal que w domine a x_0 ys los demás vértices de D dominen a w, formamos la digráfica D' que contiene un ciclo C' que pasa por los vértices de P y por w. Con esto tenemos una subdigráfica 1-dirregular de D' a la que llamaremos $\mathcal{F}'$ formada por los ciclos $C' \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_t$.

Por el teorema 3.11, tenemos que en D' existe un ciclo C'' de longitud al menos $(p + 1) - (t + 1) + 1$, que incluye a todos los vértices de C'. Si recorremos a C'' a partir de w, el vértice que debe ser sucesor es x_0, ya que éste es el único vértice que absorbe a w. Entonces al quitar el vértice w de C'' nos queda una trayectoria en D' y también en D que inicia en x_0 y tiene como longitud al menos $p - t + 1 - 2$. ∎

El siguiente teorema nos proporciona las condiciones suficientes y necesarias para que un torneo bipartito sea hamiltoniano.

Teorema 3.13
Una digráfica bipartita semicompleta B es hamiltoniana si y solo si es fuerte y tiene un factor.

Demostración. La demostración de la necesidad es inmediata, ya que si B es hamiltoniana, entonces es fuerte y tiene un factor de ciclos que contiene únicamente un ciclo.

Para demostrar la suficiencia, recordemos que los ciclos en una digráfica bipartita siempre tienen longitud par.

Sean C y C' dos ciclos del factor de B, donde s y t son el número de vértices de C y C' respectivamente. Si los dos ciclos inducen una subdigráfica fuerte, entonces aplicamos el lema 3.10 para obtener un ciclo cuya longitud es $s+t$ o $s+t-1$. La segunda opción nos resulta un número impar y ya que s y t son pares, entonces la longitud del ciclo es $s+t$, por lo tanto contiene a todos los vértices del conjunto $V(C) \cup V(C')$.

Aplicando recursivamente el mismo argumento llegaremos a un ciclo hamiltoniano o a un factor $\mathcal{F}'$ de ciclos $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$, donde $X_i \Rightarrow X_j$ o $X_j \Rightarrow X_i$ (para todo $i \neq j$). Apliquemos el lema 3.9 al factor anterior y concluimos que hay un ciclo de longitud $|V(\mathcal{F}')|$, *i.e.*, hamiltoniano y por lo tanto B es hamiltoniana. ∎

Y por último, en el teorema 3.14 nos indica otra subclase de DMS en donde existen condiciones suficientes y necesarias para tener un ciclo que recorra a todos sus vértices.

Teorema 3.14
Una digráfica multipartita semicompleta y ordinaria D, es hamiltoniana si y solo si es fuerte y tiene un factor.

Demostración.
Si D es hamiltoniana, entonces es fuerte y tiene un factor formado por un solo ciclo. Con esto queda demostrada una parte del teorema, para la suficiencia tenemos lo siguiente.

Sea $\mathcal{F}$ el factor de ciclos de D y t el número de ciclos de $\mathcal{F}$. Notemos que cada subdigráfica inducida por un subconjunto de ciclos de $\mathcal{F}$ es también ordinaria, ya que la dirección de las flechas entre los vértices de la subdigráfica es la misma en D. Si $t = 1$, ya terminamos, en otro caso procedemos como sigue:

Tomemos un par de ciclos C y C' de $\mathcal{F}$, que induzcan una subdigráfica fuerte en D. Supongamos que existen dos vértices x e y en la misma parte, tales que $x \in V(C)$ e $y \in V(C')$. Como x va a x^+ entonces y también va a x^+, por ser ordinaria la subdigráfica. De igual forma ocurre con la existencia en D de la flecha $x \to y^+$. Por lo tanto se obtiene el ciclo:

$$C[x^+, x] \cup (x, y^+) \cup C'[y^+, y] \cup (y, x^+)$$

que recorre a todos los vértices de $C \cup C'$. La construcción de dicho ciclo se observa en la figura 3.29.

