UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA TEORÍA DE MODELOS DE LAS ESTRUCTURAS HOMOGÉNEAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

E R I C K G A R C Í A R A M Í R E Z

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. GABRIELA CAMPERO ARENA

2013

1. Datos del alumno
García
Ramírez
Erick
55 38 97 32 55
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
409011061

2. Datos del tutor
Dra.
Gabriela
Campero
Arena

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Yolanda Magda
Torres
Falcón

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Francisco
Marmolejo
Rivas

5. Datos del sinodal 3
Dr.
David
Meza
Alcántara

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Carlos Azarel
Martínez
Ranero

7. Datos del trabajo escrito
La Teoría de Modelos de las estructuras homogéneas
100 p
2013

A mi familia, en especial, a mis padres,
con profundo afecto.

Prefacio y agradecimientos

La idea de escribir esta tesis de licenciatura en Teoría de Modelos fue fruto de la fascinación por dos áreas importantes de las matemáticas: la Lógica Matemática y el Álgebra. Sin embargo, el particular tema de esta tesis fue elegido por su atractiva interdisciplinariedad. En el estudio de las estructuras homogéneas se combinan la Lógica Matemática, la Combinatoria y el Álgebra, principalmente. Recientes avances en esta área muestran la incursión de estructuras homogéneas en áreas como la Topología y la Computación teórica. Esta tesis tiene, pues, el objetivo de dar una muestra de esta interdisciplinariedad.

Deseo extender mis más profundos agradecimientos a todas las personas que hicieron posible este trabajo —activa o pasivamente, directa o indirectamente—. A mi familia, por el apoyo con el que siempre he contado de ellos. A mi asesora, profesora y amiga Gabriela Campero Arena, por todo su apoyo, el cual no sólo se ha limitado al ámbito académico. A Linda, con una especial gratitud, por su invaluable compañía y cariño.

E. G. R.

Contenido

Introducción

La Teoría de Modelos es una rama de la Lógica Matemática llena de vida desde sus inicios, los cuales datan de mediados del siglo pasado. Muchos marcan el comienzo de la Teoría de Modelos con el desarrollo que trajeron dos de los teoremas más importantes de la Lógica Matemática: el Teorema de Compacidad y el de Löwenheim-Skolem. Sin embargo, uno sólo puede distinguir a lo que hoy se llama Teoría de Modelos después de los trabajos de Alfred Tarski, Abraham Robinson y Roland Fraïssé, en la década de los cincuentas del siglo pasado, trabajos marcados por sus fuertes conexiones con el álgebra.

Es imposible suponer, dicho lo anterior, que la Teoría de Modelos es o fue en algún momento una *rama pura* de la Lógica Matemática. Siendo demostrado el teorema de eliminación de cuantificadores para campos reales cerrados por A. Tarski, la Teoría de Modelos emergió como la aplicación de técnicas de la Lógica Matemática al Álgebra. Pronto la relación se volvió recíproca y esta combinación ganó fuerza tras la proliferación de resultados importantes y muchas conjeturas.

El siguiente gran paso dado por la Teoría de Modelos después de su magnífico inicio fue el Teorema de Categoricidad de Michael Morley y los intentos para resolver la Conjetura de Vaught. Después de este punto muchos autores consideran que da inició la *Teoría de Modelos moderna*, marcada por el trabajo de Saharon Shelah en su teoría de la Clasificación e inaugurando la Teoría de la Estabilidad. Algunos años después, las interacciones de la Teoría de Modelos con la Geometría Algebraica desarrolladas por B. Zilber y otros trajeron una renovación de los métodos de la Teoría de Modelos. Este ligero cambio de paradigma llevó —de la mano de Ehud Hrushovski— a la solución de conjeturas de suma relevancia, a saber, la conjetura de Lachlan, la conjetura de Zilber y, tras esta última, la conjetura de Mordell-Lang. Aunque la conjetura de Mordell-Lang ya había sido resuelta unos años antes por Gerd Faltings sin hacer uso de las técnicas de la Teoría de Modelos, es necesario indicar que las ideas desarrolladas por Hrushovski en su demostración han sido por sí mismas de sumo interés en la investigación en la Teoría de Modelos y sus conexiones con la Geometría Algebraica.

El tema de la presente tesis, estructuras homogéneas, es una investigación que inició con los trabajos de R. Fraïssé sobre estructuras relacionales. Aunque ya se conocían las características del orden de los números racionales, fue R. Fraïssé quien aisló una de sus propiedades —la homogeneidad— y levantó algunas preguntas sobre estructuras relacionales homogéneas. Con las investigaciones de C. Ward Henson, Alistair Lachlan, Gregory Cherlin y Robert E. Woodrow, entre otros, estas preguntas fueron siendo respondidas.

Paralelamente al trabajo de R. Fraïssé, Bjarni Jónsson llevó acabo una investigación sobre estructuras universales y poco después una sobre estructuras homogéneas. Lo interesante de la investigación de B. Jónsson es que generalizó la construcción de Fraïssé para obtener estructuras homogéneas de cardinalidad no numerable, mientras que el interés de Fraïssé y otros se mantuvo en aquellas numerables.

En un principio el interés en estructuras homogéneas se centraba en la búsqueda de ejemplos y el responder cuántas estructuras homogéneas numerables existían para un lenguaje fijo (antes del trabajo de C. W. Henson se conjeturaba que sólo había un número numerable para cada lenguaje relacional finito). Al avanzar en este tema, al interés se añadió la clasificación de estructuras homogéneas y el estudio de los conceptos de la Teoría de Modelos que en ellas emergía —principalmente, ω-categoricidad—. Actualmente, la investigación sobre estructuras homogéneas se encuentra en las clasificaciones que aún faltan, en el grupo de automorfismos de estructuras homogéneas u ω-categóricas, la dinámica topológica del grupo de automorfismos y, más recientemente, en la contraparte categórica de las construcciones de R. Fraïssé y de B. Jónsson.

El enfoque elegido en este trabajo para estudiar estructuras homogéneas es, como el título indica y lo precedente sugiere, el de la Teoría de Modelos. El trabajo inicia en el capítulo uno con un recorrido rápido por los conceptos y técnicas propias de la Teoría de Modelos. El lector que tenga cierto conocimiento de los conceptos básicos de la Teoría de Modelos puede bien omitir la lectura del capítulo uno y remitirse a consultarlo cuando en un futuro le sea necesario.

En el capítulo segundo se exponen dos conceptos importantes sobre estructuras, la universalidad (respecto a una clase) y la homogeneidad. Se presenta una serie de ejemplos a lo largo del capítulo con el objetivo de mostrar que existen estructuras homogéneas en una amplia variedad de áreas de las matemáticas. También se presenta la construcción de R. Fraïssé como una técnica fundamental para obtener estructuras homogéneas numerables a partir de clases de estructuras con ciertas idóneas propiedades, estas clases serán referidas en su momento como clases de amalgamación. El capítulo culmina con una breve discusión sobre la clasificación de estructuras homogéneas y el resultado de C. W. Henson sobre el número de ellas.

El capítulo tercero trae consigo los principales resultados sobre estructuras homogéneas. Inicia el capítulo con una profundización en algunos conceptos de la Teoría de Modelos. Se presenta el crucial concepto de tipo, el de ω-categoricidad, el de modelo atómico y el de grupo de automorfismos de una estructura. En seguida se demuestra uno de los resultados más importantes sobre estructuras ω-categóricas numerables, el Teorema de Ryll-Nardzewski, Engeler y Svenonius. Armados con este resultado, presentamos los resultados sobre la teoría de modelos de las estructuras homogéneas.

Debe resaltarse el resultado principal: Una estructura relacional y numerable es homogénea si y sólo si es ω-categórica y su teoría admite eliminación de cuantificadores. Un nuevo concepto —el de finitud local uniforme— nos permite obtener un resultado similar para estructuras no necesariamente relacionales. El capítulo tercero culmina con una discusión sobre ejemplos de estructuras ω-categóricas que no son homogéneas.

En el capítulo cuarto se expone la construcción debida a B. Jónsson de estructuras universales-homogéneas de cardinalidad no numerable. Esto es, sujeto a condiciones sobre el cardinal infinito κ y sobre una clase de estructuras adecuada, se puede concluir la existencia de una estructura universal y homogénea de cardinalidad κ, la cual de hecho resultará ser única. En particular, la asunción de la hipótesis generalizada del continuo traerá consigo la existencia de un sinnúmero de estructuras universales-homogéneas.

Finaliza este trabajo un epílogo que pretende ofrecer al lector una visión de la situación actual de la investigación en estructuras homogéneas.

Se considera como requisito para la lectura de este trabajo una familiaridad previa con los conceptos comunes de la lógica de primer orden. En general, definiciones y proposiciones elementales tratan de llevar al lector a través del trabajo sin la necesidad de consultar literatura especializada. Así pues, los resultados presentados a lo largo del trabajo pueden bien ser entendidos sin mayores requisitos. Sin embargo, los resultados no son a veces tan apreciados sino hasta que se viven en los ejemplos. Es por esto que un conocimiento previo de algunos conceptos de otras áreas de las matemáticas —como los de gráficas, órdenes parciales, acciones de grupos y campos— es ventajoso.

Capítulo 1

Preliminares de la Teoría de Modelos

Este capítulo pretende dar una visión —aunque muy general— del desarrollo de la Teoría de Modelos. Los primeros resultados son de corte clásico y pueden ser consultados en la mayoría de las obras de Lógica Matemática, la recomendación principal es el esencial libro [End 05]. En seguida, se presentan los conceptos y resultados que, podríamos decir, establecieron la Teoría de Modelos como una de las ramas principales de la Lógica Matemática. Las referencias fundamentales para este material son [Hod 93] y [Mar 02]. En general, trabajaremos con un lenguaje de primer orden aún cuando algunos conceptos y resultados en este capítulo se conservan válidos para lenguajes que no son de primer orden.

1.1. Estructuras y Modelos

Considere una signatura L (un conjunto de símbolos de función, símbolos de relación y símbolos de constante), una L-estructura A está determinada por un conjunto no vacío $\operatorname{dom} A$, llamado el dominio de A, una función $f^A : (\operatorname{dom} A)^{n_f} \to \operatorname{dom} A$ para cada símbolo de función f en L de n_f argumentos, un subconjunto R^A de $(\operatorname{dom} A)^{n_R}$ para cada símbolo de relación de n_R argumentos R en L y un elemento c^A del conjunto $\operatorname{dom} A$ para cada símbolo de constante c en L. La cardinalidad de la L-estructura A, que denotamos por $|A|$, es la cardinalidad de su dominio.

Nos referiremos al lenguaje de primer orden obtenido a partir de una signatura L como el lenguaje de primer orden L, o simplemente como el lenguaje L.

En lo sucesivo, si φ es una fórmula de L, escribiremos $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$, o más a menudo sólo $\varphi(\bar{x})$ asumiendo que $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, para denotar que las variables libres de φ son $x_0, \ldots, x_{n-1}$; como caso extremo, puede ocurrir que escribamos $\varphi(\bar{x})$ en donde $\bar{x}$ es una sucesión infinita, en este caso se debe entender que φ tiene sus variables libres (de las cuales sólo debe haber un número finito) entre las variables que forman a $\bar{x}$. Si la fórmula es un enunciado sencillamente escribimos φ.

Una teoría T en el lenguaje L es un conjunto de enunciados de L. Dada una L-estructura A y un enunciado φ de L, decimos que A es un modelo de φ si la afirmación que hace φ es cierta en A.[1] Como de costumbre, denotamos el hecho de que A es modelo de φ por $A \vDash \varphi(\bar{x})$. Además, decimos que A es modelo de la teoría T en L si A es modelo de cada uno de los elementos de T. También, si $\bar{a}$ es una tupla de elementos de A y $\varphi(\bar{x})$ es una fórmula de L, escribimos $A \vDash \varphi(\bar{a})$ si al sustituir ordenadamente los elementos de $\bar{a}$ en las variables de $\varphi(\bar{x})$, la afirmación resultante es cierta en A.

Sean L un lenguaje de primer orden y A y B L-estructuras. Un homomorfismo (algunos autores prefieren llamarlo un L-homomorfismo para enfatizar que es respecto al lenguaje L) de A en B es una función f de $\operatorname{dom} A$ en $\operatorname{dom} B$ que cumple que:

(1) para cada símbolo de constante c en L, $f(c^A) = c^B$;

(2) para cada símbolo de relación R de $n > 0$ argumentos en L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A, si $\bar{a} \in R^A$, entonces $f(\bar{a}) \in R^B$; y

(3) para cada símbolo de función F de $n > 0$ argumentos en L y cada tupla $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ de elementos de A, $f(F^A(\bar{a})) = F^B(f(\bar{a}))$.

La notación $f(\bar{a})$ abrevia a $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Usualmente escribimos $f : A \longrightarrow B$ para denotar que f es un homomorfismo de A en B (mientras que una simple función de la estructura A en B será denotada por $f : \operatorname{dom} A \longrightarrow \operatorname{dom} B$).

El homomorfismo $f : A \longrightarrow B$ es una inmersión (o L-inmersión) si la función f es inyectiva y se cumple una versión más fuerte de la condición (2):

(2′) para cada símbolo de relación R de $n > 0$ argumentos en L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A, $\bar{a} \in R^A$ si y sólo si $f(\bar{a}) \in R^B$.

Si existe una inmersión de A en B, decimos que A es inmersible en B. Un isomorfismo entre A y B es una inmersión de A en B que además es sobre; en este caso decimos que A y B son isomorfas y escribimos $A \cong B$. En el caso en que f sea un isomorfismo de A en A misma, diremos que f es un automorfismo de A.

Si A y B son L-estructuras tales que $\operatorname{dom} A \subseteq \operatorname{dom} B$, decimos que A es subestructura de B o que B es una extensión de A, denotado por $A \subseteq B$, si $c^A = c^B$ para cada símbolo de constante c en L , $R^A = R^B \cap (\operatorname{dom} A)^n$ para cada símbolo de relación R en L de n argumentos, y $F^A = F^B|_{(\operatorname{dom} A)^n}$ para cada símbolo de función F en L de n argumentos. Observe que A es subestructura de B si y sólo si la inclusión $i : A \to B$ es una L-inmersión.

Note que usamos la notación de ser subconjunto ($\subseteq$) para subestructura a pesar de que es claro que no todo subconjunto de una estructura es una subestructura de

[1] La definición formal de esta noción corresponde a una definición recursiva sobre la forma del enunciado y puede ser consultada como la definición de verdad de Tarski en cualquier libro de Lógica Matemática.

ésta. Tendremos cuidado de no mezclar la notación; si queremos dar a entender que (llanamente) los elementos del conjunto X son elementos de la estructura B, denotaremos ello por $X \subseteq \operatorname{dom} B$ y no por $X \subseteq B$.

La precisión en el párrafo anterior motiva preguntarnos cuándo es que podemos asegurar que un conjunto X de elementos de una L-estructura A es el dominio de una L-subestructura de A. No es díficil convencerse de que X es el dominio de una subestructura B de A si y sólo si X es cerrado bajo las funciones F^A, para cada símbolo de función F en L, y contiene a todos los elementos c^A para cada símbolo de constante c en L. La implicación de izquierda a derecha es clara por el hecho de que $X = \operatorname{dom} B$ y $B \subseteq A$. De derecha a izquierda, basta definir la L-estructura B como: $\operatorname{dom} B = X$, $F^B = F^A|_{X^n}$ si el símbolo de función F es de n argumentos, $R^B = R^A \cap X^m$ si el símbolo de relación R es de m argumentos y $c^B = c^A$ para cada símbolo de constante c. Por las hipótesis, estas definiciones son adecuadas y convierten a B en una subestructura de A con dominio X.

Dado un conjunto X de elementos de una L-estructura A existe una L-subestructura de A cuyo dominio contiene a X y es mínima respecto a la contención con esta propiedad. Basta definir $X' = \bigcap\{\operatorname{dom} C \mid C \subseteq A \text{ y } X \subseteq \operatorname{dom} C\}$ y observar que por lo mostrado en el párrafo anterior, X' es el dominio de una L-subestructura B de A. Tal estructura B es llamada la estructura generada por X y se suele denotar por $\langle X\rangle_A$. El subíndice A puede ser omitido siempre que sea claro respecto a qué estructura estamos formando a la estructura generada.

Si la tupla (finita o infinita) $\bar{a}$ enlista a todos los elementos del conjunto X, es usual denotar por $\langle \bar{a}\rangle_A$ a la estructura generada por X. Eventualmente trabajaremos con subestructuras finitamente generadas de A, es decir, subestructuras $B = \langle X\rangle_A$, donde X es un conjunto finito.

Elementalidad

Dada una estructura, es a veces conveniente considerar una estructura muy parecida a ella pero que cumpla algunas características extras u omita algunas de las que adolecía nuestra estructura inicial. Es fácil convencerse de que si A y B son dos L-estructuras isomorfas, entonces son modelos de exactamente las mismas fórmulas de L. Esto señala que pedir que las estructuras sean isomorfas puede ser demasiado para nuestro própositio.

1.1 Definición. Sean A y B dos L-estructuras. Decimos que A y B son elementalmente equivalentes y escribimos $A \equiv B$ si son modelos de exactamente los mismos enunciados de L, es decir,

$$A \vDash \varphi \text{ si y sólo si } B \vDash \varphi,$$

para cada enunciado φ de L.

Si dos L-estructuras son elementalmente equivalentes, entonces L no puede decir en qué difieren, son indistinguibles para L. Sin embargo, podríamos encontrar alguna característica que las estructuras no comparten, además, necesariamente esta característica no sería expresable como un enunciado de primer orden. El ejemplo próximo será una muestra de esta situación.

Como parte del camino hacia nuestro próximo ejemplo, podemos hacer un comentario general. Debido a que cualquier cardinal infinito es indistinguible de cualquier otro para la lógica de primer orden, es usual encontrar estructuras elementalmente equivalentes pero que no son isomorfas, simplemente porque tienen cardinalidad infinita distinta. Empero, dos estructuras finitas elementalmente equivalentes siempre resultan isomorfas: la lógica de primer orden sí tiene todo el poder expresivo necesario para caracterizar a una estructura finita. Abordaremos esto más adelante (pág. 14).

La teoría de una L-estructura A, denotada por $\mathrm{Th}(A)$, es el conjunto de todos los enunciados de L que son verdaderos en A, es decir,

$$\mathrm{Th}(A) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es un enunciado de } L \text{ y } A \vDash \varphi\}.$$

Observe que las L-estructuras A y B son elementalmente equivalentes si y sólo si $\mathrm{Th}(A) = \mathrm{Th}(B)$.

Ejemplo. Consideremos al conjunto (linealmente) ordenado de los números reales $\mathbb{R}$ y al conjunto (linealmente) ordenado de números racionales $\mathbb{Q}$ como estructuras en la signatura $\{<\}$. Entonces $\langle \mathbb{R}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, sin embargo no son isomorfas pues $\mathbb{R}$ posee cardinalidad mayor a la de $\mathbb{Q}$.

Para justificar este ejemplo, debemos mostrar la equivalencia elemental entre $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$. Cuando deseamos probar que para un conjunto de fórmulas se cumple algo solemos pensar en un argumento de inducción sobre la formación de ellas, lamentablemente, para el conjunto de enunciados de un lenguaje, aún tan simple como $\{<\}$, tales argumentos no son posibles. Verificar la relación $\equiv$ es poco manejable. Por ello, describimos en seguida un concepto auxiliar que es importante por sí mismo.

Observe que por la condición $(2')$ de ser inmersión, si A y B son L-estructuras y $A \subseteq B$, entonces, considerando que la inclusión de A en B una inmersión, para cada fórmula atómica $\phi(\bar{x})$ de L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A, $A \vDash \phi(\bar{a})$ si y sólo si $B \vDash \phi(\bar{a})$. Ello motiva lo siguiente.

1.2 Definición. Sean A y B L-estructuras tales que $A \subseteq B$, decimos que A es una subestructura elemental de B o que B es una extensión elemental de A, denotado por $A \preccurlyeq B$, si

$$A \vDash \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } B \vDash \varphi(\bar{a}),$$

para cada fórmula $\varphi(\bar{x})$ de L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A.

No toda subestructura es una subestructura elemental, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Considere a $\langle \omega, < \rangle$, la estructura de los números naturales con su orden usual, y $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, la estructura de los números enteros con su orden usual. Entonces

$\langle\omega,<\rangle \subseteq \langle\mathbb{Z},<\rangle$, pues $\omega \subseteq \mathbb{Z}$ y el orden de $\mathbb{Z}$ coincide con el de ω sobre éste; sin embargo, considerando la fórmula $\varphi(y) = \neg\exists x(x < y)$, tenemos que $\langle\omega,<\rangle \vDash \varphi(0)$, ya que 0 es el primer elemento de ω, y en cambio no es cierto que $\langle\mathbb{Z},<\rangle \vDash \varphi(0)$, pues por ejemplo $-1 < 0$. Esto muestra que $\langle\omega,<\rangle$ no es una subestructura elemental de $\langle\mathbb{Z},<\rangle$.

Ejemplo 2. Considere nuevamente a los números naturales con su orden usual $\langle\omega,<\rangle$. Sea 2ω el conjunto de los números naturales pares. Entonces $\langle 2\omega,<\rangle$ es una subestructura de $\langle\omega,<\rangle$, más aún, estas dos estructuras son isomorfas debido al conocido teorema de clasificación para el tipo de orden de los números naturales (vea [ACyM 11, Teorema 1.14 pág. 8]). Entonces $\langle\omega,<\rangle \equiv \langle 2\omega,<\rangle$. Sin embargo, sea $\varphi(x,y)$ la fórmula $\exists z(x < z < y)$, tenemos que $\langle\omega,<\rangle \vDash \varphi(0,2)$ pero no es cierto que $\langle 2\omega,<\rangle \vDash \varphi(0,2)$. Así, $\langle 2\omega,<\rangle$ no es una subestructura elemental de $\langle\omega,<\rangle$.

El primer ejemplo muestra que la relación de ser subestructura elemental está estrictamente contenida en la de ser subestructura. En otro orden de ideas, es claro que si $A \preccurlyeq B$, entonces $A \equiv B$; pero el segundo ejemplo tiene el mérito de mostrar que el recíproco de esto es falso, provisto que $A \subseteq B$ y aún cuando $A \cong B$.
Curiosamente, la relación $\preccurlyeq$ es más manejable que la relación $\equiv$, pues podemos usar el argumento de inducción sobre la formación de fórmulas de L para verificar si en efecto se da la relación $\preccurlyeq$.

1.3 Teorema (***Criterio de Tarski-Vaught para subestructura elemental***). *Sean A y B dos L-estructuras tales que $A \subseteq B$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *A es una subestructura elemental de B.*

(b) *para cada fórmula $\varphi(\bar{x},y)$ de L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A, si $B \vDash \exists y\varphi(\bar{a},y)$, entonces existe d en A tal que $B \vDash \varphi(\bar{a},d)$.*

Prueba. Supongamos que A es una subestructura elemental de B. Sean $\varphi(\bar{x},y)$ una fórmula de L y $\bar{a}$ una tupla de elementos de A tales que $B \vDash \exists y\varphi(\bar{a},y)$, entonces $A \vDash \exists y\varphi(\bar{a},y)$ por ser A una subestructura elemental de B y a que los elementos de $\bar{a}$ están en A. Entonces existe un elemento $d \in \operatorname{dom} A \subseteq \operatorname{dom} B$ tal que $A \vDash \varphi(\bar{a},d)$, entonces $B \vDash \varphi(\bar{a},d)$ por ser A subestructura elemental de B.

En las dirección inversa, supongamos el enunciado en el inciso (b). Probaremos que $A \preccurlyeq B$ por inducción sobre la formación de fórmulas. Como antes habíamos hecho notar, si $A \subseteq B$, por el inciso $(2')$ de la definición de ser subestructura, tenemos que para cada fórmula atómica $\varphi(\bar{x})$ de L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A, $A \vDash \varphi(\bar{a})$ si y sólo si $B \vDash \varphi(\bar{a})$. Sea $\bar{a}$ una tupla de elementos de A. Si $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{y}) \wedge \chi(\bar{z})$, entonces $A \vDash \psi(\bar{a}) \wedge \chi(\bar{a})$ si y sólo si $A \vDash \psi(\bar{a})$ y $A \vDash \chi(\bar{a})$ si y sólo si, por la hipótesis de inducción, $B \vDash \varphi(\bar{a})$ y $B \vDash \chi(\bar{a})$, lo que es equivalente a que $B \vDash \psi(\bar{a}) \wedge \chi(\bar{a})$. Si $\varphi(\bar{x}) = \neg\psi(\bar{x})$, $A \vDash \neg\psi(\bar{a})$ si y sólo si no es cierto que $A \vDash \psi(\bar{a})$ si y sólo si, por la hipótesis de inducción, no es cierto que $B \vDash \psi(\bar{a})$ si y sólo si $B \vDash \neg\psi(\bar{a})$. Si $\varphi(\bar{x}) = \exists y\psi(\bar{x},y)$ y $A \vDash \exists y\psi(\bar{a},y)$, entonces hay $d \in \operatorname{dom} A$ tal que $A \vDash \psi(\bar{a}, d)$, por la hipótesis de inducción, $B \vDash \psi(\bar{a}, d)$, de donde $B \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y)$. Como podemos notar, hasta este momento no hemos usado la hipótesis en el inciso (b); ahora es tiempo: En la otra dirección, si $B \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y)$, entonces por el inciso (b) existe d en A tal que $B \vDash \psi(\bar{a}, d)$, lo que, por la hipótesis de inducción, implica que $A \vDash \psi(\bar{a}, d)$, de donde $A \vDash \exists y \psi(\bar{a}, y)$, pues d está en A. Concluimos que $A \preccurlyeq B$. ■

Por el teorema anterior, de una estructura a una subestructura elemental de ésta "los existenciales bajan", es decir, si la estructura mayor hace válida una fórmula cuantificada existencialmente con parámetros de la menor, entonces la menor también hace válida la fórmula. Un replanteamiento del teorema anterior nos da el siguiente útil resultado.

1.4 Corolario. *Si A, B son L-estructuras y $A \subseteq B$, entonces A es una subestructura elemental de B si y sólo si, para cada fórmula $\varphi(\bar{x}, y)$ de L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A, si para algún elemento b de B, $B \vDash \varphi(\bar{a}, b)$, entonces $B \vDash \varphi(\bar{a}, d)$ para algún elemento d de A.* ■

Ejemplo. Para concluir nuestro ejemplo previo mostraremos que $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ es una extensión elemental de $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$; por una observación anterior de ello se desprendería que $\langle \mathbb{R}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, como deseábamos mostrar. Sea $\varphi(\bar{x})$ una fórmula del lenguaje $\{<\}$ y $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ una n-tupla de números racionales tales que $\langle \mathbb{R}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{a}, b)$ para un número real b; si b es un número racional, no hay nada que probar por lo que podemos suponer que b no es un número racional. Además, supongamos que los elementos de $\bar{a}$ están ordenados crecientemente ($a_0 < \ldots < a_{n-1}$). Tenemos los siguientes tres casos.

Caso 1. Si $b < a_0$. Sea d un número racional entre b y a_0, entonces existe un isomorfismo de $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ en sí mismo que deja fijo a cada a_i y envía a b en d. Específicamente, el isomorfismo está dado por

$$\begin{cases} x + (d - b) & \text{si } x \leq b, \\ \dfrac{a_0 - d}{a_0 - b}(x - b) + d & \text{si } b \leq x \leq a_0, \\ x & \text{si } a_0 \leq x. \end{cases}$$

Caso 2. Si $a_{n-1} < b$. Tomando un número racional d entre a_{n-1} y b, como en el caso anterior, podemos hallar un isomorfimo de $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ en sí mismo que deja fijo a cada a_i y envía a b en d.

Caso 3. Si $a_k < b < a_{k+1}$ con $k \leq n-2$. Sea d un número racional entre a_k y a_{k+1}, entonces existe un isomorfismo de $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ en sí mismo que fija a cada a_i y envía a b en d. Concretamente, el isomorfismo queda definido por

$$\begin{cases} x & \text{si } x \leq a_k \text{ o } a_{k+1} \leq x, \\ \dfrac{d - a_k}{b - a_k}(x - a_k) + a_k & \text{si } a_k \leq x \leq b, \\ \dfrac{a_{k+1} - d}{a_{k+1} - b}(x - b) + d & \text{si } b \leq x \leq a_{k+1}. \end{cases}$$

En cualquier caso, existe un número racional d y un isomorfismo g de $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ en sí mismo que deja fijo a a_i para $i = 0, \dots, n-1$, y que envía a b en d. Como g es isomorfismo y $\langle \mathbb{R}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{a}, b)$, tenemos que $\langle \mathbb{R}, < \rangle \vDash \varphi(g(\bar{a}), g(b))$, esto es, $\langle \mathbb{R}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{a}, d)$. Por el corolario anterior, concluimos que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \preccurlyeq \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

No es nuestra intención restar autoridad o envergadura a la lógica de primer orden, más bien, deseamos intrigar al lector con ciertas intereseantes cuestiones que yacen en el ejemplo anterior. Una vez que probamos que la estructura $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ es elementalmente equivalente a la estructura $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, teniendo en cuenta que ello significa que cualquier cosa que podamos expresar en la lógica de primer orden sobre alguna de ellas es también cierta sobre la otra y sabiendo a partir de nuestra formación matemática previa que estas estructuras son en realidad muy distintas, caemos en cuenta de que la lógica de primer orden no es suficiente para expresar en el lenguaje de los número reales (a saber, el lenguaje de un anillo con identidad ordenado $(+, \cdot, 0, 1, <)$) el axioma de compleción de los números reales. Observe que, de paso, el ejemplo prueba que ser un conjunto infinito numerable no es expresable como un enunciado de primer orden.

Podemos generalizar en cierta forma el concepto de subestructura elemental. Si entre las L-estructuras A y B existe una inmersión f, entonces $A \vDash \phi(\bar{a})$ si y sólo si $B \vDash \phi(f(\bar{a}))$ para cualquier fórmula atómica $\phi(\bar{x})$ de L y cada tupla de elementos de A. El siguiente concepto se motiva a partir de esto último.

1.5 Definición. Sean A y B estructuras en el lenguaje L y f un L-homomorfismo de A en B, decimos que f es una (L-)inmersión elemental si para cada fórmula $\varphi(\bar{x})$ de L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A tenemos que

$$A \vDash \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } B \vDash \varphi(f(\bar{a})).$$

Si existe una inmersión elemental de A en B, decimos que A es elementalmente inmersible en B. Claramente, si f es una inmersión elemental de A en B entonces f es una inmersión de A en B (tome $\phi(x, y)$ como la fórmula $x = y$ para ver que f es inyectiva). Observe además que el hecho de que A sea subestructura elemental de B es equivalente a que la inclusión $i : A \to B$ sea una inmersión elemental de A en B. En este sentido es que generalizamos el concepto de subestructura elemental.

Debido a que un isomorfismo entre estructuras en el mismo lenguaje preserva todas las fórmulas del lenguaje, todo isomorfismo es una inmersión elemental. Es interesante que encontrar un ejemplo de una inmersión elemental que no sea isomorfismo y que no sea una inclusión no es una tarea simple, aunque por ejemplo en la Teoría de los Conjuntos las inmersiones elementales son herramientas de uso cotidiano. Tan sólo para comentar un ejemplo, cualquier inmersión entre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ y cualquier otro campo algebraicamente cerrado es elemental.

1.2. Algunos teoremas clásicos

El teorema de compacidad, sin duda alguna, es uno de los resultados más valiosos sobre la lógica de primer orden. Muchos resultados en la teoría de modelos descansan sobre este teorema. El lector puede consultar una prueba de este teorema en [End 05, pág. 142]

1.6 Teorema (***Compacidad para la lógica de primer orden***)**.** *Sea T una teoría en un lenguaje L de primer orden. Si cada subconjunto finito de T tiene un modelo, entonces T tiene un modelo.* ■

Una de las más importantes consecuencias del teorema de compacidad es el teorema de Löwenheim-Skolem. Una prueba de este resultado puede consultarse en [End 05, pág. 154]. Recordemos que si L es una signatura, la cardinalidad del lenguaje L, es el máximo entre la cardinalidad de L, pensado como un simple conjunto de símbolos, y el cardinal ω.

1.7 Teorema (***Teorema de Löwenheim-Skolem ascendente***)**.** *Sea A una L-estructura infinita y κ un cardinal infinito tal que $|A| + |L| \leq \kappa$. Entonces A tiene una extensión elemental de cardinalidad κ.* ■

La segunda parte del teorema de Löwenheim-Skolem no requiere del teorema de compacidad; para deducirla se desarrolla el concepto de Skolemización de una teoría (vea [Hod 93, Sección 3.1]).

1.8 Teorema (***Teorema de Löwenheim-Skolem descendente***)**.** *Sea A una L-estructura, X un subconjunto de elementos de A y κ un cardinal tal que $|X| + |L| \leq \kappa \leq |A|$. Entonces A tiene una subestructura elemental de cardinalidad κ cuyo dominio contiene a X.* ■

1.3. Construcciones básicas

El próposito de esta sección es presentar algunas construcciones de uso corriente en la teoría de modelos. Consideramos en adelante un lenguaje de primer orden L. A menudo nos enfrentamos al problema de encontrar una L-estructura que reúna ciertas características, para ello podemos proceder, por ejemplo, por medio del teorema de compacidad el cual nos asegura la existencia de una estructura. Otra forma de hacer lo anterior, y a menudo muy intuitiva, es construir la estructura poco a poco, digamos, de "pedacito" en "pedacito", para al final colectar todo este trabajo en una sola estructura que combinará o conservará las características que hayamos tenido cuidado de asegurar en cada paso de la construcción.

Cadenas

Esta es la construcción que adelantábamos al final del párrafo anterior. Comenzamos con un conjunto de estructuras y deseamos hallar una estructura que extienda a cada una de las estructuras en el conjunto. Para ello, pronto, nos vemos en la necesidad de pedir compatibilidad entre los elementos del conjunto.

1.9 Definición. Sea $(A_i : i < \gamma)$ una sucesión de L-estructuras (γ es un ordinal, a veces llamamos a $(A_i : i < \gamma)$ una γ-sucesión). Decimos que $(A_i : i < \gamma)$ es una cadena si $A_i \subseteq A_j$ siempre que $i \leq j < \gamma$.

La prueba del siguiente lema aclara por qué debemos pedir un poco más a las estructuras en el conjunto.

1.10 Lema. *Sea $(A_i : i < \gamma)$ una cadena de L-estructuras, entonces existe una L-estructura B tal que $A_i \subseteq B$ para cada $i < \gamma$.*

Prueba. Definimos explícitamente a B. Sea $\operatorname{dom} B = \bigcup_{i<\gamma} \operatorname{dom} A_i$. Si c es un símbolo de constante en L, entonces para $i < j < \gamma$, como A_i es una subestructura de A_j, $c^{A_i} = c^{A_j}$, es decir, c^{A_i} es independiente de la elección de i. Así, definimos $c^B = c^{A_0}$. Si F es un símbolo de función en L de n argumentos y $\bar{a}$ es una n-tupla de elementos de $\operatorname{dom} B$, entonces los elementos que componen a $\bar{a}$ están en $\operatorname{dom} A_i$ para alguna $i < \gamma$, por la condición de que las estructuras forman una cadena. Observe que si $i < j < \gamma$, entonces $F^{A_i}(\bar{a}) = F^{A_j}(\bar{a})$, de donde, podemos definir $F^B(\bar{a}) = F^{A_i}(\bar{a})$. Por último, si R es un símbolo de relación en L de n argumentos y $\bar{a}$ es una n-tupla de elementos de $\operatorname{dom} B$, entonces $R^B(\bar{a})$ si $R^{A_i}(\bar{a})$ para algún $i < \gamma$. Tal definición es correcta pues $R^{A_i} \subseteq R^{A_j}$, siempre que $i < j < \gamma$ al ser A_i una subestructura de A_j. Entonces B es una L-estructura y es claro por su definición que B extiende a cada estructura A_i con $i < \gamma$. ■

A la estructura B obtenida mediante el lema anterior se le conoce como la unión de la cadena $(A_i : i < \gamma)$ y es denotada por $\bigcup_{i<\gamma} A_i$. Este resultado será básico a lo largo de todo el capítulo siguiente.

El concepto de subestructura es refinado mediante el de subestructura elemental, análogamente, el concepto de cadena viene a ser refinado por el concepto de cadena elemental.

1.11 Definición. Una γ-sucesión de L-estructuras $(A_i : i < \gamma)$ es una cadena elemental, si $A_i \preccurlyeq A_j$ siempre que $i \leq j < \gamma$.

En particular, cada cadena elemental de estructuras en un lenguaje L es una cadena. Así, si $(A_i : i < \gamma)$ es una cadena elemental, entonces podemos hablar de su unión $\bigcup_{i<\gamma} A_i$ gracias al lema 1.10. De hecho, en este caso, podemos asegurar un poco más de lo que nos permite tal resultado.

