UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PSEUDO COMPLEMENTOS EN LA RETÍCULA DE CLASES DE TORSIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

CÉSAR ALEJANDRO ARELLANO RUIZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES
2012

Pseudo complementos en la retícula de clases de torsión

César Alejandro Arellano Ruiz

Director de tesis: Dr. José Ríos Montes

Índice general

Introducción

Dentro de la década de los sesenta del siglo XX, S. E. Dickson desarrolló un importante concepto matemático que permitió dar un giro muy original al estudio de anillos atravez de las categorías de módulos sobre un anillo: el concepto de *Teorías de Torsión*. El impulso logrado por este concepto se centró principalmente en las teorías de torsión hereditarias a las que varios matemáticos de reconocida calidad han dedicado una gran cantidad de trabajos.

La presente tesis tiene como tema central el estudio del artículo *"Pseudo complementos en la retícula de clases de Torsión"* publicado por los investigadores Gary F. Birkenmeier y Richard Wiegandt.

En este trabajo se desarrolla un cálculo de operadores sobre clases de R-módulos. Este cálculo de operadores es aplicado a clases de torsión y clases libres de torsión para obtener caracterizaciones de complementos y pseudo complementos en la retícula de clases de torsión de un anillo R. Ejemplos son provistos para ilustrar y delimitar los resultados.

En el capítulo 1, se usa el cálculo de operadores para obtener una clase, $\mathbf{HE}\gamma$, la cual es una precursora para una clase de torsión o una clase libre de torsión. Posteriormente, esta clase juega un papel fundamental en el trabajo.

Todos los anillos son asociativos con uno y R siempre denota un anillo. Todos los módulos serán R-módulos derechos y *Mod-R* denotará a esta categoría.

Sea $M \in$ *Mod-R* entonces $K \leq M(K \lhd M)$ denota que K es un submódulo (esencial) de M. Sea $X \leq M$, un *pseudo complemento* de X en M es cualquier $K \leq M$ máximo con respecto a la propiedad $X \cap K = 0$; se dice que X es un *submódulo esencialmente cerrado* de M si X no tiene una extensión esencial propia dentro de M. Usamos la notación $K \hookrightarrow M$ para denotar que K es isomorfo a un submódulo de M.

$E(M)$ simboliza la cápsula inyectiva de M. Los símbolos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ representan a los enteros, los enteros módulo n y al grupo cuasicíclico. Se le llama a una clase γ de R-módulos *estable* si para cada $M \in \gamma$ existe $I \in \gamma$ tal que $M \hookrightarrow I$ e I es inyectivo. Una clase τ de R-módulos es una *clase de torsión* si es cerrada bajo cocientes, sumas directas y extensiones ($\tau(M)$ denota $\sum\{X \leq M | X \in \tau\}$). Una clase ϕ de R-módulos es una *clase libre de torsión* si es cerrada bajo submódulos, productos directos y extensiones. Una clase θ de R-módulos es una *clase TTF* si es una clase de torsión y una clase libre de torsión.

Preliminares

Sea γ una clase de R-módulos, definimos los siguientes operadores:

$\mathbf{H}\gamma = \{M \in Mod - R \mid M \hookrightarrow X \in \gamma\}$
$\mathbf{E}\gamma = \{M \in Mod - R \mid X \lhd M$ para algún $X \in \gamma\}$
$\mathbf{I}\gamma = \gamma \cup \{E(M) \mid M \in \gamma\}$
$\mathbf{P}\gamma$ es la clase de todos los productos directos de elementos de γ
$\mathbf{S}\gamma$ es la clase de todos los productos subdirectos de elementos de γ
$\mathbf{h}\gamma$ es la mayor subclase de γ cerrada bajo cocientes
$\mathbf{T}\gamma = \{M \in Mod - R \mid M/X \in \gamma$ implica que $X = M\}$
$\mathbf{L}\gamma = \{M \in Mod{-}R \mid$ toda imágen homomorfa de M distinta de cero tiene un submódulo distinto de cero en $\gamma\}$
$\mathbf{F}\gamma = \{M \in Mod - R \mid X \leq M$ y $X \in \gamma$ implica que $X = 0\}$
$\mathbf{s}\gamma = \{M \in Mod - R \mid M$ es un módulo simple y $M \in \gamma\}$

Observe que **H, E, I, P, S, h, s** y **L** son operadores idempotentes. También, $\mathbf{L}\gamma$ siempre es una clase de torsión. Si γ es una clase cerrada bajo cocientes, entonces $\gamma \subseteq \mathbf{L}\gamma$ y $\mathbf{L}\gamma$ es la menor clase de torsión que contiene a γ. Más aún, si además γ es hereditaria, también lo es $\mathbf{L}\gamma$. Nótese que si γ es una clase hereditaria, entonces $\mathbf{T}\gamma$ es una clase de torsión, la mayor con respecto a $\gamma \cap \mathbf{T}\gamma = \{0\}$.

H, E, I, P, S, h, s y **L** son operadores idempotentes:

- $\mathbf{H}\gamma = \mathbf{H}(\mathbf{H}\gamma)$:
  $\subseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{H}\gamma$. $M \hookrightarrow M \in \mathbf{H}\gamma$
  $\therefore M \in \mathbf{H}(\mathbf{H}\gamma)$.
  $\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{H}(\mathbf{H}\gamma)$ entonces $\exists X \in \mathbf{H}\gamma$ y $Y \in \gamma$ tal que $M \hookrightarrow X$ y $X \hookrightarrow Y$, de donde $M \hookrightarrow Y \in \gamma$
  $\therefore M \in \mathbf{H}\gamma$
  $\therefore \mathbf{H}\gamma = \mathbf{H}(\mathbf{H}\gamma)$.
- $\mathbf{E}\gamma = \mathbf{E}(\mathbf{E}\gamma)$:
  $\subseteq\rfloor$ Nótese que $\gamma \subseteq \mathbf{E}\gamma$ ya que para todo $M \in \gamma,\ M \lhd M$.
  Sea $M \in \mathbf{E}\gamma$ entonces $\exists X \in \gamma$ tal que $X \lhd M$. Además tenemos que $\gamma \subseteq \mathbf{E}\gamma$ por lo que $X \in \mathbf{E}\gamma$

$\therefore M \in \mathbf{E}(\mathbf{E}\gamma)$.
$\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{E}(\mathbf{E}\gamma)$, entonces $\exists X \in \mathbf{E}\gamma$ tal que $X \lhd M$ y ya que $X \in \mathbf{E}\gamma$, $\exists Y \in \gamma$ tal que $Y \lhd X$
$\therefore Y \lhd M$
$\therefore M \in \mathbf{E}\gamma$
$\therefore \mathbf{E}\gamma = \mathbf{E}(\mathbf{E}\gamma)$.

- $\mathbf{I}\gamma = \mathbf{I}(\mathbf{I}\gamma)$:
$\mathbf{I}(\mathbf{I}\gamma) = \mathbf{I}\gamma \cup \{E(M) \mid M \in \mathbf{I}\gamma\} = \gamma \cup \{E(M) \mid M \in \gamma\} \cup \{E(M) \mid M \in \mathbf{I}\gamma\}$
Nótese que
$\{E(M)|M \in \mathbf{I}\gamma\} = \{E(M)|M \in \gamma\} \cup \{E(M)|M \in \{E(N)|N \in \gamma\}\}$
pero
$\{E(M)|M \in \{E(N)|N \in \gamma\}\} = \{E(M)|M \in \gamma\}$
por lo que
$\{E(M)|M \in \mathbf{I}\gamma\} = \{E(M)|M \in \gamma\}$
entonces
$$\begin{aligned}\mathbf{I}(\mathbf{I}\gamma) &= \gamma \cup \{E(M)|M \in \gamma\} \cup \{E(M)|M \in \gamma\} \\ &= \gamma \cup \{E(M)|M \in \gamma\} = \mathbf{I}\gamma.\end{aligned}$$
- $\mathbf{P}\gamma = \mathbf{P}(\mathbf{P}\gamma)$:
$\subseteq\rfloor$ Nótese que $\gamma \subseteq \mathbf{P}\gamma$ ya que $M \in \gamma$ es producto directo de una copia de si mismo, por lo que trivialmente $\mathbf{P}\gamma \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{P}\gamma)$.
$\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{P}(\mathbf{P}\gamma)$ entonces $M = \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ para alguna familia $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de módulos de $\mathbf{P}\gamma$.
Para cada $\alpha \in A$ $\exists$ B_α tal que $M_\alpha = \prod_{\beta_\alpha \in B_\alpha} N_{\beta_\alpha}$ donde $\{N_{\beta_\alpha}\}_{\beta_\alpha \in B_\alpha}$ es una colección de módulos de γ.
Consideremos $E = \cup_{\alpha \in A} B_\alpha$, (la unión disjunta) entonces tenemos que $M = \prod_{\delta \in E} N_\delta$
$\therefore M \in \mathbf{P}\gamma$
$\therefore \mathbf{P}\gamma = \mathbf{P}(\mathbf{P}\gamma)$.
- $\mathbf{S}\gamma = \mathbf{S}(\mathbf{S}\gamma)$:
$\subseteq\rfloor$ Para todo $M \in Mod{-}R$ pasa que M es producto subdirecto de él mismo (como producto de una sola copia de M) por lo que trivialmente $\mathbf{S}\gamma \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{S}\gamma)$
$\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{S}(\mathbf{S}\gamma)$ entonces $\exists\{M_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathbf{S}\gamma$ tal que $M \leq \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ es un producto subdirecto. Para cada $\alpha \in A$ existe un conjunto de índices B_α y una familia $\{N_{\beta_\alpha}\}_{\beta_\alpha \in B_\alpha} \subseteq \gamma$ tal que $M_\alpha \leq \prod_{\beta_\alpha \in B_\alpha} N_{\beta_\alpha}$ es un producto subdirecto.
Por el inciso anterior sabemos que $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha \in \mathbf{P}\gamma$ de esta manera sabemos que $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha \cong \prod_{\eta \in E} K_\eta$ para alguna colección $\{K_\eta\} \subseteq \gamma$, de modo que para cada $\eta \in E$, $\exists \alpha \in A$ y $\exists \beta_\alpha \in B_\alpha$

tal que $K_\eta = N_{\beta_\alpha}$.
Por otro lado, $\Pi_\alpha \restriction_M : M \to M_\alpha$ y $\Pi_{\beta_\alpha} \restriction_{M_\alpha} : M_\alpha \to N_{\beta_\alpha}$ son epimorfismos, también sucede que si $N_{\beta_\alpha} = K_\eta$ entonces $\Pi_\eta = \Pi_{\beta_\alpha} \circ \Pi_\alpha : \prod_{\alpha\in A} M_\alpha \to K_\eta$ por lo que $\Pi_\eta|_M : M \to K_\eta$ es un epimorfismo, es decir $M \in \mathbf{S}\gamma$
$\therefore \mathbf{S}\gamma = \mathbf{S}(\mathbf{S}\gamma)$.

- $\mathbf{h}\gamma = \mathbf{h}(\mathbf{h}\gamma)$:
  Por definición del operador $\mathbf{h}$, tenemos que $\mathbf{h}\gamma = \mathbf{h}(\mathbf{h}\gamma)$ ya que $\mathbf{h}\gamma$ ya es una clase cerrada (bajo cocientes).
- $\mathbf{s}\gamma = \mathbf{s}(\mathbf{s}\gamma)$:
  Por definición del operador $\mathbf{s}$, tenemos que
  $\mathbf{s}(\mathbf{s}\gamma) = \{M \in Mod - R \mid M \in \mathbf{s}\gamma,\ M$ es un módulo simple$\}$
  pero todo módulo en $\mathbf{s}\gamma$ es simple
  $\therefore \mathbf{s}\gamma = \mathbf{s}(\mathbf{s}\gamma)$
- $\mathbf{L}\gamma = \mathbf{L}(\mathbf{L}\gamma)$:
  $\subseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{L}\gamma$ y supongamos por contradicción que $M \notin \mathbf{L}(\mathbf{L}\gamma)$, esto es $\exists N \neq 0$ imagen homomorfa de M tal que $\forall K \leq N,\ K \neq 0,\ K \notin \mathbf{L}\gamma$. En particular $N \notin \mathbf{L}\gamma$. Esto a su vez quiere decir que $\exists J \neq 0$ imagen homomorfa de N tal que $\forall I \leq J,\ I \neq 0,\ I \notin \gamma$ **!** ya que $M \in \mathbf{L}\gamma$ y J es una imagen homomorfa de M.
  $\therefore M \in \mathbf{L}(\mathbf{L}\gamma)$
  $\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{L}(\mathbf{L}\gamma)$ y sea $N \neq 0$ una imagen homomorfa de M, entonces $\exists K \leq N,\ K \neq 0$ tal que $K \in \mathbf{L}\gamma$. Dado que K es imagen homomorfa de si mismo, $\exists J \leq K,\ J \neq 0$ tal que $J \in \gamma$. Por lo que N tiene un submódulo (J) distinto de 0 en γ , es decir $M \in \mathbf{L}\gamma$.
  $\therefore \mathbf{L}\gamma = \mathbf{L}(\mathbf{L}\gamma)$.

<u>$\mathbf{L}\gamma$ es clase de torsión</u>:

$\mathbf{L}\gamma = \{M \in Mod - R|$ todo cociente de M distinto de cero tiene un submódulo distinto de cero en $\gamma\}$

- $/\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{L}\gamma,\ N \leq M$ y $K \neq 0$ una imagen homomorfa de M/N bajo un homomorfismo $h : M/N \to K$, entonces $f = h\circ\eta : M \to K$ hace que K sea una imagen homomorfa (distinta de cero) de M y por tal razón tiene un submódulo distinto de cero en γ ($\eta : M \to M/N$ es la proyección canónica dada por $\eta(m) = m + N$)
  $\therefore M/N \in \gamma$
- $\bigoplus\rfloor$ Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $F : \oplus_{\alpha\in A} M_\alpha \to K$ un homomorfismo distinto de cero. Sea $\alpha_0 \in A$ tal que $f_{\alpha_0} = f \restriction_{M_{\alpha_0}} : M_{\alpha_0} \to$

K es distinta de cero. Como $M_{\alpha_0} \in \mathbf{L}\gamma$ tenemos que $\exists N_{\alpha_0} \leq Im(f_{\alpha_0}) \leq Im(f) \leq K$ tal que $N_{\alpha_0} \neq 0$ y $N_{\alpha_0} \in \gamma$
$\therefore \oplus_{\alpha \in A} M_\alpha \in \mathbf{L}\gamma$

- $\to\!\to\rfloor$ Consideremos el siguiente diagrama con renglón exacto donde M_1, $M_2 \in \mathbf{L}\gamma$ y h es un morfismo distinto de cero

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h_1=h\circ f"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[dl, "h_2"] & 0 \\
& & N & &
\end{tikzcd}$$

Y consideremos los siguientes casos:

1) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Nu}(g) \not\subseteq \mathrm{Nu}(h)$:
Sea $m \in \mathrm{Im}(f) \setminus \mathrm{Nu}(h)$ y consideremos el morfismo $h_1 = h \circ f$. Como $m \in \mathrm{Im}(f) \setminus \mathrm{Nu}(h)$, h_1 no es cero.
$\therefore \exists N_1 \leq N$ tal que $N_1 \neq 0$ y $N_1 \in \gamma$

2) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(h)$:
Definimos $h_2 : M \to N$ dada por $h_2(m_2) \mapsto H(m)$, donde $m \in M$ es tal que $g(m) = m_2$.

Nótese que en este caso (no así en el caso 1) h_2 sí es función ya que si se da el caso en que $\exists m,\ m' \in M$ y $m_2 \in M_2$ tales que $g(m) = g(m') = m_2$, entonces $m - m' \in \mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(h)$ y por lo tanto $h(m) = h(m') = h_2(m_2)$.

Como $h : M \to N$ no es cero $\exists m \in M$ tal que $h(m) \neq 0$ y dado que $\mathrm{Nu}(g) \subset \mathrm{Nu}(h)$, también sucede que $g(m) \neq 0$. Sea $m_2 \in M_2$ tal que $g(m) = m_2$ entonces $h_2(m_2) = h(m) \neq 0$ por lo que $h_2 : M_2 \to N$ no es cero
$\therefore \exists N_2 \leq N$ tal que $N_2 \neq 0$ y $N_2 \in \gamma$

En cualquiera de los casos resulta que $M \in \mathbf{L}\gamma$
$\therefore \mathbf{L}\gamma$ es cerrada bajo extensiones

$\therefore \mathbf{L}\gamma$ es clase de torsión.

Si γ es cerrada bajo cocientes, entonces $\gamma \subseteq \mathbf{L}\gamma$ y $\mathbf{L}\gamma$ es la menor clase de torsión que contiene a γ. Más aún, si además γ es hereditaria, $\mathbf{L}\gamma$ también lo es:

Demostración:

- Sea $\gamma \subseteq Mod - R$ cerrada bajo cocientes y sean $M \in \gamma$ y $N \leq M$, dado que γ es cerrada bajo cocientess, tenemos que si $M/N \neq 0$, entonces $M/N \in \gamma$ y ya que $M/N \leq M/N$, tenemos que $M \in \mathbf{L}\gamma$
- Sea $\tau \subseteq Mod - R$ una clase de torsión que cumple con $\gamma \subseteq \tau$, además sean $M \in \mathbf{L}\gamma$ y $N \in Mod - R$ tal que $\forall\, T \in \tau$, Hom$(T, N) = 0$. Veamos que Hom$(M, N) = 0$.

