Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Movimientos de damas en digráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JESÚS ALVA SAMOS

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ

2011

1.Datos del alumno	
Apellido paterno	Alva
Apellido materno	Samos
Nombre(s)	Jesús
Teléfono	55 30 26 94
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	099015888
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Hortensia
Apellido paterno	Galeana
Apellido materno	Sánchez
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Mucuy Kak del Carmen
Apellido paterno	Guevara
Apellido materno	Aguirre
6. Datos del sinodal 4 Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez
7.Datos del trabajo escrito.	
Título	Movimientos de damas en digráficas
Número de páginas	88 p.
Año	2012

Para mi *Mami*,
María del Carmen Padilla Franco,
quien me enseñó lo que es el amor incondicional.

Índice general

Introducción

Con el transcurso del tiempo, gran variedad de juegos se han estudiado a través de su representación en teoría de gráficas. Juegos como el solitario (peg solitaire) y los soldados de Conway, donde se colocan fichas sobre un tablero y se permiten ciertos movimientos, que habían sido el objeto de diversos estudios, son ahora el origen del desarrollo de los movimientos de damas en gráficas, o *graph pegging*.

Así pues, en esta ocasión nos concentraremos en la representación de los movimientos del juego de damas, en el que, teniendo dos fichas en casillas adyacentes entre sí y una casilla vacía junto a una de ellas, podemos hacer que la primera "coma" a la segunda, saltándola, y llegue así a la casilla vacía. Sin embargo, las reglas de nuestro juego serán distintas, pues no tendremos contrincante, y nuestro objetivo será llegar a cualquier parte del tablero, que será representado por una digráfica, a partir de la distribución original de las fichas.

Aunque el término *peg* en inglés nos remite a los tronquitos o estacas de madera que se usan en el solitario (peg solitaire), nosotros pensaremos cada peg como una dama o ficha, debido al claro parecido que tienen la manera en la que ejecutan los movimientos en el juego de damas. Además, pensaremos en cada vértice de una digráfica como una casilla que puede ser ocupada por una dama. Pero, tenemos una restricción adicional, pues nuestro tablero está dirigido, de cierta forma esta restricción está presente en el juego original de damas, donde los movimientos de las piezas sólo se hacen en dirección de ataque.

Figura 1: Ejemplo de un movimiento de damas. Los rectángulos representan las casillas y los círculos las damas.

Si tenemos damas en dos vértices adyacentes, y el vértice que es la cabeza de la flecha es además la cola de una flecha cuya cabeza es un vértice vacío, podemos realizar un movimiento de damas, que consistirá en quitar las dos damas y colocar una de ellas en el vértice vacío, donde la dirección de las flechas refleja de cierta forma la dirección del movimiento. Así, también podemos ver a los movimientos de damas como "saltar" una dama y "comerla", como se hace al jugar a las damas (mientras la dirección de las casillas lo permita). En efecto, fue esta idea la que sugirió la traducción de movimientos de damas, llamados originalmente *pegging moves* en inglés.

En nuestro caso, el juego tiene un uńico participante, cuyo objetivo es el poder ocupar cualquier casilla con una dama a partir de una distribución inicial de damas en el tablero, usando sólamente el tipo de movimientos antes descrito. De ser posible lo anterior, entonces se gana el juego. Claramente si iniciamos el juego con una dama en cada casilla el juego se ha ganado. En el desarrollo buscaremos, dado un tablero determinado, el mínimo número de damas necesarias para poder ganar el juego y la posición inicial que deban tener, así como el mínimo número de damas que se necesiten para ganar el juego sin importar su posición inicial en el tablero.

El presente trabajo sobre movimientos de damas en digráficas, se inspira en el artículo *Graph pegging numbers* [1], publicado en 2009. Es justo en este artículo donde se introducen los movimientos de damas en gráficas, o graph pegging. Al ser un tema en pleno desarrollo, se espera que pueda encontrar diversas y numerosas aplicaciones.

El concepto de *graph pegging* o movimientos de damas en gráficas fue introducido por David Petrie Moulton durante el programa de verano Research Experience for Undergraduates (REU) de la University of Minnesota Duluth en 1994. Anteriormente se trabajaba ya sobre *graph pebbling.*

De esta forma, en el primer capítulo estarán contenidos todos los conceptos básicos de la teoría de gráficas y digráficas necesarios para el desarrollo del presente estudio. En el segundo capítulo se hará la pertinente presentación de los conceptos a estudiar, como lo son: movimientos de damas, distribuciones, multidistribuciones, alcance, número de damas y número de damas óptimo, asimismo hallaremos interesantes propiedades como la monotonía del alcance. El tercer capítulo esta abocado a resultados que son más generales, es decir, son resultados que a casi cualquier digráfica le atañen, como el isomorfismo en damas, y se estudia a la familia de la digráficas transitivas y el comportamiento de la operación composición. A su vez, el cuarto capítulo se enfoca en las familias de trayectorias y ciclos, mientras que en el quinto capítulo observamos a los torneos y a las digráficas circulantes. Finalmente, en el sexto capítulo se estudia el comportamiento de la operación producto cuadro, en particular, entre dos trayectorias.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Gráficas

Una *gráfica* G está formada por un conjunto no vacío $V(G)$, cuyos elementos son llamados los vértices de G, y un conjunto $E(G)$, cuyos elementos son subconjuntos de $V(G)$ con 2 vértices distintos, a dichos elementos los llamaremos aristas; denotaremos $\{x, y\}$ como xy. Nos referiremos a $V(G)$ como el conjunto de vértices de G y a $E(G)$ como el conjunto de aristas de G. El *orden* de G es el número de vértices en G, asimismo, el *tamaño* de G es el número de aristas en G.

Si $x, y \in V(G)$ y $xy \in A(G)$ entonces diremos que x es adyacente a y, o bien, que x es vecino de y. Asimismo, definimos a la vecindad de x, denotada $N_G(x)$, como el conjunto de los vértices adyacentes a x, es decir, $N_G(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in A(G)\}$. Además, denotaremos con $d_G(x)$ al grado de x, definido $d_G(x) = |N_G(x)|$.

Dadas dos gráficas G, H, diremos que H es *subgráfica* de G, denotado por $H \subseteq G$, si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

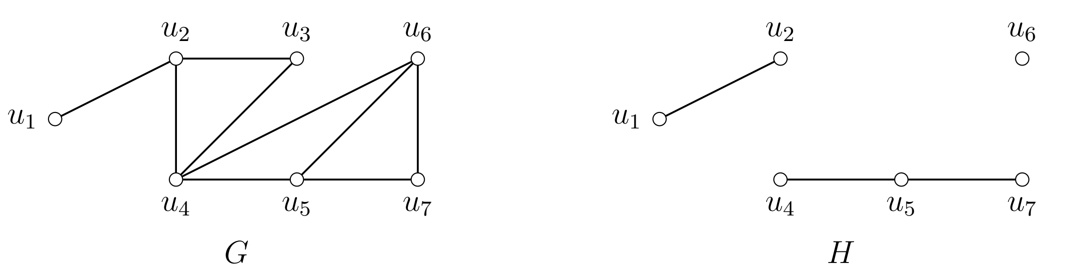

Figura 1.1: Una gráfica G y una subgráfica H.

Un *camino* (no dirigido) en una gráfica G se define como una sucesión de elementos alternados, $W = (x_0, a_1, x_1, a_2, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_k)$, tales que $x_i \in V(G)$, $0 \leq i \leq k$, y $a_j = x_{j-1}x_j \in E(G)$, $1 \leq j \leq k$. De esta forma decimos que W es un camino de x_1 hacia x_k, también podremos decir que es un x_1x_k-camino. Denotaremos por $V(W)$ al conjunto de vértices del camino $\{x_i \mid 0 \leq i \leq k\}$, y por $E(W)$ al conjunto de aristas $\{a_j \mid 1 \leq j \leq k\}$. Asimismo se dirá que W es un *camino cerrado* si $x_0 = x_k$. Al entero k lo llamaremos la *longitud* del camino W. Diremos que una gráfica es *conexa* si para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ existe un xy-camino en G. Las subgráficas conexas máximas por contención de G serán llamadas las *componentes conexas* de G.

Una *trayectoria* en una gráfica G es un camino en G, donde para cualesquiera $0 \leq i, j \leq k$, si $i \neq j$, entonces $x_i \neq x_j$, es decir, todos sus vértices son distintos dos a dos, y en cuyo caso también puede llamársele una x_0x_k-trayectoria. Asimismo, un *ciclo* (no dirigido) es un camino cerrado donde $x_0, \ldots, x_{k-1}$ son distintos dos a dos y $k \geq 3$. De esta forma decimos que una gráfica es *acíclica* cuando dicha gráfica no contiene ciclos.

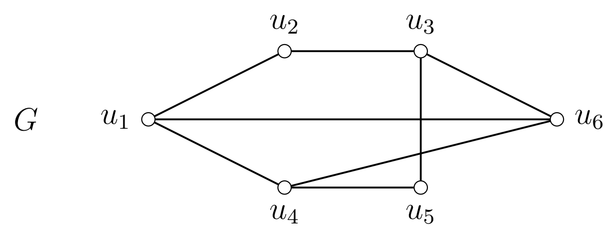

Figura 1.2: Una gráfica G con un camino $(u_1, u_4, u_6, u_1, u_2)$ y una trayectoria $(u_1, u_4, u_6, u_3, u_2)$.

1.1.1. Árboles y bosques

Cuando G sea una gráfica conexa y acíclica le llamaremos *árbol*, de aquí resulta que en general a las gráficas acíclicas (no necesariamente conexas) también se les llame *bosques*. Observemos que cada componente conexa de un bosque es un árbol, y que un árbol es también, por definición, un bosque. A los vértices de un bosque cuyo grado sea igual a 1 se les llama *hojas*, a los demás nos referimos como vértices *interiores*.

Sea G un árbol y sea r un vértice fijo en G, al cual definimos como la *raíz* de G, entonces se dice que G es un árbol *arraigado* en r (o bien, un árbol con raíz r). Si $P = (r{=}x_0, x_1, \dots, x_k)$ es una trayectoria en G, entonces decimos que:

(i) x_{k-1} es padre de x_k y x_k es hijo de x_{k-1}.

(ii) x_i es ancestro de x_j y x_j es descendiente de x_i, si $0 \leq i < j \leq k-1$.

Un árbol *binario* es un árbol arraigado donde todos los vértices son hojas o tienen exactamente dos hijos. Análogamente, un bosque *binario* es un bosque donde todas sus componentes conexas son árboles binarios, o equivalentemente, es un bosque resultado de la unión ajena de árboles binarios.

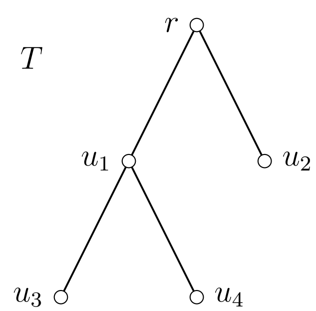

Figura 1.3: Un árbol binario arraigado T con raíz r.

1.2. Digráficas

1.2.1. Conceptos y definiciones básicas

A continuación veremos gran parte de los conceptos, terminología y resultados previos relacionados con la teoría de digráficas que usaremos en el presente trabajo.

Una *digráfica* (o gráfica dirigida) D está formada por un conjunto no vacío $V(D)$, cuyos elementos son llamados los vértices de D, y un conjunto $A(D)$, cuyos elementos son pares ordenados de vértices, a dichos elementos los llamaremos flechas. Nos referiremos a $V(D)$ como el conjunto de vértices de D y a $A(D)$ como el conjunto de flechas de D. El *orden* de D es el número de vértices en D, asimismo, el *tamaño* de D es el número de flechas en D. Si los conjuntos $V(D)$ y $A(D)$ son finitos diremos que D es una digráfica *finita*.

Dada una flecha (u, v) al vértice u se llama la cola de la flecha y al vértice v la cabeza, asimismo podremos referirnos a ambos como los extremos de la flecha, además diremos que dichos vértices son adyacentes, es decir, u es adyacente a v y v es adyacente a u. También decimos que la flecha (u, v) sale de u y entra en v, y que u domina a v (o bien, v es dominado por u), en general, dados X, Y dos subconjuntos ajenos de vértices de D se dice que X domina a Y (Y es dominado por X) si para cualesquiera $u \in X$, $v \in Y$ se tiene que $(u, v) \in A(D)$. Análogamente, si $(u, v) \in A(D)$ decimos que v absorbe a u (u es absorbido por v), de forma más general, si X, Y son dos subconjuntos ajenos de vértices de D se dice que Y absorbe a X (X es absorbido por Y) si para cualquier $u \in X$ existe $v \in Y$ tal que $(u, v) \in A(D)$.

Para cada vértice v en D definimos al conjunto $N^+(v)$ como la *exvecindad* de v formado por todos los vértices u distintos a v tales que existe una flecha (v, u) en D, es decir, $N^+(v) = \{u \in V(D) \setminus \{v\} \mid (v, u) \in A(D)\}$; de forma análoga, la *invecindad* de v es el conjunto $N^-(v)$ formado por todos los vértices u distintos a v tales que existe una flecha en $A(D)$ cuya cola es u y cuya cabeza es v, dicho de otra forma, $N^-(v) = \{u \in V(D) \setminus \{v\} \mid (u, v) \in A(D)\}$. A los vértices en $N^+(v)$ y $N^-(v)$ los llamaremos exvecinos de v e invecinos de v respectivamente.

El *exgrado* de v, denotado $d^+(v)$, es el número de flechas que salen de v, es decir, $d^+(v) = |\{(v, u) \in A(D) \mid u \in V(D)\}|$ y δ_D^+ es el *exgrado mínimo* definido $\delta_D^+ = \text{mín}\{d^+(v) \mid v \in V(D)\}$; de la misma forma el *ingrado* de v, $d^-(v)$, es el número de flechas que entran en v, es decir, $d^-(v) = |\{(u, v) \in A(D) \mid u \in V(D)\}|$ y δ_D^- es el *ingrado mínimo* definido $\delta_D^- = \text{mín}\{d^-(v) \mid v \in V(D)\}$. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos simplemente δ^+ y δ^-.

Si D, H son dos digráficas tales que $V(H) \subseteq V(D)$ y $A(H) \subseteq A(D)$, entonces diremos que H es *subdigráfica* de D, y lo denotaremos $H \subseteq D$. Cuando D, H cumplan que $H \subseteq D$ y $V(D) = V(H)$ se dirá que H es subdigráfica *generadora* de D. Asimismo, si X es un subconjunto de vértices de D, definimos la subdigráfica de D *inducida* por X, denotada $D[X]$, de forma que $V(D[X]) = X$ y donde $(u, v) \in A(D[X])$ si y sólo si $(u, v) \in A(D)$.

Se dice que dos o más flechas son paralelas (o múltiples) cuando tienen la misma cabeza y la misma cola, asimismo a una flecha se llama lazo cuando su cabeza y su cola coinciden. Una *digráfica simple* es aquella que no contiene flechas paralelas, ni lazos. El estudio de este trabajo se limitará a digráficas finitas y simples, así que a partir de este momento siempre que nos refiramos a una digráfica asumiremos que es una digráfica finita simple. Observemos que en estas digráficas se cumple que $d^+(v) = |N^+(v)|$ y $d^-(v) = |N^-(v)|$.

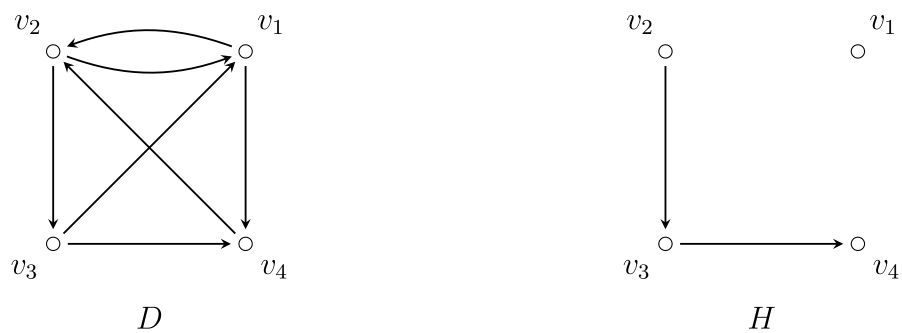

Figura 1.4: Una digráfica D y una subdigráfica generadora H.

1.2.2. Caminos, trayectorias, ciclos, longitud y conexidad

El concepto de camino en una digráfica es, tal vez, uno de los más útiles para el estudio de las digráficas y sus propiedades como estructura, esto se debe no sólo a que es una de las subestructuras más básicas, sino también porque a partir de este concepto se define toda una variedad de parámetros y propiedades, los cuales veremos a continuación.

Un *camino* (dirigido) en una digráfica D se define como una sucesión de elementos alternados $W = (u_0, a_1, u_1, a_2, \ldots, u_{k-1}, a_k, u_k)$ donde $u_i \in V(D)$, $0 \leq i \leq k$, y $a_j = (u_{j-1}, u_j) \in A(D)$, $1 \leq j \leq k$. Dado esto decimos que W es un camino de u_0 hacia u_k, o bien, que es u_0u_k-camino. El conjunto de vértices $\{u_i \mid 0 \leq i \leq k\}$ se denotará $V(W)$, y el conjunto de flechas $\{a_j \mid 1 \leq j \leq k\}$ se denotará $A(W)$. Diremos que W es un camino (dirigido) *cerrado* si $u_0 = u_k$.

La *longitud* del camino W se define como el número de flechas que se recorren para ir de u_0 hasta u_k sobre W (sin importar la repetición), dicho de otra forma, si $W = (u_0, a_1, u_1, a_2, \ldots, u_{k-1}, a_k, u_k)$, entonces la longitud de W es k.

Si W es un camino en D, diremos que es una *trayectoria* (dirigida) en D (o bien, u_0u_k-trayectoria) si todos los vértices $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k$ son distintos dos a dos. Además diremos que una trayectoria W en una digráfica D es *hamiltoniana* si $V(W) = V(D)$, es decir, W recorre a todos los vértices de D. Asimismo, diremos que W es un *ciclo* (dirigido) si los vértices $u_0, \ldots, u_{k-1}$ son distintos dos a dos, $k \geq 2$ y $u_0 = u_k$.

Observemos que en las digráficas simples los caminos y trayectorias quedan determinados de manera única por los vértices que contienen, es decir, en dichos casos si $W = (u_0, a_1, u_1, a_2, \ldots, u_{k-1}, a_k, u_k)$, entonces podemos escribir de forma más simple $W = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k)$.

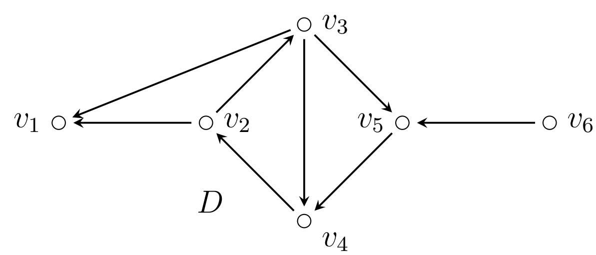

Figura 1.5: Una digráfica D con un camino $(v_2, v_3, v_4, v_2, v_1)$, una trayectoria $(v_6, v_5, v_4, v_2, v_1)$ y un ciclo $(v_2, v_3, v_5, v_4, v_2)$.

Proposición 1.2.1. *Sea D una digráfica con $u, v \in V(D)$ distintos. Si W es un uv-camino en D, entonces hay P, una uv-trayectoria en D, tal que $A(P) \subseteq A(W)$.*

Demostración. Tomemos $P = (u{=}x_1, x_2, \ldots, x_k{=}v)$ un uv-camino de longitud mínima con $A(P) \subseteq A(W)$. Si $x_i = x_j$ para algunos $1 \leq i < j \leq k$, entonces el camino $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i{=}x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ es más corto que P, contradiciendo la elección de P. Por lo tanto todos los vértices de P son distintos, entonces P es una uv-trayectoria en D con $A(P) \subseteq A(W)$. ■

Proposición 1.2.2. *Si $W = (x_1, x_2, \ldots, x_k{=}x_1)$ es un camino cerrado contenido en una digráfica D, entonces hay un ciclo C contenido en D tal que $x_1 \in V(C)$ y $A(C) \subseteq A(W)$.*

Demostración. Dado que D no tiene lazos se tiene que $x_{k-1} \neq x_k$, entonces por la proposición anterior podemos considerar a $P = (x_1{=}y_1, y_2, \ldots, y_n{=}x_{k-1})$ una x_1x_{k-1}-trayectoria en D tal que $A(P) \subseteq A(W)$. Por lo tanto, podemos tomar a $C = (x_1{=}y_1, y_2, \ldots, y_n{=}x_{k-1}, x_k)$, el cual es un ciclo en D que contiene a x_1 y tal que $A(C) \subseteq A(W)$. ■

Sean u, v vértices de una digráfica D, se define a la *distancia* de u a v, denotado $d(u, v)$, como la mínima longitud de cualquier uv-camino en D, es decir,

$$d(u, v) = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z} \mid \text{hay un } uv\text{-camino de longitud } k \text{ en } D\},$$

en caso de no existir un uv-camino en D tomaremos $d(u,v)=\infty$.

Apoyados en lo anterior, definimos al *diámetro* de D, denotado $\operatorname{diam}(D)$, como la distancia máxima entre dos vértices de D, es decir,

$$\operatorname{diam}(D)=\max\{d(u,v) \mid u,v\in V(D)\}.$$

Definimos a la *gráfica subyacente* de una digráfica D como la única gráfica simple $G(D)$ tal que $V(D)=V(G(D))$, y donde $xy\in E(G(D))$ si y sólo si $(x,y)\in A(D)$ o $(y,x)\in A(D)$. Dada una digráfica D, diremos que es *conexa* si $G(D)$ es conexa.

Si para cualquier par de vértices $u,v\in V(D)$ tenemos que existen un uv-camino o un vu-camino en D, entonces diremos que D es *unilateralmente conexa* o, de forma más sencilla, *unilateral*.

Proposición 1.2.3. *Toda digráfica unilateral contiene un camino generador.*

Demostración. Sea $W=(u_0,a_1,u_1,\ldots,u_{k-1},a_k,u_k)$ un camino de orden máximo en un digráfica D y supongamos que hay $v\in V(D)\setminus V(W)$. Además como D es unilateral, existen $P_0,\ldots,P_k$ tales que P_i es un vu_i-camino o un u_iv-camino para cada $0\le i\le k$. Si $P_0=(v{=}x_0,b_1,\ldots,b_r,x_r{=}u_0)$ fuera un vu_0-camino, entonces $(v{=}x_0,\ldots,x_l{=}u_0,u_1,\ldots,u_{k-1},u_k)$ sería un camino de orden mayor a W. Entonces P_0 es un u_0v-camino, análogamente P_k es un vu_k-camino.

Consideremos a $j=\min\{2\le i\le k \mid P_i \text{ es un } vu_i\text{-camino}\}$, es decir, P_{j-1} es un $u_{j-1}v$-camino y P_j es un vu_j-camino, digamos que $P_{j-1}=(u_{j-1}{=}x_0,b_1,\ldots,b_r,x_r{=}v)$ y que $P_j=(v{=}y_0,c_1,\ldots,c_s,y_s{=}u_j)$, por tanto

$$(u_0,a_1,\ldots,u_{j-1}{=}x_0,b_1,\ldots,b_r,x_r{=}v{=}y_0,c_1,\ldots,c_s,y_s{=}u_j,\ldots,u_{k-1},a_k,u_k)$$

es un camino de orden mayor a W, contradiciendo la elección de W. Por lo tanto no hay $v\in V(D)\setminus V(W)$, lo que implica que $V(W)=V(D)$. ■

Además, si para cualesquiera $u,v\in V(D)$ se tiene que existen un uv-camino y un vu-camino en D, entonces diremos que D es *fuertemente conexa* o simplemente *fuerte*. A las subdigráficas conexas máximas por contención de D las llamaremos *componentes conexas* de D, y a las subdigráficas fuertes máximas por contención de D las llamaremos las *componentes fuertes* de D.

1.2.3. Otros conceptos y operaciones

Si una digráfica cumple que para cualquier par de vértices distintos u, v las flechas $(u, v), (v, u)$ están en la digráfica, entonces decimos que tal digráfica es *completa*.

Diremos que una digráfica D es *asimétrica* si para cualesquiera dos vértices distintos de D hay a lo más una flecha que los hace adyacentes.

Un subconjunto S de $V(D)$ se dice *independiente* si para cualesquiera $u, v \in S$ se cumple que $(u, v) \notin A(D)$ y $(v, u) \notin A(D)$, nos referiremos al tamaño máximo de un conjunto independiente en D como el número de independencia de D y lo denotaremos α_D.

Dado $X \subseteq V(D)$, denotaremos por $D - X$ a la subdigráfica de D inducida por el conjunto $V(D) \setminus X$, es decir, $D - X = D[V(D) \setminus X]$. Si X tiene un único elemento u, es decir $X = \{u\}$, para simplificar la escritura, se utiliza $D - u$ en lugar de $D - \{u\}$.

1.2.4. Digráficas transitivas, composición y condensación

Una digráfica D es *transitiva* si para cualesquiera $u, v, w \in V(D)$ tales que $u \neq w$ y $(u, v), (v, w) \in A(D)$, entonces $(u, w) \in A(D)$.

Proposición 1.2.4. *Sea D una digráfica transitiva, si $u, v \in V(D)$ distintos tales que existe un uv-camino en D, entonces $(u, v) \in A(D)$.*

Demostración. Dado que existe un uv-camino en D, por la Proposición 1.2.1 sea $P = (u{=}x_0, x_1, \ldots, x_k{=}v)$ una uv-trayectoria en D, y procederemos por inducción sobre k.

Si $k = 1$, la única flecha del camino es (u, v). Supongamos entonces que para cualesquiera $x, y \in V(D)$ si existe una xy-trayectoria en D con longitud $k - 1$, entonces $(x, y) \in A(D)$, y tomemos $P = (u{=}x_0, x_1, \ldots, x_k{=}v)$. Claramente al considerar a $P' = (u{=}x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$, la ux_{k-1}-trayectoria contenida en P, entonces por hipótesis inductiva $(u, x_{k-1}) \in A(D)$, además $(x_{k-1}, v) \in A(P) \subseteq A(D)$ y D es transitiva, por lo tanto $(u, v) \in A(D)$. ■

Proposición 1.2.5. *Una digráfica D es fuerte y transitiva si y sólo si D es completa.*

Demostración. Supongamos inicialmente que D es una digráfica fuerte y transitiva, así para cualesquiera dos vértices distintos u, v en D existen una uv-trayectoria y una vu-trayectoria en D, entonces la proposición anterior implica que $(u, v), (v, u) \in A(D)$ y por lo tanto D es completa.

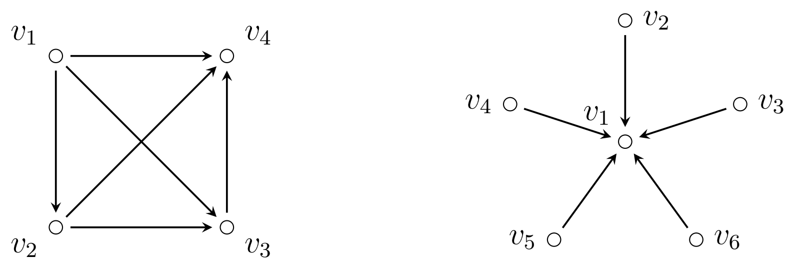

Figura 1.6: Ejemplos de digráficas transitivas.