1.12 Teorema (***Lema de la cadena elemental de Tarski-Vaught***)**.** *Sea $(A_i : i < \gamma)$ una cadena elemental de L-estructuras. Entonces $A = \bigcup_{i<\gamma} A_i$ es una extensión elemental de A_i para cada $i < \gamma$.*

Prueba. Fijemos $i < \gamma$. Probaremos que $A \vDash \varphi(\bar{a})$ si y sólo si $A_i \vDash \varphi(\bar{a})$ para cada fórmula $\varphi(\bar{x})$ de L y cada tupla $\bar{a}$ de elementos de A_i. Naturalmente, procederemos por inducción sobre la formación de fórmulas. Por el lema 1.10, A_i es subestructura de A para cada $i < \gamma$, por lo que la equivalencia es válida si $\varphi(\bar{x})$ es una fórmula atómica de L. Los casos cuando $\varphi(\bar{x})$ es $\psi(\bar{y}) \wedge \chi(\bar{z})$ o $\neg\psi(\bar{x})$ son inmediatos. Supongamos que $\varphi(\bar{x})$ es $\exists y \psi(\bar{x}, y)$ y que la equivalencia vale para la fórmula $\psi(\bar{x}, y)$. Sea $\bar{a}$ una tupla de elementos en A_i. Si $A_i \vDash \varphi(\bar{a})$, entonces hay un elemento a de A_i tal que $A_i \vDash \psi(\bar{a}, a)$. Por la hipótesis de inducción $A \vDash \psi(\bar{a}, a)$ y, por la definición de A, deducimos que $A \vDash \varphi(\bar{a})$. Por otro lado, si $A \vDash \varphi(\bar{a})$, entonces existe $j < \gamma$ tal que un elemento d de A_j cumple que $A \vDash \psi(\bar{a}, d)$. Observe que como en particular $(A_i : i < \gamma)$ es una cadena podemos suponer que $j \geq i$; de modo que los elementos que conforman a $\bar{a}$ también están en A_j. Por la hipótesis de inducción $A_j \vDash \psi(\bar{a}, d)$, por lo que $A_j \vDash \varphi(\bar{a})$. Como la cadena es elemental e $i \leq j$, $A_i \vDash \varphi(\bar{a})$. Así, A_i es una subestructura elemental de $A = \bigcup_{i<\gamma} A_i$, para cada $i < \gamma$. ■

Modificaciones del lenguaje

Contrastando con las construcciones anteriores, donde el lenguaje siempre permaneció fijo, ahora buscamos obtener nuevas estructuras a partir de una dada realizando modificaciones en el lenguaje. Dados dos lenguajes (de primer orden) L y L^+ con $L \subseteq L^+$, una L^+-estructura A puede ser considerada como una L-estructura, simplemente olvidando la interpretación (en A) de los símbolos que están en L^+ pero no en L (e interpretando los símbolos de L de la manera en que eran interpretados por A para L^+). A la estructura así obtenida se le denota por $A|_L$ y es llamada el reducto de A al lenguaje L. Si tenemos que C es el reducto al lenguaje L de una estructura A en el lenguaje L^+, A es llamada una expansión de C al lenguaje L^+. El siguiente resultado es en realidad muy claro teniendo presente la definición de L-homomorfismo.

1.13 Lema. *Sean L y L^+ lenguajes tales que $L \subseteq L^+$. Si A y B son L^+-estructuras y $f : A \to B$ es un homomorfismo, entonces f es también un homomorfismo, respecto al lenguaje L, de $A|_L$ en $B|_L$.* ■

Ocasionalmente puede suceder que el lenguaje que consideramos no es suficiente para expresar todo lo que deseamos. En realidad, muy a menudo extendemos el lenguaje, al menos con el fin de simplificar la escritura. Por ejemplo, cuando definimos alguna función o un elemento en la estructura solemos añadir un símbolo al lenguaje para referirnos en el futuro a tal función o elemento. En estos casos siempre tenemos claro que podemos sustituir tal símbolo por su definición o al menos justificar por medio de ésta el uso de aquél. Esta discusión nos llevaría a un concepto importante en la teoría de modelos: el de definibilidad. Remitimos al lector a [Hod 93, secciones 2.1-2.2] si se encuentra interesado. A continuación, nos limitaremos a considerar el caso cuando deseamos referirnos a algunos elementos de la estructura como constantes, es decir, nombrarlos.

Sea A una L-estructura. Dada una tupla $\bar{a}$ de elementos de A posiblemente infinita[2], tomamos tantos símbolos de constante, distintos entre sí y distintos a los símbolos de constante en L, como componentes de $\bar{a}$. Digamos que éstos son $\{c_i\}_{i\in I}$ y que entonces $\bar{c}$ denota la tupla, posiblemente infinita, $(c_i)_{i\in I}$. Definimos el lenguaje $L(\bar{c})$ como el lenguaje que resulta al añadir los símbolos $\{c_i\}_{i\in I}$ a L. Convertimos a A en una $L(\bar{c})$-estructura $(A,\bar{a})$ sencillamente poniendo $c_i^{(A,\bar{a})} = a_i$, donde suponemos que la tupla $\bar{a}$ es $(a_i)_{i\in I}$. Si B es otra L-estructura podemos tomar tantos elementos de B como elementos en I y convertir a B en una $L(\bar{c})$ estructura $(B,\bar{b})$, donde $\bar{b}$ es la tupla que forman los elementos tomados de B, de manera que c_i nombra a b_i para cada $i \in I$.

1.14 Lema. *Suponga que A y B son L-estructuras y que $(A,\bar{a}),(B,\bar{b})$ son $L(\bar{c})$-estructuras. Entonces $f : (A,\bar{a}) \to (B,\bar{b})$ es un homomorfismo si y sólo si $f : A \to B$ es un homomorfismo tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Prueba. Supongamos que $f : (A,\bar{a}) \to (B,\bar{b})$ es un homomorfismo, es decir, f es una función de $\operatorname{dom}(A,\bar{a})$ en $\operatorname{dom}(B,\bar{b})$ que preserva correctamente la interpretación. En particular para cada símbolo de c constante en L, $f(c^A) = f(c^{(A,\bar{a})}) = c^{(B,\bar{b})} = c^B$. Las condiciones para símbolos de función o relación en L son válidas pues las estructuras A y $(A,\bar{a})$ tienen el mismo dominio (y los símbolos de función o relación en L son los mismos que en $L(\bar{c})$). Así $f : A \to B$ es un homomorfismo. Por último, $f(\bar{a}) = f(\bar{c}^{(A,\bar{a})}) = \bar{c}^{(B,\bar{b})} = \bar{b}$, esto es, f envía $\bar{a}$ en $\bar{b}$.

En la dirección contraria, supongamos que $f : A \to B$ es un homomorfismo que envía a $\bar{a}$ en $\bar{b}$. Entonces $f(\bar{c}^{(A,\bar{a})}) = f(\bar{a}) = \bar{b} = \bar{c}^{(B,\bar{b})}$, mientras que las condiciones para símbolos de función o relación en $L(\bar{c})$ se satisfacen pues son los mismos que en L. Concluimos que f es un homomorfismo de $(A,\bar{a})$ en $(B,\bar{b})$. ■

Por comodidad, si X es un conjunto de elementos de la L-estructura A, denotaremos por $L(X)$ al lenguaje L aumentado por un símbolo de constante por cada elemento de X. Bajo esta notación, denotaremos por $\mathrm{Th}_X(A)$ al conjunto de $L(X)$-enunciados que son válidos en A. Esto es,

$$\mathrm{Th}_X(A) = \{\varphi \mid \ \varphi \text{ es un enunciado de } L(X) \text{ y } A \vDash \varphi\}.$$

[2]debe disculparse el uso de la palabra tupla en este caso; en realidad deberíamos decir: sea $\bar{a}$ una tupla o una sucesión infinita de elementos de A.

Observe que $\mathrm{Th}(A) \subseteq \mathrm{Th}_X(A)$, para cualquier conjunto X de elementos de A.

1.4. Los modelos de una teoría

En esta sección adentraremos en el aspecto de los modelos de una teoría. Cabe decir que para algunos autores el estudio de los modelos de una teoría, por ejemplo clasificarlos, contarlos o desarrollar un proceso efectivo que decida cuándo una estructura es modelo de la teoría, es el objetivo de la teoría de modelos; abundan, por ejemplo, los esfuerzos por averiguar el número de modelos de una teoría, salvo isomorfismo claro. Hay una conjetura, conocida como la conjetura de Vaught, que establece que cualquier teoría numerable en un lenguaje de primer orden tiene a lo más ω o exactamente 2^ω modelos. Se conocen resultados cercanos a la solución de esta conjetura, M. Morley probó que si la teoría tiene menos de 2^ω modelos, de hecho tiene a lo más ω_1 modelos y S. Shelah probó que la conjetura de Vaught es cierta para teorías ω-estables. Uno de los más grandes avances recientes sobre esta conjetura, de hecho sobre su falsedad, están siendo dados por R. Knight; aparentemente Knight ha logrado dar un contraejemplo a la conjetura, pero no se ha logrado un concenso sobre la validez de su argumento.

Dados una teoría T en el lenguaje L y un enunciado φ de L, escribimos $T \vDash \varphi$ si todo modelo de T es a la vez modelo de φ, en este caso decimos que φ es una consecuencia de T o que de T se deduce φ. Si $\varphi(\bar{x})$ y $\psi(\bar{x})$ son fórmulas de L, decimos que son equivalentes según, o módulo, la teoría T si $T \vDash \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Note que si T es una teoría sin modelos, cualquier fórmula es consecuencia de T, incluso las contradicciones. Siendo natural evitar esta trivialización, en lo posterior, cada vez que lea "sea T una teoría en el lenguaje L", el lector debe suponer que tal teoría posee un modelo.

Completud

Si A es una L-estructura y φ es un enunciado de L, entonces $\varphi \in \mathrm{Th}(A)$ o $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(A)$, de donde todo modelo de $\mathrm{Th}(A)$ será modelo de φ o todo modelo de $\mathrm{Th}(A)$ será modelo de $\neg\varphi$, es decir, $\mathrm{Th}(A) \vDash \varphi$ o $\mathrm{Th}(A) \vDash \neg\varphi$. Podemos abstraer esta propiedad para cualquier teoría.

1.15 Definición. Sea T una teoría en el lenguaje de primer orden L. Decimos que T es completa en caso de que $T \vDash \varphi$ o $T \vDash \neg\varphi$, para cada enunciado φ de L.

De inmediato podemos conectar esta definición con algunos conceptos ya estudiados.

1.16 Teorema. *Sea T una teoría en el lenguaje L. Entonces T es completa si y sólo si cualesquiera dos modelos de T son elementalmente equivalentes.*

Prueba. Supongamos que T tiene dos modelos A y B que no son elementalmente equivalentes, entonces existe un enunciado φ de L tal que $A \vDash \varphi$ y $B \vDash \neg\varphi$. Así, ni φ ni $\neg\varphi$ son consecuencia de T. Por otro lado, si cualesquiera dos modelos de T son elementalmente equivalentes y φ es un enunciado de L, tenemos que todo modelo de T hace válido a φ o todo modelo de T hace válido a $\neg\varphi$. Es decir, el enunciado φ o el enunciado $\neg\varphi$ es consecuencia de T. ∎

Por lo visto previamente, la teoría de una estructura A siempre es completa. Lo que resulta más interesante es que el conjunto de consecuencias de una teoría completa es siempre la teoría de una estructura; hecho que será consecuencia del próximo corolario, el cual también muestra una propiedad muy útil de las teorías completas.

1.17 Corolario. *Sea T una teoría completa en L y A una L-estructura que es modelo de T. Entonces $T \vDash \varphi$ si y sólo si $A \vDash \varphi$, para cada enunciado φ de L.*

Prueba. Sea φ un enunciado de L. Si $T \vDash \varphi$, es obvio que $A \vDash \varphi$ por la definición de ser deducible a partir de T. Por otro lado, si $A \vDash \varphi$, en cualquier otro modelo de T debe también ser válido φ por el teorema anterior, así que $T \vDash \varphi$. ∎

En un apartado futuro mostraremos que la teoría del orden denso sin extremos es completa. Por ahora podemos inducir un ejemplo proveniente del álgebra.

Ejemplo. Un campo algebraicamente cerrado K es un campo en el cual todo polinomio no constante con coeficientes en K tiene una raíz en K. Por ejemplo, el campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, mientras que los campos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no lo son. Considere la teoría de los campos algebraicamente cerrados de característica 0, denotada por $\mathbf{ACF_0}$, esta es la teoría que contiene todos los axiomas de ser un campo añadiendo los siguientes enunciados:

- $p \cdot 1 \neq 0$ para cada $p \in \mathbb{N}^+$;
- $\forall a_0, \ldots, a_n \exists x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0)$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$.

Entonces la teoría $\mathbf{ACF_0}$ es completa, afirmación que probaremos en el siguiente apartado.

Categoricidad

Después de la caracterización para teorías completas dada en el teorema 1.16 uno puede preguntarse por otro tipo de propiedad que cumplan todos los modelos de la teoría. Por ejemplo, que para cualesquiera dos modelos de T entre los cuales exista una inmersión, tal inmersión siempre sea elemental; esta propiedad fue estudiada por A. Robinson, quien llamó a esta condición modelo completud. Así, una teoría T es modelo completa si cada inmersión entre dos modelos de T es elemental. Como otro ejemplo, quizá más natural que el de modelo completud, podemos pensar en una teoría cuyos modelos sean todos isomorfos; éste es un concepto importante.

Una teoría es categórica si cualesquiera dos de sus modelos son isomorfos. Si la teoría tiene un modelo infinito, entonces no puede ser categórica, sencillamente porque el teorema de Löwenheim-Skolem (página 8) asegura que la teoría tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita.

Por lo tanto, una teoría categórica sólo puede tener modelos finitos. Además, cualquier teoría categórica debe ser completa. En efecto, la categoricidad implica que cualesquiera dos modelos de la teoría son elementalmente equivalentes y esto, por una proposición anterior, significa que la teoría es completa.

Más aún, podemos probar que lo recíproco de lo visto en el párrafo anterior es cierto también, es decir, que cualquier teoría completa que tiene algún modelo finito es categórica. Primero verificaremos un hecho que ya habíamos previsto.

1.18 Proposición. *Sean A y B L-estructuras elementalmente equivalentes. Si A es finita, entonces A y B son isomorfas.*

Prueba. Si la cardinalidad de A es n para algún número natural n, el enunciado de primer orden que dice que existen exactamente n elementos, a saber,

$$\exists x_0, \ldots, x_{n-1} \left(\bigwedge_{i<j<n} x_i \neq x_j \wedge \forall x (\bigvee_{i<n} x = x_i) \right)$$

es válido en A. Por lo que B hace válido este enunciado y necesariamente B también tiene exactamente n elementos.

Supongamos que $\operatorname{dom} A = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Sean $c_0, \ldots, c_{n-1}$ símbolos distintos de constante que no estén en L. Denotaremos $\bar{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ y para $m \leq n$, $\bar{c}|_m = (c_0, \ldots, c_{m-1})$; similarmente queda definida la notación $\bar{a}|_m$. Definimos $A_0 = A$ y para $0 < m \leq n$ definimos $A_m = (A, \bar{a}|_m)$. Entonces A_m es una $L(\bar{c}|_m)$-estructura y si $k < m$, A_k es reducto de A_m. Definiremos para cada $m \leq n$, una $L(\bar{c}|_m)$-estructura B_m de tal forma que $A_m \equiv B_m$ y siempre que $k < m \leq n$ se tenga que B_k sea reducto de B_m.

Pongamos $B_0 = B$, entonces por hipótesis $B_0 \equiv A_0$. Supongamos que B_m, para un $m < n$, ha sido definida de forma que $A_m \equiv B_m$ y B_m es una expansión de cada B_k si $k < m$. Para definir a B_{m+1} debemos dar una interpretación adecuada al símbolo c_m, necesitamos que $c_m^{B_{m+1}}$ sea un elemento de B que haga válidos exactamente a los mismos enunciados que hace válidos $c_m^{A_{m+1}}$ en A_{m+1}. Sea ϕ un enunciado de $L(\bar{c}|_{m+1})$ en el que sí aparece c_m y tal que $A_{m+1} \vDash \phi$. Consideremos la $L(\bar{c}|_m)$-fórmula $\phi'(x)$ que resulta de sustituir por la variable x cada una de las apariciones de c_m en ϕ. Entonces $\exists x \phi'(x)$ es un $L(\bar{c}|_m)$-enunciado. Más aún, veamos que es un $L(c|_m)$-enunciado válido en A_m . Como $A_{m+1} \vDash \phi$, $A_{m+1} \vDash \phi'(c_m^{A_{m+1}})$; pero $c_m^{A_{m+1}}$ es un elemento de $\operatorname{dom} A_{m+1}$ y $\operatorname{dom} A_{m+1}= \operatorname{dom} A_m$, así que $A_m \vDash \phi'(c_m^{A_{m+1}})$. Lo anterior implica que $A_m \vDash \exists x \phi'(x)$.

Ahora, como $A_m \equiv B_m$, tenemos que $B_m \vDash \exists x \phi'(x)$. Denotemos por $\hat{\phi}$ al conjunto $\{b \in \operatorname{dom} B \mid B_m \vDash \phi'(b)\}$; por lo anterior, $\hat{\phi} \neq \emptyset$. Esto ocurre para cada enunciado ϕ en el que sí aparece el símbolo c_m y que es válido en A_{m+1}, pero lo que buscamos es un elemento de $\operatorname{dom} B$ que esté en todos y cada uno de los conjuntos $\hat{\phi}$ para cada uno de estos enunciados. Necesitamos probar que si

$$S = \{\hat{\phi} \mid \phi \text{ es un } L(\bar{c}|_{m+1})\text{-enunciado en el que sí aparece } c_m \text{ y } A_{m+1} \vDash \phi\},$$

entonces $\bigcap S \neq \emptyset$. Primero que nada, observemos que S es no vacío y finito. Consideremos el enunciado α como $c_m = c_m$, este enunciado es claramente válido en A_{m+1} y por lo tanto $\hat{\alpha}$ está en S. También S es finito, pues es un subconjunto de la potencia de $\operatorname{dom} B$, y ya verificamos que B es finita. Veamos que en efecto $\bigcap S \neq \emptyset$. Supongamos que $S = \{\hat{\phi}_0, \ldots, \hat{\phi}_r\}$, entonces ψ definido como la fórmula $\phi_0 \wedge \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r$ es un $L(\bar{c}|_{m+1})$ enunciado en el cual c_m sí aparece (pues aparece en cada ϕ_k) y que de hecho es válido en A_{m+1}, al ser una conjunción finita de enunciados válidos en A_{m+1}. Entonces $\hat{\psi} \neq \emptyset$ y claramente $\hat{\psi} \subseteq \hat{\phi}_k$ para cada $k \leq r$. De este modo, $\bigcap S$ contiene a $\hat{\psi}$ y, por lo tanto, no es el conjunto vacío.

Sea $b \in \bigcap S$, definimos $B_{m+1} = (B_m, b)$, es decir, la interpretación de c_m en B_{m+1} es b. Claramente B_{m+1} es una $L(\bar{c}|_{m+1})$-estructura y es una expansión de B_k siempre que $k < m + 1$. Sólo resta verificar que es elementalmente equivalente a A_{m+1} . Si ϕ es un $L(\bar{c}|_{m+1})$-enunciado, se tienen dos casos:

(a) Si ϕ es un $L(\bar{c}|_m)$-enunciado. Tenemos que $A_{m+1} \vDash \phi$ es equivalente a $A_m \vDash \phi$, pero como $A_m \equiv B_m$, esto es equivalente a que $B_m \vDash \phi$, que a su vez es equivalente a que $B_{m+1} \vDash \phi$.

(b) Si c_m sí aparece en ϕ. Si $A_{m+1} \vDash \phi$, $\hat{\phi}$ está en S y, por lo tanto, $B_{m+1} \vDash \phi'(c_m^{B_{m+1}})$, de donde $B_{m+1} \vDash \phi$. Por construcción, si $B_{m+1} \vDash \phi$, tenemos que A_{m+1} también hace válido a ϕ.

Hemos terminado la construcción de las estructuras B_m.

Estamos ahora en posición de poder definir el isomorfismo entre A y B; sea $f : A \longrightarrow B$ la función dada por $f(a_i) = c_i^{B_n}$. Entonces f es inyectiva pues si a_i y a_j son elementos de $\operatorname{dom} A$, entonces $c_i \neq c_j$ es válido en A_n. Como $A_n \equiv B_n$, el enunciado $c_i \neq c_j$ también es válido en B_n, es decir, $f(a_i) = c_i^{B_n} \neq c_j^{B_n} = f(a_j)$. Luego, como $\operatorname{dom} A$ y $\operatorname{dom} B$ son conjuntos con la misma cardinalidad finita, al ser f inyectiva también debe ser sobre. Por lo tanto, f es biyectiva.

Es de carácter técnico probar que f es un L-homomorfismo; por ejemplo, si R es un símbolo de relación en L de m argumentos y $A \vDash R^A(e_0, \ldots, e_{m-1})$, con $e_0, \ldots, e_{m-1}$ elementos de A, basta elegir correctamente a k de tal forma que en A_k ya hay nombres para los elementos $e_0, \ldots, e_{m-1}$. En tal caso, denotemos por φ al $L(c|_k)$-enunciado que resulta de sustituir cada e_i por su nombre en la fórmula $R(e_0, \ldots, e_{m-1})$; tenemos que $A_k \vDash \varphi$ (pues A_k es expansión de A). Por la construcción de B_k, $B_k \vDash \varphi$, y mediante la definición de f y la sustitución de nombre por elemento, concluimos que $B \vDash R^B(f(e_0), \ldots, f(e_{m-1}))$. Análogamente se verifican las condiciones para símbolos de función y de constante en L. Concluimos que $A \cong_f B$. ■

De esta última proposición obtenemos inmediatamente nuestra afirmación.

1.19 Proposición. *Sea T una teoría completa con un modelo finito. Entonces T es categórica.*

Prueba. Sea A el modelo finito de T. Si B es un modelo de T, B debe ser elementalmente equivalente a A, pues T es completa. Por la proposición anterior, B es isomorfo a A. ∎

Lo anterior señala que la condición de categoricidad de una teoría no es muy útil.

1.20 Definición. Sea T una teoría en el lenguaje L y κ un cardinal. Decimos que T es κ-categórica si cualesquiera dos modelos de T de cardinalidad κ son isomorfos. Una L-estructura A es κ-categórica en caso de que $\mathrm{Th}(A)$ sea κ-categórica.

Un ejemplo trivial es que cualquier conjunto finito es una $\emptyset$-estructura κ-categórica para cualquier cardinal finito o infinito κ. El siguiente resultado nos dice que para hallar teorías categóricas para alguna cardinalidad, basta buscar entre las teorías completas.

1.21 Teorema (*Criterio de Vaught*). *Sea T una teoría en L que no tiene modelos finitos, y κ un cardinal no menor a $|L|$. Si T es κ-categórica, entonces T es completa.*

Prueba. Si T no es completa, existe un enunciado φ de L que no es consecuencia de T. Así, existe un modelo de T que es modelo de φ y otro modelo de T que es modelo de $\neg\varphi$. Como T no tiene modelos finitos, estos dos modelos son infinitos. Por el teorema de Löwenheim-Skolem y la hipótesis de que $|L|+\omega \leq \kappa$, cada uno de estos modelos tiene una extensión elemental de cardinalidad κ, estas extensiones no pueden ser isomorfas pues una hace válida a φ, mientras la otra hace válida a $\neg\varphi$. Por lo tanto, T no es κ-categórica. ∎

Ejemplo 1. Con la técnica conocida como “back-and-forth”, que es por sí misma una herramienta muy interesante en teoría de modelos (para darse una idea de ello, véase [Hod 93, sección 3.2]), uno muestra que cualesquiera dos órdenes lineales densos, sin extremos y numerables son isomorfos (se puede ver una prueba de ello en [ACyM 11, pág. 23]). Así, si **TOD** es la teoría en el lenguaje $\{<\}$ que consta de los enunciados

(i) $\forall x\, x \not< x$, $\forall x, y, z(x < y \wedge y < z \to x < z)$ y $\forall x, y(x < y \vee y < x \vee x = y)$,

(ii) $\forall x \exists y(x < y)$ y $\forall x \exists y(y < x)$,

(iii) $\forall x, y(x < y \to \exists z(x < z < y))$;

los cuales definen a los órdenes lineales densos y sin extremos, entonces **TOD** es ω-categórica. Más aún, como no hay órdenes lineales densos y sin extremos finitos, por el teorema anterior **TOD** es completa. De manera extra, podemos observar que el teorema 1.16 nos da otra prueba de que $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ es elementalmente equivalente a $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, al ser ambas modelo de la teoría **TOD** y esta última ser completa.

Sin embargo, la teoría del orden lineal denso sin extremos del ejemplo anterior no es κ-categórica para cualquier cardinal no contable[3] κ. Un tratamiento de ello, y de algunos otros tópicos respecto a los órdenes lineales densos no contables, puede hallarse en [Ros 82, cap. 9].

Ejemplo 2. Considere la teoría $\mathbf{ACF_0}$, descrita en el apartado anterior. Un resultado muy conocido de álgebra afirma que cualesquiera dos extensiones algebraicamente cerradas de un campo son isomorfas (vea por ejemplo [Hun 94, Teorema 3.6, pág. 259]). Esto en particular implica que cualesquiera dos campos algebraicamente cerrados con la misma cardinalidad y misma característica son isomorfos (pues ambos tiene el mismo grado de trascendecia sobre su campo primo); en otras palabras, $\mathbf{ACF_0}$ es κ-categórica para cualquier cardinal κ. Como los modelos de $\mathbf{ACF_0}$ son infinitos (todos los campos finitos tienen necesariamente característica positiva), concluimos por el criterio de Vaught que $\mathbf{ACF_0}$ es completa, como deseábamos verificar.

Además podemos mostrar que la hipótesis de que la teoría sólo tenga modelos infinitos es imprescindible en el criterio de Vaught, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Considere la teoría T de los grupos en los que todo elemento tiene orden 2 (cada elemento es igual a su inverso). Supongamos que G es un modelo infinito de T, es decir, un grupo en el que cada elemento tiene orden 2. Al multiplicar por x a la izquierda y por y a la derecha, la siguiente igualdad nos permite concluir que G es abeliano, $e = (xy)^2 = xyxy$. Podemos ver que G es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Z}_2$, simplemente definimos la estructura por medio de $1 \cdot x = x$ y $0 \cdot x = e$, para cada elemento x de G. Más aún, al ser G infinito, si β es una base de G, el número total de combinaciones lineales de elementos de β con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ es $2|\beta|$. Lo anterior fuerza a que la cardinalidad de β sea $|G|$ y con ello G debe tener dimensión $|G|$ sobre $\mathbb{Z}_2$.

Es claro ahora que cualquier otro modelo infinito de T con la misma cardinalidad que G es isomorfo a G (pues serían espacios vectoriales de la misma dimensión sobre $\mathbb{Z}_2$). Esto muestra que T es κ-categórica para cada cardinal infinito. Sin embargo, T no puede decidir el enunciado $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$, ya que el grupo abeliano $\mathbb{Z}_2$ es modelo de T y en él es cierto este enunciado, pero en la suma directa $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$, que también es modelo de T, no lo es. Así, T no es completa. La falla proviene de que T tiene un modelo finito, a saber, $\mathbb{Z}_2$.

En este caso es muy fácil encontrar una extensión de esta teoría que sí sea completa; considere el enunciado ψ_n que asegura que hay exactamente n elementos, entonces $T \cup \{\neg \psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una teoría completa en virtud del criterio de Vaught.

El concepto de κ-categoricidad tendrá un papel central en la discusión de los próximos capítulos; otros aspectos o sofisticaciones del concepto de κ-categoricidad tendrán lugar cuando sea natural su estudio.

[3] En todo este trabajo, contable refiere a una cantidad (cardinalidad) finita o numerable

Universalidad

Entre los muchos importantes conceptos de la Teoría de Modelos que podemos definir con el trabajo previo en este capítulo cabe mencionarse el de universalidad. Posteriormente —en los capítulos segundo y cuarto— presentaremos un concepto similar al de este apartado.

1.22 Definición. Sea κ un cardinal. Una L-estructura A es κ-universal si cualquier L-estructura de cardinalidad menor que κ y elementalmente equivalente a A es elementalmente inmersible en A. A es universal si es $|A|^+$-universal.

Observe que de tener una teoría completa T y un cardinal κ, un modelo κ-universal de T es una estructura en la cual cualquier otro modelo de T de cardinalidad menor a κ es elementalmente inmersible.

No es nuestro própósito mostrar todo el poder de estas definiciones, que unidas a otros conceptos, principalmente el de saturación, llevan a construcciones y caracterizaciones de modelos muy especiales. Tan sólo mencionamos algunos aspectos, más bien triviales, de estos conceptos.

1.23 Teorema. *Sea A una L-estructura κ-universal para un cardinal κ. Si λ es un cardinal menor que κ, entonces A es λ-universal.* ■

Ejemplo. Toda estructura finita A es κ-universal para cualquier cardinal $\kappa > |A|$. Para verificar esto, sea A una L-estructura. Observe que la condición de que la estructura tenga cardinalidad menor que κ es en este caso superflua, pues si B es una L-estructura elementalmente equivalente a A, entonces B tiene la misma cardinalidad que A (pág. 14). En la proposición 1.18 probamos que bajo estas hipótesis, A y B son isomorfas. El isomorfismo (o su función inversa) es precisamente el testigo de la inmersibilidad de B en A.

El lector no volverá a ver en parte alguna de este trabajo los conceptos de universalidad de esta sección. Sin embargo, posteriormente estableceremos el concepto de universalidad respecto a una clase de estructuras. No deben confundirse estos usos de universalidad que, aunque dejan una sensación de familiaridad, no son el mismo.

Eliminación de Cuantificadores

Una fórmula de L es libre de cuantificadores si ningún cuantificador (universal o existencial) aparece en ella. Como veremos más adelante, cuando lleguemos a los resultados que perseguimos en el presente trabajo, las fórmulas sin cuantificadores tendrán un papel importante. El concepto relacionado con ellas es el siguiente.

1.24 Definición. Sea T una teoría en el lenguaje L. Decimos que T tiene o admite eliminación de cuantificadores si cada fórmula $\varphi(\bar{x})$ de L es equivalente módulo T a una fórmula libre de cuantificadores de L.

Si la teoría T tiene eliminación de cuantificadores, entonces todas sus consecuencias son equivalentes a fórmulas sin cuantificadores, por lo que, por ejemplo, para saber si T es completa basta verificar si cada enunciado libre de cuantificadores es consecuencia o no de T. De hecho, continuando el análisis previo encontraremos que, entre otras cosas, la eliminación de cuantificadores implica la decidibilidad de la teoría (esto es, podemos decidir efectivamente si un enunciado es o no consecuencia de la teoría), siempre que su lenguaje sea recursivo (vea [Hod 93, sección 2.7]).

Para el siguiente ejemplo se debe tener en mente que para cualesquiera dos tuplas $\bar{a} = (a_0 \dots, a_{n-1})$ y $\bar{b} = (b_0, \dots, b_{n-1})$ de elementos de $\mathbb{Q}$, tales que $a_0 < \dots < a_{n-1}$ y $b_0 < \dots < b_{n-1}$, existe un isomorfismo de $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ en sí mismo que envía a_i en b_i, para cada $i < n$. Dicho de otra forma, cualquier isomorfismo entre partes finitas de $\mathbb{Q}$ se puede extender a un isomorfismo de todo $\mathbb{Q}$ en sí mismo. Pero no nos adelantemos, ya vendrá una prueba y una discusión de esta situación en el siguiente capítulo.

Ejemplo. La teoría del orden denso, **TOD**, admite eliminación de cuantificadores. Por el ejemplo de una sección anterior (pág. 16), **TOD** es completa. Así, si φ es un enunciado del lenguaje $\{<\}$ y **TOD**$\vDash \varphi$, entonces **TOD**$\vDash (\varphi \leftrightarrow x_0 = x_0)$; por otro lado, si **TOD** $\vDash \neg\varphi$, tenemos que **TOD** $\vDash (\varphi \leftrightarrow x_0 \neq x_0)$. Para continuar, una observación importante es que por el corolario 1.17, para cualquier fórmula $\varphi(\bar{x})$ del lenguaje $\{<\}$, si existe una fórmula $\psi(\bar{x})$ libre de cuantificadores tal que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$, entonces **TOD**$\vDash$ $\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. Sea, entonces, $\varphi(\bar{x})$ una fórmula del lenguaje $\{<\}$. Si $\bar{a} = (a_0, \dots, a_{n-1})$ es una tupla de elementos de $\mathbb{Q}$, entonces los elementos que componen a $\bar{a}$ deben estar ordenados de alguna forma, por lo que $\bar{a}$ debe satisfacer en $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ alguna de las fórmulas $\psi_s(\bar{x})$ que describimos en seguida. Para cada función $s : n \times n \to 3$ sea,

$$\psi_s(\bar{x}) = \bigwedge_{s(i,j)=0} x_i = x_j \wedge \bigwedge_{s(i,j)=1} x_i < x_j \wedge \bigwedge_{s(i,j)=2} x_i > x_j.$$

Estas fórmulas describen todos los posibles ordenamientos de n elementos (probablemente algunas de las fórmulas ψ_s describen un ordenamiento imposible). Definamos a S_φ como el conjunto de todas las funciones s de $n \times n$ en 3 para las cuales existe una tupla $\bar{a}$ de elementos de $\mathbb{Q}$ tal que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{a}) \wedge \psi_s(\bar{a})$. Si S_φ es vacío, significa que ninguna tupla de elementos de $\mathbb{Q}$ satisface a $\varphi(\bar{x})$, de donde $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow x_0 \neq x_0$. En contraste, si S_φ no es vacío, definimos la fórmula $\psi(\bar{x})$ como $\bigvee_{s \in S_\varphi} \psi_s(\bar{x})$. Por la definición de S_φ tenemos que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})$. Ahora verifiquemos la validez de la implicación recíproca, si hay una tupla $\bar{b}$ tal que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \psi(\bar{b})$, entonces existe una función $s \in S_\varphi$ tal que $\bar{b}$ satisface a $\psi_s(\bar{x})$. Como S_φ no es vacío, existe una tupla $\bar{a}$ de elementos de $\mathbb{Q}$ tal que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{a}) \wedge \psi_s(\bar{a})$. Observe que la validez en $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ de las fórmulas $\psi_s(\bar{a})$

y $\psi_s(\bar{b})$, tenemos que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ están ordenados de la misma forma, es decir, existe una isomorfismo parcial entre estas tuplas. Por lo dicho antes de iniciar el ejemplo, existe un isomorfismo de $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ en sí mismo que envía $\bar{a}$ en $\bar{b}$. Así, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \varphi(\bar{b})$ y entonces, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})$.

Por lo tanto, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \vDash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$, donde claramente $\psi(\bar{x})$ es fórmula de $\{<\}$ libre de cuantificadores, y entonces, sea que S_φ es vacío o no, $\varphi(\bar{x})$ es equivalente a una $\{<\}$-fórmula libre de cuantificadores.

Como el lector puede ya suponer, mostrar que una teoría admite eliminación de cuantificadores es una tarea predominantemente técnica y puede tomar su tiempo. Felizmente, para verificar que una teoría admite eliminación de cuantificadores basta concentrar nuestro esfuerzo en fórmulas con un cuantificador existencial, lo que queda concretado en el siguiente lema.

1.25 Lema. *Sea T una teoría en el lenguaje L. Suponga que para cada fórmula libre de cuantificadores $\varphi(\bar{x}, y)$ de L existe una fórmula libre de cuantificadores $\psi(\bar{x})$ de L tal que $T \vDash \exists y \varphi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$. Entonces T admite eliminación de cuantificadores.*

Prueba. Sea $\varphi(\bar{x})$ una fórmula de L. Probaremos por inducción sobre la construcción de $\varphi(\bar{x})$ que $T \vDash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ para alguna fórmula libre de cuantificadores $\psi(\bar{x})$ de L. Si $\varphi(\bar{x})$ es $\neg\varphi'(\bar{x})$ y existe una fórmula $\psi'(\bar{x})$ libre de cuantificadores a la cual $\varphi'(\bar{x})$ es equivalente módulo T, entonces $T \vDash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \neg\psi'(\bar{x}))$. En el caso en que $\varphi(\bar{x})$ es la fórmula $\varphi_0(\bar{y}) \wedge \varphi_1(\bar{z})$[4] y existen las fórmulas libres de cuantificadores $\psi_0(\bar{y})$ y $\psi_1(\bar{z})$ tales que $T \vDash \forall \bar{x}(\varphi_i(\bar{y}) \leftrightarrow \psi_i(\bar{z}))$ para $i = 0, 1$, entonces $T \vDash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow (\psi_0(\bar{x}) \wedge \psi_1(\bar{x})))$. Por lo tanto, en los ambos casos anteriores $\varphi(\bar{x})$ es equivalente módulo T a una fórmula libre de cuantificadores.

