UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS ECONÓMICOS Y CUANTITATIVOS DEL RESIDUO DE SOLOW

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

SARAI ULAJE VALDERRABANO

DIRECTOR DE TESIS:
MAT. FERNANDO SÁNCHEZ LÓPEZ

2013

"Un jardinero que cultiva su propio jardín, con sus propias manos, une en su persona los tres personajes, de propietario, agricultor y obrero. Su producción, por lo tanto, debe rendirle la renta del primero, la ganancia del segundo y el salario del tercero". Adam Smith.

Índice general

Introducción

El crecimiento económico, que habitualmente se asocia a la productividad en un país, es el incremento de la renta (ingreso) generada por una economía en un periodo determinado y se refiere al incremento de ciertos indicadores, como la producción de bienes y servicios, el ahorro, la inversión, etcétera.

Usualmente, el crecimiento económico de un país se mide como el aumento del Producto Interno Bruto (PIB) y se considera importante, porque a su vez está relacionado con el PIB per cápita de los individuos de un país. Puesto que uno de los factores correlacionados con el bienestar socio-económico de un país es la relativa abundancia de bienes económicos materiales disponibles para las personas de un país, el crecimiento económico ha sido usado como una medida de la mejora de las condiciones socio-económicas de la economía en cuestión; sin embargo, existen muchos otros factores correlacionados con el bienestar de un país, siendo el PIB per cápita uno de estos factores, y de aquí surge la necesidad por el estudio del crecimiento económico.

El modelo de Solow,[1] es un modelo exógeno de crecimiento económico que se propone explicar las variables que en él se presentan en el corto y largo plazo mediante un método cuantitativo enfocándose principalmente en los factores de la producción, el cual predice la convergencia hacia un estado estacionario; en ese estado, todo crecimiento per capita surge del progreso tecnológico.

El objetivo central del presente trabajo es mostrar desde la perspectiva matemática el desarrollo de una parte del Modelo de Solow, el llamado "Residuo de Solow", con el objeto de derivar dicho residuo partiendo de una función arbitraria de producción que depende del capital, el trabajo y la tecnología. Para después presentarlo con una función particular: la función de producción Cobb-Douglas. Asimismo se explican sus aspectos y características exponiendo de modo teórico las observaciones a dicho residuo. El análisis de dicho modelo se hace siguiendo a Romer (2001). En esta sentido, la contribución de la tesis es dar a conocer y explicar de forma práctica tanto el Modelo como el Residuo de Solow detalladamente tomando en cuenta su

[1] El modelo de crecimiento de Solow se llama así en honor al economista Robert M. Solow desarrollado durante las décadas 50's y 60's. En 1987 recibió el premio Nobel de Economía, Mankiw (2000).

explicación y significado económico. Además se realizó la complementación de información, así como también se hizo la integración de demostraciones a cada proposición para su futuro estudio.

Para el objetivo, la tesis se divide en tres capítulos: en el primero, a manera de premisa, se analizan los aspectos microeconómicos de la tecnología como un factor de producción. En el segundo se presenta, con base en Romer (2001), el modelo de Solow ampliado con tecnología para posteriormente mostrar en el capítulo tercero la derivación del residuo de Solow mediante una función de producción arbitraria.

Finalmente, se presenta la obtención del residuo a través de la función Cobb-Douglas. Y por último se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Tecnología y Función de Producción

1.1. Los Factores de la Producción

De manera tradicional, los economistas han denominado a los recursos productivos como *insumos* o *factores de la producción*, los cuales, como su nombre indica, sirven para generar productos, que a su vez deben ser entendidos como los bienes y servicios que adquiere el consumidor.

Los factores de la producción han quedado típicamente divididos en tres categorías, que se definen a continuación:

Capital (K): Es un conjunto de recursos producidos por la mano del hombre que se emplean para la fabricación de bienes y servicios. Esto, claramente, incluye la herramienta y maquinaria usadas en el proceso productivo.[1]

Trabajo (L): Es la cantidad de mano de obra usada en la producción y que por tanto forma parte de la fuerza laboral.[2]

Es necesario aclarar que, de acuerdo a esta definición, el trabajo se refiere a las actividades realizadas fuera del hogar.

[1] Debe notarse que los economistas, al usar el vocablo "capital", se refieren al capital físico y no al capital financiero.

[2] La fuerza laboral hace referencia a las capacidades humanas para trabajar, es una mercancía cuyo valor está determinado por el tiempo de trabajo.

