



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS
ÓPTICA MATEMÁTICA

CAMPOS POLICROMÁTICOS EN ESPACIO FASE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
CARLOS JARED FIGUEROA CERVANTES

DR. KURT BERNARDO WOLF BOGNER
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

DR. NATIG M. ATAKISHIYEV
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

DR. ALEJANDRO RAMÍREZ SOLÍS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

MÉXICO, D. F. ABRIL 2013.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sinodales:

Dra. Eugenia O'Reilly Regueiro

Dr. Hernán Larralde Ridaura

Dr. Natig M. Atakishiyev

Dr. Octavio Héctor Castaños Garza

Dr. Kurt Bernardo Wolf Bogner

A mis padres.

Un agradecimiento a mi tutor principal,
mi familia, CONACyT y al proyecto PAPIIT
‘‘Óptica Matemática’’ por sustentar
económicamente este trabajo.

Resumen

Describimos campos de ondas policromáticos y sus imágenes a color en una pantalla a partir de conocer dos de sus perfiles con fase sobre una pantalla y sobre el eje óptico. Usamos el formalismo de óptica paraxial con una función de distribución de Wigner en términos de posición, momento y longitud de onda, basada en el grupo de Heisenberg - Weyl. En el límite monocromático se regresa a la función de Wigner sobre el espacio fase ordinario.

Presentamos también un retrato en espacio (meta) fase de pulsos policromáticos ultra-cortos.

Abstract

Polychromatic paraxial wavefields and their color images on a screen are presented here, by obtaining a Wigner distribution function in terms of position, momentum and wavelength. This form of the Wigner function is based on the Heisenberg - Weyl group. In the monochromatic limit, the Wigner function with ordinary phase space variables is recovered. There is also presented the (meta) phase space picture of polychromatic ultra short pulses.

Índice general

1	Intro. Gpo. Euclideo y Mod. Paraxial	15
1.1	Contracción desde el grupo Euclideo	16
1.2	Régimen paraxial	17
2	La función de Wigner tradicional	21
2.1	Contexto y definición	21
2.2	Propiedades básicas	24
3	El grupo HW	27
3.1	Representaciones del álgebra hw y el grupo HW	28
3.2	Acción sobre funciones en \mathbb{R}^3	29
3.3	Medida de Haar	31
3.4	Anillo de Heisenberg - Weyl	31
4	Función de Wigner sobre HW	33
4.1	Definición y desarrollo	33
4.2	Campos de ondas en HW	34
4.3	Función de Wigner policromática	36
4.3.1	Haces Gaussianos policromáticos	38
4.4	Pulsos policromáticos ultra-cortos.	42
4.4.1	Anchos de banda	42
4.4.2	Pulsos Gaussianos	43
4.4.3	Pulsos ultra-cortos	45
4.4.4	Pulsos policromáticos ultra-cortos en espacio fase	47

5	Análisis ondulatorio inverso	49
5.1	Funciones policromáticas en pantalla	50
5.2	Funciones policromáticas de momento	52
5.3	Una solución al problema ondulatorio inverso	53
6	Conclusión	55
	Apéndice A Productos de matrices exponenciadas	57

Prefacio

La función de Wigner [1] vincula las funciones de onda de la ecuación de Schrödinger con una distribución de cuasi-probabilidad¹ en espacio fase.

Los usos de la función de Wigner [2] se han extendido a otras áreas como óptica geométrica [3], [4], óptica paraxial [5], análisis de señales [6], entre otras [7].

El objetivo de este trabajo es llegar a la forma de la función de Wigner sobre el grupo de Heisenberg - Weyl como una generalización de la función de Wigner tradicional. Dicha generalización provee herramientas para trabajar con luz policromática en el régimen paraxial de la óptica.

Se aborda en el primer capítulo una introducción al grupo Euclideo, con el objetivo de comprender con facilidad el régimen paraxial en óptica y la contracción [8, 9] de los generadores del grupo Euclideo a los del grupo de Heisenberg - Weyl. En el segundo capítulo se introducen conceptos y propiedades generales de la función de Wigner tradicional.

Para trabajar sobre el grupo de Heisenberg - Weyl se introduce detalladamente el álgebra y las funciones sobre dicho grupo, proponiendo ahí un operador *formal* desde el cual se desarrolla la función de Wigner sobre el grupo.

Se presenta la forma explícita de la función de Wigner sobre el grupo de Heisenberg - Weyl, que en el caso monocromático se reduce a la función de Wigner tradicional.

Por último se menciona una solución al análisis ondulatorio inverso para el caso particular de óptica paraxial policromática.

¹Se llama distribución de *cuasi-probabilidad* debido a que en muchos casos, la distribución presenta regiones con valores negativos, por lo que no puede ser interpretada totalmente como una distribución de probabilidad.

Capítulo 1

Introducción al grupo Euclideo y modelo paraxial

En este capítulo veremos los generadores del álgebra Euclidea $\text{iso}(2)$, la contracción a los generadores del álgebra de Heisenberg - Weyl (hw) y una introducción al régimen paraxial de la óptica¹.

En un medio homogéneo en 3 dimensiones, el modelo de óptica geométrica [4] representa los rayos de luz como líneas rectas orientadas que pueden ser obtenidas por rotaciones y traslaciones de un rayo estándar sobre el eje z positivo.

Comenzamos con el grupo Euclideo $ISO(2)$, que representa matemáticamente medios isotrópicos y homogéneos [3] y contiene los fundamentos de la óptica paraxial, para después introducir con facilidad el grupo de Heisenberg - Weyl en el capítulo 3, que será imprescindible en el desarrollo posterior del trabajo.

¹Sabemos que el álgebra Euclidea $\text{iso}(2)$ puede ser exponenciada al *grupo Euclideo* [3], [10] y éste puede ser contraído al grupo de Heisenberg - Weyl al considerar las aproximaciones para ángulos pequeños $\sin \theta \simeq \theta$.

1.1 Del espacio homogéneo al espacio que alberga la Mecánica Cuántica

El grupo *Euclidean* sobre funciones de dos coordenadas del plano $f(u, v)$ consiste en traslaciones en dos direcciones y rotación

$$\begin{aligned} e^{ibU^{\text{iso}}} : f(u, v) &\mapsto f(u, v + b) \stackrel{b \rightarrow 0}{\simeq} f(u, v) + b \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}, \\ e^{iaV^{\text{iso}}} : f(u, v) &\mapsto f(u + a, v) \stackrel{a \rightarrow 0}{\simeq} f(u, v) + a \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}, \\ e^{i\theta R^{\text{iso}}} : f(u, v) &\mapsto f(u \cos \theta + v \sin \theta, -v \sin \theta + u \cos \theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\simeq} f(u, v) + \delta\theta \left(v \frac{\partial f}{\partial u} - u \frac{\partial f}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Veamos la forma de los operadores $U^{\text{iso}}, V^{\text{iso}}, R^{\text{iso}}$

$$\begin{aligned} e^{ibU^{\text{iso}}} &\stackrel{b \rightarrow 0}{\simeq} 1 + ibU^{\text{iso}}, \quad \implies \quad U^{\text{iso}} = -i \frac{\partial}{\partial v}, \\ e^{iaV^{\text{iso}}} &\stackrel{a \rightarrow 0}{\simeq} 1 + iaV^{\text{iso}}, \quad \implies \quad V^{\text{iso}} = -i \frac{\partial}{\partial u}, \\ e^{i\theta R^{\text{iso}}} &\stackrel{\theta \rightarrow 0}{\simeq} 1 + i\theta \left(v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \implies \quad R^{\text{iso}} = -i \left(v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

El operador de Casimir es el invariante (que conmuta con U, V, R)

$$C := (U^{\text{iso}})^2 + (V^{\text{iso}})^2 = \tau^2 1 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right), \quad (1.1)$$

por lo tanto, espacios de soluciones de la ecuación de Helmholtz de un número de onda (color) fijo τ son espacios invariantes bajo el grupo euclidean.

Las relaciones de conmutación que cumplen los generadores del álgebra $\text{iso}(2)$ son,

$$[U^{\text{iso}}, R^{\text{iso}}] = -iV^{\text{iso}}, \quad [U^{\text{iso}}, V^{\text{iso}}] = 0, \quad [R^{\text{iso}}, V^{\text{iso}}] = -iU^{\text{iso}}, \quad (1.2)$$

contraemos² mediante una transformación lineal (no singular para $\rho < \infty$)

$$Q_\rho^{\text{hw}} := R^{\text{iso}}/\rho, \quad P_\rho^{\text{hw}} := U^{\text{iso}}, \quad H_\rho^{\text{hw}} := V^{\text{iso}}/\rho, \quad (1.3)$$

²Para conocer detalles sobre contracciones, ver [11].

dejamos que $\rho \rightarrow \infty$ y entonces, las relaciones de conmutación que cumplen los generadores del álgebra de Heisenberg - Weyl $(Q_\rho^{\text{hw}}, P_\rho^{\text{hw}}, H_\rho^{\text{hw}})$ son

$$\begin{aligned} [H_\rho^{\text{hw}}, Q_\rho^{\text{hw}}] &= [V^{\text{iso}}, R^{\text{iso}}]/\rho^2 = iU^{\text{iso}}/\rho^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0, \\ [H_\rho^{\text{hw}}, P_\rho^{\text{hw}}] &= 0, \\ [Q_\rho^{\text{hw}}, P_\rho^{\text{hw}}] &= [R^{\text{iso}}, U^{\text{iso}}]/\rho = iV^{\text{iso}}/\rho = iH_\rho^{\text{hw}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

La contracción [11] de los generadores nos permite observar que los desplazamientos en direcciones ortogonales U^{iso} y V^{iso} tienden a cero al convertirse en los generadores del grupo de Heisenberg - Weyl.

Definimos $Q := Q_\infty^{\text{hw}}$, $P := P_\infty^{\text{hw}}$ y $H := H_\infty^{\text{hw}}$, para escribir las relaciones de conmutación que definen el álgebra de Heisenberg - Weyl,

$$[Q, P] = iH, \quad [H, Q] = 0, \quad [H, P] = 0. \quad (1.5)$$

Notamos que el centro³ del álgebra es en este caso H , es decir, H conmuta con Q y P . En general, el centro del álgebra puede ser representado por 1 multiplicado por un *índice de representación* $\eta \neq 0$ del álgebra de Heisenberg - Weyl, es decir $H = \eta 1$.³ En óptica paraxial se toma $\eta = \lambda/2\pi =: \lambda$ (longitud de onda reducida), mientras que en mecánica cuántica se toma $\eta = \hbar = h/2\pi$.

1.2 Régimen paraxial

En esta sección introduciremos el régimen de la Óptica en el que trabajaremos, donde asumimos que el lector tiene conocimientos básicos [12] de las coordenadas generalizadas de posición q y de momento p , que se utilizan para describir la configuración de un sistema⁴ y son fundamentales en este trabajo al tomar haces de luz que atraviesan una pantalla en un punto y a un ángulo determinados, como veremos más adelante. Dichas coordenadas se emplean en el formalismo del espacio fase.

³Se puede encontrar información sobre la definición de *centralizador*, *centro* y sus representaciones en el capítulo 2 del libro [10].

⁴De acuerdo al sistema de coordenadas utilizado, las coordenadas generalizadas pueden tener unidades distintas y el conjunto de coordenadas generalizadas de un sistema es grande pero finito, cumpliendo que sean independientes entre sí.

En el régimen paraxial de la Óptica, los rayos de luz en 3 dimensiones son caracterizados por sus coordenadas en espacio fase

$$q_x, q_y, p_x, p_y, \tag{1.6}$$

que se refieren a un sistema cartesiano (x, y) sobre una pantalla, donde el eje z es ortogonal al plano xy de la pantalla.