  Supongamos que $\exists f \in$ Hom(M, N), $f \neq 0$, entonces $\exists N' \leq N,\ N' \neq 0$ tal que $N \in \gamma \subseteq \tau$
  $\therefore$ Hom$(N', N) \neq 0$ **!** $\therefore$ Hom$(M,\ N) = 0$
  $\therefore M \in \tau$
  $\therefore \mathbf{L}\gamma \subseteq \tau$
- Supongamos además, que γ es hereditaria. Veamos que $\mathbf{L}\gamma$ también lo es.

  Sean $M \in \mathbf{L}\gamma,\ N \leq M$ y $K < N$ entonces $0 \neq N/K \leq M/K \in \mathbf{L}\gamma$. M/K contiene un submódulo $\overline{H} \in \gamma$ distinto de cero.
  Si $N/K \lhd M/K$ entonces $N/K \cap \overline{H} \neq 0$ y $N/K \cap \overline{H} \in \gamma$.
  Si N/K no es esencial en M/K, entonces N/K tiene un pseudo complemento $T/K \leq M/K,\ T/K \neq 0$, entonces $N/K \lhd (M/K)/(T/K) \in \mathbf{L}\gamma$ y $(M/K)/(T/K)$ contiene un submódulo distinto de cero $\overline{H_1} \in \gamma$, entonces $N/K \cap \overline{H_1} \neq 0$ y $N/K \cap \overline{H_1} \in \gamma$
  $\therefore N \in \mathbf{L}\gamma$
  $\therefore \mathbf{L}\gamma$ es hereditaria.

Notemos que si γ es una clase hereditaria entonces $\mathbf{T}\gamma$ es una clase de torsión, la mayor con respecto a $\gamma \cap \mathbf{T}\gamma = \{0\}$

- $\mathbf{T}\gamma = \{M \in Mod - R | M/X \in \gamma$ implica $X = M\}$ es clase de torsión:
  - $/\rfloor$ Sean $M \in \mathbf{T}\gamma,\ N \leq M$ y $X \leq M/N$ tal que $(M/N)/X \in \gamma$. Como $X \leq M/N$, X es de la forma $X = K/N$ para algún $K \leq M$ con $N \leq K$, así $(M/N)/X = (M/N)/(K/N) \cong M/K$ y $M/K \in \gamma$
    $\therefore K = M$
    $\therefore X = K/N = M/N$
    $\therefore M/N \in \mathbf{T}\gamma$.

- $\bigoplus\rfloor$ Sean $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathbf{T}\gamma$, $M = \oplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ y $X \leq M$ tal que $M/X \in \gamma$. Como $X \leq M = \oplus_{\alpha\in I} M_\alpha$ entonces $X = \oplus_{\alpha\in I} N_\alpha$ donde $N_\alpha \leq M_\alpha$, de esta manera tenemos $M/X = (\oplus_{\alpha\in I} M_\alpha)/(\oplus_{\alpha\in I} N_\alpha) \cong \oplus_{\alpha\in I}(M_\alpha/N_\alpha)$ y para cada $\beta \in I$, $M_\beta/N_\beta \hookrightarrow \oplus_{\alpha\in I}(M_\alpha/N_\alpha)$ por lo que $M_\beta/N_\beta \in \gamma$ y ya que $M_\beta \in \mathbf{T}\gamma$, tenemos así que $N_\beta = M_\beta \ \forall\ \beta \in I$
  $\therefore X = \oplus_{\alpha\in I} N_\alpha = \oplus_{\alpha\in I} M_\alpha = M$
  $\therefore M \in \mathbf{T}\gamma$.
- $\rightarrow\rightarrow\rfloor$ Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con M', $M'' \in \mathbf{T}\gamma$ y $X \leq M$ tal que $M/X \in \gamma$. Tenemos que $M'/(M' \cap X) \cong (M' + X)/X \leq M/X \in \gamma$ y ya que γ es hereditaria $M'/(M' \cap X) \in \gamma$
  $\therefore M' \cap X = M'$ ya que $M' \in \mathbf{T}\gamma$
  $\therefore M' \leq X$
  Como $M' \leq X \leq M$, tiene sentido hablar de los cocientes, es decir, $(M/M')/(X/M') \cong M/X \in \gamma$ y como $M/M' \cong M'' \in \mathbf{T}\gamma$, entonces $X/M' = M/M'$, entonces $X = M$
  $\therefore M \in \mathbf{T}\gamma$
  $\therefore \mathbf{T}\gamma$ es cerrada bajo extensiones.
  $\therefore \mathbf{T}\gamma$ esclase de torsión.

- $\mathbf{T}\gamma$ es la mayor clase de torsión con respecto a $\gamma \cap \mathbf{T}\gamma = \{0\}$:
  Sean τ una clase de torsión tal que $\gamma \cap \tau = \{0\}$, $M \in \tau$ y $N \leq M$ tal que $M/N \in \gamma$. Como τ es clase de torsión, pasa que $M/N \in \tau$ por lo que $M/N \in \gamma \cap \tau = \{0\}$
  $\therefore N = M$
  $\therefore M \in \mathbf{T}\gamma$
  $\therefore \tau \subseteq \mathbf{T}\gamma$
  $\therefore \mathbf{T}\gamma$ es la mayor clase de torsión con respecto a $\gamma \cap \mathbf{T}\gamma = \{0\}$.

Pseudo complementos en la retícula de clases de torsión

1. Los operadores H y E

En este capítulo establecemos las bases para los capítulos 2 y 3 desarrollando resultados básicos para los operadores H y E.

Nuestro primer lema proveé una lista de propiedades conocidas o cuyas pruebas son rutina. Estas propiedades serán usadas posteriormente, algunas veces sin mencionarlo.

LEMA 1.1. *Sea γ una clase de R-módulos.*

1. *Si γ es cerrada bajo sumas directas o productos directos, entonces $\boldsymbol{H}\gamma$ es cerrada bajo sumas directas o productos directos, respectivamente.*
2. *Si γ es cerrada bajo cocientes, entonces $\boldsymbol{H}\gamma$ es cerrada bajo cocientes.*
3. *Si γ es estable, entonces $\boldsymbol{H}\gamma = \boldsymbol{EH}\gamma = \boldsymbol{HE}\gamma = \boldsymbol{IH}\gamma$.*
4. *Si γ es cerrada bajo sumas directas, entonces $\boldsymbol{E}\gamma$ es cerrada bajo sumas directas.*
5. *Si γ es hereditaria, entonces $\boldsymbol{E}\gamma$ es hereditaria.*
6. *Si γ es cerrada bajo extensiones, entonces γ es cerrada bajo sumas directas finitas.*
7. *Sea $(\tau,\ \phi)$ una teoría de torsión. τ es hereditaria si y sólo si ϕ es estable.*
8. *Si $\boldsymbol{I}\gamma = \gamma$, entonces γ es estable. Aún más, si γ es cerrada bajo sumandos directos, entonces $\boldsymbol{I}\gamma = \gamma$ si y sólo si γ es estable.*

Demostración:

1. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbf{H}\gamma$ una familia de R-módulos, entonces para cada M_i existe un $X_i \in \gamma$ y un monomorfismo $\alpha_i : M_i \hookrightarrow X_i$, esta familia de morfismos induce un monomorfismo $\alpha : \oplus_{i\in I} M_i \hookrightarrow \oplus_{i\in I} X_i$ por lo que si γ es cerrada bajo sumas directas, entonces $\mathbf{H}\gamma$ también lo es. De manera análoga la misma familia de morfismos induce un monomorfismo $\beta : \prod_{i\in I} M_i \hookrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ por lo que si γ es cerrada bajo productos directos, entonces $\mathbf{H}\gamma$

también lo es. Los monomorfismos inducidos no son más que $\alpha = \oplus_{i \in I} \alpha_i$ y $\beta = \prod_{i \in I} \alpha_i$.

2. Sea $M \in \mathbf{H}\gamma$ y $N \leq M$. Como existe $X \in \gamma$ tal que $M \hookrightarrow X$ podemos decir que $N \leq X$ y así $X/N \in \gamma$ por lo que $i : M/N \to X/N$ nos dice que $M/N \in \mathbf{H}\gamma$.
3.
   - $\underline{\mathbf{H}\gamma \subseteq \mathbf{EH}\gamma}$:
     Sea $M \in \mathbf{H}\gamma$. $M \lhd M$ y $M \in \mathbf{H}\gamma$
     $\therefore M \in \mathbf{EH}\gamma$
   - $\underline{\mathbf{EH}\gamma \subseteq \mathbf{HE}\gamma}$:
     Sea $M \in \mathbf{EH}\gamma$. Sean $X \in \mathbf{H}\gamma$ y $Y \in \gamma$ tales que $X \lhd M$ y $X \hookrightarrow Y$. Como $X \lhd M$ tenemos que $E(X) = E(M)$, además $M \hookrightarrow E(M) = E(X) \hookrightarrow E(Y)$ ($X \hookrightarrow Y \hookrightarrow E(Y)$ por lo que $E(Y) = E(X) \oplus E'$ entonces $E(X) \hookrightarrow E(Y)$) y $Y \lhd E(Y)$
     $\therefore M \in \mathbf{HE}\gamma$
   - $\underline{\mathbf{HE}\gamma \subseteq \mathbf{IH}\gamma}$:
     Sea $M \in \mathbf{HE}\gamma$. Sean $X \in \mathbf{E}\gamma,\ Y \in \gamma$ tales que $Y \lhd X$ y $M \hookrightarrow X$. Dado que $Y \in \gamma$, existe $I \in \gamma$ inyectivo tal que $Y \hookrightarrow I$ entonces $Y \hookrightarrow E(Y) \hookrightarrow I$ y como $Y \lhd X$, tenemos que $E(Y) = E(X)$ por lo que $M \hookrightarrow X \hookrightarrow E(X) = E(Y) \hookrightarrow I \in \gamma$
     $\therefore M \in \mathbf{H}\gamma \subseteq \mathbf{IH}\gamma$
   - $\underline{\mathbf{IH}\gamma \subseteq \mathbf{H}\gamma}$:
     Sea $M \in \mathbf{IH}\gamma$. Si $M \in \mathbf{H}\gamma$ no hay nada que probar. Supongamos entonces que $M = E(N)$ para algún $N \in \mathbf{H}\gamma$. Sean $X,\ I \in \gamma$ tales que $N \hookrightarrow X \hookrightarrow I$ con I inyectivo, entonces $I = E(N) \oplus E'$ por lo que $M = E(N) \hookrightarrow I$
     $\therefore M \in \mathbf{H}\gamma$.
4. Sean $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbf{E}\gamma$ y $X_i \in \gamma$ tal que $X_i \lhd M_i$. Si $X = \oplus_{i \in I} X_i$ y $M = \oplus_{i \in I} M_i$ entonces $X \in \gamma$ y $X \lhd M$, por lo que si γ es cerrada bajo sumas directas, también lo es $\mathbf{E}\gamma$.
5. Sea $M \in \mathbf{E}\gamma,\ X \in \gamma$ y $N \leq M$ tal que $X \lhd M$ y $N \neq 0$, entonces $X \cap N \lhd N$ y $X \cap N \in \gamma$
   $\therefore N \in \mathbf{E}\gamma$.
6. Sean $M_1,\ M_2 \in \gamma$ y $M = M_1 \oplus M_2$. Por la sucesión exacta

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$$

   tenemos que $M \in \gamma$. Por inducción sobre el número de sumandos directos, se obtiene que γ es cerrada bajo sumas directas finitas.

7. $\Rightarrow\rfloor$ Sabemos que $\mathrm{Hom}(T,\ F) = 0 \quad \forall\ T \in \tau,\ \ F \in \phi$. Sean $M \in \phi$ entonces $M \hookrightarrow E(M)$ y $M \lhd E(M)$. Si $\mathrm{Hom}(T,\ E(M)) \neq 0$ para algún $T \in \tau$, digamos $f \in \mathrm{Hom}(T,\ E(M)),\ f \neq 0$ entonces tenemos $\mathrm{Im}(f) \cap M \neq \{0\}$ entonces $T' = f^{-1}(\mathrm{Im}(f) \cap M) \leq T$, entonces $T \in \tau$ pero $f\restriction_{T'}: T' \to M$ no es cero **!**
   $\therefore E(M) \in \phi$
   $\Leftarrow\rfloor$ Sean $T \in \tau$ y $T' \leq T$. Si $T' \notin \tau$ entonces $\exists M \in \phi$ tal que $\mathrm{Hom}(T',\ M) \neq 0$. Sea $f' \in \mathrm{Hom}(T',\ M),\ f' \neq 0$, entonces existe una $f \in \mathrm{Hom}\ (T',\ E(M))$ dada por $f = i \circ f' \neq 0$ donde $i : M \hookrightarrow E(M)$ es la inclusión. Ya que $E(M)$ es inyectivo, f puede extenderse a una función $f'' \neq 0,\ f'' \in \mathrm{Hom}(T,\ E(M))$ **!** ya que $E(M) \in \phi$ y $T \in \tau$
   $\therefore T' \in \tau$.
8. - Si $\mathbf{I}\gamma = \gamma$ entonces $\forall\ M \in \gamma,\ E(M) \in \gamma$
     $\therefore \gamma$ es estable.
   - $\Rightarrow\rfloor$ Esto es el inciso anterior
     $\Leftarrow\rfloor$ Sean $M \in \gamma$ e $I \in \gamma$ inyectivo tal que $M \hookrightarrow I$. $I = E(M) \oplus E'$ pero γ es cerrada bajo sumandos directos entonces $E(M) \in \gamma$
     $\therefore \mathbf{I}\gamma = \gamma$.

Proposición 1.2. *Sea γ una clase de R-módulos. Entonces tenemos que $\boldsymbol{IH}\gamma \subseteq \boldsymbol{EH}\gamma = \boldsymbol{HE}\gamma = \boldsymbol{HI}\gamma$*

Demostración:

1. $\underline{\mathbf{IH}\gamma \subseteq \mathbf{EH}\gamma :}$
   Sea $M \in \mathbf{IH}\gamma$. Si $M \in \mathbf{H}\gamma$ entonces $M \lhd M$ y $M \in \mathbf{EH}\gamma$; si no es así, $M = E(X)$ para algún $X \in \mathbf{H}\gamma$ entonces $X \lhd M$ y $M \in \mathbf{EH}\gamma$
   $\therefore \mathbf{IH}\gamma \subseteq \mathbf{EH}\gamma$.
2. $\underline{\mathbf{EH}\gamma = \mathbf{HE}\gamma :}$
   $\subseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{EH}\gamma$ entonces existe $Y \in \mathbf{H}\gamma$ tal que $Y \lhd M$ y como $Y \in \mathbf{H}\gamma$, entonces existe $X \in \gamma$ tal que $Y \hookrightarrow X$. Como $Y \lhd M$ entonces $E(Y) = E(M)$ y como $Y \hookrightarrow X$, pasa que $E(Y) \hookrightarrow E(X) \in \mathbf{E}\gamma$ entonces tenemos $M \hookrightarrow E(M) = E(Y) \hookrightarrow E(X) \in \mathbf{E}\gamma$
   $\therefore M \in \mathbf{HE}\gamma$
   $\therefore \mathbf{EH}\gamma \subseteq \mathbf{HE}\gamma$
   $\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{HE}\gamma$ entonces existen $X \in \mathbf{E}\gamma$ y $Y \in \gamma$ tales que $M \hookrightarrow X$ y $Y \lhd X$ por lo que $\{0\} \neq M \cap Y \in \mathbf{H}\gamma$ y ya que $Y \lhd X$ y $M \leq X$ tenemos que $M \cap Y \lhd M$
   $\therefore M \in \mathbf{EH}\gamma$

$\therefore$ $\mathbf{HE}\gamma \subseteq \mathbf{EH}\gamma$
$\therefore$ $\mathbf{EH}\gamma = \mathbf{HE}\gamma$.

3. $\underline{\mathbf{HE}\gamma = \mathbf{HI}\gamma :}$
$\subseteq \rfloor$ Sea $M \in \mathbf{HE}\gamma$. Entonces existen $X \in \mathbf{E}\gamma$ y $Y \in \gamma$ tales que $M \hookrightarrow X$ y $Y \lhd X$ por lo que $M \hookrightarrow X \hookrightarrow E(X) = E(Y) \in \mathbf{I}\gamma$
$\therefore M \in \mathbf{HI}\gamma$
$\supseteq \rfloor$ Sea $M \in \mathbf{HI}\gamma$ entonces existe $X \in \mathbf{I}\gamma$ tal que $M \hookrightarrow X$ por lo que:
   - Si $X \in \gamma$ tal que $M \hookrightarrow X$, como $X \lhd X \in \mathbf{E}\gamma$ entonces $M \in \mathbf{HE}\gamma$
   - Si $\exists Y \in \gamma$ tal que $M \hookrightarrow E(Y)$, como $Y \lhd E(Y) \in \mathbf{E}\gamma$ entonces $M \in \mathbf{HE}\gamma$

   $\therefore M \in \mathbf{HE}\gamma$
$\therefore$ $\mathbf{HI}\gamma \subseteq \mathbf{HE}\gamma$
$\therefore$ $\mathbf{HE}\gamma = \mathbf{HI}\gamma$.

Nótese que bajo composición de operadores, $S' = \{\mathbf{E},\ \mathbf{H},\ \mathbf{I}\}$ genera un semigrupo de orden 5 con **EH** el elemento cero. $\{\mathbf{E},\ \mathbf{H}\}$ genera un subsemigrupo conmutativo e idempotente de orden 3.