Tierra (T): Contiene a los recursos naturales susceptibles a ser explotados para la fabricación de bienes y servicios.

Así pues, el factor Tierra, no sólo considera al espacio físico en el que el proceso productivo se lleva a cabo.

Como resultará obvio, desde un punto de vista humano, el trabajo es el factor más importante.

Ahora bien, existen algunos economistas que consideran a la tecnología y el nivel de educación en una sociedad como un cuarto factor de la producción. El caso de la educación se refiere al grado de escolaridad. Y, en esta cuarta categoría quedarían comprendidas las habilidades y capacidades empresariales, con lo que se reconocería a la organización como un elemento indispensable en el proceso productivo.

1.2. Medición de los Factores y de los Productos

Una vez que hemos visto que los factores de la producción son utilizados para producir bienes y servicios, es necesario saber la forma en que estos suelen medirse.

Las variables económicas y los productos se miden ya sea como *variables de flujo* o *variables de stock*, las cuales se precisan a continuación:

Variables de Flujo: Son aquellas que están referidas a un periodo de tiempo, por ejemplo, una determinada cantidad de trabajo a la semana, o un determinado número de horas-máquina a la semana generan una cantidad de producción determinada a la semana.

Variables de Stock: Son aquellas que están referidas a un momento en el tiempo, pero la referencia al tiempo sólo es necesaria como dato histórico. Un ejemplo común de una variable de stock son los datos de población. O usando el ejemplo anterior: el número acumulado de horas máquina en un instante.

Cabe mencionar que lo más frecuente es que se midan como variables de flujo.

Después de ver cómo se miden las variables económicas, se da una definición que nos permite introducir el concepto de viabilidad para la tecnología.

Definición 1.1. *Se denominan combinaciones de factores tecnológicamente viables a aquellos insumos que permiten resumir las posibilidades de producción de una empresa.*

Finalmente, con respecto a la definición anterior hay que aclarar que únicamente existen algunas combinaciones viables de factores para alcanzar un cierto nivel de producción, por lo que la empresa debe adaptarse a las restricciones que éstas imponen.

1.3. Función de Producción y Descripción de una Tecnología

Para comenzar esta sección supongamos que nuestra economía cuenta con n bienes que pueden ser insumos y/o productos. Esta economía usa y_j^i unidades del bien j como insumos y produce y_j^o unidades del bien j. De manera que el producto neto del bien j está dado por:

$$y_j = y_j^o - y_j^i$$

Si $y_j < 0$, la economía usa más del bien j de lo que produce y el bien j-ésimo es tomado como un factor neto.

Pero si $y_j > 0$ entonces la economía produce más del bien j que lo que usa como insumo del mismo bien j y nos referiremos a éste como un producto.

De acuerdo a la definición 1.1 existen sólo algunas combinaciones de factores que pueden ser utilizadas por la empresa para alcanzar un determinado nivel de producción,por lo que se necesita ordenarlas en un plan de producción, concepto que se define a continuación:

Definición 1.2. *Se le llama plan de producción a la lista de producciones netas de distintos bienes. Se le denota como un vector* $\mathbf{y}$ *en* $\mathbb{R}^n$.

Un caso particular del plan de producción que nos ayudará en el estudio se especifica a continuación.

Definición 1.3. *Un plan de producción es tecnológicamente eficiente si no hay manera de producir más mercancías con la misma cantidad de insumos o producir el mismo producto con menos insumos:*

La siguiente gráfica muestra un ejemplo de dónde pueden estar los puntos eficientes y_1 y y_2 y los puntos no eficientes.