Las coordenadas de posición $\vec{q} = (q_x, q_y) \in \mathbb{R}^2$ indican la posición donde el rayo de luz atraviesa la pantalla, mientras que las coordenadas de momento $\vec{p} = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$, para una pequeña vecindad $|\vec{p}| \ll 1$, son los ángulos del eje óptico al rayo, multiplicadas por el índice de refracción del medio. Fuera de la aproximación a esta vecindad⁵ del vector momento, la interpretación óptica se vuelve inválida; [12, 13, 14] para utilizar la transformada de Fourier [24] y el espacio fase, para mapeos lineales en óptica, se toma $p \in \mathbb{R}$.

Lo anterior es el modelo paraxial de óptica geométrica y ondulatoria. Para dejar claro el modelo, presentamos el siguiente ejemplo en $D = 2$ dimensiones (ejes x, z):

Consideremos tres ondas de frecuencias y momentos distintos

$$w_1 = \sin(3q_x - \pi z), \tag{1.7}$$

$$w_1 = \sin(2q_x), \tag{1.8}$$

$$w_1 = \sin(5q_x + \frac{\pi}{3}z), \tag{1.9}$$

la superposición de éstas forma el campo de ondas mostrado en la figura 1.1, donde las líneas roja y verde son la señal que observamos en la pantalla (eje x) y sobre el eje óptico (eje z), respectivamente.

El objetivo en general es descifrar las funciones que producen el campo de ondas, a partir de conocer solamente los perfiles observados en pantalla. Cada perfil se ilustra con las líneas de colores verde y rojo que se muestran en el lado derecho de la figura 1.1.

Una descripción profunda del régimen paraxial en sistemas ópticos puede encontrarse en [12].

En el siguiente capítulo cambiaremos drásticamente el tema ya que es necesario conocer la función de Wigner antes de buscar su forma en el grupo de Heisenberg - Weyl.

⁵La aproximación $p = n \sin \theta \approx n \theta$ es válida para ángulos pequeños.

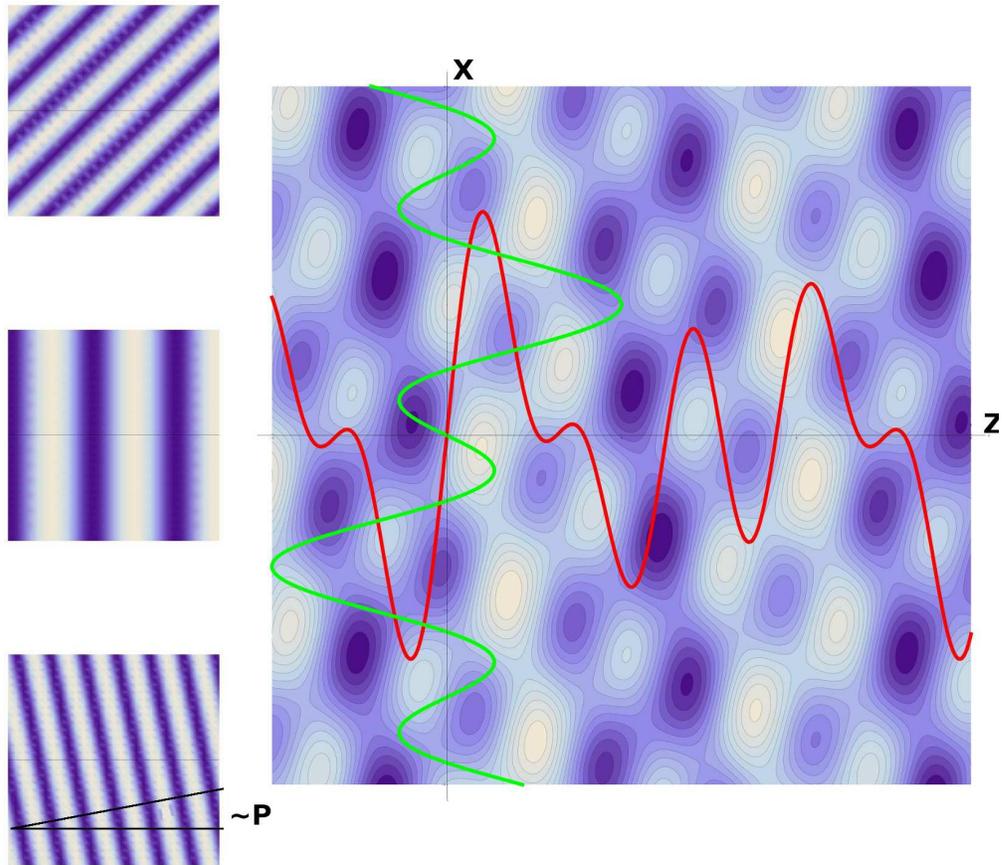


Figura 1.1: A la izquierda tenemos las ondas (1.7),(1.8) y (1.9), y a la derecha el campo de ondas resultante, con las funciones que se observan en las pantallas correspondientes a los planos xy y zy

Capítulo 2

La función de Wigner tradicional

En este capítulo veremos la función de Wigner como se conoce tradicionalmente, mencionando un poco acerca del contexto en que se desarrolló [1] y explorando algunas de sus propiedades. También mostraremos las gráficas de las transformadas de Wigner de algunas funciones para ilustrar propiedades. La función de distribución de Wigner se utiliza ampliamente en la mecánica cuántica, en la óptica, mecánica estadística, análisis de señales y otras áreas de la ciencia aplicada. Debido a esto, su coeficiente de normalización y el lugar que ocupa la constante de Planck pueden ser elegidas de acuerdo a las necesidades del área en que se trabaja, más adelante veremos cómo en este caso será conveniente tomar dicha constante como una variable real relacionada con la longitud de onda.

2.1 Contexto y definición

Dadas dos funciones de onda f y g , su función de Wigner mutua está definida como

$$W(f, g|q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} dx f(q - x/2)^* e^{-ixp/\hbar} g(q + x/2). \quad (2.1)$$

Esta función fue introducida por *E. P. Wigner*[1] para expresar el estado de un sistema de muchas partículas en términos de las coordenadas generalizadas (q, p) y una de sus variadas utilidades es relacionar los estados de

algún sistema con la distribución correspondiente en el espacio fase.

A partir de una o dos señales cuyo argumento es el mismo, la función de Wigner de dicha función (o funciones) es bidimensional, en este caso sobre las coordenadas $(q, p) \in \mathbb{R}^2$, como se puede ver en las figuras 2.1 y 2.4. En adelante tomaremos $\hbar \mapsto \lambda/2\pi = \lambda$.

Para ilustrar parte del comportamiento de la función de Wigner con mayor detalle, veremos algunos ejemplos de funciones transformadas, tomando $\lambda = 1$.

Para generar imágenes de transformadas de Wigner, tomamos (2.1) como la transformada de Fourier de un producto de funciones

$$W_\lambda(f, g|q, p) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx \exp[-ixp/\lambda] f(q - x/2)^* g(q + x/2), \quad (2.2)$$

de esta forma pudimos crear un algoritmo basado en [15] para realizar el cálculo numérico.

La siguiente función representa un estado coherente de oscilador armónico, con una fase. En este caso ambas funciones de entrada son las mismas,

$$f(q) = g(q) = \exp(2iq) \exp[-(q - 2)^2], \quad (2.3)$$

en la figura 2.1 se muestran las partes de la función de entrada (2.3): en rojo la parte *real*, la línea punteada de color verde corresponde a la parte *imaginaria* y en color azul está graficado el *valor absoluto*.

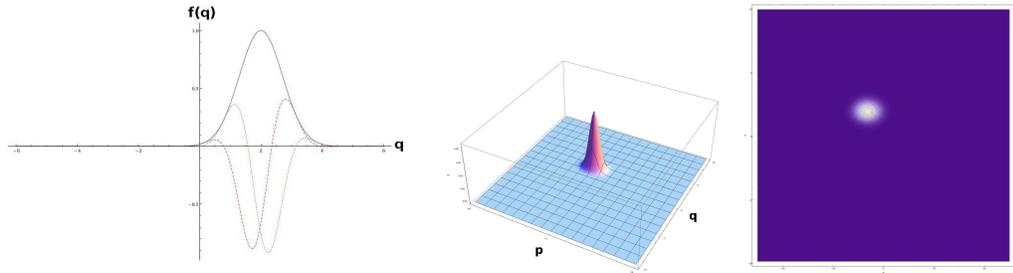


Figura 2.1: Estado coherente de oscilador armónico y su función de Wigner.

Para mostrar con mayor detalle, se muestra en el extremo derecho la gráfica de densidad de la función transformada, que consiste en una gráfica bidimensional de la gráfica anterior, vista desde arriba, donde la altura se representa mediante colores.

Después, en la figura 2.2 observamos una superposición de estados coherentes idénticos a la función (2.3) sin fase, dados por la función

$$f(q) = g(q) = \exp(-[q-\frac{5}{2}]^2) + \exp(-[q+\frac{5}{2}]^2), \quad (2.4)$$

Nuevamente, con la gráfica de densidad del lado derecho.

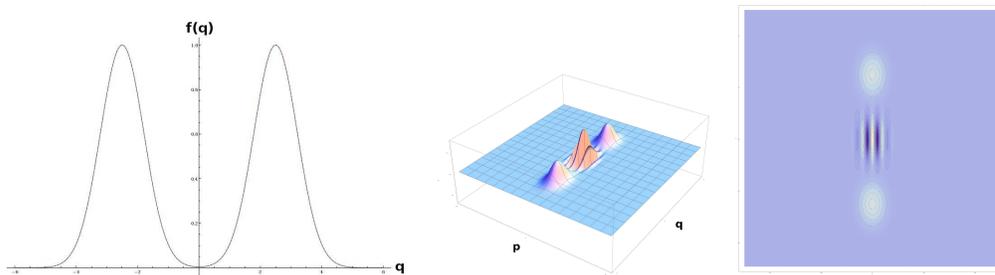


Figura 2.2: Suma de dos estados coherentes de oscilador armónico y su función mutua de Wigner, mostrando *sonrisa* (interferencia) entre ellos.

A continuación un ejemplo interesante de la función de Wigner de una función rectángulo

$$f(q) = g(q) = \text{rect}(q/8), \quad (2.5)$$

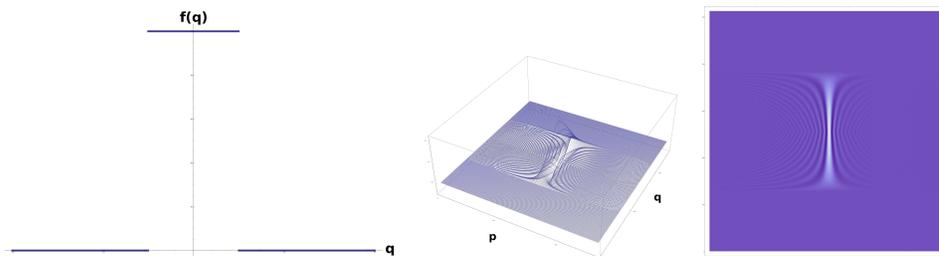


Figura 2.3: Función rectángulo y su transformada de Wigner usando una malla cuadrada de 513×513 puntos.

2.2 Propiedades básicas

1. *Sonrisa.*

Tomando la función de Wigner de una suma de funciones $f + g$,

$$W(f + g|q, p) = W(f|q, p) + W(g|q, p) + 2\text{Re} [W(f, g|q, p)], \quad (2.6)$$

identificamos que el último término corresponde a una región oscilante que aparece entre las dos funciones. Un ejemplo se muestra en la figura 2.2, para el caso en que f y g son Gaussianas. Esta región oscilante se conoce como *sonrisa*.

2. *Marginales.*

Marginal en q .