Demostración: Notemos primero que

- $\mathbf{IH}\gamma = \{M|M \hookrightarrow X \in \gamma\} \cup \{E(M)|M \hookrightarrow X \in \gamma\}$
- $\mathbf{HI}\gamma = \{M|M \hookrightarrow X \text{ y } X \in \gamma \text{ o } X = E(N) \text{ para algún } N \in \gamma\}$
- $\mathbf{EI}\gamma = \{M|X \lhd M,\ X \in \mathbf{I}\gamma\} = \{M|X \lhd M,\ X \in \gamma\} \cup \{M|X \lhd M,\ X = E(N),\ N \in \gamma\} = \{M|X \lhd M,\ X \in \gamma\}$
- $\mathbf{IE}\gamma = \mathbf{E}\gamma \cup \{E(M)|M \in \mathbf{E}\gamma\} = \{M|X \lhd M,\ X \in \gamma\} \cup \{E(M)|M \in \gamma\} = \{M|X \lhd M,\ X \in \gamma\} = \mathbf{E}\gamma$

Por lo que $\mathbf{E} = \mathbf{EI} = \mathbf{IE}$, $\mathbf{HE} = \mathbf{HI} = \mathbf{EH}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{IH}$ son cinco operadores distintos y **E** conmuta con ambos: **H** e **I**. Si al conjunto $\{\mathbf{E},\ \mathbf{H},\ \mathbf{I},\ \mathbf{EH},\ \mathbf{IH}\}$ lo llamamos S, podemos ver que $< \mathbf{H},\ \mathbf{E},\ \mathbf{I} >= S$ ya que para cualquier combinación de tres elementos de $S' = \{\mathbf{H},\ \mathbf{E},\ \mathbf{I}\}$ (no necesariamente distintos), la composición de ellos es igual a la composición de dos elementos de S'.

Veamos que **EH** es un elemento cero para S:

- $(\mathbf{E})(\mathbf{EH}) = (\mathbf{EE})\mathbf{H} = \mathbf{EH} = \mathbf{E}(\mathbf{EH}) = \mathbf{E}(\mathbf{HE}) = (\mathbf{EH})(\mathbf{E})$
- $(\mathbf{H})(\mathbf{EH}) = \mathbf{E}(\mathbf{HH}) = \mathbf{EH} = \mathbf{E}(\mathbf{HH}) = (\mathbf{EH})(\mathbf{H})$
- $(\mathbf{I})(\mathbf{EH}) = (\mathbf{IE})\mathbf{H} = \mathbf{EH} = \mathbf{E}(\mathbf{EH}) = \mathbf{E}(\mathbf{HI}) = (\mathbf{EH})(\mathbf{I})$
- $(\mathbf{EH})(\mathbf{EH}) = \mathbf{EEHH} = \mathbf{EH}$
- $(\mathbf{IH})(\mathbf{EH}) = (\mathbf{IE})\mathbf{HH} = \mathbf{EH} = \mathbf{E}\ \mathbf{HH} = \mathbf{HEH} = \mathbf{HEIH} = (\mathbf{EH})(\mathbf{IH})$

$\therefore$ **EH** sirve como elemento cero para S.

Como vimos anteriormente $\mathbf{HE} = \mathbf{EH}$, por lo que $\{\mathbf{E},\ \mathbf{H},\ \mathbf{EH}\}$ es un subsemigrupo de orden 3 que es conmutativo e idempotente.

Ejemplo 1.3. *El presente ejemplo sirve como base para varios resultados posteriores.*

- *Sea* $e = e^2 \in R$ *tal que* $eR = eRe$ *(nota,* $er = ere\ \forall\ r \in R$*) y* $X = ReR = Re$*. Entonces* X *es un ideal idempotente de* R *y la clase* $\tau = \{M \in Mod - R | M = MX\} = \{M \in Mod - R | M = Me\}$ *es una clase de torsión. Ya que* $\tau = \{M \in Mod - R | M(1-e) = 0\}$*, se sigue que* τ *es hereditaria (de hecho es una clase TTF).*
- *Consideremos un caso especial del inciso anterior. Sea* S *un anillo no singular derecho y no autoinyectivo. Sea* $R = \begin{bmatrix} S & S \\ 0 & S \end{bmatrix}$ *y* $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

  Tomemos $X = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & S \end{bmatrix}$ *y* $\tau = \{M \in Mod - R | MX = M\}$*. Entonces* τ *es una clase de torsión hereditaria. Observe que* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & S \end{bmatrix}$ *por lo que* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & S \end{bmatrix} \in \boldsymbol{E}\tau$ *pero* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & S \end{bmatrix} \notin \boldsymbol{I}\tau$

  $$\therefore \boldsymbol{I}\tau = \boldsymbol{IH}\tau \neq \boldsymbol{HI}\tau = \boldsymbol{EH}\tau = \boldsymbol{E}\tau$$

- Veamos que efectivamente $ReR = Re$:
  $\subseteq\rfloor$ Sea $a \in ReR$ entonces $a = bec,\ b,\ c \in R$ pero por hipótesis $ec = ece$ entonces $a = (bec)e \in Re$
  $\therefore ReR \subseteq Re$
  $\supseteq\rfloor$ Si a $ae \in Re$ lo escribimos como $ae1$, es trivial que $Re \subseteq ReR$.
- X es un ideal idempotente:
  a) X es ideal ya que $aRe \subseteq Re$ y $ReR = Re$ implica que $(Re)a \subseteq Re$
  $\therefore X$ es ideal.
  b) $X^2 = (X)(X) = (Re)(Re) = R(eRe) = R(eR) = X$
  $\therefore X$ es idempotente.
- La clase $\tau = \{M \in Mod - R | M = MX\} = \{M \in Mod - R | M = Me\}$ es de torsión:
  - $/\rfloor$ Sea $N \leq M \in \tau$, entonces $(M/N)X = MX/N = M/N$
    $\therefore M/N \in \tau$.

- $\bigoplus\rfloor$ Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ y $M = \oplus_{i\in I} M_i$, tenemos entonces $MX = (\oplus_{i\in I} M_i)X = \oplus_{i\in I}(M_i X) = \oplus_{i\in I} M_i = M$.
- $\rightarrow\rightarrow\rfloor$ Sea $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ exacta con M_1,
  $M_2 \in \tau$ y $m \in M$. Si $m \in Im(f)$ entonces $m = f(m_1) = f(m_1'e) = f(m_1')e$ ya que $m_1 \in M_1$. Si $m \notin Im(f) = Nu(g)$ entonces $g(m) \neq 0$, es decir, $\exists m_2 \in M_2$ tal que $g(m) = m_2 = m_2'e$, además $g(me) = g(m)e = m_2 e = m_2'ee = m_2'e$, entonces $m - me \in Nu(g) = Im(f)$ por lo que $\exists m_1 \in M_1$ tal que $f(m_1) = m - me$ pero $f(m_1) = f(m_1'e) = f(m_1')e$ entonces tenemos que $m = f(m_1) + me = f(m_1'e) + me = f(m_1')e + me = (f(m_1') + m)e \in Me$
  $\therefore M \subseteq Me$
  Como siempre pasa que $Me \subseteq M$ tenemos que $M = Me$
  $\therefore \tau$ es cerrada bajo extensiones
  $\therefore \tau$ es clase de torsión.
- $\leq\rfloor$ Si $N \leq M$, entonces $N(1-e) \leq M(1-e) = 0$
  $\therefore \tau$ es hereditaria.
- $\prod\rfloor$ Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ y $M = \prod_{i\in I} M_i$. Tenemos que $Me = (\prod_{i\in I} M_i)e = \prod_{i\in I}(M_i e) = \prod_{i\in I} M_i$
  $\therefore M \in \tau$
  $\therefore \tau$ es una clase TTF.

- En $ii)$ tenemos que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \lhd \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & S \end{bmatrix}$ ya que los ideales de $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & S \end{bmatrix}$ son de la forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{bmatrix}$ con A y B ideales derechos de S y $B \subseteq A$ y $B \neq 0$

Proposición 1.4. *Sea $\gamma \subseteq Mod-R$ cerrada bajo sumas directas finitas.*

- *Si γ es estable, entonces **H**γ es cerrada bajo extensiones.*
- ***HE**γ es cerrada bajo submódulos, sumas directas finitas, extensiones esenciales y extensiones.*

Demostración:

- Sean N y X R-módulos tales que $X/N,\ N \in \mathbf{H}\gamma$. Sea $E \in \gamma$ inyectivo tal que $N \hookrightarrow E$ y P el coproducto fibrado de $N \hookrightarrow E$

y $N \hookrightarrow X$, entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "i_E"'] & X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"] & X/N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "g"] & P \arrow[r, "h"] & X/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde h es el morfismo inducido por $\eta : X \to X/N$ y $0 : E \to X/N$, f y g son monomorfismos ya que i_X e i_E lo son y $P = E \oplus X/N$ ya que (por la inyectividad de E) el renglón inferior se escinde. Entonces por 1.1 incisos (1) y (3), $P \in \mathbf{H}\gamma$, entonces $X \in \mathbf{H}\gamma$.

▪ • $\leq\rfloor$ $\mathbf{H}\delta$ es hereditaria para cualquier clase $\delta \subseteq R - Mod$, en particular para $\delta = \mathbf{E}\gamma$
- $\bigoplus_{fin}\rfloor$ Por 1.1 (4), $\mathbf{E}\gamma$ es cerrada bajo sumas directas finitas y por 1.1 (1) $\mathbf{HE}\gamma$ es cerrada bajo sumas directas finitas
- $\hookrightarrow_e\rfloor$ Por 1.1 (3), $\mathbf{EHE}\gamma = \mathbf{HE}\gamma$ y $\mathbf{EHE}\gamma$ es cerrada bajo extensiones esenciales
- $\to\to\rfloor$ Por la primera parte de esta proposición, tenemos que $\mathbf{HE}\gamma$ es cerrada bajo extensiones.

El segundo inciso de 1.4 nos dice que la clase $\mathbf{HE}\gamma$ tiene la posibilidad de convertirse, tanto en clase de torsión como en clase libre de torsión. Esto motiva naturalmente los siguientes problemas:

(1) Determinar condiciones que aseguren que $\mathbf{HE}\gamma$ es una clase de torsión.
(2) Determinar condiciones que aseguren que $\mathbf{HE}\gamma$ es una clase libre de torsión.

Observe que si γ es la clase libre de torsión correspondiente a una una clase de torsión hereditaria, entonces $\mathbf{HE}\gamma = \gamma$ es libre de torsión. Antes de dar alguna respuesta a los problemas anteriores, presentamos ejemplos que muestran que, en general, $\mathbf{HE}\gamma$ no es clase de torsión ni clase libre de torsión para algunas elecciones de $\gamma \subseteq R - Mod$.

Ejemplo 1.5. *Existe una clase de torsión hereditaria τ tal que $\boldsymbol{HE}\tau$ no es una clase de torsión. En el ejemplo 1.3 ii), por 1.2, $\boldsymbol{HE}\tau = \boldsymbol{E}\tau$. Observe que $E(R) \in \boldsymbol{E}\tau$ ya que R contiene esencialmente módulos de τ, pero $E(R)/\tau(E(R)) \notin \boldsymbol{E}\tau$ por lo que $\boldsymbol{E}\tau$ no es cerrada bajo cocientes y por lo tanto no es clase de torsión.*

Recordemos que a un grupo abeliano G se le llama p-grupo elemental si $pG = 0$, donde p es un primo.

EJEMPLO 1.6. *Existe una clase γ de R-módulos que es cerrada bajo submódulos, productos directos, cocientes y sumas directas tal que* $\boldsymbol{HE}\gamma$ *no es una clase libre de torsión. Tomemos $R = \mathbb{Z}$ y γ la clase de p-grupos abelianos elementales para un primo p fijo. Por 1.2,* $\boldsymbol{HE}\gamma = \boldsymbol{E}\gamma$. *Observamos que si $M \in \gamma$, entonces M es un grupo de torsión en el sentido usual (es decir, $\forall\ x \in M,\ x \neq 0,\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$ tal que $nx = 0$). Tenemos que $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in$* $\boldsymbol{E}\gamma$ *pero cualquier producto infinito de copias de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ tiene elementos que no son de torsión por lo que* $\boldsymbol{HE}\gamma$ *no es cerada bajo productos directos y por lo tanto no es clase libre de torsión.*

COROLARIO 1.7. *Si γ es una clase de R-módulos tal que* $\boldsymbol{I}\gamma$ *es cerrada bajo cocientes y sumas directas, entonces* $\boldsymbol{HE}\gamma$ *es una clase de torsión hereditaria y estable.*

Demostración: Por 1.1 (1) y (2), $\mathbf{HI}\gamma$ es cerrada bajo sumas directas y cocientes, respectivamente. Por 1.2, $\mathbf{HI}\gamma = \mathbf{HE}\gamma = \mathbf{EH}\gamma$, entonces $\mathbf{HE}\gamma$ es una clase cerrada bajo sumas directas y cocientes que además es estable. $\mathbf{HE}\gamma$ es cerrada bajo submódulos y extensiones como consecuencia de 1.4.

COROLARIO 1.8. *Sea γ una clase de R-módulos.*

- $\boldsymbol{HEP}\gamma \subseteq \boldsymbol{HPE}\gamma$.
- $\boldsymbol{HPE}\gamma$ *es una clase estable libre de torsión.*
- *Si $E(\prod M_i) = \prod E(M_i)$ para todo $M_i \in \gamma$, entonces* $\boldsymbol{HEP}\gamma = \boldsymbol{HPE}\gamma$.

Demostración:

- Sea $M \in \mathbf{HEP}\gamma$. Entonces, $\exists\{M_i\} \subseteq \gamma$ tal que $M \hookrightarrow E(\prod M_i)$ pero $E(\prod M_i) \leq \prod E(M_i)$ ya que $\prod M_i \hookrightarrow \prod E(M_i)$ esencialmente, por lo que $M \hookrightarrow \prod E(M_i)$
  $\therefore \mathbf{HEP}\gamma \subseteq \mathbf{HPE}\gamma$.
- $\mathbf{PE}\gamma$ es una clase estable ya que si $M \in \mathbf{PE}\gamma$ entonces $M = \prod N_i$ con $\{N_i\} \subseteq \mathbf{E}\gamma$. Para cada N_i $\exists M_i \in \gamma$ tal que $M_i \hookrightarrow N_i$ esencialmente por lo que $N_i \hookrightarrow E(M_i)$ (esencialmente) y por lo tanto $\prod N_i \hookrightarrow \prod E(M_i)$, de esta manera tenemmos que $M \hookrightarrow \prod E(M_i)$, el cual es inyectivo y está en $\mathbf{PE}\gamma$; consecuentemente $\mathbf{HPE}\gamma$ es estable. Por 1.4, $\mathbf{HEPE}\gamma$ es cerrada bajo submódulos y extensiones y por 1.1 (3), $\mathbf{HEPE}\gamma = \mathbf{HPE}\gamma$. Por 1.1 (1) $\mathbf{HPE}\gamma$ es cerrada bajo productos directos.
  $\therefore \mathbf{HPE}\gamma$ es una clase estable libre de torsión.
- Sea $M \in \mathbf{HPE}\gamma$, entonces $\exists\{X_i\} \subseteq \gamma$ tal que $M \hookrightarrow \prod E(X_i)$. Pero $\prod E(X_i) = E(\prod X_i)$ por tanto $M \in \mathbf{HEP}\gamma$. Por la primera parte tenemos $\mathbf{HPE}\gamma = \mathbf{HEP}\gamma$.

Nótese que el operador **E** es necesario en el corolario 1.8. Para verlo tomemos γ como en el ejemplo 1.6. Entonces $\mathbf{HP}\gamma = \gamma$, pero γ no es cerrada bajo extensiones ($0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p \to 0$). Entonces $\mathbf{HP}\gamma$ no es clase libre de torsión. El ejemplo 1.6 también muestra que $\mathbf{HE}\gamma = \mathbf{HEP}\gamma \neq \mathbf{HPE}\gamma$ por lo que, en general, para una familia $\{M_i\} \subseteq \mathbb{Z} - Mod$, $E(\prod M_i) \neq \prod E(M_i)$. De cualquier manera, si R es semisimple entonces todo módulo es inyectivo y $E(\prod M_i) = \prod E(M_i)$.

El siguiente resultado está relacionado con el Problema (1).

Proposición 1.9. *Sea γ una clase de R-módulos cerrada bajo sumas directas finitas. Entonces $\boldsymbol{LHE}\gamma = \boldsymbol{hHE}\gamma$ es una clase de torsión hereditaria.*

Demostración: $\supseteq\rfloor$ Es directo que $\mathbf{hHE}\gamma \subseteq \mathbf{LHE}\gamma$ ya que $\forall\ M \in \mathbf{hHE}\gamma$ y $\forall\ N < M$, $M/N \in \mathbf{HE}\gamma$.

$\subseteq\rfloor$ Como γ es cerrada bajo sumas directas, por 1.1 *iv*) y *i*), $\mathbf{HE}\gamma$ es cerrada bajo sumas directas. Sea $M \in \mathbf{LHE}\gamma$ y $X < M$ entonces $\exists N < M,\ X < N$ tal que $N/X \in \mathbf{HE}\gamma$. Si $N = M$ no hay nada que probar. Supongamos que $N \neq M$. Como $\mathbf{HE}\gamma$ es cerrada bajo sumas directas, gracias al lema de Zorn, podemos tomar N/X una suma directa máxima de elementos de $\mathbf{HE}\gamma$ (un elemento máximo entre las sumas directas de elementos de $\mathbf{HE}\gamma$). Más aún, podemos tomar N/X cerrado (bajo extensiones esenciales) en M/N. N/X tiene un pseudo complemento ($\neq 0$) en M/X, digamos P/X. Entonces $M/N \cong (M/X)/(N/X)$ tiene un submódulo esencial $\overline{P}$ isomorfo a P/X. Además $\exists K < M,\ N < K$ tal que $K/N \in \mathbf{HE}\gamma$, entonces $\exists Y < M$ tal que $Y/X < P/X$ y $Y/X \hookrightarrow K/N \cap \overline{P}$ por lo que $N/X \oplus Y/X$ es una suma directa de elementos de $\mathbf{HE}\gamma$*!*.
$\therefore N = M$
$\therefore M/X \in \mathbf{HE}\gamma$
$\therefore M \in \mathbf{hHE}\gamma$
$\therefore \mathbf{LHE}\gamma = \mathbf{hHE}\gamma$.