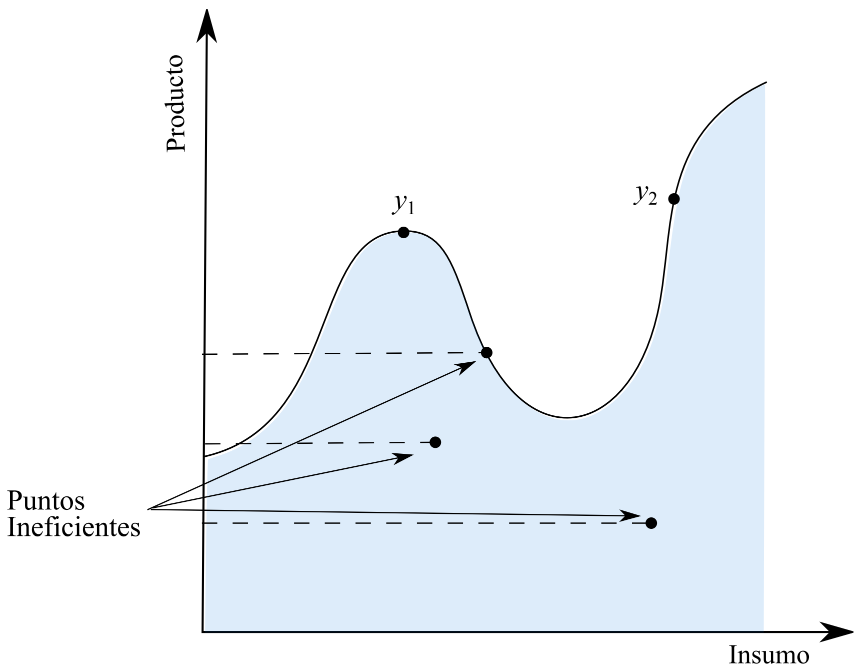

Figura 1.1: Puntos Ineficientes

Ahora bien, es necesario que exista un conjunto que agrupe a todos los planes de producción, a éste se le denomina conjunto de posibilidades de producción, y se define formalmente a continuación:

Definición 1.4. *Se define al conjunto de posibilidades de producción como aquél que contiene todos los planes de producción viables de la empresa, este conjunto se denota como* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

La naturaleza no siempre da toda la libertad a un plan de producción, ya que éste debe ser compatible a ciertas condiciones relacionadas con los factores de producción, por lo que tiene que cumplir con restricciones y éstas son descritas por un vector llamado vector de restricciones $\mathbf{z} \subset \mathbb{R}^n$. Así pues, sólo hay algunas combinaciones de factores viables para obtener una cierta cantidad de producción y lo llamamos conjunto de posibilidades de producción restringido.

Definición 1.5. *El conjunto de posibilidades de producción restringido es el conjunto de productos netos factibles que cumplen con las restricciones del vector* $\mathbf{z}$*, denotado por:*

$$Y(\mathbf{z}) \subset Y$$

Existen otros conjuntos que inducen a cierta cantidad de producción ya sea mayor o menor. Para obtener al menos una cantidad requerida de producción tenemos al siguiente conjunto.

Definición 1.6. *El conjunto de requerimiento de insumos* $V(y)$ *es el conjunto de las cantidades necesarias para obtener por lo menos un nivel dado de producción. Esto es:*

$$V(y) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : (y, -\mathbf{x}) \in Y \right\}$$

donde $(y, -\mathbf{x})$ denota la pareja ordenada de productos netos, y $\mathbf{x}$ es un vector de insumos que produce y unidades cuando la empresa produce un solo bien.[3]

Además existe un instrumento para representar las relaciones de producción, llamada isocuanta.

Definición 1.7. *Una isocuanta es el conjunto de todos los métodos técnicamente eficientes para producir un determinado nivel de un bien. Formalmente:*

$$Q(y) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{x} \in V(y) \text{ y } \mathbf{x} \notin V(y') \ \forall\, y' > y \right\}$$

La isocuanta muestra todos los insumos que producen exactamente y unidades de mercancía.

El siguiente concepto se refiere al de una función de producción.

[3] Nótese que este conjunto mide sólo insumos positivos y no negativos como en el conjunto de posibilidades de producción.

Definición 1.8. *La función de producción f es una expresión de relación que mide el volumen máximo de producción que puede obtenerse con una cantidad dada de factores. Si la empresa produce únicamente un bien:*

$$f(\mathbf{x}) = \{y \in \mathbb{R} : y \text{ es el producto máximo asociado con } -\mathbf{x} \in Y\}$$

En la figura 1.2 se muestra una gráfica de cómo puede verse una función de producción.