La función de Wigner está definida en el formalismo del espacio fase con las variables conocidas de posición (coordenada generalizada) q y momento p . Para obtener la marginal en posición q , integramos con respecto al momento p la función de Wigner (2.2),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dp \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx f(q - \frac{1}{2}x)^* e^{\frac{-ipx}{\lambda}} g(q - \frac{1}{2}x) \\ = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx \left[\int_{\mathbb{R}} dp e^{\frac{-ipx}{\lambda}} \right] f(q - \frac{1}{2}x)^* g(q - \frac{1}{2}x) \\ = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx \lambda \delta(x) f(q - \frac{1}{2}x)^* g(q - \frac{1}{2}x) \\ = f(q)^* g(q). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Marginal en p .

Ahora, expresando la función de Wigner en términos de las transformadas de Fourier de 2 funciones \tilde{f} y \tilde{g} , podemos escribir (2.2) como sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} dx \left[\int_{\mathbb{R}} dp' \tilde{f}(p')^* \exp\left(\frac{-i(q - \frac{1}{2}x)p'}{\lambda}\right) \right] \\ \times \left[\int_{\mathbb{R}} dp'' \tilde{g}(p'') \exp\left(\frac{i(q + \frac{1}{2}x)p''}{\lambda}\right) \right] e^{\frac{-ipx}{\lambda}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

integrando con respecto a q obtenemos la marginal en el momento p

$$\int_{\mathbb{R}} dq W(\tilde{f}, \tilde{g}|q, p) = \tilde{f}(p)^* \tilde{g}(p). \quad (2.9)$$

3. *Identidad de Moyal.*

La identidad mencionada nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^2} dq dp W(f_1, g_1|q, p) W(f_2, g_2|q, p) = \lambda(f_1, g_2)(f_2, g_1), \quad (2.10)$$

donde

$$(f_1, g_2)(f_2, g_1) = \int_{\mathbb{R}} dr f_1(r)^* g_2(r) \int_{\mathbb{R}} ds f_2(s)^* g_1(s),$$

son productos internos de las funciones f_1, g_2 y f_2, g_1 respectivamente y la identidad (2.10) se prueba usando las técnicas de integración mencionadas para las marginales y haciendo algunos cambios de variables.

4. *Positividad.*

Ahora, si consideramos estados ortogonales f_o y g_o tales que $(f_o, g_o) = 0$, podemos escribir la identidad de Moyal como:

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} dq dp W(f_1, g_1|q, p) W(f_2, g_2|q, p) = (f_1, g_2)(f_2, g_1),$$

en caso de que $f_2=f_1=f_o$ y $g_2=g_1=g_o$, el resultado de la ecuación anterior sería $|(f_o, g_o)|^2 = 0$, lo que prueba que $W(f_o, g_o|q, p)$ no puede ser positiva en todos lados. Solamente las gaussianas tienen funciones de Wigner mayores que cero, o bien aplicando una gaussiana del ancho apropiado, se logra que la función de Wigner sea mayor o igual a cero. Debido a la presencia de regiones negativas en la función de Wigner se le conoce como distribución de cuasi-probabilidad, ya que una distribución de probabilidad es estrictamente positiva.

Una descripción más detallada de las propiedades de la función de Wigner puede ser encontrada en el capítulo 6 de [5].

Para continuar con el objetivo de generalizar la función de Wigner, será necesario introducirnos en el área de la *teoría de grupos*, donde exploraremos el grupo de Heisenberg - Weyl (donde está fundamentada la mecánica cuántica),

para dentro de él definir funciones sobre el grupo y desarrollar los operadores necesarios para llegar a la forma de la función de Wigner en el grupo mencionado, como una generalización de la función de Wigner tradicional.

En el siguiente capítulo hablaremos de manera introductoria del grupo de Heisenberg - Weyl como parte del camino para plantear dicha generalización de la función de Wigner.

Capítulo 3

El grupo HW de Heisenberg y Weyl

A continuación veremos una representación [16] de los generadores del álgebra hw en forma de matrices nilpotentes para después exponenciar los elementos del álgebra y obtener la regla de producto en el grupo y los elementos del grupo HW. Veremos cómo se actúa por la derecha o por la izquierda sobre funciones del grupo y la forma de los generadores al tomar cada una de las acciones.

Mencionaremos brevemente la medida invariante que se toma en el grupo para las integrales que vendrán posteriormente y definiremos formalmente el operador de Wigner en el anillo de Heisenberg - Weyl como antesala de la generalización de la función tradicional de Wigner comenzando por el grupo HW, cuyo desarrollo se verá a detalle en el capítulo 4.

3.1 Representaciones del álgebra \mathfrak{hw} y el grupo HW

Una de las realizaciones¹ del álgebra son matrices de 3×3 , donde los generadores tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

verificando que cumplen con las relaciones de conmutación (1.5):

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}, \mathbf{P}] &= \mathbf{QP} - \mathbf{PQ} = i\mathbf{H}, \\ [\mathbf{H}, \mathbf{Q}] &= [\mathbf{H}, \mathbf{P}] = 0. \end{aligned}$$

Los elementos del álgebra de Heisenberg - Weyl (\mathfrak{hw}) son combinaciones lineales $\mathbf{w}(x, y, z) = x\mathbf{Q} + y\mathbf{P} + z\mathbf{H} \in \mathfrak{hw}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Un elemento genérico de \mathfrak{hw} en esta representación es de la siguiente forma

$$\mathbf{w}(x, y, z) = x\mathbf{Q} + y\mathbf{P} + z\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & x + iy & x + iy \\ x - iy & 2z & 2z \\ -(x - iy) & -2z & -2z \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Exponenciando (3.2), obtenemos una realización matricial del grupo HW

$$\mathbf{W}(x, y, z) = \exp(-i\mathbf{w}(x, y, z)) = 1 - i\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^2, \quad (3.3)$$

donde no es necesario considerar los términos de orden mayor debido a que esta representación es nilpotente: fácilmente se puede verificar que $\mathbf{w}^n = 0$ para $n \geq 3$. La expansión (3.3) nos lleva a la siguiente forma de los elementos del grupo en esta representación

$$\mathbf{W}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -ix+y & -ix+y \\ -(ix+y) & 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2iz & -\frac{1}{2}(x^2+y^2) - 2iz \\ ix+y & \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 2iz & 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 2iz \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

que constituye la parametrización *polar* del grupo. Haciendo la composición de dos elementos genéricos del grupo, siguiendo (3.4), obtenemos la siguiente

¹Para detalles sobre representaciones, ver [16].

regla de composición de elementos en el grupo

$$\mathbf{W}(x, y, z) \mathbf{W}(x', y', z') = \mathbf{W}\left(x+x', y+y', z+z' - \frac{1}{2}[yx' - xy']\right). \quad (3.5)$$

Llamemos HW al grupo de Heisenberg - Weyl y ω a los elementos del grupo ($\omega \in \text{HW}$). Cada elemento ω es de la forma:

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) &= \exp [i(xQ + yP + zH)] \\ &= e^{ixQ} e^{iyP} e^{i(z + \frac{1}{2}xy)H} \\ &= e^{iyP} e^{ixQ} e^{i(z - \frac{1}{2}xy)H}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$.

En el apéndice A se encuentra una descripción detallada de (3.6). El resultado (3.5) puede verificarse rápidamente usando Mathematica[®].

En este caso, el elemento identidad es $\omega_0 = \omega(0, 0, 0)$, y el elemento inverso de $\omega(x, y, z)$ es $\omega^{-1}(x, y, z) = \omega(-x, -y, -z)$ y en general $\omega(x, y, z)^\nu = \omega(\nu x, \nu y, \nu z)$, define potencias fraccionales.

3.2 Acción del grupo sobre funciones en \mathbb{R}^3

Puede haber acción sobre funciones del grupo por la izquierda (es decir, el elemento de grupo actúa por la izquierda)

$$\omega' :_I f(\omega) \mapsto f(\omega'^{-1} \omega), \quad (3.7)$$

o acción por la derecha, $\omega' :_D f(\omega) \mapsto f(\omega \omega')$,² que además se componen ordenadamente, es decir

$$\omega'' :_I \omega' :_I f(\omega) = (\omega'' \omega') :_I f(\omega) = ((\omega'' \omega')^{-1} \omega).$$

Tomando acción por la izquierda, un elemento de grupo actuando sobre una función

$$\begin{aligned} \omega(x', y', z') :_I f(x, y, z) &= \exp [i(x'Q^I + y'P^I + z'H^I)] f(x, y, z) \\ &= f(\omega'^{-1} \omega). \end{aligned} \quad (3.8)$$

²Las funciones sobre el grupo $f(\omega)$ son elementos del grupo, que a su vez están en función de las variables reales $\{x, y, z\}$.

Si tomamos elementos muy cercanos a la identidad, es decir $\{x', y', z'\} \rightarrow \{\delta x', \delta y', \delta z'\}$, hacemos el producto de elementos de grupo dentro de la función f siguiendo (3.8):

$$\omega(\delta x', \delta y', \delta z') : f(x, y, z) = f\left(x - \delta x', y - \delta y', z - \delta z' - \frac{1}{2}(\delta y' x - y \delta x')\right),$$

y haciendo un desarrollo en serie de Taylor hasta primer orden, tenemos

$$\begin{aligned} & f\left(x - \delta x', y - \delta y', z - \delta z' - \frac{1}{2}(\delta y' x - y \delta x')\right) \\ & \simeq f(x, y, z) - \delta x' \frac{\partial f}{\partial x} - \delta y' \frac{\partial f}{\partial y} - \delta z' \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2} \delta y' x \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2} y \delta x' \frac{\partial f}{\partial z} \\ & = \left[\mathbf{1} + (\delta x' (-\partial_x + \frac{1}{2} y \partial_z) + \delta y' (-\partial_y - \frac{1}{2} x \partial_z) + \delta z' (-\partial_z)) \right] f(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por otro lado, desarrollando en serie de Taylor la exponencial:

$$\begin{aligned} & \exp[i(\delta x' Q^I + \delta y' P^I + \delta z' H^I)] f(x, y, z) \\ & \simeq [\mathbf{1} + i(\delta x' Q^I + \delta y' P^I + \delta z' H^I) + \dots] f(x, y, z), \end{aligned} \quad (3.10)$$

y comparando término a término el resultado de las dos ecuaciones anteriores (3.9) y (3.10), notamos que

$$\begin{aligned} \delta x' (-\partial_x + \frac{1}{2} y \partial_z) &= i \delta x' Q^I \implies Q^I = i (\partial_x - \frac{1}{2} y \partial_z), \\ \delta y' (-\partial_y - \frac{1}{2} x \partial_z) &= i \delta y' P^I \implies P^I = i (\partial_y + \frac{1}{2} x \partial_z), \\ \delta z' (-\partial_z) &= i \delta z' H^I \implies H^I = i \partial_z, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $\partial_x f = \partial f / \partial x$.

Si seguimos el procedimiento desde (3.8) pero tomando acción por la *derecha*, obtenemos los operadores correspondientes, similares a (3.11)

$$\begin{aligned} Q^D &= -i (\partial_x + \frac{1}{2} y \partial_z), \\ P^D &= -i (\partial_y - \frac{1}{2} x \partial_z), \\ H^D &= -i \partial_z, \end{aligned} \quad (3.12)$$

y como es de esperarse, $\{Q^I, P^I, H^I\}$ y $\{Q^D, P^D, H^D\}$ cumplen con las relaciones de conmutación (1.5).