Para terminar, supongamos que $\varphi(\bar{x})$ es $\exists y \theta(\bar{x}, y)$ y que $T \vDash \forall \bar{x}(\theta(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi'(\bar{x}, y))$, donde $\psi'(\bar{x}, y)$ es una fórmula libre de cuantificadores. Entonces claramente $T \vDash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \exists y \psi'(\bar{x}, y))$, más aún, por la hipótesis existe una fórmula libre de cuantificadores $\psi(\bar{x})$ tal que $T \vDash \forall \bar{x}(\exists y \psi'(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$, así que $T \vDash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. ■

El siguiente teorema da una condición sobre los modelos de una teoría para que ésta admita eliminación de cuantificadores. Omitimos su prueba debido a que esta emplea el concepto de diagrama de una estructura, concepto que, aunque esencial en muchas demostraciones de teoremas en teoría de modelos, decidimos omitir en este trabajo. Puede consultar el resultado y el trayecto hacia su prueba en [Mar 02, sección 3.1].

1.26 Teorema. *Sea T una teoría en el languaje L. Suponga que para cada fórmula libre de cuantificadores $\varphi(\bar{x}, y)$ de L, cualesquiera modelos A y B de T, cualquier L-subestructura común C de A y B y cada tupla $\bar{c}$ de elementos de C, si existe un elemento b de B tal que $B \vDash \varphi(\bar{c}, b)$, entonces existe un elemento a de A tal que $A \vDash \varphi(\bar{c}, a)$. Entonces, T admite eliminación de cuantificadores.* ■

[4] En este punto se asume que las variables en las tuplas $\bar{y}$ y $\bar{z}$ se encuentran en la tupla $\bar{x}$.

Como ya comentábamos antes, la eliminación de cuantificadores es una propiedad muy útil. En el área de la clasificación de teorías, para verificar si una teoría tiene cierta propiedad (de primer orden) se inicia por revisar si la teoría admite eliminación de cuantificadores, ya sea porque la propiedad en discusión implica la eliminación de cuantificadores o porque al simplificar las fórmulas deducibles a partir de la teoría sea más fácil verificar si la teoría tiene la propiedad.

El concepto de eliminación de cuantificadores es susceptible de generalizarse de manera natural. Sean $\mathbf{K}$ una clase de L-estructuras y Φ un conjunto de fórmulas de L, decimos que Φ es un conjunto de eliminación para $\mathbf{K}$ si para cada fórmula $\varphi(\bar{x})$ de L, existe una fórmula $\varphi^*(\bar{x})$ que es combinación booleana de fórmulas en Φ y tal que $\varphi(\bar{x})$ es equivalente a $\varphi^*(\bar{x})$ en cada estructura de $\mathbf{K}$. Decimos que φ es una combinación booleana de fórmulas en Φ si es una fórmula en Φ o es la negación de una fórmula en Φ, o es una conjunción de fórmulas o la negación de una conjunción de fórmulas que ya eran combinación booleana de fórmulas en Φ.

Por ejemplo, una observación trivial es que el conjunto de todas las fórmulas del lenguaje L siempre es un conjunto de eliminación para cualquier clase $\mathbf{K}$ de L-estructuras. Además, que la teoría T admita eliminación de cuantificadores es equivalente a que el conjunto de todas las fórmulas libres de cuantificadores del lenguaje L forme un conjunto de eliminación para la clase $\mathrm{Mod}\,(T)$, la clase de todos los modelos de T. Esta generalización tiene aplicaciones en otras ramas de la lógica.

Capítulo 2

Estructuras homogéneas: El límite de Fraïssé

En las primeras secciones de este capítulo definiremos nuestros principales objetos de estudio: las estructuras homogéneas y universales. El resultado que probaremos en las posteriores secciones es de una vital importancia en el estudio de las estructuras homogéneas. Una buena parte de la investigación sobre estructuras homogéneas se centra tan sólo en este resultado; el siguiente capítulo dará una muestra de ello. Las estructuras a las que daremos existencia en este capítulo mediante el resultado principal tienen una característica extra muy importante: resultan estructuras universales. Iniciamos con esta noción.

2.1. Estructuras κ-universales

Cualquier orden lineal contable es inmersible en el orden usual de los números racionales (una prueba de ello puede consultarse en [ACyM 11, pág. 26], aunque más adelante en el capítulo esto se desprende de uno de los resultados). Esta característica nos hace pensar que el conjunto de los números racionales con su orden usual es "universal" respecto a la clase de órdenes lineales contables, pues contiene una copia de cada elemento de dicha clase. Un caso trivial de este fenómeno es cuando se toma la clase de todas aquellas estructuras que son inmersibles en una estructura A, pues claramente A tomaría el papel de universal respecto a tal clase. Concretemos qué es lo que ocurre en estos ejemplos.

2.1 Definición. Sean L un lenguaje, $\mathbf{K}$ una clase de L-estructuras y κ un cardinal. Decimos que una L-estructura A es $(\mathbf{K}, \kappa)$-universal si cada elemento de $\mathbf{K}$ de cardinalidad menor a κ es inmersible en A. En particular, si A es $(\mathbf{K}, |A|^+)$-universal, decimos que A es $\mathbf{K}$-universal.

Ejemplo 1. Sea **K** la clase de todos los órdenes lineales, entonces $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, la estructura de los números racionales con su orden usual, es un orden lineal **K**-universal, pues, como comentamos antes, cualquier orden lineal contable es inmersible en $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Ejemplo 2. F. Hausdorff mostró la existencia de los órdenes lineales H_α de cardinalidad $\beth_\alpha$ para cada ordinal α. Por ejemplo, H_0 es isomorfo a los números racionales con su orden usual. Según la construcción de Hausdorff, resulta que si **K** es la clase de órdenes lineales, H_α es $(\mathbf{K}, \beth_\alpha)$-universal. Una prueba de ello, y más sobre los órdenes H_α —mejor conocidos por su tipo de orden η_α—, puede consultarse en [Har 05, sección 4.3].

Naturalmente, la pregunta obligada es: Dada una clase de L-estructuras relacionales **K** y un cardinal κ, ¿bajo qué condiciones podemos garantizar que existe una estructura ($\mathbf{K}$, κ)-universal en **K**? En [Jón 56], B. Jónsson respondió a esta pregunta. Imponiendo una serie de condiciones a la clase **K** y al cardinal κ, probó que se puede garantizar la existencia de una estructura universal de cardinalidad κ. Pocos años después, Jónsson mostró que estas mismas condiciones son suficientes para garantizar la existencia de una estructura homogénea. En el cuarto capítulo discutiremos estas condiciones y mostraremos los resultados contenidos en [Jón 56] sobre la existencia de estructuras universales.

En el presente capítulo mostraremos un resultado menos general que el que aparecerá en el capítulo cuatro, mostraremos que lo que entenderemos por una estructura homogénea de cardinal ω será universal para una clase de estructuras que satisfaga ciertas condiciones.

2.2. Estructuras homogéneas

Un sinónimo de la palabra homogeneidad es uniformidad. Si para conocer algo, para saber su consistencia o su apariencia, nos basta con observar sólo una pequeña parte de ella, entonces decimos que aquello es uniforme u homogéneo. Esta es la situación en una estructura homogénea: una vez que tenemos determinado el comportamiento de una parte menor de la estructura, tendremos el comportamiento general de ella.

2.2 Definición. Sean L un lenguaje y A una L-estructura. Decimos que A es homogénea si cualquier inmersión de una subestructura finitamente generada de A en A se extiende a un automorfismo de A[1].

Hay una variedad formidable de estructuras homogéneas de interés matemático; a lo largo de este capítulo conoceremos muchas de ellas.

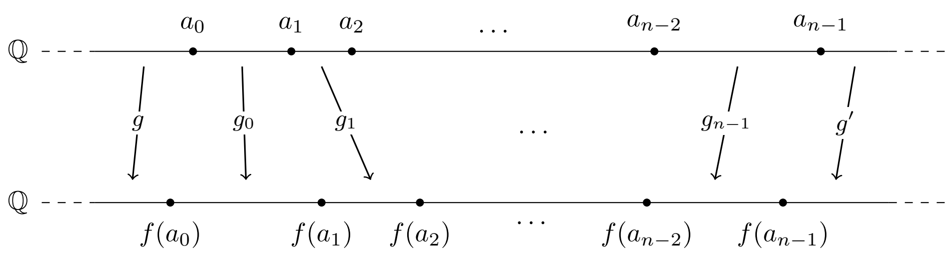
[1] Cabe mencionar que algunos autores llaman estructuras ultrahomogéneas a las estructuras que en este trabajo, y para la mayoría de autores, llamaremos homogéneas.

Ejemplos de estructuras homogéneas I

Probablemente, el lector ya ha trabado conocimiento con al menos una estructura homogénea, tal vez nunca fue expuesta en tales términos, pero la cualidad es tan importante que no pasa desapercibida; hablamos del conjunto de los números racionales con su orden usual. En seguida presentamos tal ejemplo y listamos algunos más. En la próxima sección, el concepto de homogeneidad débil y una proposición sobre este concepto habilitarán nuevos ejemplos.

Tradicionalmente se denota por L_0 a la signatura con un solo símbolo de relación de dos argumentos. L_0 es el lenguaje de muchas estructuras matemáticas importantes, entre ellas, los órdenes y las gráficas. Observe que además, en general, si L es un lenguaje relacional, una subestructura finitamente generada es finita.

Ejemplo 1. Veamos que la estructura linealmente ordenada de los números racionales, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, es una L_0-estructura homogénea. Observe primeramente que una subestructura finita de $\mathbb{Q}$ no es más que un orden lineal finito. Sea $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ un conjunto finito de elementos de $\mathbb{Q}$, sin pérdida de la generalidad supongamos que $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una L_0-inmersión, entonces f preserva el orden (pues es un homomorfismo de órdenes), es decir, $f(a_0) < f(a_1) < \ldots < f(a_{n-1})$.



Por el teorema de caracterización del orden lineal $\mathbb{Q}$ como el único orden numerable, denso y sin extremos ([ACyM 11, Teorema 1.28]), si $a < b$ con $a, b \in \mathbb{Q}$, los intervalos $(-\infty, a)$,(a, b) y (b, ∞) son isomorfos, con el orden natural heredado, a $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Sean $g, g', g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ L_0-homomorfismos tales que $g : (-\infty, a_0) \cong (-\infty, f(a_0))$, $g' : (a_{n-1}, \infty) \cong (f(a_{n-1}), \infty)$ y $g_i : (a_i, a_{i+1}) \cong (f(a_i), f(a_{i+1}))$ para cada $i < n - 1$. Entonces $\overline{f} = g \cup g' \cup g_0 \cup \cdots \cup g_{n-1} \cup f$ es un L_0-automorfismo de $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ que por construcción extiende a f. Lo anterior nos permite concluir que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ es una L_0-estructura homogénea.

Ejemplo 2. Sea D un conjunto cualquiera (una $\emptyset$-estructura). En este caso, las subestructuras de D corresponden simplemente a subconjuntos no vacíos de D y las inmersiones a funciones inyectivas. Si A es una subestructura finita de D y $f : A \longrightarrow D$ es una función inyectiva, es claro que f se puede extender a una permutación de D. Así, todo conjunto es homogéneo.

Ejemplo 3. Sea A una L_0-estructura numerable en la que el símbolo en L_0 se interpreta como una relación de equivalencia (sobre el dominio de A), para la cual todas las clases de equivalencia son numerables y hay un número numerable de ellas (dicho de otra forma, la relación parte el dominio de A en ω subconjuntos de cardinalidad ω). Mostraremos que A es homogénea. Sea $B = \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$ una subestructura (finita) de A y $f : B \longrightarrow A$ es una L_0-inmersión. Tenemos que para cualesquiera b_i, b_j elementos de B, si b_i y b_j pertenecen a la misma clase de equivalencia, entonces $f(b_i)$ y $f(b_j)$ pertencen a la misma clase de equivalencia. Supongamos que $\{A_i\}_{i<\omega}$ es la partición en ω subconjuntos infinitos de $\operatorname{dom} A$ inducida por la relación de equivalencia. Observe que entonces existe $k \leq n$ y existen índices $i_0, \ldots, i_{k-1}$ de tal forma que $A_{i_j} \cap B \neq \emptyset$ $(j < k)$. A su vez existen índices $i'_0, \ldots, i'_{k-1}$ tales que $f[B \cap A_{i_j}] \subseteq A_{i'_j}$ $(j < k)$, pues las imágenes de elementos relacionados están relacionadas. Para $j < k$ sea $f_{i_j} : A_{i_j} \longrightarrow A_{i'_j}$ una función biyectiva que extiende a $f|_{A_{i_j} \cap B}$. Observe que existe una función biyectiva T de ω en sí mismo que extiende al mapeo $i_j \longmapsto i'_j$ $(j < k)$; para $i \in \omega \backslash \{i_0, \ldots, i_{k-1}\}$ sea $f_i : A_i \longrightarrow A_{T(i)}$ una función biyectiva. Entonces $\overline{f} = \bigcup_{i<\omega} f_i$ es un L_0-automorfismo de A que extiende a f. Por lo tanto, A es una estructura homogénea.

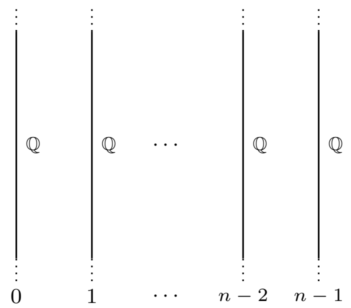
Al tratar con estructuras algebraicas se debe tener mucho cuidado en la elección del lenguaje si queremos conservar resultados sobre ellas. En el siguiente ejemplo, la elección del lenguaje es correcta, pues así elegido las subestructuras del espacio vectorial corresponden a subespacios vectoriales y las inmersiones a transformaciones lineales inyectivas (monomorfismos de espacios vectoriales). En otros ejemplos posteriores se tendrá la misma delicadeza de elegir el lenguaje correctamente, de tal modo que subestructuras correspondan a subespacios, subcampos, subanillos, etcétera, según nuestra estructura en cuestión sea un espacio, un campo, un anillo, etcétera.

Ejemplo 4. Considere un campo finito F y V un espacio vectorial de dimensión numerable sobre F. Entonces V es numerable y un lenguaje L apropiado para V es: un símbolo para la suma en V, un símbolo de función para la asociación de inversos aditivos, un símbolo para el vector cero de V y un símbolo por cada elemento del campo que se interpreta como el producto escalar por ese elemento. Note que entonces el lenguaje L es finito. Ahora suponga que W es un subespacio de dimensión finita de V (en este caso, una L-subestructura finitamente generada de V) y que $f : W \longrightarrow V$ es una transformación lineal inyectiva (es decir, una L-inmersión). Si β es una base de W, existe una base $\bar{\beta}$ de V que extiende a β. Asimismo, si γ es un conjunto linealmente independiente maximal contenido en $f[\beta]$, existe una base $\bar{\gamma}$ de V que extiende a γ. Tomemos a $T : \bar{\beta} \backslash \beta \longrightarrow \bar{\gamma} \backslash \gamma$ como una función biyectiva, tal función existe, pues $\bar{\beta} \backslash \beta$ y $\bar{\gamma} \backslash \gamma$ son ambos numerables. Definimos a $\bar{f} : \bar{\beta} \longrightarrow \bar{\beta}$ como: $f(x)$ si $x \in \beta$ y $T(x)$ si $x \in \bar{\beta} \backslash \beta$. Por un teorema conocido de Álgebra Lineal, $\bar{f}$ se puede extender a una transformación lineal biyectiva de V en sí mismo. De esta forma, $\bar{f}$ es un automorfismo de V que extiende a f y, por lo tanto, V es una L-estructura homogénea.

Ejemplo 5. Podemos replantear el ejemplo 2 de la siguiente forma. Considere un conjunto cualquiera A. Esta vez pensaremos en A como una L_0-estructura, donde el símbolo de L_0 se interpreta como la relación vacía. Así, A es un orden parcial en el que los elementos son incomparables dos a dos, es decir, A es una anticadena de longitud $|A|$. Lo dicho en el ejemplo 2 nos permite concluir que toda anticadena es una estructura homogénea.

Considere dos órdenes parciales $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$, definimos el orden parcial $A[B]$ como aquel con dominio $A \times B$ y relación de orden dada por $(x, y) <_{A[B]} (z, w)$ si y sólo si $x <_A z$ o $x = z$ y $y <_B w$. Consideraremos en lo siguiente cada n, con $1 \leq n \leq \omega$, como la anticadena de n elementos, es decir el orden parcial en el cual ningún elemento está relacionado con otro.

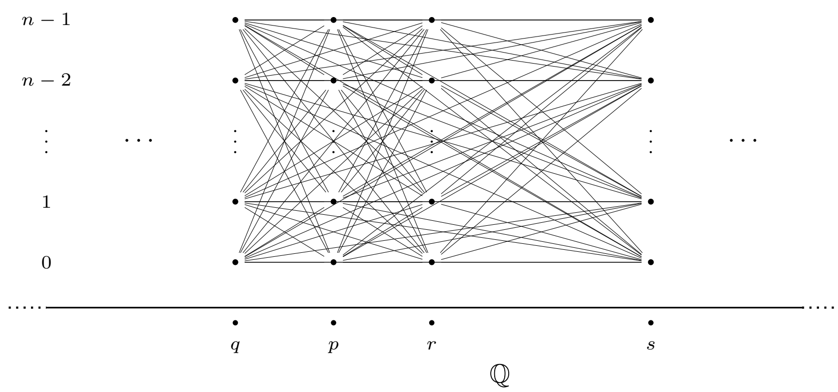
Ejemplo 6. Consideremos el orden parcial $n[\mathbb{Q}]$, con $1 \leq n \leq \omega$. Observe que en este caso la relación de orden es en realidad $(i, p) < (j, q)$ si y sólo si $i = j$ y $p <_{\mathbb{Q}} q$. Este orden se ve como sigue.



Mostraremos que este orden parcial es homogéneo. Sean A una subestructura finita de $n[\mathbb{Q}]$ y $f : A \longrightarrow n[\mathbb{Q}]$ una inmersión de órdenes parciales. Para cada $i < n$ para el cual $(\operatorname{dom} A) \cap (\{i\} \times \mathbb{Q})$ es no vacío, definamos la estructura A_i cuyo dominio es tal conjunto y cuya relación es la heredada de A. Tenemos una función inyectiva inducida por f en el conjunto de las columnas que intersecan a A, a saber, $t(\{i\} \times \mathbb{Q}) = \{j\} \times \mathbb{Q}$ si y sólo si $f(i, a) \in \{j\} \times \mathbb{Q}$ para algún $(i, a) \in (\operatorname{dom} A) \cap (\{i\} \times \mathbb{Q})$. Tomemos $\bar{t}$ una función biyectiva del conjunto de las columnas que extiende a t. Luego, para cada $i < n$ para el cual el conjunto $(\operatorname{dom} A) \cap (\{i\} \times \mathbb{Q})$ es no vacío, la restriccion $f_i = f|_{A_i}$ es una inmersión de A_i en la columna $t(\{i\} \times \mathbb{Q})$. Como $\mathbb{Q}$ es homogéneo y cada columna es isomorfa a él, tenemos que f_i se puede extender a un isomorfismo $\bar{f}_i$ de de $\{i\} \times \mathbb{Q}$ en $t(\{i\} \times \mathbb{Q})$. Por último, para cada $i < n$ que no fue considerado en lo anterior, tomemos cualquier isomorfismo $\bar{f}_i$ de $\{i\} \times \mathbb{Q}$ en $\bar{t}(i)$. Por la construcción, $\bar{f}$ definida como la unión de todos los isomorfismos $\bar{f}_i$ es un automorfismo de $n[\mathbb{Q}]$ que extiende a f.

Ejemplo 7. Ahora consideremos el orden parcial $\mathbb{Q}[n]$, con $1 \leq n \leq \omega$. En este orden parcial el orden se reduce a que $(p, i) < (q, j)$ si y sólo si $p <_{\mathbb{Q}} q$. Así, el orden parcial

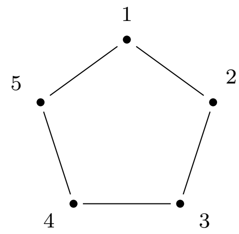
$\mathbb{Q}[n]$ se ve de la siguiente manera.



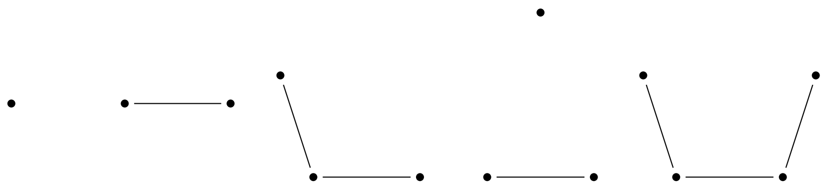
Mostraremos que también este orden parcial es homogéneo. Es claro que la relación $(x, i) \sim (y, j)$ si y sólo si $x = y$, es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Q}[n]$; las clases de equivalencia bajo esta relación son $\bar{q} = \{q\} \times n$, con q un número racional. Diremos que la clase $\bar{q}$ es menor a la clase $\bar{p}$ si y sólo si $p < q$ en $\mathbb{Q}$. Entonces el conjunto de clases de equivalencia con esta relación es un orden parcial trivialmente isomorfo al orden de los número racionales, denotemos a este orden por $\overline{\mathbb{Q}}$. Sean A una subestructura finita de $\mathbb{Q}[n]$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}[n]$ una inmersión de órdenes. Elijamos el conjunto $\{(q_0, i_0), (q_1, i_1), \ldots, (q_k, i_k)\} \subseteq \operatorname{dom} A$ de forma que $\bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_k$ sean todas las distintas clases de equivalencia de los elementos que aparecen en A. Entonces f induce una inmersión g de $\{\bar{q}_1, \bar{q}_2 \ldots \bar{q}_k\}$ en el orden $\overline{\mathbb{Q}}$ (a saber, $g(\bar{q}_j) = \bar{a}_j$ si $f(q_j, i_j) = (a_j, l_j)$). Según lo discutido antes, $\overline{\mathbb{Q}}$ es homogéneo, por lo que existe un automorfismo $\bar{g}$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ que extiende a g. Por último, para cada $r \in \mathbb{Q}$ elijamos una función biyectiva f_r de $\bar{r}$ en $\overline{g}(r)$, como no hay relación que preservar, estas funciones resultan inmersiones. Al definir $\bar{f} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} f_r$, $\bar{f}$ es un automorfismo de $\mathbb{Q}[n]$ que extiende a f.

Una gráfica (no dirigida) es una L_0 estructura, es decir, un conjunto con una relación binaria sobre él, tal que dicha relación es simétrica y antireflexiva (no se permiten lazos). Si G es una gráfica, los elementos del dominio de G son llamados vértices, se suele denotar por $V(G)$ al dominio de G. La relación de la gráfica se conoce como la relación de incidencia y si a y b están relacionados decimos que hay una arista en/de G de a en b (y viceversa), denotamos por $A(G)$ a R^G, donde R es el símbolo en L_0.

Ejemplo 8. Considere la siguiente gráfica, denotada por C_5 y naturalmente conocida como el pentágono.



C_5 es una gráfica homogénea, como mostramos en seguida. Si f es una inmersión de alguna de las siguientes gráficas (subgráficas de C_5) en C_5,



o de C_5 en C_5, es claro que podemos extender f a un automorfismo de C_5. El caso restante, que es el más interesante, es cuando tenemos la gráfica • • y f es una inmersión de ésta en C_5. Por ejemplo, supogamos que f es la inmersión $(1,3) \mapsto (2,4)$. Entonces podemos tomar el automorfismo $(1,2,3,4,5) \mapsto (2,3,4,5,1)$ y éste extiende a f. De la misma forma podemos tratar las inmersiones $(1,3) \mapsto (3,5)$, $(1,3) \mapsto (1,4)$ y $(1,3) \mapsto (2,5)$. Los 16 casos restantes (que provienen de ver a dónde se manda $(1,4)$, $(2,4)$, $(2,5)$ y $(3,5)$) están representados (mediante rotaciones) por alguno de los anteriores. Así, C_5 es homogénea.

Ejemplo 9. Mostraremos que cualquier campo finito es homogéneo. Para esto necesitamos de algunos resultados de la teoría de campos, los cuales enlistamos en seguida y pueden ser consultados en [Hun 94, sección V.5].

1. Si K_1 y K_2 son subcampos del campo finito de característica p F y $|K_1| = |K_2|$, entonces $K_1 = K_2$.
2. Si F es un campo finito de característica p y f es un automorfismo de F, entonces existe un número natural $n > 0$ tal que $f(x) = x^{p^n}$, para cualquier $x \in F$. Asimismo, si $n > 0$ y F es un campo finito de característica p, el morfismo $f(x) = x^{p^n}$ es un automorfismo de F que fija al subcampo de F de cardinalidad p^n (el cual es conocido como el n-automorfismo de Frobenius).

Tomemos un campo finito F de característica p y supongamos que K es un subcampo de él y que $f : K \longrightarrow F$ es una inmersión, en este caso, un monomorfismo de campos. Entonces K y $f[K]$ son subcampos de F de la misma característica p y, como f en particular es inyectiva, $|K| = |f[K]|$. Por el resultado en el inciso 1 tenemos que $K = f[K]$. Esto a su vez implica que f es un automorfismo de K. Mediante el inciso 2 aseguramos la existencia de $n > 0$ tal que $f(x) = x^{p^n}$ para todo $x \in K$. Basta ahora definir para $x \in F$, $\bar{f}(x) = x^{p^n}$. Con esta definición, $\bar{f}$ es un automorfismo de F que extiende a f.

2.3. Edades y clases de amalgamación

Nuestra aspiración en este capítulo es la de mostrar una forma de construir estructuras homogéneas y de paso, como mencionamos anteriormente, construir estructuras universales para una clase de estructuras. En esta sección exploraremos dos conceptos íntimamente relacionados con estructuras homogéneas, los cuales además se encuentran relacionados entre sí.

2.3 Definición. Sea L un lenguaje. Decimos que una clase $\mathbf{K}$ de L-estructuras finitamente generadas es una clase de amalgamación si satisface las siguientes condiciones.

(i) Es cerrada bajo isomorfismo; esto es, si A es un elemento de $\mathbf{K}$ y B es una L-estructura isomorfa a A, entonces B también es un elemento de $\mathbf{K}$.

(ii) Es cerrada bajo tomar subestructuras finitamente generadas; esto es, si A es un elemento de $\mathbf{K}$ y B es una subestructura finitamente generada de A, entonces B también es un elemento de $\mathbf{K}$.

(iii) Para cualesquiera dos elementos A y B de $\mathbf{K}$, existe C en $\mathbf{K}$ tal que A y B son inmersibles en C.

(iv) Sean A, B y C estructuras en $\mathbf{K}$, si $f : A \to B$ y $g : A \to C$ son inmersiones, entonces existen una estructura D en $\mathbf{K}$ e inmersiones $h : B \to D,\ i : C \to D$ tales que $hf = ig$.

La propiedad (ii) es conocida como la propiedad hereditaria, la (iii) como la propiedad de la coinmersión y la (iv) como la propiedad de la amalgamación. Esta última se encuentra íntimamente ligada a la construcción de estructuras homogéneas. Algunas de estas propiedades tendrán su versión en la construcción que haremos en el capítulo cuarto. Eventualmente, nuestro interés nos llevará a centrarnos en aquellas clases de amalgamación con un número contable de tipos de isomorfismo, esto es, la clase sólo contiene un número contable de estructuras salvo isomorfismo.

Toda estructura tiene asociada de forma natural una clase de estructuras; información importante de la estructura puede descubrirse si concentramos nuestro estudio en esta clase. La relación entre este tipo de clases y las clases de amalgamación es el principal objeto de estudio en el presente capítulo.

2.4 Definición. Sea A una L-estructura. Definimos la edad de A, denotada por $\mathbf{Sub}(A)$, como la clase de todas aquellas L-estructuras finitamente generadas que son inmersibles en A.

Cabe observar que podría haber subestructuras de una estructura A que no son finitamente generadas, por lo que en muchas ocasiones la clase $\mathbf{Sub}(A)$ está estrictamente contenida en la clase de todas las estructuras que son isomorfas a alguna subestructura de A.

Es importante reconocer, una vez que es claro que $\mathbf{Sub}(A)$ es cerrada bajo isomorfismo, que podría considerarse que la edad de A consta solamente de todas las subestructuras finitamente generadas de A, ya que cualquier otra estructura finitamente generada inmersible en A debe ser isomorfa a alguna subestructura finitamente generada de A. Es por lo anterior que algunos autores definen la edad de A como el conjunto de todas las subestructuras finitamente generadas de A. El lector puede notar el uso de la palabra "conjunto" en sustitución de la palabra "clase" en esto último. Sin embargo, a la larga resulta más conveniente la definición por la que hemos optado.

Una vez hecha la definición de edad, podemos resolver una cuestión que tal vez el lector se ha hecho al leer las propiedades de una clase de amalgamación. A pesar de su potencial parecido, la propiedad de la amalgamación no implica la propiedad de la coinmersión. El ejemplo es el de la clase de todos los campos finitos. Dos campos finitos de característica distinta no pueden ser inmersos en un tercero, es por ello que la clase mencionada no tiene la propiedad de la coinmersión. En contraste, si tenemos tres campos finitos H, F y K e inmersiones $f : H \longrightarrow F$ y $g : H \longrightarrow K$, entonces la característica de H debe ser la misma que la de F y la de K. Supongamos que esta característica es p. Por un resultado de la teoría de campos, existen $l, m, n > 0$ tales que l divide a m y a n, $H = GF(p^l), F = GF(p^m)$ y $K = GF(p^n)$, donde $GF(p^k)$ es el único campo de característica p con p^k elementos. Tenemos que entonces H, F y K son inmersibles en el campo $GF(p^{nm})$. Recuerde que anteriormente probamos que todo campo finito es homogéneo. Así, por la proposición 2.6 (la cual probamos más abajo), la edad de $GF(p^{nm})$ tiene la propiedad de la amalgamación. Podemos entonces concluir que el siguiente diagrama se puede completar como se indica, con L un subcampo de $GF(p^{nm})$ y por lo tanto finito, y conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & L & \\
F \arrow[ur, dashed, "h"] & & K \arrow[ul, dashed, "k"'] \\
 & H \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Concluimos que la clase de los campos finitos tiene la propiedad de la amalgamación y sin embargo no satisface la propiedad de la coinmersión.

Durante la revisión del anterior ejemplo, surgió la interesante pregunta de la existencia de una clase de estructuras relacionales que tenga la propiedad de la amalgamación y no la de la coinmersión. En primera instancia tenemos lo siguiente[2]. Tomemos L como un lenguaje con dos símbolos de relación unarios, R y S, y $\mathbf{K}$ como la clase de todas las estructuras finitas monocromáticas en dos colores. En otras palabras, $\mathbf{K}$ consta de los modelos finitos de los enunciados $(\forall x R(x)) \vee (\forall x S(x))$ y $\forall x \neg(R(x) \wedge S(x))$. Entonces $\mathbf{K}$ tiene la propiedad de la amalgamación pero no la propiedad de la coinmersión (observe que dos estructuras de diferente color no son inmersibles en una monocromática).

Sin embargo, existe una observación general e inmediata sobre lo anterior. Si existe una estructura A^0 en la clase $\mathbf{K}$ que es inmersible en todas las estructuras de $\mathbf{K}$ (estructura que, en el caso, sería llamada una *estructura inicial* de la clase) y $\mathbf{K}$ tiene la propiedad de la amalgamación, entonces $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de la coinmersión. Basta observar que si tenemos dos estructuras B_0 y B_1 en $\mathbf{K}$, entonces A^0 es inmersible en ambas; la propiedad de la amalgamación implica que existe una estructura C en $\mathbf{K}$ en la cual B_0 y B_1 son inmersibles. Más aún, podemos suponer, convencionalmente, la existencia de la estructura vacía en $\mathbf{K}$. Entonces la estructura vacía sería una estructura inicial de la clase y con ello la observación anterior se puede aplicar. Como adevertencia, observe que el admitir la estructura vacía puede traer consigo la falla de la propiedad de la amalgamación; esto, en particular, ocurre en el ejemplo del párrafo anterior.

Como mencionábamos antes, la relación entre clases de amalgamación y edades es el principal resultado de este capítulo, veremos que hay una correspondencia biunívoca entre edades de estructuras homogéneas y clases de amalgamación con un número contable de tipos de isomorfismo. Sin necesidad de más conceptos, podemos verificar una parte de esta correspondencia. Iniciemos por observar lo siguiente.

2.5 Proposición. *Sea A una L-estructura, entonces la edad de A satisface la propiedad hereditaria y la de la coinmersión. Inversamente, si $\mathbf{K}$ es una clase de L-estructuras finitamente generadas, con un número contable de tipos de isomorfismo, que satisface la propiedad hereditaria y la de la coinmersión, además de ser cerrada bajo isomorfismo, entonces $\mathbf{K}$ es la edad de alguna L-estructura contable.*

Prueba. La primera afirmación se sigue de que la relación de ser subestructura finitamente generada es transitiva y de que si B_0 y B_1 son subestructuras de A generadas por las tuplas finitas $\bar{b}_0$ y $\bar{b}_1$ respectivamente, entonces B_0 y B_1 son inmersibles en la subestructura de A finitamente generada por los elementos en $\bar{b}_0$ y en $\bar{b}_1$.

Para la segunda parte, supongamos que $\{A_i : i < \omega\}$ son estructuras que representan los tipos de isomorfismo que hay en $\mathbf{K}$ (con repetición si sólo hay un número finito de tipos de isomorfismo en $\mathbf{K}$). Definiremos una cadena de estructuras $(B_i : i < \omega)$ en $\mathbf{K}$. Sea B_0 la estructura A_0. Supongamos que la estructura B_i ha sido definida como un elemento de $\mathbf{K}$. Por la propiedad de la coinmersión, existe una estructura B_{i+1} en la

[2]Este ejemplo fue sugerido personalmente por Osvaldo Guzmán González.

que B_i y A_{i+1} son inmersibles, más aún, gracias a que $\mathbf{K}$ es cerrada bajo isomorfismo, podemos suponer que B_{i+1} es extensión de B_i. De la forma descrita, queda construida la cadena de L-estructuras $(B_i : i < \omega)$; definimos la L-estructura A como la unión de esta cadena. Entonces A es contable al ser la unión contable de estructuras contables y afirmamos que su edad es $\mathbf{K}$. Para una L-estructura B que es elemento de la edad de A, tenemos que existe una subestructura B' de A que es isomorfa a B. Para B' podemos asegurar, por la definición de A, que existe $i < \omega$ tal que los elementos que generan a B' son (todos y cada uno) elementos de B_i. Entonces B' resulta ser una subestructura de tal B_i y por la propiedad hereditaria, B' resulta ser un elemento de $\mathbf{K}$. Por ser $\mathbf{K}$ cerrada bajo isomorfismo, B es un elemento de $\mathbf{K}$. Por último, de la mera construcción se observa que $\mathbf{K}$ está contenida en $\mathbf{Sub}\,(A)$. Por lo tanto, A es una L-estructura contable cuya edad coincide con la clase $\mathbf{K}$. ■

Para lo siguiente en realidad sólo requerimos de la primera parte de la proposición anterior. Sin embargo, la segunda parte debe remarcarnos el hecho de que puede haber dos estructuras no isomorfas que poseen la misma edad. Un ejemplo simple de esto es el del orden de los números racionales y el de los números enteros.

2.6 Proposición. *Sea A una L-estructura contable homogénea. Entonces la edad de A es una clase de amalgamación con un número contable de tipos de isomorfismo.*

Prueba. El número total de subconjuntos finitos de un conjunto contable es contable, por lo que hay, máximo, un número contable de subestructuras finitamente generadas de A. Ello implica que sólo hay un número contable de tipos de isomorfismo en la edad de A. Sólo resta mostrar que $\mathbf{Sub}\,(A)$ satisface la propiedad de la amalgamación. Tomemos a B, C y D como elementos de $\mathbf{Sub}\,(A)$ y supongamos que $f : D \longrightarrow B$ y $g : D \longrightarrow C$ son L-inmersiones. Debido a que D es un elemento de la edad de A, existe una inmersión s de D en A. Entonces sf^{-1} y sg^{-1} son inmersiones de $f[D]$ y $g[D]$ en A, respectivamente. Por la homogeneidad de A, existen dos automorfismos h y k de A que extienden, respectivamente, a estas inmersiones. Así, si $\bar{b}$ y $\bar{c}$ son las tuplas finitas que generan a B y a C respectivamente, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
& \langle h[\bar{b}] \cup k[\bar{c}]\rangle_A & \\
B \arrow[ur, "k|_B"] & & C \arrow[ul, "h|_C"'] \\
& D \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Esto es porque $k|_B f = sf^{-1}f = s = sg^{-1}g = h|_C g$. ■

2.4. Existencia y unicidad de estructuras homogéneas

Ya adelantamos el resultado de esta sección en la precedente; mostraremos la existencia de estructuras homogéneas a partir de una clase de estructuras adecuada y no sólo lograremos una construcción de tales estructuras sino que obtendremos su unicidad —claro— salvo isomorfismo.