Ya habíamos visto que $\mathbf{L}\theta$ es una clase de torsión para cualquier $\theta \subseteq Mod - R$. Además $\mathbf{LHE}\gamma$ es hereditaria gracias a que $\mathbf{HE}\gamma$ lo es.

Nótese que el operador **E** es necesario en 1.9. Sea γ como en 1.6. Entonces $\mathbf{hH}\gamma = \gamma$ y aunque γ es cerrada bajo sumas directas, no es cerrada bajo extensiones, por lo que $\mathbf{hH}\gamma$ no es clase de torsión.

2. Pseudo complementos

En lo que sigue, $R - TORS$ denotará a la clase de todas las clases de torsión, $R-tors$, denotará al conjunto de todas las clases de torsión hereditarias.

La relación $\tau \leq \phi$ si $\tau \subseteq \phi$ es un orden parcial en la clase R-TORS con el cual R-TORS es una retícula donde el ínfimo y el supremo pueden ser descritos como sigue:

$$\tau \wedge \phi \equiv \tau \cap \phi$$

$$\tau \vee \phi \equiv \mathbf{L}(\tau \cup \phi)$$

La familia R-tors, de todas las clases de torsión hereditarias, es una subretícula distributiva importante de la retícula R-TORS (de hecho es un marco [**5**, p.277]). Por esta razón es relevante la búsqueda de conexiones entre estas dos retículas. Desarrollamos el concepto de 'pseudo complementación' en estas retículas. En una retícula con elemento 0, un pseudo complemento (si éste existe) de un elemento α es un elemento $\overline{\alpha}$, máximo con la propiedad de que $\alpha \wedge \overline{\alpha} = 0$. En este capítulo obtendremos caracterizaciones explícitas de pseudo complementos en R-TORS y R-tors. Más aún, mostraremos que, en general, para un elemento $\tau \in R$-tors sus pseudo complementos en R-TORS y R-tors son distintos. También para $\tau \in R$-TORS, determinamos una clase de torsión hereditaria $\overline{\overline{\tau}}$ que contiene a τ.

El primer lema proveé una lista de propiedades bien conocidas cuya prueba es rutina. Estas propiedades serán utilizadas repetidamente en lo que sigue.

Lema 2.1. *Sean γ y θ clases de R-módulos y τ, $\psi \in R$-TORS.*

1. *La relación $\tau \leq \psi$ es equivalente a que $\tau(M) \leq \psi(M)$, para todo $M \in$ Mod-R.*
2. *Toda clase de R-módulos que sea libre de torsión es cerrada bajo subproductos directos.*
3. *Si $\gamma \subseteq \theta$, entonces $\boldsymbol{T}\theta \subseteq \boldsymbol{T}\gamma$ y $\boldsymbol{F}\theta \subseteq \boldsymbol{F}\gamma$.*
4. *$\boldsymbol{T}\gamma = \boldsymbol{hT}\gamma$, $\boldsymbol{Th}\gamma$ es cerrada bajo extensiones, $\boldsymbol{TH}\gamma$ es una clase de torsión y $\boldsymbol{F}\gamma = \boldsymbol{HF}\gamma$.*
5. *Si $\gamma \subseteq \boldsymbol{T}\theta$, entonces $\gamma \cap \theta = \{0\}$. También, si $\boldsymbol{h}\gamma = \gamma$ y $\gamma \cap \theta = \{0\}$, entonces $\gamma \subseteq \boldsymbol{T}\theta$.*
6. *Si $\boldsymbol{H}\gamma = \gamma$, entonces $\gamma \subseteq \boldsymbol{FT}\gamma$. También, γ es libre de torsión si y sólo si $\gamma = \boldsymbol{FT}\gamma$.*
7. *γ es clase de torsión si y sólo si $\gamma = \boldsymbol{TF}\gamma$.*

8. $\boldsymbol{L}(\gamma \cup \theta) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}\gamma \cap \boldsymbol{F}\theta)$ *y* $\boldsymbol{FL}(\tau \cup \psi) = \boldsymbol{F}\tau \cap \boldsymbol{F}\psi$.

Demostración:

1. $\Rightarrow\rfloor$ Como $\tau \leq \psi$ tenemos que $\tau(M) \in \psi$
   $\therefore \tau(M) \leq \psi(M)$
   $\Leftarrow\rfloor$ Sea $M \in \tau$ entonces $M = \tau(M) \leq \psi(M) \leq M$
   $\therefore M = \psi(M) \in \psi$
   $\therefore \tau \leq \psi$.
2. Toda clase libre de torsión es cerrada bajo productos directos y submódulos por lo que es cerrada bajo subproductos directos.
3. - Sean $M \in \mathbf{T}\theta$ y $X \leq M$ tal que $M/X \in \gamma \subseteq \theta$ entonces $X = M$
     $\therefore M \in \mathbf{T}\gamma$
     $\therefore \mathbf{T}\theta \subseteq \mathbf{T}\gamma$
   - Sea $M \in \mathbf{F}\theta$ si $X \leq M$ es tal que $X \in \gamma \subseteq \theta$ entonces $X = 0$
     $\therefore M \in \mathbf{F}\gamma$
     $\therefore \mathbf{F}\theta \subseteq \mathbf{F}\gamma$.
4. - $\underline{\mathbf{T}\gamma = \mathbf{hT}\gamma}$: Sean $M \in \mathbf{T}\gamma$, $N \leq M$ y $X \leq N$ tales que $(M/X)/(N/X) \in \gamma$. Como $M/N \cong (M/X)/(N/X) \in \gamma$, tenemos que $N = M$, entonces $N/X = M/X$
     $\therefore M/X \in \mathbf{T}\gamma$
     $\therefore M \in \mathbf{hT}\gamma$
     $\therefore \mathbf{T}\gamma \subseteq \mathbf{hT}\gamma$
     Como la otra contención siempre se da, tenemos que $\mathbf{T}\gamma = \mathbf{hT}\gamma$
   - $\underline{\mathbf{Th}\gamma \text{ es cerrada bajo extensiones}}$: Consideremos la siguiente sucesión exacta

     $$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

     con N y $M/N \in \mathbf{Th}\gamma$ y sea $X \leq M$ tal que $M/X \in \mathbf{h}\gamma$. Como $M/X \in \mathbf{h}\gamma$, tenemos que $M/(N+X) \cong (M/X)/((N+X)/X) \in \mathbf{h}\gamma$. Además, como $M/N \in \mathbf{Th}\gamma$ y $M/(N+X) \cong (M/N)/((N+X)/N) \in \mathbf{h}\gamma$, tenemos $M/N = (N+X)/N$, entonces $M = N + X$. Por otro lado, $N \in \mathbf{Th}\gamma$ y $N/(N \cap X) \cong (N+X)/X = M/X \in \mathbf{h}\gamma$ nos dice que $N = N \cap X$, por lo que $N \leq X$. Ya que $M = N + X$ y $N \leq X$, tenemos que $M = X$
     $\therefore M \in \mathbf{Th}\gamma$
   - $\underline{\mathbf{TH}\gamma \text{ es clase de torsión}}$: Como $\mathbf{H}\gamma$ es hereditaria, $\mathbf{TH}\gamma$ es clase de torsión

- $\underline{\mathbf{F}\gamma = \mathbf{HF}\gamma}$: Esto es claro ya que todo submódulo de N es submódulo de M.

5.
- Sea $M \in \gamma \cap \theta$. Dado que $M/0 = M \in \theta$, tenemos que $M = 0$
- Sean $M \in \gamma = \mathbf{h}\gamma$ y $X \leq M$ tal que $M/X \in \theta$. Entonces $M/X \in \gamma \cap \theta = \{0\}$, entonces $M = X$
 $\therefore M \in \mathbf{T}\theta$
 $\therefore \gamma \subseteq \mathbf{T}\theta$.

6. $\mathbf{H}\gamma = \gamma$ nos dice que γ es hereditaria y $\mathbf{T}\gamma$ es clase de torsión tal que $\mathbf{T}\gamma \cap \gamma = \{0\}$.
 Sean $M \in \gamma$ y $N \leq M$ tales que $N \in \mathbf{T}\gamma$. Entonces $N \in \mathbf{T}\gamma \cap \gamma = \{0\}$
 $\therefore M \in \mathbf{FT}\gamma$
 $\therefore \gamma \subseteq \mathbf{FT}\gamma$
 Recordemos que dada una clase γ de R-módulos, podemos asociarle dos clases particulares de R-módulos:

$$_{\gamma}T = \{T \in \mathit{Mod}\text{-}R \mid Hom(T, C) = 0 \quad \forall\ C \in \gamma\} \quad \text{y}$$

$$_{\gamma}F = \{F \in \mathit{Mod}\text{-}R \mid Hom(T, F) = 0 \quad \forall\ T \in {_{\gamma}T}\}$$

 tales que $({_{\gamma}T},\ {_{\gamma}F})$ es una teoría de torsión (a la cual se le conoce como la teoría de torsión cogenerada por γ) y $_{\gamma}F$ es la menor clase libre de torsión que contiene a γ. De esta manera tenemos que si γ es una clase libre de torsión (en general se cumple para una clase hereditaria cualquiera), entonces $_{\gamma}T = \{T \in \mathit{Mod}\text{-}R \mid Hom(T, C) = 0 \quad \forall\ C \in \gamma\} = \mathbf{T}\gamma$ y también $_{\gamma}F = \{F \in \mathit{Mod}\text{-}R \mid Hom(T, F) = 0 \quad \forall\ T \in {_{\gamma}T}\} = \mathbf{FT}\gamma$ y
 $\therefore \gamma = \mathbf{FT}\gamma$
 El regreso es claro ya que γ es hereditaria.

7. De manera análoga a la del inciso anterior obtenemos la teoría de torsión generada por la clase γ: $(T_{\gamma},\ F_{\gamma})$, donde

$$F_{\gamma} = \{F \in \mathit{Mod}\text{-}R \mid Hom(C, F) = 0\ \forall\ C \in \gamma\}$$

$$T_{\gamma} = \{T \in \mathit{Mod}\text{-}R \mid Hom(T, F) = 0\ \forall\ F \in F_{\gamma}\}$$

 también sucede que T_{γ} es la menor clase de torsión que contiene a γ y $F_{\gamma} = \mathbf{F}\gamma,\ T_{\gamma} = \mathbf{TF}\gamma$.
 El regreso es claro por 4.

8.
- $\underline{\mathbf{L}(\gamma \cup \theta) = \mathbf{T}(\mathbf{F}\gamma \cap \mathbf{F}\theta)}$:
  - $\subseteq]$ Sean $M \in \mathbf{L}(\gamma \cup \theta)$ y $X \leq M$ tales que $M/X \in \mathbf{F}\gamma \cap \mathbf{F}\theta$. Si $M/X \neq 0$, entonces $\exists\ N \leq M$ tal que $X < N$ y $N/X \in \gamma \cup \theta$ pero $M/X \in \mathbf{F}\gamma \cap \mathbf{F}\theta$ por lo que $N/X = 0$ **!**

$\therefore M/X = 0$
$\therefore M \in \mathbf{T}(\mathbf{F}\gamma \cap \mathbf{F}\theta)$

- $\supseteq \rfloor$ Sea $M \in \mathbf{T}(\mathbf{F}\gamma \cap \mathbf{F}\theta)$ y supongamos que $M \notin \mathbf{L}(\gamma \cup \theta)$, esto es $\exists\ X < M$ tal que $\forall\ Y \leq M$ con $X < Y$, $Y/X \notin \gamma \cup \theta$, entonces M/X es tal que si $Y/X \leq M/X$ y $Y/X \neq 0$ entonces $Y/X \notin \gamma$ y $Y/X \notin \theta$, es decir $M/X \in \mathbf{F}\gamma \cap \mathbf{F}\theta$, esto último junto con $M \in \mathbf{T}(\mathbf{F}\gamma \cap \mathbf{F}\theta)$ nos dice que $X = M$ **!**
  $\therefore M \in \mathbf{L}(\gamma \cup \theta)$

- <u>$\mathbf{FL}(\tau \cup \psi) = \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\psi$:</u>
  - $\subseteq \rfloor$ Sea $M \in \mathbf{FL}(\tau \cup \psi)$ y supongamos que $M \notin \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\psi$, entonces $\exists\ X \leq M,\ 0 \neq X \in \tau \cup \psi$ pero como $\tau,\ \psi \in$ R-TORS, $\tau \cup \psi$ es cerrada bajo cocientes, por lo que $\forall\ Y \leq X,\ X/Y \in \tau \cup \psi$, es decir $X \in \mathbf{L}(\tau \cup \psi)$ **!**
    $\therefore M \in \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\psi$
  - $\supseteq \rfloor$ Sea $M \in \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\psi$ y supongamos que $M \notin \mathbf{FL}(\tau \cup \psi)$, entonces $\exists X \leq M,\ 0 \neq X \in \mathbf{L}(\tau \cup \psi)$, entonces $\exists Y \leq X,\ 0 \neq Y \in \tau \cup \psi$ pero $Y \leq X \leq M \in \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\psi$ **!**
    $\therefore M \in \mathbf{FL}(\tau \cup \psi)$

Ahora preparamos el escenario considerando las siguientes condiciones sobre $\tau,\ \psi \in$ R-TORS, las cuales jugarán un papel fundamental en el desarrollo de este trabajo

a) $\tau \cap \psi = \{0\}$
b) $\tau(M) \cap \psi(M) = 0\ \forall\ M \in Mod - R$

Si $\tau,\ \psi \in R - tors$, entonces las condiciones anteriores son equivalentes, de cualquier manera, si al menos una de las dos no es hereditaria, en general, sólo la segunda implica la primera. Para ver esto, sean $R,\ S,\ X$ como en el ejemplo1.3 *ii*) (de hecho S puede ser un anillo arbitrario). Sea $Y = \begin{pmatrix} S & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Definamos las clases τ y ψ, que resultan ser de torsión como sigue: $\tau = \{M \in Mod - R \mid MX = M\}$ y $\psi = \{M \in Mod - R \mid MY = M\}$. Entonces $\tau \cap \psi = \{0\}$, pero $\tau(M) \cap \psi(M) = \begin{pmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Nótese que τ es una clase de torsión hereditaria, no así ψ. Como veremos, el hecho de que las condiciones *a*) y *b*) no sean equivalentes provee la diferencia entre pseudo complementos en R-TORS y R-tors.

Una clase de torsión ψ se dice que suplementa a la clase de torsión τ si es máxima con la propiedad *b*). Por lo mencionado antes, si $\tau,\ \psi \in$ R-tors, ψ suplementa a τ si y sólo si ψ es un pseudo complemento para τ en R-tors. El siguiente teorema nos dice que siempre existe la clase suplementaria de una clase de torsión τ, es única y hereditaria; más aún, es la clase de torsión hereditaria cogenerada por la clase τ ([**5**])

TEOREMA 2.2. *Sean $\tau \in$ R-TORS y $\overline{\tau} = \boldsymbol{THE}\tau$, entonces*

1. $\overline{\tau} \in$ *R-tors*
2. $\tau(M) \cap \overline{\tau}(M) = 0$ *para todo* $M \in Mod - R$
3. *Si* $\psi \in$ *R-TORS es tal que* $\tau(M) \cap \psi(M) = 0$ *para todo* $M \in Mod - R$*, entonces* $\psi \leq \overline{\tau}$*.*

Demostración:

1. Por la proposición 1.2, $\mathbf{HE}\tau = \mathbf{EH}\tau$ es estable y hereditaria. Sean $N \leq M \in \overline{\tau} = \mathbf{THE}\tau$ y $K \leq N$ tal que $N/K \in \mathbf{HE}\tau$ así, $\eta' : N \to E(N/K)$ (la composicion de η y la inclusión $i : N/K \hookrightarrow E(N/K)$) puede extenderse a $\overline{\eta} : M \to E(N/K)$, entonces $M/Nu(\overline{\eta}) \in \mathbf{HE}\tau$, lo que nos dice que $Nu(\overline{\eta}) = M$
   $\therefore K = Nu(\eta) = N$
   $\therefore \overline{\tau}$ es hereditaria.
2. Sean $M \in$ Mod-R y K un pseudo complemento de $\tau(M)$ en M. Entonces $\tau(M) \cong ((\tau(M) + K)/K) \lhd M/K$ y por tanto $\tau(M/K) \lhd M/K$. Entonces $M/K \in \mathbf{E}\tau \subseteq \mathbf{HE}\tau \subseteq \mathbf{FTHE}\tau = \mathbf{F}\overline{\tau}$. Entonces tenemos que $(\overline{\tau}(M) + K)/K) \leq M/K \in \mathbf{F}\overline{\tau}$. También $(\overline{\tau}(M) + K)/K \cong \overline{\tau}(M)/(\overline{\tau}(M) \cap K) \in \overline{\tau}$. Por lo que $(\overline{\tau}(M) + K)/K \in \mathbf{F}\overline{\tau} \cap \overline{\tau} = \{0\}$ y así $\overline{\tau}(M) \leq K$.
   $\therefore \tau(M) \cap \overline{\tau}(M) \leq \tau(M) \cap K = 0$.
3. Sea $M \in$ Mod-R tal que $0 \neq M \in \mathbf{E}\tau$. Entonces $\tau(M) \cap \psi(M) = 0$ y $0 \neq \tau(M) \lhd M$ nos dice que $\psi(M) = 0$. Entonces $\mathbf{E}\tau \subseteq \mathbf{F}\psi$, de esta manera $\mathbf{HE}\tau \subseteq \mathbf{F}\psi$. Por lema 2.1 7) $\psi = \mathbf{TF}\psi,$ 3) $\mathbf{TF}\psi \subseteq \mathbf{THE}\tau = \overline{\tau}$
   $\therefore \psi \leq \overline{\tau}$.