3.3 Medida de Haar

La medida de Haar determina un “volumen invariante” que posteriormente nos permite definir una integral para las funciones sobre el grupo. Buscamos un elemento diferencial $d\omega$ que se mantenga invariante bajo acción izquierda (o derecha) sobre el grupo. De la regla de composición de elementos del grupo (3.5) se muestra que

$$dx dy dz = d\omega = d(\omega'^{-1} \omega) = d(\omega \omega') = -d(\omega^{-1}), \quad (3.13)$$

es invariante y nos permite construir las integrales sobre el grupo

$$\int_{\text{HW}} d\omega f(\omega) = \int_{\text{HW}} d\omega f(\omega'^{-1} \omega) = \int_{\text{HW}} d\omega f(\omega \omega').$$

El espacio de Hilbert que estamos utilizando es $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$, con producto interno definido por

$$(f, g)_{\text{HW}} = \int_{\text{HW}} d\omega f(\omega)^* g(\omega). \quad (3.14)$$

Finalmente, tenemos que la relación al integrar sobre el grupo HW e integrar sobre \mathbb{R}^3 es

$$\int_{\text{HW}} d\omega f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz f(x, y, z). \quad (3.15)$$

Para mayor detalle, se puede consultar [17].

3.4 Anillo de Heisenberg - Weyl

Tomando acción (por ejemplo) por la derecha $\omega' :_D f(\omega) \mapsto f(\omega \omega')$, se está haciendo un *mapeo* que puede ser extendido linealmente a operadores integrales

$$\mathcal{A} = \int_{\text{HW}} d\omega A(\omega) \omega,$$

donde $A(\omega) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

Dichos operadores pertenecen a una estructura muy interesante llamada *Anillo de Heisenberg - Weyl*. [18]

Un anillo está formado por combinaciones lineales de elementos de algún grupo, donde la operación de producto sobre el grupo induce a una operación

de producto sobre elementos del anillo y el elemento identidad del grupo funciona como elemento unitario en el anillo, pero en nuestro caso, debido a que no se asegura la existencia de elementos inversos bajo el producto definido, la estructura no es un grupo, sino un *anillo*.

Para más detalles sobre anillos véase el capítulo 6 de [10].

Cada elemento del anillo está caracterizado por $A(\omega)$, que es su función sobre el grupo. Ahora consideraremos elementos de anillo $\mathcal{W}(q, p, l)$ cuya función sobre el grupo sea

$$W(\nu; \omega) = W(q, p, l; x, y, z) = \exp[-i(xq + yp + zl)], \quad (3.16)$$

donde $\nu = (q, p, l) \in \mathbb{R}^3$ son variables clásicas de posición, momento y número de onda respectivamente, además vemos que x y z tienen unidades de longitud inversa, mientras que y no tiene³.

El operador de Wigner, definido como el correspondiente a la función sobre el grupo (3.16), es

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(q, p, l) &= \int d\omega W(q, p, l; \omega) \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz \exp[i(x(Q-q) + y(P-p) + z(H-l))] \\ &= \delta(Q - q) \delta(P - p) \delta(H - l). \end{aligned} \quad (3.17)$$

notando que ponemos los generadores Q, P, H del grupo de Heisenberg - Weyl correspondientes con las variables q, p, l , y la última igualdad es para ilustrar que el operador formal de Wigner sería un producto de deltas si los operadores Q, P, H fueran números.

³Recordemos que en el régimen paraxial $p = n \sin(\theta)$, por lo que y es adimensional.

Capítulo 4

Función de Wigner sobre HW

En este capítulo definiremos la función de Wigner en el grupo HW, siguiendo [13], con ayuda del operador formal (3.17) visto en el capítulo anterior y desarrollaremos las integrales que surgen. Aprovecharemos la simetría de líneas invariantes ante desplazamientos en la coordenada y para tomar funciones sobre una coclase del grupo y poder extraer una integral. Haciendo algunos cambios de variable y simplificando las integrales obtendremos la forma de la función de Wigner policromática, que en el modelo paraxial es una función en 3 dimensiones (q, p, l) . Finalmente definiremos funciones policromáticas sobre la pantalla y daremos un ejemplo.

4.1 Definición y desarrollo

En este contexto, con el espacio de Hilbert $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ definimos la función de Wigner mutua de f y g en el grupo HW, en función de las variables $\nu = \{q, p, l\}$ como

$$\begin{aligned} W_{f,g}^{\text{HW}}(\nu) &= \iint_{\text{HW}} d\omega d\omega' f(\omega)^* W(\nu; \omega^{-1}\omega') g(\omega'), \\ &= \iint_{\text{HW}} d\omega d\omega' f(\omega'\omega^{-1/2})^* W(\nu, \omega) g(\omega'\omega^{1/2}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como se vió en (3.6), desarrollamos para obtener

$$\begin{aligned}
W_{f,g}^{\text{HW}}(\nu) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz \int_{\mathbb{R}^3} dx' dy' dz' \\
&\quad \times f\left(x - \frac{1}{2}x', y - \frac{1}{2}y', z - \frac{1}{2}\left[z' - \frac{1}{2}(yx' - xy')\right]\right)^* \\
&\quad \times \exp[-i(x'q + y'p + z'l)] \\
&\quad \times g\left(x + \frac{1}{2}x', y + \frac{1}{2}y', z + \frac{1}{2}\left[z' - \frac{1}{2}(yx' - xy')\right]\right), \quad (4.2)
\end{aligned}$$

donde el factor $1/(2\pi)^3$ viene de la condición de normalización de la función de Wigner (2.2).

Las propiedades de la transformada de Fourier permiten que los números reales (q, p, l) y los operadores (Q, P, H) tengan las mismas propiedades de transformación, ya que en ambos casos se trata de mapeos lineales del espacio (la transformada de Fourier es una transformación lineal).

4.2 Campos de ondas en HW

El grupo HW gesta un modelo de campo lineal con simetría HW_S cuando se cumplen las siguientes dos condiciones:

- Existe un campo estándar a partir del cual todos los campos de ondas pueden ser generados a través de una acción del grupo $f(\omega) = f(\omega_y^{-1}\omega)$, $f, \omega \in \text{HW}$ y combinaciones lineales; es decir, existe una simetría ante traslaciones en el eje y .
- El campo estándar es invariante $\omega_S : f_0 = f_0$, bajo elementos $\omega_S \in \text{HW}_S \subset \text{HW}$.

El campo estándar elegido para el modelo óptico de ondas paraxiales es un pulso plano a lo largo del eje z , cuya simetría son las traslaciones en el plano x de la pantalla, $f(\omega) = f(\omega_y^{-1}\omega)$ para $\omega_y = \omega(0, y, 0) \in \text{HW}_x \subset \text{HW}$. Notemos que debido a que los elementos ω_y mantienen invariantes las funciones $f(\omega)$, es decir $f(\omega_y\omega) = f(\omega)$, entonces los campos de ondas paraxiales $f(\omega)$ son constantes sobre las clases de equivalencia de elementos de grupo

$\text{HW}_x \omega$, llamadas *coclases (izquierdas)*.

En resumen, los campos de ondas paraxiales son funciones en el espacio de coclases izquierdas $\text{HW}_x \backslash \text{HW}$.

Para encontrar la transformación de este espacio de coclases bajo HW podemos escribir $\omega(x, y, z) = \omega(x, 0, z - \frac{1}{2}xy) \omega(0, y, 0)$, entonces

$$f(\omega) = f(x, 0, \tau) = f^c(x, \tau), \quad (4.3)$$

donde $\tau = z - \frac{1}{2}xy$.

Buscamos que dos elementos de HW cuyo producto por la derecha es

$$\omega'(x', y', z') :_D \omega = \omega(x + x', y + y', z + z' - \frac{1}{2}[yx' - xy']), \quad (4.4)$$

sea de la forma

$$\bar{\omega}(0, \bar{y}, 0) \bar{\omega}(\bar{x}, 0, \bar{z} - \frac{1}{2}\bar{x}\bar{y}). \quad (4.5)$$

De las dos relaciones anteriores obtenemos las siguientes:

$$\bar{x} = x + x', \quad (4.6)$$

$$\bar{y} = y + y', \quad (4.7)$$

$$\bar{z} - \frac{1}{2}\bar{x}\bar{y} = z + z' + \frac{1}{2}yx' - \frac{1}{2}xy', \quad (4.8)$$

de las tres relaciones anteriores, sustituimos la primera y segunda en la tercera para obtener

$$\bar{z} = z + z' - \frac{1}{2}xy - xy' - \frac{1}{2}x'y' = \tau + z' - xy' - \frac{1}{2}x'y',$$

lo que nos lleva a la acción de grupo

$$\omega' :_D f^c(x, \tau) = f^c(x + x', \tau + z' - xy' - \frac{1}{2}x'y'), \quad (4.9)$$

para funciones en \mathbb{R}^2 en coordenadas cartesianas (x, τ) , con el espacio de Hilbert $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ y medida $dx d\tau$ heredada de la medida de Haar invariante vista anteriormente.

Las raíces cuadradas de los elementos del grupo en parametrización polar son bien conocidas y bajo esta acción tenemos

$$\omega'^{1/2} :_D f^c(x, \tau) = f^c(x + \frac{1}{2}x', \tau + \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}xy' - \frac{1}{8}x'y').$$

4.3 Función de Wigner policromática

Utilizando esta acción y bajo funciones en coclases izquierdas, podemos reescribir la ecuación (4.2) como sigue

$$\begin{aligned}
W_{f,g}^{\text{HW}}(\nu) &= \frac{\text{Vol HW}_x}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^5} dx dz dx' dy' dz' \\
&\quad \times f^c \left(x - \frac{1}{2}x', \tau - \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}x y' - \frac{1}{8}x' y' \right)^* \\
&\quad \times \exp [-i(x'q + y'p + z'l)] \\
&\quad \times g^c \left(x + \frac{1}{2}x', \tau + \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}x y' - \frac{1}{8}x' y' \right), \quad (4.10)
\end{aligned}$$

donde extraemos un factor de integración vacío $\int_{\mathbb{R}} dy = \text{Vol HW}_x$. Ahora, llamamos $\zeta = \tau - \frac{1}{8}x' y'$, introducimos un sumando $xy'l - xy'l$ en el argumento de la exponencial, que no altera la expresión

$$\begin{aligned}
W_{f,g}^{\text{HW}}(\nu) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^5} dx d\zeta dx' dy' dz' \\
&\quad \times f^c \left(x - \frac{1}{2}x', \zeta - \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}x y' \right)^* \\
&\quad \times \exp [-i(x'q + y'p + z'l + xy'l - xy'l)] \\
&\quad \times g^c \left(x + \frac{1}{2}x', \zeta + \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}x y' \right), \quad (4.11)
\end{aligned}$$

y separamos la integral del primer factor

$$\begin{aligned}
W_{f,g}^{\text{HW}}(\nu) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}} dy' \exp [-i(p + xl)y'] \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^4} dx d\zeta dx' dz' \\
&\quad \times f^c \left(x - \frac{1}{2}x', \zeta - \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}x y' \right)^* \\
&\quad \times \exp [-i(x'q + z'l - xy'l)] \\
&\quad \times g^c \left(x + \frac{1}{2}x', \zeta + \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}x y' \right), \quad (4.12)
\end{aligned}$$

donde identificamos la primera integral como $2\pi\delta(p + xl)$. Integrando con respecto a x , podemos reemplazar $x \rightarrow -p/l$ para obtener

$$\begin{aligned}
W_{f,g}^{\text{HW}}(\nu) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\zeta dx' dz' \\
&\quad \times f^c \left(-p/l - \frac{1}{2}x', \zeta - \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}(p/l)y' \right)^* \\
&\quad \times \exp [-i(x'q + z'l - py')] \\
&\quad \times g^c \left(-p/l + \frac{1}{2}x', \zeta + \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}(p/l)y' \right). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Por último hacemos el cambio de variable $\tau' \rightarrow z' + py'/l$ para obtener la función de Wigner en el espacio de coclases $HW_x \backslash HW$

$$\begin{aligned} W_{f,g}^x(q, p, l) &:= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\zeta dx' d\tau' \\ &\quad \times f^c \left(-p/l - \frac{1}{2}x', \zeta - \frac{1}{2}\tau' \right)^* \\ &\quad \times \exp[-i(x'q + \tau'l)] \\ &\quad \times g^c \left(-p/l + \frac{1}{2}x', \zeta + \frac{1}{2}\tau' \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Un campo de ondas se dice que es *monocromático* si la dependencia en ζ es proporcional a una fase constante, en este caso tomamos el producto de una onda plana y una Gaussiana normalizada de cintura ϖ , por una función arbitraria de $x = -p/l$

$$\begin{aligned} f_{\lambda_f}^c(p, \zeta) &= \tilde{f}(p/l) \frac{1}{\sqrt{2\pi\varpi_f}} \exp[i\zeta\lambda_f] \exp[-\zeta^2/2\varpi_f], \\ g_{\lambda_g}^c(p, \zeta) &= \tilde{g}(p/l) \frac{1}{\sqrt{2\pi\varpi_g}} \exp[i\zeta\lambda_g] \exp[-\zeta^2/2\varpi_g]. \end{aligned}$$