Unicidad

Necesitamos de un concepto auxiliar al de homogeneidad para mostrar que la estructura homogénea que obtendremos adelante será única salvo isomorfismo.

2.7 Definición. Decimos que una L-estructura A es débilmente homogénea si para cualquier par de subestructuras finitamente generadas B y C de A, con $B \subseteq C$, cada inmersión de B en A puede ser extendida a una inmersión de C en A. Lo anterior se expresa en el siguiente diagrama conmutativo, donde f es una inmersión de B en A.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "g \text{ inmersión}"] & \\
B \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

El siguiente lema técnico nos dará el mecanismo que necesitamos para lo siguiente.

2.8 Lema. *Sean A una L-estructura débilmente homogénea y A' una L-estructura cuya edad está contenida en la de A. Supongamos que B y B' son subestructuras finitamente generadas de A y A' respectivamente, que f es un isomorfismo entre ellas y que C' es una subestructura finitamente generada de A' para la cual B' es subestructura. Entonces el siguiente diagrama se puede completar como se indica y conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dashed, "\subseteq"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B' \arrow[r, "\subseteq"'] & C' \arrow[u, dashed, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

donde C es una estructura finitamente generada de A.

Prueba. Como la edad de A' está contenida en la de A, existe una inmersión g de B' en A. Entonces la función $f^{-1} \circ g^{-1}|_{g(B')}$ es una inmersión de una subestructura finitamente generada en A y obviamente $g(B') \subseteq g(C')$. Por la homogeneidad débil de A, el siguiente diagrama se puede completar como se indica y conmuta (en otras palabras, h extiende a la inmersión mencionada).

$$\begin{tikzcd}
g(B') \arrow[rr, "\subseteq"] \arrow[dr, "g^{-1}"'] & & g(C') \arrow[ddr, dashed, "h"] & \\
& B' \arrow[dr, "f^{-1}"'] & & \\
& & B \arrow[r, "\subseteq"'] & A
\end{tikzcd}$$

donde h es una inmersión.

Observe que $B \subseteq \mathrm{im}\,(h)$, pues si $b \in B$, entonces $h \circ g \circ f(b) \in \mathrm{im}\,(h)$, pero $h \circ g \circ f(b) = b$ por la conmutatividad del diagrama anterior.Tomando a C como la imagen de h y a $h \circ g$ como el isomorfismo buscado, se tiene la completación y conmutatividad del diagrama propuesto. ■

Lo siguiente es probar la unicidad de una estructura homogénea. Observe que cualquier L-estructura homogénea es débilmente homogénea, de modo que el siguiente teorema implica la unicidad, salvo isomorfismo, de una estructura homogénea para una edad fija.

2.9 Teorema. *Sean A y A' dos estructuras contables, débilmente homogéneas y con la misma edad. Entonces A y A' son isomorfas. De hecho, si B es una subestructura finitamente generada de A, cualquier inmersión de B en A' se puede extender a un isomorfismo de A en A'.*

Prueba. Observe que el resultado es inmediato si ambas estructuras son finitas, pues en ese caso cada una es un elemento de su edad y cualquier testigo de la inmersibilidad de una en la otra será forzosamente un isomorfismo. Además, no puede suceder que una de las estructuras sea finita y la otra infinita, pues ambas tiene salvo isomorfismo las mismas subestructuras finitamente generadas.

Supongamos, pues, que ambas estructuras son numerables. Tomemos a $(A_i : i < \omega)$ como una cadena de subestructuras finitamente generadas de A cuya unión es A (por ejemplo, si enúmeramos el dominio de A como $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, podemos definir A_i como $\langle a_0, \dots a_i \rangle$). Como A_0 es un elemento de la edad de A y las edades de A y A' son iguales, existe un isomorfismo f_0 de A_0 en una subestructura finitamente generada de A', digamos A'_0. Tomemos ahora una cadena de subestructuras finitamente generadas de A' cuya unión sea A' y cuyo primer elemento sea A_0 (basta seguir un argumento como aquél para A), digamos $(A'_i : i < \omega)$.

Nuestro procedimiento será aplicar el lema anterior repetidamente para generar una sucesión de isomorfismos entre subestructuras finitamente generadas de A y subestructuras finitamente generadas de A' de tal forma que la unión de esta sucesión resulte un isomorfismo de A en A'. Para ello notemos que aplicando el lema anterior a A y A' alternadamente, el siguiente diagrama se puede completar como se indica y cada cuadrado conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
 & & A_1 \arrow[d, "\subseteq"'] & & A_2 \arrow[d, "\subseteq"'] & \\
A_0 \arrow[r, dashed, "\subseteq"] \arrow[d, "f_0"'] & B_1 \arrow[r, "\subseteq"] & B_2 \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, dashed, "f_2"'] & B_3 \arrow[r, "\subseteq"] & B_4 \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dashed, "f_4"'] & \subseteq A \\
A'_0 \arrow[r, "\subseteq"'] & B'_1 \arrow[r, dashed, "\subseteq"'] \arrow[u, dashed, "f_1"] & B'_2 \arrow[r, dashed, "\subseteq"'] & B'_3 \arrow[r, dashed, "\subseteq"'] \arrow[u, dashed, "f_3"] & B'_4 \arrow[r, dotted, no head] & \subseteq A' \\
 & A'_1 \arrow[u, "="] & & A'_2 \arrow[u, "\subseteq"] & &
\end{tikzcd}
$$

donde cada f_i es un isomorfismo.

La construcción inicia aplicando el lema al diagrama con A_0, A'_0, f_0 y A'_1 (aquí usamos que $A'_0 \subseteq A'_1$, pues son elementos de la cadena $(A'_i : i < \omega)$), gracias a que A es débilmente homogénea. Por lo que obtenemos el isomorfismo f_1 de A'_1 en una subestructura B_1 de A. Tomamos B_2 como la estructura generada por la unión de un conjunto finito de generadores de B_1 con un conjunto finito de generadores de A_1. En tal caso tenemos que $B_1 \subseteq B_2$ y aplicando el lema anterior a la configuración con B'_1, B_1, f_1 y B_2, gracias a que A' es débilmente homogénea, el segundo cuadrado se completa y conmuta.

En los pasos generales, para $2n$, supongamos que B'_{2n}, B_{2n}, f_{2n} y B_{2n+1} están definidas de tal forma que f_{2n} es un isomorfismo de B_{2n} en B'_{2n} y B_{2n+1} es la subestructura de A generada por la unión de un conjunto finito de generadores de B_{2n} con uno de A_n. Aplicamos el lema anterior, tomando a A como la estructura débilmente homogénea, para obtener a B'_{2n+1} y a f_{2n+1}. Para $2n+1$ el proceso es similar, esta vez usando el lema anterior con A' como la estructura débilmente homogénea.

Finalmente, si definimos f como la función $\bigcup_{n<\omega} f_{2n}$, entonces f es una inmersión de A en A'. De hecho f es un isomorfismo, pues la función $\bigcup_{n<\omega} f_{2n+1}$ es la inversa de f, debido a la conmutatividad de los cuadrados en el diagrama. La segunda afirmación en el enunciado del teorema se sigue al repetir la construcción anterior pero esta vez poniendo A_0 como B, f_0 como la inmersión de B en A' y A_0 como la imagen de ésta. ■

El concepto de homogeneidad débil pierde la peyorativa cualidad de auxiliar en cuanto nuestra atención se restringe a estructuras contables.

2.10 Corolario. *Si A es una L-estructura contable y débilmente homogénea, entonces*

A es homogénea.

Prueba. Si A es finita, el resultado es obvio. Supongamos pues que A es numerable. Haciendo A igual a A' en la segunda parte de la proposición anterior, cualquier inmersión de una subestructura finitamente generada de A se extiende a un automorfismo de A. ■

El resultado anterior nos permite concluir que una estructura contable es homogénea si y sólo si la estructura es débilmente homogénea. Además, este corolario nos permite encontrar nuevos ejemplos. Los siguientes resultados son los pasos esenciales en este sentido, nos dan técnicas para probar que una estructura es débilmente homogénea.

La generosidad del cardinal ω se encuentra en buena parte en el principio de inducción. La inducción será también una herramienta recurrente al mostrar que una estructura es débilmente homogénea, en la forma en que queda expuesta en el próximo resultado.

2.11 Proposición. *Sea A una L-estructura. Si para cada subestructura finitamente generada B, cada inmersión $f : B \longrightarrow A$ y cada elemento $a \in dom A \setminus dom B$, existe una inmersión $\bar{f} : \langle dom B \cup \{a\}\rangle \longrightarrow A$ que extiende a f, entonces A es débilmente homogénea. Si además A es contable, entonces A es homogénea.*

Prueba. Tomemos dos subestructuras finitamente generadas B y C de A y supongamos que B está generada por el conjunto finito $\{b_0, \ldots, b_n\}$. Probaremos que cualquier inmersión de B en A se puede extender a una de C en A aplicando inducción al número mínimo m de elementos que se deben agregar al conjunto $\{b_0, \ldots, b_n\}$ para generar a C.

Si $m = 1$, las hipótesis directamente nos dicen que cualquier inmersión de B en A se puede extender a una inmersión de C en A. Como hipótesis de inducción, supongamos que para $m = k$ el resultado es válido. Si $m = k + 1$ y C es generada por el conjunto $\{b_0, \ldots, b_1\} \cup \{c_0, \ldots, c_k\}$, la estructura C' generada por el conjunto $\{b_0, \ldots, b_{n-1}, c_0, \ldots, c_{k-1}\}$ tiene como subestructura a B y k es el mínimo número de elementos que se deben agregar a B para generar a C' (de no ser así, C también estaría generada por un menor número de elementos). Al tomar una inmersión f de B en A, nuestra hipótesis de inducción nos indica que f puede ser extendida a una inmersión f' de C' en A. Por último, aplicando la hipótesis inicial a C y C', tenemos que f' se puede extender a una inmersión $\bar{f}$ de C en A. La inmersión $\bar{f}$ resulta a su vez ser una extensión de f, por lo que queda demostrada la homogeneidad débil de A.

La última afirmación se sigue de lo anterior y del corolario 2.10. ■

Si el lenguaje es relacional, $B - x$ denotará la subestructura de A generada por el conjunto $\operatorname{dom} B \setminus \{x\}$; ello tiene sentido pues en este caso el dominio de la estructura generada es precisamente el conjunto que genera. Esto también nos dice que, bajo estas hipótesis, una estructura finitamente generada es finita. Una primera aplicación de la proposición 2.11 es la siguiente particular conclusión.

2.12 Proposición. *Supongamos que L es un lenguaje relacional y A es una L-estructura contable. A es homogénea si y sólo si para cada subestructura finita B de A y cualquier elemento x de B, cualquier inmersión de $B - x$ en A puede ser extendida a una inmersión de B en A.*

Prueba. La estructura $B - x$ tiene como cardinalidad a $|B| - 1$ por lo dicho en el párrafo previo a esta proposición. Cuando A es homogénea, procedemos usando que A es débilmente homogénea. En la otra dirección, basta aplicar la proposición 2.11. ■

Ejemplos de estructuras homogéneas II

Las proposiciones anteriores facilitan el mostrar que una estructura es homogénea. En primera instancia, la proposición 2.11 nos da una nueva y muy simple forma de mostrar que la estructura de los números racionales con su orden usual es homogénea; además, con esta nueva forma no necesitamos hacer descansar el resultado en el teorema de caracterización del orden de $\mathbb{Q}$ como hicimos antes (pág. 25). Si A es un subconjunto finito de $\mathbb{Q}$ y a es un elemento de $\mathbb{Q}$ que no está en A, tenemos tres casos: $a < \text{mín}\, A$, $\text{máx}\, A < a$ o a está entre dos elementos de A. Si f es una $\{<\}$-inmersión de A en $\mathbb{Q}$, en los tres casos mencionados f se puede extender a una $\{<\}$-inmersión de $A \cup \{a\}$ en $\mathbb{Q}$, gracias a que $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ es un orden lineal denso y sin extremos.

La construcción de la gráfica en el próximo ejemplo es por sí misma interesante. Hay al menos tres formas de construir esta gráfica; una es mediante una relación entre números naturales (n está relacionado con m si y sólo si el n-ésimo término en la expansión binaria de m es 1 o el m-ésimo término en la expansión binaria de n es 1), otra es definiendo la relación de adyacencia por medio de probabilidad (la probabilidad de que entre dos vértices haya una arista es $\frac{1}{2}$). Optamos por la tercera forma para presentarla.

Ejemplo 10. Considere una gráfica (no vacía) G con la siguiente propiedad:

($*$) Para cualesquiera dos subconjuntos finitos X e Y de $V(G)$ disjuntos, existe un vértice v de G que es adyacente en G a todos los elementos de X pero a ninguno de Y.

Lo impactante de esta propiedad es que caracteriza profundamente a las gráficas numerables en las que es cierta: probaremos que sólo existe una gráfica numerable con esta propiedad. Esto se desprenderá del teorema 2.9. Primero veamos por qué una gráfica con aquélla propiedad se encuentra en la sección de ejemplos; esto, además, es el primer paso para aplicar el teorema 2.9.

2.13 Proposición. *Sea G una gráfica numerable que satisface la propiedad ($*$). Entonces G es homogénea.*

Prueba. Sean H un elemento de **Sub** (G), $f : H \longrightarrow G$ una inmersión y a un vértice de G pero no de H. Definimos los conjuntos $A = \{x \in V(H) \mid a \text{ es adyacente en } G \text{ a } x\}$ y

$B = \{x \in V(H) \mid a$ no es adyacente en G a $x\}$. Entonces $f[A]$ y $f[B]$ son subconjuntos finitos de $V(G)$, de hecho, debido a que f es un morfismo inyectivo, son ajenos. Por la propiedad $(*)$, existe $z \in V(G)$ que es adyacente a todo elemento de $f[A]$ pero a ninguno de $f[B]$. Lo anterior nos permite definir la inmersión $\bar{f} : \langle H \cup \{a\}\rangle \longrightarrow G$ como $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in V(H)$ y $\bar{f}(a) = z$. Esto muestra que G satisface las hipótesis de la proposición 2.11 y, por lo tanto, G es homogénea. ■

El segundo paso para aplicar el teorema 2.9 es verificar que cualesquiera dos gráficas numerables que cumplan la propiedad $(*)$ tienen la misma edad. En efecto, probaremos que la edad de una gráfica que satisface $(*)$ es la clase de todas las gráficas finitas. Observe que como L_0 es un lenguaje relacional, las estructuras finitamente generadas son finitas, así que, para probar lo anterior, bastaría mostrar que toda gráfica finita es inmersible en una gráfica que satisface $(*)$.

2.14 Proposición. *Sea G una gráfica numerable que satisface la propiedad $(*)$. Entonces G es $(\mathbf{K}, \omega)$-universal, donde $\mathbf{K}$ es la clase de todas las gráficas contables. De hecho, G es $\mathbf{K}$-universal.*

Prueba. Supongamos que cualquier gráfica con p vértices es inmersible en G y sea H una gráfica con $p+1$ vértices. Tomemos un vértice arbitrario v de H; entonces la gráfica inducida en H al eliminar v, la cual denotaremos por $H - v$, es una gráfica con p vértices. Sea f una inmersión de $H - v$ en G y definamos los conjuntos A y B como $\{x \in V(H) \mid x$ es adyacente a v en H$\}$ y $V(H)\backslash A$, respectivamente. Por la propiedad $(*)$, existe un vértice z de G que está conectado a todo elemento de $f[A]$ y a ningún elemento de $f[B]$. Extendiendo a f por medio de la asignación $v \mapsto z$, tenemos que la extensión resultante es una inmersión de H en G. Por lo tanto, G es $(\mathbf{K}, \omega)$-universal. La segunda afirmación de la proposición se sigue de lo anterior y de que G es homogénea, en virtud de la proposición 2.17. ■

Ahora podemos concluir, por el teorema 2.9, que sólo hay una gráfica numerable que satisface la propiedad $(*)$. La gráfica numerable que cumple la propiedad $(*)$ es conocida como la gráfica aleatoria o la gráfica de Rado (o la gráfica de Erdös-Rényi). Denotaremos para futuras referencias por $\mathcal{R}$ a esta gráfica. Como es comprensible suponer, a partir de lo previo y de lo dicho antes del inicio del ejemplo, hubo muchas personas que trabajaron con este ejemplo y se estudió desde distintas ramas de las matemáticas. El acercamiento desde la Teoría de Modelos es debido a C. W. Henson en [Hen 71].

Ejemplo 11. Considere la gráfica completa con p vértices, K_p, donde $p \in \omega$. K_p es homogénea, pues si f es una inmersión de una subgráfica de K_p, simplemente basta tomar una permutación de los vértices de K_p que extienda a f. De hecho, podemos mostrar algo más general: la unión contable disjunta de gráficas completas de tamaño p es homogénea. Sean $G_0, G_1, \ldots, G_m$ (permitamos que posiblemente m sea ω) gráficas completas todas ellas de tamaño p y G su unión disjunta. Supongamos que H es una subestructura de G y que f es una inmersión de H en G. Tomemos un vértice v de G

que no está en $V(H)$. Supongamos que v está en G_i. Como K_p es homogénea, existe una inmersión g de la subgráfica generada en G_i por el conjunto $(V(G_i) \cap V(H)) \cup \{v\}$ en alguna G_j, que extiende a $f|_{G_i}$. Tomamos $\bar{f} = g \cup \bigcup_{l \neq i} f|_{G_l}$. Entonces $\bar{f}$ es una inmersión de la gráfica generada en G por $H \cup \{v\}$ en G. Aplicando la proposición 2.11, concluimos que G es homogénea.

El siguiente ejemplo fue estudiado extensamente por C. W. Henson en [Hen 71]. Para simplificar un poco la lectura, diremos que una gráfica G admite a la gráfica H si H es inmersible en G. También denotaremos por $G|_X$ a la subestructura generada (subgráfica inducida) por X en G, donde X es un subconjunto de los vértices de G.

Ejemplo 12. Sea p un número natural mayor o igual a 3. Considere una gráfica numerable G que no admite a K_p y que tiene la siguiente propiedad.

$(*)_p$ Si X e Y son conjuntos finitos y disjuntos de vértices de G y $G|_X$ no admite a K_{p-1}, entonces existe un vértice z de G que es adyacente a todo elemento de X pero a ninguno de Y.

Mostraremos que G es la única gráfica numerable y homogénea que no admite a K_p. Henson además mostró que G es una subgráfica inducida de la gráfica aleatoria, vea la sección 2 en [Hen 71].

2.15 Lema. *Sean $p \geq 3$, G una gráfica infinita que satisface la propiedad $(*)_p$, H una gráfica finita que no admite a K_p, v un vértice de H y f una inmersión de $H - v$ en G. Entonces f se puede extender a una inmersión de H en G.*

Prueba. Sean X e Y los conjuntos definidos por $\{x \in V(H) \mid x \text{ es adyacente a } v \text{ en } H\}$ y $V(H) \backslash (X \cup \{v\})$, respectivamente. Si $G|_X$ admitiera a K_{p-1}, por la definición de X, tendríamos que H admite a K_p, lo cual por hipótesis es falso. Como f es una inmersión, podemos concluir también que $f[X]$ no admite a K_{p-1}. Aplicando la propiedad $(*)_p$, obtenemos la existencia de un vértice z de G que es adyacente a cada elemento de $f[X]$ pero a ninguno de $f[Y]$. Extendemos a f por medio de la asignación $v \mapsto z$. Esta extensión es una inmersión de H en G. ■

Una vez probado el anterior lema, buscamos mostrar, aplicando la proposición 2.12, que una gráfica como la supuesta en las hipótesis del lema es homogénea. Para ello bastaría mostrar que tal gráfica admite a todas y sólo a aquellas gráficas contables que no admiten a K_p; en tal caso, el lema anterior nos da la homogeneidad de esta gráfica.

2.16 Proposición. *Supongamos que $p \geq 3$ y sea G una gráfica numerable que no admite a K_p y que satisface la propiedad $(*)_p$. Entonces G es homogénea y su edad es la clase de todas las gráficas finitas que no admiten a K_p; más aún, G es única salvo isomorfismo y admite exactamente a aquellas gráficas contables que no admiten a K_p.*

Prueba. La última parte de la conclusión es consecuencia de la primera por medio del teorema 2.9 y modificando ligeramente la prueba de la proposición 2.14. Supongamos como hipótesis de inducción que cualquier gráfica de cardinalidad n que no admite a K_p es inmersible en G. Sean H una gráfica de cardinalidad $n+1$ que no admite a K_p y v un vértice de H. Es claro que $H-v$ no admite a K_p, por lo que existe una inmersión de $H-v$ en G. Por el lema anterior, la inmersión de $H-v$ en G es extendida por una inmersión de H en G. Por otro lado, por las hipótesis, G no puede admitir una gráfica que admita a K_p. Por lo tanto, la edad de G es la clase de todas la gráficas finitas que no admiten a K_p. Por último, por el lema 2.15 y lo anterior, G satisface las hipótesis de la proposición 2.12, lo que concluye que G es homogénea. ■

Para $p \geq 3$ fijo, denotamos por $\mathcal{R}_p$ a la gráfica numerable que satisface la propiedad $(*)_p$ y que no admite a K_p. $\mathcal{R}_p$ es conocida como la gráfica numerable universal-homogénea libre de K_p.

Existencia, el límite de Fraïssé

El lector recordará que la afirmación de que la gráfica aleatoria es universal para la clase de las gráficas contables se pospuso hasta la presente sección. La siguiente proposición cubre esta deuda. Ésta muestra que bajo la hipótesis de homogeneidad sobre la L-estructura A se sigue la universalidad de A sobre una clase de estructuras más amplia que su edad (que A sea universal para su edad es en realidad un hecho trivial).

2.17 Proposición. *Supongamos que A una L-estructura contable y homogénea y sea* $\mathbf{K}$ *la clase de todas las L-estructuras cuya edad se encuentra contenida en la de A. Entonces A es* $\mathbf{K}$*-universal.*

Prueba. Observe que la proposición sólo tiene importancia si A es infinita, así pues, supongamos que A es numerable. La técnica es —después de la prueba del teorema 2.9— la esperada. Tomemos una estructura B en $\mathbf{K}$. Si B es finitamente generada, ella misma está en su edad y, con ello, es un elemento de la edad de A; esto automáticamente nos dice que B es inmersible en A. Si B no es finitamente generada, tomemos una subestructura finitamente generada $B_0 = \langle a_0, \dots, a_{m-1}\rangle$ de B. Supongamos que el conjunto numerable $\{a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, b_1, \dots\}$ genera a B y definamos las subestructuras finitamente generadas B_k de B como $B_k = \langle a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{k-1}\rangle$ para $k \geq 1$. Entonces $(B_k : k \in \omega)$ es una cadena de elementos de $\mathbf{Sub}(B)$ y $\bigcup_{k\in\omega} B_k = B$.

Como la edad de B está contenida en la de A, existe una inmersión f_0 de B_0 en A. Supongamos que f_n se encuentra definida como una inmersión de B_n en A. Cortesía de que B_{n+1} es un elemento de la edad de A, tomemos una inmersión g de B_{n+1} en A. Entonces la función $f_n \circ g^{-1}|_{g(B_n)}$ es una inmersión de $g(B_n)$ en A; la homogeneidad débil de A implica que existe una inmersión h de $g(B_{n+1})$ en A que extiende a esta inmersión. Si definimos f_{n+1} como la función $h \circ g$, ésta resulta ser una inmersión de B_{n+1} en A que extiende a f_n.

Por la construcción en el párrafo precedente, $(f_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de inmersiones que satisface que para cada n, f_{n+1} extiende a f_n y cada estructura B_k se encuentra contenida en el dominio de algún elemento de la sucesión. Así, $\bigcup_{n\in\omega} f_n$ es una inmersión de B en A. ■

El siguiente teorema es el previsto recíproco de la proposición 2.6. Tras él queda probada la correspondencia biunívoca entre las clases de amalgamación (con un número contable de tipos de isomorfismo) y las estructuras contables homogéneas. Además, una vez probado el teorema siguiente, por la proposición anterior quedará mostrada la existencia de estructuras universales numerables.

2.18 Teorema (***Teorema de Fraïssé***)**.** *Sean L un lenguaje contable y* $\mathbf{K}$ *una clase de amalgamación de L-estructuras finitamente generadas con sólo un número contable de tipos de isomorfismo. Entonces* $\mathbf{K}$ *es la edad de una L-estructura contable, homogénea y única salvo isomorfismo.*

Prueba. Construiremos una cadena de estructuras en $\mathbf{K}$ cuya unión será la estructura que buscamos. Como hicimos en la demostración de la proposición 2.6, la propiedad hereditaria y la de la coinmersión se encargarán de que la unión de la cadena tenga exactamente edad $\mathbf{K}$. La diferencia con aquella construcción es que mediante la construcción debemos garantizar la condición de homogeneidad débil para la unión de la cadena, esto será de lo que se hará cargo la propiedad de la amalgamación.

Para ejecutar la idea del párrafo anterior, construiremos la cadena de estructuras finitamente generadas $(A_i : i < \omega)$ contenida en $\mathbf{K}$ tal que para cualesquiera estructuras B y C en $\mathbf{K}$ tales que $B \subseteq C$ y cualquier inmersión f de B en A_i, existen $j > i$ y una inmersión $\bar{f}$ de C en A_j que extiende a f. Es claro que esta propiedad nos diría que la unión A de la cadena $(A_i : i < \omega)$ es débilmente homogénea. De hecho, esta propiedad también nos diría que la edad de A es exactamente $\mathbf{K}$. En efecto, si B es un elemento de $\mathbf{K}$, por la propiedad de la coinmersión de $\mathbf{K}$, existe C en $\mathbf{K}$ tal que A_0 y B son inmersibles en C. Por la propiedad anterior, la inclusión de A_0 en sí misma se extiende a una inmersión de B en alguna A_j con $j > 0$. Tal inmersión es una inmersión de B en A, por lo que B estará en la edad de A. Para la otra contención, si B es una subestructura finitamente generada de A, existe un índice $i < \omega$ tal que los generadores de B están, todos y cada uno, en A_i, entonces B es subestructura de A_i y, por la propiedad hereditaria de $\mathbf{K}$, B está en $\mathbf{K}$. Debido a que A resultará contable, tendremos que A es una estructura homogénea con edad $\mathbf{K}$, como deseábamos.

Basta, pues, construir la cadena $(A_i : i < \omega)$ que cumpla la propiedad mencionada. Como $\mathbf{K}$ sólo tiene un número contable de tipos de isomorfismo, podemos tomar a $\mathcal{H}$ como un conjunto contable de representantes de tipos de isomorfismo en $\mathbf{K}$. Supongamos que $\pi : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ es una función biyectiva tal que $\pi(i,k) \geq i$, para todo $(i,k) \in \omega \times \omega$. Tomemos A_0 como cualquier estructura en $\mathbf{K}$. Luego, supongamos que A_i ha sido definida. Observe que sólo existe un número contable de tripletas (f, B, C) tales que $B, C \in \mathcal{H}$ y f es una inmersión de B en A_i, pues B y C son finitamente generadas. Enumeremos estas tripletas como $\{(f_{ik}, B_{ik}, C_{ik})\}_{k<\omega}$. Usando que π es una biyección, sea $(j,k) \in \omega \times \omega$

tal que $\pi(j,k) = i$. Por la propiedad de la amalgamación y que $\mathbf{K}$ es cerrada bajo isomorfismo, el siguiente diagrama se puede completar como se indica y conmuta,

$$\begin{tikzcd}
 & A_{i+1} & \\
C_{ik} \arrow[ur, dashed, "g"] & & A_i \arrow[ul, dashed, "\subseteq"'] \\
 & B_{ik} \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "f_{ik}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde g es una inmersión.

Esto define la estructura A_{i+1} y con ello tenemos construida la cadena $(A_i : i < \omega)$. Observe que podemos asegurar que todas las posibles configuraciones (f, B, C) fueron consideradas en nuestra construcción gracias a que sólo hay un número contable de ellas. Resta probar que efectivamente la cadena satisface la propiedad solicitada. Para ello, sean B y C estructuras en $\mathbf{K}$ tales que $B \subseteq C$ y f una inmersión de B en A_i. Por la elección de $\mathcal{H}$, podemos suponer que B y C son elementos suyos. Entonces, la tripleta (f, B, C) es una de las tripletas consideradas para A_i, digamos $(f, B, C) = (f_{ik}, B_{ik}, C_{ik})$. Tenemos que $\pi(i,k) \geq i$ y, por la construcción previa, que f_{ik} se extiende a una inmersión de C_{ik} en $A_{\pi(i,k)+1}$.

La unicidad de A se sigue del teorema 2.9. ■

Algunos autores optan por llamar a la estructura cuya existencia afirma este teorema como el límite de Fraïssé de la clase $\mathbf{K}$, debido naturalmente a que esta particular construcción fue descrita por R. Fraïssé en la decada de 1950. En el cuarto capítulo probaremos una generalización de este teorema debida a B. Jónsson, esta generalización muestra la existencia de estructuras homogéneas de cardinalidad mayor a ω.

Note que la proposición 2.17 añade a la conclusión del teorema anterior la propiedad de universalidad. De modo que, el límite de Fraïssé de una clase de amalgamación es una estructura contable, universal para tal clase de amalgamación, y homogénea.

Ejemplos de estructuras homogéneas III

El teorema de Fraïssé, teorema 2.18, es el método estándar y por excelencia para construir estructuras homogéneas. Este resultado nos brinda de manera natural nuevos ejemplos; aunque podrían no ser muy nuevos: observe que la unicidad del límite de Fraïssé limita de cierta forma el número de estructuras homogéneas.

Estructuras finitas en un lenguaje relacional finito

Supongamos que L es un lenguaje relacional finito. En este caso, para cada cardinalidad finita n existen sólo un número finito de L-estructuras de cardinalidad n (salvo isomorfismo). De lo anterior deducimos que la clase de todas las L-estructuras finitas contiene un número numerable de tipos de isomorfismo. Es, además, claro que tal clase es una clase de amalgamación. La L-estructura numerable, universal y homogénea que obtenemos a partir de esta clase por medio del teorema 2.18 es conocida como la L-estructura aleatoria.

Órdenes lineales

Considere la clase $\mathbf{K}$ de todos los órdenes lineales finitos. Debido a que el conjunto linealmente ordenado de los números racionales es universal para esta clase, tenemos que la clase $\mathbf{K}$ es la edad de esta estructura homogénea. Así que, por la proposición 2.6, la clase de todos los órdenes lineales es una clase de amalgamación (con un número numerable de tipos de isomorfismo). Por lo tanto, la estructura cuya existencia arroja el teorema 2.18 es precisamente la de los números racionales con su orden usual, debido a su unicidad.

Por supuesto, la anterior no es la forma más instructiva de mostrar que $\mathbf{K}$ es una clase de amalgamación; por ello, con motivo de estimular la práctica del buen ejercicio que trae consigo el verificar la propiedad de la amalgamación para una clase de estructuras, optamos por mostrar sin apelar a la proposición 2.6 que $\mathbf{K}$ es una clase de amalgamación. Es claro que $\mathbf{K}$ es cerrada bajo isomorfismo, satisface la propiedad hereditaria, la de la coinmersión y tiene exactamente un número numerable de tipos de isomorfismo (a saber, todos y cada uno de los números naturales). Para verificar que $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de amalgamación, tomemos tres órdenes lineales finitos, A, A_1 y A_2, y supongamos que f y g son inmersiones de órdenes de A en A_1 y de A en A_2, respectivamente. Probaremos que el diagrama respectivo a la propiedad de la amalgamación se puede completar como deseamos y conmuta aplicando inducción sobre la cardinalidad de A_2.

Si la cardinalidad de A_2 es 1, la de A también lo es, en tal caso es claro que podemos completar el diagrama como buscamos hacerlo. Supongamos que si la cardinalidad de A_2 es n, entonces el diagrama se completa como deseamos. Supongamos que A_2 tiene cardinalidad $n+1$; si la cardinalidad de A es también $n+1$, entonces g debe ser un isomorfismo de A en A_2. En este caso obtenemos el diagrama conmutativo siguiente.

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 & \\
A_1 \arrow[ur, dashed, "="] & & A_2 \arrow[ul, dashed, "fg^{-1}"'] \\
 & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Si A tiene cardinalidad menor a la de A_2, tomemos un elemento c en $A_2 \backslash g[A]$. Por la hipótesis de inducción, existen un orden lineal finito A' e inmersiones $h : A_1 \longrightarrow A'$, $k : A_2 \backslash \{c\} \longrightarrow A'$ tales que $hf = kg$. Extenderemos k a una inmersión k' de A_2 a alguna extensión de A'. Para ello, debemos contemplar tres casos correspondientes a la posible posición de c con respecto a los elementos de $g[A]$ en A_2. Si se encuentra a la derecha de todos los elementos de $g[A]$, tomemos A' mismo si es posible o extendamos A' poniendo un elemento a la derecha de los elementos de $k[A_2 \backslash \{c\}]$ y tomemos $k'(c)$ como este elemento. El caso es análogo si c está a la izquierda de todos los elementos de $g[A]$. Si c se encuentra entre dos elementos de $g[A]$, digamos que $g(x) < c < g(y)$ y no hay un elemento de $g[A]$ entre $g(x)$ y $g(y)$, también podemos extender, de ser necesario, a A' de tal forma que podamos definir $k'(c)$ como un elemento entre $kg(x)$ y $kg(y)$. De este modo, k' es una inmersión de A_2 en A'', donde A'' es la extensión de A' que se hizo tras alguno de los casos anteriores, y se cumple que $k'g = kg = hf$ pues $k'|_{g[A]} = k|_{g[A]}$.

Concluimos que la clase de los órdenes lineales tiene la propiedad de la amalgamación; con ello, esta clase es una clase de amalgamación. Podemos aplicar el teorema 2.18 para concluir que existe una única estructura contable, homogénea y universal para $\mathbf{K}$. Como habíamos notado antes, esta estructura debe ser el orden lineal usual de los números racionales.

Órdenes parciales

Es claro que la clase de los órdenes parciales finitos es cerrada bajo isomorfismo, satisface la propiedad hereditaria y, como para cada cardinalidad finita sólo hay un número finito de órdenes parciales con ésa cardinalidad, tiene un número numerable de tipos de isomorfismo. Asimismo, esta clase satisface la propiedad de la coinmersión al tomar simplemente la unión disjunta de dos órdenes parciales. Bastaría entonces mostrar que se satisface la propiedad de la amalgamación para concluir que esta clase es una clase de amalgamación con un número numerable de tipos de isomorfismo.

Sean A, A_1 y A_2 órdenes parciales y $f : A \longrightarrow A_1$ y $g : A \longrightarrow A_2$ inmersiones de órdenes. El primer paso es mostrar que bajo tales hipótesis podemos suponer que $A = A_1 \cap A_2$. En general, cuando una clase de estructuras permite hacer esta suposición al verificar que tiene la propiedad de la amalgamación, decimos que la clase admite amalgamación disjunta (vea [Mac 11]).

Como la clase de órdenes parciales es cerrada bajo isomorfismo, supongamos que A es subestructura de A_1. Construiremos un orden parcial A_2' isomorfo a A_2 pero para el cual $A = A_1 \cap A_2'$. Iniciemos poniendo a A, luego vamos colocando, por recursión, nuevos elementos correspondientes a los elementos de $A_2 \backslash g[A]$ de tal forma que guarden la misma relación de orden que en A_2, teniendo por supuesto el cuidado de no considerar elementos de A_1. Como A_2 es finito, esta construcción está garantizada siempre. Por lo tanto, siempre podemos suponer que $A = A_1 \cap A_2'$, y con ello que f y g son las respectivas inclusiones.

Una vez dicho lo anterior, definimos una relación sobre $A_1 \cup A_2$ como la cerradura transitiva de la relación $<_{A_1} \cup <_{A_2}$ (la menor relación transitiva que contiene a esta relación). Denotemos a tal relación por $\prec$; por definición $\prec$ es una relación transitiva, por lo que basta mostrar que es antirreflexiva para concluir que define un orden parcial sobre $A_1 \cup A_2$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que x es un elemento de $A_1 \cup A_2$ tal que $x \prec x$. Por la definición de $\prec$, existen $y_0, y_1, \ldots, y_m$ en $A_1 \cup A_2$ tales que $x <_{A_{i_0}} y_0 <_{A_{i_1}} y_1 <_{A_{i_2}} \ldots y_m <_{A_{i_{m+1}}} x$, donde $i_j \in \{1,2\}$ para cada $0 \leq j \leq m+1$. Podemos suponer que los índices i_j se alternan: de haber algo como $y_j <_{A_1} y_{j+1} <_{A_1} y_{j+2}$ retiramos a y_{j+1}, pues por la transitividad de $<_{A_1}$ tenemos que $y_j <_{A_1} y_{j+2}$. Detallemos los siguientes casos. Si $i_0 \neq i_{m+1}$, entonces $x \in A_1 \cap A_2$, pero $A_1 \cap A_2 = A$, de donde $x <_A x$, lo que resulta una contradicción. Si $i_0 = i_{m+1}$, tenemos que $y_0, y_1, \ldots, y_m \in A_1 \cap A_2 = A$; esto, para cualquiera que sea el valor de i_0, implica que $x <_{A_{i_0}} x$, lo que es una contradicción. Así, $\prec$ es antireflexiva y con ello $A_1 \cup A_2$ es un orden parcial con la relación $\prec$. Además, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
 & A_1 \cup A_2 & \\
A_1 \arrow[ur, "\subseteq"] & & A_2 \arrow[ul, "\subseteq"'] \\
 & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Concluimos que la clase de los órdenes parciales finitos es una clase de amalgamación con un número numerable de tipos de isomorfismo. El teorema 2.18 implica la existencia de un orden parcial numerable, universal y homogéneo. Denotaremos este orden parcial por $\mathbb{P}$. No se cuenta con una descripción natural de este orden parcial como la que existe para el límite de la clase de órdenes lineales finitos. Jan Hubicka, en su tesis doctoral, presenta una construcción del orden parcial $\mathbb{P}$ que resulta curiosa e interesante.