Por otro lado, si D completa, para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(D)$ se tiene que $(u, v), (v, u) \in A(D)$, dichas flechas forman por sí mismas un uv-camino y un vu-camino respectivamente, entonces D es fuerte. Además si $(u, v), (v, w) \in A(D)$, tenemos que $(u, w) \in A(D)$ por ser D completa, por tanto D es transitiva. ■

Corolario 1.2.6. *Si H es componente fuerte de una digráfica transitiva D, entonces H es completa.*

Proposición 1.2.7. *Sea D una digráfica transitiva y sean H_1, H_2 dos componentes fuertes distintas de D. Entonces, H_1 domina a H_2 si y sólo si existen $u \in V(H_1)$, $v \in V(H_2)$ tales que $(u, v) \in A(D)$.*

Demostración. Claramente la primera implicación es trivial. Para la implicación recíproca, sean $x \in V(H_1)$, $y \in V(H_2)$ y dado que H_1, H_2 son fuertes, entonces existen P_1 una xu-trayectoria en H_1 y P_2 una vy-trayectoria en H_2 respectivamente, entonces $P_1 \cup \{(u, v)\} \cup P_2$ forman una xy-trayectoria en D y D es transitiva, lo cual implica que $(x, y) \in A(D)$, por lo tanto H_1 domina a H_2. ■

Dada una digráfica D donde $D_1, D_2, \ldots, D_k$ son las distintas componentes fuertes de D, definimos a la *digráfica de condensación* de D como la única digráfica simple $D^\star$ tal que $V(D^\star) = \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}$, con $D_i \neq D_j$ si $i \neq j$, y donde $(D_i, D_j) \in A(D^\star)$ si y sólo si hay una flecha $(u, v) \in A(D)$ tal que $u \in D_i$, $v \in D_j$, con $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$.

Resulta claro a partir de la definición anterior que para toda digráfica D su digráfica de condensación $D^\star$ es acíclica. Además a las componentes fuertes H de D que cumplan que $d^-_{D^\star}(H) = 0$, las llamaremos las componentes fuertes *iniciales* de D.

Proposición 1.2.8. *Sea D una digráfica y sea $v \in V(K)$, donde K es una componente fuerte no inicial de D, entonces existe $u \in V(H)$, donde H es una componente fuerte inicial en D, tal que hay una uv-trayectoria.*

Demostración. Sea K una componente fuerte no inicial de D y sea $v \in V(K)$. Consideremos a $W = (x_1, \ldots, x_r{=}v)$ un camino máximo por contención cuyo vértice final sea v, y sea H la componente fuerte de D que contiene a x_1.

Si $d^-_{D^\star}(H) > 0$, entonces hay una componente fuerte H' (distinta a H y K) tal que existe una flecha con cola $u \in V(H')$ y con cabeza $w \in V(H)$, y observemos que $(u, w) \in A(D)$. Como H es fuerte hay un wx_1-camino $(w{=}y_1, \ldots, y_s{=}x_1)$, entonces el camino $(u, w{=}y_1, \ldots, y_s{=}x_1, \ldots, x_r)$ contiene propiamente a W, contradiciendo su elección, lo que implica que $d^-_{D^\star}(H) = 0$. Así obtenemos que H es una componente fuerte inicial y W es un x_1v-camino en D tal que $x_1 \in V(H)$, por lo cual existe una x_1v-trayectoria en D. ■

Corolario 1.2.9. *Sean D una digráfica transitiva y K una componente fuerte no inicial de D, entonces existe H una componente fuerte inicial en D tal que H domina a K.*

Demostración. Sea $v \in V(K)$, entonces, por la proposición anterior deducimos que existe $u \in V(H)$, donde H una componente fuerte inicial en D, tal que hay una uv-trayectoria. Además D es transitiva, así por la Proposición 1.2.4 tenemos que $(u, v) \in A(D)$. Finalmente, utilizando la Proposición 1.2.7, obtenemos que H domina a K. ■

Sea D una digráfica donde $V(D) = \{u_1, \ldots, u_n\}$, y tomemos $H_1, \ldots, H_n$ digráficas ajenas dos a dos. La *composición* $D[H_1, \ldots, H_n]$ es la digráfica tal que

$$V(D[H_1, \ldots, H_n]) = \bigcup_{i=1}^{n} V(H_i) \quad \text{y donde}$$

$$A(D[H_1, \ldots, H_n]) = \{(h, h') \mid h \in V(H_i), h' \in V(H_j), (u_i, u_j) \in A(D)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} A(H_i).$$

En particular, cuando $H = H_i$ para cualquier i, denotaremos $D[H_1, \ldots, H_n]$ como $D[H]$.

Teorema 1.2.10. *Sea D una digráfica con $D_1, D_2, \ldots, D_k$ las distintas componentes fuertes de D. Entonces, D es transitiva si y sólo si $D_1, D_2, \ldots, D_k$ son completas, $D^\star$ es transitiva y $D = D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k]$.*

Demostración. Consideremos inicialmente que D es una digráfica transitiva, donde $D_1, D_2, \ldots, D_k$ son las distintas componentes fuertes de D, entonces, utilizando el Corolario 1.2.6, $D_1, D_2, \ldots, D_k$ son completas. Sean $(D_h, D_i), (D_i, D_j) \in A(D^\star)$, entonces existen $u \in D_h, v, v' \in D_i, w \in D_j$ tales que $(u, v), (v', w) \in A(D)$, además D_i es fuerte y por lo tanto existe P una vv'-trayectoria, así $\{(u, v)\} \cup P \cup \{(v', w)\}$ es una uw-trayectoria en D, y por lo visto anteriormente, $(u, w) \in A(D)$, lo que implica que $(D_h, D_j) \in A(D^\star)$, obteniendo que $D^\star$ es transitiva.

Ahora observemos que $V(D) = \bigcup_{i=1}^{k} V(D_i) = V(D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k])$, y consideremos la función biyectiva $\Phi : V(D) \to V(D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k])$ tal que $\Phi(u) = u$ y sean $u, v \in V(D)$ tales que $u \in V(D_i), v \in V(D_j)$ y $(u, v) \in A(D)$. Si $D_i = D_j$ se tiene que (u, v) está en $D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k]$ por la definición de la composición; y cuando $D_i \neq D_j$ tenemos que D_i domina a D_j, así $(D_i, D_j) \in D^\star$ y entonces $(u, v) \in A(D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k])$.

Consideremos a la flecha $(u, v) \in A(D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k])$ y además supongamos que $u \in V(D_i)$, $v \in V(D_j)$, lo que nos entrega dos casos. Primero, cuando $i = j$, entonces $(u, v) \in A(D_i) \subseteq A(D)$. Luego, si $i \neq j$, tenemos que $(D_i, D_j) \in A(D^\star)$, lo que implica que D_i domina a D_j, entonces $(u, v) \in A(D)$. Por lo tanto se deduce que $D = D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k]$.

Para la implicación recíproca, tenemos que $D = D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k]$ y consideremos $(u, v), (v, w) \in A(D)$, donde $u \in V(D_h)$, $v \in V(D_i)$, y $w \in V(D_j)$, entonces:

(*i*) Si $h = j$, como D_h es completa, entonces $(u, w) \in A(D)$.

(*ii*) Si $h = i \neq j$ ó $h \neq i = j$, entonces $(D_h, D_j) \in A(D^\star)$, por tanto $(u, w) \in A(D)$.

(*iii*) Si $h \neq i \neq j \neq h$, entonces $(D_h, D_i), (D_i, D_j) \in A(D^\star)$ y además $D^\star$ es transitiva, lo que implica que $(D_h, D_j) \in A(D^\star)$, por lo tanto $(u, w) \in A(D)$.

Obteniendo así que $D = D^\star[D_1, D_2, \ldots, D_k]$ es transitiva. ■

1.2.5. Torneos

Decimos que una digráfica T es *torneo* si para cualesquiera $u, v \in V(T)$ se tiene que $(u, v) \in A(D)$ o $(v, u) \in A(D)$, pero no ambas. Es decir, para cualesquiera dos vértices de T hay una única flecha que los hace adyacentes, o bien, T es torneo si es una digráfica asimétrica en la cual cualesquiera dos vértices son adyacentes.

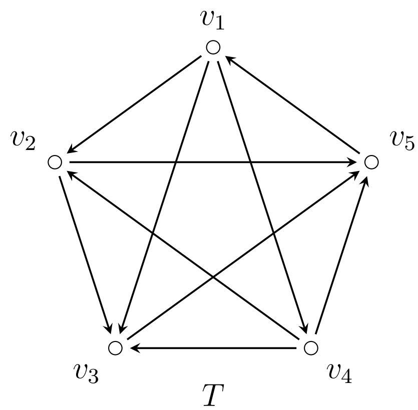

Figura 1.7: Un torneo T con trayectoria hamiltoniana $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5)$.

Teorema 1.2.11. *Todo torneo T tiene un trayectoria hamiltoniana.*

Demostración. Consideremos a $P = (u_1, \ldots, u_k)$ una trayectoria con longitud máxima contenida en T. Supongamos que existe $v \in V(T) \setminus V(P)$, entonces observemos que $(v, u_1), (u_k, v) \notin A(P)$, de lo contrario $(v, u_1, \ldots, u_k)$ o $(u_1, \ldots, u_k, v)$ serían trayectorias de longitud mayor a P. Así $(u_1, v), (v, u_k) \in A(P)$ y dado que T es torneo, tenemos que v es adyacente a u_i para cualquier $2 \leq i \leq k-1$. Sea $j = \text{mín}\{i \mid 2 \leq i \leq k-1, (v, u_i) \in A(T)\}$, entonces $(u_{j-1}, v), (v, u_j) \in A(D)$, por lo tanto $(u_1, \ldots, u_{j-1}, v, u_j, \ldots, u_k)$ es una trayectoria de longitud mayor a la de P, contradiciendo la elección de P. Entonces $V(P) = V(T)$. ■

Teorema 1.2.12. *Sea T un torneo. Entonces, T es transitivo si y sólo si T es acíclico.*

Demostración. Primero supongamos que T es transitivo, si $C = (u_1, \ldots, u_k)$ es un ciclo contenido en T, entonces para cualesquiera $v, w \in V(C)$ hay una vw-trayectoria y una wv-trayectoria contenida en $C \subseteq T$. Entonces por la proposición 1.2.4 tenemos que $(v, w), (w, v) \in V(T)$, contradiciendo que T es torneo. Por tanto T es acíclico.

Por otro lado, supongamos que T es acíclico y tomemos $(u, v), (v, w) \in A(T)$, observemos que como T es torneo $u \neq w$. Esto implica que $(w, u) \notin A(T)$, de lo contrario (u, v, w, u) sería un ciclo en T. Por tanto $(u, w) \in A(T)$. ■

Dadas D, H dos digráficas y $\Phi : V(D) \to V(H)$ una función, diremos que D y H son *isomorfas* bajo Φ, denotado $D \cong_\Phi H$ (o simplemente $D \cong H$ cuando no hay lugar a confusión), si Φ es biyectiva, y $(u, v) \in A(D)$ si y sólo si $(\Phi(u), \Phi(v)) \in A(H)$.

Teorema 1.2.13. *Existe un único torneo acíclico de orden n salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean T y T' dos torneos acíclicos de orden n y consideremos a $P = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $P' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dos trayectorias hamiltonianas en T y T' respectivamente. Definamos la función $\Phi : V(T) \to V(T')$ tal que $\Phi(u_i) = v_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, la cual claramente es biyectiva.

Además, del teorema anterior tenemos que T y T' son torneos transitivos, y por tanto, $(u_i, u_j) \in A(T)$ si y sólo si $i < j$ si y sólo si $(v_i, v_j) = (\Phi(u_i), \Phi(u_j)) \in A(T)$, obteniendo que $T \cong T'$. ■

1.3. Series

Dados dos conjuntos A y B definimos una *función* $f : A \to B$ como un subconjunto de $A \times B$ tal que si $(a, b), (a, c) \in f$, entonces $b = c$, es decir, el elemento b que está relacionado con a es único y al cual llamamos la *imagen* de a y denotamos por $f(a)$. En este caso, A es llamado el *dominio* de f, B el *contradominio* de f, y el conjunto $f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$ es llamado la imagen de A bajo f.

Asimismo, una *sucesión* (de números reales) es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, denotaremos a la sucesión por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, además para cada $i \in \mathbb{N}$ denotaremos al elemento $a(i)$ por a_i y lo llamaremos el i-ésimo término de la sucesión. A veces será conveniente iniciar las sucesiones desde el índice $n = 0$, es decir, considerar f como una función cuyo dominio sea $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Además diremos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L \in \mathbb{R}$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n > N$, se cumple que $|a_n - L| < \varepsilon$, en dicho caso denotaremos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$; también diremos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a L o que el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es L. Análogamente una sucesión es *convergente* si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que la sucesión converge a L, en otro caso diremos que la sucesión *diverge*.

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, podemos construir la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la cual está conformada por los términos $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es llamada la *serie* formada a partir de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La serie $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también podrá ser denotada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

La sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de sumas parciales, donde usaremos la notación $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Si la sucesión de sumas parciales tiene límite L, entonces diremos que la serie converge a L, y escribiremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

En este trabajo interesa el comportamiento de la llamada serie geométrica, donde para algún $r \in \mathbb{R}$ fijo consideramos $a_k = r^k$ para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir, la serie geométrica se expresa

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = r^1 + r^2 + r^3 + \dots$$

Particularmente en el caso $|r| < 1$ tenemos que $1 - r \neq 0$ y podemos calcular

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

$$r \cdot s_n = r \sum_{k=0}^{n} r^k = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n+1}$$

Entonces $s_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}$, es decir, $s_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$. Además tenemos que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, y por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

Ahora consideremos la ecuación $x^2 + x = 1$, claramente sus dos soluciones son $(\sqrt{5} - 1)/2$ y $(-\sqrt{5} - 1)/2$. De aquí en adelante nos enfocaremos particularmente en el comportamiento de la raíz positiva de dicha ecuación y la denotaremos por $\sigma = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Proposición 1.3.1. *$\sigma^k = \sigma^{k+1} + \sigma^{k+2}$ para toda $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Dado que $1 = \sigma^2 + \sigma$, entonces multipliquemos σ^k en ambos lados de la ecuación, así obtenemos que $\sigma^k = \sigma^{k+1} + \sigma^{k+2}$. ■

Además utilizando la serie geométrica tenemos que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sigma^k = \frac{1}{1 - \sigma} - 1 - \sigma = \frac{1 - 1 + \sigma - \sigma + \sigma^2}{1 - \sigma} = 1.$$

Este último resultado es de gran utilidad en el desarrollo del presente trabajo, el mayor uso de este argumento se verá en el último capítulo.

Otra sucesión cuyo uso nos será útil es la sucesión de Fibonacci $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, en la cual definimos $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para cada $n \geq 2$.

Proposición 1.3.2. *Para cualesquiera $k, n \in \mathbb{Z}$ tales que $k, n \geq 0$, se cumple que $\sigma^n = \sigma^{n+k}(F_{k+1} + F_k\sigma)$, donde F_i denota el i-ésimo número de Fibonacci.*

Demostración. Por inducción sobre k.

Si $k = 0$, tenemos que $\sigma^n = \sigma^n(1 + 0\sigma) = \sigma^n(F_1 + F_0\sigma)$.

Si $k = 1$, entonces $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2} = \sigma^{n+1}(1 + \sigma) = \sigma^{n+1}(F_2 + F_1\sigma)$.

Supongamos que la afirmación es cierta para cada $k' < k$, entonces por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
\sigma^n &= \sigma^{n+k-1}(F_k + F_{k-1}\sigma) \\
&= F_k\sigma^{n+k-1} + F_{k-1}\sigma^{n+k} \\
&= F_k\sigma^{n+k} + F_k\sigma^{n+k+1} + F_{k-1}\sigma^{n+k} \\
&= (F_k + F_{k-1})\sigma^{n+k} + F_k\sigma^{n+k+1} \\
&= F_{k+1}\sigma^{n+k} + F_k\sigma^{n+k+1} \\
&= \sigma^{n+k}(F_{k+1} + F_k\sigma).
\end{aligned}$$

■

La afirmación anterior implica que dado un polinomio $a_0 + a_1\sigma + \cdots + a_n\sigma^n$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, para cualquier entero $k \geq n$ existen $b_0, b_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $a_0 + a_1\sigma + \cdots + a_n\sigma^n = \sigma^k(b_0 + b_1\sigma)$. Nuestro interés se enfoca en un caso particular de esta propiedad.

Proposición 1.3.3. *Para cualesquiera $k, n \in \mathbb{Z}$ tales que $k \geq 1$, $n \geq 0$, se cumple que $1 - \sigma^n = \sigma^{n+k}(F_{n+k+1} - F_{k+1} + (F_{n+k} - F_k)\sigma)$.*

Demostración. Utilizando la afirmación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
1 - \sigma^n &= \sigma^0 - \sigma^n \\
&= \sigma^{n+k}(F_{n+k+1} + F_{n+k}\sigma) - \sigma^{n+k}(F_{k+1} + F_k\sigma) \\
&= \sigma^{n+k}(F_{n+k+1} + F_{n+k}\sigma - F_{k+1} - F_k\sigma) \\
&= \sigma^{n+k}(F_{n+k+1} - F_{k+1} + (F_{n+k} - F_k)\sigma).
\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Elementos básicos

A continuación presentamos los conceptos, nociones y definiciones básicas relacionadas al número de damas en las digráficas. Aún cuando este parámetro fue definido originalmente para gráficas veremos que su traslado a las digráficas se logra de manera muy natural y simple, tal como lo es para las primeras.

2.1. Distribuciones y movimientos

Definición 2.1.1. Dada D una digráfica, llamaremos a Q una *distribución* de D si $Q \subseteq V(D)$.

Sean $u, v, w \in V(D)$ tales que $u, v \in Q$, $w \notin Q$ y $(u, v), (v, w) \in A(D)$, entonces el *movimiento de damas* (válido) $m = (u, v, w)$ reemplaza a la distribución Q por la distribución $m(Q) = (Q \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$, en este caso al conjunto $\{u, v\}$ se le llama la fuente de m y al vértice w el objetivo o destino de m.

Asimismo, diremos que una sucesión finita de movimientos $M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ es válida sobre Q si m_1 es un movimiento válido sobre Q y m_r es válido sobre $m_{r-1}(m_{r-2}(\dots(m_1(Q)\dots))$ para cada $2 \leq r \leq k$, en dicho caso, a la distribución $m_k(m_{k-1}(\dots m_2(m_1(Q))\dots))$ la denotaremos por $M(Q)$.

Se dice que un vértice $u \in V(D)$ es *alcanzable* desde una distribución Q si existe una sucesión finita válida de movimientos $M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ de tal manera que $u \in m_k(m_{k-1}(\dots m_2(m_1(Q))\dots))$ o bien $u \in M(Q)$. El *alcance* de una distribución Q se define como el conjunto de todos los vértices alcanzables desde Q y se denota $\text{Reach}(Q)$. Claramente $\text{Reach}(Q) \subseteq Q$.

Cuando cualquier vértice de la digráfica$D$ sea alcanzable desde la distribución Q, es decir, $\mathrm{Reach}(Q) = V(D)$, diremos que Q es una distribución ganadora. Observemos que siempre $Q \subseteq \mathrm{Reach}(Q)$, pues podemos considerar la sucesión de movimientos nula. Además si $|Q| \leq 1$, entonces $Q = \mathrm{Reach}(Q)$, puesto que no pueden definirse movimientos válidos a partir de Q.

Definición 2.1.2. El *número de damas* de una digráfica D es el mínimo entero d tal que cualquier distribución de cardinalidad d es una distribución ganadora y se denota $P(D)$.

Definición 2.1.3. El *número de damas óptimo* de una digráfica D es el mínimo entero d tal que existe una distribución ganadora de cardinal d y se denota $p(D)$.

Así por definición para toda digráfica D se tiene $n \geq P(D) \geq p(D)$, en particular si D es no trivial $n \geq P(D) \geq p(D) \geq 2$.

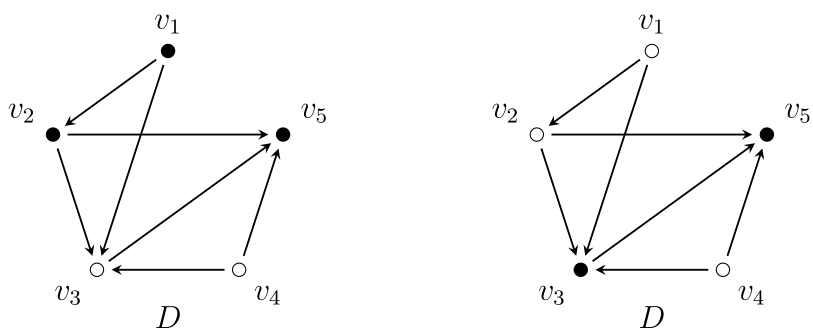

Figura 2.1: A la izquierda: una digráfica D con distribución $Q = \{v_1, v_2, v_5\}$. A la derecha: D después de aplicar el movimiento $m = (v_1, v_2, v_3)$, donde $m(Q) = \{v_3, v_5\}$.

Además los primeros dos incisos del siguiente teorema establecen que los números de damas de una digráfica cualquiera están determinados de forma exacta por los números de damas de sus componentes conexas, y por tanto después sólo observaremos ambos paramétros en familias de digráficas conexas.

Teorema 2.1.4. *Sea D una digráfica y sean $\mathcal{H}$ el conjunto de las componentes conexas de D y $\mathcal{K}$ el conjunto de las componentes fuertes de D, entonces:*

(i) $P(D) = |V(D)| - \text{mín}_{H\in\mathcal{H}}\{|V(H)| - P(H)\}$
(ii) $p(D) = \sum_{H\in\mathcal{H}} p(H)$
(iii) $P(D) \leq |V(D)| - \text{mín}_{K\in\mathcal{K}}\{|V(K)| - P(K)\}$
(iv) $p(D) \leq \sum_{K\in\mathcal{K}} p(K)$

Demostración. (i) Primero consideremos a Q una distribución de cardinalidad $|V(D)| - \text{mín}_{H\in\mathcal{H}}\{|V(H)| - P(H)\}$ y tomemos $H' \in \mathcal{H}$ observemos que

$$\begin{aligned}|Q \cap V(H')| &\geq |Q| - \sum_{H\neq H'} |V(H)| \\ &= |V(D)| - \min_{H\in\mathcal{H}}\{|V(H)| - P(H)\} - (|V(D)| - |V(H')|) \\ &\geq P(H') - |V(H')| + |V(H')| \\ &= P(H').\end{aligned}$$

Entonces Q es distribución ganadora en cada H' y por lo tanto Q es también ganadora en D, es decir, $P(D) \leq |V(D)| - \text{mín}_{H\in\mathcal{H}}\{|V(H)| - P(H)\}$.

Por otro lado, consideremos a una componente conexa $H_0 \in \mathcal{H}$ de manera que $|V(H_0)| - P(H_0) = \text{mín}_{H\in\mathcal{H}}\{|V(H)| - P(H)\}$ y tomemos Q' una distribución tal que $V(H) \subseteq Q$ para cada $H \neq H_0$ y $|Q \cap V(H_0)| = P(H_0) - 1$, la cual claramente no es ganadora en H_0 y por lo tanto no es ganadora en D, además observemos que

$$\begin{aligned}|Q| &= P(H_0) - 1 + \sum_{H\neq H_0} |V(H)| \\ &= P(H_0) - 1 + |V(D)| - |V(H_0)| \\ &= |V(D)| - \min_{H\in\mathcal{H}}\{|V(H)| - P(H)\} - 1.\end{aligned}$$

Es decir $P(D) \geq |V(D)| - \text{mín}_{H\in\mathcal{H}}\{|V(H)| - P(H)\}$, uniendo ésto a lo visto previamente obtenemos la primera igualdad.

(ii) Para cada $H \in \mathcal{H}$ sea Q_H una distribución de tamaño $p(H)$, y de esta forma consideremos la distribución $Q = \bigcup_{H\in\mathcal{H}} Q_H$ la cual claramente es distribución ganadora en cada $H \in \mathcal{H}$ y por lo tanto también en D. Además podemos observar que $|Q| = \sum_{H\in\mathcal{H}} Q_H = \sum_{H\in\mathcal{H}} p(H)$, es decir, $p(D) \leq \sum_{H\in\mathcal{H}} p(H)$.

Ahora, sea Q' cualquier distribución de tamaño $\left(\sum_{H\in\mathcal{H}} p(H)\right) - 1$, entonces hay $H' \in \mathcal{H}$ tal que $|Q \cap V(H')| < p(H')$, por lo tanto Q' no es ganadora en H', entonces Q no es ganadora en D, es decir, $p(D) \leq \sum_{H\in\mathcal{H}} p(H)$. Lo que aunado a lo anterior implica la segunda igualdad.

Para (iii) y (iv) basta reemplazar H por K en la obtención de las cotas superiores de (i) y (ii) respectivamente. ■

Las siguientes digráficas son ejemplos de la independencia entre los incisos (iii) y (iv) del Teorema 2.1.4, además de que muestran que amdas cotas son justas, en cada caso los vértices negros representan una distribución. A la izquierda se muestra una distribución ganadora de cardinalidad mínima, es decir, de tamaño $p(D)$, mientras que a la derecha se muestra una distribución no ganadora de cardinalidad máxima, es decir, de tamaño $P(D) - 1$.

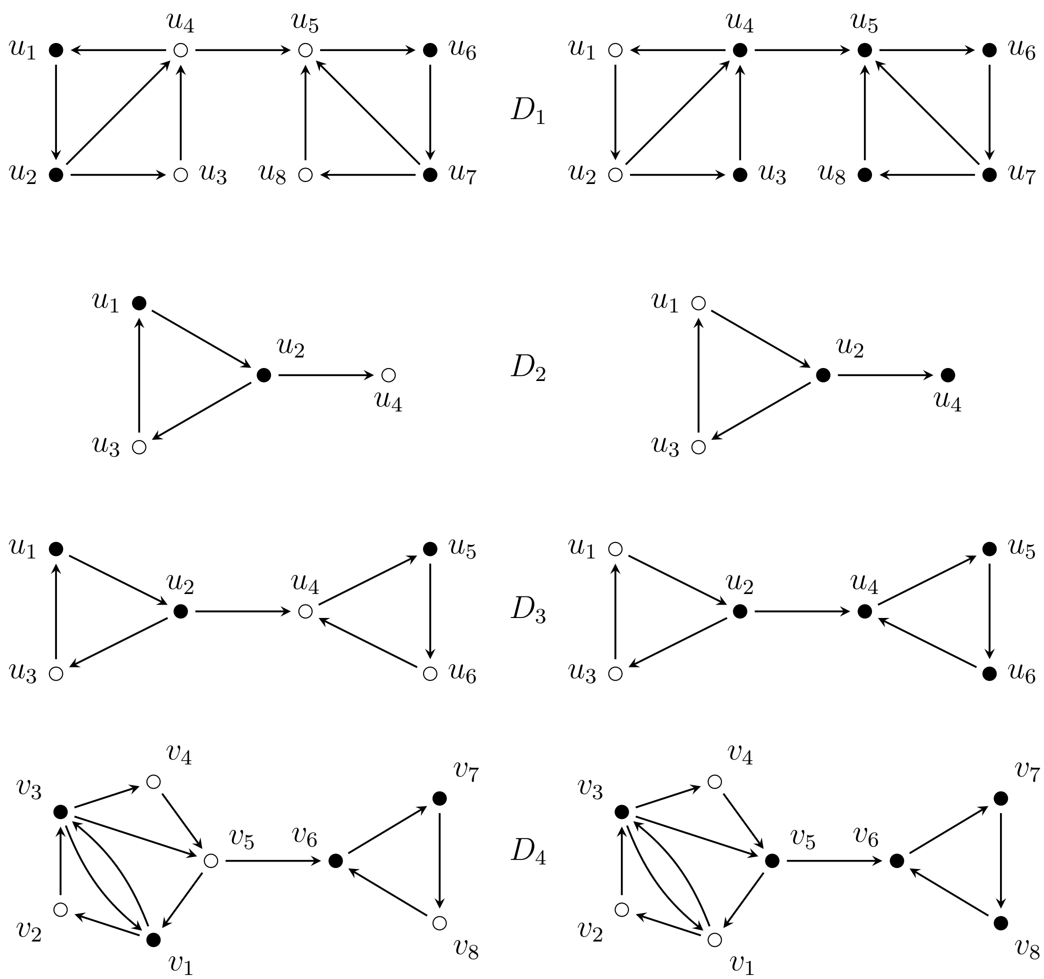

Figura 2.2: Digráficas que muestran la independencia que hay entre los incisos (iii) y (iv) del Teorema 2.1.4.