Evaluamos $f_{\lambda_f}^c(p/l - \frac{1}{2}x', \zeta - \frac{1}{2}\tau')$ y $g_{\lambda_g}^c(p/l + \frac{1}{2}x', \zeta + \frac{1}{2}\tau')$ y hacemos los cambios de variable

$$\begin{aligned} \alpha &= \zeta - \frac{1}{2}\tau', & \zeta &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \\ \beta &= \zeta + \frac{1}{2}\tau', & \tau' &= \beta - \alpha, \end{aligned} \quad (4.15)$$

para obtener

$$\begin{aligned} f_{\lambda_f}^c(p/l - \frac{1}{2}x', \zeta - \frac{1}{2}\tau') &= \tilde{f}(p/l - \frac{1}{2}x') \frac{1}{\sqrt{2\pi\varpi_f}} \exp[i\alpha\lambda_f] \exp[-\alpha^2/2\varpi_f], \\ g_{\lambda_g}^c(p/l + \frac{1}{2}x', \zeta + \frac{1}{2}\tau') &= \tilde{g}(p/l + \frac{1}{2}x') \frac{1}{\sqrt{2\pi\varpi_g}} \exp[i\beta\lambda_g] \exp[-\beta^2/2\varpi_g], \end{aligned} \quad (4.16)$$

y las sustituimos en (4.14)

$$\begin{aligned} W_{\tilde{f},\tilde{g}}^x(q, p, l) &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{\varpi_f \varpi_g}} \int_{\mathbb{R}^3} d\alpha dx' d\beta \tilde{f}(p/l - \frac{1}{2}x')^* \tilde{g}(p/l + \frac{1}{2}x') \times \\ &\quad \times \exp[-i\alpha\lambda_f] \exp[-\alpha^2/2\varpi_f] \exp[-i(x'q + \beta l - \alpha l)] \times \\ &\quad \times \exp[i\beta\lambda_g] \exp[-\beta^2/2\varpi_g], \end{aligned} \quad (4.17)$$

agrupamos términos semejantes para obtener

$$\begin{aligned} W_{\tilde{f},\tilde{g}}^x(q,p,l) &= \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{\varpi_f \varpi_g}} \int_{\mathbb{R}^3} d\alpha dx' d\beta \tilde{f}(p/l - \frac{1}{2}x')^* \tilde{g}(p/l + \frac{1}{2}x') \times \\ &\quad \times \exp [i\alpha(l - \lambda_f) - \alpha^2/2\varpi_f] \exp [i\beta(\lambda_g - l) - \beta^2/2\varpi_g] \times \\ &\quad \times \exp [-ix'q], \end{aligned} \quad (4.18)$$

de donde identificamos una integral con respecto a α y otra con respecto a β . Integrando obtenemos

$$\begin{aligned} W_{\tilde{f},\tilde{g}}^x(q,p,l) &\propto \frac{1}{16\pi^2} \exp [-\frac{1}{2}(l - \lambda_f)^2 \varpi_f] \exp [-\frac{1}{2}(l - \lambda_g)^2 \varpi_g] \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} dx' \tilde{f}(p/l - \frac{1}{2}x')^* \exp [-ix'q] \tilde{g}(p/l + \frac{1}{2}x'), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde el factor integral corresponde a la transformada de Wigner tradicional y las exponenciales que aparecen como coeficientes tienden a 1 cuando $\lambda_f = \lambda_g = l$, además de que cuando las cinturas de las Gaussianas $\varpi_{f,g} \rightarrow \infty$, la expresión (4.19) se anula.

En resumen, redujimos la función de Wigner sobre el grupo HW a la función de Wigner sobre el espacio de coclases $HW_x \backslash HW$ del modelo policromático paraxial, la cual en el caso monocromático se reduce a la función de Wigner tradicional.

4.3.1 Haces Gaussianos policromáticos

Ahora proponemos haces policromáticos Gaussianos, tomando la función Gaussiana $\Gamma(u)$ con ancho complejo $w = w_1 + iw_2$ y centro $c = c_1 + ic_2$,

$$\Gamma_{w,c}(u) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{w} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{(u - c_1)^2}{2w} + ic_2(u - \frac{1}{2}c_1) \right), \quad (4.20)$$

donde la cintura de la Gaussiana es $w_1 > 0$, w_2 está relacionado con la frecuencia con que oscila la función, c_1 es el centro del pico de la señal y c_2 el centro del pico de la frecuencia. Está normalizada de manera que $\int du |\Gamma_{w,c}(u)|^2 = 1$.

Llamamos a un haz *Gauss-cromático* cuando su función en la pantalla tiene la forma factorizada $\propto f(x)\Gamma_{\alpha,\mu}(\lambda)$. Cuando la función $f(x)$ es también un haz Gaussiano, la llamamos *haz Gaussiano policromático*

$$\Gamma_{w,c;\alpha,\mu}^s(x,\lambda) = \Gamma_{w,c}(x) \Gamma_{\alpha,\mu}(\lambda). \quad (4.21)$$

En la figura 4.1, observamos la función de Wigner de un haz Gaussiano policromático con $w_2 = 0$.

Recordemos que la medida invariante en las coordenadas cartesianas $dx d\lambda$, (momento y color) es $dx d\lambda = \lambda^{-1} d\lambda dp = d \log \lambda dp$, por lo que la gráfica 4.1 está graficada en coordenadas $(q', p', l') = (q, p/l, l)$.

La gráfica mostrada en la figura 4.2 está en coordenadas tradicionales (q, p, l) de este espacio (meta) fase.

El color de las gráficas cambia conforme el valor de l , de manera que es azul para l 's pequeñas y va pasando por los colores del espectro visible en orden al crecer l .

Es importante mencionar que la forma de esta distribución en espacio (meta) fase obedece la conservación de volúmen, y tiene esta forma parecida a la de un trompo debido a que (en palabras fáciles) los elementos de volúmen de dicho espacio son más compactos para valores pequeños de l y viceversa.

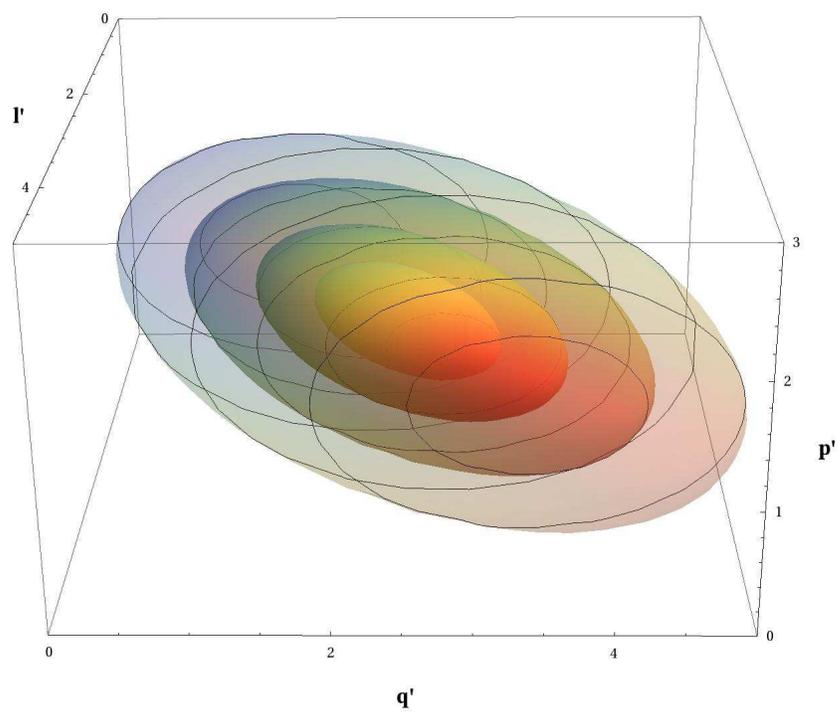


Figura 4.1: Función de Wigner policromática para haces Gaussianos policromáticos con $w = 2$ y centro en $c = 2 + 2i$. Contornos de nivel en $l = \{1, 2, 3, 4\}$.

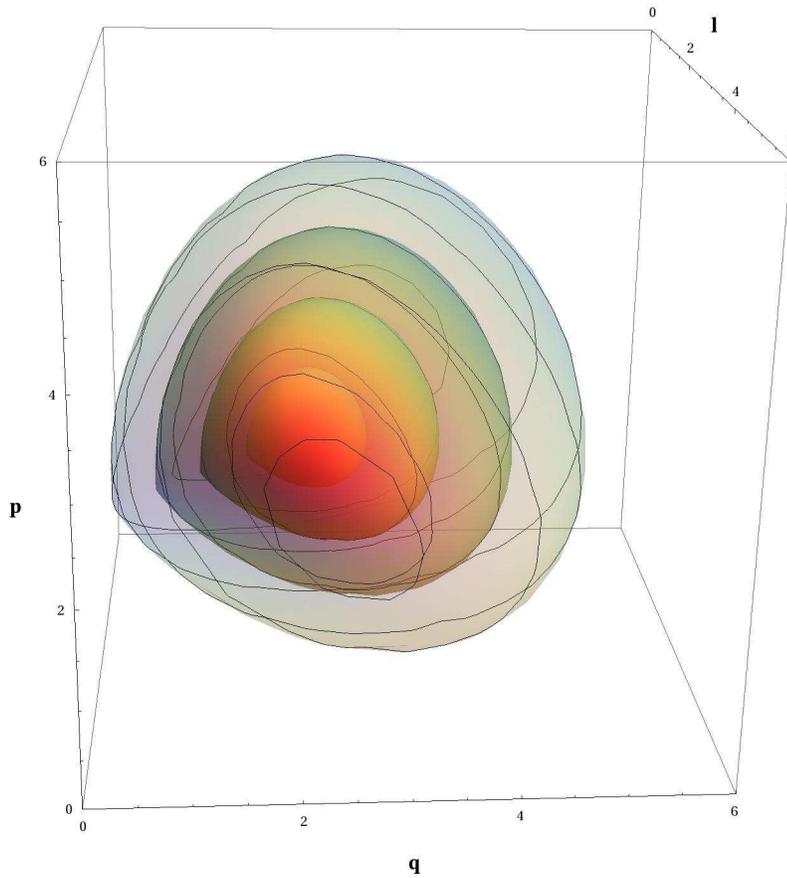


Figura 4.2: Función de Wigner policromática para haces Gaussianos policromáticos con $w = 2$ y centro en $c = 2 + 2i$. Contornos de nivel en $l = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4.4 Pulsos policromáticos ultra-cortos.