Gráficas

Ahora consideremos la clase de todas las gráficas finitas. Es claro que esta clase es cerrada bajo isomorfismo, satisface la propiedad hereditaria y tiene un número numerable de tipos de isomorfismo (para esto último debe observarse que para cada conjunto de cardinalidad finita n, hay menos de 2^{n^2} gráficas con tal conjunto de vértices). La propiedad de la coinmersión se verifica mediante la unión disjunta de dos gráficas. Por último, veamos que la propiedad de la amalgamación también es satisfecha en esta clase. Tomemos dos gráficas finitas G_1 y G_2 en las cuales una tercera gráfica finita G es inmersible en ellas por medio de f y g respectivamente. Como razonamos anteriormente, podemos suponer que f y g son inclusiones y que de hecho $G_1 \cap G_2 = G$ (también se puede construir una amalgamación con sólo asegurar que no hay aristas entre $G_1 \setminus G$ y $G_2 \setminus G$). Luego, tomamos como base a G_1 y sencillamente añadimos los elementos de $G_2 \setminus G$ de tal forma que guarden la misma relación de adyacencia que en G_2 con los elementos de G_2. Lo anterior da como resultado una gráfica G' definida sobre el conjunto $V(G_1) \cup V(G_2)$ que tiene como subestructuras a G_1 y G_2 y de tal forma que las inclusiones $j_i : G_i \longrightarrow G'$, con $i = 1, 2$, cumplen que $j_1 f = j_2 g$. Por lo tanto, la clase de todas las gráficas finitas satisface la propiedad de la amalgamación.

Ahora estamos en posición de concluir, por medio del teorema 2.18, que existe una única gráfica numerable, universal y homogénea, más aún, por la unicidad de esta gráfica y las propiedades de la gráfica aleatoria (ejemplo 10, pág. 38), el límite de Fraïssé de la clase de las gráficas finitas es precisamente la gráfica aleatoria.

Gráficas que no admiten a K_p

Fijemos $p \geq 3$ y esta vez tomemos la clase de todas aquellas gráficas finitas que no admiten a K_p. La amalgamación hecha para gráficas finitas en el ejemplo anterior funciona de la misma forma en este caso; basta observar que, hecha la amalgamación como en aquel caso, cualquier gráfica completa en la amalgamación debe estar contenida en alguna de las gráficas amalgamadas, lo que impide que la amalgamación admita a K_p. Las restantes propiedades de ser una clase de amalgamación y que sólo haya un número contable de tipos de isomorfismo en esta clase se heredan del ejemplo precedente.

Por la unicidad del límite de Fraïssé, la estructura universal-homogénea para la clase de amalgamación de las gráficas finitas que no admiten a K_p debe ser $\mathcal{R}_p$ (ejemplo 11, pág. 40).

Espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo finito

Fijemos un campo finito $\mathbf{F}$ y consideremos $\mathbf{V_F}$ como la clase de todos los espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbf{F}$. En un ejemplo anterior hablamos del lenguaje L apropiado para estas estructuras (pág. 26). Claramente $\mathbf{V_F}$ es cerrada bajo L-isomorfismos y, debido a que $\mathbf{F}$ es finito, satisface la propiedad hereditaria y sólo posee un número numerable de tipos de isomorfismo. Note a continuación que $\mathbf{F}$ es siempre inmersible, como espacio vectorial sobre sí mismo, en cualquier espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$ distinto del espacio trivial; de modo que en este caso la propiedad de la amalgamación implica la de la coinmersión. Terminemos, pues, verificando la propiedad de la amalgamación para esta clase. Sean W, V_1 y V_2 elementos de $\mathbf{V_F}$, como la clase es cerrada bajo isomorfismo, podemos suponer que las inmersiones a considerar son en realidad inclusiones de subespacios vectoriales. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que V_1 tiene dimensión sobre $\mathbf{F}$ mayor o igual a la respectiva de V_2. Llevando a cabo un simple razonamiento con las bases de los espacios vectoriales, podemos observar que V_2 es inmersible en V_1 por medio de una inmersión

k, de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& V_1 & \\
V_1 \arrow[ur, dashed, "="] & & V_2 \arrow[ul, dashed, "k"'] \\
& W \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[ur, "\subseteq"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, el límite de Fraïssé de $\mathbf{V_F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$, cuya dimensión debe ser numerable. En efecto, al ser él mismo numerable, su dimensión no puede ser no contable; por otro lado, existen espacios vectoriales de dimensión finita arbitraria sobre $\mathbf{F}$, por lo que, al ser universal para $\mathbf{V_F}$, no puede tener dimensión finita. Observe finalmente que en realidad este espacio vectorial es simplemente el espacio vectorial de dimensión numerable sobre $\mathbf{F}$, debido a que la dimensión determina salvo isomorfismo a un espacio vectorial.

Espacios métricos racionales

Un espacio métrico racional es un espacio métrico donde todas las distancias entre puntos son racionales. Mediante la definición de las relaciones binarias R_q, donde xR_qy si y sólo si $d(x,y) = q$ para dos elementos del espacio, podemos considerar cada espacio métrico racional como una estructura relacional en el lenguaje numerable $\{R_q\}_{q\geq 0}$, con q un número racional. Para dos espacios métricos racionales un homomorfismo entre ellos es una función isométrica, esto es, que preserva la distancia.

Consideremos la clase M de todos los espacios métricos racionales finitos. Es claro que M sólo tiene un número numerable de tipos de isomorfismo, que satisface la propiedad hereditaria y que es cerrada bajo isomorfismo. Sean D_1 y D_2 dos espacios métricos racionales finitos en los cuales el espacio métrico racional A es inmersible por medio de las isometrías f y g respectivamente. Observe que, modificando adecuadamente a D_2, podemos suponer que $A = D_1 \cap D_2$ y con ello que f y g son simplemente las inclusiones. Consideremos el conjunto $D_1 \cup D_2$ y definamos la siguiente seudo-métrica sobre él: $d'(x,y) = \inf_{a\in A}(d_{D_1}(x,a) + d_{D_2}(y,a))$, si $x \in D_1$ y $y \in D_2$, $d'(x,y) = d_{D_i}(x,y)$ si $x, y \in D_i$. Al tomar el conjunto cociente con respecto a la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $d'(x,y) = 0$, la métrica resultante d es una métrica racional. Considerando D' como el espacio métrico $((D_1 \cup D_2)/\sim, d)$ tenemos que las inclusiones de D_i en $D_1 \cup D_2$ se pueden tomar como inclusiones en D' por medio de tomar la clase de equivalencia. Por lo tanto, las inclusiones $j_i : D_i \longrightarrow D'$ $(i = 1, 2)$, son inmersiones isométricas y es trivial que $j_1 f = j_2 g$. Por lo tanto, M satisface la propiedad de la amalgamación. Por último, si tenemos dos espacios métricos racionales no vacíos y finitos, entonces el espacio métrico trivial (el que consta de un sólo punto) es inmersible en ambos, por lo que ambos son inmersibles en un espacio métrico racional finito, en virtud de la propiedad de la amalgamación.

Por el teorema 2.18, existe un espacio métrico racional universal-homogéneo, el cual denotaremos por $\mathbb{U}_0$. Note que como M tiene elementos de cualquier cardinalidad finita, $\mathbb{U}_0$ es numerable. La compleción de $\mathbb{U}_0$ es conocido como el espacio de Urysohn y es denotado por $\mathbb{U}$. El espacio de Urysohn es el único espacio métrico completo y separable que es homogéneo y universal para la clase de todos los espacios métricos completos y separables.

Campos de característica p

El lector puede recordar que la clase de todos los campos finitos no satisface la propiedad de la coinmersión, aún a pesar de que sí satisface la propiedad de la amalgamación. La situación es favorable cuando restringimos nuestra atención a la clase de todos los campos finitos que comparten la característica. Sea p un número primo y denotemos por GF_p a la clase de los campos finitos de característica p. Tomemos un elemento H de la clase y un subcampo K de él, sabemos que entonces la característica de K divide a la de H, por lo que necesariamente K tiene característica p; esto muestra que GF_p satisface la propiedad hereditaria. Es claro que GF_p es cerrada bajo isomorfismo y que en la clase sólo hay un número numerable de tipos de isomorfismo pues todos son campos finitos. En la página 31 mostramos que la amalgamación de dos campos con la misma característica es un campo que posee esa misma característica, por lo que GF_p satisface la propiedad de la amalgamación. Por último, el campo $\mathbb{Z}_p$ siempre es inmersible en cualquier campo de característica p, de donde, la propiedad de la amalgamación implica que la propiedad de la coinmersión es satisfecha en esta clase.

Concluimos que GF_p es una clase de amalgamación con un número numerable de tipos de isomorfismo. El límite de Fraïssé de GF_p es un campo numerable de caracterítica p, universal y homogéneo, único salvo isomorfismo. Un hecho muy interesante es que este campo resulta ser la cerradura algebraica del campo $\mathbb{Z}_p$.

2.5. Algunos resultados en la clasificación de estructuras homogéneas

Gracias a la unicidad del límite de Fraïssé se han logrado exhaustivas clasificaciones de estructuras homogéneas. Un resultado de clasificación de estructuras es un resultado que enlista cuáles son exactamente las estructuras que satisfacen ciertas concretas propiedades. Presentaremos algunos de estos resultados en el presente apartado aunque no brindaremos prueba de ellos; remitiremos al lector al trabajo original en el que puede encontrarse cada resultado.

El primer resultado en realidad es simple. Uno puede convencerse de que si un orden lineal contable es homogéneo y su edad tiene al menos dos elementos no isomorfos, entonces, por mediación de la propiedad de la coinmersión y de la amalgamación, su edad debe coincidir con la clase de todos los órdenes lineales y, por lo tanto, tal orden lineal debe ser aquél de los números racionales.

2.19 Teorema. *Sea A un orden lineal homoǵeneo. Entonces A es un sólo punto o es isomorfo a $\mathbb{Q}$.* ■

El siguiente resultado es debido a J. Schmerl en [Sch 79].

2.20 Teorema. *Sea A un orden parcial contable y homogéneo. Entonces A es isomorfo a $\mathbb{Q}$, al orden numerable universal-homogéneo $\mathbb{P}$, a una anticadena de n elementos I_n, a $I_n[\mathbb{Q}]$ o a $\mathbb{Q}[I_n]$, con $1 \leq n \leq \omega$.* ■

El próximo se debe a A. Lachlan y R. Woodrow en [LyW 80]. G. Gardiner trató el caso cuando las gráficas son finitas.

2.21 Teorema. *Sea G una gráfica contable y homogénea. Entonces G o su complemento es isomorfa a la gráfica aleatoria, a la gráfica universal-homogénea libre de K_p ($p \geq 3$), a una unión disjunta contable de K_p ($p \geq 1$), al pentágono o a $K_3 \times K_3$.* ■

Resultados sobre gráficas dirigidas y torneos fueron mostrados por A. Lachlan, R. Woodrow y G. Cherlin, entre otros. Pueden encontrarse todos los anteriores resultados más algunos más en [Lac 86].

Obsérvese que de acuerdo con los teoremas anteriores, el número de órdenes lineales contables homogéneos es finito, el de órdenes parciales contables homogéneos es numerable y esta misma suerte se tiene con las gráficas contables homogéneas. Una buena pregunta —hecha por primera vez por R. Fraïssé— es entonces, ¿hay sólo un número numerable de estructuras homogéneas contables (para un lenguaje relacional finito fijo)? La respuesta es negativa: en [Hen 72], C. W. Henson probó la existencia de 2^ω gráficas dirigidas distintas, numerables y homogéneas, mostrando que aún para un lenguaje tan simple como L_0 la conjetura era falsa.

Capítulo 3

La Teoría de Modelos de las estructuras homogéneas

Es tiempo de rendir justificación al título del presente trabajo. En este capítulo abordaremos la Teoría de Modelos que emerge con y en las estructuras homogéneas. Mostraremos que el teorema de Fraïssé no sólo resulta una forma útil de construir estructuras homogéneas sino que también constituye una técnica importante para obtener estructuras con notables características, relevantemente, estructuras ω-categóricas. Asimismo, veremos que las estructuras homogéneas resultan traer consigo una serie de características interesantes relativas a su teoría y a su grupo de automorfismos.

La primera sección de este capítulo extenderá el trabajo hecho en el primer capítulo sobre algunos conceptos de la Teoría de Modelos. La segunda integrará al flujo de nuestro estudio uno de los resultados más relevantes sobre teorías ω-categóricas, el teorema de Ryll-Nardzewski, Engeler y Svenonius. Las últimas dos secciones serán dedicadas a presentar los resultados sobre estructuras homogéneas.

3.1. Tipos, grupos de automorfismos y modelos atómicos

El lector recordará que la exposición del capítulo uno se vio cortada en un momento en el que los resultados y los conceptos comenzaban a ser cada vez más esotéricos y que fue prometido que en el tercer capítulo de esta tesis se profundizarían. Ese es el motivo de esta sección.

Tipos

La idea de un tipo sobre un conjunto de elementos de una L-estructura es la de capturar información en "pequeñas piezas" para poder después estudiar la estructura y subconjuntos de ella de una manera minuciosa y sistemática por medio de estas piezas. W. Hodges sugiere pensar en tipos como una generalización de los conceptos de polinomio mínimo en la teoría de campos y del de órbita en la teoría de grupos de automorfismos ([Hod 93, sección 6.3]).

3.1 Definición. Sean L un lenguaje de primer orden, A una L-estructura y X un conjunto de elementos de A. Consideremos el lenguaje $L(X)$, aquél que resultaba de añadir a L un símbolo de constante por cada elemento de X. Para cada tupla $\bar{b}$ de elementos de A, el tipo de $\bar{b}$ sobre X, con respecto a A y en las variables $\bar{x}$, es el conjunto de todas las fórmulas $\varphi(\bar{x})$ de $L(X)$ tales que $A \vDash \varphi(\bar{b})$. Denotaremos a este tipo por $\mathrm{tp}_A(\bar{b}/X)$; en tal caso, tenemos que

$$\mathrm{tp}_A(\bar{b}/X) = \{\varphi(\bar{x}) \mid \varphi(\bar{x}) \text{ es una fórmula de } L(X) \text{ y } A \vDash \varphi(\bar{b})\}.$$

Diremos que un conjunto $p(\bar{x})$ de fórmulas de $L(X)$ es un tipo sobre X (con respecto a A y en las variables $\bar{x}$) si existe una tupla $\bar{b}$ de elementos de una (L-)extensión elemental de A, digamos B, tal que $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$. Un subconjunto $p(\bar{x})$ de un tipo sobre X es llamado un tipo parcial sobre X.

Usualmente los tipos serán denotados por $p(\bar{x}), q(\bar{x}), r(\bar{x})$, etcétera. Por último, un tipo sobre el conjunto vacío será llamado simplemente un tipo, con su respectiva adecuación cuando el tipo sea parcial. Algunos autores prefieren aumentar el adjetivo *completo* para referirse a un tipo, en cambio, llaman tipo a lo que bajo nuestra definición es un tipo parcial. Tal uso es muy atinado, como muestra la próxima proposición. Sin embargo, al igual que al parecer la mayoría de los autores, nos apegaremos a los términos de nuestra definición; resulta económico pues nuestro interés es prácticamente exclusivo en tipos completos.

3.2 Proposición. *Sean A una L-estructura, X un conjunto de elementos de A y $p(\bar{x})$ un tipo parcial sobre X. Entonces $p(\bar{x})$ es un tipo si y sólo si para cada fórmula $\varphi(\bar{x})$ de $L(X)$, $\varphi(\bar{x})$ o $\neg\varphi(\bar{x})$ es un elemento de $p(\bar{x})$.*

Prueba. Si $p(\bar{x})$ es un tipo, existe una una tupla $\bar{b}$ de elementos de una extensión elemental B de A, tal que $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$. Sabemos que para una fórmula $\varphi(\bar{x})$ de $L(X)$ se tiene que $B \vDash \varphi(\bar{b})$ o $B \vDash \neg\varphi(\bar{b})$, por lo que $\varphi(\bar{x})$ o $\neg\varphi(\bar{x})$ es un elemento de $\mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$.

Ahora supongamos que $p(\bar{x})$ es un tipo parcial sobre X tal que, para cualquier fórmula $\varphi(\bar{x})$ de $L(X)$, $\varphi(\bar{x})$ o $\neg\varphi(\bar{x})$ es un elemento de $p(\bar{x})$. Como $p(\bar{x})$ es un tipo parcial, supongamos que $p(\bar{x})$ es un subconjunto del tipo $\mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$, para una tupla $\bar{b}$ de elementos de la extensión elemental B de A. Tomemos $\varphi(\bar{x})$ una fórmula en $\mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$. Para esta fórmula, por hipótesis, tenemos que ella o su negación pertenece a $p(\bar{x})$, pero es imposible que $\neg\varphi(\bar{x})$ pertenezca a éste, de ser así tendríamos que $B \models \neg\varphi(\bar{b})$ y con ello que tanto $\varphi(\bar{x})$ como su negación son elementos de $\mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$, lo que es una clara contradicción. Por lo tanto, $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$. ■

Observe que la misma definición de tipo nos da una enorme cantidad de ejemplos, basta tomar nuestra estructura favorita, una tupla de elementos de ella y tomar el tipo que define esta tupla en la estructura. Antes de dar un ejemplo más interesante, mostraremos un resultado muy útil al momento de verificar si un conjunto de fórmulas es o no un tipo (parcial en principio). Como el lector puede suponer de la simple y rápida lectura de la proposición, ésta descansa en el teorema de compacidad. Si A es una L-estructura, denotaremos por $\mathrm{Th}_X(A)$ a la teoría de A en el lenguaje $L(X)$. En general, si T es una L-teoría y $Q(\bar{x})$ es un conjunto de fórmulas de L con variables libres $\bar{x}$, decimos que el conjunto $T \cup Q(\bar{x})$ es satisfacible si para cada subconjunto finito $\{\phi_0(\bar{x}), \ldots, \phi_{k-1}(\bar{x})\}$ de $Q(\bar{x})$, el conjunto $T \cup \{\exists\bar{x}(\phi_0(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \phi_{k-1}(\bar{x}))\}$ es consistente, es decir, tiene un modelo.

3.3 Teorema. *Sean A una L-estructura, X un conjunto de elementos de A y $Q(\bar{x})$ un conjunto de fórmulas de $L(X)$ con variables libres $\bar{x}$. Entonces $Q(\bar{x})$ es un tipo parcial sobre X si y sólo si el conjunto $Q(\bar{x})\cup \mathrm{Th}_X(A)$ es satisfacible.*

Prueba. Supongamos en primera instancia que $Q(\bar{x})$ es un tipo parcial sobre X. Sea B una extensión elemental de A para la cual $Q(\bar{x}) \subseteq \mathrm{tp}_B(\bar{b}/X)$, para alguna tupla $\bar{b}$ de elementos de B. A partir de que B es extensión elemental de A, es claro que B es un testigo de la satisfacibilidad de $Q(\bar{x})\cup \mathrm{Th}_X(A)$ y, por lo tanto, este conjunto es satisfacible. El enunciado recíproco requiere de más técnica, la cual sólo bosquejamos y remitimos al lector a [Mar 02, sección 2.3]. A partir de la satisfacibilidad del conjunto $Q(\bar{x})\cup \mathrm{Th}_X(A)$, podemos mostrar la satisfacibilidad del conjunto $Q(\bar{c})\cup \mathrm{elDiag}(A)$, donde $\bar{c}$ es una tupla de constantes nuevas y $\mathrm{elDiag}(A)$ es el conjunto de $L(A)$-fórmulas válidas en A, conjunto conocido como el diagrama elemental de A. Tomando un modelo, digamos B, de este conjunto, por el lema del diagrama elemental, [Mar 02, Lemma 2.3.3 (ii)], existe una inmersión elemental de A en este modelo. Sin pérdida de la generalidad, haciendo las sustituciones necesarias, uno puede suponer que B es una extensión elemental de A. Por último, por la construcción, $\bar{c}^B$ es una tupla de elementos de B tal que $Q(\bar{x}) \subseteq \mathrm{tp}_B(\bar{c}^B/X)$. ■

Ahora estamos preparados para un primer ejemplo interesante.

Ejemplo. En la estructura $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ y considerando el conjunto $X = \mathbb{N}$, veamos que el conjunto $p(x)$ cuyos elementos son las fórmulas $x > 0,\ x > 1,\ x > 2, \ldots$ es un tipo parcial sobre X. Al tomar un subconjunto finito U del conjunto $p(x)\cup \mathrm{Th}_{\mathbb{N}}(\mathbb{Q})$, podemos elegir un elemento a suficientemente grande en $\mathbb{Q}$ que muestre la satisfacibilidad de U. Así, $p(x)\cup \mathrm{Th}_{\mathbb{N}}(\mathbb{Q})$ es satisfacible y con ello $p(x)$ es un tipo parcial sobre X. Lo anterior nos permite concluir la existencia de una extensión elemental de $\mathbb{Q}$ (el cual en particular es modelo de **TOD**) en la cual existe un elemento b y es modelo de las fórmulas

$b > 0\,, b > 1\,, b > 2\,, \ldots$, es decir, en esta extensión el conjunto de los números naturales está superiormente acotado.

3.4 Definición. Sean A una L-estructura, X un conjunto de elementos de A y $p(\bar{x})$ un tipo parcial sobre X. Decimos que

(a) $p(\bar{x})$ es realizado por la tupla $\bar{b}$ de elementos de A si es un subconjunto del tipo $\mathrm{tp}_A(\bar{b}/X)$. $p(\bar{x})$ es realizado en A si es realizado por alguna tupla de elementos de A;

(b) $p(\bar{x})$ es omitido en (o por) A si no es realizado en A.

En el ejemplo anterior, el tipo $p(x)$ es omitido en $\mathbb{Q}$, pues sabemos que en el orden usual de los números racionales el conjunto de los números naturales no es acotado superiormente. Una observación básica es que cualquier tipo (parcial), sobre X y respecto a A, es realizado en alguna extensión elemental de A. Es de enorme interés en la Teoría de Modelos cuándo los tipos de una estructura son realizados en la misma estructura, esta cuestión lleva al concepto de saturación de una estructura (vea por ejemplo [Mar 02, sección 4.3]).

Para continuar, podemos adelantar que nuestro interés será en los tipos de una estructura sobre el conjunto vacío. En este caso, al tipo definido por la tupla $\bar{a}$ sobre $\emptyset$ con respecto a A será denotado por $\mathrm{tp}_A(\bar{a})$ en lugar de $\mathrm{tp}_A(\bar{a}/\emptyset)$. Cuando no haya posibilidad de confusión, un tipo de la estructura A será referido como un tipo, omitiendo aquello de tipo respecto a A. En este contexto, un corolario útil del teorema 3.3 y de la proposición 3.2 es el siguiente.

3.5 Corolario. *Sean A una L-estructura y $p(\bar{x})$ un conjunto de fórmulas de L con variables libres $\bar{x}$. Entonces los siguientes incisos son equivalentes.*

(a) *Existe una L-extensión elemental de A, digamos B, y una tupla $\bar{a}$ de elementos de B, tal que $p(\bar{x}) = tp_B(\bar{a})$; es decir, $p(\bar{x})$ es un tipo.*

(b) *$p(\bar{x})$ es un conjunto de L-fórmulas maximal tal que $Th(A) \cup p(\bar{x})$ es satisfacible.*

Prueba. Observe que la equivalencia se sigue de aplicar el teorema 3.3 en el caso cuando $X = \emptyset$; que el inciso (b) implica el (a) requiere de la proposición 3.2 para asegurar que el tipo es completo a partir de la maximalidad de $p(\bar{x})$. ■

3.6 Definición. Sea A una L-estructura. Si $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $p(\bar{x})$ es un tipo, decimos que $p(\bar{x})$ es un n-tipo. El conjunto de todos los n-tipos de A es llamado el n-ésimo espacio de Stone de A y es denotado por S_n^A.

Si B es una extensión elemental de A, es claro que $\mathrm{Th}(A) = \mathrm{Th}(B)$. Por el anterior corolario podemos concluir que $S_n^A = S_n^B$. El (n-ésimo) espacio de Stone de A es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo, su topología está generada por los conjuntos $\{p(\bar{x}) \in S_n^A \mid \varphi(\bar{x}) \in p(\bar{x})\}$, para cada fórmula $\varphi(\bar{x})$ de L con variables libres $\bar{x}$

(vea por ejemplo, [Mar 02, sección 4.1]). Para llegar al resultado que perseguimos, el cual aún no hemos descrito, requerimos de una ligera desviación. Hasta ahora, como lo que nos compete es el estudio de las estructuras homogéneas, sólo hemos hablado de tipos de una estructura, en seguida generalizaremos las definiciones para poder hablar de tipos de teorías.

3.7 Definición. Sea T una L-teoría. Decimos que el tipo $p(\bar{x})$ (de alguna L-estructura) es un tipo de T si el conjunto $T \cup p(\bar{x})$ es satisfacible. El conjunto de n-tipos de T es denotado por $S_n(T)$ y es conocido como el n-ésimo espacio de Stone de T.

Una observación importante es que si T es una L-teoría completa y A es un modelo de T, entonces $S_n(T) = S_n^A$. Lo anterior se desprende de que cuando la teoría T es completa, la teoría de cualquier modelo de T es T misma, como mostramos en el primer capítulo. Podemos observar que entonces, para una L-estructura A, los tipos de A son exactamente los tipos de $\mathrm{Th}(A)$. Al final, nuestro interés será exclusivo de las teorías de la forma $\mathrm{Th}(A)$ para alguna estructura A, por lo que la condición de completud será inherente a nuestras teorías. Pero continuemos en un ámbito más general.

3.8 Definición. Sean T una L-teoría y $p(\bar{x})$ un (n-) tipo de T. Decimos que $p(\bar{x})$ es aislado o soportado si existe una fórmula $\varphi(\bar{x})$ tal que el conjunto $T \cup \{\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})\}$ tiene un modelo y para cada $\psi(\bar{x}) \in p(\bar{x})$, $T \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$. A la fórmula $\varphi(\bar{x})$ con la característica descrita se le llama un soporte del tipo $p(\bar{x})$ y también decimos que $p(\bar{x})$ es soportado o aislado por $\varphi(\bar{x})$.

Una pregunta relevante es: dado un tipo $p(\bar{x})$ de la L-teoría T, ¿cuándo existe un modelo de T que omita a $p(\bar{x})$? Podemos observar rápidamente que si el tipo es soportado por la fórmula $\varphi(\bar{x})$, entonces cada modelo de T que también es modelo de $\exists \bar{x} \varphi$ realiza a $p(\bar{x})$; por lo que nuestros esfuerzos se deben encaminar a buscar modelos que no hagan válido al soporte del tipo con la intención de omitirlo. Primero formalizemos la observación anterior. Recuerde que desde el primer capítulo hemos supuesto que todas las teorías de las que hablamos tienen modelos.

3.9 Proposición. *Sea T una L-teoría y supongamos que $\varphi(\bar{x})$ soporta al tipo $p(\bar{x})$ de T, entonces $p(\bar{x})$ es realizado en cualquier modelo de $T \cup \{\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})\}$. En particular, si T es completa, cada tipo soportado es realizado.*

Prueba. Para la segunda parte, si T es completa y $\varphi(\bar{x})$ es el soporte del tipo $p(\bar{x})$ de T, tenemos que necesariamente $T \vdash \exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$ y la primera parte implica que $p(\bar{x})$ es realizado (en cualquier modelo de T). ■

Nuestra atención se debe centrar, como apuntábamos antes, en tipos no soportados. El siguiente teorema da condiciones suficientes para obtener un modelo que omita algunos tipos, como dijimos, buscaremos que estos tipos no sean soportados. Sin embargo, el resultado contiene en sus hipótesis una restricción sobre el lenguaje, la cual afortunadamente no será un problema para nuestros objetos de estudio, pues las estructuras que hemos considerado hasta ahora en nuestros ejemplos están definidas en un lenguaje contable. Debido a su dificultad, decidimos no incluir la prueba de este teorema, el lector la puede consultar en [Mar 02, Teoremas 4.2.3 y 4.2.4] o en [Hod 93, Teorema 7.2.1].

3.10 Teorema (***Teorema de omisión de tipos***)**.** *Sean L un lenguaje contable, T una L-teoría y Φ un conjunto contable de tipos no soportados de T. Entonces existe un modelo numerable de T el cual omite a todos los elementos de Φ.* ■

Nuestro objetivo, el teorema que buscamos, relaciona los tipos de la teoría T , su categoricidad, el tamaño de los espacios $S_n(T)$ y la acción del grupo de automorfismos de cualquier modelo contable de T. El siguiente apartado cubrirá lo necesario del tema de grupos de automorfismos.

Grupo de automorfismos

El lector no se resistiría a aceptar que el grupo de automorfismos de una estructura es relevante en el estudio de estructuras homogéneas: basta observar los términos en que está definido el concepto de homogeneidad.

Denotaremos por $\mathbf{Aut}(A)$ al grupo de automorfismos de la L-estructura A. Entonces $\mathbf{Aut}(A)$ es un subgrupo del grupo de permutaciones del dominio de A. En adelante permitiremos un abuso de notación: escribiremos, para una L-estructura A, $\bar{a} \in A^n$ en lugar de $\bar{a} \in \operatorname{dom} A^n$, en otras palabras, no distiguiremos entre la estructura y su dominio. El lector puede notar que no hay ningún riesgo con ello y que de hecho en algunos ejemplos hemos ya caído en este manejo, el cual resulta conveniente.

Cualquier subgrupo del grupo simétrico (el grupo de las permutaciones) de un conjunto X actúa de manera natural sobre X; de hecho, también de manera natural, actúa sobre X^n, para cualquier entero positivo n. Así, para cada n, el grupo $\mathbf{Aut}(A)$ actúa sobre el conjunto A^n. El siguiente lema resume esta acción de $\mathbf{Aut}(A)$ sobre las potencias de A.

3.11 Lema. *Sean A un L-estructura y n un número entero positivo. La aplicación*

$$(g, (a_0, \ldots, a_{n-1})) \longmapsto (g(a_0), \ldots, g(a_{n-1}))$$

de $\mathbf{Aut}(A) \times A^n$ en A^n define una acción del grupo $\mathbf{Aut}(A)$ sobre el conjunto A^n. ■

Para continuar, debemos recordar algunos conceptos de la teoría de grupos de permutaciones.

3.12 Definición. Sean X un conjunto y G un subgrupo del grupo simétrico de X.

(i) Si $a \in X$, la órbita de a bajo G es el conjunto $\{g(a) | \ g \in G\}$;
(ii) Si $Y \subseteq X$, el estabilizador puntual de Y en G es el conjunto $G_{(Y)} = \{g \in G \mid \forall a \in Y (g(a) = a)\}$.

Podemos conocer propiedades de la L-estructura A por medio de las que posee su grupo de automorfismos. La primera propiedad en fila es la rigidez, una estructura es rígida si la identidad en A es el único elemento de $\mathbf{Aut}(A)$. En este caso, hay una órbita con un sólo elemento por cada elemento de la estructura. Ejemplos de estructuras rígidas son los buenos órdenes. Esto puede dar una idea al lector del porqué, a pesar de ser numerable y poseer como edad a la clase de todos los órdenes finitos, la estructura ordenada $\mathbb{N}$ de los números naturales no es homogénea y con ello no es el límite de Fraïssé de su edad (el cual ya mostramos que es $\mathbb{Q}$).

Las siguientes propiedades están muy relacionadas con la homogeneidad de la estructura.

3.13 Definición. Con la notación de la definición anterior, decimos que G

(i) actúa (n-)transitivamente o que es (n-)transitivo sobre X^n si la órbita de cualquier elemento de X^n es todo el conjunto X^n;

(ii) es oligomorfo sobre X si para cada entero positivo n, el número de órbitas de G sobre X^n es finito.

La condición de transitividad no será muy notable en este trabajo. El problema con la transitividad se haya en que si el conjunto X tiene más de un elemento y $n > 1$, G no puede ser (n-)transitivo sobre X^n; para ello, supongamos que a y b son elementos de X distintos. Tenemos entonces que las n-tuplas $(a, \ldots, a)$ y $(b, a, \ldots, a)$ son elementos de X^n, sin embargo no existe una función g tal que $g(a, \ldots, a) = (ga, \ldots, ga) = (b, a, \ldots, a)$, pues no puede suceder que $a = ga = b$. Así que, en nuestra definición en (i) podríamos bien quedarnos con el caso $n = 1$.

La oligomorfía es lo mejor posible después de la transitividad y, como mostaremos más adelante, estará relacionada con conceptos de la teoría de modelos. Con la mira puesta en este punto, diremos que una estructura A es oligomorfa si $\mathbf{Aut}(A)$ es oligomorfo sobre A. Mostraremos que una estructura ω-categórica no es más que una estructura oligomorfa y viceversa. En particular, como ejemplo más importante, mostraremos que si el lenguaje L es relacional y contable, entonces cualquier L-estructura homogénea contable es oligomorfa.

Una última observación es que si f es un isomorfismo de A en B, entonces $\bar{a}$ y $f(\bar{a})$ realizan los mismos tipos en A y en B respectivamente. En particular, si existe un automorfismo de A que lleva a la n-tupla $\bar{a}$ en la n-tupla $\bar{b}$, es decir, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ están en la misma órbita bajo $\mathbf{Aut}(A)$, entonces $\bar{a}$ y $\bar{b}$ realizan las mismas fórmulas y, por lo tanto, los mismo tipos de A.

Modelos atómicos

Buscando características de los modelos de una teoría, aquellas que dan una noción de minimalidad son valiosas. Dos de ellas son las nociones de modelo primo y estructura atómica. La misma denominación es sugerente, un modelo primo de una L-teoría T es aquel que en algún sentido es “inmersible” en cualquier otro modelo de T. El sentido que buscamos es precisamente el de inmersibilidad como vista hasta ahora, pero debe haber una adaptación debido a que la teoría podría no ser completa. Concretamente, el modelo A de la L-teoría T es primo si es elementalmente inmersible en cualquier modelo de T.

La segunda noción de minimalidad que mencionamos es la que se encuentra relacionada con el tema de este capítulo.

3.14 Definición. Decimos que la L-estructura A es atómica si todos sus tipos son soportados.

El tamaño de los espacios de Stone de una teoría juegan un papel importante al determinar las características de los modelos de la teoría. El siguiente teorema es una muestra de lo dicho en esta observación.

3.15 Teorema. *Sean L un lenguaje contable y T una L-teoría completa sin modelos finitos.*

(a) *Si $S_n(T)$ es contable para cada $n > 0$, entonces T tiene un modelo atómico numerable.*

(b) *Si $S_n(T)$ es finito para cada $n > 0$, entonces todos los modelos de T son atómicos.*

Prueba. (a). Es claro a partir de las hipótesis que T sólo tiene un número contable de tipos no soportados. Por el teorema de omisión de tipos (3.10), T tiene un modelo numerable que omite a todos los tipos no soportados de T. Como T es completa, todos los tipos de este modelo son los tipos soportados de T y, por lo tanto, es atómico.

(b). Es claro que si todos los tipos de T son soportados, todos los modelos de T son atómicos, pues al ser T completa sus tipos son exactamente los tipos de cualquiera de sus modelos. Así que basta probar que las hipótesis implican que los tipos de T son soportados. En la prueba del teorema 3.17 (la equivalencia de (c) y (d)), mostraremos que las hipótesis implican que para cada $n > 0$ sólo hay una número finito de fórmulas $\psi(\bar{x})$ no equivalentes módulo T con $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Tomemos $\Psi(\bar{x})$ un conjunto maximal de fórmulas $\psi(\bar{x})$ no equivalentes módulo T; si $p(\bar{x})$ es un n-tipo de T, la conjunción de todas las fórmulas que están en $\Psi(\bar{x})$ y en $p(\bar{x})$ es un soporte para $p(\bar{x})$. Por lo tanto, todo n-tipo de T es soportado. ■

El matiz de minimalidad del concepto de estructura atómica está expresada en el siguiente teorema. Las hipótesis de este próximo resultado pueden ser más holgadas, podríamos retirar la condición de numerabilidad de las estructuras, pero en ese caso nuestra conclusión sólo podría decir que las estructuras son back-and-forth equivalentes (vea [Hod 93, sección 3.2]).