	$P(D_i)$		$\lvert V(D_i)\rvert - \text{mín}_{K\in\mathcal{K}}\{\lvert V(K)\rvert - P(K)\}$	$p(D_i)$		$\sum_{K\in\mathcal{K}} p(K)$
D_1	7	$=$	$8-1=7$	4	$=$	$2+2=4$
D_2	3	$<$	$4-0=4$	2	$<$	$2+1=3$
D_3	5	$=$	$6-1=5$	3	$<$	$2+2=4$
D_4	6	$<$	$8-1=7$	4	$=$	$2+2=4$

Tabla 2.1: Aquí se muestran los números de damas y los números óptimos de damas de las digráficas en la Figura 2.2.

Proposición 2.1.5. *Para cualquier digráfica D se tiene que $\alpha_D \leq P(D)$. Además, si D tiene al menos una flecha, entonces $\alpha_D + 1 \leq P(D)$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha_D = k$ y sea $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq V(D)$ un conjunto independiente, tomemos la distribución $Q = A \setminus \{u_k\}$ la cual tiene tamaño $k-1$. Observemos que si $m = (u, v, w)$ es movimiento válido, entonces $u, v \in Q$ son adyacentes, pero Q es un conjunto independiente, por lo tanto no hay movimientos válidos, es decir, $\text{Reach}(Q) = Q$, y dado que $u_k \notin Q = \text{Reach}(Q)$, entonces Q no es ganadora y $k = \alpha_D \leq P(D)$.

Si además D tiene al menos una flecha, entonces existe $v \in V(D) \setminus A$. Consideremos A como distribución, dado que la observación anterior es ahora aplicable a la distribución A tenemos que no hay movimientos válidos, por lo tanto $v \notin \text{Reach}(A)$, es decir, A no es ganadora y $k + 1 = \alpha_D + 1 \leq P(D)$. ■

Definición 2.1.6. Dada una distribución Q en una digráfica D y $v \in V(D)$, definimos el peso de Q respecto a v como:

$$wt_v(Q) = \sum_{u\in Q} \sigma^{d(u,v)}$$

donde $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ es la raíz positiva de $x^2+x = 1$, y $d(u, v)$ es la distancia en D de u a v.

Lema 2.1.7 (Monotonía del peso)**.** *Sea $v \in V(D)$, sea Q una distribución en una digráfica D, y sea Q' obtenida de Q por una sucesión finita de movimientos, entonces $wt_v(Q') \leq wt_v(Q)$. Además, si $wt_v(Q) < 1$, entonces $v \notin \text{Reach}(Q)$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $Q' = m(Q)$, donde $m = (u, v, w)$. Además, sabemos que para cualquier $z \in V(D)$ $d(u, z) \leq d(w, z) + 2$ y $d(v, z) \leq d(w, z) + 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} wt_v(Q') &= wt_v(Q) - \sigma^{d(u,z)} - \sigma^{d(v,z)} + \sigma^{d(w,z)} \\ &\leq wt_v(Q) - \sigma^{d(w,z)+2} - \sigma^{d(w,z)+1} + \sigma^{d(w,z)} \\ &= wt_v(Q) - \sigma^{d(w,z)}(\sigma^2 + \sigma - 1) \\ &= wt_v(Q) \end{aligned}$$

Por otro lado, si $v \in \mathrm{Reach}(Q)$, entonces v está en alguna distribución Q' obtenida a partir Q al aplicar una sucesión finita de movimientos, lo que a su vez implica que $\sigma^{d(v,v)} = \sigma^0 = 1$ es un elemento de la suma $\sum_{u \in Q} \sigma^{d(u,v)} = wt_v(Q')$, por lo cual se deduce que $1 \leq wt_v(Q') \leq wt_v(Q)$. ■

Proposición 2.1.8. *Para cualquier digráfica D que tenga* $\mathrm{diam}(D) = d$*, tenemos que $P(D) \geq d$.*

Demostración. Sean $x_0, x_d \in V(D)$ tales que $d(x_0, x_d) = d$, sea $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$ una x_0x_d-trayectoria de longitud d y tomemos $Q = \{x_0, \ldots, x_{d-2}\}$ una distribución. Entonces $wt_{x_d}(Q) = \sigma^2 + \sigma^3 + \cdots + \sigma^d < 1$. Así por Lema 2.1.7 $x_d \notin \mathrm{Reach}(Q)$ y $P(D) \geq d$. ■

Ahora procederemos a definir nuevos tipos de movimientos, pero para tener un mayor conocimiento de lo que cada movimiento le hace a la distribución dada en la digráfica nos valdremos de numerar el conjunto de damas para que sepamos, turno a turno, la posición de cada dama en la digráfica.

Dada un digráfica D definimos $\mathscr{L}_D = \{v_n \mid v \in V(D),\ n \in \mathbb{N}\}$, usaremos el término v_n para decir que la n-ésima dama está en el vértice v. A partir de esto definimos una *multidistribución* Q como un subconjunto finito de $\mathscr{L}_D$ tal que para toda i si $u_i, v_i \in Q$, entonces $u = v$, es decir, cada dama puede estar en a lo más un vértice a la vez, pero varias damas pueden estar en un mismo vértice simultáneamente. Es claro que al tomar una distribución y numerar sus damas podemos verla como una multidistribución, pero para remarcar este hecho las llamaremos distribuciones propias.

Dados $u, v, w \in V(D)$ distintos donde $(u, v), (v, w) \in A(D)$ y $u_i, v_j \in Q$ definimos un *movimiento de apilación* $m = (u_i, v_j, w_i)$ como el que sustituye la multidistribución Q por la multidistribución $m(Q) = (Q \setminus \{u_i, v_j\}) \cup \{w_i\}$. Observemos que los movimientos de damas son un caso particular de los movimientos de apilación.

Asimismo definimos un *movimiento de impulso* como aquel que dados $u, w \in V(D)$ distintos con $(u,w) \in A(D)$, $u_i, u_j \in Q$ y $i \neq j$ $m = (u_i, u_j, w_i)$ sustituye la multidistribución Q por la multidistribución $m(Q) = (Q \setminus \{u_i, u_j\}) \cup \{w_i\}$. El *movimiento de remoción* m respecto a u_i es aquel que dado $u_i \in Q$ sustituye la multidistribución Q por la multidistribución $m(Q) = Q \setminus \{u_i\}$. Por último, dada una multidistribución Q definimos su *alcance global* $\mathrm{Reach_a}(Q)$ como el conjunto de todos los vértices que son alcanzables desde Q usando un número finito de movimientos de cualquier tipo. Claramente $\mathrm{Reach}(Q) \subseteq \mathrm{Reach_a}(Q)$.

2.2. La monotonía del alcance

Teorema 2.2.1 (Monotonía del alcance global)**.** *Si Q' y Q son dos multidistribuciones tales que $Q' \subset Q$, entonces* $\mathrm{Reach_a}(Q') \subseteq \mathrm{Reach_a}(Q)$.

Demostración. Sea $u \in \mathrm{Reach_a}(Q')$, entonces hay una sucesión de movimientos M_u tal que $u \in M_u(Q')$. Consideremos una sucesión M que consta únicamente de movimientos de remoción respecto a todos los $w_i \in Q \setminus Q'$, entonces $M(Q) = Q'$. Definiendo M_u^* como la sucesión resultante de concatenar a M con M_u, tenemos que $u \in M_u(Q') = M_u(M(Q)) = M_u^*(Q)$, por lo tanto $u \in \mathrm{Reach}(Q)$. ■

Definición 2.2.2. Dada Q una multidistribución, un bosque de movimientos de Q es un bosque binario etiquetado (conformado por la unión ajena de árboles binarios etiquetados) que cumple las siguientes tres propiedades:

(f_1) La etiqueta de cada vértice del árbol es un elemento de $\mathscr{L}_D$, varios vértices pueden tener la misma etiqueta.

(f_2) La etiqueta de cada hoja es un elemento de Q, pero no puede haber hojas con la misma etiqueta.

(f_3) Todo vértice interior tiene un hijo izquierdo y un hijo derecho, tales que si dicho vértice interior tiene etiqueta w_i, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- El hijo izquierdo tiene etiqueta u_i y el hijo derecho v_j, donde u, v, w son distintos vértices tales que $(u,v), (v,w) \in A(D)$ e $i \neq j$.
- El hijo izquierdo tiene etiqueta u_i y el hijo derecho u_j, donde u, w son distintos vértices tales que $(u,w) \in A(D)$ e $i \neq j$.

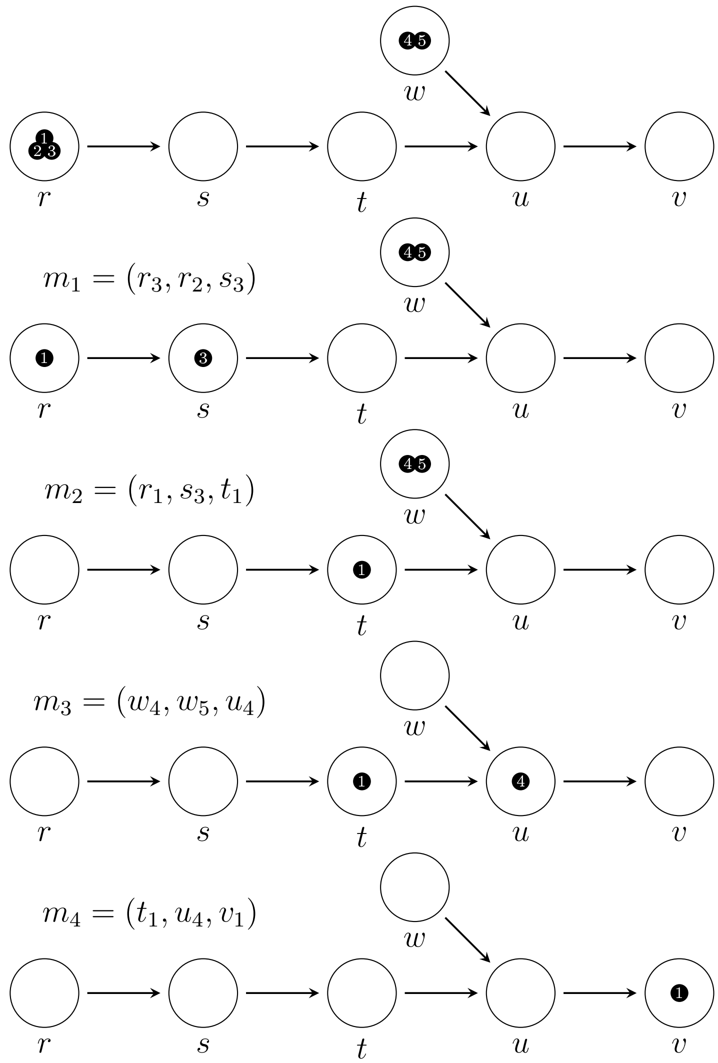

Figura 2.3: Ejemplo de una digráfica con multidistribución $Q = \{r_1, r_2, r_3, w_4, w_5\}$ y una sucesión de movimientos $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$.

Una transversal de un bosque de movimientos es una ordenación de todos los vértices interiores tal que cada vértice interior precede a sus ancestros. Cada transversal $N = (n_1, n_2, \ldots, n_p)$ corresponde a una sucesión válida de movimientos de apilación y de remoción $M = (m_1, m_2, \ldots, m_p)$ de Q, donde $m_k = (u_i, v_j, w_i)$ si el vértice n_k y sus hijos tienen etiquetas w_i, u_i, v_j respectivamente, y $m_k = (u_i, u_j, w_i)$ si el vértice n_k y sus hijos tienen etiquetas w_i, u_i, u_j respectivamente. A partir de esto resulta claro que existe una biyección, dada por la correspondencia anterior, entre las sucesiones válidas de movimientos a partir de Q y las transversales de los bosques de movimiento de Q. Por ejemplo, en la Figura 2.4 tenemos el árbol de movimientos de la sucesión $M = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ de la Figura 2.3, lo cual nos genera la transversal $N = (n_1 = s_3, n_2 = t_1, n_3 = u_4, n_4 = v_1)$, pero además, a partir de T, podemos construir la transversal $N' = (n'_1 = u_4, n'_2 = s_3, n'_3 = t_1, n'_4 = v_1)$, la cual corresponde a la sucesión de movimientos $M' = (m_3, m_1, m_2, m_4)$.

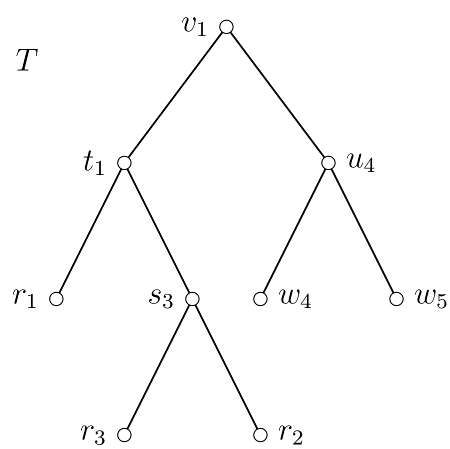

Figura 2.4: El árbol de movimientos T de la sucesión de movimientos M en la digráfica de la Figura 2.3.

Claramente, a partir de lo anterior, podemos deducir que si M es una sucesión de movimientos y F es su bosque de movimientos, entonces $M(Q) = (Q \setminus h(F)) \cup r(F)$, donde $h(F)$ es el conjunto de hojas F y $r(F)$ es el conjunto de raíces de F.

Teorema 2.2.3. *Si Q es una distribución propia, entonces* $\mathrm{Reach}(Q) = \mathrm{Reach_a}(Q)$.

Demostración. Por inducción sobre $|Q|$.

Si $|Q| = 1$ se cumple claramente. Entonces supongamos que se cumple para cualquier distribución de cardinalidad menor a q, y tomemos Q una distribución de cardinalidad q. Sea $x \in \mathrm{Reach_a}(Q) \setminus Q$, entonces existe una sucesión válida de movimientos $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$ tal que $x \in M(Q)$. Observemos que por hipótesis de inducción, nos basta encontrar un movimiento de damas válido m' sobre Q tal que $x \in \mathrm{Reach_a}(m'(Q))$.

Si quitamos todos los movimientos de remoción en la sucesión M obtenemos una nueva sucesión válida M' tal que $x \in M'(Q)$ y sólo consta de movimientos de apilación y de impulso (los únicos cambios posibles es que algunos movimientos ya no sean de damas sino de apilación). Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que M está formado solamente por movimientos de apilación y de impulso. Dado esto podemos considerar a F el bosque de movimientos que corresponde a M, observemos que F tiene un vértice interior etiquetado x_r para algún $r \in \mathbb{N}$. A continuación demostraremos que podemos suponer que M no contiene movimientos de impulso.

Sea $m \in M$ de impulso, es decir, $m = (u_i, u_j, v_i)$, y sea n el vértice de F correspondiente a m; como $i \neq j$ y Q es propia se cumple que $u_i \notin Q$ o $u_j \notin Q$, es decir, algún hijo de n no es hoja en F. Afirmamos que podemos suponer sin pérdida de generalidad que el hijo izquierdo de n, digamos n' (etiquetado u_i) no está en Q, de lo contrario el hijo derecho de n no es hoja de F, entonces podemos intercambiar los subárboles izquierdo y derecho de n al reemplazar cada ocurrencia de i por j en las etiquetas de n y sus ancestros para crear un bosque de movimientos que pone una dama en x y donde el hijo izquierdo de n no es hoja. Consideremos los siguientes casos:

(a) Si el hijo derecho de n' tiene etiqueta w_k para algún vértice $w \neq v$, reemplazamos el subárbol izquierdo del vértice n por el subárbol derecho del vértice n' y reemplazamos cada ocurrencia de i por k en las etiquetas n y sus ancestros.

(b) Si el hijo derecho de n' tiene etiqueta v_k, reemplazamos a n y su subárbol por el subárbol derecho de n' y cambiamos cada ocurrencia de i por k en las etiquetas de los (anteriormente) ancestros de n.

En cualquier caso obtenemos un nuevo bosque de movimientos (respecto a Q) que pone una dama sobre x y tiene menos movimientos de impulso que M. Gracias a este procedimiento y utilizando un argumento inductivo, sin pérdida de generalidad podemos asumir que M no tiene movimientos de impulso. Por lo tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que F consta únicamente de movimientos de apilación.

Sea m el primer movimiento en M cuyo vértice objetivo no esté en Q, digamos $m = (u_i, v_j, w_i)$; observemos que dada nuestra elección de m existen $u_k, v_l \in Q$ tales que $m' = (u_k, v_l, w_k)$ es movimiento de damas válido sobre Q. Recordemos que $x \in \text{Reach}(Q) \subseteq Q$, mostraremos que $x \in \text{Reach}(m'(Q))$ construyendo un nuevo bosque de movimientos F' que contenga un vértice cuya etiqueta sea x_t para algún $t \in \mathbb{N}$ y un vértice interior etiquetado w_k cuyos hijos izquierdo y derecho sean hojas con etiquetas u_k, v_l respectivamente. De esta forma cualquier transversal de F' que inicie con tal vértice interior pondrá la dama t sobre x, obteniendo que $x \in \text{Reach}(m'(Q))$.

Tomemos n el vértice en F que corresponde a m, sean L y R los subárboles izquierdo y derecho de n respectivamente, y sean H el conjunto de hojas de $F \setminus (L \cup R)$ y K el conjunto de elementos de Q que no son hojas de F, ahora procederemos a construir F'. Si A es un subárbol de F donde u_k es una hoja, llamaremos A' al árbol resultado de reemplazar k por i en u_k y en todos sus ancestros, análogamente, si A es un subárbol de F donde v_l es una hoja, llamaremos A'' al árbol resultado de reemplazar l por j en v_l y en todos sus ancestros.

Primero, al considerar F, reemplazemos L por una hoja con etiqueta u_k y R por otra hoja con etiqueta v_l, y observemos que las hojas del árbol resultante son elementos de Q. Si u_k y v_l son hojas de $L \cup R$ o no son hojas de F, entonces no hay dos hojas con la misma etiqueta, el nuevo bos que será F. Por otro lado, observemos que si u_k o v_l son hojas de H, entonces hay dos hojas con etiqueta u_k o dos hojas con con etiqueta v_l. Si u_k es hoja de H, hay dos casos:

(i) Si v_l no es hoja de L, entonces reemplazaremos la hoja u_k de H por L.

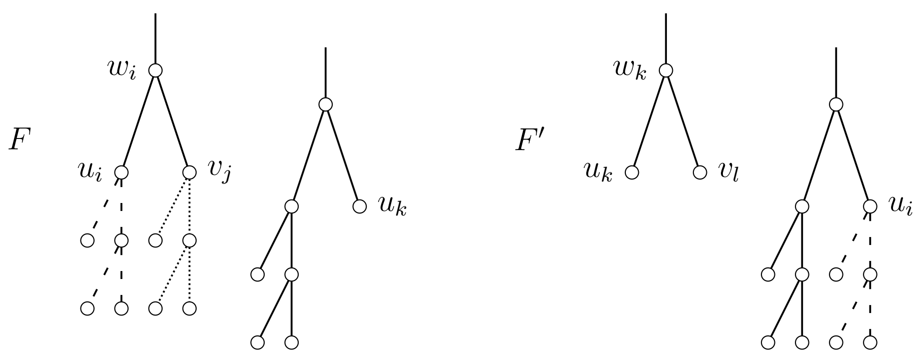

Figura 2.5: Ejemplo de un bosque de movimientos F para el caso (i).

(ii) Si v_l es hoja de L, tenemos dos subcasos:

(a) Si v_j, el hijo derecho de n, es hoja de F, entonces reemplazamos la hoja v_l de L por v_j, y también reemplazaremos la hoja u_k de H por L''.

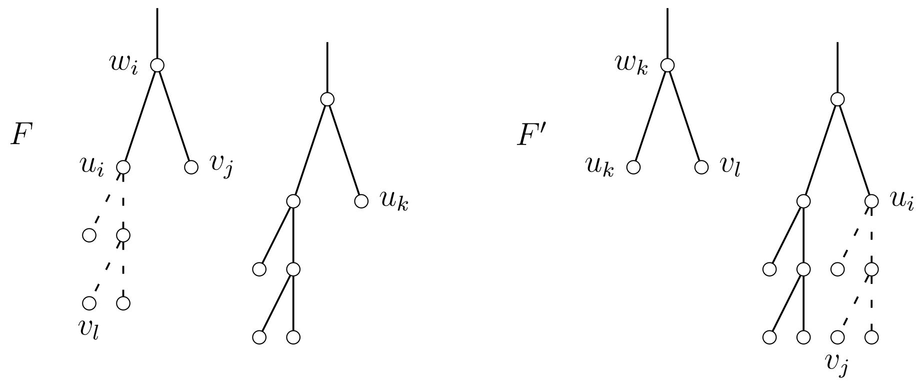

Figura 2.6: Ejemplo de un bosque de movimientos F para el caso $(ii.a)$.

(b) Si v_j, el hijo derecho de n, no es hoja de F, entonces reemplazaremos la hoja v_l de L por R'', y al árbol resultante de esta operación lo colocamos en el lugar de la hoja u_k de H.

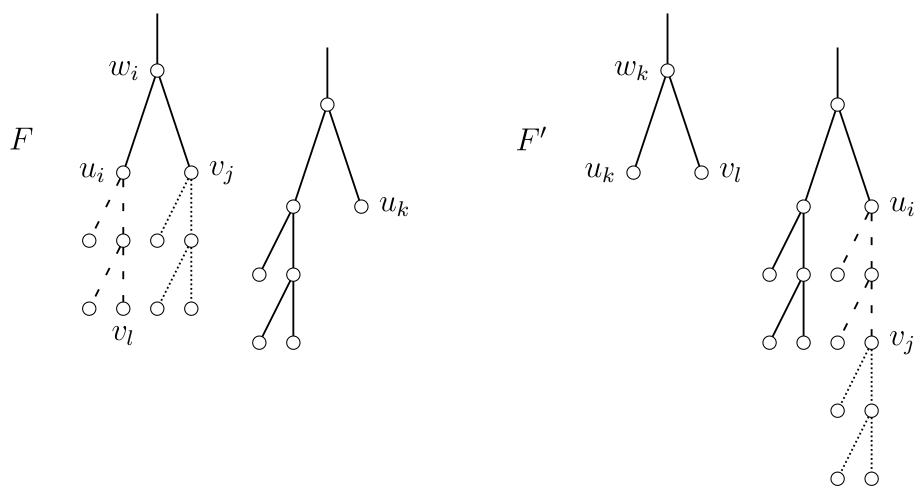

Figura 2.7: Ejemplo de un bosque de movimientos F para el caso $(ii.b)$.

De forma análoga, Si v_l es hoja de H, tenemos:

(i') Si u_k no es hoja de R, entonces reemplazaremos la hoja v_l de H por R.

(ii') Si u_k es hoja de R, tenemos dos subcasos:

(a') Si u_i, el hijo izquierdo de n, es hoja de F, entonces reemplazaremos la hoja u_k de R por u_i.

(b') Si u_i, el hijo izquierdo de n, no es hoja de F, entonces reemplazaremos la hoja u_k de R por L', y al árbol resultante de esta operación lo colocamos en el lugar de la hoja v_j de H.

En cualquier caso, elegimos cualquier transversal de este bosque, y recorriendo las vértices interiores en orden, cambiamos el subíndice en la etiqueta del vértice por el subíndice en la etiqueta del hijo izquierdo. Al bosque resultante de esta construcción lo nombraremos F'.

Afirmamos que F' es un bosque de movimientos. Es claro que F' cumple f_1. La propiedad f_2 se cumple pues sólo agregamos hojas con etiquetas u_k, v_l y quitamos las hojas que tenían esas etiquetas. Y por la reetiquetación hecha se cumple f_3. Además F' tiene un vértice etiquetado w_k cuyos hijos izquierdo y derecho son hojas con etiquetas u_k, v_l respectivamente, y el vértice etiquetado x_r de F debe existir en F', aunque posiblemente la etiqueta haya cambiado a x_t para alguna $t \in \mathbb{N}$. De esta manera, cualquier transversal de F' que inicie con el vértice n muestra que $x \in \mathrm{Reach}(m'(Q))$, lo que prueba el teorema. ■

Teorema 2.2.4 (Monotonía del alcance)**.** *Para cualesquiera dos distribuciones tales que $Q' \subset Q$, se cumple que* $\mathrm{Reach}(Q') \subseteq \mathrm{Reach}(Q)$.

Demostración. $\mathrm{Reach}(Q') = \mathrm{Reach}_{\mathrm{a}}(Q') \subseteq \mathrm{Reach}_{\mathrm{a}}(Q) = \mathrm{Reach}(Q)$. ■

Sea D una digráfica y sea Q una distribución en D, entonces para cada $u \in V(D)$ definimos al conjunto $Q_u = \{v \in Q \mid \text{hay un } vu\text{-camino en } D\}$, análogamente definimos $\overline{Q_u} = \{v \in Q \mid \text{no hay un } vu\text{-camino en } D\} = Q \setminus Q_u$.

Lema 2.2.5. *Sea D una digráfica. Para toda distribución Q y para cada $u \in V(D)$ se cumple que si M es una sucesión válida de movimientos de damas mínima tal que $u \in \mathrm{Reach}(Q)$, entonces para cada $v \in V(D)$ que ocurra al menos una vez en M hay una vu-trayectoria en D.*

Es decir, si F_M es el bosque de movimientos de M, entonces F_M es un árbol.

Demostración. Procederemos por inducción sobre $|Q|$. Para $|Q| = 1$ es trivial. Supongamos que el resultado es válido para cualquier distribución con cardinalidad menor a la de Q. Sea $M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ una sucesión válida de movimientos de damas de tamaño mínimo tal que $u \in M(Q)$ y consideremos $M' = \{m_2, \ldots, m_r\}$, observemos que M' es una sucesión válida de movimientos de damas de tamaño mínimo tal que $u \in M'(m_1(Q))$. De no ser así existiría $M'' = \{m'_1, \ldots, m'_s\}$ con $s < r-1$ tal que $u \in M''(m_1(Q))$, entonces $M''' = \{m_1\} \cup M''$ es una sucesión válida tal que $u \in M'''(Q)$ de tamaño $s+1 < r$, contradiciendo la elección de M.