De aquí en adelante para una clase γ de R-módulos, $\overline{\gamma}$ denota **THE**γ.

COROLARIO 2.3. *Sea $\tau \in$ R-tors. Entonces:*

1. $\overline{\tau}$ *es el único pseudo complemento de* τ *en la retícula R-tors*
2. $\overline{\tau} = \boldsymbol{hF}\tau$*.*

Demostración:

1. Por el Teorema 2.2 3) no hay una clase $\psi \in$ R-tors distinta a $\overline{\tau}$ que pueda ser pseudo complemento de τ ya que para toda $\psi \in$ R-tors que cumpla $\tau \wedge \psi = 0$ se tiene $\psi \leq \overline{\tau}$. $\overline{\tau}$ es pseudo complemento de τ por el Teorema 2.2 2) y lo mencionado enteriormente sobre las condiciones $a)$ y $b)$ y la relación $b) \Rightarrow a)$.

2. $\subseteq\rfloor$ Por el Teorema 2.2 $ii)$, $\overline{\tau} \subseteq \mathbf{F}\tau$, entonces $\overline{\tau} \subseteq \mathbf{hF}\tau$.
$\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{hF}\tau$ y supongamos que $M \notin \overline{\tau}$, entonces $\exists\, X \leq M$ tal que $0 \neq M/X \in \mathbf{HE}\tau$, entonces $\exists\, K \in \tau$ y $Y \in \mathbf{E}\tau$ tales que $K \lhd Y$, $M/X \hookrightarrow Y$ pero esto nos dice que $M/X \hookrightarrow E(M/X) \hookrightarrow E(Y) = E(K)$ por lo que $K \cap (M/X) \neq 0$, entonces $\tau(M/X) \neq 0$ **!**
$\therefore M \in \overline{\tau}$
$\therefore \overline{\tau} = \mathbf{hF}\tau$

Corolario 2.4. *Sea $\tau \in R-TORS$, entonces:*
(i) $\boldsymbol{E}\overline{\tau} \subseteq \boldsymbol{F}\tau$.
(ii) $\boldsymbol{E}\tau \subseteq \boldsymbol{F}\overline{\tau}$.
(iii) $\overline{\overline{\tau}} = \boldsymbol{hF}\overline{\tau}$

Demostración:
(i) Sea $M \in \mathbf{E}\tau$ y supongamos que $\tau(M) \neq 0$. Como $\overline{\tau} \lhd M$, tenemos $\overline{\tau}(M) \cap \tau(M) \neq 0$ **!**.
(ii) Nótese que $\tau \subseteq \mathbf{HE}\tau \subseteq \mathbf{FTHE}\tau = \mathbf{F}\overline{\tau}$. Por el Teorema 2.2 ($i$), $\overline{\tau} \in$ R-tors y por el Lema 1.1 (vii), $\mathbf{F}\overline{\tau}$ es estable
$\therefore \mathbf{E}\tau \subseteq \mathbf{EF}\tau = \mathbf{F}\tau$.
(iii) Por el Teorema 2.2 (i) $\overline{\overline{\tau}} \in$ R-tors y por el Corolario 2.3 (ii) $\overline{\overline{\tau}} = \mathbf{hF}\overline{\tau}$.

Lema 2.5. *Sean τ, $\psi \in R-TORS$, entonces:*
(i) $\psi \wedge \overline{\tau} = 0$ *si y sólo si* $\psi \subseteq \boldsymbol{T}\overline{\tau}$.
(ii) $\tau \subseteq \overline{\overline{\tau}} \subseteq \boldsymbol{T}\overline{\tau}$.
(iii) $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}} \subseteq \boldsymbol{T}\overline{\overline{\tau}} \subseteq \boldsymbol{TH}\tau \subseteq \boldsymbol{T}\tau$. *En particular* $\overline{\tau} \subseteq \boldsymbol{T}\overline{\overline{\tau}} \cap \boldsymbol{F}\tau$.
(iv) $\overline{\tau} = \boldsymbol{hF}\overline{\overline{\tau}} \subseteq \boldsymbol{hF}\tau \subseteq \boldsymbol{T}\tau$.
(v) *Las asignaciones $\tau \longmapsto \overline{\tau}$ y $\tau \longmapsto \overline{\overline{\tau}}$ son una conexión de Galois y una operación de cerradura en R-TORS.*

Demostración:
(i) Como $\overline{\tau}$, $\psi \in$ R-TORS, el Lema 2.1 (v) nos da el resultado.
(ii) Nótese que $\overline{\overline{\tau}} \cap \overline{\tau} = \{0\}$, entonces la primera parte nos dice que $\overline{\overline{\tau}} \subseteq \mathbf{T}\overline{\tau}$, por el Corolario 2.4 ($i$) tenemos $\mathbf{E}\overline{\tau} \subseteq \mathbf{F}\tau$, por el Lema 2.1 ($vii$) y ($iii$) $\tau = \mathbf{TF}\tau \subseteq \mathbf{TE}\overline{\tau}$ y como $\overline{\tau}$ es hereditaria $\overline{\tau} = \mathbf{H}\overline{\tau}$, entonces $\mathbf{E}\overline{\tau} = \mathbf{EH}\overline{\tau} = \mathbf{HE}\overline{\tau}$, entonces $\mathbf{TE}\overline{\tau} = \overline{\overline{\tau}}$
$\therefore \tau \subseteq \overline{\overline{\tau}}$.
(iii) Por la segunda parte $\overline{\tau} \subseteq \overline{\overline{\overline{\tau}}} \subseteq \mathbf{T}\overline{\overline{\tau}}$. Como $\overline{\overline{\tau}}(M) \cap \overline{\overline{\overline{\tau}}}(M) = 0\ \forall\ M \in$ Mod-R y $\tau \subseteq \overline{\overline{\tau}}$, tenemos $\tau(M) \cap \overline{\overline{\overline{\tau}}}(M) = 0\ \forall\ M \in$ Mod-R. Por el Teorema 2.2 (iii) $\overline{\overline{\overline{\tau}}} \subseteq \overline{\tau}$
$\therefore \overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}}$.
Por el Teorema 2.2 (i) $\overline{\overline{\tau}}$ es hereditaria, entonces $\mathbf{H}\tau \subseteq \overline{\overline{\tau}}$, por

el Lema 2.1 (iii) $\mathbf{T}\overline{\overline{\tau}} \subseteq \mathbf{TH}\tau \subseteq \mathbf{T}\tau$.
Como $\overline{\tau} \subseteq \mathbf{E}\overline{\tau}$, el Corolario 2.4 (i) y la segunda parte nos dan el resultado particular.

(iv) Por la tercera parte y el Corolario 2.4 (iii) tenemos $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}} = \mathbf{hF}\overline{\overline{\tau}}$. Por el Corolario 2.4 (i) $\overline{\tau} \subseteq \mathbf{F}\tau$ por lo que $\overline{\tau} \subseteq \mathbf{hF}\tau$. Ya que $\tau \subseteq \mathbf{H}\tau \subseteq \mathbf{HE}\tau$, el Lema 2.1 (ii) y el Corolario 2.3 (ii) nos dicen $\mathbf{hF}\tau = \overline{\tau} = \mathbf{THE}\tau \subseteq \mathbf{TH}\tau \subseteq \mathbf{T}\tau$.

(v) El resultado se sigue del Teorema 2.2 ya que $\psi \leq \overline{\tau} \Rightarrow \psi(M) \cap \tau(M) \leq \overline{\tau}(M) \cap \tau(M) = 0$; y la tercera parte, respectivamente.

Gracias al Lema 2.1 (v), puede verse que si $\tau \in$ R-TORS tiene un pseudo complemento $\overline{\tau}$, entonces $\overline{\tau} \subseteq \mathbf{T}\tau$. De cualquier manera el Ejemplo 2.17 muestra que en general $\mathbf{T}\tau \notin$ R-TORS. En el siguiente resultado mostramos que τ "se ajusta bien"a $\overline{\overline{\tau}}$ (en el sentido de que si $\psi \in$ R-TORS es tal que $\tau \leq \psi \leq \overline{\overline{\tau}}$, entonces $\psi \cap \mathbf{E}\tau \neq \{0\}$ y $\overline{\psi} = \overline{\tau}$), y $\overline{\overline{\tau}}$ tiene pseudo complementos en R-TORS y en R-tors.

Teorema 2.6. *Sea $\tau \in R-TORS$, entonces:*

(i) *τ está contenida en la clase de torsión hereditaria $\overline{\overline{\tau}}$ la cual tiene un único pseudo complemento $\overline{\tau}$ en R-tors y un único pseudo complemento $\boldsymbol{T}\overline{\overline{\tau}}$ en R-TORS tal que $\overline{\overline{\tau}} \subseteq \boldsymbol{T}\overline{\tau} \cap \boldsymbol{F}\overline{\tau}$.*

(ii) *Si $\tau \in R-tors$, entonces $\overline{\tau}$ y $\boldsymbol{T}\tau$ son sus únicos pseudo complementos en R-tors y R-TORS, respectivamente.*

(iii) *Si $\{0\} \neq \psi \in R-TORS$ es tal que $\psi \subseteq \boldsymbol{T}\overline{\tau}$, entonces $\psi \cap \boldsymbol{E}\overline{\overline{\tau}} \neq \{0\}$ y $\boldsymbol{E}\overline{\overline{\tau}} \subseteq \boldsymbol{F}\overline{\tau}$.*

(iv) *Si $\psi \in R-tors$ es tal que $\psi \subseteq \boldsymbol{T}\overline{\tau}$, entonces $\psi \leq \overline{\overline{\tau}}$.*

(v) *Si $\{0\} \neq \psi \in R-TORS$ es tal que $\psi \subseteq \overline{\overline{\tau}}$, entonces $\psi \cap \boldsymbol{E}\tau \neq \{0\}$.*

(vi) *Si $\psi \in R-TORS$ y $\tau \subseteq \psi \subseteq \overline{\overline{\tau}}$, entonces $\overline{\psi} = \overline{\tau}$.*

Demostración:

(i) Por el Lema 2.5 (ii) $\tau \subseteq \overline{\overline{\tau}}$ y por el Teorema 2.2 (i) $\overline{\overline{\tau}} \in$ R-tors. El Lema 2.5 (iii) nos dice que $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}}$ y el Corolario 2.3 (i) nos dice que $\overline{\tau}$ es el único pseudo complemento de $\overline{\overline{\tau}}$ en R-tors. Por el Lema 2.5 (i) $\mathbf{T}\overline{\overline{\tau}}$ es el único pseudo complemento de $\overline{\overline{\tau}}$ en R-TORS. El Lema 2.5 (iii), el resultado particular, nos dice que $\overline{\overline{\tau}} \subseteq \mathbf{T}\overline{\tau} \cap \mathbf{F}\overline{\tau}$.

(ii) $\overline{\tau}$ es el único pseudo complemento de τ en R-tors por el Corolario 2.3 (i). El Lema 2.1 (v) nos muestra que $\mathbf{T}\tau$ es el único pseudo complemento de τ en R-TORS.

(iii) Por el Teorema 2.2 (iii) $\exists X \in$ Mod-R tal que $\psi(X) \cap \overline{\overline{\tau}}(X) \neq 0$, de otro modo tendríamos $\psi \subseteq \mathbf{T}\overline{\tau} \cap \overline{\tau} = \{0\}$, una contradicción. Sea $M = \psi(X)$ y K un pseudo complemento de $\overline{\overline{\tau}}(M)$ en M.

Así $\overline{\overline{\tau}}(M) \cong (\overline{\overline{\tau}}(M)+K)/K \lhd M/K$, por lo que $M/K \in \psi \cap \mathbf{E}\overline{\overline{\tau}}$. Por el Corolario 2.4 (i) tenemos $\mathbf{E}\overline{\overline{\tau}} \subseteq \mathbf{F}\overline{\tau}$.

(iv) Como $\psi \subseteq \mathbf{T}\overline{\tau}$, por el Lema 2.5 (i), $\psi \wedge \overline{\tau} = 0$ pero la segunda parte nos dice que $\psi \leq \overline{\overline{\tau}}$.

(v) Por el Teorema 2.2 (iii) $\exists X \in$ Mod-R tal que $\psi(X) \cap \tau(X) \neq 0$, de otro modo, $\psi \leq \overline{\tau}$ y $\psi \leq \mathbf{T}\overline{\tau} \wedge \overline{\tau} = 0$. Sea $M = \psi(X)$ y $K \leq M$ un pseudo complemento de $\tau(M)$ en M. Así $\tau(M) \cong (\tau(M)+K)/K \lhd M/K$ por lo que $M/K \in \psi \cap \mathbf{E}\tau$.

(vi) Ya que $\tau \subseteq \psi \subseteq \overline{\overline{\tau}}$, tenemos también $\mathbf{HE}\tau \subseteq \mathbf{HE}\psi \subseteq \mathbf{HE}\overline{\overline{\tau}}$, por el Lema 2.1 (iii) tenemos $\overline{\overline{\overline{\tau}}} \leq \overline{\psi} \leq \overline{\tau}$ y finalmente porl el Lema 2.5 (iii) tenemos $\overline{\psi} = \overline{\tau}$.

Nuestro siguiente resultado relaciona el operador $\mathbf{L}$ con el pseudo complemento de una clase de torsión.

Proposición 2.7. *Sea $\tau \in R-TORS$, entonces:*

(i) $\overline{\tau} \subseteq \boldsymbol{TLHE}\tau = \boldsymbol{ThHE}\tau \subseteq \boldsymbol{THhE}\tau \subseteq \boldsymbol{TH}\tau \subseteq \boldsymbol{T}\tau \subseteq \boldsymbol{LT}\tau$.

(ii) *Si $\boldsymbol{hHE}\tau$ o $\boldsymbol{hE}\tau$ son estables, entonces $\boldsymbol{TLHE}\tau$ o $\boldsymbol{THhE}\tau$ son hereditarias, respectivamente.*

(iii) *$\boldsymbol{T}\tau \in R-TORS$ si y sólo si $\boldsymbol{LT}\tau$ es un pseudo complemento de τ en R-TORS.*

Demostración:

(i) **Afirmación**: Si $\gamma \subseteq$ Mod-R, entonces $\mathbf{Hh}\gamma \subseteq \mathbf{hH}\gamma$.
Demostración (de la afirmación): Sean $M \in \mathbf{Hh}\gamma \subseteq \mathbf{H}\gamma$ y $N \leq M$, entonces $\exists X \in \mathbf{h}\gamma$ tal que $N \hookrightarrow M \hookrightarrow X$, así tenemos que $X/N \in \mathbf{h}\gamma \subseteq \gamma$ y $M/N \hookrightarrow X/N$
$\therefore M \in \mathbf{hH}\gamma$.
Es fácil ver que $\mathbf{H}\tau \subseteq \mathbf{HhE}\tau$. De la afirmación se sigue que $\mathbf{HhE}\tau \subseteq \mathbf{hHE}\tau$. Por la Proposición 1.9 $\mathbf{LHE}\tau = \mathbf{hHE}\tau$. Además $\mathbf{LHE}\tau = \mathbf{hHE}\tau \subseteq \mathbf{HE}\tau$. Así tenemos las siguientes relaciones $\tau \subseteq \mathbf{H}\tau \subseteq \mathbf{HhE}\tau \subseteq \mathbf{hHE}\tau = \mathbf{LHE}\tau \subseteq \mathbf{HE}\tau$ y por el Lema 2.1 (iii) $\overline{\tau} = \mathbf{THE}\tau \subseteq \mathbf{TLHE}\tau = \mathbf{ThHE}\tau \subseteq \mathbf{THhE}\tau \subseteq \mathbf{TH}\tau \subseteq \mathbf{T}\tau$.
Nótese que si $\gamma = \mathbf{h}\gamma$, entonces $\gamma \subseteq \mathbf{L}\gamma$ por lo que $\mathbf{T}\tau \subseteq \mathbf{LT}\tau$.

(ii) Sean $M \in \mathbf{TLHE}\tau = \mathbf{ThHE}\tau$ ($\mathbf{THhE}\tau$) y $N \leq M$. Además sea $X \leq N$ tal que $N/X \in \mathbf{hHE}\tau$ ($\mathbf{HhE}\tau$), entonces $E(N/X) \in \mathbf{hHE}\tau$ ($\mathbf{HhE}\tau$). Si $f = i_E \circ \eta : N \longrightarrow E(N/X)$, donde $\eta : N \longrightarrow N/X$ es la proyección canónica e $i_E : N/X \longrightarrow E(N/X)$ es la inclusión, entonces f puede ser extendida a $\overline{f} : M \longrightarrow E(N/X)$. Como $\mathbf{hHE}\tau$ ($\mathbf{HhE}\tau$) es hereditaria, Im(f) e Im$(\overline{f}) \in$

hHEτ (**HhE**τ) y $M/\mathrm{Nu}(\overline{f}) \cong \mathrm{Im}(\overline{f}) \in$ **hHE**τ (**HhE**τ)
$\therefore M =$Nu$(\overline{f})$
$\therefore N =$Nu(f)
$\therefore N \in$ **ThHE**τ (**THhE**τ)

(iii) $\Rightarrow\rfloor$ Esto es claro ya que **LT**τ es la menor clase de torsión que contiene a **T**τ.
$\Leftarrow\rfloor$ Todo pseudo complemento de τ está contenido en **T**τ, entonces la primera parte nos dice que **T**τ = **LT**τ.