3.16 Teorema. *Sean L un lenguaje contable y A y B L-estructuras elementalmente equivalentes numerables y atómicas. Entonces A y B son isomorfas.*

Prueba. Supongamos que las n-tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ realizan el mismo n-tipo en A y en B, respectivamente. Si c es un elemento de A, el tipo realizado por la $(n+1)$-tupla $\bar{a}\hat{\ }c = (a_0, \ldots, a_{n-1}, c)$ es soportado, pues A es atómica; supongamos que la L-fórmula $\varphi(\bar{x}, y)$ soporta a este tipo. En particular tenemos que $A \vDash \varphi(\bar{a}, c)$ y, entonces, $A \vDash \exists y \varphi(\bar{a}, y)$. Como $\bar{b}$ realiza en B el mismo tipo que $\bar{a}$, existe un elemento d de B tal que $B \vDash \varphi(\bar{b}, d)$. De modo que $\bar{a}\hat{\ }c$ y $\bar{b}\hat{\ }d$ realizan el mismo $(n+1)$-tipo en A y en B respectivamente. Simétricamente, si tomamos un elemento d de B podemos hallar un elemento c de A tal que $\bar{a}\hat{\ }c$ y $\bar{b}\hat{\ }d$ realizan el mismo $(n+1)$-tipo en A y en B respectivamente.

Sabemos que $A \equiv B$. Supongamos que las n-tuplas $\bar{a}_n$ y $\bar{b}_n$, de elementos de A y de B respectivamente, han sido definidas de tal forma que $(A, \bar{a}_n) \equiv (B, \bar{b}_n)$. Si $n+1$ es par, tomemos un elemento c_n de A que no esté en $\bar{a}_n$. Por lo anterior, existe un elemento d_n de B tal que las $(n+1)$-tuplas $\bar{a}_n\hat{\ }c_n$ y $\bar{b}_n\hat{\ }d_n$ realizan el mismo tipo en A y en B respectivamente. Si $n+1$ es impar, tomemos un elemento d_n de B que no esté en $\bar{b}_n$, entonces existe un elemento c_n de A tal que $\bar{a}_n\hat{\ }c_n$ y $\bar{b}_n\hat{\ }d_n$ realizan el mismo tipo en A y en B respectivamente. En cualquier caso, como los enuciados de $L(\bar{a}_n\hat{\ }c_n)$ son precisamente los enuciados de $L(\bar{a})$ más los enunciados $\varphi(\bar{a}_n, c_n)$, donde φ es un elemento del tipo definido por $\bar{a}_n$ y análogamente en el caso de $L(\bar{b}_n\hat{\ }d_n)$, tenemos que $(A, \bar{a}_n\hat{\ }c_n) \equiv (B, \bar{b}_n\hat{\ }d_n)$.

Para finalizar, el mapeo $a_i \longmapsto b_i$, es una inmersión de A en B que por construcción es sobre. ■

3.2. Teorema de Ryll-Nardzewski, Engeler y Svenonius

El próximo resultado será el que resumirá muchas de las propiedades de estructuras homogéneas, de él desprenderemos una serie de conclusiones sobre el límite de Fraïssé de ciertas clases (hay en principio una restricción sobre el lenguaje).

Se considera este resultado como una caracterización de las teorías ω-categóricas. Algunos incisos han sido aumentados después de la primera presentación del resultado, aunque se considera que el resultado en su esencia fue probado por primera vez paralelamente por E. Engeler y C. Ryll-Nardzewski en el año de 1959. Los incisos que refieren al grupo de automorfismos se deben a L. Svenonius.

3.17 Teorema (***Teorema de Ryll-Nardzewski, Engeler y Svenonius***)**.** *Sean L un lenguaje contable y T una L-teoría completa cuyos modelos son todos infinitos. Entonces los siguientes incisos son equivalentes.*

(a) *T es ω-categórica.*

(b) *Todos los tipos de T son soportados.*

(c) *$S_n(T)$ es finito para cada $n > 0$.*

(d) *Para cada $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, sólo existe un número finito de fórmulas, con variables libres $\bar{x}$, no equivalentes módulo T.*

(e) *Algún modelo numerable de T sólo realiza un número finito de n-tipos de T para cada $n > 0$.*

(f) *Todo modelo numerable de T es oligomorfo.*

(g) *T posee un modelo numerable y oligomorfo.*

Prueba. Veamos que (a) implica (b). Supongamos que T tiene un n-tipo $p(\bar{x})$ no aislado. Por el teorema de omisión de tipos, T tiene un modelo numerable M el cual omite a $p(\bar{x})$. Por otro lado, T posee un modelo N que realiza a $p(\bar{x})$, pues $p(\bar{x})$ es un tipo de T, más aún, por el teorema de Löwenheim-Skolem podemos suponer que este modelo es numerable. Así, N y M no pueden ser isomorfos, lo que muestra que T no es ω-categórica.

El inciso (b) implica el (c). En el espacio topológico $S_n(T)$, el cual comentamos que es compacto, un tipo aislado es un conjunto abierto. De donde, si todos los tipos de T son aislados, una cubierta abierta para $S_n(T)$ es la unión de todos sus puntos. Por la compacidad de $S_n(T)$, tenemos que sólo puede haber un número finito de elementos en $S_n(T)$.

El inciso (c) implica el (a). Por el inciso (b) del teorema 3.15, todos los modelos numerables de T son atómicos. Mediante el teorema 3.16 concluimos que cualesquiera dos modelos numerables de T son isomorfos.

El inciso (c) implica el (d). Observemos que si las L-fórmulas $\varphi(\bar{x})$ y $\psi(\bar{x})$ se encuentran en el mismo n-tipo $p(\bar{x})$ de T, entonces $\varphi(\bar{x})$ y $\psi(\bar{x})$ son equivalentes módulo T, de no serlo, como T es completa, $T \vdash \neg\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$ lo que implica que $T \cup \{\exists\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x}))\}$ no es satisfacible (lo que está en desacuerdo con que $p(\bar{x})$ es un tipo de T). Por lo tanto, si dos fórmulas $\varphi(\bar{x})$ y $\psi(\bar{x})$ no son equivalentes módulo T, entonces pertencen a n-tipos distintos, de donde, si hay k n-tipos en $S_n(T)$, entonces hay a lo más 2^k fórmulas $\varphi(\bar{x})$ no equivalentes módulo T.

El inciso (d) implica el (c). Es inmediato. Observe que si las L-fórmulas $\varphi(\bar{x})$ y $\psi(\bar{x})$ son equivalentes módulo T, entonces pertenecen al mismo n-tipo. Por lo tanto, sólo hay un número finito de n-tipos en $S_n(T)$.

El inciso (f) implica el (g). Por el teorema de Löwenheim-Skolem T posee un modelo numerable, el cual resulta oligomorfo en virtud de (f).

El inciso (g) implica el (e). Sea A un modelo numerable y oligomorfo de T. Para $n > 0$ fija, tenemos que sólo hay un número finito de órbitas de A^n bajo $\mathbf{Aut}(A)$. Observe que si dos n-tuplas pertenecen a la misma órbita bajo $\mathbf{Aut}(A)$, entonces realizan el mismo n-tipo en A, pues los isomorfismos preservan la verdad. Por lo tanto, sólo puede haber, a lo más, tantos n-tipos realizados en A como órbitas de A^n bajo $\mathbf{Aut}(A)$, las cuales son un número finito.

El inciso (e) implica el (c). Sea A un modelo numerable de T que sólo realiza un número finito de n-tipos de T para cada $n > 0$. Fijemos un entero positivo n. Sean

$p_0(\bar{x}), \ldots, p_{k-1}(\bar{x})$ todos los tipos distintos en $S_n(T)$ que son realizados en A. Observe que por el hecho de ser tipos distintos, existen fórmulas $\phi_0(\bar{x}), \ldots, \phi_{k-1}(\bar{x})$ tales que $\phi_i(\bar{x}) \in p_j(\bar{x})$ si y sólo si $i = j$. Si el enunciado $\exists\bar{x}(\neg\phi_0(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \neg\phi_{k-1}(\bar{x}))$ fuese válido en A, y la n-tupla $\bar{a}$ la satisface en A, entonces $\mathrm{tp}(\bar{a})$ es distinto del tipo $p_i(\bar{x})$ para todo $i < k$, lo cual sería una contradicción a que estos últimos son todos los n-tipos de T realizados en A. Por lo tanto, $A \vDash \forall\bar{x}(\phi_0(\bar{x}) \vee \cdots \vee \phi_{k-1}(\bar{x}))$. Similarmente, si $\psi(\bar{x})$ es una fórmula de L, $i < k$ y el enunciado $\exists\bar{x}\exists\bar{y}(\phi_i(\bar{x}) \wedge \phi_i(\bar{y}) \wedge [(\psi(\bar{x}) \wedge \neg\psi(\bar{y})) \vee (\psi(\bar{y}) \wedge \neg\psi(\bar{x}))])$ es válido en A, tendríamos que los tipos $\mathrm{tp}(\bar{a})$ y $\mathrm{tp}(\bar{b})$, donde las n-tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los testigos de la validez, son distintos. Sin embargo, la fórmula $\phi_i(\bar{x})$ se encuentra en ambos, lo cual contradiría la elección de las fórmulas $\phi_0(\bar{x}), \ldots, \phi_{k-1}(\bar{x})$. Podemos concluir que para cada $i < k$, $A \vDash \forall\bar{x}\forall\bar{y}((\phi_i(\bar{x}) \wedge \phi_i(\bar{y})) \to (\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{y})))$.

Debido a que T es una teoría completa, concluimos que $T \vdash \forall\bar{x}(\phi_0(\bar{x}) \vee \cdots \vee \phi_{k-1}(\bar{x}))$ y para cada $i < k$ y fórmula $\psi(\bar{x})$ de L, $T \vdash \forall\bar{x}\forall\bar{y}((\phi_i(\bar{x}) \wedge \phi_i(\bar{y})) \to (\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{y})))$. Esto fuerza a que todos los tipos de T sean $p_0(\bar{x}), \ldots, p_{k-1}(\bar{x})$, mostrando que $S_n(T)$ es finito.

Para terminar, veamos que el inciso (b) implica el (f). Sea A un modelo numerable de T. Mostraremos que si las n-tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de elementos de A realizan el mismo tipo en A, entonces están en la misma órbita bajo $\mathbf{Aut}(A)$. Supongamos que las tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ realizan el mismo n-tipo en A. Tenemos que $(A, \bar{a}) \equiv (A, \bar{b})$ y de manera similar a como hicimos en la prueba del teorema 3.16, gracias a que los tipos de A son todos soportados, podemos construir un automorfismo de A pero esta vez partiendo de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para asegurar que el automorfismo envía a $\bar{a}$ en $\bar{b}$. De este modo $\bar{a}$ y $\bar{b}$ están en la misma órbita de A^n bajo $\mathbf{Aut}(A)$. Más arriba también probamos que (b) implica que $S_n(T)$ es finito para cada $n > 0$, por lo que sólo puede haber un número finito de órbitas de A^n bajo $\mathbf{Aut}(A)$. ■

Una parte de la prueba de este teorema es importante de resaltar.

3.18 Proposición. *Sea A una estructura numerable y ω-categórica en un lenguaje contable. Las n-tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de elementos de A realizan el mismo n-tipo si y sólo si pertenecen a la misma órbita de A^n bajo* $\mathbf{Aut}$*(A).* ■

A su vez, esta proposición nos permite conocer concretamente todos los tipos de una estructura ω-categórica numerable.

3.19 Corolario. *Sea A una estructura numerable y ω-categórica en el lenguaje contable L. Entonces para cada n existe un número finito de fórmulas $\phi_i(x_0, \ldots, x_{n-1})$ tales que soportan a un n-tipo de A. Más aún, las órbitas de A^n bajo* $\mathbf{Aut}$*(A) son exactamente los conjuntos de la forma $\phi_i(A^n)$, donde*

$$\phi_i(A^n) = \{\bar{a} \in A^n | A \vDash \phi_i(\bar{a})\}. \quad ■$$

3.3. Lenguaje relacional finito

Aunque corolario de un próximo resultado más general, el teorema de esta sección es posiblemente el teorema más sobresaliente sobre estructuras homogéneas, a la vez que su prueba es —dentro de lo que cabe decir— elemental.

La condición de que el lenguaje L sea finito y relacional es una ventaja cuando estudiamos conceptos relacionados al de homogeneidad y el de homogeneidad mismo. La principal ventaja es que las estructuras finitamente generadas son siempre finitas. Por ejemplo, ello simplica en buena parte la verificación de que una clase de L-estructuras finitas sea una clase de amalgamación. Aunado a esto, el lector debe notar que la mayoría de los ejemplos de estructuras homogéneas en el capítulo anterior se encuentran definidos sobre lenguajes relacionales finitos.

Recuerde que la L-estructura A es ω-categórica si su teoría $\mathrm{Th}(A)$ lo es; observe que en el caso en que A es numerable, esto es equivalente a que cualquier L-estructura numerable B elementalmente equivalente a A resulte isomorfa a A. Esto último sugiere una demostración de la próxima proposición por medio de una construcción de back-and-forth, la cual es posible. Sin embargo, en presencia del teorema de la sección anterior, optamos por una demostración corta y menos técnica.

3.20 Teorema. *Sean L un lenguaje relacional finito y A una L-estructura homogénea y numerable. Entonces A es ω-categórica.*

Prueba. Mostraremos que bajo las hipótesis, A es oligomorfa; concluiremos luego haciendo uso del teorema 3.17. Fijemos $n > 0$. Para un conjunto de n elementos sólo hay un número finito de posibilidades para la interpretación de un símbolo de L. Como L es finito, lo dicho implica que sólo hay un número finito de L-subestructuras de A con n elementos no isomorfas entre sí (es decir, sólo hay un número finito de tipos de isomorfismo de L-subestructuras de A con n elementos). Por otro lado, como A es homogénea, cualesquiera dos L-subestructuras con n elementos e isomorfas se encuentran en la misma órbita de A^n bajo $\mathbf{Aut}(A)$. Concluimos que sólo hay un número finito de órbitas de A^n bajo $\mathbf{Aut}(A)$, tantas como tipos de isomorfismo de subestructuras de A con n elementos.

Queda entonces probado que A es una estructura oligomorfa.Aademás, debido a que A es numerable, $\mathrm{Th}(A)$ es completa y no tiene modelos finitos. Así, por el teorema 3.17, A es ω-categórica. ■

Resumimos algunas propiedades de estructuras homogéneas definidas en un lenguaje relacional finito en el siguiente resultado, el cual es un corolario del teorema anterior y del teorema 3.17.

3.21 Corolario. *Sean L un lenguaje relacional finito y A un L-estructura homogénea y numerable. Entonces,*

(a) *A es ω-categórica;*

(b) $\mathbf{Aut}$*(A) actúa oligomórficamente sobre A;*

(c) *sólo hay un número finito de n-tipos de A para cada $n > 0$;*

(d) *todos los tipos de A son soportados.*

■

En particular, cada uno de nuestros ejemplos de estructuras homogéneas en el capítulo anterior definidas en un lenguaje relacional finito y numerable cumplen cada inciso de este corolario. Más interesante e importante aún es el siguiente resultado.

3.22 Corolario. *Sea* $\mathbf{K}$ *una clase de amalgamación con un número numerable de tipos de isomorfismo en el lenguaje relacional finito L. El límite de Fraïssé de* $\mathbf{K}$ *es una L-estructura ω-categórica.* ■

Este resultado hace explícito lo que mencionábamos al inicio del capítulo: la construcción de Fraïssé también es útil para obtener la existencia de estructuras ω-categóricas. Antes de pasar al caso general, podemos presentar otro resultado importante, tanto más atractivo en el caso en que el lenguaje es relacional finito. Sin embargo, debido a que en realidad no hay gran diferencia con la prueba del caso general, no presentamos la prueba aquí (vea esta prueba en la página 67).

3.23 Teorema. *Sean L un lenguaje relacional finito y A una L-estructura ω-categórica y numerable. Entonces A es homogénea si y sólo si* $\mathrm{Th}(A)$ *admite eliminación de cuantificadores.* ■

La rigurosidad del resultado anterior será discutida al final de la siguiente sección.

3.4. Lenguaje finito

Los resultados de la sección anterior son ciertos de manera limitada cuando el lenguaje no es relacional finito. Aún con esto, los resultados en el caso en que el lenguaje es finito pero no es necesariamente relacional no dejan de ser relevantes. Podemos iniciar nuestra discusión un poco más en general con un leguaje contable. Buscamos ajustar los resultados de la sección anterior al caso en que las estructuras finitamente generadas no son necesariamente las finitas. La siguiente definición es el primer paso hacia tener un control sobre las estructuras finitamente generadas.

3.24 Definición. Sea L un lenguaje contable.

(a) La L-estructura A es uniformemente localmente finita si existe una función $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que para cada subestructura B de A, generada por un conjunto de cardinalidad menor o igual a n, se tiene que la cardinalidad de B es menor o igual a $f(n)$.

(b) La clase de L-estructuras finitamente generadas $\mathbf{K}$ es uniformemente localmente finita si existe una función $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que para cada estructura A de $\mathbf{K}$, cada subestructura B de A que es generada por un conjunto de cardinalidad menor o igual a n tiene cardinalidad menor o igual a $f(n)$.

Observe que si L es un lenguaje relacional finito, cualquier L-estructura es uniformemente localmente finita, pues la función identidad de ω lo muestra. Además, que cada estructura en una clase $\mathbf{K}$ sea uniformemente localmente finita no implica que la clase es uniformemente localmente finita. La siguiente proposición expresa una característica técnica de las estructuras ω-categóricas que será útil posteriormente.

3.25 Proposición. *Sean L un lenguaje contable y A una L-estructura ω-categórica. Entonces A es uniformemente localmente finita.*

Prueba. Si la estructura A es finita, claramente es uniformemente localmente finita. Supongamos, pues, que A es infinita. Primero mostraremos que bajo las hipótesis impuestas, cualquier subestructura finitamente generada de A es finita. Tomemos una n-tupla $\bar{a}$ de elementos de A y supongamos que $c, d \in \langle \bar{a} \rangle_A$ son distintos. Como c es de alguna forma construido a partir de $\bar{a}$ en A y $c \neq d$, elijamos una fórmula $\psi(\bar{x}\hat{\ }y)$ de tal forma que $A \vDash \psi(\bar{a}, c)$ pero $A \nvDash \psi(\bar{a}, d)$. De lo anterior deducimos que $\psi(\bar{x}\hat{\ }y)$ es un elemento de $\mathrm{tp}_A(\bar{a}\hat{\ }c)$ que no está en $\mathrm{tp}_A(\bar{a}\hat{\ }d)$, es decir, estos $(n+1)$-tipos son distintos. Como $\mathrm{Th}(A)$ es ω-categórica y A es infinita, el inciso (c) del teorema 3.17 implica que $S_{n+1}(A)$ es finito y ello fuerza la finitud de $|\langle \bar{a} \rangle_A|$.

Pasemos a demostrar la conclusión de la proposición. Supongamos que B es una L-estructura elementalmente equivalente a A y numerable. Entonces B es ω-categórica y numerable. Por el inciso (f) del teorema 3.17, para cada $n > 0$, sólo hay un número finito de órbitas en B^n bajo $\mathbf{Aut}(B)$, digamos $k_n < \omega$. Supongamos que $\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{k_n-1}$ son representantes de cada una de las k_n órbitas de B^n. Definamos $f(n) = \text{máx}\{|\langle \bar{b}_i \rangle_B| \mid i < k_n\}$. Por la afirmación demostrada al inicio de la prueba, $f(n) < \omega$, por lo que tenemos definida la función $f : \omega \longrightarrow \omega$ de tal forma que si C es una subestructura de B generada por $n > 0$ elementos de B, entonces C tiene a lo más $f(n)$ elementos (pues la n-tupla de generadores de C debe estar en alguna de las órbitas de B^n). Luego, si D es una subestructura de A generada por la n-tupla $\bar{b}$, entonces el n-tipo definido por $\bar{b}$ es también realizado por B, de donde alguna de las n-tuplas $\bar{b}_i$, con $i < k_n$, lo realiza en B. Entonces D tiene el mismo número de elementos que la estructura generada por $\bar{b}_i$ en B. Así que, $|D| \leq f(n)$. Por lo tanto, la función f muestra que A es uniformemente localmente finita. ■

A continuación presentamos uno de los principales resultados que buscábamos mostrar en este trabajo.

3.26 Teorema. *Sea L un lenguaje finito y supongamos que A es una L-estructura homogénea y numerable cuya edad es uniformemente localmente finita. Entonces,*

(a) *A es ω-categórica;*

(b) $\mathrm{Th}(A)$ *admite eliminación de cuantificadores.*

Prueba. Iniciamos por observar que, gracias a que la edad es uniformemente localmente finita, para cada $n > 0$ solamente hay un número finito de tipos de isomorfismos de subestructuras de A generadas por n elementos. Nuestra segunda observación es que si B es una subestructura generada por la n-tupla $\bar{b}$, al ser B finita y L un lenguaje finito, cada uno de los elementos de B se puede caracterizar mediante una conjunción de fórmulas atómicas o negación de fórmulas atómicas. Si tomamos el total de estas conjunciones y definimos $\psi_{B,\bar{b}}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ como su conjunción, la cual es perfectamente una fórmula de L, obtenemos que cualquier n-tupla de elementos de A que satisfaga esta fórmula genera una subestructura de A isomorfa a B. Concretamente, y diciendo un poco más, si C es una L-estructura y $\bar{c}$ es una n-tupla de elementos de C, $C \vDash \psi_{B,\bar{b}}(\bar{c})$ si y sólo si existe un isomorfismo $f : B \longrightarrow \langle \bar{c} \rangle_C$ tal que $f(\bar{b}) = \bar{c}$. La implicación de derecha a izquierda es inmediata al ser f un isomorfismo. Debe enfatizarse el hecho de que $\psi_{B,\bar{b}}(\bar{x})$ es una fórmula libre de cuantificadores al ser una conjunción de fórmulas atómicas o negaciones de fórmulas atómicas.

A partir de lo anterior construiremos una teoría T cuyos modelos numerables serán precisamente estructuras débilmente homogéneas con edad igual a la de A. Para cada subestructura B de A generada por la n-tupla $\bar{b}$ y cada elemento c de A distinto a cada elemento en $\bar{b}$, el enunciado

$$\forall \bar{x}(\psi_{B,\bar{b}}(\bar{x}) \to \exists y \psi_{C,\bar{b}^\frown c}(\bar{x}, y)),$$

donde C es la estructura generada por $\bar{b}^\frown c$, será un elemento de T. Convencionalmente, para el caso $n = 0$, tenemos que el enunciado $\exists y \psi_{C,c}(\bar{x}, y)$ será un elemento de T. Estos enunciados "codifican" la homogeneidad débil de sus modelos y determinan la forma en que se generan los elementos de su edad. Resta atender la cuestión de que la edad de los modelos de T sea exactamente la de A. Cortesía de la observación al inicio de la prueba, para n fijo, podemos suponer que $B_0, \ldots, B_{k_n-1}$ son representantes de los $k_n < \omega$ tipos de isomorfismos de subestructuras de A generadas por n elementos. Para cada $i < k_n$, sólo hay un número finito de n-tuplas de elementos de B_i que generan a B_i; tomemos $\Psi_{B_i}(\bar{x})$ como la disyunción de todas las fórmulas $\psi_{B_i,\bar{b}}(\bar{x})$, donde $\bar{b}$ es una n-tupla que genera a B_i. Añadamos a T el enunciado

$$\forall \bar{x}(\Psi_{B_0}(\bar{x}) \vee \cdots \vee \Psi_{B_{k_n-1}}(\bar{x}))).$$

Esto termina nuestra definición de la teoría T. Mostremos que efectivamente T tiene las características deseadas. Primeramente debe observarse que por la misma construcción, T es consistente, pues A misma es un modelo de ella.

Tomemos un modelo numerable de T, digamos, D. Sea B una estructura en $\mathbf{Sub}(A)$ generada por un solo elemento b. Como $D \vDash \exists y \psi_{B,b}(y)$, tenemos que existe un elemento d de D tal que $D \vDash \psi_{B,b}(d)$. Por la selección de $\psi_{B,b}$, existe un isomorfismo de B en la estructura generada por d y esto nos dice que B es inmersible en D. A continuación, supongamos que cada estructura en la edad de A generada por n elementos es inmersible en D. Supongamos que E es una estructura en la edad de A generada por $n+1$ elementos. Si $\bar{c}\hat{\ }e$ es una $(n+1)$-tupla que genera a E, tenemos que $C = \langle \bar{c} \rangle_C$ es una estructura inmersible en D. Luego $D \vDash \psi_{B,\bar{c}}(g(\bar{c}))$, donde g es la inmersión de C en D. Por otro lado, al ser D un modelo de T, tenemos que $D \vDash \forall \bar{x}(\psi_{C,\bar{c}}(\bar{x}) \to \exists y \psi_{E,\bar{c}\hat{\ }e}(\bar{x}, y))$. Por lo tanto, $D \vDash \psi_{E,\bar{c}\hat{\ }e}(g(\bar{c}), e')$ para algún e' en D y la definición de $\psi_{E,\bar{c}\hat{\ }e}$ indica que E es inmersible en D. Para la otra contención, si B es una estructura generada por n elementos en la edad de D, el enunciado $\forall \bar{x}(\Psi_{B_0}(\bar{x}) \vee \cdots \vee \Psi_{B_{k_n-1}}(\bar{x})))$, al ser válido en D, nos dice que B es isomorfa a alguna de las k_n subestructuras de A generadas por n elementos.

El párrafo anterior muestra que la edad de D es exactamente la de A. Luego, suponiendo que B es un elemento de $\mathbf{Sub}(D)$, que f es una inmersión de B en D y que c es un elemento de D que no está en B, la adaptación correcta (hay que pensar en B como un elemento de $\mathbf{Sub}(A)$, lo cual es posible gracias a lo recién probado) del argumento del párrafo anterior muestra que f se puede extender a una inmersión de $\langle B \cup \{c\} \rangle_D$ en D. Mediante la proposición 2.11, concluimos que D es débilmente homogénea.

Hemos probado que cualquier modelo numerable de T es una estructura débilmente homogénea cuya edad es $\mathbf{Sub}(A)$. La proposición 2.9 implica que entonces T es ω-categórica y, con ello, que A es ω-categórica (pues cualquier modelo de $\mathrm{Th}(A)$ lo será también de T).

Por último, veamos que $\mathrm{Th}(A)$ admite eliminación de cuantificadores. Si ϕ es un enunciado de L, entonces, debido a la completez de $\mathrm{Th}(A)$, ϕ o su negación es una consecuencia de $\mathrm{Th}(A)$. Tomando una variable arbitraria x, en el primer caso ϕ es equivalente a la fórmula $x = x$ y en el segundo a $x \neq x$. Supongamos ahora que la fórmula en cuestión no es un enunciado, digamos que la fórmula es $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Consideremos el conjunto $\phi(A^n) = \{\bar{a} \in A^n | A \vDash \phi(\bar{a})\}$ y las fórmulas $\psi_{\langle \bar{a} \rangle_A, \bar{a}}(\bar{x})$ para cada $\bar{a} \in \phi(A^n)$. Recordemos que hay $k_n < \omega$ tipos de isomorfismo de subestructuras de A generadas por n elementos, por lo que podemos asegurar que el número de fórmulas $\psi_{\langle \bar{a} \rangle_A, \bar{a}}(\bar{x})$ con $\bar{a} \in \phi(A^n)$ es finito; esto nos permite definir la fórmula $\Psi_\phi(\bar{x})$ como la disyunción de todas estas fórmulas. Como remarcamos antes, cada fórmula $\psi_{\langle \bar{a} \rangle_A, \bar{a}}(\bar{x})$ es libre de cuantificadores, por lo que $\Psi_\phi(\bar{x})$ también lo es. Mostraremos que $\phi(\bar{x})$ es equivalente a $\Psi_\phi(\bar{x})$ módulo $\mathrm{Th}(A)$. Si $\bar{a}$ es una tupla de A tal que $A \vDash \phi(\bar{a})$, es claro que $A \vDash \Psi_\phi(\bar{a})$, pues $A \vDash \psi_{\langle \bar{a} \rangle_A, \bar{a}}(\bar{a})$ por la mera definición de $\psi_{\langle \bar{a} \rangle_A, \bar{a}}(\bar{x})$. En la otra dirección, si $A \vDash \Psi_\phi(\bar{a})$, existe $\bar{b} \in \phi(A^n)$ tal que $A \vDash \psi_{\langle \bar{b} \rangle_A, \bar{b}}(\bar{a})$. Entonces existe un isomorfismo de $\langle \bar{b} \rangle_A$ en $\langle \bar{a} \rangle_A$ que mapea a $\bar{b}$ en $\bar{a}$. Como A es homogénea, este isomorfismo se extiende a un automorfismo de A y, por lo tanto, $A \vDash \phi(\bar{a})$. ■

Considerando que la forma canónica de construir estructuras homogéneas es mediante el límite de Fraïssé de una clase de amalgamación adecuada, un corolario importante del teorema precedente es el siguiente.

3.27 Corolario. *Sean L un lenguaje finito y $\mathbf{K}$ una clase de amalgamación de L-estructuras con un número numerable de tipos de isomorfismo y uniformemente localmente finita. Si A es el límite de Fraïssé de $\mathbf{K}$, A es ω-categórica y su teoría,* $\mathrm{Th}(A)$, *admite eliminación de cuantificadores.* ■

Tanto el teorema como el corolario previos arrojan una colección basta de propiedades de estructuras homogéneas, en particular, de todas aquellas vistas como ejemplos en el capítulo anterior. Por ejemplo, el teorema 3.26 nos dice que la gráfica aleatoria, el espacio métrico racional $\mathbb{U}_0$ y el orden parcial universal-homogéneo $\mathbb{P}$ son estructuras ω-categóricas y su teoría admite eliminación de cuantificadores. Aún más interesante, pues los lenguajes correspondientes no son relacionales finitos, lo mismo se cumple para un espacio vectorial de dimensión ω definido sobre un campo finito y para el campo numerable universal-homogéneo de característica p. También obtenemos una nueva prueba de que **TOD** admite eliminación de cuantificadores, hecho que probamos en el primer capítulo de manera constructiva.

El siguiente resultado, el último de este capítulo, expresa la afirmación recíproca del teorema 3.26. Establece que lo que hace falta exactamente para que una estructura numerable y ω-categórica sea homogénea es que su teoría admita eliminación de cuantificadores. Esto ilustra que a pesar de parecer una noción técnica (sintáctica) al momento de verificarla, la eliminación de cuantificadores guarda un profundo valor semántico en las estructuras en que se presenta.

3.28 Teorema. *Sean L un lenguaje finito y A una L-estructura numerable. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*
(a) *A es homogénea y uniformemente localmente finita;*
(b) *A es ω-categórica y* $\mathrm{Th}(A)$ *admite eliminación de cuantificadores.*

Prueba. Primero observemos que si A es uniformemente localmente finita entonces su edad también lo es, la misma función que atestigua la propiedad para A funciona para su edad. Entonces, si A es uniformemente localmente finita y homogénea las hipótesis del teorema 3.26 se satisfacen y, por lo tanto, A es ω-categórica y su teoría admite eliminación de cuantificadores.

En la otra dirección, la proposición 3.25 asegura que cuando A es ω-categórica, A resulta uniformemente localmente finita. En seguida, supongamos que existe un isomorfismo entre las subestructuras finitas U y V de A, digamos $g : U \longrightarrow V$, y que las n-tuplas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son formadas con todos los elementos de U y V respectivamente. Como A es ω-categórica, el inciso (b) del teorema 3.17 implica que existe un fórmula $\varphi(\bar{x})$ que soporta a $\mathrm{tp}(\bar{a})$; en virtud de que $\mathrm{Th}(A)$ admite eliminación de cuantificadores, podemos suponer que $\varphi(\bar{x})$ es libre de cuantificadores. De lo anterior tenemos que $A \vDash \varphi(\bar{b})$, pues al ser g isomorfismo parcial preserva fórmulas libres de cuantificadores. Esto implica que

$\bar{a}$ y $\bar{b}$ definen el mismo n-tipo en A y por la proposición 3.18, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ pertenecen a la misma órbita de A^n bajo $\mathbf{Aut}(A)$, en otras palabras, existe un automorfismo de A que extiende a g. ■

Sobre estructuras ω-categóricas no homogéneas

Por último exploraremos la precisión de los resultados previos. Según lo anterior, se requiere que además de la ω-categoricidad la teoría de la estructura admita eliminación de cuantificadores para concluir su homogeneidad —esto es cierto aún limitándonos a lenguajes relacionales y al teorema 3.23. Parece entonces razonable exigir un ejemplo que muestre que una estructura contable puede ser ω-categórica sin ser homogénea.

Resulta que no sólo se puede dar un ejemplo como el que requerimos sino que se puede mostrar que hay 2^ω estructuras numerables no isomorfas entre sí, ω-categóricas pero no homogéneas.

Manfred Droste y Dugald Macpherson, en [DyM 91], mostraron que hay 2^ω gráficas (no isomorfas entre sí) ω-categóricas pero no homogéneas. Nosotros a continuación enunciaremos algunos de los resultados del citado artículo concernientes a órdenes parciales; estableceremos que hay ω órdenes parciales ω-categóricos y numerables que no son homogéneos. Iniciemos por dos definiciones importantes.

3.29 Definición. Sean L un lenguaje contable, A una L-estructura y $k > 0$ un número natural. Decimos que

(i) A es k-homogénea si cualquier isomorfismo entre dos subestructuras de A generadas por k elementos se puede extender a un automorfismo de A;
(ii) A es k-transitiva si para cualesquiera dos subestructuras de A generadas por k elementos e isomorfas, existe un automorfismo de A que lleva a una en la otra.

Podemos observar que en general la k-transitividad es más débil que la k-homogeneidad (aunque no es trivial mostrar esto formalmente) y que una estructura es homogénea si y sólo si es k-homogénea para todo número natural $k > 0$.

Corolario de un primer teorema (Teorema 1.1 en el citado artículo), Droste y Macpherson obtienen el siguiente sobresaliente resultado.

3.30 Teorema. *Para cualquier orden parcial numerable $\langle A, \leq \rangle$ los siguientes enunciados son equivalentes.*
(a) $\langle A, \leq \rangle$ *es 1- y 4-homogéneo;*
(b) $\langle A, \leq \rangle$ *es 1-, 2- y 4-transitivo;*
(c) $\langle A, \leq \rangle$ *es homogéneo.* ■

También se puede establecer el siguiente resultado (Teorema 1.3 inciso (b) en [DyM 91]).

3.31 Teorema. *Existen al menos ω órdenes parciales numerables no isomorfos entre sí, 3-homogéneos que no son 4-transitivos, ω-categóricos y universales para la clase de los órdenes finitos.* ■

De la equivalencia (b) si y sólo si (c) del teorema 3.30 y el teorema anterior, concluimos que hay ω órdenes parciales numerables ω-categóricos pero no homogéneos, resolviendo nuestra pregunta sobre la existencia de estructuras numerables ω-categóricas no homogéneas.

El lector riguroso e inquisitivo podría encontrar el procedimiento anterior desproporcionado con la pregunta original. Sobre este razonamiento, es posible dar un ejemplo más concreto sobre una estructura numerable que es ω-categórica pero no homogénea. El problema con este nuevo ejemplo es que el probar que la estructura es ω-categórica requiere de un argumento que rebasa el material de esta tesis.

El ejemplo es la L_0-estructura A cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}^{\{2\}} = \{\{x,y\}|x,y \in \mathbb{N}\}$ y cuya interpretación del símbolo binario de L_0 es $a \sim b$ si y sólo si $|a \cap b| = 1$. Para mostrar que A no es homogénea pero sí ω-categórica, lo primero que debemos mostrar es que el grupo de automorfismos de A es el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\mathbb{N}$ actúando sobre $\mathbb{N}^{\{2\}}$.

3.32 Lema. *Sea A la estructura descrita en el párrafo previo, entonces $Aut(A) = Sym(\mathbb{N})$ (este último pensado como actúando sobre $\mathbb{N}^{\{2\}}$).*

Prueba. Una de las contenciones es sencilla. Si $g \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, es decir, g es una permutación de $\mathbb{N}$, y $a, b \in \mathbb{N}^{\{2\}}$, entonces $|a \cap b| = 1$ si y sólo si $|g(a) \cap g(b)| = 1$, por la biyectividad de g. Así, g es un automorfismo de A.