Además si $m_1 = (x, y, z)$, entonces $m_1(Q) = (Q \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$, y es claro que $|m_1(Q)| = |Q| - 1$ y por hipótesis inductiva tenemos que $F_{M'}$ es un árbol. Observemos que si z no es etiqueta de ninguna hoja en $F_{M'}$, entonces la etiqueta de cada hoja está en Q y entonces M' es sucesión válida en Q tal que $u \in M'(Q)$ pero de tamaño $r-1$, lo que es una contradicción. Entonces z es etiqueta de (exactamente) una hoja de $F_{M'}$. Además, es claro que $F_{M'} \subseteq F_M$, pero z no es etiqueta de ninguna hoja en F_M, entonces el vértice cuya etiqueta es z y es hoja en $F_{M'}$ tiene dos hijos en F_M, y dado que $m_2, \ldots, m_r$ ya están representados en $F_{M'}$ los hijos de dicho vértice tienen etiquetas x, y respectivamente. Por lo tanto F_M es árbol. ■

Teorema 2.2.6. *Sea D una digráfica. Para cualquier distribución Q y para cada $u \in V(D)$ se cumple que $u \in \mathrm{Reach}(Q_u)$ si y sólo si $u \in \mathrm{Reach}(Q)$.*

Demostración. La suficiencia se tiene por la monotonía del alcance. Para la necesidad tenemos que $u \in \mathrm{Reach}(Q)$, sea $M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ una sucesión válida de movimientos tal que $u \in M(Q)$, entonces para todo vértice v que ocurre en M existe una vu-trayecteria en D, en particular para los vértices que son la etiqueta de las hojas de F_M que a su vez están en Q. Por lo tanto dichos vértices están en Q_u y entonces $u \in \mathrm{Reach}(Q_u)$. ■

Capítulo 3

Primeros resultados

3.1. Algunos resultados generales

Proposición 3.1.1. *Sea D una digráfica con r vértices de ingrado cero, entonces $p(D) \geq r$.*

Demostración. Sea Q una distribución con $r-1$ vértices, entonces hay un vértice $u \in V(D) \setminus Q$ tal que $d^{-}(u) = 0$. Claramente tenemos que $Q_u = \varnothing$, por tanto $u \notin \text{Reach}(Q_u) \subseteq \text{Reach}(Q)$, de esto se sigue que Q no es ganadora y entonces $p(D) \geq r$. ■

Teorema 3.1.2. *Sea D una digráfica de orden n, son equivalentes*

(i) $n = 1$

(ii) $P(D) = 1$

(iii) $p(D) = 1$

Demostración. Si $n = 1$, entonces $1 \leq P(D) \leq n = 1$, por tanto $P(D) = 1$.

Si $P(D) = 1$, sabemos que $1 \leq p(D) \leq P(D) = 1$, por tanto $p(D) = 1$.

Si $p(D) = 1$, como no hay movimientos válidos, entonces no hay vértices fuera de la distribución ganadora, así $n = 1$. ■

Corolario 3.1.3. *Sea D una digráfica de orden $n = 2$, entonces $p(D) = P(D) = 2$.*

Demostración. Por la proposición anterior $2 \leq p(D) \leq P(D) \leq n = 2$, por tanto $p(D) = P(D) = 2$. ■

Teorema 3.1.4. *Sea D una digráfica asimétrica de orden $n \geq 3$. Entonces, $p(D) = 2$ si y sólo si existen $u, v \in V(D)$ distintos tales que $(u, v) \in A(D)$ y $d_D^+(v) = n - 2$.*

Demostración. Para la primera implicación, sea $Q = \{u, v\}$ una distribución ganadora en D, dado que $n \geq 3$, vemos que no hay $w, w' \in V(D) \setminus Q$ distintos tales que $m = (u, v, w)$, $m' = (v, u, w')$ sean movimientos válidos, pues entonces $(u, v), (v, u) \in A(D)$, contradiciendo que D es asimétrica. Así supongamos sin pérdida de generalidad que $m_w = (u, v, w)$ es válido para todo $w \in V(D) \setminus Q$, entonces $(u, v) \in A(D)$, $d_D^+(v) = n - 2$.

Para la recíproca, consideremos $Q = \{u, v\}$ donde $d_D^+(v) = n - 2$, y definamos el movimiento $m_w = (u, v, w)$ para cada $w \in N^+(v) = V(D) \setminus Q$, y así obtenemos $\text{Reach}(Q) = V(D)$. ■

Teorema 3.1.5. *Sea D una digráfica de orden $n \geq 3$. Entonces, $P(D) = 2$ si y sólo si para cualesquiera $u, v \in V(D)$ distintos se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $(u, v), (v, u) \in A(D)$, $N^+(u) \cup N^+(v) = V(D)$

(ii) $(u, v) \in A(D)$, $(v, u) \notin A(D)$, $N^+(v) \cup \{v\} = V(D)$

(iii) $(v, u) \in A(D)$, $(u, v) \notin A(D)$, $N^+(u) \cup \{u\} = V(D)$.

Demostración. Para la primera implicación, sean u, v cualesquiera dos vértices distintos, por hipótesis $Q = \{u, v\}$ es distribución ganadora, es decir, cualquier $w \in V(D)$ también está en $\text{Reach}(Q)$. Observemos que después de aplicar algún movimiento válido m a partir de Q tenemos que $|m(Q)| = 1$, entonces cualquier sucesión válida consta de un único movimiento de damas. Sea $w \in V(D) \setminus Q$, sabemos que $w \in \text{Reach}(Q)$, entonces $m_w = (u, v, w)$ es movimiento válido o $m'_w = (v, u, w)$ es movimiento válido, dependiendo de los siguientes tres casos:

(i) $(u, v), (v, u) \in A(D)$, puesto que ambas flechas están en D, si hacemos variar a w, entonces la validez de m_w y m'_w también varía, pero en cualquier caso al menos uno de los dos movimientos es válido (pues Q es ganadora), es decir, $w \in N^+(u) \cup N^+(v)$, por lo tanto $N^+(u) \cup N^+(v) = V(D)$.

(ii) $(u, v) \in A(D)$, $(v, u) \notin A(D)$; la segunda condición implica que m'_w no es válido, entonces m_w es válido, es decir, $w \in N^+(v)$, por lo tanto $N^+(v) \cup \{v\} = V(D)$.

(iii) $(v, u) \in A(D)$, $(u, v) \notin A(D)$; análogo a *(ii)*.

Para el regreso sean $u, v \in V(D)$ distintos, $Q = \{u, v\}$, y definamos para cualquier $w \in V(D) \setminus Q$

$$m_w = \begin{cases} (u, v, w) & \text{si } w \in N^+(v), \\ (v, u, w) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente m_w es un movimiento válido, puesto que en cualquier caso se cumple que $w \in V(D) \setminus Q \subseteq N^+(u) \cup N^+(v)$, y así $w \in \text{Reach}(Q)$. Concluimos entonces que Q es una distribución ganadora y $P(D) = 2$. ■

Corolario 3.1.6. *Si D es una digráfica completa con orden $n \geq 2$, se cumple que $p(D) = P(D) = 2$.*

Demostración. Dada D una digráfica completa con orden $n \geq 2$, es claro que cualesquiera $u, v \in V(D)$ cumplen la condición (i) del teorema anterior, por lo tanto $P(D) = 2$. Además $P(D) \geq p(D) \geq 2$, entonces $P(D) = p(D) = 2$. ■

Teorema 3.1.7. *Sea D de orden n. Si $\delta^- = 0$, entonces $P(D) = n$. Además cuando D es asimétrica, si $P(D) = n$, entonces $\delta^- = 0$.*

Demostración. Primero supongamos que hay $v \in V(D)$ tal que $d^-(v) = 0$, y consideremos $Q = V(D) \setminus \{v\}$. Observemos que para que algún movimiento de damas $m = (x, y, z)$ sea válido se debe cumplir que $x, y \in Q$, $z \notin Q$ y $(x, y), (y, z) \in A(D)$, entonces $z \neq v$ ya que $d^-(v) = 0$. Por lo tanto $z \in V(D) \setminus \{v\} = Q$, pero $z \notin Q$, entonces no hay movimientos de damas válidos, es decir, $Q = \text{Reach}(Q)$, entonces $v \notin \text{Reach}(Q)$, y por lo tanto $P(D) = n$.

Ahora supongamos que D es digráfica asimétrica y $P(D) = n$, entonces existe $v \in V(D)$ tal que $Q = V(D) \setminus \{v\}$ no es una distribución ganadora. Si $d^-(v) = 0$ ya acabamos; por otro lado, si $d^-(v) \geq 1$, entonces hay un vértice $u \in N^-(v) \subseteq Q$. Observemos que $d^-(u) = 0$, pues de lo contrario hay $w \in N^-(u) \subseteq Q$, $w \neq v$ y por consecuencia el movimiento $m = (w, u, v)$ es válido, de lo cual se deduce que $\text{Reach}(Q) \subseteq Q \cup \{v\} = V(D)$, contradiciendo que Q no es ganadora. ■

3.2. Isomorfismo en damas

Recordemos ahora que cualesquiera dos digráficas D, H se dicen isomorfas si existe $\Phi : V(D) \to V(H)$ una función biyectiva tal que $(u, v) \in A(D)$ si y sólo si $(\Phi(u), \Phi(v)) \in A(H)$, y lo denotamos $D \cong H$.

Si consideramos Q una distribución en D es claro que $\Phi[Q]$ es una distribución en H, dado lo anterior, podemos extender de manera natural el isomorfismo Φ a los movimientos de damas válidos en Q de la siguiente forma, si $m = (u, v, w)$ es un movimiento de damas válido, entonces definimos $\Phi(m) = (\Phi(u), \Phi(v), \Phi(w))$, el cual resulta un movimiento válido, y además $\Phi[m(Q)] = \Phi(m)[\Phi(Q)]$, lo cual inspira el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 (Isomorfismo en damas)**.** *Sean D, D' digráficas isomorfas bajo la función $\Phi : V(D) \to V(D')$, con Q una distribución en D, entonces:*

(*i*) *Si M es una sucesión válida en D a partir de Q, entonces $\Phi[M]$ es una sucesión válida en D' a partir de $\Phi[Q]$ y $\Phi[M(Q)] = \Phi[M](\Phi[Q])$.*

(*ii*) *Si $A \subseteq \mathrm{Reach}(Q)$, entonces $\Phi[A] \subseteq \mathrm{Reach}(\Phi[Q])$. Además si Q es distribución ganadora, entonces $\Phi[Q]$ es distribución ganadora.*

(*iii*) $\mathrm{Reach}(\Phi[Q]) = \Phi[\mathrm{Reach}(Q)]$.

(*iv*) *$P(D) = P(D')$ y $p(D) = p(D')$.*

Demostración. (*i*) Por inducción sobre $|M|$; si $|M| = 1$, entonces $M = \{m_1\}$, sea $m_1 = (x, y, z)$, por tanto $x, y \in Q$, $z \notin Q$, y $(x, y), (y, z) \in A(D)$. Además, por hipótesis $D \cong D'$, de lo cual tenemos que $\Phi(x), \Phi(y) \in \Phi[Q]$, $\Phi(z) \notin \Phi[Q]$, y $(\Phi(x), \Phi(y)), (\Phi(y), \Phi(z)) \in A(D')$. Así obtenemos que $\Phi(m_1) = (\Phi(x), \Phi(y), \Phi(z))$ es un movimiento válido en D' a partir de $\Phi[Q]$. Además

$$\begin{aligned} \Phi[M(Q)] &= \Phi[(Q \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}] \\ &= \Phi[Q \setminus \{x, y\}] \cup \Phi[\{z\}] \\ &= (\Phi[Q] \setminus \Phi[\{x, y\}]) \cup \{\Phi(z)\} \\ &= (\Phi[Q] \setminus \{\Phi(x), \Phi(y)\}) \cup \{\Phi(z)\} \\ &= \Phi[M](\Phi[Q]). \end{aligned}$$

Supongamos que si M es una sucesión válida en D y $|M| = k$, entonces $\Phi[M]$ es válida en D' y $\Phi[M(Q)] = \Phi[M](\Phi[Q])$.

Sea $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}\}$ una sucesión válida en D, entonces si tomamos $M' = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ tenemos que, por hipótesis de inducción, $\Phi[M']$ es sucesión válida en D' y $\Phi[M'(Q)] = \Phi[M'](\Phi[Q])$. Consideremos a $m_{k+1} = (u, v, w)$, entonces $u, v \in M'(Q)$, $w \notin M'(Q)$, $(u, v), (v, w) \in A(D)$, y por lo tanto deducimos que $\Phi(u), \Phi(v) \in \Phi[M'(Q)] = \Phi[M'](\Phi[Q])$, $\Phi(w) \notin \Phi[M'(Q)] = \Phi[M'](\Phi[Q])$, $(\Phi(u), \Phi(v)), (\Phi(v), \Phi(w)) \in A(D')$, entonces $\Phi(m_{k+1})$ es un movimiento válido en D', de lo cual se deduce que $\Phi(m_{k+1})\Phi[M'] = \Phi[M]$ es una sucesión válida en D'. Además

$$\begin{aligned} \Phi[M(Q)] &= \Phi[m_{k+1}(M'(Q))] \\ &= \Phi(m_{k+1})(\Phi[M'(Q)]) \\ &= \Phi(m_{k+1})(\Phi[M'](\Phi[Q])) \\ &= (\Phi(m_{k+1})\Phi[M'])(\Phi[Q]) \\ &= \Phi[M](\Phi[Q]). \end{aligned}$$

(ii) Sea $\Phi(x) \in \Phi[A]$, de esta forma $x \in A \subseteq \text{Reach}(Q)$, es decir, hay una sucesión válida M tal que $x \in M(Q)$, entonces utilizando el inciso (i) tenemos que $\Phi(x) \in \Phi[M(Q)] = \Phi[M](\Phi[Q])$ donde $\Phi[M]$ es sucesión válida, por lo tanto $\Phi(x) \in \text{Reach}(\Phi[Q])$, lo que implica que $\Phi[A] \subseteq \text{Reach}(\Phi[Q])$. En particular para $A = V(D)$, como $\Phi[A] = \Phi[V(D)] = V(D')$, se tiene que si Q es distribución ganadora en D, entonces $\Phi[Q]$ es distribución ganadora en D'.

(iii) Veamos que $\text{Reach}(\Phi[Q]) \subseteq \Phi[\text{Reach}(Q)]$. Sea $y \in \text{Reach}(\Phi[Q])$, es decir, existe M, una sucesión válida en D', tal que $y \in M(\Phi[Q])$, al usar (i) y las propiedades de Φ se obtiene que

$$\Phi^{-1}(y) \in \Phi^{-1}[M(\Phi[Q])] = \Phi^{-1}[M](\Phi^{-1}\Phi[Q]) = \Phi^{-1}[M](Q),$$

donde $\Phi^{-1}[M]$ es una sucesión válida en D, por lo tanto $\Phi^{-1}(y) \in \text{Reach}(Q)$, y por propiedades de Φ se tiene $y = \Phi\Phi^{-1}(y) \in \Phi[\text{Reach}(Q)]$.

Para $\Phi[\text{Reach}(Q)] \subseteq \text{Reach}(\Phi[Q])$, tomemos $\Phi(x) \in \Phi[\text{Reach}(Q)]$, así tenemos que $x \in \text{Reach}(Q)$ y usando (ii) obtenemos que $\Phi(x) \in \text{Reach}(\Phi[Q])$.

(iv) Esto resulta directo a partir de (ii). ∎

3.3. Composición

En este momento nos abocaremos a revisar el comportamiento de los números de damas en la composición de digráficas, para las cuales sólo encontraremos cotas superiores de dichos parámetros. En esta sección consideraremos que D es una digráfica de orden n donde $V(D) = \{u_1, \ldots, u_n\}$, y además $H_1, \ldots, H_n$ serán digráficas ajenas.

Proposición 3.3.1. *Si $Q_D = \{u_1, \ldots, u_{p(D)}\}$ es una distribución ganadora en D, entonces $p(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq \sum_{i=1}^{p(D)} p(H_i)$. En particular, si $H = H_i$ para cualquier $1 \leq i \leq n$, entonces $p(D[H]) \leq p(D)p(H)$.*

Demostración. Sean $H_1, \ldots, H_n$ digráficas con orden $h_1, \ldots, h_n$ respectivamente, donde $V(H_j) = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{h_j}}\}$, además sin pérdida de generalidad podemos considerar que $Q_j = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{p(H_i)}}\}$ es distribución ganadora en H_j para cualquier $1 \leq j \leq n$. De esta forma, tomemos $Q = \bigcup_{i=1}^{p(D)} Q_i$, así $|Q| = \sum_{i=1}^{p(D)} p(H_i)$.

Sea v_{k_l} vértice de la composición, con $u_k \in Q_D$, y sea D_k la subdigráfica inducida de $D[H_1, \ldots, H_n]$ por el subconjunto de vértices $V(H_k)$ (en la composición), y sea $\Phi_k : H_k \to D_k$ tal que $\Phi_k(v) = v$, entonces $H_k \cong_{\Phi_k} D_k$. Observemos de esta forma que $\Phi_k[Q_k] = Q_k \subseteq Q$. Entonces, utilizando el Teorema de Isomorfismo en damas y la Monotonía del alcance, tenemos que

$$\mathrm{Reach}(\Phi_k[Q_k]) = \Phi[\mathrm{Reach}(Q_k)] = \Phi[V(H_k)] = V(D_k) \subseteq \mathrm{Reach}(Q),$$

y por lo tanto $\bigcup_{k=1}^{p(D)} V(H_k) \subseteq \mathrm{Reach}(Q)$.

Ahora, consideremos v_{k_l} un vértice de la composición, con $u_k \notin Q_D$, dado que $u_k \in \mathrm{Reach}(Q_D)$ tenemos que hay $M = \{m_1, \ldots, m_y\}$, una sucesión válida en D a partir de Q_D, tal que $u_k \in M(Q_D)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que dicha sucesión es mínima por cardinalidad, lo que nos asegura que la primera (y única) ocurrencia de u_k en M es como vértice destino en el movimiento m_y.

Tomemos $w_j \in Q_j$ para cada $1 \leq j \leq n$, y definamos una sucesión de movimientos $M' = \{m'_1, \ldots, m'_y\}$ donde si $m_q = (u_r, u_s, u_t)$, entonces

$$m'_q = \begin{cases} (w_r, w_s, w_t) & \text{si } 1 \leq q \leq y-1, \\ (w_r, w_s, v_{k_l}) & \text{si } q = y. \end{cases}$$

Tomemos $V(M)$ como el conjunto de vértices que ocurren al menos una vez en la sucesión M y $V(M')$ su análogo en M', entonces consideremos a D_M y $D_{M'}$ las subdigráficas inducidas por $V(M)$ en D y $V(M')$ en la composición respectivamente, al definir $\Phi : V(M) \to V(M')$ tal que

$$\Phi(u_i) = \begin{cases} w_i & \text{si } u_i \neq u_k \\ v_{k_l} & \text{si } u_i = u_k. \end{cases}$$

A partir de esto último, resulta claro que $D_M \cong_\Phi D_{M'}$ y además observemos que $\Phi[Q_D \cap V(M)] \subseteq \bigcup_{i=1}^{p(D)} Q_i = Q$, entonces aplicando nuevamente el Teorema de Isomorfismo en damas y la Monotonía del alcance, tenemos que M' es sucesión válida en $\bigcup_{i=1}^{p(D)} Q_i = Q$ y $u_k \in \mathrm{Reach}(Q_D \cap V(M))$, obteniendo así que

$$\begin{aligned} v_{k_l} = \Phi(u_k) \in {} & \Phi[\mathrm{Reach}(Q_D \cap V(M))] \\ & = \mathrm{Reach}(\Phi[Q_D \cap V(M)]) \\ & \subseteq \mathrm{Reach}(\Phi[Q_D]) \\ & = \mathrm{Reach}(Q). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup_{k=p(D)+1}^{n} V(H_k) \subseteq \mathrm{Reach}(Q)$ y anteriormente hemos obtenido que $\bigcup_{k=1}^{p(D)} V(H_k) \subseteq \mathrm{Reach}(Q)$, entonces $\bigcup_{k=1}^{n} V(H_k) = \mathrm{Reach}(Q)$. De esta forma deducimos que Q es una distribución ganadora en $D[H_1, \ldots, H_n]$, lo que a su vez implica que $p(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq \sum_{i=1}^{p(D)} p(H_i)$.

En particular, si $H = H_i$ para cualquier i, entonces $p(H) = p(H_i)$ para cualquier i, y así se tiene que $p(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq \sum_{i=1}^{p(D)} p(H) = p(D)p(H)$. ■

Observemos que la cota anterior es justa en el caso de que D sea una digráfica sin flechas, y la cota es estricta en el caso de que D y H sean las digráficas mostradas abajo, pues $|V(D)| = 2 < p(D[H]) = 3 < p(H)p(D) = 6$.

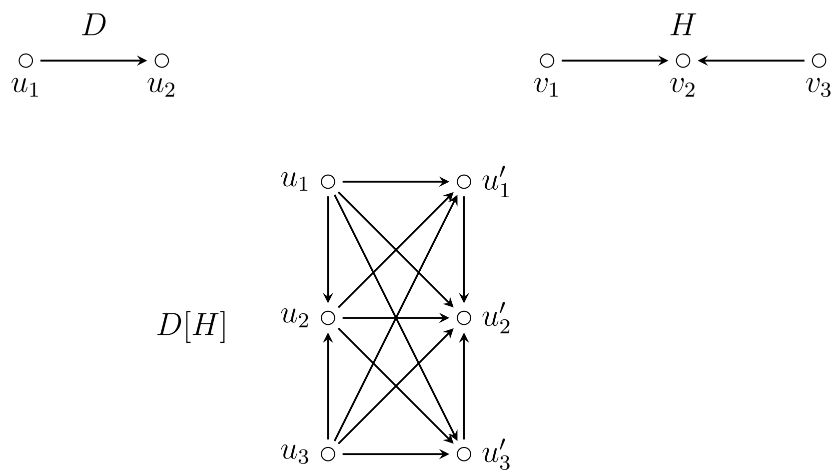

Figura 3.1:

Proposición 3.3.2. *Sea* $Q_D = \{u_1, \ldots, u_{p(D)}\}$ *distribución ganadora en* D *y* $n \geq 2$. *Si* $\delta_D^- \geq 1$, *entonces* $p(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq \text{mín}\{n, \sum_{i=1}^{p(D)} p(H_i)\}$.

Demostración. Sean $D, H_1, \ldots, H_n$ como en la proposición anterior y supongamos que $\delta_D^- \geq 1$. Para cada $1 \leq i \leq n$ tomemos $w_i \in V(H_i)$ y definamos a la distribución $Q = \{w_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Sea $v \notin Q$ un vértice de la composición, es decir, $v \in V(H_r) \setminus Q$ para algún $1 \leq r \leq n$. Observemos que por hipótesis, $N^-(u_r) \neq \varnothing$, sea $u_s \in N^-(u_r)$, análogamente $N^-(u_s) \neq \varnothing$, sea $u_t \in N^-(u_s)$, entonces $(u_t, u_s), (u_s, u_r) \in A(D)$, y por lo tanto $(w_t, w_s), (w_s, v)$ son flechas de la composición.

De esta forma obtenemos que $m = (w_t, w_s, v)$ es un movimiento válido a partir de Q, entonces $v \in \text{Reach}(Q)$, es decir, Q es una distribución ganadora en la composición y $p(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq n$. Esto último, aunado al resultado anterior, implica que $p(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq \text{mín}\{n, \sum_{i=1}^{p(D)} p(H_i)\}$. ∎

Resulta claro a partir de la Figura 3.1 que la condición $\delta_D^- \geq 1$ es necesaria para asegurar que el número de damas de la composición sea menor al orden de D. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra a $C_3[C_3]$, dicha digráfica cumple que $p(C_3[C_3]) = 3 = |V(C_3)|$, es decir, la cota de la Proposición 3.3.2 es justa.

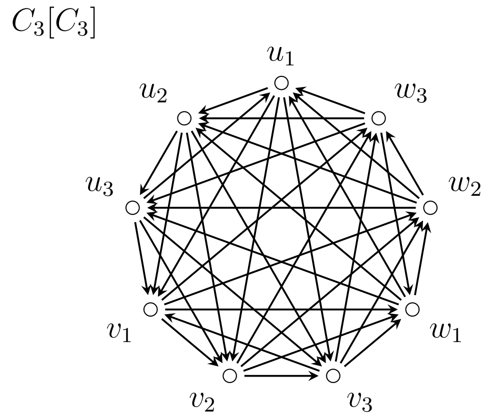

Figura 3.2:

Proposición 3.3.3. *$P(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq n - \text{mín}_{1\leq i\leq n}\{|V(H_i)| - P(H_i)\}$. En particular, si $H = H_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $P(D[H]) \leq n - |V(H)| + P(H)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$|V(H_1)| - P(H_1) = \min_{1\leq i\leq n}\{|V(H_i)| - P(H_i)\},$$

y sea Q una distribución de cardinalidad $n - |V(H_1)| + P(H_1)$. Al tomar cualquier H_j observemos que

$$\begin{aligned}
|Q \cap V(H_j)| &\geq n - |V(H_1)| + P(H_1) - \sum_{i\neq j} |V(H_i)| \\
&= n - |V(H_1)| + P(H_1) - n + |V(H_j)| \\
&= |V(H_j)| - |V(H_1)| + P(H_1) \\
&\geq |V(H_j)| - |V(H_j)| + P(H_j) = P(H_j)
\end{aligned}$$

así obtenemos que $|Q \cap V(H_j)| \geq P(H_j)$, entonces $Q \cap V(H_j)$ es ganadora en H_j para toda $1 \leq j \leq n$, y por lo tanto

$$P(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq n - \min_{1\leq i\leq n}\{|V(H_i)| - P(H_i)\}.$$

Finalmente, cuando se cumpla que $H_i = H$ para toda $1 \leq i \leq n$, entonces tendremos que $\text{mín}_{1\leq i\leq n}\{|V(H_i)| - P(H_i)\} = |V(H)| - P(H)$, y de esta forma deducimos que $P(D[H]) \leq n - |V(H)| + P(H)$. ■

Proposición 3.3.4. *Supongamos que* $|V(H_1)| \geq |V(H_2)| \geq \cdots \geq |V(H_n)|$ *y que* $\delta_D^- \geq 1$*, entonces* $P(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} |V(H_k)|$*. En particular, si* $H = H_i$ *para toda* $1 \leq i \leq n$*, entonces* $P(D[H]) \leq 1 + (n-1)|V(H)|$*.*

Demostración. Sea Q una distribución de cardinalidad $1+\sum_{k=1}^{n-1} |V(H_k)|$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $V(H_i) \cap Q \neq \varnothing$. Tomemos $w_i \in V(H_i) \cap Q$ para cada $1 \leq i \leq n$, y sea $Q' = \{w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq Q$. Observemos además que, por lo visto en la demostración de la Proposición 3.3.2, Q' es una distribución ganadora. Por lo tanto Q es ganadora y $P(D[H]) \leq 1 + (n-1)|V(H)|$. ■

Proposición 3.3.5. *Sean* $H_1, \ldots, H_n$ *no vacías con* $|V(H_1)| \geq \cdots \geq |V(H_n)|$ *y* $|V(H_{n-1})| \geq 2$*. Si* $\delta_D^- \geq 1$*, entonces*

$$P(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{P(H_i)\} + \sum_{k=1}^{n-2} |V(H_k)|.$$

Si $H = H_i$ *para toda* $1 \leq i \leq n$*, entonces* $P(D[H]) \leq P(H) + (n-2)|V(H)|$*.*

Demostración. Tomemos a $Q \subseteq V(D)$ cualquier distribución donde se cumpla que $|Q| = \max_{1 \leq i \leq n}\{P(H_i)\} + \sum_{k=1}^{n-2} |V(H_k)|$, por lo cual tenemos dos casos:

(*i*) Si para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene $V(H_i) \cap Q \neq \varnothing$, entonces para cada $1 \leq i \leq n$ sea $w_i \in V(H_i) \cap Q$ y definimos $Q' = \{w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq Q$, tenemos que Q' es ganadora por la Proposición 3.3.2, por tanto Q es ganadora.