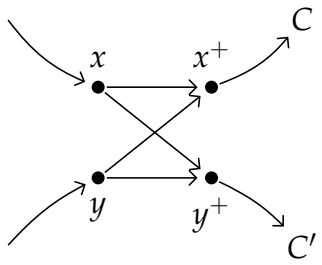


Figura 3.29: Los vértices x e y no son adyacentes. Con las flechas punteadas o las no punteadas, existe un ciclo que contiene al conjunto $V(C) \cup V(C')$.

Si entre C y C' no hay vértices que pertenezcan a la misma parte, también se puede construir un ciclo hamiltoniano para la subdigráfica $D\langle C \cup C' \rangle$; la demostración de esta afirmación es similar a la del lema 3.10, la cual se reproduce brevemente a continuación.

Sea $D' = D\langle C \cup C' \rangle$. Si C y C' son un buen factor de D', entonces por el teorema 3.7 D' es hamiltoniana y tiene un ciclo de longitud $|V(C) \cup V(C')|$. Si no son un buen factor entonces C y C' tienen vértices tanto singulares como no-singulares (por tratarse de una digráfica fuerte) con respecto al otro. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los vértices singulares de C con respecto a C' son únicamente vértices ex-singulares y los vértices singulares de C' con respecto a C son solo in-singulares.

Sea $x \in V(C)$ un vértice no-singular con respecto a C', tal que su predecesor x^- en C sea ex-singular y sea y el vértice de C' adyacente a x dado por la flecha $y \to x$. El vértice x^- es adyacente a y^+ pues no pertenecen a la misma partición, entonces D' tiene un ciclo hamiltoniano:

$$C[x, x^-] \cup (x^-, y^+) \cup C'[y^+, y] \cup (y, x).$$

Véase la figura 3.30.

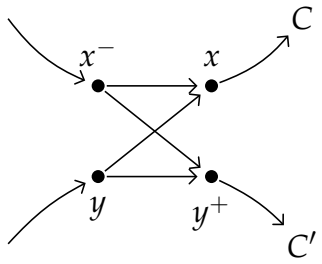


Figura 3.30: El vértice x^- es ex-singular con respecto a C' y x es no-singular con respecto a C'.

En conclusión, cada par de ciclos que induzcan subdigráficas fuertes contienen un ciclo que pasa por todos sus vértices. Continuamos el proceso hasta llegar a un solo ciclo (con lo cual terminaríamos la demostración) o hasta que ningún par de ciclos sea fuerte. Éste último caso se traduce en que no hay flechas en ambas direcciones entre dos ciclos, *i.e.*, tendríamos las condiciones del lema 3.9, con lo cual D es hamiltoniana. ∎

Conclusiones

Los teoremas 2.5 [3], 3.13 [4] y 3.14 [5] nos muestran que para subclases de DMS encontramos condiciones suficientes y necesarias para la existencia de ciclos hamiltonianos. Las subclase son:

- 1. Bipartitas.
- 2. Torneos (donde el orden n es igual al número de partes de la partición).
- 3. Ordinarias.

El teorema 3.7 [6] proporciona condiciones suficientes para la hamiltonicidad en digráficas multipartitas semicompletas en general. Al aplicarlo en DMS que no cumplen con todas las condiciones del teorema, nos da información sobre la existen de trayectorias hamiltonianas y ofrece un mejor límite inferior de la longitud del ciclo más largo.

[3] Página 27
[4] Página 58
[5] Página 58
[6] Página 46

Bibliografía

[1] Bang-Jensen, J., Gutin. G. y Huang, J. (1996). A sufficient condition for a semicomplete multipartite digraph to be Hamiltonian. *Discrete Mathematics, 161*, 1-10.

[2] Bang-Jensen, J. y Gutin. G. (1998). Generalizations of Tournaments: A Survey. *Journal of Graph Theory, 28*, 171-202.

[3] Behzad, M., Chartrand, G. y Lesniak-Foster, L. (1979). *Graphs & Digraphs*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

[4] Bondy, J. A. y Murty U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications*. Estados Unidos de América: Elsevier Science Publishing.

[5] Harary, F. (1972). *Graph Theory*. Estados Unidos de América: Addison-Wesley.