En esta sección introduciremos algunas características de la transformada de Fourier de funciones Gaussianas, asumiendo que se tienen conocimientos generales de dicha transformada, que es ampliamente utilizada. Centraremos la atención en el *ancho de banda* de una señal, debido a que el objetivo es llegar a la definición de pulsos y pulsos ultra-cortos, donde la importancia de estos últimos radica en su capacidad de portar un espectro de frecuencias más amplio. [19, 20]

La finalidad es utilizar la función de Wigner policromática (4.14) obtenida en el capítulo anterior para explotar la información obtenida de la representación en espacio fase de un pulso policromático ultracorto.

Finalmente veremos una forma simple de calcular la transformada de Wigner de un haz gaussiano policromático ultra-corto.

4.4.1 Anchos de banda

Es necesario recordar al menos superficialmente la definición de la transformada de Fourier y mencionar algunas características para después definir *ancho de banda* y por qué es importante en el análisis de señales en general.

La transformada de Fourier de una función $f(q)$ está definida como

$$\tilde{f}(p) = \mathcal{F}_{q \rightarrow p} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} dq f(q) \exp[-iqp/\lambda], \quad (4.22)$$

y el resultado es una función de p en un espacio de configuración distinto, como es bien sabido en mecánica cuántica, la transformada de Fourier nos pasa de la base de *posición* q a la base de *momento* p [21, 22], pero también relaciona tiempo t con frecuencia ω , es decir, si tenemos una función del tiempo $f(t)$, al hacer su transformada de Fourier, obtendremos una función de frecuencia $\tilde{f}(\omega)$.

Podemos definir la *energía* E de una función como

$$E = \int_{\mathbb{R}} dq |f(q)|^2. \quad (4.23)$$

Cuando la integral (4.23) converge, se dice que la señal tiene *energía finita*, entonces las funciones periódicas tienen *energía infinita*.

Se dice que una función tiene *banda limitada* cuando su transformada de Fourier es cero fuera de un intervalo finito

$$\tilde{f}(p) = 0, \quad \text{para } |p| > \sigma, \quad (4.24)$$

para alguna $\sigma > 0$. A la cantidad 2σ se le llama *ancho de banda* en el dominio de las coordenadas transformadas.¹

4.4.2 Pulsos Gaussianos

Ahora abordaremos lo que se refiere a *pulsos*, donde la principal importancia de que sean ultra-cortos radica en el ancho de banda incrementado en el espacio transformado.

Podemos definir un pulso como una onda única y pequeña, que puede tener cualquier perfil en general, sin embargo, para fines de simplicidad tomaremos un pulso Gaussiano de ancho ϖ

$$G_{\varpi}(q) := (2\pi\varpi)^{-1/2} \exp(-q^2/2\varpi), \quad (4.25)$$

que es una función que alcanza su máximo $(2\pi\varpi)^{-1/2}$ cuando $q = 0$ y debido al factor de normalización, dicho pulso gaussiano cubre un área unitaria

$$\int_{\mathbb{R}} dq G_{\varpi}(q) = 1, \quad (4.26)$$

independientemente de su ancho.

La transformada de Fourier de la Gaussiana (4.25) puede ser calculada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} dq G_{\varpi}(q) \exp(-ipq) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \varpi^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} dq \exp(-q^2/2\varpi - ipq) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \varpi^{-1/2} \exp(-p^2\varpi/2) \int_{\mathbb{R}} dq \exp[-(q + i\varpi p)^2/2\varpi] \\ &= (2\pi)^{-1/2} \varpi^{-1/2} \exp(-p^2\varpi/2) \int_{\mathbb{R}} dq' G_{\varpi}(q') \\ &= \varpi^{-1/2} G_{1/\varpi}(p). \end{aligned} \quad (4.27)$$

¹El término *ancho de banda* es utilizado principalmente cuando las coordenadas transformadas corresponden al dominio de frecuencias, pero aquí lo utilizaremos en general para cualquier dominio transformado.

Donde la cuarta igualdad se logró tomando en cuenta que el integrando es analítico y no tiene singularidades en cualquier banda paralela al eje real, además de que decrece rápidamente conforme $|Re(q)| \rightarrow \infty$, por lo que $\int_{-\infty+i\varpi p}^{+\infty+i\varpi p} = \int_{-\infty}^{\infty}$. Entonces la transformada de Fourier de una Gaussiana de ancho ϖ es otra Gaussiana de ancho $1/\varpi$, como se ilustra en las figuras 4.3 y 4.4.

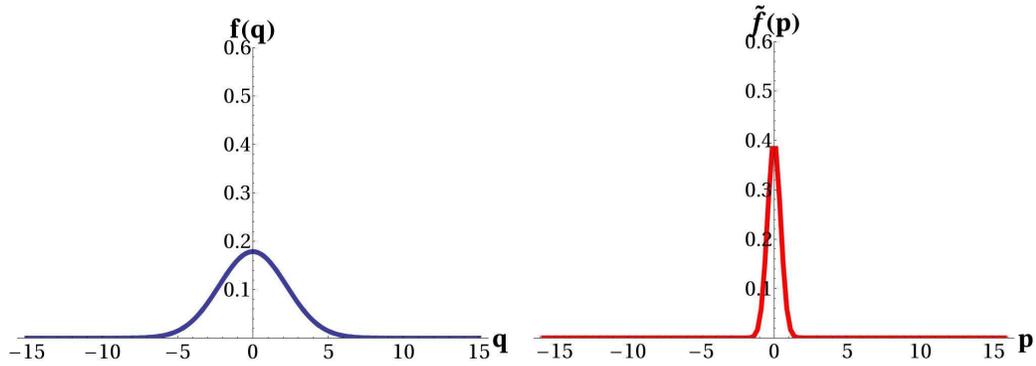


Figura 4.3: Izquierda: Gaussiana de ancho $\varpi = 5$. Derecha: Transformada de Fourier correspondiente, con ancho $\varpi = 1/5$.

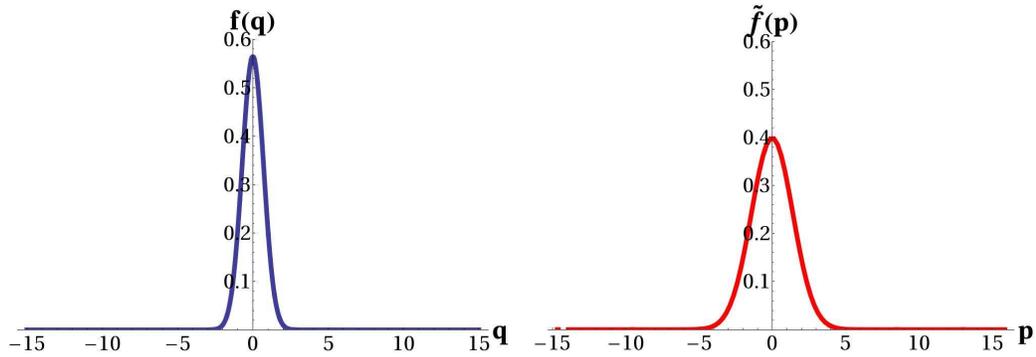


Figura 4.4: Izquierda: Gaussiana de ancho $\varpi = 1/2$. Derecha: Transformada de Fourier correspondiente, con ancho $\varpi = 2$.

Notemos que la altura de las transformadas de Fourier de las Gaussianas es independiente del ancho ϖ y corresponde al valor $1/\sqrt{2\pi}$.

4.4.3 Pulsos ultra-cortos

Observando el resultado (4.27) podemos ver que si consideramos una Gaussiana de ancho $\varpi \ll 1$, su transformada de Fourier es otra Gaussiana de ancho $1/\varpi$, mucho más grande que el de la Gaussiana original. De este hecho se da la ventaja de tener pulsos cortos, ya que mientras más cortos sean, su ancho de banda es cada vez mayor y esto permite portar un mayor número de frecuencias. En palabras simples, la cantidad de información transmitida por unidad de tiempo es mayor, resultando en una velocidad de transferencia de datos incrementada. Para ilustrar esta utilidad, definiremos la siguiente Gaussiana

$$G_{\varpi,\alpha}(q) = (\pi\varpi)^{-1/2} \exp[-i|\alpha|^2 + 2i \operatorname{Im}(\alpha)q - (q - \operatorname{Re}(\alpha))^2/2\varpi], \quad (4.28)$$

que es una Gaussiana oscilante, y mientras el ancho ϖ se hace menor, el ancho de su transformada de Fourier es mayor, tal como observamos en la figura 4.5, donde la línea azul es a parte real de la Gaussiana, la morada es la parte imaginaria y la verde es el valor absoluto, que muestra el perfil de Gaussiana.

Podemos apreciar en las gráficas de la derecha de la figura 4.5 cómo el ancho de banda crece y con él la capacidad del pulso de portar más frecuencias.

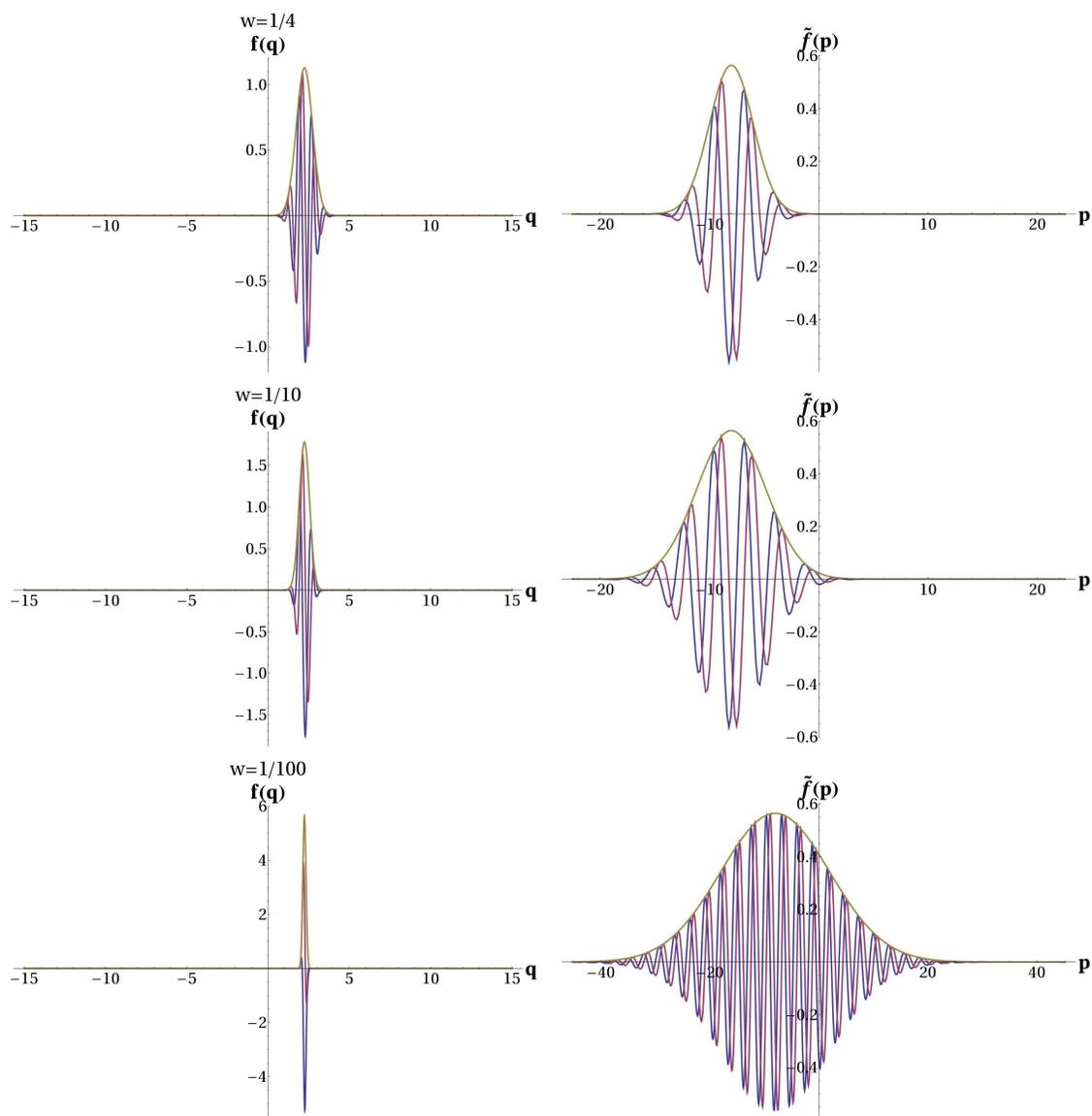


Figura 4.5: Izquierda: Gaussianas de ancho w . Derecha: Transformadas de Fourier correspondientes, con ancho $1/w$.