(*ii*) Supongamos sin pérdida de generalidad que $V(H_n) \cap Q = \varnothing$, entonces para toda $1 \leq j \leq n-1$ se cumple $|V(H_j) \cap Q| \geq P(H_j) \geq 2$, por lo tanto $V(H_j) \cap Q$ es ganadora en H_j, y entonces $V(H_j) \subseteq \text{Reach}(Q)$ para toda $1 \leq j \leq n-1$. Además como $\delta_D^- \geq 1$, hay $u_r \in N^-(u_n)$, y tomemos $v, w \in Q \cap V(H_r)$ con $(u, w) \in A(H_r)$, entonces $m_y = (u, w, y)$ es un movimiento válido para toda $y \in V(H_n)$, así $V(H_n) \subseteq \text{Reach}(Q)$. Por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{n} V(H_i) = \text{Reach}(Q)$, obteniendo que Q es ganadora.

En ambos casos $P(D[H_1, \ldots, H_n]) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{P(H_i)\} + \sum_{k=1}^{n-2} |V(H_k)|$.

En particular, si para toda $1 \leq i \leq n$ tenemos que $H_i = H$, entonces se deduce que $\max_{1 \leq i \leq n}\{P(H_i)\} = P(H)$, y por lo tanto

$$P(D[H]) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{P(H_i)\} + \sum_{k=1}^{n-2} |V(H_k)| = P(H) + (n-2)|V(H)|.$$

■

3.4. Digráficas transitivas

Ahora es turno de las digráficas transitivas, en éstas veremos que es posible calcular de manera precisa el número de damas y el número de damas óptimo. Recordemos que, como vimos en el Capítulo 1, las componentes fuertes de una digráfica transitiva son digráficas completas, entonces en particular para D una digráfica transitiva fuerte no trivial se tiene que $p(D) = P(D) = 2$.

En esta sección, el conjunto de componentes fuertes iniciales de D será denotado por $\mathcal{K}_0(D)$, es decir, $\mathcal{K}_0(D) = \{H \in V(D^\star) \mid d^-_{D^\star}(H) = 0\}$.

Teorema 3.4.1. *Sea D transitiva, y denotemos por A al conjunto de vértices de ingrado cero de D, es decir, $A = \{u \in V(D) \mid d^-_D(u) = 0\}$, entonces tenemos que $p(D) = |\mathcal{K}_0(D)| + |\mathcal{K}_0(D - A)|$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K}_0(D) = \{H_1, H_2, ..., H_p\}$ donde $H_i \neq H_j$ si $i \neq j$, y $\mathcal{K}_0(D-A) = \{K_1, K_2, ..., K_q\}$ con $K_r \neq K_s$ si $r \neq s$. Consideremos una distribución $Q = \{h_1, ..., h_p, k_1, ..., k_q\}$ tal que para cada $1 \leq i \leq p$ y para cada $1 \leq j \leq q$ se cumpla que $h_i \in V(H_i)$, $k_j \in V(K_j)$, y $h_i \neq k_j$. Dicha elección está garantizada puesto que si $H_i = K_j$ para algunas $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, entonces $|K_j| = |H_i| \geq 2$ y por tanto hay $k_J \in K_j$ tal que $k_j \neq h_i$. Entonces $|Q| = p+q = |\mathcal{K}_0(D)|+|\mathcal{K}_0(D-A)|$.

Claramente $A \subseteq Q$, pues cada vértice en A es el representante (único) de la componente fuerte correspondiente. Observemos que si $H \in \mathcal{K}_0(D)$ con $|H| \geq 2$, entonces $H \in \mathcal{K}_0(D - A)$ y por tanto $|V(H) \cap Q| = 2$.

Sean $u \in V(D) \setminus Q$ y H la componente fuerte que lo contiene, entonces tenemos varios casos:

(a) Si $H \in \mathcal{K}_0(D)$; entonces $|H| \geq 2$, por tanto sean $h_i, k_j \in V(H) \cap Q$, dado que H es completa, entonces el movimiento $m = (h_i, k_j, u)$ es válido, así $u \in \text{Reach}(Q)$.

(b) Si $H \notin \mathcal{K}_0(D)$ y $H \in \mathcal{K}_0(D - A)$; dado que $H \in \mathcal{K}_0(D - A)$, entonces hay $k_j \in V(H) \cap Q$ y $(k_j, u) \in A(D)$ pues H es completa, además como $H \notin \mathcal{K}_0(D)$ entonces hay $H_i \in \mathcal{K}_0(D)$ para alguna $1 \leq i \leq p$ tal que todo vétice de H_i domina a todo vértice de H, en particular, $(h_i, k_j) \in A(D)$, lo que implica que $m = (h_i, k_j, u)$ es válido y por lo tanto $u \in \text{Reach}(Q)$.

(c) Si $H \notin \mathcal{K}_0(D)$ y $H \notin \mathcal{K}_0(D - A)$; entonces H es componente fuerte no inicial de $D \setminus A$, entonces hay $K_j \in \mathcal{K}_0(D-A)$ que domina a H, en particular $(k_j, u) \in A(D)$. Si $K_j \in \mathcal{K}_0(D)$, entonces hay $h_i \in K_j$; si $K_j \notin \mathcal{K}_0(D)$, entonces hay $H_i \in \mathcal{K}_0(D)$ que domina a K_j. En cada caso $(h_i, k_j) \in A(D)$, entonces $m = (h_i, k_j, u)$ es válido y obtenemos que $u \in \text{Reach}(Q)$.

Teniendo así que Q es distribución ganadora y que $p(D) \leq |\mathcal{K}_0(D)|+|\mathcal{K}_0(D-A)|$. Para ver que $p(D) \geq |\mathcal{K}_0(D)| + |\mathcal{K}_0(D - A)|$ tomemos Q' una distribución con

$|\mathcal{K}_0(D)| + |\mathcal{K}_0(D - A)| - 1$ vértices y supongamos que es ganadora. Claramente $A \subseteq Q'$, pues cualquier vértice de ingrado 0 no está en alcance de las distribuciones que no lo contienen. Sea $H_i \in \mathcal{K}_0(D)$, con $|H_i| \geq 2$, entonces $H_i \in \mathcal{K}_0(D - A)$, por tanto $|V(H_i) \cap Q'| \geq 2$, de lo contrario (dado que no hay flechas que entren en H_i desde otra componente) no pueden ser definidos movimientos válidos cuyo vértice final esté en H_i, por tanto $V(H_i)$ no está contenido en $\mathrm{Reach}(Q')$, contradiciendo que Q' sea ganadora.

De lo anterior se deduce que hay $K_j \in \mathcal{K}_0(D-A)\backslash\mathcal{K}_0(D)$ tal que $V(K_j)\cap Q' = \varnothing$. Como $K_j \in \mathcal{K}_0(D - A)$, entonces cualquier flecha que entre en K_j viene de un vértice en A, pero A es un conjunto independiente, implicando esto que no hay movimientos válidos cuyo vértice final esté en K_j, entonces $V(K_j)$ no está contenido en $\mathrm{Reach}(Q')$, contradiciendo la elección de Q'. Por lo tanto Q' no es distribución ganadora, entonces $p(D) \geq |\mathcal{K}_0(D)| + |\mathcal{K}_0(D - A)|$, y por lo visto anteriormente $p(D) = |\mathcal{K}_0(D)| + |\mathcal{K}_0(D - A)|$. ■

Lema 3.4.2. *Sea D una digráfica, y sea $\mathcal{K}_0(D)$ el conjunto de las componentes fuertes iniciales de D, entonces*

$$P(D) \geq |V(D)| - \min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)| - P(H)\}$$

Demostración. Tomemos a H' una componente fuerte inicial de D tal que cumpla $|V(H')| - P(H') = \min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)| - P(H)\}$ y sea $Q' \subseteq V(H')$ una distribución no ganadora (en H') tal que $|Q'| = P(H')-1$. Consideremos $Q = Q'\cup(V(D)\backslash V(H'))$. Es claro que para cada $u \in V(H')$ se tiene que $Q_u = Q'$ puesto que $\delta^-_{D^\star}(H') = 0$.

Como Q' no es distribución ganadora, entonces existe un vértice $v \in V(H')$ tal que $v \notin \mathrm{Reach}(Q')$, por lo tanto $v \notin \mathrm{Reach}(Q)$. Así Q no es distribución ganadora y $P(D) \geq |V(D)| - \min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)| - P(H)\}$. ■

Teorema 3.4.3. *Sea D una digráfica transitiva de orden $n \geq 2$, entonces*

(i) *Si $\delta^-_D = 0$, entonces $P(D) = n$.*

(ii) *$P(D) = |V(D)| - \min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)| - P(H)\}$. Además, si $\delta^-_D \neq 0$ y tomamos $H_0 \in \mathcal{K}_0(D)$ de cardinalidad mínima, entonces $P(D) = n + 2 - |V(H_0)|$.*

(iii) *Si D unilateral, entonces $p(D) = 2$.*

(iv) *Si D fuerte, entonces $P(D) = 2$.*

Demostración. (i) Se sigue del Teorema 3.1.7.

(ii) Observemos primero que si hay alguna componente fuerte inicial trivial se tiene que $\min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-P(H)\}=0$, además $\delta_D^-=0$ y así $P(D)=n$ cumpliéndose el resultado. Por tanto, podemos suponer que no hay componentes fuertes iniciales triviales en D. Consideremos a $Q\subseteq V(D)$ una distribución tal que $|Q|=n-\min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-P(H)\}$. Sea $H'\in\mathcal{K}_0(D)$ y sean $K_1,\ldots,K_r$ las distintas componentes fuertes tales que $K_i\neq H'$ para cada $1\leq i\leq r$, entonces

$$\begin{aligned}
|V(H')\cap Q| &\geq |Q|-\sum_{i=1}^{r}|V(K_i)|\\
&= n-\min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-P(H)\}-n+|V(H')|\\
&= |V(H')|-\min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-P(H)\}\\
&\geq |V(H')|-|V(H')|+P(H')\\
&= P(H')\geq 2,
\end{aligned}$$

lo que implica que $V(H')\cap Q$ es ganadora en H', por tanto $V(H')\subset \mathrm{Reach}(Q)$ para toda $H'\in\mathcal{K}_0(D)$. Si $K\notin\mathcal{K}_0(D)$ es una componente fuerte tenemos dos casos. Si $V(K)\subseteq Q$, entonces $V(K)\subseteq\mathrm{Reach}(Q)$. Supongamos que hay $w\in V(K)\setminus Q$ y sea H_K una componente fuerte inicial que domina a K, entonces hay $u,v\in V(H_K)$ con $(u,v)\in A(H_K)$, por tanto el movimiento $m=(u,v,w)$ es válido. Así $w\in\mathrm{Reach}(Q)$, entonces $V(K)\subseteq\mathrm{Reach}(Q)$ para toda $K\notin\mathcal{K}_0(D)$. De esta forma obtenemos que Q es ganadora, es decir, $P(D)\leq|V(D)|-\min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-P(H)\}$. Así, por lo visto en el Lema 3.4.2, tenemos que $P(D)=|V(D)|-\min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-P(H)\}$.

Además si $\delta_D^-\neq 0$, entonces toda componente fuerte inicial H no es trivial, es decir, $P(H)=2$ y dado que H_0 es la componente fuerte inicial de cardinal mínimo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-P(H)\} &= \min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|-2\}\\
&= \min_{H\in\mathcal{K}_0(D)}\{|V(H)|\}-2\\
&= |V(H_0)|-2,
\end{aligned}$$

lo que nos da el resultado.

(iii) Si D es unilateral, entonces existe un camino generador $(u_1,u_2,\ldots,u_k)$, entonces por ser D transitiva $(u_2,u_j)\in A(D)$ para cada $u_j\neq u_2$, $3\leq j\leq k$. Consideremos $Q=\{u_1,u_2\}$, entonces $m_j=(u_1,u_2,u_j)$ es movimiento válido y por lo tanto $u_j \in \text{Reach}(Q)$ para cada $u_j \neq u_2$, $3 \leq j \leq k$. Por lo tanto $V(D) = \text{Reach}(Q)$ y $p(D) \leq 2$, y como D no es trivial entonces $p(D) \geq 2$. Obteniendo que $p(D) = 2$.

(iv) Si D es fuerte y transitiva, entonces es completa y utilizando el Corolario 3.1.6 $P(D) = 2$. ■

Capítulo 4

Trayectorias y ciclos

En esta sección observaremos con detalle el comportamiento de los números de damas correspondientes a las trayectorias dirigidas y a los ciclos dirigidos de orden n, que denotaremos por P_n y C_n respectivamente. En ambos casos utilizaremos que $V(P_n) = V(C_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ donde $A(P_n) = \{(x_i, x_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ y $A(C_n) = A(P_n) \cup \{(x_n, x_1)\}$.

4.1. Resultados

Proposición 4.1.1. *Sea D una digráfica con vértices $x_0, x_k \in V(D)$ tales que $d(x_0, x_k) = k$ y tomemos H una x_0x_k-trayectoria (de longitud mínima) tal que $H = (x_0, x_1, \ldots, x_k)$. Si $Q \subseteq V(H) \setminus \{x_{k-1}, x_k\}$ es una distribución, entonces Q no es distribución ganadora.*

Demostración. Observemos que $wt_{x_k}(Q) \leq \sigma^2 + \sigma^3 + \cdots + \sigma^k < 1$, y entonces se obtiene que $x_k \notin \text{Reach}(Q)$ y $P(D) \geq k$. ■

Proposición 4.1.2. *Para todas D, H digráficas, si se tiene que $H \subseteq D$ generadora, entonces se cumple que $P(D) \leq P(H)$ y $p(D) \leq p(H)$.*

Demostración. Claramente si Q es una distribución ganadora en H, entonces $\text{Reach}(Q) = V(H) = V(D)$ lo que implica que también es ganadora en D, por lo tanto $P(D) \leq P(H)$ y $p(D) \leq p(H)$. ■

Teorema 4.1.3. *Para toda $n \geq 3$ se cumple que $P(C_n) = n-1$ y $p(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$.*

Demostración. Primero veremos $P(C_n) = n - 1$. Sea Q cualquier distribución de tamaño $n - 1$, entonces hay un único $v \in V(C_n) \setminus Q$ y sean u, v los dos vértices anteriores inmediatos sobre C_n, es decir, $(u, v), (v, w) \in A(C_n)$, pero $u, v \in Q$. Entonces, definiendo el movimiento $m = (u, v, w)$ tenemos que $w \in \text{Reach}(Q)$, así $P(D) \leq n - 1$ y dado que el diámetro de C_n es $n - 1$, entonces $P(C_n) \geq n - 1$. Por lo tanto $P(C_n) = n - 1$.

Para ver $p(C_n) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ hay dos casos:

(a) Si n es par, tomemos la distribución $Q = \{x_1\} \cup \{x_i \mid i \text{ es par}\}$. Entonces para cada $x_{2k+1} \in V(C_n)$, con $2 < 2k + 1 \leq n$, definamos la sucesión de movimientos $M_k = (m_1, ..., m_k)$ donde $m_j = (x_{2j-1}, x_{2j}, x_{2j+1})$ con $2 \leq j \leq k$. Resulta claro que M_k es una sucesión de movimientos válida y $x_{2k} \in M_k(Q)$, entonces $V(C_n) = \text{Reach}(Q)$.

(b) Si n es impar, consideremos la distribución $Q = \{x_i \mid i \text{ es impar}\}$, entonces $x_1, x_n \in Q$ y $(x_n, x_1) \in A(C_n)$. Así para cada $x_{2k} \in V(C_n)$, con $2 \leq 2k \leq n$, definimos a la sucesión de movimientos $M_k = (m_1, ..., m_k)$ donde para cada $1 \leq j \leq k$ tenemos que $m_j = (x_{2j-2}, x_{2j-1}, x_{2j})$. Resulta claro que $x_{2k} \in M_k(Q)$, entonces $V(C_n) = \text{Reach}(Q)$.

Resulta claro que en ambos casos tenemos que $|Q| = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ y por lo tanto $p(D) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Ahora, sea Q una distribución de tamaño $\lfloor n/2 \rfloor$, entonces tenemos dos casos:

(a) No hay vértices adyacentes en Q (esto puede darse efectivamente cuando n es par y $Q = \{x_i \mid i \text{ es impar}\}$), entonces es claro que $\text{Reach}(Q) \neq V(C_n)$.

(b) Hay dos vértices adyacentes en Q, entonces también hay dos vértices adyacentes en $V(C_n) \setminus Q$, supongamos sin pérdida de generalidad que x_{n-1}, x_n son dichos vértices, dado que $d(x_n, x_{n-1}) = n - 1$ y $Q \subseteq V(H) \setminus \{x_{n-1}, x_n\}$, entonces por la Proposición 4.1.1 tenemos que $\text{Reach}(Q) \neq V(C_n)$

En cualquier caso $p(C_n) \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$, y por lo tanto $p(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. ■

Teorema 4.1.4. *Para cualquier $n \geq 1$ se cumple $P(P_n) = n$ y $p(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$.*

Demostración. De forma trivial tenemos que $P(P_n) \leq n$. Si consideramos la distribución $Q = V(P_n) \setminus \{x_1\}$, es claro que $x_1 \notin \text{Reach}(Q)$, y entonces $P(P_n) \geq n$. Por lo tanto $P(P_n) = n$.

Por la Proposición 4.1.2 tenemos que $p(P_n) \geq p(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Si tomamos la distribución $Q = \{x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n\}$ si n es par, o bien, $Q = \{x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{n-1}\}$ si

n es impar. En cualquiera de los casos resulta claro que la sucesión de movimientos $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$, donde $m_i = (x_{2k-1}, x_{2k}, x_{2k+1})$ y $3 \leq 2k+1 \leq n$, es válida en P_n. Entonces $\mathrm{Reach}(Q) = V(P_n)$, obteniendo así que $p(P_n) \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Por lo tanto $p(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. ■

Teorema 4.1.5. *Sea D una digráfica asimétrica conexa, entonces $D \cong P_2$ ó $D \cong C_3$ si y sólo si $P(D) = 2$.*

Demostración. La primera implicación es directa a partir de los dos teoremas anteriores. Para la recíproca, si D es de orden 2, es claro que $D \cong P_2$.

Supongamos ahora que $|V(D)| \geq 3$ y sean $x_1, x_2, x_3 \in V(D)$ vértices distintos, entonces $Q = \{x_1, x_2\}$ es una posible distribución que por hipótesis es ganadora. Dado que $x_3 \in \mathrm{Reach}(Q)$, entonces existe una flecha en D que hace adyacentes a x_1 y x_2, sin pérdida de generalidad podemos suponer $(x_1, x_2) \in A(D)$, de donde se sigue que $N^+(x_2) = V(D) \setminus \{x_1, x_2\}$. De haber otro vértice x_4 en D al tomar la distribución $Q' = \{x_3, x_4\}$, como D es asimétrica, entonces $x_2 \notin N^+(x_3) \cup N^+(x_4)$, y por tanto $x_2 \notin \mathrm{Reach}(Q')$, contradiciendo que $P(D) = 2$. De esta forma deducimos que $|V(D)| = 3$ y $(x_1, x_2), (x_2, x_3) \in A(D)$.

Finalmente consideremos la distribución $Q'' = \{x_2, x_3\}$, dado que $x_1 \in \mathrm{Reach}(Q)$, entonces $(x_3, x_1) \in A(D)$. Por lo tanto $D \cong C_3$. ■

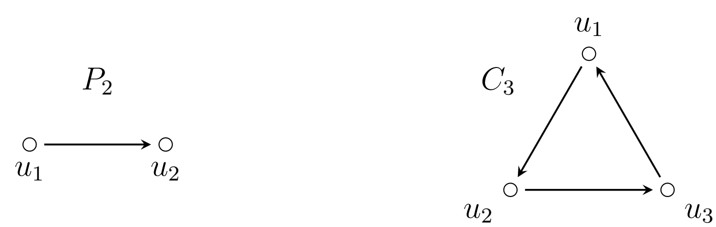

Figura 4.1: Las únicas digráficas asimétricas con número de damas 2.

Capítulo 5

Torneos

Los torneos son una familia importante de digráficas que cumple propiedades interesantes respecto a sus números de damas. De hecho el número de damas óptimo de todo torneo es menor o igual a 3, pero esto contrasta, como veremos más adelante, con el hecho de que existen torneos cuyos números de damas pueden ser tan pequeños o tan grandes como queramos y, aún más importante, podremos construir recursivamente tales torneos, pero primero necesitamos obtener cierta herramienta importante.

5.1. El número de damas óptimo

Teorema 5.1.1. *Si T torneo transitvo de orden n, entonces $P(T) = n$ y $p(T) = 2$.*

Demostración. Dado que T es un torneo, entonces podemos considerar una trayectoria hamiltoniana $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y además T es transitivo, por tanto si hay una uv-trayectoria en T, entonces $(u, v) \in A(T)$. Entonces $(x_1, x_2), (x_2, x_j) \in A(D)$ para cada $j \in \{3, 4, ..., n\}$.

Definamos $Q = \{x_1, x_2\}$ una distribución, al considerar el movimiento de damas $m_j = (x_1, x_2, x_j)$ es claro que $x_j \in \text{Reach}(Q)$ para toda $j \geq 3$, y además sabemos que $Q \subseteq \text{Reach}(Q)$, entonces $\text{Reach}(Q) = V(T)$, siendo así Q una distribución ganadora y por lo tanto $p(T) = 2$.

Además se tiene que $(x_i, x_1) \notin A(T)$ para cada i, es decir, $d^-_T(x_1) = 0$. Por lo tanto, si consideramos $Q = V(T) \setminus \{x_1\}$, entonces el vértice $x_1 \notin \text{Reach}(Q)$, y así deducimos que $P(T) = n$. ∎

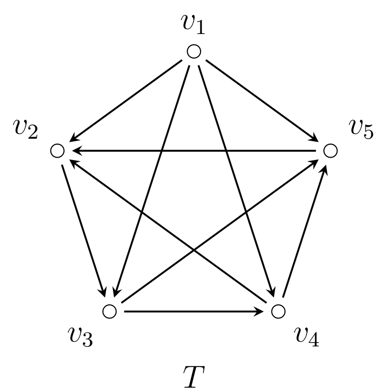

Figura 5.1: Un torneo T tal que $p(T) = 3$ y $P(T) = 5$

Observemos que trivialmente para cualquier torneo T, $p(T) = 1$ si y sólo si $|V(T)| = 1$. Además como consecuencia del Teorema 3.1.4 y dado que T es torneo, se obtiene que $p(T) = 2$ si y sólo si hay $u \in V(T)$ tal que $d^-(u) = 1$, lo que implica que en cualquier torneo con $2 \leq |V(T)| \leq 3$ se cumple que $p(T) = 2$. Nuestro siguiente objetivo es caracterizar a los torneos con respecto a su número de damas óptimo.

Proposición 5.1.2. *Dado T un torneo, si hay $u \in V(T)$ tal que $d^-(u) = 2$, entonces $p(T) \leq 3$.*

Demostración. Consideremos a la distribución $Q = \{u, v, w\} \subseteq V(T)$ tal que $N^-(u) = \{v, w\}$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $(v, w) \in A(T)$, entonces para cada $y \in V(T) \setminus Q = N^+(u)$ podemos definir el movimiento de damas $m_y = (v, u, y)$, lo que implica que $\text{Reach}(Q) = V(T)$ y por tanto $p(T) \leq 3$. ■

Proposición 5.1.3. *Dado T un torneo, si $\delta^- = 2$, entonces $p(T) = 3$.*

Demostración. Primero tomemos cualesquiera $u, v \in V(T)$, sin pérdida de generalidad $(u, v) \in A(T)$. Estos dos vértices no forman una distribución ganadora, pues $\delta^- = 2$ y entonces hay $w \neq u$ tal que $(w, v) \in A(T)$, por tanto no hay movimiento de damas válido cuyo vértice destino sea w, así tenemos que $p(T) \geq 3$.

Sea $w \in V(T)$ tal que $d^-(w) = 2$, entonces por la Proposición 5.1.2 deducimos que $p(T) \leq 3$. Por lo tanto concluimos que $p(T) = 3$. ■

Lema 5.1.4. *Para cualquier torneo T de orden n se tiene que $p(T) \leq 3$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el orden. Si $n \leq 3$ se tiene por lo visto anteriormente. Sea entonces $n \geq 4$ y supongamos el resultado válido para toda $k < n$. Además por lo visto anteriormente podemos suponer que hay $x \in V(T)$ con $d^-(x) \geq 3$, entonces por hipótesis inductiva hay una distribución ganadora Q en $T[N^-(x)]$ tal que $2 \leq |Q| \leq 3$, lo que nos entrega dos casos:

(a) Si $|Q| = 2$, consideremos $Q = \{u, v\}$ y tomemos $Q' = \{u, v, x\}$. Así para cada $y \in V(T) \setminus Q = N^+(x)$ definimos el movimiento de damas $m_y = (u, x, y)$, por lo tanto $\text{Reach}(Q) = V(T)$ y $p(T) \leq 3$.

(b) Si $|Q| = 3$, supongamos $Q = \{u, v, w\}$ y sin pérdida de generalidad supongamos $(u, v) \in A(T)$, entonces $m = (u, v, x)$ es válido, y así $x \in \text{Reach}(Q)$. Además para cada $y \in N^+(x)$ definimos el movimiento $m_y = (w, x, y)$, el cual es válido en $m(Q)$, entonces $N^+(x) \subseteq \text{Reach}(Q)$. Por lo tanto se concluye que $\text{Reach}(Q) = V(T)$ y $p(T) \leq 3$.

■

De lo observado previamente se deduce la siguiente caracterización.

Teorema 5.1.5. *Para cualquier torneo T de orden n se cumple:*

(i) *$p(T) = 1$ si y sólo si $n = 1$*

(ii) *$p(T) = 2$ si y sólo si $d^-(u) = 1$ para algún $u \in V(T)$*

(iii) *$p(T) = 3$ si y sólo si $n \geq 4$ y para cada $u \in V(T)$ se tiene $d^-(u) \neq 1$.*

Demostración. (i) Es consecuencia del Teorema 3.1.2.

(ii) A partir del Teorema 3.1.5 obtenemos que $p(T) = 2$ si y sólo si $d^+(u) = n - 2$ para algún $u \in V(T)$ si y sólo si (dado que T es un torneo) $d^-(u) = 1$ para algún $u \in V(T)$

(iii) Si $p(T) = 3$, por (i) obtenemos $n \neq 1$, y por (ii) sabemos que para cada $u \in V(T)$ se tiene $d^-(u) \neq 1$, lo que a su vez implica que $2 \neq n \neq 3$, por lo tanto $n \geq 4$.