Nótese que, por la Proposición 1.9, **LHE**τ $\in$ R-tors por lo que **TLHE**τ $\in$ R-TORS.

Definición 2.8. *Un R-módulo B es subdirectamente irreducible si no es un producto subdirecto.*

En adelante usaremos $\underline{\sigma}$ para denotar la clase de R-módulos subdirectamente irreducibles. Nótese que $\mathbf{H}\underline{\sigma} = \underline{\sigma} = \mathbf{E}\underline{\sigma}$. En los resultados restantes de esta sección derivamos caracterizaciones de $\overline{\tau}$ en términos de $\underline{\sigma}$.

Teorema 2.9. *Sea $M \in Mod - R$, entonces M es un producto subdirecto si y sólo si $\exists \{N_\alpha\} \subseteq Sub_R(M)$, tales que $N_\alpha \neq 0$ $\forall \alpha$ y $\cap N_\alpha = 0$.*

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\{X_\alpha\} \subseteq$ Mod-R tal que M es un producto subdirecto de $\prod X_\alpha$. Sea $N_\beta =$ Nu$(\pi_\beta \circ i)$, donde $i : M \hookrightarrow \prod X_\alpha$ es la inclusión y $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ es la proyección, entonces $0 =$ Nu$(i) = \cap_\alpha$ Nu$(\pi_\alpha \circ i)$ $= \cap_\alpha N_\alpha$, además cada $N_\alpha \neq 0$.
$\Leftarrow\rfloor$ Como $\cap_\alpha N_\alpha = 0$, $f : M \to \prod_\alpha (M/N_\alpha)$ es monomorfismo. Además $f' = \pi_\alpha \circ f : M \to M/N_\alpha$ es epimorfismo (es la proyección natural)
$\therefore M$ es un producto subdirecto.

Corolario 2.10. *Sea $B \in Mod - R$. Entonces B es un módulo subdirectamente irreducible si y sólo si $\forall$ $\{N_\alpha\} \subseteq Sub_R(M)$ tal que $N_\alpha \neq 0$ $\forall$ α, $\cap_\alpha N_\alpha \neq 0$.*

Demostración: La demostración es directa del Teorema anterior.

Nota: Como $\prod E(S)$, el producto de las cápsulas inyectivas de módulos simples, es un cogenerador para Mod-R tenemos que $\forall$ $M \in$ Mod-R, $i : M \hookrightarrow \prod E(S)$. Si $M_S =$ Im$(\pi_S \circ i)$, $S \in$ R-Simp, entonces $M = \prod M_S$, así tenemos que cada M_S es un módulo subdirectamente irreducible y para cada M_S $\exists$ $K_S \leq M$ tal que $M/K_S \cong M_S$
$\therefore$ $\forall$ $M \in$ Mod-R, M es producto de módulos subdirectamente irreducibles.

LEMA 2.11. *Sean $M \in Mod - R$ y $\tau \in R - TORS$. Si $M \in$ $\boldsymbol{E}\tau$, entonces M es un producto subdirecto de $\{M_j\}_{j\in J} \subseteq \underline{\sigma}$ tales que $\tau(M_j) \lhd M_j \ \forall \ j \in J$.*

Demostración: Sea $M \in \mathbf{E}\tau$. Por lo mencionado en la nota, existe un conjunto $\{K_j\}_{j\in J} \subseteq Sub_R(M)$ tal que $\forall \ j \in J \ M/K_j \in \underline{\sigma}$ y $\cap_{j\in J} K_j = 0$. Para cada $j \in J$ pasa una de las siguientes opciones:

- $\tau(M) \leq K_j$
- $(\tau(M) + K_j)/K_j \lhd M/K_j$

Por lo que J es la unión disjunta de B y D, donde $B = \{j \in J \mid \tau(M) \leq K_j\}$ y $D = \{j \in J \mid (\tau(M) + K_j)/K_j \lhd M/K_j\}$. De esta manera tenemos $\tau(M) \cap (\cap_{j\in D} K_j) \subseteq (\cap_{j\in B} K_j) \cap (\cap_{j\in D} K_j = \cap_{j\in J} K_j = 0$. Ya que $\tau(M) \lhd M$, tenemos que $\cap_{j\in D} K_j = 0$. Así M es un producto subdirecto de los módulos subdirectamente irreducibles M/K_j, $j \in D$.

LEMA 2.12. *Sea γ una clase de R-módulos, entonces:*

(i) $\boldsymbol{E}(\gamma \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{E}\gamma \cap \underline{\sigma}$.
(ii) $\boldsymbol{I}(\gamma \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{I}\gamma \cap \underline{\sigma}$.
(iii) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{I}\gamma \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{HI}(\gamma \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{EH}(\gamma \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{HE}(\gamma \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}\gamma \cap \underline{\sigma}) \subseteq \boldsymbol{HE}\gamma \cap \underline{\sigma}$.

Demostración:

(i) $\subseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{E}(\gamma \cap \underline{\sigma})$. Es claro que $M \in \mathbf{E}\gamma$. Sea $\{N_\alpha\} \subseteq Sub_R(M)$ tal que $N_\alpha \neq 0 \ \forall \ \alpha$. Como $M \in \mathbf{E}(\gamma \cap \underline{\sigma})$, $\exists X \in \underline{\sigma}$ tal que $X \lhd M$. Así $\{X \cap N_\alpha\} \subseteq Sub_R(X)$ y $X \cap N_\alpha \neq 0 \ \forall \alpha$, entonces $0 \neq \bigcap(X \cap N_\alpha) = X \cap (\cap N_\alpha) \leq \cap N_\alpha$
$\therefore M \in \underline{\sigma}$
$\therefore M \in \mathbf{E}\gamma \cap \underline{\sigma}$.
$\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{E}\gamma \cap \underline{\sigma}$, entonces $\exists X \in \gamma$ tal que $X \lhd M \in \underline{\sigma}$, entonces $X \in \underline{\sigma}$
$\therefore M \in \mathbf{E}(\gamma \cap \underline{\sigma}$.

(ii) $\mathbf{I}(\gamma \cap \underline{\sigma}) = (\gamma \cap \underline{\sigma}) \cup \{E(M) \mid M \in \gamma \cap \underline{\sigma}\}$ e $\mathbf{I}\gamma \cap \underline{\sigma} = (\gamma \cup \{E(M) \mid M \in \gamma\}) \cap \underline{\sigma} = (\gamma \cap \underline{\sigma}) \cup (\underline{\sigma} \cap \{E(M) \mid M \in \gamma\})$. Es claro que si $M \in \underline{\sigma}$, entonces $E(M) \in \underline{\sigma}$. Así tenemos $\{E(M) \mid M \in \gamma \cap \underline{\sigma}\} \subseteq \underline{\sigma} \cap \{E(M) \mid M \in \gamma\}$. Del hecho de que $\underline{\sigma}$ es hereditaria, se sigue que $\underline{\sigma} \cap \{E(M) \mid M \in \gamma\} \subseteq \{E(M) \mid M \in \gamma \cap \underline{\sigma}\}$.

(iii) Por la Proposición 1.2, la primera y segunda parte, las igualdades son claras. Como $\mathbf{E}\gamma \cap \underline{\sigma} \subseteq \mathbf{HE}\gamma \cap \underline{\sigma}$ y ésta última es hereditaria (ambas clases lo son), si $M \in \mathbf{H}(\mathbf{E}\gamma \cap \underline{\sigma})$, $\exists X \in \mathbf{E}\gamma \cap \underline{\sigma} \subseteq \mathbf{HE}\gamma \cap \underline{\sigma}$ tal que $M \hookrightarrow X$
$\therefore M \in \mathbf{HE}\gamma \cap \underline{\sigma}$.

TEOREMA 2.13. *Sea $\tau \in R-TORS$, entonces:*

(i) $\overline{\tau} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{HE}\tau \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{THE}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{THI}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{TE}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma})$.

(ii) $\boldsymbol{F}\overline{\tau} = \boldsymbol{SHE}\tau = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{HE}\tau \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{SHE}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{SHI}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{SE}\overline{\overline{\tau}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{E}\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}) = \boldsymbol{SE}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma})$.

Demostración:

(i) Por el Teorema 2.2, el Lema 2.1 (*iii*) y el Lema 2.12, tenemos que $\overline{\tau} = \mathbf{THE}\tau \subseteq \mathbf{T}(\mathbf{HE}\tau \cap \underline{\sigma}) \subseteq \mathbf{TH}(\mathbf{E}\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{THE}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{THI}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{TH}(\mathbf{I}\tau \cap \underline{\sigma})$. Sea $\rho = \mathbf{THI}(\tau \cap \underline{\sigma})$.
Afirmación: $\rho(M) \cap \tau(M) = 0\ \forall M \in$ Mod-R.
Demostración (de la afirmación): Sea $M \in$ Mod-R y $K \leq M$ un pseudo complemento para $\tau(M)$ en M. Entonces $\tau(M) \cong (\tau(M)+K)/K \lhd M/K$ por lo que $\tau(M/K) \lhd M/K \in \mathbf{E}\tau$. Por el Lema 2.11 M/K es un producto subdirecto de módulos subdirectamente irreducibles $\{M_j\}_{j \in J}$ tales que $\tau(M_j) \lhd M_j\ \forall j \in J$. Como $\tau(M_j) \in \tau \cap \underline{\sigma}$, tenemos que $M_j \leq E(\tau(M_j)) \in \mathbf{I}(\tau \cap \underline{\sigma}) \subseteq \mathbf{HI}(\tau \cap \underline{\sigma}) \subseteq \mathbf{FTHI}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{F}\rho$, entonces $M/K \in \mathbf{F}\rho$. Así $(\rho(M)+K)/K \in \mathbf{F}\rho$. También $(\rho(M)+K)/K \cong \rho(M)/(\rho(M) \cap K) \in \rho$, por lo que $(\rho(M)+K)/K \in \mathbf{F}\rho \cap \rho = \{0\}$, por lo que $\rho(M) \subseteq K$. Tenemos pues que $\tau(M) \cap \rho(M) \subseteq \tau(M) \cap K = 0$. Por el Teorema 2.2 (*iii*), $\rho \leq \tau$.
$\therefore \overline{\tau} = \mathbf{THE}\tau = \mathbf{T}(\mathbf{HE}\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{THE}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{THI}(\tau \cap \underline{\sigma})$.
Como $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}}$ (Lema 2.5 (*iii*)) y $\mathbf{H}\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\tau}}$ (Teorema 2.2 (*i*)), la Proposición 1.2 y la conclusión anterior nos dicen que $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}} = \mathbf{T}(\ \mathbf{HE}\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{T}(\mathbf{EH}\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{T}(\mathbf{E}\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{TE}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma})$.

(ii) Por el Lema 2.12, $\mathbf{SHI}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{SHE}(\tau \cap \underline{\sigma}) \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{HE}\tau \cap \underline{\sigma}) \subseteq \mathbf{SHE}\tau$. Por el Corolario 2.4 (*iii*) y el Lema 2.1 (*ii*) y (*iv*), $\mathbf{SHE}\tau \subseteq \mathbf{SHF}\overline{\tau} = \mathbf{F}\overline{\tau}$. Por la proposición 1.2 $\mathbf{HI}(\tau \cap \underline{\sigma})$ es una clase hereditaria y cerrada bajo extensiones esenciales. Por la primera parte $\overline{\tau} = \mathbf{THI}(\tau \cap \underline{\sigma})$. Por el Teorema 73 de [**10**], $\mathbf{F}\overline{\tau} \subseteq \mathbf{SHI}(\tau \cap \underline{\sigma})$
$\therefore \mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{SHE}\tau = \mathbf{S}(\mathbf{HE}\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{SHE}(\tau \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{SHI}(\tau \cap \underline{\sigma})$.
Como $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}}$ y $\mathbf{H}\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\tau}}$, por la conclusión anterior tenemos $\mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{SHE}\overline{\overline{\tau}} = \mathbf{SE}\overline{\overline{\tau}} = \mathbf{S}(\mathbf{E}\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{SE}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma})$.

El Teorema 2.13 produce teoremas de descomposición subdirecta para módulos de ciertas clases libres de torsión como puede verse en el siguiente corolario, en el cual usamos $\prod^{\#}$ para denotar un producto subdirecto. Recordemos que el corazón de un módulo subdirectamente irreducible M es el único submódulo mínimo $H(M)$ de M.

COROLARIO 2.14. *Sean* $\tau \in R-TORS$, $M \in Mod-R$ *y* $\theta = \boldsymbol{Ls}\tau$, *entonces:*

(i) $\overline{\tau}(M) = 0$ *si y sólo si* $M = \prod^{\#} M_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$ *donde* $H(M) \in \overline{\overline{\tau}}$.
(ii) $\overline{\overline{\tau}}(M) = 0$ *si y sólo si* $M = \prod^{\#} M_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$ *donde* $H(M) \in \overline{\tau}$.
(iii) $\overline{\theta}(M) = 0$ *si y sólo si* $M = \prod^{\#} M_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$ *donde* $H(M) \in \tau$.
(iv) $\overline{\tau} \subseteq \overline{\theta}$ *y si* $\tau \in R-tors$, *entonces* $\overline{\tau} = \overline{\theta}$.

Demostración:

(i) **Afirmación**: $\mathbf{E}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}) = \{X \in \underline{\sigma} \mid H(M) \in \overline{\overline{\tau}}\}$.
Demostración (de la afirmación):
$\subseteq\rfloor$ Sean $M \in \mathbf{E}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma})$ y $N \in \overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}$ tales que $N \lhd M$, entonces $M \in \underline{\sigma}$ y por la definición de $H(M)$, tenemos que $H(M) \leq N \in \overline{\overline{\tau}}$. Ya que $\overline{\overline{\tau}}$ es hereditaria, $M \in \{X \in \underline{\sigma} \mid H(X) \in \overline{\overline{\tau}}\}$.
$\supseteq\rfloor$ Note que $\forall M \in \underline{\sigma}$, $H(M) \lhd M$. Sea $M \in \{X \in \underline{\sigma} \mid H(X) \in \overline{\overline{\tau}}\}$, como $\underline{\sigma}$ es hereditaria, $H(M) \in \overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma}$
$\therefore M \in \mathbf{E}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma})$.
Ahora, el resultado se sigue de $\mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{SE}(\overline{\overline{\tau}} \cap \underline{\sigma})$ (Teorema 2.13 (ii)).
(ii) Ya que $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}}$, el resultado se sigue de la primera parte.
(iii) Como $\mathbf{s}\tau$ es hereditaria y cerrada bajo cocientes, entonces $\theta \in$ R-tors y $\mathbf{s}\theta = \mathbf{s}\tau$.Además $\forall$ $X \in \underline{\sigma}$, $H(X) \in$ R-Simp. Así $\mathbf{HE}(\theta \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{EH}(\theta \cap \underline{\sigma}) = \mathbf{E}(\theta \cap \underline{\sigma}) = \{X \in \underline{\sigma} \mid H(X) \in \theta\} = \{X \in \underline{\sigma} \mid H(X) \in \mathbf{s}\theta = \mathbf{s}\tau\} = \{X \in \underline{\sigma} \mid H(X) \in \tau\}$ y el resultado se sigue de $\mathbf{F}\overline{\theta} = \mathbf{SHE}(\theta \cap \underline{\sigma})$ (Teorema 2.13 (*iii*)).
(iv) Como $\mathbf{s}\tau \subseteq \tau$, entonces $\theta \subseteq \tau$ y por el Lema 2.1 (*iii*) $\overline{\tau} \subseteq \overline{\theta}$. Si $\tau \in$ R-tors, entonces $\mathbf{s}\tau = \mathbf{s}\overline{\overline{\tau}}$, entonces la primera y la tercera parte nos dicen que $\mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{F}\overline{\theta}$ por lo que $\overline{\tau} = \overline{\theta}$.

Observe que a partir del Corolario 2.14 (*ii*) tenemos el siguiente resultado estructural: $\overline{\tau} = \overline{\overline{\tau}}$ si y sólo si todo $M \in$ Mod-R con $\tau(M) = 0$ es un producto subdirecto de módulos subdirectamente irreducibles con corazón en $\overline{\tau}$.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sea* $\tau \in R-TORS$, *entonces* $\tau = \overline{\overline{\tau}}$ *si y sólo si* τ *es la teoría de torsión hereditaria cogenerada (en el sentido de* [**5**]*) por un conjunto de módulos simples.*

Demostración:

$\Rightarrow\rfloor$ Sea $\tau \in$ R-TORS tal que $\tau = \overline{\overline{\tau}}$ y sea $\mathfrak{C} \subseteq$ R-Mod, $\mathfrak{C} = \{M \mid M \in$ R-Simp y M es de $\overline{\tau}$-torsión $\}$. Sea $M \in \mathfrak{C}$ y consideremos la teoría de torsión generada por M:
$F_M = \{F \mid Hom(M, F) = 0\}$ y $T_M = \{T \mid Hom(T, F) = 0 \,\forall\, F \in F_M\}$.
Entonces $T_M \leq \overline{\tau}$ y $\{0\} \leq T_M \wedge \overline{\overline{\tau}} \leq \overline{\tau} \wedge \overline{\overline{\tau}} = \{0\}$ por lo que $T_M \wedge \tau = T_M \wedge \overline{\overline{\tau}} = \{0\}$, entonces $T_M \nleq \tau$. Esto quiere decir que M no es de

τ-torsión y por lo tanto es libre de τ-torsión. Ahora consideremos la teoría de torsión cogenerada por M:
${}_M T = \{T \mid Hom(T, M) = 0\}$ y ${}_M F = \{F \mid Hom(T, F) = 0 \ \forall \ T \in {}_M T\}$.
Tenemos que ${}_M F \leq F_\tau$, entonces $\tau = T_\tau \leq {}_M T$
$\therefore \tau \leq \bigwedge_{M \in \mathfrak{C}} {}_M T = {}_{\mathfrak{C}} T$ (la igualdad es en el sentido de [**5**]).
Ahora, sea $\tau' = \bigwedge \{{}_M T \mid M \in$ R-Simp y M es libre de τ-torsión$\}$. Tenemos que $\overline{\tau} \leq \tau'$ y así tenemos que $\overline{\tau} \wedge {}_{\mathfrak{C}} T \leq \tau' \wedge {}_{\mathfrak{C}} T = \bigwedge \{ {}_M T \mid M \in$ R-Simp $\} = \{0\}$. Entonces ${}_{\mathfrak{C}} T \leq \overline{\overline{\tau}} = \tau$
$\therefore \tau = {}_{\mathfrak{C}} T$.