Podemos hacer decrecer la cintura de la Gaussiana hasta que tienda a una delta de Dirac,

$$\tilde{f}(p) = (2\pi\varpi\lambda)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} dq \delta(q) \exp(iqp/\lambda) = (2\pi\varpi\lambda)^{-1/2}, \quad (4.29)$$

así el límite teórico del ancho de banda es la función constante que se obtiene en el extremo derecho de la expresión anterior.

El nombre de *pulsos ultra cortos* surgió en el momento en que las técnicas como las mostradas en [23] permitieron producir pulsos de unos cuantos femtosegundos (10^{-15} s), logrando anchos de banda de órdenes de 10^{15} unidades en espacio fase.

4.4.4 Pulsos policromáticos ultra-cortos en espacio (meta) fase

Podemos definir un pulso policromático ultra-corto, como una función Gauss-cromática (4.21) con uno de sus anchos muy pequeño, de manera que su retrato en espacio fase sería un producto de funciones, semejante al mostrado en la figura 4.1, pero con una de sus dimensiones muy alargadas, como se muestra a continuación

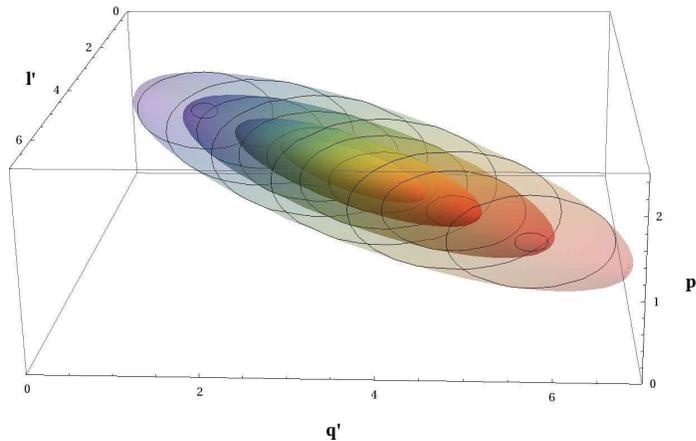


Figura 4.6: Función de Wigner policromática para un haz Gaussiano policromático con $w = 0,1$ y centro en $c = 2 + 2i$. Contornos de nivel en $l = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

En coordenadas tradicionales del espacio (meta) fase, el pulso policromático ultra-corto mostrado en la figura 4.6 se muestra en la siguiente figura

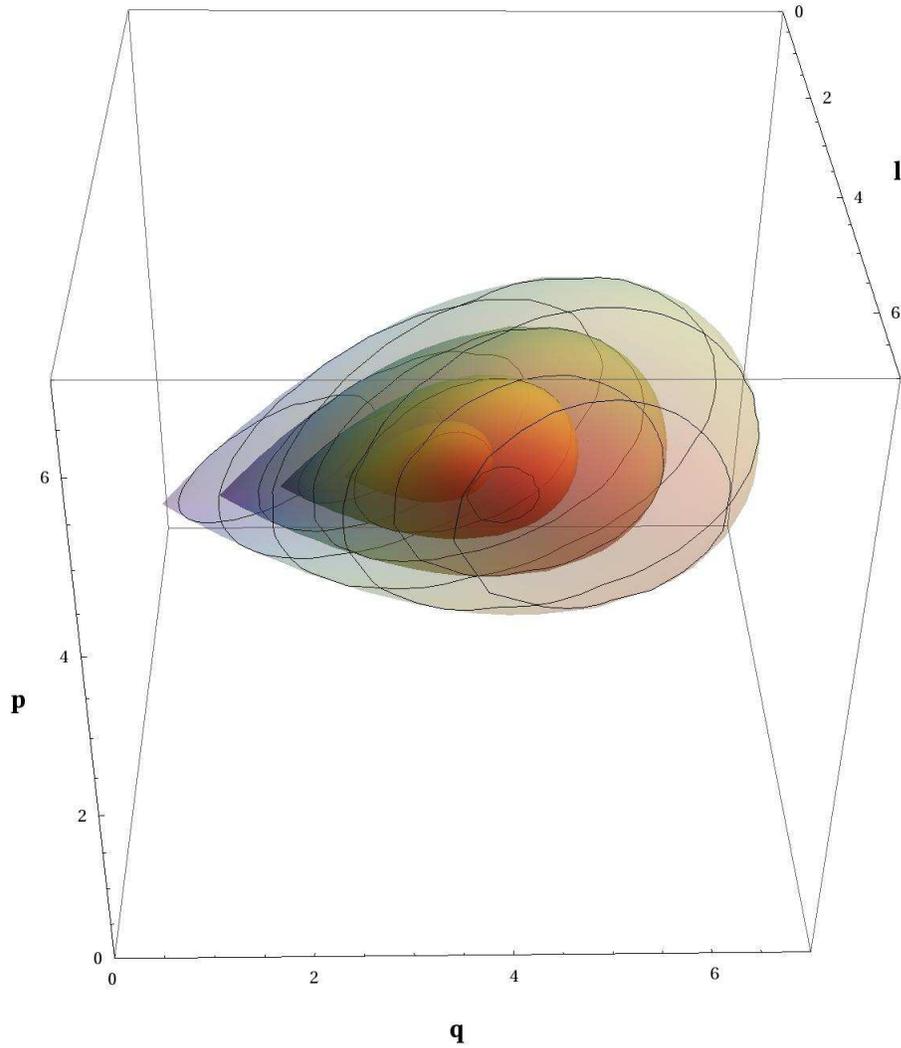


Figura 4.7: Función de Wigner policromática para un haz Gaussiano policromático con $w = 0,1$ y centro en $c = 2 + 2i$, en coordenadas sin escalamiento. Contornos de nivel en $l = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Capítulo 5

Análisis ondulatorio inverso

En este capítulo obtendremos las funciones que forman el campo de ondas mencionado en el primer capítulo, fijando nuestra atención sobre las pantallas $X(x)$ y $Z(z)$, que corresponden a las pantallas en $z = 0$ y $x = 0$, respectivamente en la figura 1.1.

El objetivo es llevar a cabo el análisis ondulatorio inverso, que consiste en descifrar las funciones cuya superposición produce el campo de ondas, a partir de conocer solamente los perfiles producidos en las pantallas mencionadas.

Para una experiencia más cómoda, cambiaremos la notación, de ahora en adelante, los elementos de grupo (3.6) serán función de ξ, η, ζ , es decir

$$\begin{aligned}x &\mapsto \xi, \\y &\mapsto \eta, \\z &\mapsto \zeta,\end{aligned}\tag{5.1}$$

recordando sus unidades correspondientes de la ecuación (3.16).

Analizaremos la forma de funciones sobre distintas coclases del grupo HW , mencionando la forma que adquieren ahí los generadores Q, P y H . También veremos la función de Wigner correspondiente en cada caso y finalmente obtendremos las soluciones explícitas al problema mencionado.

Las funciones sobre las coclases $HW_x \backslash HW$ y $HW_y \backslash HW$ están relacionadas mediante transformadas de Fourier, de manera semejante a las representaciones de posición y momento en la mecánica cuántica.

Las funciones de la coclase $HW_x \backslash HW$ están en términos de las coordenadas (ξ, τ) .¹ Para pasar a la representación en términos del eigenvalor

¹Las unidades de ξ y τ son de inverso de longitud.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \lambda} & & f^c(\xi, \tau) & & \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} \\
 & & \swarrow & & \searrow & \\
 f^m(\xi, \lambda) & & & & & f^p(x, \tau) \\
 & & \searrow & & \swarrow & \\
 & \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} & & f^s(x, \lambda) & & \mathcal{F}_{\tau \rightarrow \lambda}
 \end{array}$$

Cuadro 5.1: Ilustrando cómo la transformada de Fourier nos permite pasar de una coclase a otra en el grupo.

del operador de momento que etiquetamos con la letra m llevamos a cabo la transformada de Fourier $\mathcal{F}_{\tau \rightarrow \lambda}$, quedando la representación en términos de las variables (ξ, λ) . Para ilustrar esto entre cuatro realizaciones distintas, presentamos el siguiente diagrama. La transformada de Fourier es externa al grupo de Heisenberg - Weyl pero nos sirve para portar las funciones entre coclases.

A continuación abordaremos brevemente dos de las cuatro realizaciones para abordar funciones f^s sobre la pantalla y después funciones de momento f^m .

5.1 Funciones policromáticas en pantalla

Para funciones en la variedad de coclases $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}$, tenemos el espacio de Hilbert natural $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2)$ con medida $d\xi d\tau$ heredada de la medida invariante en el grupo. La acción sobre el grupo (4.9), en este caso lleva a la realización de los generadores del grupo HW como los operadores

$$Q^c = -i \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad P^c = i\xi \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad H^c = -i \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (5.2)$$

Las eigenfunciones de los operadores Q , P o H son campos de ondas que pueden ser etiquetados convenientemente con sus eigenvalores. Los eigenvalores son reales y nos brindan las coordenadas de posición, momento o longitud de onda, respectivamente. Podemos elegir para este propósito a lo más dos de estos operadores que conmuten, es decir Q y H ó P y H

Tomemos primeramente la coordenada en pantalla q , que corresponde al eigenvalor de Q y la longitud de onda reducida $\lambda = \lambda/2\pi$, eigenvalor del operador H . Las eigenfunciones se obtienen mediante la doble transformada

de Fourier de las funciones de coclase f^c

$$\begin{aligned} f^s(x, \lambda) &= \mathcal{F}_{\xi \mapsto x} \mathcal{F}_{\tau \mapsto \lambda} f^c(\xi, \tau) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\tau d\xi f^c(\xi, \tau) \exp[-i(x\xi + \lambda\tau)]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A las funciones de la forma (5.3) las llamamos *funciones policromáticas en pantalla*. En este espacio $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, la acción sobre el grupo, obtenida siguiendo un procedimiento semejante al que se ve entre las ecuaciones (4.4) y (4.9), es

$$f_{s, \omega'} := \omega' :_D f_s(x, \lambda) = \exp \left\{ i \left[x\xi' + \lambda(z' + \frac{1}{2}\xi'\eta') \right] \right\} f^s(x + \lambda y, \lambda). \quad (5.4)$$

Esto se conoce matemáticamente como una *representación irreducible* [25] del grupo de Heisenberg - Weyl y se le llama *la representación de Schrödinger* para $\lambda = \hbar$.

Aquí, los generadores corresponden a los operadores

$$Q^s = x, \quad P^s = -i\lambda \frac{\partial}{\partial x}, \quad H^s = \lambda. \quad (5.5)$$

En el espacio de funciones de color en la pantalla $f^s(x, \lambda)$, el formalismo de Schrödinger es válido para longitud de onda variable. Notemos que las traslaciones en x son generadas por P , pero λ no puede ser trasladada dentro del grupo.