Por otro lado, si $n \geq 4$ y para cada $u \in V(T)$ se tiene $d^-(u) \neq 1$, por (i) y (ii) tenemos que $p(T) \geq 3$, y por el lema anterior $p(T) \leq 3$. Por lo tanto $p(T) = 3$. ■

5.2. Las digráficas circulantes

Dado un entero $n \geq 2$ y un conjunto $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, se define a la *digráfica circulante* $C_n(S)$ como aquella en la cual:
$V(C_n(S)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
$A(C_n(S)) = \{(x_p, x_q) \mid q - p \overset{n}{\equiv} s,\ s \in S\}$

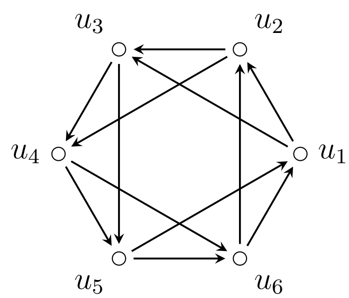

Figura 5.2: $C_6(\{1, 2\})$.

Proposición 5.2.1. *Sea $C_n(S)$ una digráfica circulante, entonces la distribución $Q = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ es ganadora si y sólo si $Q' = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}\}$ también es ganadora, donde $j_m \overset{n}{\equiv} i_m - p$, donde $p \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Esto resulta de considerar el automorfismo Φ_p de D definido por $\Phi_p(v_k) = v_{k'}$ donde $k' \overset{n}{\equiv} k - p$. ■

Proposición 5.2.2. *Sea $D = C_n(\{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\})$ con $x_i, x_j, x_k \in V(D)$ tales que $i < j < k$, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:*
(i) $x_i \in N^-(x_j) \cap N^+(x_k)$
(ii) $x_j \in N^-(x_k) \cap N^+(x_i)$
(iii) $x_k \in N^-(x_i) \cap N^+(x_j)$

Demostración. Tomemos a x_i, x_j, entonces hay dos casos:

(a) Si x_i, x_j no son vecinos, entonces son antipodales, es decir, $i + \frac{n}{2} = j$, por lo tanto tenemos que $k - j \overset{n}{\equiv} s_1$, $i - j \overset{n}{\equiv} s_2$ con $s_1, s_2 < \frac{n}{2}$. Deducimos entonces que $x_k \in N^-(x_i) \cap N^+(x_j)$.

(b) Si x_i, x_j son vértices vecinos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(x_i, x_j) \in A(D)$. Observemos que si $x_k \in N^-(x_i)$ o $x_k \in N^+(x_j)$ se cumple (i) o (ii) respectivamente, supongamos que $x_k \notin N^-(x_i) \cup N^+(x_j)$.

Como $x_k \notin N^-(x_i)$ implica que $k - j \overset{n}{\equiv} s_1$ con $s_1 \geq \frac{n}{2}$, y a su vez $x_k \notin N^+(x_j)$ implica que $i - j \overset{n}{\equiv} s_2$ con $s_2 \geq \frac{n}{2}$, por lo tanto $s_1 + s_2 + 1 > n$ lo que contradice que $|V(D)| = n$. ■

Lema 5.2.3. *Si $D = C_n(\{1, 2, \ldots, \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\})$ es una digráfica circulante con $n \geq 4$, entonces $p(D) = P(D) = 3$.*

Demostración. Primero veremos que $P(D) = 3$. Sea $V(D) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y sea Q una distribución con $|Q| = 3$. Por lo visto en las dos proposiciones anteriores podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Q = \{x_1, x_r, x_s\}$ y además $(x_1, x_r), (x_r, x_s) \in A(D)$.

Es claro que los movimientos $m_y = (x_1, x_r, y)$, $m_z = (x_r, x_s, z)$ donde $y \in N^+(x_r)$, $z \in N^+(x_s)$ son válidos, entonces

$$\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{s+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\} = N^+(x_r) \cup N^+(x_s) \subseteq \text{Reach}(Q).$$

Para $N^+(x_1) \subseteq \text{Reach}(D)$ hay dos casos:

(a) Si $(x_s, x_1) \in A(D)$, definiendo para cada $y \in N^+(x_1)$ al movimiento $m_y(x_s, x_1, y)$ se obtiene el resultado.

(b) Si $(x_s, x_1) \notin A(D)$, entonces tenemos que $n - \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor \geq s \geq 3$, por tanto $n \geq s + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor \geq 3 + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, y así $1 - (s + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor) \overset{n}{\equiv} p \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$.

Entonces $m = (x_r, x_s, x_{s+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor})$, $m_y = (x_{s+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, x_1, y)$ con $y \in N^+(x_1)$ constituyen a la sucesión válida de movimientos $\{m, m_y\}$, y de esta manera se deduce que $y \in m_y(m(Q)) \subseteq \text{Reach}(Q)$. Concluimos que $N^+(x_1) \subseteq \text{Reach}(Q)$.

Observemos que $r + 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor \geq r + n - 2 \geq 2 + n - 2 \geq n$, lo que implica que $(r + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor) + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor \geq n$ y por lo tanto tenemos $(x_{r+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, x_t) \in A(D)$ para todo $t \in \{s + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, \ldots, n\}$, teniendo así dos casos:

(i) Si $s = r + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, definimos el movimiento $m_t = (x_r, x_{r+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, x_t)$ para todo $t \in \{s + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, \ldots, n\}$, entonces $\{x_{s+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, \ldots, x_n\} \subseteq \text{Reach}(Q)$.

(ii) Si $s < r + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, definimos $m = (x_1, x_r, x_{r+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor})$, $m_t = (x_s, x_{r+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, x_t)$ para todo $t \in \{s + \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, \ldots, n\}$, entonces se tiene que $x_t \in m_t(m(Q))$, y por tanto $\{x_{s+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}, \ldots, x_n\} \subseteq \text{Reach}(Q)$.

Se concluye $V(D) = \text{Reach}(Q)$ donde Q es arbitraria tal que $|Q| = 3$, entonces $P(D) \leq 3$. Para ver que $P(D) \geq 3$ sin pérdida de generalidad podemos considerar $Q = \{x_1, x_i\}$ con $i \leq 2 + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, donde hay dos casos:

(a) Si $i = 2$, entonces $x_n \notin \text{Reach}(Q)$.

(b) Si $i \geq 3$, entonces $x_2 \notin \text{Reach}(Q)$.

De esta forma obtenemos que $P(D) = 3$, y sabemos que $p(D) \leq P(D)$. Además, dado que D es una digráfica asimétrica y para cualquier $u \in V(D)$ se tiene que $|N^+(u) \cup \{u\}| = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 < n$, es decir, $N^+(u) \cup \{u\} \neq V(D)$, entonces $p(D) > 2$. Concluimos así que $p(D) = 3$. ■

Claramente, a partir del Lema 5.2.3 y de la Proposición 4.1.2 se sigue que para toda digráfica D de orden $n \geq 4$ tal que $C_n(\{1, 2, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}) \subseteq D$ se cumple que $p(D) \leq P(D) \leq 3$.

Corolario 5.2.4. *Sea D una digráfica asimétrica de orden $n \geq 4$ tal que contiene como subdigráfica a $C_n(\{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\})$, entonces $P(D) = 3$. Además si $n \geq 5$, entonces $p(D) = 3$.*

Demostración. Para la primera afirmación, del Lema 5.2.3 y la Proposición 4.1.2 se sigue que $P(D) \leq 3$, además $D \ncong P_2$ y $D \ncong C_3$ entonces $P(D) > 2$, por lo tanto $P(D) = 3$. Si además $n \geq 5$, observemos que para cada vértice $u \in V(D)$ tenemos que $|N^-(u)| \geq 2$, entonces $|N^+(u)| < n - 2$ y por el Teorema 3.1.4 se tiene que $p(D) < 2$, por lo tanto $p(D) = 3$. ■

Teorema 5.2.5. *Para cualquier torneo T de orden $n \geq 4$ tal que $D \subseteq T$ con $D = C_n(\{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\})$ se cumple que $P(T) = 3$.*

Demostración. Del Lema 5.2.3 se sigue que $P(T) \leq P(D) = 3$, además $T \ncong P_2$ y $T \ncong C_3$, entonces $2 < P(T)$, y por lo tanto $P(T) = 3$. ■

Este último teorema nos define toda una familia de torneos cuyo número de damas es 3 sin importar cuan grande sea su orden, y es esta familia a partir de la cual construiremos torneos que tendrán el orden y número de damas que nosotros deseemos. Para este fin denotaremos $\mathcal{T}_P(n, k)$ a la familia de todos los torneos de orden n y con número de damas k.

Observemos que la familia $\mathcal{T}_P(1, 1)$ sólo contiene al torneo trivial, $\mathcal{T}_P(2, 2) = \{P_2\}$, $\mathcal{T}_P(3, 2) = \{C_3\}$, y como consecuencia del teorema anterior tenemos que, si $n \geq 4$, entonces $\{T \mid C_n(\{1, 2, ..., \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}) \subseteq T\} \subseteq \mathcal{T}_P(n, 3)$. Igualmente por los resultados anteriores se tiene $\mathcal{T}_P(n, k) = \varnothing$ para cualesquiera n, k tales que $n \geq 4,\ 1 \leq k \leq 2$.

Teorema 5.2.6. *Sean T_1, T_2 dos torneos con $T_1 \in \mathcal{T}_P(n,k)$ y $|V(T_2)| = m$. Si T es un torneo tal que $V(T) = V(T_1) \cup V(T_2)$ y*

$$A(T) = A(T_1) \cup A(T_2) \cup \{(u,v) \mid u \in A(T_1), v \in A(T_2)\},$$

entonces $T \in \mathcal{T}_P(n+m, k+m)$.

Demostración. Tomemos una distribución Q de tamaño $k+m$, claramente se tiene que $|Q \cap V(T_1)| \geq k$, entonces $V(T_1) \subseteq \text{Reach}(Q \cap V(T_1)) \subseteq \text{Reach}(Q)$. Para ver que $V(T_2) \subseteq \text{Reach}(Q)$ hay dos casos:

(a) Si $n = 1$, entonces $Q = V(T)$ y en particular $V(T_2) \subseteq \text{Reach}(Q)$.

(b) Si $n > 1$, entonces $k \geq 2$, lo que implica que hay $u, v \in Q \cap V(T_1)$ tales que $(u,v) \in A(T_1) \subseteq A(T)$. Definiendo el movimiento $m = (u,v,w)$ para todo $w \in V(T_2)$ obtenemos que $V(T_2) \subseteq \text{Reach}(Q)$.

En ambos casos $V(T) = \text{Reach}(Q)$, y entonces $P(T) \leq k+m$. Ahora tomemos una distribución Q de tamaño $k+m-1$ tal que $V(T_2) \subseteq Q$, es decir, $|Q \cap V(T_1)| = k-1$. Además $P(T_1) = k$, de lo cual deducimos que existe $u \in V(T_1) \setminus \text{Reach}(Q \cap V(T_1))$, y dado que $Q_u \subseteq V(T_1)$ (pues no hay flechas con cola en T_2 y cabeza en T_1), entonces por el Teorema 2.2.6 tenemos que $u \notin \text{Reach}(Q)$, y así $P(T) > k+m-1$. Por lo tanto $P(T) = k+m$. ■

Este resultado implica que, como ya conocemos algún elemento en las familias $\mathcal{T}_P(1,1)$, $\mathcal{T}_P(3,2)$, $\mathcal{T}_P(n,3)$ con $n \geq 4$, que son las familias con menor número de damas para cada orden, somos capaces de encontrar al menos un torneo en cualquier otra familia deseada. En particular con $\mathcal{T}_P(1,1)$ podemos construir elementos en $\mathcal{T}_P(n,n)$ para toda n, y con $\mathcal{T}_P(3,2)$ hacemos lo mismo en $\mathcal{T}_P(n,n-1)$ con $n \geq 3$. De manera similar si tomamos un torneo en $\mathcal{T}_P(n,3)$ con $n \geq 4$ y le unimos un nuevo vértice que sea dominado por todos los demás obtenemos un torneo en $\mathcal{T}_P(n+1,4)$ donde $n+1 \geq 4$. De hecho, si queremos encontrar un torneo en $\mathcal{T}_P(n,k)$ sólo debemos observar cual es el valor de $n-k$:

- Si $n-k = 0$, entonces tomamos T_1 como el torneo de orden 1.
- Si $n-k = 1$, entonces consideramos a $T_1 = C_3$ el único torneo en $\mathcal{T}_P(3,2)$.
- Si $n-k \geq 2$, basta tomar algún torneo $T_1 \in \mathcal{T}_P(n-k+3, 3)$, cuya existencia está garantizada por el Lema 5.2.3 y el Teorema 5.2.5.

Hecho esto, en cualquier caso basta elegir T_2 un torneo de orden $n-k$ y aplicar la construcción utilizada en el Teorema 5.2.6.

5.3. Torneos infinitos

Hemos visto que existen torneos de orden finito arbitrariamente grande cuyo número de damas es exactamente 3, entonces ahora nos podemos plantear la pregunta ¿existen torneos infinitos con dicha propiedad?

Consideremos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ y un torneo infinito $T_{\mathbb{N}}$ tal que $V(T_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}$ y donde $A(T_{\mathbb{N}}) = \{(i, j) \mid i < j,\ j - i \overset{2}{\equiv} 1\} \cup \{(i, j) \mid j < i,\ i - j \overset{2}{\equiv} 0\}$. Dada la definición anterior, observemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$N^+(i) = \{j \in \mathbb{N} \mid j < i, j \overset{2}{\equiv} i\} \cup \{j \in \mathbb{N} \mid j > i,\ j \overset{2}{\equiv} i + 1\}$$

$$N^-(i) = \{j \in \mathbb{N} \mid j < i, j \overset{2}{\equiv} i + 1\} \cup \{j \in \mathbb{N} \mid j > i,\ j \overset{2}{\equiv} i\}.$$

Es decir que, si i es par, entonces domina a los impares mayores y a los pares menores, a la vez que es dominado por los impares menores y los pares mayores. Análogamente, si i es impar, entonces domina a los pares mayores y a los impares menores, y es dominado por los pares menores y los impares mayores.

Teorema 5.3.1. $P(T_{\mathbb{N}}) = p(T_{\mathbb{N}}) = 3$.

Demostración. Claramente para toda $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $i + 2r \notin N^+(i)$ para cada $r \in \mathbb{N}$, entonces $N^+(i) \cup \{i\} \neq \mathbb{N}$. Por tanto $P(T_{\mathbb{N}}) \geq p(T_{\mathbb{N}}) \geq 3$. Ahora consideremos $Q = \{i, j, k\} \subset \mathbb{N}$ y sin pérdida de generalidad supongamos que $(i, j), (j, k) \in A(T_{\mathbb{N}})$ y sea $r \in \mathbb{N} \setminus Q$, entonces hay dos posibilidades:

(a) Si $(k, i) \in A(T_{\mathbb{N}})$, entonces forman un ciclo y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $i < j$ e $i < k$, es decir, $i = \min\{i, j, k\}$, entonces $i \overset{2}{\equiv} k \overset{2}{\equiv} j + 1$ e $i < j < k$. Cuando $r \overset{2}{\equiv} i \overset{2}{\equiv} k$ hay dos casos. Si $r < k$, entonces (j, k, r) es movimiento válido, y si $r > k$ entonces (i, j, r) es movimiento válido. Por otro lado, cuando $r \overset{2}{\equiv} j$ también hay dos casos. Si $r < j$, el movimiento (i, j, r) es válido, y si $r > j$, entonces (k, i, r) es válido.

(b) Si $(i, k) \in A(T_{\mathbb{N}})$, tenemos tres casos:

   (1) Sea $i = \min\{i, j, k\}$, entonces $i \overset{2}{\equiv} j + 1 \overset{2}{\equiv} k + 1$ e $i < k < j$. Si $r \overset{2}{\equiv} i$ hay dos casos. Cuando $r > k$ el movimiento (i, k, r) es válido, y si $r < k$, entonces $m_1 = (i, j, j + 1)$, $m_2 = (k, j + 1, r)$ forman una sucesión válida. así $(j + 1, i), (k, j + 1) \in A(T_{\mathbb{N}})$. Ahora, si $r \overset{2}{\equiv} k \overset{2}{\equiv} j$ también hay dos casos. Cuando $r < j$ el movimiento (i, j, r) es válido, y si $r > j$, entonces $m_1 = (i, j, j + 1)$, $m_2 = (k, j + 1, r)$ conforman una sucesión válida.

(2) Sea $j = \text{mín}\{i, j, k\}$, entonces $i \overset{2}{\equiv} j \overset{2}{\equiv} k+1$ y $j < i < k$. Cuando $r \overset{2}{\equiv} i \overset{2}{\equiv} j$ tenemos dos posibilidades. Si $r > i$ los movimiento $m_1 = (j, k, i+1)$, $m_2 = (i, i+1, r)$ forman una sucesión válida, mientras que si $r < i$, entonces $m_1 = (j, k, k+1)$, $m_2 = (k+1, i, r)$ es sucesión válida. Por otro lado, cuando $r \overset{2}{\equiv} k$, si $r < k$, entonces (j, k, r) es válido, y si $r > k$ el movimiento (i, j, r) es válido.

(3) Sea $k = \text{mín}\{i, j, k\}$, entonces $i \overset{2}{\equiv} j \overset{2}{\equiv} k$ y $k < j < i$. Supongamos que $r \overset{2}{\equiv} i \overset{2}{\equiv} j \overset{2}{\equiv} k$, si $r < j$ el movimiento (i, j, r) es válido, y si $r > j$ entonces $m_1 = (i, j, j+1)$, $m_2 = (k, j+1, r)$ es una sucesión válida. De otra forma, $r \overset{2}{\equiv} i+1$, si $r > k$ entonces (i, k, r) es válido, y si $r < k$ los movimientos $m_1 = (i, j, j+1)$, $m_2 = (k, j+1, r)$ forman una sucesión válida.

En cualquier caso $r \in \text{Reach}(Q)$, lo que implica que Q es distribución ganadora, entonces $3 \geq P(T_{\mathbb{N}}) \geq p(T_{\mathbb{N}}) \geq 3$, y por lo tanto $P(T_{\mathbb{N}}) = p(T_{\mathbb{N}}) = 3$. ■

Resulta claro que la prueba anterior funciona también para el torneo $T_{\mathbb{Z}}$, donde $V(T_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$ y $A(T_{\mathbb{Z}}) = \{(i, j) \mid i < j,\ j - i \overset{2}{\equiv} 1\} \cup \{(i, j) \mid j < i,\ i - j \overset{2}{\equiv} 0\}$, y por tanto $P(T_{\mathbb{Z}}) = p(T_{\mathbb{Z}}) = 3$.

Capítulo 6

Producto cuadro

En esta sección nos dedicaremos a explorar el comportamiento del número de damas y al número de damas óptimo en el producto cuadro de dos digráficas, de manera particular observaremos dicho comportamiento en el producto cuadro entre dos trayectorias P_r y P_s con $r, s \geq 1$.

Sean D, H digráficas, entonces el *producto cuadro* de D con H es la digráfica $D\square H$ tal que

$$V(D\square H) = V(D) \times V(H) = \{(d,h) \mid d \in V(D), h \in V(H)\} \text{ y}$$

$$A(D\square H) = \{((d,h),(d,h'))|(h,h') \in A(H)\} \cup \{((d,h),(d',h))|(d,d') \in A(D)\}$$

Observemos que $D\square H \cong_\Phi H\square D$, donde $\Phi : V(D\square H) \to V(H\square D)$ es tal que $\Phi((d,h)) = (h,d)$. Esto último, por el isomorfismo en damas, nos dice que $p(D\square H) = p(H\square D)$ y $P(D\square H) = P(H\square D)$.

6.1. Resultados

Teorema 6.1.1. *Sean D y H dos digráficas, entonces $p(D\square H) \leq p(D)p(H)$.*

Demostración. Tomemos $Q_D = \{u_1, u_2, \ldots, u_{p(D)}\}$ y $Q_H = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p(H)}\}$ dos distribuciones ganadoras en D y H respectivamente, y sea $Q = Q_D \times Q_H$, la cual es una distribución en $D\square H$ de cardinalidad $p(D)p(H)$. Ahora sea $(d,h) \in V(D\square H)\backslash Q$, tenemos tres casos:

(i) Si $d \in Q_D$ y $h \notin Q_H$, entonces $d = u_i$ para algún $1 \leq i \leq p(D)$ y, ya que Q_H es ganadora en H, hay M una sucesión válida de movimientos tal que $h \in M(Q_H)$.

Consideremos al isomorfismo $\Phi_{u_i} : V(H) \to \{u_i\} \times V(H)$ que está definido por $\Phi_{u_i}(v) = (u_i, v)$, entonces tenemos que $H \cong \{u_i\}\Box H \subseteq D\Box H$ y además observemos que $\Phi_{u_i}[Q_H] = \{u_i\} \times Q_H \subseteq Q$, así por el Teorema de Isomorfismo se deduce que $(u_i, h) \in \Phi_{u_i}[M](\{u_i\} \times Q_H)$ y por tanto $(u_i, h) \in \text{Reach}(Q)$.

(ii) Si $d \notin Q_D$ y $h \in Q_H$, entonces $h = v_j$ para algún $1 \leq j \leq p(H)$ y, como Q_D es ganadora en D, hay M una sucesión válida de movimientos tal que $d \in M(Q_D)$. Tomemos al isomorfismo $\Phi_{v_j} : V(H) \to V(D) \times \{v_j\}$ definido por $\Phi_{v_j}(u) = (u, v_j)$, así $D \cong D\Box\{v_j\}$ y $\Phi_{v_j}[Q_D] = Q_D \times \{v_j\} \subseteq Q$, entonces por el Teorema de Isomorfismo, $(d, v_j) \in \Phi_{v_j}[M](Q_D \times \{v_j\})$ y por tanto $(d, v_j) \in \text{Reach}(Q)$.

(iii) Si $d \notin Q_D$ y $h \notin Q_H$, sea M_h una sucesión válida de movimientos tal que $h \in M_h(Q_H)$ y consideremos $M_i = \Phi_{u_i}(M_h)$ para cada $1 \leq i \leq p(D)$, entonces $(u_i, h) \in M_i(Q)$. Observemos que si $i \neq j$, entonces M_i y M_j son sucesiones ajenas, ya que todos los vértices que ocurren en M_i son elementos de $\{u_i\} \times H$, todos los vértices que ocurren en M_j están en $\{u_j\} \times H$ y $(\{u_i\} \times H) \cap (\{u_j\} \times H) = \varnothing$. Sea M la sucesión válida de movimientos en $D\Box H$ que resulta de concatenar $M_1, M_2, \ldots, M_{p(D)}$, entonces tenemos que $Q_D \times \{h\} \in M(Q)$.

Ahora sea M_d una sucesión válida de movimientos tal que $d \in M_d(Q_D)$ y sea el isomorfismo $\Phi_h : V(D) \to V(D) \times \{h\}$ tal que $\Phi_h(u) = (u, h)$, entonces $D \cong D\Box\{h\}$ y $\Phi_h[Q_D] = Q_D \times \{h\}$, y por el Teorema de Isomorfismo tenemos que $\Phi[M_d]$ es una sucesión válida tal que $(d, h) \in \Phi[M_d](Q_D \times \{h\})$. Así al considerar M' como resultado de concatenar M con $\Phi[M_d]$, se tiene que M' es sucesión válida en $D\Box H$ y por lo tanto $(d, h) \in \text{Reach}(Q)$.

Entonces Q es ganadora y $p(D\Box H) \leq p(D)p(H)$. ■

En adelante, dado $r \in \mathbb{N}$, consideraremos, al igual que en el capítulo 4, a P_r como la digráfica tal que $V(P_r) = \{x_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ y $A(P_r) = \{(x_j, x_{j+1}) \mid 1 \leq j \leq r-1\}$.

Teorema 6.1.2. *Para cualesquiera $r, s \geq 1$ se cumple $P(P_r\Box P_s) = rs$.*

Demostración. Dado que no hay flechas incidentes en el vértice x_1 (tanto en P_r, como en P_s), entonces tenemos que $d^-((x_1, x_1)) = 0$, deducimos de esta forma que $P(P_r\Box P_s) = |V(P_r\Box P_s)| = rs$. ■

Teorema 6.1.3. *Para cada $r \geq 1$ se tiene que $p(P_r\Box P_1) = 1 + \lfloor r/2 \rfloor$.*

Demostración. Observemos que $P_r\Box P_1 \cong_\Phi P_r$, y sea $\Phi : V(P_r\Box P_1) \to V(P_r)$ el isomorfismo definido por $\Phi((x_j, x_1)) = x_j$, entonces utilizando el Teorema de Isomorfismo en damas y el Teorema 4.1.4 obtenemos que $p(P_r\Box P_1) = 1 + \lfloor r/2 \rfloor$. ■

Lema 6.1.4. *La distribución*

$$Q_r = \{(x_1, x_1)\} \cup \{(x_k, x_1) \mid 1 \leq k \leq r, k \equiv_2 0\} \cup \{(x_k, x_2) \mid 1 \leq k \leq r,\ k \equiv_4 1\}$$

es ganadora en $P_r \square P_2$*, y por lo tanto* $p(P_r \square P_2) \leq 1 + \lfloor r/2 \rfloor + \lceil r/4 \rceil$.

Demostración. Por inducción sobre r.

Si $r = 1$, se tiene que $V(P_1 \square P_2) = Q_1 \subseteq \text{Reach}(Q_1)$.

Si $r = 2$, entonces $Q_2 = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$ y además tenemos que el movimiento $m' = ((x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2))$ es válido. De esta forma obtenemos que $V(P_2 \square P_2) = \text{Reach}(Q_2)$.

Si $r = 3$, observemos que $Q_3 = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$, y por otro lado, podemos considerar los siguientes tres movimientos $m = ((x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1))$, $m' = ((x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2))$, $m'' = ((x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3))$. De esta forma se deduce que $(x_3, x_1) \in m(Q_3)$, $(x_2, x_2) \in m'(Q_3)$, y $(x_2, x_3) \in m''(m'(Q_3))$. Entonces concluimos que $V(P_3 \square P_2) = \text{Reach}(Q_3)$.

Si $r = 4$, entonces $Q_4 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_4, x_1), (x_1, x_2)\}$, y observemos que $Q_3 \subset Q_4$, entonces basta ver que $(x_4, x_1) \in \text{Reach}(Q_4)$, pues $\text{Reach}(Q_3) \subseteq \text{Reach}(Q_4)$. Ahora, consideremos a la pareja de movimientos $m = ((x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1))$, $m''' = ((x_3, x_1), (x_4, x_1), (x_4, x_2))$, y así obtenemos que $(x_4, x_1) \in m'''(m(Q_4))$. Por lo tanto $V(P_4 \square P_2) = \text{Reach}(Q_4)$.

Entonces supongamos que $r > 4$ y que para toda $s < r$, se cumple que Q_s es ganadora en $P_s \square P_2$.