Para la faltante contención, primero mostraremos que si g es un automorfismo de A y x es un número natural, entonces $g(\{x\})$ sólo tiene un elemento. En efecto, al tomar dos elementos en $g(\{x\})$, digamos y y w, podemos asegurar que existen $\{a,b\}, \{c,d\} \in \mathbb{N}^{\{2\}}$ tales que $g(\{a,b\}) = \{y\}$ y $g(\{c,d\}) = \{w\}$. Por otro lado, tenemos que $g(\{x\}) = \{y,w\} \sim \{y\} = g(\{a,b\})$ y $g(\{x\}) = \{y,w\} \sim \{w\} = g(\{c,d\})$, por lo que $\{x\} \sim \{a,b\}$ y $\{x\} \sim \{c,d\}$. Esto último implica que $\{a,b\} \sim \{c,d\}$, esto a su vez nos dice que $\{y\} = g(\{a,b\}) \sim g(\{c,d\} = \{w\})$ y, por lo tanto, $y = w$.

El anterior hecho nos permite tomar un automorfismo de A como una función de $\mathbb{N}$ en sí mismo. Probemos que de hecho un automorfismo g de A resulta una permutación de $\mathbb{N}$ en sí mismo. Si x y y son números naturales distintos, entonces $\{x\} \nsim \{y\}$ y, como g es un automorfismo, $g(\{x\}) \neq g(\{y\})$. Así, g es inyectiva. Luego, si $y \in \mathbb{N}$, entonces $\{y\} \in \mathbb{N}^{\{2\}}$ y, como f es un automorfismo, existe $\{x,z\} \in \mathbb{N}^{\{2\}}$ tal que $f(\{x,z\}) = \{y\}$. Tenemos que $\{x\} \sim \{x,z\}$ y $\{x,z\} \sim \{z\}$ y con ello, $g(\{x\}) \sim g(\{x,z\}) = \{y\}$ y $g(\{z\}) \sim g(\{x,z\}) = \{y\}$. De lo anterior, $y = g(\{x\}) \cap g(\{z\})$, esto a su vez significa que $g(\{x\}) \sim g(\{z\})$ y esto implica que $x = z$.De modo que $g(\{x\}) = \{y\}$, probando que g es sobre. Por lo tanto, g es una permutación de $\mathbb{N}$. ■

Probado lo anterior, pasemos a ver porqué A no es homogénea. Por ejemplo, las subestructuras finitas $\{\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}\}$ y $\{\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$ son isomorfas (ambas son un triángulo en la representación natural gráfica de A), sin embargo, es imposible encontrar un automorfismo de A que extienda a algún isomorfismo entre ellas. La razón es que, por lo probado arriba, un automorfismo de A es una permutación de $\mathbb{N}$, por mera inspección uno puede notar que no existe una permutación de $\mathbb{N}$ que envíe el primer triángulo en el segundo, pues tendría que enviar dos número distintos a uno mismo. Por lo tanto, A es una estructura que no es homogénea.

Algo curioso en este punto es que si añadimos un símbolo de relación ternaria a L_0 y lo interpretamos en A de tal forma que los triángulos anteriores no estén relacionados[1], entonces la estructura resultante sí será homogénea. Al añadir el sımbolo e interpretarlo de esa forma lo que estamos haciendo es disminuyendo el número de isomorfismos parciales entre subestructura finitas. A este proceso, el de añadir sımbolos para volver homogénea a una estructura que no lo era, se le conoce como *Morleyzación* de la estructura. El proceso es siempre válido aunque podríase terminar añadiendo un número infinito de símbolos.

Por último, A es ω-categórica gracias a que tiene el mismo grupo de automorfismo que la estructura ω-categórica $\mathbb{N}$ (un simple conjunto). El resultado relevante en la afirmación anterior es el siguiente teorema. Puede encontrarse una buena discusión de éste resultado y su prueba en [Hod 93, págs. 345-346]. La definición de interpretabilidad se puede leer al inicio de la sección 5.3 de [Hod 93].

3.33 Teorema. *Sean L un lenguaje y A y B L-estructuras.*

(a) *Si $Aut(A) = Aut(B)$, entonces A y B son bi-interpretables;*

(b) *Si B es interpretable en A y A es ω-categórica, entonces B es ω-categórica.* ■

[1] Basta definir que a, b y c están relacionados si y sólo si comparten exactamente un mismo elemento.

Capítulo 4

Estructuras κ-universales-homogéneas de cardinalidad κ

El objetivo de este último capítulo es presentar una generalización del Teorema de Fraïssé, así como exponer una manera de construir estructuras universales para una clase adecuada de estructuras. En concreto, obtendremos la existencia y unicidad de estructuras homogéneas y universales de cardinalidad mayor a ω. En buena parte de este capítulo restringiremos nuestra atención a estructuras relacionales. Como habíamos observado y explotado en los dos capítulos anteriores, que el lenguaje sea relacional trae consigo gratas propiedades, principalmente que las subestructuras finitamente generadas son finitas. Llevando esta observación un paso más adelante, tenemos que para un lenguaje relacional una subestructura generada por un conjunto X tiene como dominio justamente a X, en particular, toda subestructura tiene la cardinalidad de cualquier conjunto que le genera.

4.1. Estructuras κ-homogéneas

Para obtener una generalización del Teorema de Fraïssé primero debemos extender nuestra noción de homogeneidad, esto nos lleva al concepto de **K**-homogeneidad, que exploraremos en el primer apartado de esta sección. En el segundo apartado presentaremos una discusión —aunque breve e informal— sobre qué tipo de clases de estructuras originarn estructuras **K**-homogéneas; esta discusión pretende a su vez habituar al lector a estas condiciones para futuras referencias.

Homogeneidad

4.1 Definición. Sea L un lenguaje arbitrario y $\mathbf{K}$ una clase de L-estructuras. Decimos que una L-estructura A es $\mathbf{K}$-homogénea si para cualquier subestructura B de A tal que B es un elemento de $\mathbf{K}$ y $|B| < |A|$, cualquier inmersión de B en A puede ser extendida a un automorfismo de A.

Observemos que en verdad este concepto es una generalización del de homogeneidad presentado en el capítulo dos: si A es una estructura homogénea, A es claramente $\mathbf{Sub}(A)$-homogénea. Esta observación nos provee de una basta colección de ejemplos de estructuras $\mathbf{K}$-homogéneas, todas aquellas estructuras homogéneas vistas en los capítulos dos y tres.

Por supuesto, teniendo en mente que lo que deseamos es desarrollar una generalización, debemos encontrar ejemplos no tratados anteriormente. Antes de llegar a algunos de tales ejemplos, abordamos una definición importante.

4.2 Definición. Sea L un lenguaje de primer orden y A una L-estructura. Definimos la clase de L-estructuras $\mathbf{Inm}\,(A)$ como la clase de todas las L-estructuras inmersibles en A.

Esta definición también resulta una generalización de la de edad de una estructura. Recordando lo señalado en el segundo capítulo, la clase $\mathbf{Inm}(A)$ podría no ser igual a la clase $\mathbf{Sub}(A)$, pues $\mathbf{Inm}(A)$ podría contener estructuras que no son finitamente generadas. Además, es claro que para cualquier estructura A la clase $\mathbf{Sub}(A)$ está contenida en la clase $\mathbf{Inm}(A)$.

Ejemplo 1. La gráfica vacía de cardinalidad κ, $G_0(\kappa)$, es un simple conjunto de cardinalidad κ (el símbolo en L_0 se interpreta como el conjunto vacío, el cual siempre es una relación). $G_0(\kappa)$ no es sólo $\mathbf{Inm}\,(G_0(\kappa))$-homogénea, sino que es V-homogénea, donde V es la clase de todos los conjuntos. Para ello basta observar que una subestructura B de $G_0(\kappa)$ es simplemente un subconjunto de ella; de modo que si f es una función inyectiva de B en $G_0(\kappa)$ y $|B| < |G_0(\kappa)|$, es claro que existe un automorfismo de $G_0(\kappa)$ (en este caso es sólo una permutación de los vértices de $G_0(\kappa)$) que extiende a f (note que si $|B| = |G_0(\kappa)|$ no podemos garantizar la conclusión anterior). Así, $G_0(\kappa)$ es una estructura V-homogénea de cardinalidad κ.

Ejemplo 2. En contraste con la gráfica del ejemplo anterior, la gráfica completa de cardinalidad κ, K_κ, es aquella en la que cualesquiera dos vértices distintos están conectados por una arista, es decir, la interpretación del símbolo en L_0 es todo el producto cartesiano menos los elementos de la diagonal. Veamos que K_κ es $\mathbb{G}$-homogénea, donde $\mathbb{G}$ es la clase de todas las gráficas. Para probar ello, suponga que G es una subestructura de K_κ de cardinalidad menor a κ, entonces tenemos que G es una gráfica inducida de K_κ, por lo que G es la gráfica completa de cardinalidad $|G|$. Si f es una inmersión de G en K_κ, cualquier permutación de los vértices de K_κ que extienda a f como función inyectiva, será un automorfismo de K_κ que extiende a f.

Las propiedades adecuadas de la clase K

Sean L un lenguaje relacional, κ un cardinal y $\mathbf{K}$ una clase de L-estructuras, ¿cuándo podemos garantizar la existencia de una L-estructura $\mathbf{K}$-homogénea en $\mathbf{K}$ de cardinalidad κ? En este apartado pretendemos ilustrar las condiciones suficientes para que la respuesta a esta pregunta sea afirmativa. El lector puede recordar que en el capítulo dos construimos estructuras homogéneas a partir de clases de amalgamación con un número contable de tipos de isomorfismo; las condiciones que exponemos en este apartado están relacionadas con aquéllas para una clase de amalgamación.

Empecemos por observar que si el cardinal es muy grande, debemos tener una forma de obtener o asegurar que hay estructuras de cardinalidad suficientemente grande en $\mathbf{K}$.

I. Existen estructuras de cualquier cardinalidad en $\mathbf{K}$.

Aunque a primera vista la condición I puede parecer demasiado fuerte, se debe tener algo muy claro y en mente: las clases de estructuras importantes cumplen, a menudo sin dificultades, la condición I. Por ejemplo, siempre existen órdenes lineales de cardinalidad arbitaria (e.g. los números ordinales), también hay gráficas y grupos de tamaño arbitrario, entre otros (sección 4.5).

Nuestra segunda condición ya la teníamos para una clase de amalgamación.

II. Si A y B son estructuras relacionales, $A \cong B$ y A es un elemento de $\mathbf{K}$, entonces B también es un elemento de $\mathbf{K}$. En breve, $\mathbf{K}$ es cerrada bajo isomorfismo.

La tercera condición también es tomada de aquéllas para una clase de amalgamación.

III. Para cualesquiera dos elementos A y B de $\mathbf{K}$, existe un estructura C elemento de $\mathbf{K}$ en la que A y B son inmersibles.

Como el lector recordará, esta condición es conocida como la propiedad de la coinmersión. Recuerde que esta propiedad la podemos expresar mediante la completación de un diagrama. A saber, dadas dos estructuras A y B en $\mathbf{K}$, existe una estructura C en $\mathbf{K}$ tal que el siguiente diagrama se completa como se indica.

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, dashed, "f"] & & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Es decir, existen inmersiones $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow C$.

La próxima condición nos permite la construcción de nuevas estructuras. Recuerde que la unión de una cadena de L-estructuras es una L-estructura que extiende a cada una en la cadena (hecho explícito en el lema 1.10), además, es claro que la cardinalidad de la unión de una cadena domina a la cardinalidad de cada estructura en la cadena. Es por esto que las construcciones por medio de uniones de cadenas serán útiles al buscar estructuras de una cardinalidad específica y que sean universales.

IV. Sean γ un ordinal y $(A_i \mid i < \gamma)$ una cadena de estructuras en $\mathbf{K}$, entonces $\bigcup_{i<\gamma} A_i$ es una estructura en $\mathbf{K}$.

Esta condición simplemente nos dice que $\mathbf{K}$ es cerrada bajo unión arbitraria de cadenas.

No hay gran dificultad en observar que para una estructura A la clase $\mathbf{Inm}\,(B)$ está contenida en $\mathbf{Inm}\,(A)$, siempre que B es una estructura en $\mathbf{Inm}\,(A)$. La quinta condición está relacionada con este hecho. En realidad hay una quinta condición para cada cardinal. Ya tendremos la delicadeza de apuntar con respecto a qué cardinal supondremos esta condición (sucede que podría fallar para un cardinal y ser válida para otro). Sea κ un cardinal.

V_κ. Si A es un elemento de $\mathbf{K}$, B es una estructura inmersible en A y $|B| < \kappa$, entonces existe C en $\mathbf{K}$ tal que B es inmersible en C, a su vez C es inmersible en A y $|C| < \kappa$.

Note que si A es una estructura, $\mathbf{Inm}\,(A)$ satisface V_κ para cualquier cardinal κ. Para verificarlo basta tener en mente la definición de la clase $\mathbf{Inm}\,(A)$. Aunque debe decirse que, en este caso, la condición V_κ dice algo relevante sólo cuando $\kappa \leq |A|$.

La última condición es la propiedad de la amalgamación como la conocimos en el capítulo dos. Como el lector pudo percatarse, esta propiedad fue la más relevante para la construcción del límite de Fraïssé. Esto hace esperar su presencia en este nuevo contexto.

VI. Sean A, B y C estructuras en $\mathbf{K}$, si $f : A \to B$ y $g : A \to C$ son inmersiones, entonces existen una estructura D en $\mathbf{K}$ e inmersiones $h : B \to D,\ k : C \to D$ tales que $hf = kg$.

Cabe una nota histórica ahora. El enunciado de la propiedad de la amalgamación estimuló la investigación de otro tipo de “amalgamaciones”. Cuando hablamos de amalgamar nos referimos al proceso de comenzar con tres estructuras A, B y C, para luego completar un diagrama como el siguiente, además de hacerlo conmutar:

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, dashed] & & C \arrow[ul, dashed] \\
& A \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, a veces requerimos encontrar una cuarta estructura D tal que el diagrama conmute, en casos en que las flechas denoten igualdades, contenciones, morfismos o relaciones entre las estructuras o cualquier combinación de ellas. Exhortamos al lector interesado a echar un vistazo a estas interesantes construcciones en [Hod 93, secciones 6.4−6.5].

En el caso de nuestra propiedad de la amalgamación, las flechas denotan inmersiones. Así que, justo en la forma en que manejamos esta propiedad en el capítulo dos, la condición IV se puede enunciar de la siguiente manera: Sean A, B y C estructuras en $\mathbf{K}$. Si $A \xrightarrow{f} B$ y $A \xrightarrow{g} C$ son inmersiones, entonces el siguiente diagrama se puede completar como se indica y conmuta,

$$\begin{tikzcd}
& D & \\
B \arrow[ur, dashed, "h"] & & C \arrow[ul, dashed, "k"'] \\
& A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $B \xrightarrow{h} D$ y $C \xrightarrow{k} D$ son inmersiones.

En este nuevo contexto, probaremos la existencia de estructuras **K**-homogéneas de cardinalidad específica, generalizando la construcción de R. Fraïssé. En este caso los resultados son debidos a B. Jónsson y cabe comentar que, aunque el trabajo de Jónsson es posterior al de Fraïssé, las primeras investigaciones de B. Jónsson se realizaron desconociendo las de R. Fraïssé (vea la nota *Added in proofs* en [Jón 56]). Como mencionábamos al inicio del capítulo, deberemos restrigir nuestro interés a estructuras definidas sobre un lenguaje relacional finito: *de ahora en adelante L denotará un lenguaje relacional finito.*

Las siguientes tres secciones son las principales del presente capítulo. En ellas probaremos que suponiendo que la clase de L-estructuras $\mathbf{K}$ satisface las condiciones descritas arriba, podremos garantizar la existencia de estructuras **K**-homogéneas de ciertas cardinalidades en $\mathbf{K}$. De hecho, la construcción que seguiremos nos llevará a concluir la existencia de una única estructura **K**-universal y **K**-homogénea de cardinalidad κ en $\mathbf{K}$. Para simplificar un poco, diremos que una clase de L-estructuras que satisface las condiciones I-IV,V_κ y VI es una κ-clase (en el lenguaje L o de L-estructuras). Asimismo, si $\mathbf{K}$ es una clase de L-estructuras y κ es un cardinal, denotaremos por $\mathbf{K}_{<\kappa}$ a la clase de todos los elementos de $\mathbf{K}$ cuya cardinalidad es menor a κ.

4.2. Conceptos y lemas auxiliares

Esta pequeña sección está destinada a proveernos de los aspectos y resultados, en su mayoría de carácter técnico, necesarios para la prueba del resultado principal de este capítulo. El primer lema nos da una forma de descomponer una estructura en una cadena de subestructuras de cardinalidad menor y tal que la unión de la cadena nos devuelve la estructura inicial. Así, su objetivo es justo el inverso del de la construcción de la unión de una cadena.

4.3 Lema. *Sea $\mathbf{K}$ una clase de L-estructuras que satisface la condición V_{ω_α}. Si A es una estructura en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α, entonces existe una cadena de subestructuras de A, $(A_i \ : \ i \in \omega_\alpha)$, contenida en $\mathbf{K}$ tal que $|A_i| < \omega_\alpha$ para cada $i \in \omega_\alpha$ y $A = \bigcup_{i<\omega_\alpha} A_i$.*

Prueba. Construiremos primero una cadena de subestructuras de A de longitud $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$ que cumpla lo deseado. Sea B_0 cualquier subestructura finitamente generada de A; observe que debido a que L es un lenguaje relacional finito, B_0 es finita (y así $|B_0| < \omega_\alpha$). Sea $\gamma <\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$ y supongamos que la subestructura B_i, para cada $i < \gamma$, está definida de tal manera que es un elemento de $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ y $(B_i : i < \gamma)$ es una cadena. Si γ es un ordinal límite, definimos B_γ como $\bigcup_{i<\gamma} B_i$. Por el lema 1.10, $(B_i : i < \gamma + 1)$ es una cadena. Además, $|B_\gamma| = |\bigcup_{i<\gamma} B_i| = sup\,\{|B_i| : i < \gamma\} \cdot |\gamma| < \omega_\alpha$, ya que $\gamma <\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$. Si $\gamma = \beta + 1$, como $|B_\beta| < \omega_\alpha$, tomemos un conjunto $X \subseteq (\mathrm{dom}\, A \backslash \mathrm{dom}\, B_\beta)$ que cumpla que $|B_\beta| \leq |X| < \omega_\alpha$. Definimos en este caso B_γ como la estructura generada por $X \cup \mathrm{dom}\, B_\beta$. Como L es relacional y finito, $|B_\gamma| = \omega \cdot |X \cup \mathrm{dom}\, B_\beta| = |X| < \omega_\alpha$. También se tiene que, como $B_\beta \subseteq B_\gamma$ por definición y $(B_i : i < \gamma)$ ya era una cadena, $(B_i : i < \gamma + 1)$ es una cadena. En cualquier caso, tenemos construida la estructura B_γ. Por lo tanto, $(B_i : i <\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha))$ es una cadena de subestructuras de A de cardinalidad menora a ω_α. Debido a que existe una función creciente y cofinal $f : \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha) \longrightarrow \omega_\alpha$, hay una forma de asegurar que $A = \bigcup_{i<\,\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)} B_i$. Basta tomar, en cada paso de la construcción en la que γ es un ordinal sucesor, al conjunto X de tal forma que $|X| = |f(\beta)|$, si $\gamma = \beta + 1$ y suponer que nuestra elección de X contiene a todos los conjuntos anteriormente elegidos (para no dejar huecos en la unión). Ello nos diría que no sólo podemos suponer que la cardinalidad de la unión de la cadena es exactamente ω_α sino que de hecho se da la igualdad deseada entre la unión de la cadena y A.. Ahora, si $i < \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$, como $|B_i| < \omega_\alpha$, por V_{ω_α} existe una subestructura C_i de A en $\mathbf{K}$, tal que B_i es subestructura de C_i y $|C_i| < \omega_\alpha$. Además, podemos suponer que $(C_i : i <\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha))$ es una cadena pues, las estructuras B_i forman una. Observe que $A = \bigcup_{i<\,\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)} B_i \subseteq \bigcup_{i<\,\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)} C_i$, de modo que $A = \bigcup_{i<\,\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)} C_i$.

Para terminar, como $\omega_\alpha \geq \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$, tomemos $g : \omega_\alpha \longrightarrow \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$ una función sobre y no decreciente. Definimos $A_i = C_{g(i)}$ para cada $i < \omega_\alpha$; claramente $|A_i| < \omega_\alpha$

para cada $i < \omega_\alpha$. Como g es no decreciente, si $i < j < \omega_\alpha$ entonces $g(i) \leq g(j)$ y así $A_i = C_{g(i)} \subseteq C_{g(j)} = A_j$, por lo que $(A_i : i < \omega_\alpha)$ es una cadena. Además, como $g[\omega_\alpha] = \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$, $\bigcup_{i<\omega_\alpha} A_i = \bigcup_{i<\,\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)} C_i = A$. ■

El segundo de estos lemas está relacionado con la condición V y simplemente dice que si la clase cumple la condición V para algún ordinal, entonces también la cumple para ordinales mayores.

4.4 Lema. *Sea* **K** *una clase de* L*-estructuras que satisface las condiciones IV y* V_{ω_α}*. Entonces* **K** *satisface la condición* V_{ω_γ} *para cualquier ordinal* $\gamma > \alpha$*.*

Prueba. Supongamos, para proceder por inducción, que la clase cumple la condición $\mathrm{V}_{\omega_\beta}$ para cada $\alpha \leq \beta < \gamma$. Sean A una estructura en **K** y B una subestructura de A de cardinalidad menor a ω_γ.

Si γ es un ordinal sucesor, digamos $\gamma = \beta + 1$, tenemos que $|B| \leq \omega_\beta$ y, como hicimos en la primera parte de la prueba del lema anterior, construimos una cadena de estructuras (cuyos elementos no necesariamente están en **K**), $(B_i : i < \mathrm{cf}\,(\omega_\beta)\,)$, tal que $B = \bigcup_{i<\,\mathrm{cf}\,(\omega_\beta)} B_i$ y $|B_i| < \omega_\beta$ para cada $i < \mathrm{cf}\,(\omega_\beta)$. Observe que por la transitividad de ser subestructura, cada B_i es subestructura de A. Debido a que **K** satisface $\mathrm{V}_{\omega_\beta}$, existe para cada $i < \mathrm{cf}\,(\omega_\beta)$ una estructura C_i en **K** tal que $B_i \subseteq C_i$ y $|C_i| < \omega_\beta$, además podemos suponer que $(C_i : i < \mathrm{cf}\,(\omega_\beta)\,)$ es una cadena ya que las estructuras B_i forman una. Sea C la unión de la cadena $(C_i : i < \mathrm{cf}\,(\omega_\beta)\,)$. Tenemos que $|C| = |\bigcup_{i<\,\mathrm{cf}\,(\omega_\beta)} C_i| = sup\,\{|C_i| : i < \mathrm{cf}\,(\omega_\beta)\,\} \cdot \mathrm{cf}\,(\omega_\beta) \leq \omega_\beta < \omega_\gamma$, además, es claro que $B \subseteq C$ y por la condición IV, D es un elemento de **K**. Por lo que en este caso, **K** satisface $\mathrm{V}_{\omega_\gamma}$.

Si γ es un ordinal límite, existe $\beta < \gamma$ tal que $|B| < \omega_\beta$. Por hipótesis, **K** satisface la condición $\mathrm{V}_{\omega_\beta}$, por lo que existe en **K** una estructura C tal que $B \subseteq C \subseteq A$ y $|C| < \omega_\beta < \omega_\gamma$. Concluimos que también en este caso **K** satisface la condición $\mathrm{V}_{\omega_\gamma}$. ■

Para dos cardinales λ y κ, el símbolo $\lambda^{<\kappa}$ denota el cardinal $\sum_{\eta<\kappa} \lambda^\eta$. La regularidad de ω_α y el que $2^{<\omega_\alpha}$ sea igual a ω_α serán las restricciones sobre el cardinal ω_α para garantizar el resultado principal. El siguiente lema ya requiere de una de estas restricciones.

4.5 Lema. *Sean* κ *un cardinal tal que* $2^{<\kappa} = \kappa$ *y* **K** *una* κ*-clase en el lenguaje* L*. Entonces el conjunto de tipos de isomorfismo de estructuras en* $\mathbf{K}_{<\kappa}$ *es de cardinalidad menor o igual a* κ*; esto es, existe un conjunto de cardinalidad menor o igual a* κ *de estructuras en* $\mathbf{K}_{<\kappa}$*, de tal manera que cualquier otra estructura en* $\mathbf{K}_{<\kappa}$ *es isomorfa a alguna de las estructuras en el conjunto.*

Prueba. Para cada cardinal $\lambda < \kappa$, el máximo número posible de estructuras en **K** de cardinalidad λ (con el mismo conjunto como dominio) está determinado por el número de formas en que se pueden interpretar los símbolos en L, debido a que L es finito, esto no es más que el número de subconjuntos de un conjunto de cardinalidad λ, es decir, 2^λ. Así, el número de estructuras en $\mathbf{K}_{<\kappa}$, salvo isomorfismo, es $\sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda = 2^{<\kappa}$. Como $2^{<\kappa} = \kappa$, concluimos que hay a lo más κ tipos de estructuras en $\mathbf{K}_{<\kappa}$. ■

4.3. Unicidad de la estructura κ-universal-homogénea de cardinalidad κ

Para probar la unicidad de una estructura $\mathbf{K}$-universal y $\mathbf{K}$-homogénea emplearemos un concepto útil y que rememora la condición de ser débilmente homogénea. Este concepto también será importante cuando en la siguiente sección mostremos la existencia de la estructura $\mathbf{K}$-homogénea.

4.6 Definición. Sea $\mathbf{K}$ una clase de L-estructuras. Decimos que una L-estructura A es w_κ-$\mathbf{K}$-homogénea si $|A| = \kappa$ y para cualesquiera estructuras B y C en $\mathbf{K}_{<\kappa}$ tales que $B \subseteq C \subseteq A$, cada inmersión f de B en A se puede extender a una inmersión $\bar{f}$ de C en A.

Básicamente, el concepto de w_κ-$\mathbf{K}$-homogénea nos permite trabajar puramente con estructuras de menor tamaño y con ello nos facilitará el trabajo en muchas ocasiones. El siguiente teorema muestra que en realidad ser w_κ-$\mathbf{K}$-homogénea es, bajo ciertas condiciones, tan fuerte como ser $\mathbf{K}$-homogénea.

4.7 Teorema. *Sea $\mathbf{K}$ una ω_α-clase de L-estructuras. Si A y A' son estructuras w_{ω_α}-$\mathbf{K}$-homogéneas de cardinalidad ω_α en $\mathbf{K}$, con la propiedad de que cada subestructura en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ de A es inmersible en A' y viceversa. Entonces A y A' son isomorfas. Más aún, si B es una subestructura de A en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$, cada inmersión de B en A' se puede extender a un isomorfismo de A en A'.*

Prueba. Debido a que la primera afirmación se sigue trivialmente de la segunda, sólo nos encargaremos de esta última. Sea f la inmersión de B en A'. Sean $(A_i : i < \omega_\alpha)$ y $(A'_i : i < \omega_\alpha)$ las cadenas de subestructuras de A y de A', respectivamente, descritas por el lema 4.3. El plan es construir cadenas $(B_i : i < \omega_\alpha)$, $(B'_i : i < \omega_\alpha)$ de subestructuras de A y de A' respectivamente, todas ellas en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$, de tal manera que para cada $i < \omega_\alpha$ exista una inmersión f_i de B_i en B'_i. Naturalmente, construiremos estas cadenas por recursión.0 Antes de comenzar la construcción, resaltaremos lo siguiente.

Si D y C' son subestructuras de A y A' respectivamente, ambas en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$, y $g : D \longrightarrow C'$ es una inmersión, entonces existe una subestructura C de A en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ tal que el siguiente diagrama se completa como se indica y conmuta,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, dashed, "h \text{ isomorfismo}"] & \\ D \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "g"'] & C' \end{tikzcd}$$

esto es, existe un isomorfismo h de C en C' que extiende a g.

Para verificar lo anterior, sean D, C' y g como en las hipótesis. Como C' es subestructura de A', existe una subestructura D' de A isomorfa a C', digamos, mediante el isomorfismo $k : C' \longrightarrow D'$. Entonces $kg[D]$ es isomorfa a D y es subestructura de D', pues g y k son inmersiones. Considere las inclusiones, $i : D \longrightarrow A$ e $i' : kg[D] \longrightarrow D' \subseteq A$, entonces $ig^{-1}k^{-1}i' : kg[D] \longrightarrow A$ es una inmersión. Como A es w_{ω_α}-**K**-homogénea, existe una inmersión $j : D' \longrightarrow A$ que extiende a $ig^{-1}k^{-1}i'$. Tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
kg[D] \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i'"'] & D' \arrow[r, "k^{-1}"] & C' \arrow[r, "g^{-1}"] & D \arrow[r, "i"] & C = j[D'] \subseteq A \arrow[llll, bend right, "j^{-1}"'] \\
D' \arrow[urrrr, "j"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Tomando C como $j[D']$, C es una subestructura de A que tiene como subestructura a D y $h = k^{-1}j^{-1} : C \longrightarrow C'$ es un isomorfismo que extiende a g, lo último es debido a que, restringido a $D \subseteq C$, $h = k^{-1}j^{-1} = k^{-1}(i')^{-1}kgi^{-1} = k^{-1}kg = g$.

Podemos comenzar ahora la construcción que comentábamos al inicio. Definimos las estructuras $B_0 = B$ y $B'_0 = f[B]$ de A y A' respectivamente y el morfismo $f_0 = f$. Tenemos que f_0 es un isomorfismo de B_0 en B'_0. Supongamos que B_i, B'_i y f_i han sido definidos para algún $i < \omega_\alpha$ de tal forma que f_i es un isomorfismo de B_i en B'_i. Por la condición $\mathrm{V}_{\omega_\alpha}$, como $\langle B'_i \cup A'_i \rangle \subseteq A'$ y $|\langle B'_i \cup A'_i \rangle| < \omega_\alpha$, existe una subestructura C'_i de A' en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ que extiende a $\langle B'_i \cup A'_i \rangle$. Por la afirmación demostrada al inicio de la prueba, existe una subestructura C_i de A y un isomorfismo f'_i de C_i en C'_i que extiende a f_i. Nuevamente por $\mathrm{V}_{\omega_\alpha}$, existe una subestructura B_{i+1} de A en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ y que es extensión de $\langle C_i \cup A_i \rangle$. Asimismo, por la afirmación al inicio de la prueba —esta vez intercambiando los papeles de A y A'—, existe una subestructura B'_{i+1} de A' en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ que extiende a C'_i y un isomorfismo f_{i+1} que extiende a f'_i. Tenemos entonces que f_{i+1} es un isomorfismo de B_{i+1} en B'_{i+1}. Por otro lado, si γ es un ordinal límite menor a ω_α y tenemos definidos B_i, B'_i y f_i para cada $i < \gamma$, con cada f_i isomorfismo de B_i en B'_i, definimos $B_\gamma = \bigcup_{i<\gamma} B_i, B'_\gamma = \bigcup_{i<\gamma} B'_i$ y $f_\gamma = \bigcup_{i<\gamma} f_i$. Por la condición IV, B_γ y B'_γ están en **K**; es claro que f_γ también resulta un isomorfismo de B_γ en B'_γ. Por lo tanto, tenemos construidas las cadenas de subestructuras $(B_i : i < \omega_\alpha)$ y $(B'_i : i < \omega_\alpha)$ de A y A' respectivamente, de tal manera que $A_i \subseteq B_i$, y $A'_i \subseteq B'_i$. Esto implica que $\bigcup_{i<\omega_\alpha} B_i = \bigcup_{i<\omega_\alpha} A_i = A$ y $\bigcup_{i<\omega_\alpha} B'_i = \bigcup_{i<\omega_\alpha} A'_i = A'$. Además, la unión de la sucesión $(f_i)_{i<\omega_\alpha}$ es un isomorfismo de $\bigcup_{i<\omega_\alpha} B_i$ en $\bigcup_{i<\omega_\alpha} B'_i$ que claramente extiende a f, esto es, $\bar{f} = \bigcup_{i<\omega_\alpha} f_i$ es un isomorfismo de A en A' que extiende a f. ■

Lo importante del teorema previo es que una estructura w_κ-$\mathbf{K}$-homogénea de cardinalidad κ en $\mathbf{K}$ es de hecho una estructura $\mathbf{K}$-homogénea; basta poner $A = A'$ en el teorema anterior. Más aún, una estructura $\mathbf{K}$-homogénea en $\mathbf{K}$ de cardinalidad κ es automáticamente una estructura w_κ-$\mathbf{K}$-homogénea. Basta observar que si A es $\mathbf{K}$-homogénea de cardinalidad κ y $f : B \longrightarrow A$ es una inmersión de la subestructura B de A en $\mathbf{K}_{<\kappa}$, entonces existe un automorfismo $\bar{f}$ de A que extiende a f; por lo que para cualquier extensión $C \subseteq A$ de B, la restricción de $\bar{f}$ a C es una inmersión de C en A que extiende a f. Así, tenemos el siguiente importante resultado.

4.8 Teorema. *Sea $\mathbf{K}$ una κ-clase de L-estructuras. Si A es una estructura en $\mathbf{K}$ de cardinalidad κ, A es $\mathbf{K}$-homogénea si y sólo si es w_κ-$\mathbf{K}$-homogénea.* ∎

El teorema anterior nos permitirá obtener una estructura $\mathbf{K}$-homogénea a partir de una estructura w_κ-$\mathbf{K}$-homogénea; ello reduce de alguna forma el trabajo para probar la existencia de estructuras homogéneas, como veremos adelante. Sin embargo, ésta no es la única consecuencia o ventaja importante del teorema anterior, pues junto con el teorema 4.7, nos permite concluir la unicidad de una estructura $\mathbf{K}$-universal y $\mathbf{K}$-homogénea en $\mathbf{K}$ de cardinalidad κ. De ahora en adelante, diremos que una L-estructura A es $\mathbf{K}$-universal-homogénea si es $\mathbf{K}$-universal y $\mathbf{K}$-homogénea.

4.9 Teorema. *Sea $\mathbf{K}$ una κ-clase de L-estructuras. Entonces, cualesquiera dos estructuras de cardinalidad κ y $\mathbf{K}$-universal-homogéneas en $\mathbf{K}$ son isomorfas.*

Prueba. Supongamos que A y A' son dos estructuras de cardinalidad κ y $\mathbf{K}$-universal-homogéneas en $\mathbf{K}$. Como A es $\mathbf{K}$-universal, cada subestructura de A' de cardinalidad menor a κ y que esté en $\mathbf{K}$ es inmersible en A. Debido a que A' también es $\mathbf{K}$-universal, lo anterior es cierto intercambiando los papeles de A y A'. Además, por el teorema anterior, A y A' son w_κ-$\mathbf{K}$-homogéneas. Entonces tenemos las hipótesis del teorema 4.7, por lo que A y A' son isomorfas (observe que por la condición I, hay una estructura finita B en $\mathbf{K}$, por la condición II podemos suponer que B es subestructura de A, al ser A' universal existe una inmersión de B en A', con esta inmersión aplicamos lo hecho en la prueba de 4.7). ∎

4.4. Existencia de la estructura κ-universal-homogénea de cardinalidad κ

Ahora estamos preparados para probar el resultado principal. Como adelantábamos en comentarios anteriores, los lemas de las secciones y apartados anteriores y todo el recorrido que hemos seguido y seguiremos, nos permitirá no sólo obtener una estructura $\mathbf{K}$-homogénea sino una estructura universal-homogénea respecto a $\mathbf{K}$. De hecho, primero obtendremos la existencia de una estructura universal respecto a $\mathbf{K}$ para a partir de ésta construir una estructura homogénea, que al ser extensión de una estructura universal, resultará también universal. El siguiente resultado ya estaba prometido al inicio de este capítulo.

4.10 Teorema. *Sea α un ordinal tal que ω_α es un cardinal regular y $2^{<\omega_\alpha} = \omega_\alpha$. Si* **K** *es una ω_α-clase de L-estructuras, entonces* **K** *tiene como elemento a una estructura* $(\mathbf{K}, \omega_\alpha)$*-universal de cardinalidad ω_α.*

Prueba. Teniendo en cuenta el lema 4.5, sea $\{A_i : i < \omega_\alpha\}$ una sucesión de estructuras en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ que contiene al menos uno de cada uno de los tipos de isomorfismo de estructuras en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$. Construiremos una cadena de estructuras $(B_i : i < \omega_\alpha)$ de tal forma que para cada $i < \omega_\alpha$, A_i sea inmersible en B_i. Por la condición I, existe una estructura B_0 de cardinalidad ω_α en **K**. Supongamos que B_i está definida para algún $i < \omega_\alpha$. Por la propiedad de la coinmersión, existe una estructura C_{i+1} en **K** en la que B_i y A_i son ambas inmersibles. Por la condición II, podemos suponer que C_{i+1} es una extensión de B_i; de modo que tenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} & C_{i+1} & \\ A_i \arrow[ur, "f"] & & B_i \arrow[ul, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

donde $A_i \xrightarrow{f} C_{i+1}$ es una inmersión. Debido a que L es finito relacional, la estructura generada por $f[A_i] \cup B_i$ en C_{i+1}, tiene cardinalidad a lo más ω_α, denotemos por C'_{i+1} a tal estructura. Sabemos que, por el lema 4.4, **K** satisface $\mathrm{V}_{\omega_{\alpha+1}}$, de modo que existe una estructura B_{i+1} en **K** de cardinalidad ω_α tal que $C'_{i+1} \subseteq B_{i+1} \subseteq C_{i+1}$. Por lo tanto, tenemos el siguiente diagrama, que nos dice que B_{i+1} es la estructura que buscábamos.

$$\begin{tikzcd} & B_{i+1} & \\ & C'_{i+1} \arrow[u, "\subseteq"'] & \\ A_i \arrow[ur, "f"] & & B_i \arrow[ul, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

Ahora supongamos que δ es un ordinal límite menor a ω_α y que B_i ha sido definida para cada $i < \delta$. En este caso basta definir, gracias a la condición IV, B_δ como $\bigcup_{i<\delta} B_i$. Esto termina nuestra construcción de la cadena de estructuras $(B_i : i < \omega_\alpha)$.