Las tres coordenadas (q, p, l) en la función de Wigner no son las de un espacio Euclideo ordinario. Las primeras dos son de espacio fase y la tercera es la de su escala fundamental, que es “constante”.

En términos de funciones f^s y g^s sobre la pantalla, de la forma (5.3), la función de Wigner policromática (4.14) se escribe como

$$W_{f,g}(q, p, l) = \frac{1}{2\pi l} \int_{\mathbb{R}} dx f^s(q - \frac{1}{2}x, l)^* \exp[-ixp/l] g^s(q + \frac{1}{2}x, l). \quad (5.6)$$

La longitud de onda l de f_s y g_s no está convolucionada, contrario a lo que sucede entre q y p . De nuevo, en el límite monocromático, llegamos a la función de Wigner tradicional (2.1).

Tomando en cuenta que usualmente, la distribución espectral de la fuente de luz se conoce independientemente y/o el color de la imagen puede ser detectado espectrográficamente, la ecuación (5.6) es la mejor candidata para aplicarse.

5.2 Funciones policromáticas de momento

Las ondas paraxiales

$$\psi_{p,\lambda}^W(x, z) = \frac{1}{2\pi} \exp[i(z - xp)/\lambda], \quad (5.7)$$

están etiquetadas con momento y longitud de onda $(p, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \neq 0$.

La transformada de Fourier de funciones sobre la coclase o la transformada inversa de Fourier de funciones de color sobre la pantalla producen lo que llamamos *funciones policromáticas de momento* sobre $(\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f^m(\xi, \lambda) &= \mathcal{F}_{\tau \mapsto \lambda} f^c(\xi, \tau) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\tau f^c(\xi, \tau) \exp[-i\lambda\tau] \\ &= \mathcal{F}_{\xi \mapsto x}^{-1} f^s(x, \lambda) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx f^s(x, \lambda) \exp[-ix\xi], \end{aligned} \quad (5.8)$$

y recordemos de la ecuación (4.13) que identificamos $p = -\xi\lambda$.²

En la realización de momento, la acción sobre el grupo (4.4) - (4.9) es

$$f_{\omega'}^m(\xi, \lambda) := \omega' :_D f^m(\xi, \lambda) = \exp [i\lambda(\zeta' - \frac{1}{2}\xi'\eta')] f^m(\xi + \xi', \lambda), \quad (5.9)$$

y sus generadores son

$$Q^m = -i\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad P^m = -\lambda\xi, \quad H^m = \lambda. \quad (5.10)$$

La función de Wigner en momento es obtenida a partir de las ecuaciones (4.14), (5.6) y (5.8)

$$W_{f,g}(q, p, l) = \frac{1}{2\pi l} \int_{\mathbb{R}} d\xi' f^m(-p/l - \frac{1}{2}\xi', l)^* \exp[-iq\xi'] g^m(-p/l + \frac{1}{2}\xi', l). \quad (5.11)$$

²Recordemos el cambio de notación (5.1).

5.3 Una solución al problema ondulatorio inverso con ondas paraxiales

Un campo de ondas F en el plano óptico (x, z) está construido de ondas paraxiales (5.7) de la siguiente manera³

$$F(x, z) = \frac{1}{\lambda^3} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\lambda f^m(\xi, \lambda) \psi_{-\xi\lambda, \lambda}^W(x, z), \quad (5.12)$$

$$f^s(\xi, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} dx dz F(x, z) \psi_{-\xi\lambda, \lambda}^W(x, z)^*. \quad (5.13)$$

Las ondas paraxiales (5.7) forman un conjunto ortogonal y completo. Primero hacemos el producto interno integrando con respecto a p y λ para obtener

$$\begin{aligned} (\psi(x, z), \psi(x', z')) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\lambda}{\lambda^3} dp \exp \left[i \frac{-z + xp}{\lambda} + i \frac{z' - x'p}{\lambda} \right] \\ &= \delta(x - x') \delta(z - z'). \end{aligned} \quad (5.14)$$

y ahora integrando con respecto a x y z para obtener

$$\begin{aligned} (\psi_{p, \lambda}, \psi_{p', \lambda'}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} dx dz \exp \left[i \frac{-z + xp}{\lambda} + i \frac{z - xp'}{\lambda'} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \delta(\lambda - \lambda') \delta(p - p'). \end{aligned} \quad (5.15)$$

En el eje óptico (eje z), la función de λ está determinada, mientras que en el eje x las funciones son de p/λ

$$\begin{aligned} F(0, z) &= \frac{1}{\lambda^3} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\lambda f^m(\xi, \lambda) \exp[iz/\lambda], \\ F(x, 0) &= \frac{1}{\lambda^3} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\lambda f^m(\xi, \lambda) \exp[-ixp/\lambda]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Así que una vez que se conoce el perfil $F(x, 0)$, el campo $F(x, z)$ en este caso es

$$\begin{aligned} F(x, z) &= F(x, 0) \exp[iz/\lambda] \\ &= \frac{1}{\lambda^3} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi d\lambda f^m(\xi, \lambda) \exp[-ix\xi] \exp[iz/\lambda]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

La solución aquí presentada es un caso particular que no funciona cuando se consideren ondas distintas a las paraxiales (5.7).

³Nótese que de (5.10), $\xi = -p/\lambda$.

Capítulo 6

Conclusión

Analizamos una correspondencia entre las observables clásicas y los operadores de posición, momento y longitud de onda para los campos de ondas en el régimen paraxial descritos en el primer capítulo, mediante la función de Wigner.

Confirmamos el análisis ondulatorio inverso para encontrar las funciones que producen el campo de ondas, partiendo de solamente conocer módulo y fase de dicho campo de ondas en una pantalla.

Estudiamos la forma de la función de Wigner policromática como una generalización de la función de Wigner tradicional empleando teoría de grupos en el régimen paraxial de la Óptica aprovechando las simetrías presentes en el sistema.

Como trabajo a futuro tenemos el análisis completo del problema ondulatorio inverso, ya que la solución vista aquí es solamente un caso particular.

Apéndice A

Productos de matrices exponenciadas

Para explicar las igualdades de las ecuaciones (3.6) tenemos que desarrollar cada producto de matrices exponenciadas, ya que Q , P y H son matrices nilpotentes (3.1) de 3×3 .

La segunda igualdad de la ecuación (3.6) es

$$\exp[ixQ] \exp[iyP] \exp[i(z + \frac{1}{2}xy)H], \quad (\text{A.1})$$

desarrollando en serie cada matriz exponenciada, se convierte en el producto de las siguientes 3 matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & ix & ix \\ ix & 1 - \frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x^2 \\ -ix & \frac{1}{2}x^2 & 1 + \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y & -y \\ y & 1 - \frac{1}{2}y^2 & \frac{-1}{2}y^2 \\ -y & \frac{1}{2}y^2 & 1 - \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i(xy+2z) & i(xy+2z) \\ 0 & -i(xy+2z) & 1-i(xy+2z) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

el producto de estas 3 matrices es

$$\begin{pmatrix} 1 & ix - y & ix - y \\ ix + y & 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2iz & -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2iz \\ -(ix + y) & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2iz & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{y^2}{2} - 2iz \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

La última igualdad de la ecuación (3.6) es

$$\exp[iyP] \exp[ixQ] \exp[i(z - \frac{1}{2}xy)H], \quad (\text{A.4})$$

desarrollando en serie cada matriz exponenciada, se convierte en el producto de las siguientes 3 matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -y & -y \\ y & 1-\frac{1}{2}y^2 & \frac{-y^2}{2} \\ -y & \frac{1}{2}y & 1-\frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ix & ix \\ ix & 1-\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x^2 \\ -ix & \frac{1}{2}x^2 & 1+\frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i(-xy+2z) & i(-xy+2z) \\ 0 & i(xy-2z) & 1+i(xy-2z) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

el producto de estas 3 matrices da como resultado la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & ix-y & ix-y \\ ix+y & 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2iz & -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2iz \\ -(ix+y) & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2iz & 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2iz \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, la primera igualdad de la ecuación (3.6) nos da directamente

$$\exp[i(xQ + yP + zH)] = \begin{pmatrix} 1 & ix-y & ix-y \\ ix+y & 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2iz & -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+2iz \\ -(ix+y) & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2iz & 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2iz \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

con lo que quedan probadas todas las igualdades mostradas en la ecuación (3.6).

Bibliografía

- [1] E. P. Wigner, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749–759 (1932).
- [2] W. B. Case, *Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians*, Am. J. Phys., **76**, 937–946, (2008).
- [3] L. M. Nieto, N. M. Atakishiyev, K. B. Wolf, *Wigner distribution function for Euclidean systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 3875–3895, (1998).
- [4] K. B. Wolf, *Geometric Optics on Phase Space* (Springer 2004).
- [5] A. Torre, *Linear ray and wave optics in phase space* (Elsevier 2005).
- [6] B. Boashash *Note on the use of the Wigner distribution for time frequency signal analysis*, IEEE Transactions on acoustics speech and signal processing, **36**, (1988).
- [7] K. Laiho, K. N. Cassemiro, D. Gross and C. Silberhorn, *Probing the negative Wigner function of a pulsed single photon point by point*, Phys. Rev. Lett., **105**, 253603, (2010).
- [8] A. Fialowski and M. De Montigny, *On deformations and contractions of Lie algebras*, arXiv, **2**, 1–10, (2006).
- [9] R. Campoamor-Stursberg, *Some comments on contractions of Lie algebras*, Adv. Studies Theor. Phys., **2**, 865–870, (2008).
- [10] J. R. Durbin, *Modern Algebra: An Introduction* (John Wiley & Sons 1981).
- [11] E. İnönü and E. P. Wigner, *On the contraction of groups and their representations*, Proc. N. A. S., **39**, 510–524, (1953).

- [12] R. Simon and K. B. Wolf, *Structure of the set of paraxial optical systems*, J. Opt. Soc. Am. A, **17**, 342–355, (2000).
- [13] K. B. Wolf, *Wigner distribution function for paraxial polychromatic optics*, Optics Communications, **132**, 343–352, (1996).
- [14] G. García-Calderón and M. Moshinsky, *Wigner distribution functions and the representation of canonical transforms in quantum mechanics*, J. Phys. A, **13**, L185–L188, (1980).
- [15] Rafael G. Campos and Jared Figueroa, *A fast algorithm for the linear canonical transform*, Signal Processing, **91**, 1444–1447, (2011).
- [16] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction* (Springer 2004).
- [17] A. Haar, *Der Massbegriff in der Theorie der Kontinuierlichen Gruppen*, Annals of Mathematics, **34**, 147–169, (1933).
- [18] M. Garcia-Bullé, W. Lassner and K. B. Wolf, *The metaplectic group within the Heisenberg-Weyl ring*, J. Math. Phys. **27**, 29–36, (1986).
- [19] R.W. Schoenlein, J. Y. Bigot, M. T. Portella and C. V. Shank, *Generation of bluegreen 10 fs pulses using an excimer pumped dye amplifier*, Appl. Phys. Lett. **58**, 801 (1991).
- [20] Tamás Nagy and Peter Simon, *Single-shot TG FROG for the characterization of ultrashort DUV pulses*, Optics Express, **17**, 8144–8151, (2009).
- [21] E. S. Abers, *Quantum Mechanics* (Addison Wesley, Prentice Hall Inc. 2004).
- [22] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space* (Wiley-VCH, Berlin 2001).
- [23] In-Yong Park, et all. *Plasmonic generation of ultrashort extreme-ultraviolet light pulses*, Nature Photonics, **5**, 677–681, (2011).
- [24] K. B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering* (Plenum Publ. Corp. New York 1979).
- [25] V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, Annals of Mathematics, **59**, 1–46, (1954).