Dado que $Q_4 \subset Q_r$, entonces $V(P_4 \square P_2) \subseteq \text{Reach}(Q_4) \subseteq \text{Reach}(Q_r)$, de esta forma, elijamos al siguiente par de movimientos $m_1 = ((x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1))$ y $m_2 = ((x_3, x_1), (x_4, x_1), (x_5, x_1))$. Tomemos a la digráfica $D = (P_r \square P_2) - V(P_4 \square P_2)$ y la distribución $Q' = m_2(m_1(Q_r)) \cap V(D)$, observemos que $D \subseteq P_r \square P_2$.

Asimismo tomemos el isomorfismo $\Phi : V(P_{r-4} \square P_2) \to V(D)$ definido de forma que $\Phi((x_i, x_j)) = (x_{i+4}, x_j)$, el cual cumple que $\Phi[Q_{r-4}] = Q'$, y además:

$$\begin{aligned} V(D) &= \Phi[V(P_{r-4} \square P_2)] \\ &= \Phi[\text{Reach}(Q_{r-4})] \\ &= \text{Reach}(\Phi[Q_{r-4}]) \\ &= \text{Reach}(Q') \\ &\subseteq \text{Reach}(m_2(m_1(Q_r)) \\ &\subseteq \text{Reach}(Q_r). \end{aligned}$$

Como $V(P_r \square P_2) = V(D) \cup \text{Reach}(Q_4)$, entonces $\text{Reach}(Q_r) = V(P_r \square P_2)$, y por lo tanto Q_r es ganadora en $P_r \square P_2$. Además $|Q_r| = 1 + \lfloor r/2 \rfloor + \lceil r/4 \rceil$, obteniendo que $p(P_r \square P_2) \leq 1 + \lfloor r/2 \rfloor + \lceil r/4 \rceil$. ∎

Vale la pena observar que el lema anterior implica que $p(P_1 \square P_2) \leq 2$ y si $r > 1$ entonces

$$p(P_r \square P_2) \leq \begin{cases} 2 & \text{si } r = 1, \\ p(P_{r-1} \square P_2) & \text{si } r \overset{4}{\equiv} 3, \\ p(P_{r-1} \square P_2) + 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que la igualdad se cumple siempre para la ecuación anterior. Aclaremos que de aquí en adelante Q_r, donde $r \geq 1$, siempre denotará a la distribución definida en el lema anterior.

Proposición 6.1.5. *Sean $r, s \geq 2$. Si Q es una distribución ganadora en $P_r \square P_s$, entonces $Q_2 \subseteq Q$.*

Demostración. Observemos que $d^-((x_1, x_1)) = 0$, entonces $(x_1, x_1) \in Q$. Además, como tenemos que $\{(x_1, x_1)\} = N^-((x_1, x_2)) = N^-((x_2, x_1))$, entonces no es posible definir movimientos válidos cuyo vértice destino sea (x_1, x_2) o (x_2, x_1), por lo tanto $Q_2 \subseteq Q$. ■

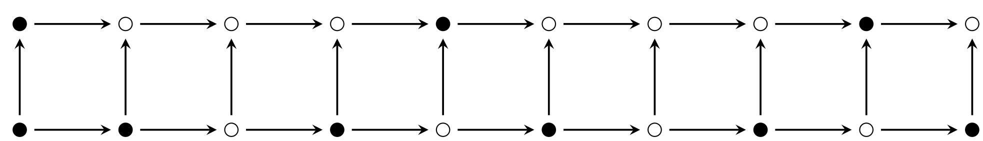

Figura 6.1: La distribución Q_{10} contenida en $P_{10} \square P_2$.

Teorema 6.1.6. *$p(P_r \square P_2) = 1 + \lfloor r/2 \rfloor + \lceil r/4 \rceil$. Además si $r \overset{4}{\equiv} 3$, entonces Q_r es la única distribución ganadora $P_r \square P_2$ de cardinalidad $p(P_r \square P_2)$.*

Demostración. Por inducción sobre r. Si $r = 1$, dado que $P_2 \cong P_1 \square P_2$, entonces $p(P_1 \square P_2) = 2$. Si $r = 2$, entonces por los dos resultados anteriores $p(P_2 \square P_2) = 3$. Análogamente, si $r = 3$ los dos resultados anteriores implican que $p(P_2 \square P_2) = 3$, además de que Q_3 es la única distribución ganadora en $P_3 \square P_2$ de tamaño 3. Ahora sea $r = 4$, como $wt_{(x_4, x_1)}(Q_3) = \sigma^2 + \sigma^3 < 1$, esto junto con los dos resultados anteriores implica que $p(P_4 \square P_2) = 4$. Entonces supongamos que para toda $s < r$ se cumple que $p(P_s \square P_2) = 1 + \lfloor s/2 \rfloor + \lceil s/4 \rceil$ y además si $s \overset{4}{\equiv} 3$, entonces Q_s es la única distribución ganadora en $P_s \square P_2$ de cardinalidad $p(P_s \square P_2)$.

Si $r \overset{4}{\equiv} 3$, como $Q_{r-1} = Q_r$ es ganadora en $P_r \square P_2$, entonces por hipótesis de inducción tenemos que $|Q_r| = p(P_{r-1} \square P_2) \leq p(P_r \square P_2) \leq |Q_r|$, por tanto obtenemos

$p(P_{r-1}\Box P_2) = p(P_r\Box P_2)$. Ahora demostraremos que Q_r es única, tomemos $Q \neq Q_r$ ganadora en $P_r\Box P_2$ con $|Q| = p(P_r\Box P_2) = p(P_{r-1}\Box P_2)$, entonces $Q \subseteq V(P_{r-1}\Box P_2)$, a partir de lo cual es claro que $(x_r, x_1), (x_r, x_2) \notin Q$, $(x_{r-1}, x_1) \in Q$ y además también $(x_{r-2}, x_1) \in Q$ o $(x_{r-3}, x_1) \in Q$, por tanto $2 \leq |Q \cap (V(P_r\Box P_2) \setminus V(P_{r-4}\Box P_2))| \leq 3$.

Supongamos primero que $|Q \cap (V(P_r\Box P_2) \setminus V(P_{r-4}\Box P_2))| = 3$, entonces tenemos que $|Q \cap V(P_{r-4}\Box P_2)| = p(P_{r-4}\Box P_2)$, lo que implica por hipótesis de inducción que $Q \cap V(P_{r-4}\Box P_2) = Q_{r-4}$ y además $(x_{r-3}, x_1) \in Q$, lo que implica a su vez que $Q = Q_{r-4} \cup \{(x_{r-1}, x_1), (x_{r-3}, x_1), y\}$ donde $y \in \{(x_{r-2}, x_1), (x_{r-3}, x_2)\}$ pues $Q_r \neq Q$. En cualquier caso:

$$
\begin{aligned}
wt_{(x_r,x_2)}(Q) &< \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{4k+2} + \sigma^3 + \sigma^r \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} + \frac{\sigma^6}{1-\sigma^4} + \sigma^3 + \sigma^r \\
&= \sigma + \frac{1}{11+7\sigma} + \sigma^3 + \sigma^r \\
&= \frac{1 + 11\sigma + 7\sigma^2 + 11\sigma^3 + 7\sigma^4 + 11\sigma^r + 7\sigma^{r+1}}{11+7\sigma} \\
&= \frac{8 + 4\sigma + 7\sigma^2 + 4\sigma^3 + 7\sigma^{r-1} + 4\sigma^r}{11+7\sigma} \\
&= \frac{11 + \sigma + 4\sigma^2 + 4\sigma^3 + 4\sigma^{r-2} + 3\sigma^{r-1}}{11+7\sigma} \\
&= \frac{11 + 5\sigma + 3\sigma^{r-3} + \sigma^{r-2}}{11+7\sigma} \\
&= \frac{11 + 5\sigma + \sigma^{r-4} + 2\sigma^{r-3}}{11+7\sigma} \\
&= \frac{11 + 5\sigma + \sigma^{r-5} + \sigma^{r-3}}{11+7\sigma} \\
&< \frac{11+7\sigma}{11+7\sigma} = 1
\end{aligned}
$$

Por tanto $|Q \cap (V(P_r\Box P_2) \setminus V(P_{r-4}\Box P_2))| = 2$, es claro que $r = 4n+3$ para algún $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ y $p(P_r\Box P_2) = 1 + (2n+1) + (n+1) = 3n+3$, además recordemos que $(x_{r-1}, x_1), y \in Q$, donde $y \in \{(x_{r-2}, x_1), (x_{r-3}, x_1)\}$, por tanto deducimos que $wt_{(x_r,x_2)}((x_r, x_1)) + wt_{(x_r,x_2)}(y) \leq \sigma^2 + \sigma^3$.

Entonces definamos la distribución $Q'_s = Q \cap V(P_s \square P_2)$ para toda $s < r$, observemos que $|Q'_2| \geq 3$ (pues $p(P_2 \square P_2) = 3$) y si $1 \leq k \leq n-1$ entonces tenemos que $|Q'_{4k+2} \setminus Q'_{4k-2}| \geq 3$ (pues $p(P_{4k+2} \square P_2) - p(P_{4k-2} \square P_2) = 3$). Sean $v_1, v_2, v_3 \in Q'_2$ y tomemos $v_{3k+1}, v_{3k+2}, v_{3k+3} \in Q'_{4k+2} \setminus Q'_{4k-2}$ para cada $1 \leq k \leq n-1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sigma^{r-2} + 2\sigma^{r-3} &\geq wt_{(x_r,x_2)}(v_1) + wt_{(x_r,x_2)}(v_2) + wt_{(x_r,x_2)}(v_3) \\
\sigma^{r-6} + 2\sigma^{r-7} &\geq wt_{(x_r,x_2)}(v_4) + wt_{(x_r,x_2)}(v_5) + wt_{(x_r,x_2)}(v_6) \\
&\vdots \\
\sigma^{r-4k-2} + 2\sigma^{r-4k-3} &\geq wt_{(x_r,x_2)}(v_{3k+1}) + wt_{(x_r,x_2)}(v_{3k+2}) + wt_{(x_r,x_2)}(v_{3k+3}) \\
&\vdots \\
\sigma^{5} + 2\sigma^{6} &\geq wt_{(x_r,x_2)}(v_{3n-2}) + wt_{(x_r,x_2)}(v_{3n-1}) + wt_{(x_r,x_2)}(v_{3n}),
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\sum_{i=1}^{3n} wt_{(x_r,x_2)}(v_i) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \sigma^{4j+1} + 2\sum_{j=1}^{n-1} \sigma^{4j+2}.$$

De esta forma hemos acotado el peso de $3n-1$ elementos de Q, llamemos al elemento faltante z, es decir, $Q = \{v_1, \ldots, v_{3n}, (x_r, x_1), y, z\}$. Claramente $z \in Q'_{r-4}$ y entonces $wt_{(x_r,x_2)}(z) \leq \sigma^4$, por tanto

$$\begin{aligned}
wt_{(x_r,x_2)}(Q) &< \sum_{j=1}^{\infty} \sigma^{4j+1} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \sigma^{4j+2} + \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4 \\
&= \frac{\sigma^5}{1-\sigma^4} + \frac{2\sigma^6}{1-\sigma^4} + 2\sigma^2 \\
&= \frac{1+2\sigma}{7+4\sigma} + 2\sigma^2 \\
&= \frac{1+2\sigma+14\sigma^2+8\sigma^3}{7+4\sigma} \\
&= \frac{1+10\sigma+6\sigma^2}{7+4\sigma} \\
&= \frac{7+4\sigma}{7+4\sigma} = 1
\end{aligned}$$

lo cual implica que $(x_r, x_2) \notin \text{Reach}(Q)$, entonces Q no es ganadora y por lo tanto Q_r es la única distribución ganadora en $P_r \square P_2$ de cardinalidad $p(P_r \square P_2)$.

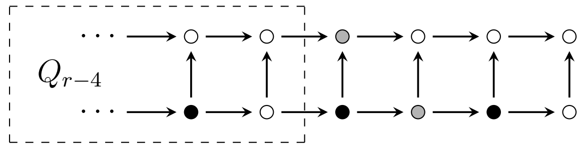

Figura 6.2: Q en el caso $r \overset{4}{\equiv} 3$, subcaso $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-4} \square P_2))| = 3$. En negro se muestran los vértices de $Q \setminus \{y\}$, mientras que en gris se representan las dos posibles ubicaciones de y, observemos que el segmento inical de Q es isomorfo a la distribución Q_{r-4}.

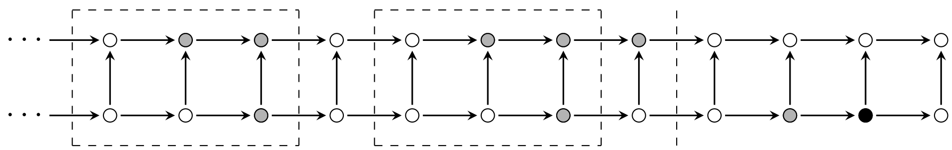

Figura 6.3: Q en el caso $r \overset{4}{\equiv} 3$, subcaso $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-4} \square P_2))| = 2$. En negro se muestra al vértice (x_{r-1}, x_1) y en gris se representa la ubicación de los elementos de $Q \setminus \{(x_{r-1}, x_1)\}$ que acota su peso respecto a (x_r, x_2).

Ahora consideremos $r \overset{4}{\equiv} 0, 1, 2$, entonces utilizando el lema anterior tenemos que $p(P_r \square P_2) \leq p(P_{r-1} \square P_2) + 1$, y supongamos que existe una distribución Q ganadora en $P_r \square P_2$ tal que $|Q| = p(P_{r-1} \square P_2)$, observemos además que $P_{r-1} \square P_2 \subseteq P_r \square P_2$, entonces $Q \subseteq V(P_{r-1} \square P_2)$, y por tanto $(x_r, x_1), (x_r, x_2) \notin Q$, y tenemos tres casos.

Si $r \overset{4}{\equiv} 0$, por la hipótesis inductiva $p(P_{r-2} \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) = p(P_r \square P_2)$, entonces deducimos que $(x_{r-1}, x_1), (x_{r-1}, x_2), (x_r, x_1), (x_r, x_2) \notin Q$, en particular se tiene $(x_{r-1}, x_1), (x_r, x_1) \notin Q$, entonces del Teorema 2.2.6 y la Proposición 4.1.1 se sigue que $(x_r, x_1) \notin \text{Reach}(Q_{(x_r, x_1)})$, entonces Q no es distribución ganadora y $p(P_{r-1} \square P_2) < p(P_r \square P_2)$, por lo tanto obtenemos que $p(P_r \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) + 1$.

Si $r \overset{4}{\equiv} 1$, por hipótesis inductiva tenemos que

$$p(P_r \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) = p(P_{r-2} \square P_2) + 1,$$

además $(x_r, x_1) \notin Q$, entonces $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-2} \square P_2))| = 1$, así por la unicidad de Q_{r-2} tenemos que $Q = Q_{r-2} \cup \{(x_{r-1}, x_1)\}$, y observemos que:

$$
\begin{aligned}
wt_{(x_r,x_2)}(Q) &< \sum_{k=1}^{\infty}\sigma^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^{4k}+\sigma^r\\
&=\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}+\frac{\sigma^4}{1-\sigma^4}+\sigma^r\\
&=\sigma+\frac{1}{4+3\sigma}+\sigma^r\\
&=\frac{1+4\sigma+3\sigma^2+4\sigma^r+3\sigma^{r+1}}{4+3\sigma}\\
&=\frac{4+\sigma+3\sigma^{r-1}+\sigma^r}{4+3\sigma}\\
&=\frac{4+\sigma+\sigma^{r-2}+2\sigma^{r-1}}{4+3\sigma}\\
&=\frac{4+\sigma+\sigma^{r-3}+\sigma^{r-1}}{4+3\sigma}\\
&<\frac{4+3\sigma}{4+3\sigma}=1.
\end{aligned}
$$

Contradiciendo la elección de Q, entonces $p(P_r \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) + 1$.

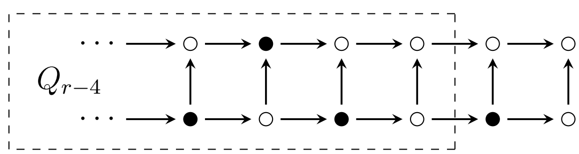

Figura 6.4: La distribución Q en el caso $r \overset{4}{\equiv} 1$, observemos que el segmento inical de Q es isomorfo a la distribución Q_{r-4}.

Si $r \overset{4}{\equiv} 2$, entonces por hipótesis inductiva

$$p(P_r \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) = p(P_{r-2} \square P_2) + 1 = p(P_{r-3} \square P_2) + 2,$$

y dado que $(x_r, x_1) \notin Q$, entonces se tiene que $(x_{r-1}, x_1) \in Q$ de lo cual deducimos que $1 \leq |Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-3} \square P_2))| \leq 2$.

Supongamos que $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-3} \square P_2))| = 2$, de esta forma tenemos que $Q = Q_{r-3} \cup \{(x_{r-1}, x_1), (x_{r-2}, x_1)\}$ y podemos observar que:

$$
\begin{aligned}
wt_{(x_r,x_2)}(Q) &< \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{4k+1} + \sigma^2 + \sigma^r \\
&= \frac{\sigma^3}{1-\sigma^2} + \frac{\sigma^5}{1-\sigma^4} + \sigma^2 + \sigma^r \\
&= 2\sigma^2 + \frac{1}{7+4\sigma} + \sigma^r \\
&= \frac{1 + 14\sigma^2 + 8\sigma^3 + 7\sigma^r + 4\sigma^{r+1}}{7+4\sigma} \\
&= \frac{1 + 8\sigma + 6\sigma^2 + 4\sigma^{r-1} + 3\sigma^r}{7+4\sigma} \\
&= \frac{7 + 2\sigma + 3\sigma^{r-2} + \sigma^{r-1}}{7+4\sigma} \\
&= \frac{7 + 2\sigma + \sigma^{r-3} + 2\sigma^{r-2}}{7+4\sigma} \\
&= \frac{7 + 2\sigma + \sigma^{r-4} + \sigma^{r-2}}{7+4\sigma} \\
&< \frac{7+4\sigma}{7+4\sigma} = 1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(x_r, x_2) \notin \text{Reach}(Q)$, contradiciendo la elección de Q lo que implica que $p(P_r \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) + 1$.

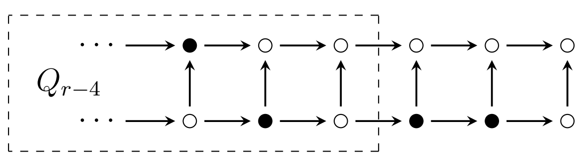

Figura 6.5: Q en el caso $r \overset{4}{\equiv} 2$, subcaso $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-3} \square P_2))| = 2$. Observemos que el segmento inical de Q es isomorfo a la distribución Q_{r-4}.

Supongamos entonces que $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-3} \square P_2))| = 1$, así tenemos que $(x_{r-1}, x_1), (x_{r-3}, x_1) \in Q$, entonces $|Q \cap V(P_{r-4} \square P_2)| = p(P_{r-4} \square P_2)$, y entonces (por el mismo argumento utilizado previamente en la prueba para la unicidad de la distribución cuando $r \overset{4}{\equiv} 3$) podemos considerar que:

$$\begin{aligned}
wt_{(x_r,x_2)}(Q) &< \sum_{k=1}^{\infty}\sigma^{4k} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^{4k+1} + \sigma^2 + \sigma^4 \\
&= \frac{\sigma^4}{1-\sigma^4} + \frac{2\sigma^5}{1-\sigma^4} + \sigma^2 + \sigma^4 \\
&= \frac{1+2\sigma}{4+3\sigma} + \sigma^2 + \sigma^4 \\
&= \frac{1+2\sigma+4\sigma^2+3\sigma^3+4\sigma^4+3\sigma^5}{4+3\sigma} \\
&= \frac{3+2\sigma^2+5\sigma^3+2\sigma^4+\sigma^5}{4+3\sigma} \\
&= \frac{3+2\sigma+2\sigma^2+\sigma^3+\sigma^5}{4+3\sigma} \\
&= \frac{4+2\sigma+\sigma^5}{4+3\sigma} \\
&< \frac{4+3\sigma}{4+3\sigma} = 1.
\end{aligned}$$

Contradiciendo así la elección de Q, entonces $p(P_r \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) + 1$.

Así en cualquier caso obtenemos que $p(P_r \square P_2) = p(P_{r-1} \square P_2) + 1$. ■

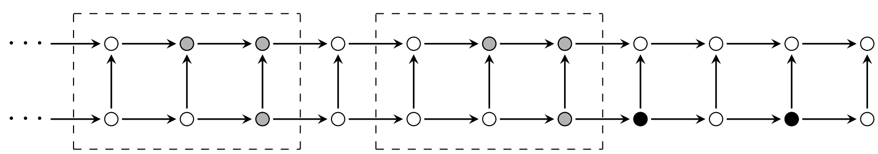

Figura 6.6: Q en el caso $r \overset{4}{\equiv} 2$, subcaso $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-3} \square P_2))| = 1$. En negro se muestra a los vértices $(x_{r-1}, x_1), (x_{r-3}, x_1)$ y en gris se representa la ubicación de los elementos de $Q \setminus \{(x_{r-1}, x_1), (x_{r-3}, x_1)\}$ que acota su peso respecto a (x_r, x_2).

Este último resultado no sólo nos permite calcular de forma exacta el número de damas óptimo de $P_r \square P_2$ para cualquier $r \geq 1$, sino que además Q_r, la distribución ganadora propuesta, es una generalización de la distribución ganadora utilizada en el Teorema 4.1.4 para la trayectoria P_r, pues observemos que el conjunto $Q_r \cap V(P_r \square P_1)$ es la imagen de dicha distribución bajo la inclusión natural $\iota : P_r \to P_r \square P_2$, donde $\iota(x_j) = (x_j, x_1)$.

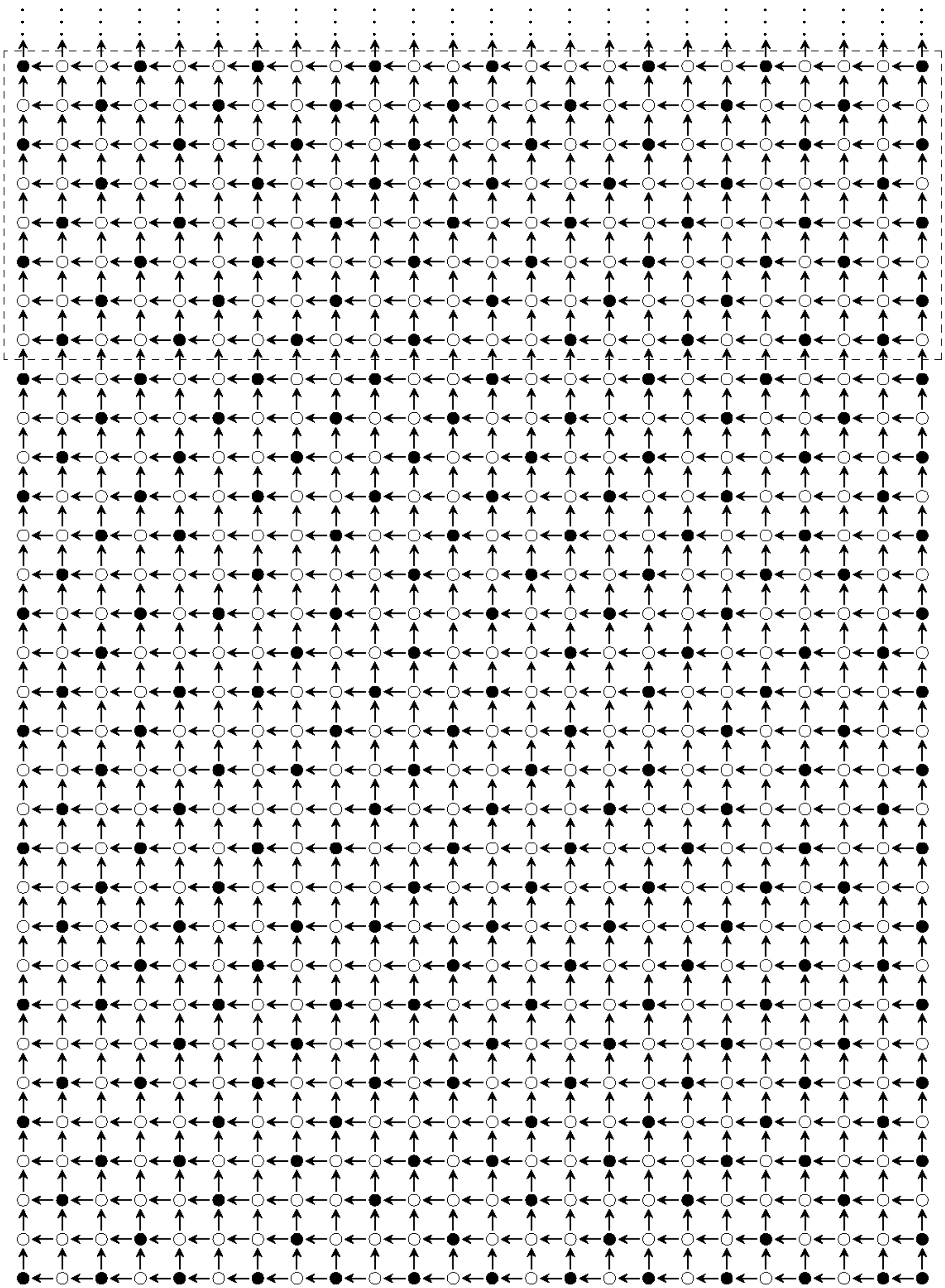

Figura 6.7: Una distribución ganadora en $P_r \Box P_{24}$.

Siguiendo este razonamiento, podemos construir a la distribución $Q(\infty, 24)$ en la digráfica $P_\infty \square P_{24}$, representada en los vértices de color negro en la Figura 6.7, donde el segmento encerrado entre las líneas punteadas, correspondiente al conjunto $Q(\infty, 24) \cap \{(x_i, x_j) \mid 25 \leq i \leq 32,\ 1 \leq j \leq 24\}$, se repite de ahí en adelante.

Definamos entonces, para cualesquiera $r \geq 1$, $24 \geq s \geq 1$, a los conjuntos

$$Q(r, t) = Q(r, 24) \cap \{(x_i, x_j) \mid 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s\}.$$

Claramente $p(P_r \square P_s) \leq |Q(r, s)|$, además observemos que $Q(r, 2) = Q_r$ y por ende $Q(r, 1)$ es isomorfa a la distribución ganadora de P_r establecida en el Teorema 4.1.4, es decir, $Q(r, 24)$ es una generalización de una distribución ganadora para $P_r \square P_{24}$, lo que nos lleva a establecer lo siguiente.

Conjetura 6.1.7. *Si $r \geq 1$ y $24 \geq s \geq 1$, entonces $p(P_r \square P_s) = |Q(r, s)|$.*

Como ya hemos visto anteriormente, esta conjetura es cierta cuando $2 \geq s \geq 1$, pero conseguir el resultado para $s \geq 3$ parece ser más complicado. Por ejemplo, en el caso de $s = 3$, tenemos que, para cualquier r, la distribución

$$Q'(r, 3) = \{(x_1, x_2)\} \cap \{(x_i, x_1) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

es también ganadora en $P_r \square P_3$ y $|Q'(r, 3)| = |Q(r, 3)|$.

Pero por otro lado si $r \geq 3$, entonces $Q'(r, 3) \neq Q(r, 3)$, es decir que $Q(r, 3)$ no es la única distribución ganadora de tamaño $r + 1$ en $P_r \square P_3$, y es justo la unicidad en ciertos casos la que nos ayuda a resolver el problema en el caso $s = 2$. A pesar de esto, es posible verificar el resultado para los primero valores r.