Nota: Lo anterior nos dice que para $\psi \in$ R-tors, $\overline{\psi}$ es la teoría de torsión (hereditaria) cogenerada por $\mathfrak{C} = \{M \in$ R-Simp $\mid M$ es de ψ-torsión $\}$.
$\Leftarrow \rfloor$ Sea $\tau \in$ R-tors de la forma $\tau = {}_{\mathfrak{C}} T$ para $\mathfrak{C} \subseteq$ R-Simp y sea $\mathfrak{D} = \{M \in$ R-Simp $\mid M \notin \mathfrak{C}\}$. Si $M' \in \mathfrak{D}$, entonces $T_{M'} \leq {}_M T \ \forall \ M \in \mathfrak{C}$, entonces M' es de τ-torsión. Recíprocamente, si M' es un módulo simple de τ-torsión, entonces M' no es isomorfo a elemento alguno de $\mathfrak{C}$ y por lo tanto debe ser isomorfo a algún elemento de $\mathfrak{D}$. Por la nota previa tenemos que $\overline{\tau} = {}_{\mathfrak{D}} T$. Usando de nuevo este argumento, tenemos que $\overline{\overline{\tau}} = {}_{\mathfrak{C}} T = \tau$.

Nótese que el Ejemplo 3.2 provee una clase de torsión hereditaria estable τ para la cual $\tau \neq \overline{\overline{\tau}}$. También, las descomposiciones del Corolario 2.14 (i) y (iii) son, en general, distintas para $\tau \in$ R-tors como puede verse en el Ejemplo 2.17. Los siguientes ejemplos ilustran varios resultados de esta sección.

Ejemplo 2.16. *Existe una clase de torsión hereditaria τ tal que $\overline{\tau} \neq \boldsymbol{T}\tau$, por lo cual los pseudo complementos de τ en R-tors y R-TORS son distintos. Sean F un campo, $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*
Tomemos $\tau = \{M \in Mod - R \mid MX = M\}$. Entonces $Y \in \boldsymbol{T}\tau$. Para ver esto último, observe que $Y \notin \tau$ y $Y/K \notin \tau$ (ya que $K \in \tau$ y τ es cerrada bajo extensiones). De cualquier manera $K \lhd Y$, por lo que $Y \in \boldsymbol{E}\tau$. Así $Y \notin \boldsymbol{TE}\tau = \overline{\tau}$ (por la Proposición 1.2). De esta manera $\overline{\tau}$ está contenida propiamente en $\boldsymbol{T}\tau$. También, dado que $K \lhd Y$ y $K \notin \boldsymbol{T}\tau$, $\boldsymbol{T}\tau$ no es una clase hereditaria.

Ejemplo 2.17. *Existe una clase de torsión estable τ tal que $\overline{\tau} \neq \boldsymbol{T}\tau$ y $\boldsymbol{T}\tau$ no es una clase de torsión. Sea $\tau = \boldsymbol{L}\{\mathbb{Z}_{p^\infty},\ 0\}$. Entonces $\tau = \{M \in Mod - \mathbb{Z} \mid M$ es una suma directa de copias de $\mathbb{Z}_{p^\infty}\}$. Observe* *que* $\tau = \boldsymbol{I}\tau = \boldsymbol{E}\tau$, *pero* $\boldsymbol{H}\tau \neq \tau$. $\overline{\tau} = \boldsymbol{T}\overline{\overline{\overline{\tau}}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{H}\tau = \{M \in Mod{-}\mathbb{Z} \mid M$ *es un grupo de torsión cuya componente p-primaria es cero*$\}$. *También tenemos las siguientes propiedades:*

(i) *Como* $\mathbb{Z} \in \boldsymbol{T}\tau$, *entonces* $\boldsymbol{T}\tau \notin \mathbb{Z}$*-TORS.*
(ii) *Nótese que* $\mathbb{Z}_p \in \boldsymbol{hF}\tau$, *pero* $\mathbb{Z}_p \notin \overline{\tau}$. *De esta manera* $\overline{\tau} \neq \boldsymbol{hF}\tau$.
(iii) *Como todo elemento de* τ *es inyectivo,* $\boldsymbol{T}\tau \subseteq \boldsymbol{F}\tau$, *pero* $\boldsymbol{T}\tau \neq \boldsymbol{F}\tau$ *ya que el conjunto de los números racionales está en* $\boldsymbol{F}\tau$, *pero no en* $\boldsymbol{T}\tau$.
(iv) $\overline{\tau} = \boldsymbol{T}\overline{\overline{\overline{\tau}}} \cap \boldsymbol{F}\tau$
(v) $\overline{\tau}$ *es estable y hereditaria, por lo que* $\overline{\overline{\overline{\tau}}} = \boldsymbol{T}\overline{\tau} = \{M \in Mod$-$\mathbb{Z} \mid M$ *es igual a su componente p-primaria*$\}$.
(vi) τ *está contenida propiamente en* $\overline{\overline{\overline{\tau}}}$, *y* $\boldsymbol{s}\tau$ *está contenida propiamente en* $\boldsymbol{s}\overline{\overline{\overline{\tau}}}$.
(vii) *Para* $\theta = \boldsymbol{Ls}\tau$, *tenemos que* $\theta = \{0\}$, *por lo que* $\overline{\theta} = Mod - \mathbb{Z}$.

3. Complementos

En este capítulo caracterizamos la condicion de que $\mathbf{E}\tau$ (con $\tau \in$ R-tors) sea una clase libre de torsión (véase el Problema (2)) en términos de la complementación de τ (Teorema 3.3). Como corolario somos capaces de caracterizar aquellos anillos para los cuales $\mathbf{T}\tau = \mathbf{F}\tau$ para toda $\tau \in$ R-TORS. Después consideramos condiciones para que $\tau = \overline{\overline{\tau}}$. Nuestro primer resultado muestra que si τ es hereditaria o cerrada bajo extensiones esenciales y τ tiene un complemento en R-TORS, entonces $\overline{\tau}$ es dicho complemento.

Proposición 3.1. *Sean τ, $\psi \in R-TORS$ tales que $\tau \wedge \psi = 0$ y $\tau \vee \psi = Mod - R$.*

(i) *Si $\boldsymbol{H}\psi = \psi$, entonces:*
  (a) *$\psi = \overline{\tau}$.*
  (b) *$\tau = \overline{\overline{\tau}}$.*
  (c) *Si R-TORS es una retícula modular, entonces $\overline{\tau} = \boldsymbol{T}\tau$ y $\tau = \boldsymbol{T}\overline{\tau}$.*

(ii) *Si $\boldsymbol{E}\psi = \psi$, entonces $\boldsymbol{H}\psi = \psi$.*

Demostración:

(i) Supongamos que $\mathbf{H}\psi = \psi$.
  (a) Sea $\theta = \overline{\overline{\tau}} \cap \psi$. Por el Teorema 2.6 (v), si $\theta \neq \{0\}$, entonces existen $M \in \psi \cap \mathbf{E}\tau$ y $K \lhd M$ con $K \in \psi \cap \tau$ **!**
  $\therefore \{0\} = \theta = \overline{\overline{\tau}} \cap \psi$.
  De este modo ψ es el complemento de $\overline{\overline{\tau}}$ en R-tors. Como R-tors es una retícula distributiva, en particular es modular, tenemos que ψ es un pseudo complemento de $\overline{\overline{\tau}}$ en R-tors. Por el Teorema 2.6 (i), $\psi = \overline{\tau}$.
  (b) Por hipótesis τ es complemento (en R-TORS) de ψ. De la parte (a) tenemos que $\psi \cap \overline{\overline{\tau}} = \{0\}$ y como $\tau \leq \overline{\overline{\tau}}$, resulta que $\overline{\overline{\tau}}$ es complemento (en R-tors) de ψ. Supongamos que $\tau \notin$ R-tors. Entonces existe $M \in \tau$ y $K < M$ tal que $0 \neq K \notin \tau$. Así $0 \neq K/\tau(K) \in \mathbf{F}\tau$ y $M/\tau(K) \in \tau \subseteq \mathbf{E}\tau$ por el Corolario 2.4 (ii) $\mathbf{E}\tau \subseteq \mathbf{F}\overline{\tau}$, entonces $K/\tau(K) \in \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\overline{\tau}$ **!**
  $\therefore \tau \in$ R-tors.
  Como R-tors es una retícula distributiva, los complementos son únicos. Así $\tau = \overline{\overline{\tau}}$.
  (c) Supongamos que R-TORS es una retícula modular, entonces los complementos son pseudo complementos, por lo que $\overline{\tau}$ es un pseudo complemento de $\tau = \overline{\overline{\tau}}$, entonces por el Teorema 2.6 (i) y la parte (b) tenemos $\overline{\tau} = \mathbf{T}\overline{\overline{\tau}} = \mathbf{T}\tau$. De

igual manera $\overline{\overline{\tau}}$ es un pseudo complemento de $\overline{\overline{\overline{\tau}}} = \overline{\tau}$ y así $\tau = \overline{\overline{\tau}} = \mathbf{T}\overline{\overline{\overline{\tau}}} = \mathbf{T}\overline{\tau}$.

(ii) Supongamos que $\psi = \mathbf{E}\psi$ y $\psi \neq \mathbf{H}\psi$. Sea $\theta = \tau \cap \overline{\overline{\psi}}$ y supongamos que $\theta = \{0\}$. Como $\overline{\overline{\psi}} \in$ R-tors, $\overline{\overline{\psi}} = \mathbf{H}\overline{\overline{\psi}}$ y se cumplen las hipótesis para la primera pate cambiando ψ por $\overline{\overline{\psi}}$, por lo que $\tau = \overline{\overline{\tau}}$ y por lo tanto $\tau = \mathbf{H}\tau$. Con estas condiciones podemos intercambiar los papeles de τ y ψ en la primera parte. Entonces tenemos que $\psi = \overline{\overline{\psi}}$ y así $\psi = \mathbf{H}\psi$ **!**
$\therefore \{0\} \neq \theta = \tau \cap \overline{\overline{\psi}}$.
Ahora, como $\{0\} \neq \theta \subseteq \overline{\overline{\psi}}$, por el Teorema 2.6 (v) $\{0\} \neq \theta \cap \mathbf{E}\psi = \theta \cap \psi \subseteq \tau \cap \psi$ **!**
$\therefore \psi = \mathbf{H}\psi$.

Ejemplo 3.2. *Existe una clase de torsión hereditaria y estable τ que no tiene pseudo complemento distinto del trivial (y por lo tanto no tiene complemento) en R-TORS. Sea $R = \mathbb{Z}$ y τ la clase de grupos abelianos de torsión. Entonces τ es una clase de torsión hereditaria y estable. Por el Teorema 2.2 $\overline{\tau} = \boldsymbol{T}\tau$. Sea $0 \neq M \in \boldsymbol{T}\tau$. M es libre de torsión y por lo tano $\exists K \leq M$ tal que $K \cong \mathbb{Z}$. Ya que $\boldsymbol{T}\tau$ es hereditaria y $\mathbb{Z} \notin \boldsymbol{T}\tau$ tenemos una contradicción. De esta manera $\boldsymbol{T}\tau = \{0\}$ y $\overline{\overline{\tau}} = Mod - \mathbb{Z}$.*

Nuestro siguiente resultado no sólo caracteriza la condición de que $\overline{\tau}$ sea complemento de τ, sino que lo hace en dirección del Problema (2) del capítulo 1.

Teorema 3.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\tau \vee \overline{\tau} = Mod - R$.
(ii) $\boldsymbol{E}\tau = \boldsymbol{F}\overline{\tau}$.
(iii) $\boldsymbol{E}\overline{\tau} = \boldsymbol{F}\tau$.
(iv) *τ es una clase hereditaria y $\boldsymbol{E}\tau$ es cerrada bajo productos directos.*
(v) *$\boldsymbol{E}\tau$ es una clase libre de torsión.*
(vi) *$\boldsymbol{E}\overline{\tau}$ es una clase libre de torsión.*

Demostración:

1. $(i) \Rightarrow (ii)\rfloor$ Por el Corolario 2.4 (ii) sabemos que $\mathbf{E}\tau \subseteq \mathbf{F}\overline{\tau}$. Supongamos que $\mathbf{E}\tau \neq \mathbf{F}\overline{\tau}$. Sea $M \in \mathbf{F}\overline{\tau}$ tal que $0 \neq M \notin \mathbf{E}\tau$. Entonces $\exists X \leq M$ tal que $0 \neq X$ y $\tau(M) \cap X = 0$, además $X \in \mathbf{F}\overline{\tau}$. Por la Proposición 3.1 τ es hereditaria por lo que $\tau(X) \leq \tau(M) \cap X = 0$, entonces $X \in \mathbf{F}\tau$. Así, por el Lema 2.1 $(viii)$, $0 \neq X \in \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{FL}(\tau \cap \overline{\tau}) = \mathbf{F}(\tau \vee \overline{\tau}) = \{0\}$ **!**
$\therefore \mathbf{E}\tau = \mathbf{F}\overline{\tau}$.

2. $(ii) \Leftrightarrow (iii)\rfloor$
   $\Rightarrow\rfloor$ $\subseteq\rfloor$ Por el Corolario 2.4 (i) $\mathbf{E}\overline{\tau} \subseteq \mathbf{F}\tau$.
   $\supseteq\rfloor$ Sea $M \in \mathbf{F}\tau$ y supongamos que $M \notin \mathbf{E}\overline{\tau}$. $\overline{\tau}(M) \neq 0$, de otro modo $M \in \mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{E}\tau$, contradiciendo que $M \in \mathbf{F}\tau$. Sea $0 \neq N \leq M$ un pseudo complemento de $\overline{\tau}(M)$ en M. Entonces $N \cap \overline{\tau}(M) = 0$ y como $\overline{\tau}$ es hereditaria, $\overline{\tau}(N) = 0$. Entonces $N \in \mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{E}\tau$ y así $\tau(N) \lhd N \leq M$**!**
   $\therefore M \in \mathbf{E}\overline{\tau}$.
   $\Leftarrow\rfloor$ $\subseteq\rfloor$ Por el Corolario 2.4 (ii) $\mathbf{E}\tau \subseteq \mathbf{F}\overline{\tau}$.
   $\supseteq\rfloor$ Nótese que τ es hereditaria ya que $\mathbf{F}\tau = \mathbf{E}\overline{\tau}$ es estable. Ahora, la misma prueba de la implicación anterior, intercambiando los papeles de τ y $\overline{\tau}$, nos da el resultado.
3. (ii) y $(iii) \Rightarrow (iv)\rfloor$ Ya que $\mathbf{F}\tau$ es estable, τ es hereditaria. De (ii) tenemos que $\mathbf{E}\tau$ es una clase libre de torsión y por lo tanto es cerrada bajo productos directos.
4. $(iv) \Rightarrow (v)\rfloor$ Por la hipótesis y la proposición 1.2, $\mathbf{E}\tau = \mathbf{EH}\tau = \mathbf{HE}\tau$ es cerradabajo productos directos. La proposición 1.4 nos dice que $\mathbf{HE}\tau$ es cerrada bajo submódulos y extensiones (el Lema 1.1 (iv) nos asegura que $\mathbf{E}\tau$ es cerrada bajo sumas directas).
5. $(v) \Rightarrow (i)\rfloor$ Sea ψ la clase de torsión correspondiente a la clase libre de torsiíon $\mathbf{E}\tau$ (es decir $\mathbf{E}\tau = \mathbf{F}\psi$). Entonces $\mathbf{EF}\psi = \mathbf{EE}\tau = \mathbf{E}\tau = \mathbf{F}\psi$, esto nos dice que $\mathbf{F}\psi$ es cerrada bajo extensiones esenciales, por lo que ψ es hereditaria. Por la Proposición 1.2 tenemos $\mathbf{EH}\tau = \mathbf{HE}\tau = \mathbf{HF}\psi = \mathbf{F}\psi = \mathbf{E}\tau$. Entonces para todo $M \in$ Mod-R tenemos $\tau(M) \cap \psi(M) \in \tau \cap \psi \subseteq \mathbf{H}\tau \cap \psi \subseteq \mathbf{EH}\tau \cap \psi = \mathbf{E}\tau \cap \psi = \mathbf{F}\psi \cap \psi = \{0\}$. Por el Teorema 2.2 (iii), $\psi \leq \overline{\tau}$, entonces $\mathbf{F}\overline{\tau} \subseteq \mathbf{F}\psi = \mathbf{E}\tau$. Por el Corolario 2.4 (ii), $\mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{E}\tau$. Entonces $\mathbf{F}\tau \cap \mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{F}\tau \cap \mathbf{E}\tau = \{0\}$
   $\therefore \tau \cap \overline{\tau} =$ Mod-R.
6. $(vi) \Leftrightarrow (i)\rfloor$ La equivalencia $(v) \Leftrightarrow (i)$ y la simetría de (i) nos dan la equivalencia deseada.