Definimos B como la unión de la cadena de las estructuras B_i. Es claro que $|B| = \omega_\alpha$ y que, por la condición IV, B está en **K**. Además, si A es una estructura en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$, existe una estructura A_i tal que A es isomorfa a A_i, digamos por medio de h. Por la construcción de B, existe una inmersión k_i de A_i en B. Luego, A es inmersible en B por medio de $k_i h$. Concluimos que B es una estructura $(\omega_\alpha, \mathbf{K})$-universal de cardinalidad ω_α en $\mathbf{K}$. ■

Como ya comentábamos, la construcción de una estructura $\mathbf{K}$-homogénea se obtendrá a partir de una estructura $\mathbf{K}$-universal, el siguiente teorema describe este procedimiento.

4.11 Teorema. *Sean α un ordinal tal que ω_α es un cardinal regular y $2^{<\omega_\alpha} = \omega_\alpha$ y $\mathbf{K}$ una ω_α-clase de L-estructuras. Si A es una estructura en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α, entonces existe una extensión de A en $\mathbf{K}$ que es $\mathbf{K}$-homogénea y de cardinalidad ω_α.*

Prueba. Sea A una estructura en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α. Denotemos por $\mathcal{B}(A)$ al conjunto de subestructuras de A que también se encuentran en $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$. Observe que el número de inmersiones de elementos de $\mathcal{B}(A)$ en A es menor o igual a ω_α. En efecto, si $\lambda < \omega_\alpha$ es un cardinal, el número de funciones inyectivas de un conjunto de cardinalidad λ en un conjunto de cardinalidad ω_α es ${\omega_\alpha}^\lambda$ y el número de subconjutos de cardinalidad λ de un conjunto de cardinalidad ω_α es también ${\omega_\alpha}^\lambda$, por lo que el número de inmersiones de elementos de $\mathcal{B}(A)$ en A está acotado por $\sum_{\lambda<\omega_\alpha} {\omega_\alpha}^\lambda \cdot {\omega_\alpha}^\lambda$, pero $\sum_{\lambda<\omega_\alpha} {\omega_\alpha}^\lambda \cdot {\omega_\alpha}^\lambda = \sum_{\lambda<\omega_\alpha} {\omega_\alpha}^\lambda = {\omega_\alpha}^{<\omega_\alpha} = 2^{<\omega_\alpha} = \omega_\alpha$.

Construiremos una cadena de estructuras en $\mathbf{K}$ $(A_i : i < \omega_\alpha)$ de tal forma que, para $i < \omega_\alpha$, cada isomorfismo entre subestructuras de A_i de cardinalidad menor a ω_α se extiende a una inmersión de A_i en A_{i+1}. Definimos A_0 como A. Supongamos que tenemos definida la estructura A_i en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α. Para definir A_{i+1} construiremos una cadena de estructuras $(A_{i+1,j} : j < \omega_\alpha)$ de la siguiente forma. Primero supongamos que $(f_i : i < \omega_\alpha)$ es una enumeración de todos las inmersiones de subestructuras de cardinalidad menor a ω_α de A_i en A_i. Tomemos $A_{i+1,0} = A_i$. Supongamos que $A_{i+1,j}$ está definida para algún $j < \omega_\alpha$. Observe que f_{i+1} es un isomorfismo de $B_{i+1} = \operatorname{dom} f_{i+1}$ en $C_{i+1} = \operatorname{Im}(f_{i+1})$ y tanto B_{i+1} como C_{i+1} son subestructuras de A_i. Por la propiedad de la amalgamación, tenemos que el siguiente diagrama se completa como se indica y conmuta,

$$\begin{tikzcd}
& A_{i+1,j+1} & \\
A_i \arrow[ur, dashed, "g_{i+1}"] & & A_i \arrow[ul, dashed, "h_{i+1}"'] \\
B_{i+1} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[rr, "f_{i+1}"'] & & C_{i+1} \arrow[u, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

esto es, existe una estructura $A_{i+1,j+1}$ en $\mathbf{K}$ e inmersiones $g_{i+1}, h_{i+1} : A_i \longrightarrow A_{i+1,j+1}$

tales que $g_{i+1}|_{B_{i+1}} = h_{i+1}|_{C_{i+1}} \circ f_{i+1}$. Como $A_{i+1,j+1}$ es un elemento de $\mathbf{K}$, por la condición II, podemos suponer que de hecho $A_{i+1,j+1}$ es una extensión de C_{i+1} y con ello que h_{i+1} es simplemente la inclusión de C_{i+1} en $A_{i+1,j+1}$. De modo que $g_{i+1}|_{B_{i+1}} = f_{i+1}$, es decir, g_{i+1} extiende a f_{i+1}. Más aún, como $\mathbf{K}$ satisface la condición $\mathrm{V}_{\omega_\alpha}$, por el lema 4.4, $\mathbf{K}$ satisface la condición $\mathrm{V}_{\omega_{\alpha+1}}$; por lo que podemos suponer que $|A_{i+1,j+1}| = \omega_\alpha$. Ahora supongamos que para un ordinal límite $\delta < \omega_\alpha$ hemos definido la cadena de estructuras $(A_{i+1,j} : j < \delta)$, en este caso basta tomar $A_{i+1,\delta} = \bigcup_{j<\delta} A_{i+1,j}$, pues por la condición IV, $A_{i+1,\delta}$ sería un elemento de $\mathbf{K}$. Además, es claro que esta estructura es extensión de cada $A_{i+1,j}$ para cada $j < \delta$ y que tiene cardinalidad exactamente ω_α (en esto último usamos que $\omega_{\alpha+1}$ es un cardinal regular). Tenemos por lo tanto definida la cadena de estructuras en $\mathbf{K}$ y de cardinalidad ω_α $(A_{i+1,j} : j < \omega_\alpha)$. Basta definir A_{i+1} como la unión de esta cadena. Entonces A_{i+1} está en $\mathbf{K}$, debido a la condición IV, y tiene cardinalidad ω_α. Más aún, si $f : B \longrightarrow A_i$ es una inmersión de la subestructura B de A que es elemento de $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$, entonces $f = f_i$ para algún ordinal $i < \omega_\alpha$. Es claro a partir de la construcción que entonces f es extendido a una inmersión de A_i en A_{i+1}. Para terminar la construcción de las estructuras A_i, supongamos que para el ordinal límite $\delta < \omega_\alpha$ tenemos definida la cadena de estructuras $(A_i : i < \delta)$. Naturalmente, basta definir A_δ como la unión de esta cadena.

Estamos ahora en posición de definir la estructura $\mathbf{K}$-homogénea que buscamos. Considere $A' = \bigcup_{i<\omega_\alpha} A_i$. A' es, entonces, un elemento de $\mathbf{K}$ por la condición IV y es claro que tanto es extensión de A como que $|A'| = \omega_\alpha$. Mostraremos que A' es w_{ω_α}-$\mathbf{K}$-homogénea. Para ello, sean B y C subestructuras de A' elementos de $\mathbf{K}_{<\omega_\alpha}$ tales que $B \subseteq C$, y f una inmersión de B en A'. Note que la estructura $\langle C \cup f[B] \rangle$ tiene cardinalidad menor a ω_α y es subestructura de A', por lo que existe un ordinal $i < \omega_\alpha$ tal que la estructura A_i es una extensión de C y de $f[B]$. De esta forma tenemos que f es una inmersión de B en A_i, por lo que, debido a la construcción de A_{i+1}, f se extiende a una inmersión $\bar{f}$ de A_i en A_{i+1}. Entonces $\bar{f}|_C$ es una inmersión de C en A' que extiende a f.

Como A' es w_{ω_α}-$\mathbf{K}$-homogénea en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α, el teorema 4.8 implica que A' es $\mathbf{K}$-homogénea, concluyendo el resultado. ■

Antes de establecer el resultado principal, resta verificar que será suficiente tomar una extensión $\mathbf{K}$-homogénea de la estructura $(\mathbf{K}, \omega_\alpha)$-universal que nos arroja el teorema 4.10 para obtener la estructura $\mathbf{K}$-universal-homogénea en $\mathbf{K}$. Debe observarse que no es suficiente que una estructura sea $(\mathbf{K}, \omega_\alpha)$-universal y de cardinalidad ω_α para concluir que es $\mathbf{K}$-universal. Por ejemplo, si $\mathbf{K}$ es la clase de todos los órdenes lineales, el orden lineal usual de los números enteros es $(\mathbf{K}, \omega)$-universal y de cardinalidad ω, sin embargo no es $\mathbf{K}$-universal, pues el orden de los números racionales es numerable y de ninguna manera es inmersible en el de los números enteros. El siguiente lema indica un caso en el que sí podemos concluir que nuestra estructura $(\mathbf{K}, \omega_\alpha)$-universal es de hecho $\mathbf{K}$-universal.

4.12 Lema. *Sean $\mathbf{K}$ una ω_α-clase de L-estructuras y A una estructura $\mathbf{K}$-homogénea de* *cardinalidad ω_α. Si A es $(\mathbf{K},\, \omega_\alpha)$-universal, entonces es $\mathbf{K}$-universal.*

Prueba. Sea B una L-estructura en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α. Sea $(B_i : i < \omega_\alpha)$ la cadena descrita por el lema 4.3 para B. Como B_0 tiene cardinalidad menor a ω_α y A es $(\mathbf{K},\, \omega_\alpha)$-universal, existe una inmersión f_0 de B_0 en A. Supongamos como primer caso que $\lambda = \eta + 1$ para algún ordinal η y que la inmersión f_η ya ha sido definida. Debido a que A es $(\mathbf{K},\, \omega_\alpha)$-universal, existe un isomorfismo g de $B_{\eta+1}$ en una subestructura de A, digamos $A'_{\eta+1}$. Tenemos que el morfismo $f_\eta g^{-1}|_{B_i}$ es una inmersión de $g[B_i]$ en A, y por la $\mathbf{K}$-homogeneidad de A, esta inmersión es extendida por una inmersión h de $A'_{\eta+1}$ en A. Tomando $f_{\eta+1}$ como el morfismo hg, tenemos que $f_{\eta+1}$ es una inmersión de $B_{\eta+1}$ en A que extiende a f_η. Como segundo caso, supongamos que λ es un ordinal límite y que hemos definido, para $\lambda < \omega_\alpha$, la sucesión de inmersiones $(f_i : i < \lambda)$ de tal forma que f_i es inmersión de B_i en A y f_{i+1} extiende a f_i para cada i tal que $i + 1 < \lambda$. En este caso basta definir f_λ como la unión de la sucesión $(f_i : i < \lambda)$, pues sabemos, por construcción, que $B_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} B_i$. Por lo tanto, tenemos definida la sucesión de inmersiones $(f_i : B_i \longrightarrow A \mid i < \omega_\alpha)$ que satisface que f_{i+1} extiende a f_i para cada $i < \omega_\alpha$. Si $f = \bigcup_{i<\omega_\alpha} f_i$, entonces f es una inmersión de B en A.

Concluimos que cualquier elemento de $\mathbf{K}$ de cardinalidad menor o igual a ω_α es inmersible en A, dicho de otra forma, A es $\mathbf{K}$-universal. ■

El siguiente resultado es al fin el principal de este capítulo y es, ahora, un simple corolario de los resultados anteriores. El teorema, como ya habíamos mencionado antes, fue probado por primera vez por B. Jónsson en [Jón 60]. Fue retomado y mejorado por M. Morley y R. Vaught en [MyV 62]. No obstante, cabe decir que la exposición de este resultado en el presente trabajo sigue la sugerida en el capítulo 10 de [ByS 69].

4.13 Teorema (***Existencia de estructuras homogéneas***). *Sea α un ordinal tal que ω_α es un cardinal regular y tal que $2^{<\omega_\alpha} = \omega_\alpha$. Si $\mathbf{K}$ es una ω_α-clase, entonces existe una estructura $\mathbf{K}$-universal-homogénea de cardinalidad ω_α en $\mathbf{K}$. Más aún, esta estructura es única salvo isomorfismo.*

Prueba. Por el teorema 4.10, existe una estructura $(\mathbf{K},\, \omega_\alpha)$-universal en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α, digamos A'. Por el teorema 4.11, existe una extensión A de A' en $\mathbf{K}$ que es $\mathbf{K}$-homogénea y de cardinalidad ω_α; observe que como A' es subestructura de A, entonces cada inmersión de alguna estructura en A' se extiende naturalmente a una inmersión en A, por lo que A también es $(\mathbf{K},\, \omega_\alpha)$-universal. Por el lema anterior (4.12), A es una estructura $\mathbf{K}$-universal-homogénea en $\mathbf{K}$ de cardinalidad ω_α. La unicidad proviene del teorema 4.9. ■

En la siguiente sección veremos algunos ejemplos de clases de estructuras matemáticas que satisfacen las condiciones del teorema anterior. Se vuelve, entonces, imperativo preguntarse por las condiciones impuestas sobre el cardinal ω_α. Los siguientes resultados nos muestran que las condiciones impuestas sobre el cardinal no son demasiado restrictivas; en efecto, hay una considerable cantidad de posibilidades.

4.14 Lema. *Sea κ un cardinal infinito. Si $\kappa = \beth_\delta$ para algún ordinal límite $\delta > 0$ o la hipótesis generalizada del continuo es cierta, entonces $2^{<\kappa} = \kappa$.*

Prueba. Verifiquemos primero que $\kappa \leq 2^{<\kappa}$. Si $\kappa = \omega$ el resultado es claro; si $\kappa = \omega_{\alpha+1}$, $2^{<\kappa} = \sum_{\lambda<\omega_{\alpha+1}} 2^\lambda = 2^{\omega_\alpha}$ que claramente es mayor o igual a κ, y si $\kappa = \omega_\delta$, donde δ es un ordinal límite distinto de 0, $2^{<\kappa} = \sum_{\lambda<\omega_\delta} 2^\lambda = \sum_{\alpha<\delta} 2^{\omega_\alpha} \geq \sum_{\alpha<\delta} \omega_{\alpha+1} = \omega_\delta = \kappa$.

Ahora supongamos que $\kappa = \beth_\delta$ para algún ordinal límite $\delta > 0$, tenemos lo siguiente:

$$\kappa \leq 2^{<\beth_\delta} = \sum_{\lambda<\beth_\delta} 2^\lambda = \sum_{\alpha<\delta} 2^{\beth_\alpha} = \sum_{\alpha<\delta} \beth_{\alpha+1} = \beth_\delta = \kappa,$$

y si la hipótesis generalizada del continuo es válida, tenemos,

$$\kappa \leq 2^{<\kappa} = \sum_{\lambda<\kappa} 2^\lambda = \sum_{\lambda<\kappa} \lambda^+ = \kappa,$$

si $\kappa > \omega$. Si $\kappa = \omega$, la igualdad es inmediata. ■

Así, por ejemplo, podemos asegurar la existencia de estructuras universales-homogéneas de cardinalidad κ siempre que κ sea regular y la hipótesis generalizada del continuo sea válida. En particular, si la hipótesis generalizada del continuo es válida, y debido a que todo cardinal sucesor es regular, existirán estructuras universales-homogéneas de cardinalidad $\omega_{\alpha+1}$ para cada ordinal α. Vale la pena subrayar estas observaciones.

4.15 Corolario. *Supongamos que la hipótesis generalizada del continuo es cierta y que $\kappa = \omega_\alpha$ es un cardinal regular, en particular esto es cierto si α es un ordinal sucesor. Si $\mathbf{K}$ es una ω_α-clase de L-estructuras, entonces existe una estructura $\mathbf{K}$-universal-homogénea en $\mathbf{K}$ de cardinalidad κ, única salvo isomorfismo.* ■

El lector puede comparar el siguiente corolario del teorema 4.13 con el resultado de R. Fraïssé que presentamos en el capítulo dos. Baste decir que en este caso las hipótesis son más fuertes que aquéllas del teorema 2.18, es por ello que la construcción del límite de Fraïssé es más *eficiente* que este corolario para construir estructuras homogéneas numerables. La validez de este corolario proviene de la regularidad del cardinal ω y de que claramente $2^{<\omega} = \omega$.

4.16 Corolario. *Sea $\mathbf{K}$ una ω-clase de L-estructuras, entonces existe una estructura $\mathbf{K}$-universal-homogénea de cardinalidad ω, única salvo isomorfismo.* ■

4.5. Algunos ejemplos

Existe una variedad considerable de clases de estructuras de interés matemático que satisfacen las condiciones impuestas sobre la clase $\mathbf{K}$ en la construcción de las secciones anteriores. En esta sección presentamos algunas de estas clases.

Conjuntos

Un conjunto es una estructura en el lenguaje $\emptyset$; podemos considerar la clase de todas las $\emptyset$-estructuras, la cual denotaremos por **Set**. En menos palabras, **Set** es la clase de todos los conjuntos. Entonces **Set** satisface —de manera inmediata— las condiciones I-IV, V_ω y VI. La condición I es satisfecha, pues existen conjuntos de cualquier cardinalidad (los cardinales, por ejemplo); cualquier objeto para el que haya una función de un conjunto en él es un conjunto gracias al axioma de reemplazo, por lo que la condición II también es satisfecha. La propiedad de la coinmersión y la condición IV resultan válidas en virtud del axioma de la unión. La condición V_ω es en este caso una trivialidad, y esto, una vez verificada la condición IV, implica gracias al lema 4.4 que **Set** satisface $\mathrm{V}_{\omega_\alpha}$ para cada ordinal α. Por último, para verificar que la propiedad de la amalgamación es satisfecha por **Set**, tomemos los conjuntos X, Y, Z y las funciones inyectivas ($\emptyset$-inmersiones) $f : Z \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$. Supongamos, sin pérdida de la generalidad, que la cardinalidad de X es menor o igual a la de Y; por esto último, además de que $|f[Z]| = |Z| = |g[Z]|$, existe una función inyectiva k de $X \backslash f[Z]$ en $Y \backslash g[Z]$. De modo que definiendo $k'(x)$ como

$$\begin{cases} k(x) & \text{si } x \in X \backslash f[Z], \\ gf^{-1}(x) & \text{si } x \in f[Z]; \end{cases}$$

k' resulta una función inyectiva de X en Y tal que $k'f = g$. El siguiente diagrama muestra la amalgamación deseada.

$$\begin{tikzcd}
& Y & \\
X \arrow[ur, "k'"] & & Y \arrow[ul, "\subseteq"'] \\
& Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Esto concluye que la clase **Set** cumple las condiciones de 4.13. Así, si κ es un cardinal regular tal que $2^{<\kappa} = \kappa$, existe un conjunto **Set**-universal-homogéneo de cardinalidad κ; lamentablemente —vaya sorpresa— un conjunto **Set**-universal-homogéneo no posee ninguna característica relevante, es un simple conjunto. De hecho, si X es un conjunto arbitrario, entonces X es universal, pues cualquier conjunto de cardinalidad menor o igual a la de X es $\emptyset$-inmersible en X. También X es **Set**-homogéneo, pues cualquier función inyectiva de un subconjunto de cardinalidad menor a la de X puede ser extendida por alguna permutación de X. En realidad no requeríamos del teorema 4.13 para concluir la existencia de $\emptyset$-estructuras universales y homogéneas. Debe considerarse este ejemplo como una muestra de que en ocasiones es realmente fácil verificar que una clase de estructuras cumple las condiciones impuestas en el teorema 4.13.

Órdenes lineales

Recordemos que los órdenes lineales son L_0-estructuras donde la interpretación del símbolo relacional en L_0 ordena de manera total al dominio. Veremos que la clase **OL** de todos los órdenes lineales satisface las condiciones del teorema 4.13. Antes de comenzar, establezcamos ciertos puntos. El primero es sobre notación, si A es un orden lineal, denotaremos por $<_A$ a la interpretación en A del símbolo en L_0. Seguidamente, un L_0-homomorfismo f entre los órdenes lineales A y B es una función que preserva orden, es decir, $\forall x, y \in A(x <_A y \rightarrow f(x) <_B f(y))$. La función f es una L_0-inmersión en caso de que $\forall x, y \in A(x <_A y \leftrightarrow f(x) <_B f(y))$ (el lector podrá observar que esta condición implica la inyectividad de f). Entonces, la condición I es satisfecha, pues, por ejemplo, cada número cardinal es un conjunto linealmente ordenado. Si A es un orden lineal y B es una L_0-estructura isomorfa a A por medio de $f : A \longrightarrow B$, entonces B es un orden lineal, pues como f es isomorfismo, $\forall x, y \in A(x <_A y \leftrightarrow f(x)R^B f(y))$, donde R es el símbolo en L_0, y ello muestra que R^B ordena totalmente a B. Por lo tanto, **OL** satisface la condición II. Para verificar la propiedad de la coinmersión, tomemos dos órdenes lineales A y B. Entonces $A + B$, el orden que resulta de concatenar el orden A con el orden B, es un orden lineal en el que tanto A como B son L_0-inmersibles. De modo que la condición de la coinmersión (III) es también satisfecha por **OL**. La clase de los órdenes lineales es claramente cerrada bajo unión de cadenas arbitrarias, es decir, **OL** satisface la condición IV. Ahora, si A es un orden lineal de cardinalidad ω_α y B es una subestructura de A, entonces, como la interpretación del símbolo de L_0 en B coincide con su interpretación en A restringida a B, B es un orden lineal. Esto muestra que **OL** satisface $\mathrm{V}_{\omega_\alpha}$ para cualquier ordinal α. Mostrar que **OL** satisface la propiedad de la amalgamación no es tan simple como verificar las condiciones anteriores. Presentamos la que al parecer puede ser la forma más intuitiva de abordar esta condición, sin embargo, haremos uso de una construcción importante, cuya presentación omitiremos. Sean A, B y C órdenes lineales tales que f, g son L_0-inmersiones de A en B y de A en C, respectivamente. Además supongamos que $|A| \leq |B| \leq \omega_\alpha$. Por el teorema 9.22 en [Ros 82], existe un orden lineal denso sin extremos de cardinalidad ω_α y **OL**-universal; se suele denotar por H_α a tal orden lineal. Sea k una inmersión de B en H_α. Como H_α es denso y sin extremos y $|f[A]| = |A| = |g[A]|$, existe una L_0-inmersión h de C en H_α tal que $kf = hg$. Específicamente, basta hacer que h mande $g(x)$ en $kf(x)$ para cada elemento x de A, luego definimos h sobre $C \backslash g[A]$ de tal forma que se preserve el orden, esto es posible al ser H_α denso y sin extremos.

Podemos ahora concluir que la clase **OL** satisface todas las condiciones del teorema 4.13, y con ello la existencia de órdenes lineales **OL**-universales-homogéneos de cardinalidad κ, únicos salvo isomorfismo, siempre y cuando κ sea un cardinal regular y cumpla que $2^{<\kappa} = \kappa$.

Órdenes parciales

En esta ocasión denotaremos por **OP** a la clase de todos los órdenes parciales, aquéllas L_0-estructuras en las que la interpretación del símbolo en L_0 ordena parcialmente al dominio. Haremos uso de aquella notación para órdenes lineales ($<_A$) también para órdenes parciales. Podemos observar que las condiciones I, II, IV y $\mathrm{V}_{\omega_\alpha}$ se satisfacen en **OP** por la misma razón por la que se satisfacen en la clase de los órdenes lineales. Si A y B son dos órdenes parciales, la unión disjunta de A y B será el orden parcial C tal que $\operatorname{dom} C = (\operatorname{dom} A \times \{0\}) \cup (\operatorname{dom} B \times \{1\})$ y el cual (x, i) es menor a (y, j) si y sólo si $i = j$ y x es menor a y en A si $i = 0$ o en B si $i = 1$. Se puede ver que C es un orden parcial en el que A y B son inmersibles como órdenes parciales. Lo anterior muestra que **OP** satisface la propiedad de la coinmersión. Por último, verificaremos que **OP** también satisface la propiedad de la amalgamación.

Para dos relaciones binarias R y S, definimos su producto relativo, denotado por $R \cdot S$, como la relación $\{(x, y) \mid \exists z(xRz \wedge zSy)\}$. En lo siguiente denotamos por R al símbolo relacional en L_0.

4.17 Proposición. *Sean A, B y C órdenes parciales y $f : A \longrightarrow B, g : A \longrightarrow C$ L_0-inmersiones. Entonces existe un orden parcial C en el cual B y C son L_0-inmersibles, por las inmersiones k y h respectivamente, de tal forma que $kf = hg$. Esto es, la clase* **OP** *satisface la propiedad de la amalgamación.*

Prueba. Ya hemos observado que **OP** satisface la condición II, ello nos permite suponer que B es una extensión de A y con ello que f es simplemente la inclusión i de A en B. Asimismo, podemos suponer que $\operatorname{dom} A \subseteq \operatorname{dom} C$ (sin embargo, no es necesario suponer que g sea la inclusión). Sea D la L_0-estructura con dominio $\operatorname{dom} B \cup \operatorname{dom} C$ y donde $R^D = <_B \cup <_C \cup (<_B \cdot <_C) \cup (<_C \cdot <_B)$ (vea los detalles en la sección 3 de [Jón 56]). Entonces D es un orden parcial para el que existen L_0-inmersiones, $k : B \longrightarrow D$ y $h : C \longrightarrow D$ tales que $ki = hg$. ■

Esto concluye que la clase de todos los órdenes parciales satisface las condiciones I-V_κ (para cualquier cardinal κ) y VI. Si κ es un cardinal regular para el cual $2^{<\kappa} = \kappa$, el teorema 4.13 implica la existencia de un único orden parcial **OP**-universal-homogéneo de cardinal κ.

Grupos

Antes de empezar con este ejemplo, hay una anotación importante que debe resaltarse. El lenguaje de estructuras algebraicas (grupos, anillos, campos, módulos, etcétera) usualmente tiene símbolos de función. Ello supondría que las clases de estos tipos de estructuras no son suceptibles de ser analizadas como κ-clases. Sin embargo, mediante una ligera enmienda podemos habilitar el estudio de estas clases. Todo símbolo de función de n argumentos puede ser sustituido por un símbolo de relación de $n+1$ argumentos de la forma obvia; de este modo, toda estructura en un lenguaje algebraico puede ser considerada como una estructura en un lenguaje exclusivamente relacional. Uno puede preguntarse cuáles son las consecuencias de esta enmienda y por qué no, entonces, llevamos a cabo de forma más general el estudio en las secciones anteriores admitiendo lenguajes con símbolos de función. La respuesta es que, bajo esta modificación, se puede perder la conclusión del lema 4.5, además que las subestructuras en el lenguaje modificado posiblemente resultarán estructuras que no heredan la estructura algebraica.

Considere la clase de todos los grupos, la cual denotaremos por **Grp**. El lenguaje de la clase **Grp** consta de dos símbolos de relación, uno de tres argumentos para denotar la operación del grupo y otro de dos argumentos para la operación que envía un elemento en su inverso. Denotemos por $L_{\mathbf{Grp}}$ a este lenguaje. Veamos cuáles de las condiciones cumple **Grp**.

Si n es un número natural, $\mathbb{Z}_n$ es un anillo conmutativo de cardinalidad n, en particular, su parte aditiva es un grupo de cardinalidad n. Por otro lado, si κ es un cardinal infinito, considere el conjunto

$$\sum_{\lambda<\kappa} \mathbb{Z} = \{(a_\lambda)_{\lambda<\kappa} \in \prod_{\lambda<\kappa} \mathbb{Z} \mid a_\lambda \neq 0 \text{ sólo para un número finito de cardinales } \lambda\},$$

en el cual definimos las operaciones coordenada a coordenada (es decir, $(a_\lambda)_{\lambda<\kappa}+(b_\lambda)_{\lambda<\kappa} = (a_\lambda + b_\lambda)_{\lambda<\kappa}$), la suma directa de tamaño κ de $\mathbb{Z}$. Entonces $\sum_{\lambda<\kappa} \mathbb{Z}$ es un grupo abeliano de cardinalidad κ. Esto muestra que **Grp** satisface la condición I. Si A es una $L_{\mathbf{Grp}}$-estructura isomorfa a un grupo G, entonces A misma es un grupo, pues los isomorfismos entre $L_{\mathbf{Grp}}$-estructuras son precisamente isomorfismos de grupos. Así que **Grp** es cerrada bajo isomorfismo. Ahora, sean G y H grupos. Recuerde que el grupo $G \times H$ es el grupo que tiene como dominio al producto cartesiano de G y H y cuyas operaciones son entrada a entrada. Tenemos, entonces, la siguiente configuración.

$$\begin{tikzcd} & G \times H & \\ G \arrow[ur, dashed] & & H \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

Por lo que **Grp** también cumple la propiedad de la coinmersión. La condición $\mathrm{V}_{\omega_\alpha}$, para $\alpha > 0$, sí se satisface en **Grp**. En efecto, supongamos que G es un grupo y que B es una $L_{\mathbf{Grp}}$-estructura inmersible en G. Sea B' la subestructura de G isomorfa a B. Tenemos que $|B'| = |B| < \omega_\alpha$, de donde el subgrupo H generado por el dominio de B' en G tiene cardinalidad menor o igual a *máx* $\{|B'|, \omega\}$. De modo que $B \cong B'$ y B' es subestructura de C. Por lo tanto, B es inmersible en H, H es un elemento de **Grp** y $|H| < \omega_\alpha$.

Para terminar, buscamos verificar la propiedad de la amalgamación para la clase **Grp**. Esta condición corresponde a una construcción compleja en la teoría de grupos debida a O. Schreier y conocida como el producto libre de dos grupos.

4.18 Proposición. *Sean G y H dos grupos con un subgrupo común K. Entonces existe un grupo L y monomorfismos de grupos $u : G \longrightarrow L$ y $v : H \longrightarrow L$ tales que $u|_K = v|_K$.* ■

El producto libre de G y H resulta ser el grupo L que asegura la proposición anterior. Puede consultar la construcción del producto libre de dos grupos en [Hun 94, sección I.9] o, mejor aún, vea la prueba de la anterior proposición en [Rot 95, págs. 388-389]. En virtud de la condición II, que ya ha sido verificada para **Grp**, la proposición anterior implica que la clase de todos los grupos satisface la propiedad de la amalgamación.

A pesar de lo comentado al inicio de este ejemplo, el lema 4.5 permanece válido para para la clase **Grp** siempre que κ sea infinito. Por lo tanto, existe un grupo **Grp**-universal-homogéneo de cardinalidad κ, siempre que κ sea un cardinal regular infinito mayor que ω y cumpla que $2^{<\kappa} = \kappa$.

Epílogo

El autor se reconoce en falta al aceptar que desconoce la existencia de resultados relativos a la teoría de modelos de la construcción de B. Jónsson, aquella presentada en el último capítulo, salvo aquellos contenidos en el complejo artículo de M. Morley y R. Vaught ([MyV 62]), los cuales sin duda rebasan el nivel de la exposición en este trabajo. El lector entusiasta, y que tenga cierta familiaridad con el así conocido Teorema de los dos cardinales de Vaught (vea, por ejemplo, el capítulo 19 de [Sac72]) y clases elementales, encontrará interesante el artículo citado.

Queda aún mucho por decir sobre estructuras homogéneas. Sin la intención de que sea exhaustiva, podemos presentar una lista de las áreas que tienen interés en estructuras homogéneas y comentar cuál es este interés.

- Teoría de modelos y teoría de grupos de automorfismos. Una muestra de esto fue presentada en este trabajo.

- Combinatoria. Clasificación de estructuras homogéneas de origen combinatorio (torneos, digráficas, permutaciones, etc.) y aspectos de la teoría de Ramsey ([KPyT 05]).

- Teoría de las categorías. Es natural pensar en una clase de estructuras en un lenguaje L como la colección de objetos de una categoría en la que las flechas son inmersiones. Las propiedades de una clase de amalgamación o de una κ-clase se pueden expresar en términos de existencia de morfismos entre objetos y completación de diagramas. W. Kubiś en [Kub 08], siguiendo el trabajo de T. Irwin y S. L. Solecki, presenta la construcción de objetos (a los que llama límites y sucesiones de Jónsson-Fraïssé) en categorías que satisfacen características análogas a las de una clase de amalgamación o una κ-clase. La aplicación de estas construcciones ha sido encontrada, por el mismo Kubiś, en análisis matemático (teoría de espacios de Banach y otros tipos de espacios).

Es de resaltar que la construcciones presentadas en este trabajo —y sin duda la genialidad— llevaron en la década de los 90 a Ehud Hrushovski a la construcción de contraejemplos para dos conjeturas muy importantes en teoría de modelos (y a la larga en Geometría Algebraica). Estas son la conjetura de tricotomía de Zilber sobre teorías denumerablemente categóricas y la conjetura de Lachlan sobre teorías ω-categóricas y estables ([Hru 93] y [Sem 09]).

Bibliografía

[ACyM 11] José Alfredo Amor Montaño, Gabriela Campero Arena y Favio Ezequiel Miranda Perea, *Teoría de Conjuntos, curso intermedio*, Las Prensas de Ciencias 2011.

[ByS 69] Jonh L. Bell y A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An Introduction*, Dover Publications Inc. 2006.

[DyM 91] Manfred Droste y H. Dugald Macpherson, *On k-homogeneous Posets and Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 1991.

[End 05] H. B. Enderton, *Una Introducción Matemática a la Lógica*, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM 2005.

[Fra 00] Roland Fraïssé, *Theory of Relations*, Elsevier 2000.

[Har 05] Egbert Harzheim, *Ordered Sets*, Springer: Advances In Mathematics 2005.

[Hen 71] C. Ward Henson, *A Family of Countable Homogeneous Graphs*, Pacific Journal of Mathematics 1971.

[Hen 72] C. Ward Henson, *Countable Homogeneous Relational Structures and $\aleph_0$-Categorical Theories*, The Journal of Symbolic Logic, Number 3 1972.

[Hod 93] Wilfrid Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press 1993.

[Hun 94] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 73, Springer Verlag 1974.

[Hru 93] Ehud Hrushovski, *A new strongly minimal set*, Annals of Pure and Applied Logic 62 1993.

[Jón 56] Bjarni Jónsson, *Universal Relational Systems*, Mathematica Scandinavica 4 1956.

[Jón 60] Bjarni Jónsson, *Homogeneous Universal Relational Systems*, Mathematica Scandinavica 8 1960.

[KPyT 05] A. S. Kechris, V. G. Pestov y S. Todorcevic, *Fraïssé Limits, Ramsey Theory, and Topological Dynamics of Automorphism Groups*, GAFA Birkhäuser Verlag 2005.

[Kub 08] Wieslaw Kubiś, *Fraïssé sequences —a cathegory-theoretic approach to universal homogeneous structures*, http://128.84.158.119/abs/0711.1683?context=math.FA 2008.

[Lac 86] Alistair H. Lachlan, *Homogeneous structures*, Proceedings of The International Congress of Mathematicians 1986.

[LyW 80] Alistair H. Lachlan y Robert E. Woodrow, *Countable ultrahomogeneous undirected graphs*, Transactions of The American Mathematical Society 262 1980.

[Mar 02] David Marker, *Model Theory: An Introduction*, Springer Verlag 2002.

[Mac 10] H. Dugald Macpherson, *Homogeneous Structures, Lecture Notes*, https://www1.maths.leeds.ac.uk/maloa/Fischbachau_homog2.pdf 2010.

[Mac 11] H. Dugald Macpherson, *A Survey of Homogeneous Structures*, Discrete mathematics 311 2011.

[MyV 62] Michael Morley y Robert Vaught, *Homogeneous Universal Models*, Mathematica Scandinavica 11 1962.

[Ros 82] Joseph G. Rosenstein, *Linear Orderings*, Academic Press 1982.

[Rot 95] Joseph J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer Verlag 1995.

[Sem 09] Marco Antonio Semana Ferreira, *The Geometries of the Hrushovski Construction*, Tesis de doctorado University of East Anglia 2009.

[Sch 79] James Scmerl, *Countable homogeneous partially ordered sets*, Algebra Universalis 9 1979.

[Sac72] Gerald E. Sacks, *Saturated Model Theory, second edition*, World Scientific Co. 2010.

Índice de Símbolos

Índice