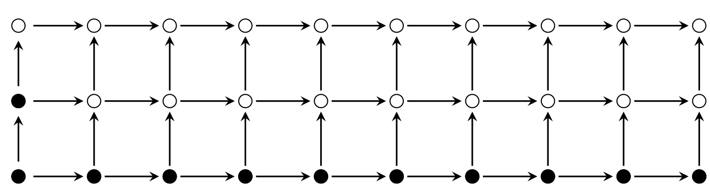

Figura 6.8: Q en el caso $r \overset{4}{\equiv} 2$, subcaso $|Q \cap (V(P_r \square P_2) \setminus V(P_{r-3} \square P_2))| = 1$. En negro se muestra a los vértices $(x_{r-1}, x_1), (x_{r-3}, x_1)$ y en gris se representa la ubicación de los elementos de $Q \setminus \{(x_{r-1}, x_1), (x_{r-3}, x_1)\}$ que acota su peso respecto a (x_r, x_2).

Teorema 6.1.8. *Si* $6 \geq r \geq 1$, *entonces* $p(P_r \square P_3) = |Q(r,3)| = r+1$.

Demostración. Para $r = 1$ tenemos que $P_1 \square P_3 \cong P_3$ y del Teorema 4.1.4 se sigue que $p(P_1 \square P_3) = 2$. Si $r = 2$, entonces $P_2 \square P_3 \cong P_3 \square P_2$, así por el Teorema 6.1.6 tenemos $p(P_2 \square P_3) = 3$. Para los siguientes casos, supongamos que existe una distribución ganadora Q de tamaño r y por la Proposición 6.1.5 deducimos que $\{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_1)\} \subseteq Q$.

Para el caso $r = 3$, se deduce que $Q = \{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_1)\}$, y además observemos que $wt_{(x_3,x_3)}(Q) = 2\sigma^3 + \sigma^4 = \sigma^2 + \sigma^3 = \sigma < 1$, por tanto Q no es ganadora y entonces $p(P_3 \square P_3) = 4$.

Si $r = 4$, entonces $Q = \{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_1),y\}$, donde tenemos dos casos:

(*i*) Si $y \notin \{(x_3,x_1),(x_4,x_1)\}$, entonces por el Teorema 2.2.6 y la Proposición 4.1.1 tenemos que $(x_4,x_1) \notin \text{Reach}(Q)$.

(*ii*) Si $y \in \{(x_3,x_1),(x_4,x_1)\}$, entonces

$$wt_{(x_3,x_3)}(Q) \leq \sigma^2 + 2\sigma^4 + \sigma^5 = \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4 = 2\sigma^2 = \sigma < 1.$$

Por tanto $(x_3,x_3) \notin \text{Reach}(Q)$.

De lo cual se deduce que Q no es ganadora y entonces $p(P_4 \square P_3) = 5$.

Para el caso $r = 5$, considerando el caso anterior y la Proposición 4.1.1 deducimos que $Q = \{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_1),(x_4,x_1),y\}$, y observemos que $p(P_3 \square P_3) = 4$, entonces $y \in V(P_3 \square P_3)$, por lo tanto

$$wt_{(x_4,x_3)}(Q) \leq \sigma^2 + \sigma^3 + 2\sigma^5 + \sigma^6 = \sigma + \sigma^4 + \sigma^5 = \sigma + \sigma^3 < 1.$$

Entonces Q no es distribución ganadora y $p(P_5 \square P_3) = 6$.

Para $r = 6$, tenemos que $Q = \{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_1),(x_5,x_1),y,z\}$ por el caso anterior y la Proposición 4.1.1, además $p(P_4 \square P_3) = 5$, entonces $y,z \in V(P_4 \square P_3)$ y utilizando de nuevo la Proposición 4.1.1, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y \in \{(x_3,x_1),(x_4,x_1)\}$, entonces

$$wt_{(x_5,x_3)}(Q) \leq \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4 + 2\sigma^6 + \sigma^7 = \sigma^2 + \sigma^3 + \sigma^4 + \sigma^5 + \sigma^6 < 1.$$

Por lo tanto Q no es distribución ganadora y $p(P_6 \square P_3) = 7$. ■

Capítulo 7

Conclusiones

La relevancia del presente trabajo consiste en la presentación de este tema ante la comunidad matemática universitaria, estableciendo las bases de futuras investigaciones. Hemos hecho el traslado de los conceptos de movimiento de damas, del número de damas y del número de damas óptimo, que originalmente sólo se habían definido para gráficas no dirigidas, al universo de las digráficas. Hecho esto, hicimos el computo de dichos parámetros para distintas familias de digráficas.

Hemos hallado que tanto el número de damas, como el número de damas óptimo, quedan totalmente determinados por la conexidad de la digráfica (Teorema 2.1.4). Asimismo, se determinó la relación que existe en las digráficas transitivas del número de damas óptimo con las componentes fuertes iniciales de la digráfica (Teorema 3.4.1). En el cuarto capítulo se establecen de forma precisa el número de damas y el número de damas óptimo para las familias de trayectorias y ciclos.

En el quinto capítulo nos hemos encontrado con que, tanto en la familia de los torneos, así como en cierta subfamilia de las digráficas circulantes, existen digráficas cuyo orden y número de damas pueden ser tan grandes o tan pequeños como queramos, y, aún mejor, hay una forma constructiva de hallar la digráfica que estemos buscando. Finalmente, en el sexto capítulo se lograron determinar de manera exacta ambos parámetros para el producto cuadro entre una trayectoria de orden 2 con otra trayectoria de orden arbitrario, al igual que para el producto cuadro entre una trayectoria de orden 3 con otra trayectoria de orden menor o igual a 6, y además hemos acotado el número de damas óptimo para el producto cuadro entre una trayectoria de orden menor o igual a 24 con otra trayectoria de orden arbitrario.

Queda mucho todavía por estudiar al respecto, por ejemplo, podemos preguntarnos acerca del comportamiento de los números de damas en el producto cuadro entre dos trayectorias de orden arbitrario o dos ciclos, o también su comportamiento bajo la operación potencia, o clausura transitiva. Incluso, dado que parámetros como la independencia, los ingrados y exgrados tanto mínimos como máximos tienen cierta influencia en los número de damas, podríamos también preguntarnos si los parámetros presentados en este trabajo tienen alguna relación con los núcleos de una digráfica.

Apéndice A

¿Por qué σ?

A.1. El solitario y los soldados de Conway

El *senku* o *solitario* es un juego de mesa (llamado en inglés *peg solitaire*) de un sólo jugador sobre un tablero como el mostrado abajo (llamado tablero inglés), utilizando únicamente movimientos de damas, como los definimos en el Capítulo 2, pero que sólo pueden realizarse si las tres casillas correspondientes son colineales. A estos movimientos se las llama usualmente *saltos*.

El objetivo es, iniciando el juego con la distribución inicial Q_0 (una ficha en cada casilla, salvo la central), ir reduciendo la cantidad de fichas usando saltos, hasta tener una sóla ficha en el tablero. La forma más común de jugar consiste en buscar que la última ficha termine en la casilla central.

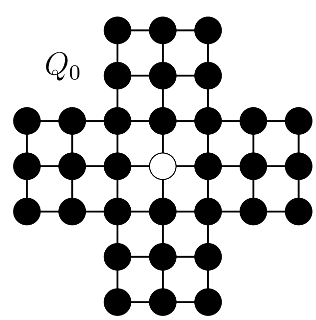

Figura A.1: Tablero de solitario, cada círculo representa una casilla y cada círculo negro representa una casilla ocupada en la distribución inicial Q_0.

Los *soldados de Conway* es una variante del solitario creado por J.H. Conway que se juega en un tablero de damas infinito. Tomando una linea horizontal sobre el tablero como referencia, se colocan damas en todas las casillas inferiores a la línea y las casillas superiores se dejan vacías. El objetivo es, a partir únicamente de movimientos de damas horizontales o verticales (como en el solitario), colocar una dama en un renglón superior a la línea de referencia lo más arriba posible.

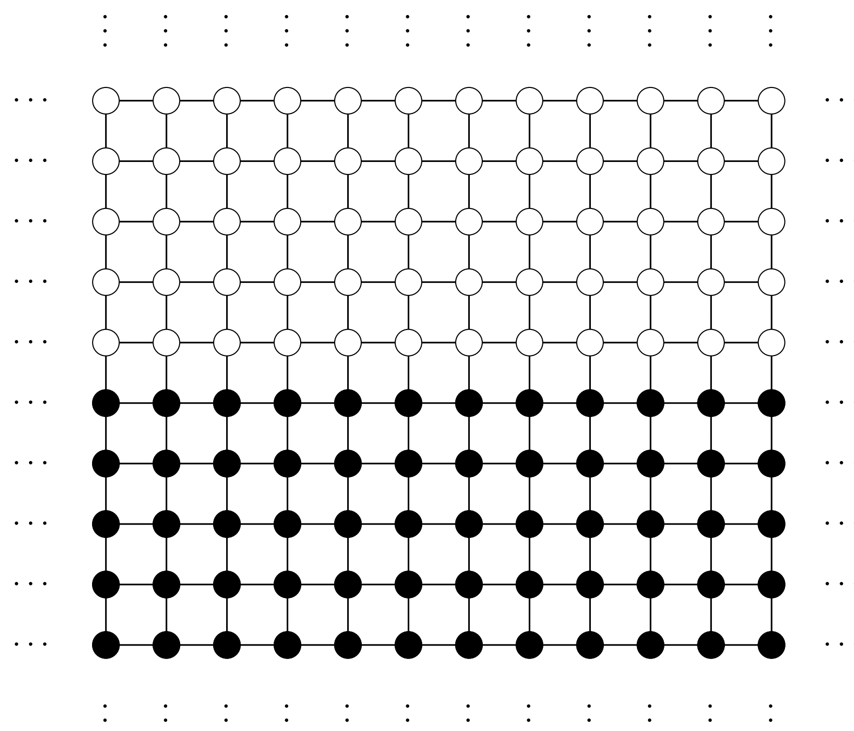

Figura A.2: Tablero para los soldados de Conway, cada círculo representa una casilla y cada círculo negro representa una casilla ocupada en la distribución inicial.

Es durante el estudio de estos juegos que se desarrollaron las *funciones pagoda* [3], éstas pueden ser descritas como funciones que asignan un valor a cada casilla y donde a cada distribución de fichas se la asigna el valor resultante de la suma de casillas ocupadas por dicha distribución, además las funciones pagoda deben cumplir una propiedad esencial que las define, la cual es que *a partir de una distribución dada, ningún movimiento debe incrementar el valor de la distribución resultante.*

A.2. Funciones pagoda

Una función pagoda puede ser definida de manera más formal como una función $\text{pag} : C \to \mathbb{R}$, donde C es el conjunto de casillas del tablero, y además a cada distribución Q, que podemos considerar como un subconjunto de C, se la asigna

$$\text{pag}(Q) = \sum_{q \in Q} \text{pag}(q),$$

y tal que cumple *la condición de la función pagoda* la cual es que para cualesquiera tres casillas colineales a, b, c donde la casilla a es adyacente a la casilla b y la casilla b es adyacente a la casilla c, entonces se cumple que

$$\text{pag}(a) + \text{pag}(b) \geq \text{pag}(c).$$

A partir de lo anterior, es fácil observar que la función de peso definida en el Capítulo 2 es una función pagoda por definición, y por lo tanto la Monotonía del Peso es una consecuencia de la condición de la función pagoda.

El objetivo de las funciones pagoda es poder determinar la imposibilidad de que a partir de una distribución dada de fichas, usando los movimientos permitidos, se pueda llegar a otra distribución establecida.

Cabe aclarar que para distintos pares de distribuciones, de la cuales se quiera estudiar su relación, se definen distintas funciones pagoda, es decir, se construyen funciones hechas a la medida para cada problema a resolver.

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestran dos distribuciones, junto con dos funciones pagoda correspondientes, a las que no se puede llegar a partir de la distribución inicial del juego Q_0, pues en el primer caso $\text{pag}(Q_0) = 4$ no puede incrementar a $\text{pag}(P_1) = 6$; y para el segundo caso $\text{pag}(Q_0) = 8$ tampoco puede incrementar a $\text{pag}(P_2) = 10$. En ambos casos, el resultado es inmediato a partir de la condición de la función pagoda.

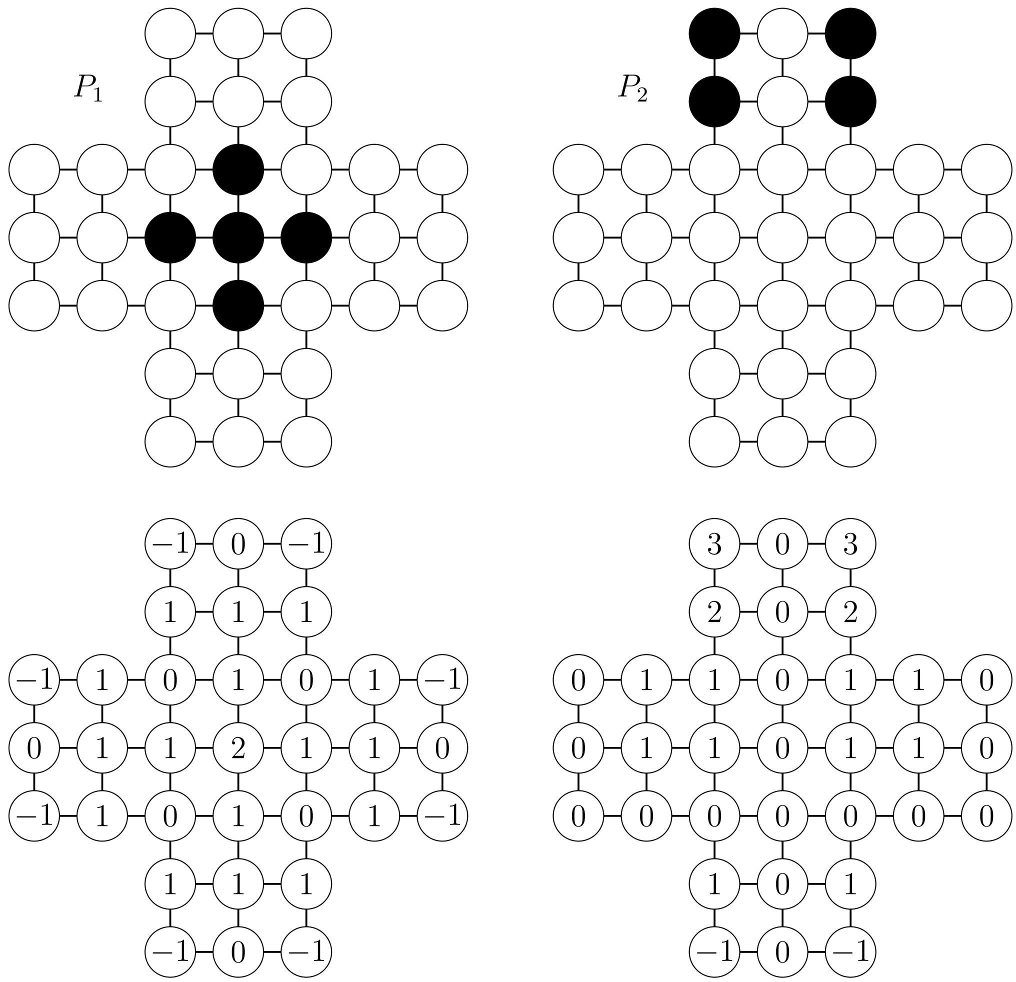

Figura A.3: Dos problemas imposibles y sus funciones pagoda correspondientes.

En el caso de los soldados de Conway se determina, mediante una función pagoda, que no es posible alcanzar el quinto renglón superior repecto a la línea de referencia. Es en dicha función pagoda donde surge $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, y es a partir de la cual se inspira la función de peso definida en el Capítulo 2. A continuación se dará una forma análitica para la construción de la función de peso.

A.3. La función de peso

Para el estudio del número de damas y el número de damas óptimo de una digráfica arbitaria construiremos una función pagoda que nos auxilie para determinar cuando un vértice está en el alcance de una distribución dada, para ello tomaremos en cuenta ciertas condiciones extras para definir de forma más concreta la función buscada.

Así la condición de la función pagoda tiene una ligera modificación para una digráfica arbitraria: para cualesquiera $u, v, w \in V(D)$ vértices distintos tales que $(u, v), (v, w) \in A(D)$, entonces se cumple que

$$\text{pag}(u) + \text{pag}(v) \geq \text{pag}(w).$$

De esta forma extendemos la forma de los movimientos permitidos, pues la noción de colinealidad en una digráfica pierde sentido.

Consideremos entonces a D una digráfica, Q una distribución en D y $u \in V(D)$, y de aquí en adelante, denotaremos por $f_u : V(D) \to \mathbb{R}$ a la función pagoda por establecer, así tenemos que $f_u(Q) = \sum_{q \in Q} f_u(q)$.

Una condición útil para f_u es que refleje la distancia que hay entre los vértices de D y el vértice u, es decir, el valor de f_u irá decreciendo conforme nos alejemos de u, de esta forma, si consideramos una sucesión de número reales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > 0$, podemos definir

$$f_u(v) = \begin{cases} a_k & \text{si } d(v, u) = k, \\ 0 & \text{si } d(v, u) = \infty. \end{cases}$$

Otra propiedad que observamos que debe cumplir f_u es que $f_u(v) < 1$ para todo $v \neq u$, ya que el orden de D es arbitrariamente grande y también el de Q, de lo cual deducimos que si f_u no tuviera esta propiedad, la serie $f_u(Q) = \sum_{q \in Q} f_u(q)$ no sería convergente. De esta forma podemos tomar $a_0 = 1$.

Asimismo, podemos considerar que, cuando realizamos un movimiento de damas, el peso de la distribución disminuye lo menos posible, esto se refleja en la condición de la función pagoda de manera que para toda $k \geq 0$ se cumpla que

$$a_k = a_{k+1} + a_{k+2}.$$

Lo que implica que $a_{k+2} = a_k - a_{k+1}$, es decir, al definir los primeros dos terminos de la sucesión, entonces queda determinada de forma recursiva toda la sucesión (como ocurre en la sucesión de Fibonacci). Además, las condiciones previas definen una función pagoda en su totalidad, pues podemos considerar que existe $r \in \mathbb{R}$ positivo tal que $a_1 = ra_2$, lo que indica que

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 + a_2 = (1+r)a_1 \\ a_1 &= a_2 + a_3 = a_1 \\ a_2 &= a_3 + a_4 = ra_1 \\ a_3 &= a_4 + a_5 = (1-r)a_1 \\ a_4 &= a_5 + a_6 = (-1+2r)a_1 \\ a_5 &= a_6 + a_7 = (2-3r)a_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es decir, todo término de la sucesión es multiplo de a_1, esto lo podemos establecer de manera más formal. Recordemos que la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ se define de forma que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y para toda $k \geq 2$ se tiene $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$.

Proposición A.3.1. *Si* $k \geq 2$, *entonces* $a_k = [(-1)^{k-1}F_{k-2} + (-1)^k F_{k-1} r]a_1$.

Demostración. Por inducción sobre k. Para $k = 2$ tenemos que $a_2 = ra_1$ por la existencia de r. Entonces supongamos que la ecuación se cumple para toda $n < k$, es decir, $a_n = [(-1)^{n-1}F_{n-2} + (-1)^n F_{n-1} r]a_1$. Así observemos que

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-2} - a_{k-1} \\ &= [(-1)^{k-3}F_{k-4} + (-1)^{k-2}F_{k-3}r]a_1 - [(-1)^{k-2}F_{k-3} + (-1)^{k-1}F_{k-2}r]a_1 \\ &= (-1)^{k-3}F_{k-4}a_1 + (-1)^{k-2}F_{k-3}ra_1 - (-1)^{k-2}F_{k-3}a_1 - (-1)^{k-1}F_{k-2}ra_1 \\ &= [(-1)^{k-3}F_{k-4} + (-1)^{k-3}F_{k-3}]a_1 - [(-1)^{k-2}F_{k-3} + (-1)^{k-2}F_{k-2}]ra_1 \\ &= [F_{k-4} + F_{k-3}](-1)^{k-3}a_1 - [-F_{k-3} + F_{k-2}](-1)^{k-2}ra_1 \\ &= F_{k-2}(-1)^{k-3}a_1 + F_{k-1}(-1)^{k-2}ra_1 \\ &= [(-1)^{k-1}F_{k-2} + (-1)^k F_{k-1} r]a_1. \end{aligned}$$

■

A partir de lo anterior y dado que $a_k > 0$, podemos observar que para toda $k \geq 2$ se cumple que $(-1)^{k-1}F_{k-2} + (-1)^k F_{k-1} r > 0$, así la Proposición A.1.1 establece una sucesión de restricciones para r que dependen de la paridad de k, entonces

$$\begin{aligned} r &< F_{k-2}/F_{k-1} \qquad \text{si } k \text{ es impar} \\ r &> F_{k-2}/F_{k-1} \qquad \text{si } k \text{ es par.} \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{8}{13} < \cdots < r < \cdots < \frac{13}{21} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < 1.$$

Así podemos definir dos sucesiones $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\alpha_n = F_{2n}/F_{2n+1}$ y $\beta_n = F_{2n+1}/F_{2n+2}$, resulta claro que ambas sucesiones son monótonas y acotadas ($\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < 1$ y $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > 0$), y por lo tanto son convergentes. Además podemos definir una nueva sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\gamma_n = \beta_n - \alpha_n = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}} - \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} = \frac{F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2}}$$

Lema A.3.2. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} = 1$.*

Demostración. Por inducción sobre n.

Para $n = 1$ tenemos que $F_3^2 - F_2F_4 = 2^2 - (1)(3) = 1$. Entonces supongamos que la ecuación se cumple para toda $k < n$, es decir, $F_{2k+1}^2 - F_{2k}F_{2k+2} = 1$. Así observemos que

$$\begin{aligned}
F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} &= (F_{2n} + F_{2n-1})^2 - F_{2n}(F_{2n} + F_{2n+1}) \\
&= F_{2n}^2 + 2F_{2n}F_{2n-1} + F_{2n-1}^2 - F_{2n}^2 - F_{2n}F_{2n+1} \\
&= 2F_{2n}F_{2n-1} + F_{2n-1}^2 - F_{2n}(F_{2n-1} + F_{2n}) \\
&= F_{2n}F_{2n-1} + F_{2n-1}^2 - F_{2n}^2 \\
&= F_{2n}F_{2n-1} + F_{2n-1}^2 - F_{2n}(F_{2n-1} + F_{2n-2}) \\
&= F_{2n-1}^2 - F_{2n-2}F_{2n} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

■

El lema anterior implica que la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y dado que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, entonces tenemos que

$$0 = \lim_{n\to\infty} 1/n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n - \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n - \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = r$. Además de la definición de la sucesión de Fibonacci, tenemos que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$, y dividimos ambos lados por F_{n-1}, así obtenemos $F_n/F_{n-1} = F_{n-1}/F_n + F_{n-2}/F_{n-1} = 1 + F_{n-2}/F_{n-1}$, y entonces

$$\frac{1}{F_{n-1}/F_n} = 1 + F_{n-2}/F_{n-1}.$$

En particular, se cumple que $1/\beta_n = 1 + \alpha_n$, así cuando $n \to \infty$ obtenemos que $1/r = 1 + r$, de lo cual se deduce que $1 = r + r^2$, y dado que $r > 0$, se concluye que $r = \sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Teorema A.3.3. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $a_n = \sigma^n$.*

Demostración. Por inducción sobre n.

Para $n = 1$ observemos que $1 = (1 + \sigma)a_1 = \sigma^{-1}a_1$, y por lo tanto $a_1 = \sigma$. Entonces supongamos que $a_k = \sigma^k$ se cumple para toda $k < n$. De esta forma $a_n = a_{n-2} - a_{n-1} = \sigma^{n-2} - \sigma^{n-1} = \sigma^{n-2}(1 - \sigma) = \sigma^n$. ∎

De esta forma queda establecido que $f_u = wt_u$, y entonces wt_u es una función pagoda construida que nos ayudará a determinar, en ciertos casos, cuando un vértice n está en el alcance de una distribución. Es claro que no funcionará en todo caso, por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una digráfica D y una distribución Q donde wt_u pierde su utilidad (pues $wt_u(Q) = 2\sigma > 1$), pero a pesar de ésto hemos podido observar su funcionalidad en la Proposición 2.1.8 y en el Capítulo 6.

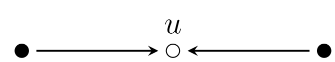

Figura A.4: La distribución Q está representada por los círculos negros.

Bibliografía

[1] Helleloid, G., Khalid, M., Moulton, D.P. y Wood, P.M. "Graph pegging numbers". *Discrete Mathematics*, 309(8) (2009) 1971-1985.

[2] Bang-Jensen, J. y Gutin, G. *Graph Theory*. Springer, 2009.

[3] Berlakamp, E.R., Conway, J.H. y Guy, R.K. *Winning Ways for your Mathematical Plays, Volume 4*. A.K. Peters, 2004.

[4] Bondy, J.A. y Murty, U.S.R. *Graph Theory*. Springer, 2008.

[5] Diestel, R. *Graph Theory*. Springer, 2005.

[6] Hijab, O. *Introduction to Calculus and Classical Analysis*. Springer, 2007.

[7] Spivak, M. *Calculus*. 3ra ed. Publish or Perish, Inc. 2006.

Índice alfabético

Índice de símbolos

Términos matemáticos generales

$\lfloor n \rfloor$	El mayor entero menor a n.
$\lceil n \rceil$	El menor entero mayor a n.
$\overset{n}{\equiv}$	Congruencia módulo n.
$A \times B$	El producto cartesiano entre dos conjuntos A, B.

Parámetros de digráficas

$d^+(u)$	El exgrado del vértice u.
$d^-(u)$	El ingrado del vértice u.
$d(u,v)$	La distancia entre los vértices u y v.
$\mathrm{diam}(D)$	El diámetro de la digráfica D.
δ_D^+	El exgrado mínimo de D.
δ_D^-	El ingrado mínimo de D.
$N^+(u)$	La exvecindad del vértice u.
$N^-(u)$	La invecindad del vértice u.
$P(D)$	Número de damas de la digráfica D.
$p(D)$	Número de damas óptimo de la digráfica D.
$\mathrm{Reach}(Q)$	El alcance de la distribución Q.
$\mathrm{Reach}_{\mathrm{a}}(Q)$	El alcance global de la multidistribución Q.
$wt_v(Q)$	El peso de la distribución Q respecto al vértice v.

Digráficas y familias de digráficas

C_n	El ciclo dirigido de orden n.
$C_n(S)$	La digráfica circulante de orden n respecto al conjunto S.
$D[X]$	La subdigráfica inducida de D por el subconjunto de vértices X.
P_n	La trayectoria dirigida de longitud n.
$\mathcal{T}_P(n,k)$	La familia de torneos de orden n y número de damas k.

Relaciones y operaciones entre digráficas

$H \subseteq D$	H subdigráfica de D.
$D \cong_{\Phi} H$	Isomorfismo de las digráficas D y H bajo Φ.
$D^{\star}$	La digráfica de condensación de D.
$D \Box D'$	El producto cuadro entre dos digráficas D, D'.
$D[H_1, H_2, \ldots, H_n]$	La composición de D con $H_1, H_2, \ldots, H_n$.