El Corolario 2.4 (i) y (ii), el Lema 2.5 (iii) y el Teorema 3.3 (ii) y (iii) motivan a investigar condiciones que aseguren que alguna o todas las igualdades siguientes se cumplan: $\overline{\tau} = \mathbf{F}\tau$; $\tau = \mathbf{F}\overline{\tau}$; $\mathbf{T}\tau = \mathbf{F}\tau$. Los resultados restantes de este capítulo se enfocan en estos asuntos.

Corolario 3.4. *Sea $\tau \in R - TORS$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\boldsymbol{I}\overline{\tau} = \overline{\tau}$ *y* $\tau \vee \overline{\tau} = Mod - R$.
(ii) $\overline{\tau} = \boldsymbol{F}\tau$.
(iii) $\overline{\tau}$ *es una clase estable TTF y* $\tau = \overline{\overline{\tau}}$.
(iv) $\tau = \boldsymbol{T}\overline{\tau}$ *y* $\overline{\tau}$ *es una clase TTF.*

Demostración:

1. $(i) \Rightarrow (ii)\rfloor$ Por hipótesis y la Proposición 1.2, tenemos $\overline{\tau} = \mathbf{H}\overline{\tau} = \mathbf{HI}\overline{\tau} = \mathbf{EH}\overline{\tau} = \mathbf{E}\overline{\tau}$ y por el Teorema 3.3 (iii) $\mathbf{E}\overline{\tau} = \mathbf{F}\tau$ $\therefore \overline{\tau} = \mathbf{F}\tau$.
2. $(ii) \Rightarrow (iii)\rfloor$ Como $\overline{\tau} = \mathbf{F}\tau$ y $\mathbf{F}\tau$ es una clase libre de torsión, $\overline{\tau}$ es una clase TTF. Por el Corolario 2.4 (i), $\overline{\tau}$ es estable. Como $\overline{\tau}$ es hereditaria y estable tenemos que $\overline{\overline{\tau}} = \mathbf{THE}\overline{\tau} = \mathbf{T}\overline{\tau} = \mathbf{TF}\tau = \tau$.
3. $(iii) \Rightarrow (iv)\rfloor$ Como $\overline{\tau}$ es hereditaria y estable $\tau = \overline{\overline{\tau}} = \mathbf{T}\overline{\tau}$.
4. $(iv) \Rightarrow (i)\rfloor$ Como $\overline{\tau}$ es una clase TTF, en particular es una clase libre de torsión por lo que existe $\psi \in$ R-TORS tal que $\overline{\tau} = \mathbf{F}\psi$.
   Afirmación: $\mathbf{F}(\overline{\tau} \cup \psi) = \{0\}$.
   Demostración (de la afirmación):
   Sea $M \in \mathbf{F}(\overline{\tau} \cup \psi)$. Entonces $\psi(M) \in \psi$ y $M/\psi(M) \in \mathbf{F}\psi = \overline{\tau}$. Como $M \in \mathbf{F}(\overline{\tau} \cup \psi)$, tenemos que $\psi(M) = 0$, entonces $M \in \overline{\tau}$ por lo que $M = 0$. Así $\mathbf{F}(\overline{\tau} \cup \psi) = \{0\}$.
   Entonces $\overline{\tau} \vee \psi =$ Mod-R. También $\tau = \mathbf{T}\overline{\tau} = \mathbf{TF}\psi = \psi$. Por el Teorema 3.3 (i) y (iv) τ es hereditaria por lo que $\overline{\tau} = \mathbf{F}\psi = \mathbf{F}\tau$ es estable.

Corolario 3.5. *Sea $\tau \in R - TORS$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\boldsymbol{T}\tau = \boldsymbol{F}\tau$ *y* τ *es una clase TTF.*
(ii) $\overline{\tau} = \boldsymbol{F}\tau$ *y* τ *es estable.*
(iii) $\overline{\tau} = \boldsymbol{F}\tau$ *y* $\tau = \boldsymbol{F}\overline{\tau}$.
(iv) τ *y* $\overline{\tau}$ *son clases TTF estables.*

Demostración:

1. $(i) \Rightarrow (ii)\rfloor$ Como τ es una clase TTF, en particular es hereditaria, por lo que $\mathbf{T}\tau$ es una clase de torsión, la cual es hereditaria por ser igual a $\mathbf{F}\tau$. Por el Teorema 2.2 (iii) $\mathbf{T}\tau \subseteq \overline{\tau} \subseteq \mathbf{E}\overline{\tau}$. Por el Corolario 2.4 (i) $\mathbf{E}\overline{\tau} \subseteq \mathbf{F}\tau = \mathbf{T}\tau$.
   $\therefore \overline{\tau} = \mathbf{F}\tau = \mathbf{T}\tau = \mathbf{E}\overline{\tau}$
   Ahora por el Corolario 3.4 y el Teorema 3.3 tenemos que $\mathbf{E}\tau = \mathbf{F}\overline{\tau} = \mathbf{FF}\tau = \mathbf{FT}\tau = \tau$
   $\therefore \tau$ es estable.

2. $(ii) \Rightarrow (iii)\rfloor$ Por el Corolario 3.4 $\tau = \overline{\overline{\tau}}$, así $\mathbf{H}\tau = \tau$. Por el Lema 1.1 (iii) $\mathbf{H}\tau = \mathbf{EH}\tau$. Entonces $\tau = \mathbf{E}\tau$ y por el Teorema 3.3 $\tau = \mathbf{E}\tau = \mathbf{F}\overline{\tau}$.
3. $(iii) \Rightarrow (iv)\rfloor$ Una aplicación del Corolario 3.4, por cada una de las hipótesis, nos da el resultado.
4. $(iv) \Rightarrow (i)\rfloor$ Como τ es hereditaria y estable, $\overline{\tau} = \mathbf{THE}\tau = \mathbf{T}\tau$. Además $\tau = \mathbf{E}\tau$ es una clase libre de torsión, entonces $\mathbf{E}\overline{\tau} = \mathbf{F}\tau$ (Teorema 3.3). Ya que $\overline{\tau} = \mathbf{E}\overline{\tau}$, tenemos $\overline{\tau} = \mathbf{E}\overline{\tau}\mathbf{F}\tau$
$\therefore \mathbf{T}\tau = \mathbf{F}\tau$.

Corolario 3.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\boldsymbol{T}\tau = \boldsymbol{F}\tau$, *para toda* $\tau \in R - TORS$.
(ii) $\overline{\tau} = \boldsymbol{F}\tau$, *para toda* $\tau \in R - TORS$.
(iii) *Toda clase de torsión* $\tau \subsetneq R - Mod$ *es una clase* TTF.
(iv) R *es una suma directa finita de anillos de matrices sobre anillos* R_i, *donde cada* R_i *es local "left and right perfect".*

Demostración:

1. $(i) \Rightarrow (ii)\rfloor$ Como $\tau \in$ R-TORS, $\mathbf{F}\tau$ es una clase libre de torsión y por lo tanto es hereditaria, cerrada bajo sumas directas (es cerrada bajo productos directos y submódulos) y extensiones, además es cerrada bajo cosientes por ser igual a $\mathbf{T}\tau$. Entonces $\mathbf{T}\tau \in$ R-tors. Por el Teorema 2.2 (iii) $\mathbf{T}\tau \subseteq \overline{\tau} \subseteq \mathbf{E}\tau$. Entonces por el Corolario 2.4 (i) $\mathbf{T}\tau \subseteq \overline{\tau} \subseteq \mathbf{E}\overline{\tau} \subseteq \mathbf{F}\tau = \mathbf{T}\tau$.
$\therefore \overline{\tau} = \mathbf{F}\tau$
Como la hipótesis es para toda $\tau \in$ R-TORS, tenemos el resultado.
2. $(ii) \Rightarrow (iii)\rfloor$ Por el Corolario 3.4 (ii) y (iii), $\tau = \overline{\overline{\tau}}$. Entonces $\tau = \overline{\overline{\tau}} = \mathbf{F}\overline{\tau}$. Ahora, por el Corolario 3.5 (iii) y (iv), toda clase de torsión de R-módulos es una clase TTF.
3. $(iii) \Rightarrow (iv)\rfloor$ Esta condición es la condición (ii) del Teorema (3) en [**3**], la cual (en el mismo teorema de [**3**]) es equivalente a (iv) (la cual es la condición (v) de dicho teorema).
4. $(iv) \Rightarrow (i)\rfloor$ Esta condición es la condición (v) del Teorema (3) en [**3**], la cual (en el mismo teorema de [**3**]) es equialente a que $\forall\ \tau \in$ R-TORS, τ es TTF y estable. Entonces por el Corolario 3.5 (i) y (iv), $\mathbf{T}\tau = \mathbf{F}\tau$ para toda $\tau \in$ R-TORS.

El siguiente ejemplo ilustra los resultados de este capítulo y muestra que R-TORS no es, en general, una retícula modular.

Ejemplo 3.7. *Como en el Ejemplo 1.3* (i), *sea* $e = e^2 \in R$ *tal que* $eR = eRe$ *y* $X = ReR = Re$. *Entonces* $\tau = \{M \in Mod - R \mid MX = M\} \in R - tors$ *y* $\boldsymbol{F}\tau = \{M \in Mod - R \mid MX = 0\}$. *Nótese que*

$\boldsymbol{hF}\tau = \boldsymbol{F}\tau$. *Entonces por los Corolarios 2.3 y 3.4,* $\overline{\tau} = \boldsymbol{F}\tau$ *es una clase TTF estable y* $\tau \vee \overline{\tau} = Mod - R$. *Como* $\boldsymbol{F}\tau$ *es estable y hereditaria,* $\overline{\overline{\tau}} = \boldsymbol{THE}\overline{\tau} = \boldsymbol{T}\overline{\tau} = \boldsymbol{TF}\tau = \tau$. *Así* $\boldsymbol{T}\overline{\overline{\tau}} = \boldsymbol{T}\tau$. *Note ahora que en el Ejemplo 2.16, que es un caso particular de este ejemplo,* $\overline{\tau} \neq \boldsymbol{T}\tau$. *Como consecuencia, la Proposición 3.1 nos muestra que, en general, R-TORS no es una retícula modular. Más aún, del Corolario 3.5 podemos ver que la condición* $\overline{\tau} = \boldsymbol{F}\tau$ *no implica que* $\boldsymbol{T}\tau = \boldsymbol{F}\tau$ *ni* $\tau = \boldsymbol{F}\overline{\tau}$.

4. Problemas

Los resultados y ejemplos anteriores motivan los siguientes problemas (los cuales discutimos en este capítulo).

(3) Determinar condiciones necesarias y/o suficientes para τ tales que la clase de torsión suplementaria $\overline{\tau}$ de τ, sea el pseudo complemento de τ en R-TORS.

(4) Caracterizar aquellos anillos R para los cuales la clase de torsión suplementaria $\overline{\tau}$ de τ, es igual al pseudo complemento de τ, para toda $\tau \in$ R-TORS.

Lema 4.1. *Sean τ, $\psi \in R{-}TORS$ tales que $\overline{\tau} \subseteq \psi \subseteq \boldsymbol{T}\tau$, entonces:*

(i) $\tau \subseteq \boldsymbol{T}\psi$.

(ii) *Si $\tau \subseteq \overline{\psi}$, entonces $\overline{\tau} = \psi$.*

Demostración:

(i) Sea $M \in \tau$ tal que $M \notin \mathbf{T}\psi$. Existe $X \leq M$ tal que $0 \neq M/X \in \psi \cap \tau \subseteq \mathbf{T}\tau \cap \tau = \{0\}$**!**
$\therefore \tau \subseteq \mathbf{T}\psi$.

(ii) Como $\overline{\tau} \subseteq \psi$, entonces $\overline{\psi} \subseteq \overline{\overline{\tau}}$. Así $\tau \subseteq \overline{\psi} \subseteq \overline{\overline{\tau}}$. Entonces $\overline{\tau} = \overline{\overline{\overline{\tau}}} \subseteq \overline{\overline{\psi}} \subseteq \overline{\tau}$, por lo que $\overline{\overline{\psi}} = \overline{\tau}$, pero $\psi \subseteq \overline{\overline{\psi}} = \overline{\tau}$
$\therefore \overline{\tau} = \psi$.

Proposición 4.2. *Sean τ, $\psi \in R - TORS$ tales que $\overline{\tau} \subseteq \psi \subseteq \boldsymbol{T}\tau$. Si R es un anillo tal que toda clase de torsión hereditaria (estable) es estable (hereditaria) y ψ es hereditaria (estable), entonces $\overline{\tau} = \psi$.*

Demostración:
Por hipótesis $\overline{\psi} = \mathbf{THE}\psi = \mathbf{T}\psi$. Por el Lema 4.1 $\tau \subseteq \mathbf{T}\psi = \overline{\psi}$, entonces $\overline{\tau} = \psi$.

Proposición 4.3. *Si R es un anillo neteriano conmutativo, entonces toda clase de torsión hereditaria es estable.*

Demostración: La demostración puede verse en [**9**, p.170].

El siguiente resultado proveé algunas respuestas para los problemas (3) y (4).

Proposición 4.4. *Sea $\tau \in R - TORS$. Entonces $\overline{\tau} = \boldsymbol{T}\tau$ si cualquiera de las siguientes condiciones se satisface.*

(i) *τ es hereditaria y estable.*

(ii) *τ y $\boldsymbol{T}\tau$ son estables.*

(iii) *$\tau \in R - tors$ y R es un anillo neteriano conmutativo.*

Demostración:

(i) Es inmediato de la definición de $\overline{\tau}$.

(ii) Por el Lema 2.5 (*iii*), $\overline{\tau} \subseteq \mathbf{T}\tau$. Supongamos que existe $M \in \mathbf{T}\tau$ tal que $M \notin \overline{\tau} = \mathbf{THE}\tau = \mathbf{THI}\tau$ (Proposición 1.2). Entonces existe $X < M$ e $I \in \tau$ tales que $0 \neq M/X \hookrightarrow I$ e I es inyectivo. Como $M/X \in \mathbf{T}\tau$ ($\mathbf{T}\tau$ es cerrada bajo cocientes), por ser $\mathbf{T}\tau$ estable, tenemos que $E(M/X) \in \mathbf{T}\tau$. Como I es inyectivo tenemos que $I = E(M/X) \oplus I'$ y por lo tanto $E(M/X) \cong I/I' \in \tau$ $\therefore 0 \neq E(M/X) \in \mathbf{T}\tau \cap \tau\mathbf{!}$
$\therefore \overline{\tau} = \mathbf{T}\tau$.

(iii) Por la Proposición 4.3 τ es estable y le parte (i) nos da el resultado.

Para el último corolario usaremos la siguiente definición [**9**, p.152]:

Definición 4.5. *Una teoría de torsión hereditaria se dice que es estable si la clase de módulos de torsión es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Corolario 4.6. *Si R satisface cualquiera de las siguientes condiciones, entonces $\boldsymbol{T}\tau = \overline{\tau}$, para toda $\tau \in R - TORS$.*

(i) *Toda teoría de torsión es estable.*

(ii) *Toda clase de torsión es hereditaria.*

(iii) *Existe un átomo en R-TORS, el cual está contenido en todo elemento no trivial de R-TORS.*

Demostración:

(i) Como toda teoría de torsión es estable, toda clase de torsión es hereditaria y estable, entonces por la Proposición 4.4 (i) tenemos el resultado.

(ii) Por el Teorema 2.6 (ii), $\overline{\tau}$ y $\mathbf{T}\tau$ son los únicos pseudo complementos de τ en R-tors y R-TORS, respectivamente. Ahora, como toda clase de torsión es hereditaria, R-tors = R-TORS y por lo tanto $\overline{\tau} = \mathbf{T}\tau$.

(iii) Sea $\alpha \in$ R-TORS un átomo de R-TORS tal que $\forall\, \psi \in$ R-TORS, $\alpha \leq \psi$. Entonces $\overline{\tau} = \mathbf{T}\tau = \{0\}$, de otro modo $\alpha \leq \overline{\tau} \wedge \tau \subseteq \mathbf{T}\tau \cap \tau = \{0\}$, una contradicción.

Bibliografía

[1] L. Bican, T. Kepka, and P. Němec, *Rings, Modules, and Preradicals*, Marcel Dekker, New York, 1982.

[2] G.F. Birkenmeier, *Radicals whose essentials cover are semisimple classes*, Comm. Algebra **22**(15)(1994), 6239–6258.

[3] R. Bronowitz, and M.L. Teply, *Torsion theories of simple type*, J. Pure Appl. Algebra **3**(1973), 329–336.

[4] S.E. Dickson, *A torsion theory for abelian categories*, Trans. Amer. Math. Soc. **121**(1996), 223–235.

[5] J.S. Golan, *Torsion theories*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[6] K.R. Goodearl, *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*, Marcel Dekker, New York, 1976.

[7] G. Herden, *The lattice (T, C) of arbitrary torsion classes for Mod-R*, Comm. Algebra **8**(15)(1980), 1469–1492.

[8] K. Ohtake, *Commutative rings over which all torsion theories are hereditary*, Comm. Algebra **9**(15)(1981), 1533–1540.

[9] B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[10] R. Wiegandt, *Radical theory of rings*, Math Student, **51**(1983), 145–185.