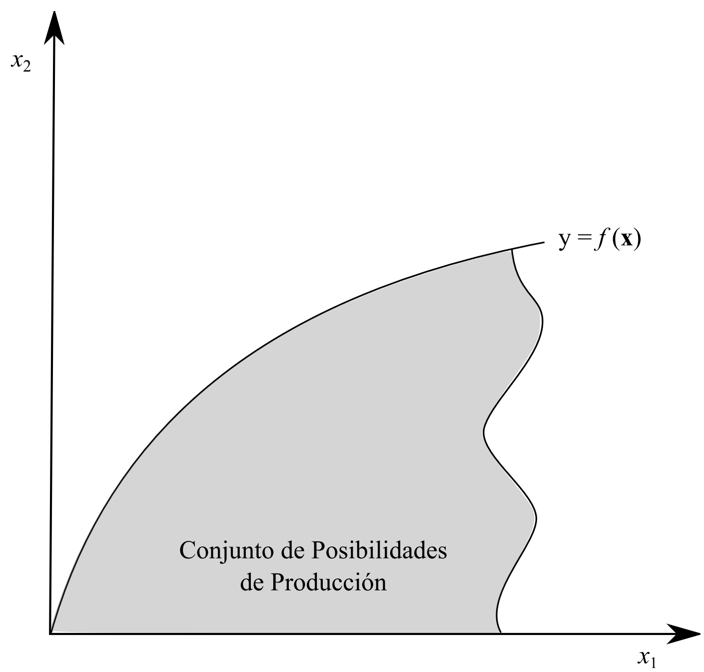

Figura 1.2: Función de Producción

A continuación se presenta un par de ejemplos de tecnologías.

Ejemplo 1.1. Tecnología Cobb-Douglas

Sea a un parámetro tal que $0 < a < 1$, entonces los siguientes conjuntos describen la tecnología Cobb-Douglas:

$$
\begin{aligned}
Y &= \left\{(y, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^3 : y \leq x_1^a x_2^{1-a}\right\} \\
V(y) &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : y \leq x_1^a x_2^{1-a}\right\} \\
Q(y) &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : y = x_1^a x_2^{1-a}\right\} \\
Y(z) &= \left\{(y, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^3 : y \leq x_1^a x_2^{1-a},\, x_2 = z\right\} \\
f(\mathbf{x}) &= x_1^a\, x_2^{1-a}
\end{aligned}
$$

La figura 1.3 es la gráfica que corresponde a una tecnología Cobb-Douglas con su conjunto de posibilidades de producción e isocuantas. Donde $y_1,\ y_2, y\ y_3$ son distintos niveles de producción e $i \geq 2$.

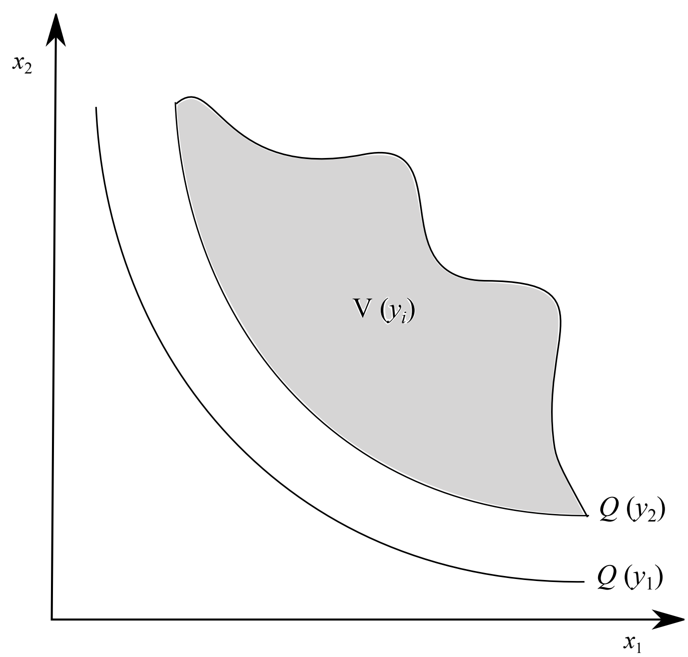

Figura 1.3: Tecnología Cobb - Douglas

Ejemplo 1.2. Tecnología de Leontief

Sean los parámetros $a, b > 0$, entonces los siguientes conjuntos describen la tecnología de Leontief:

$$\begin{aligned} Y &= \left\{(y, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^3 : \ y \leq \text{mín}\{ax_1, bx_2\}\right\} \\ V(y) &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \ y \leq \text{mín}\{ax_1, bx_2\}\right\} \\ Q(y) &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \ y = \text{mín}\{ax_1, bx_2\}\right\} \\ f(\mathbf{x}) &= \text{mín}\{ax_1, bx_2\} \end{aligned}$$

En la siguiente gráfica podemos observar una tecnología de Leontief con su conjunto de posibilidades de producción e isocuantas. Si $i \geq 3$:

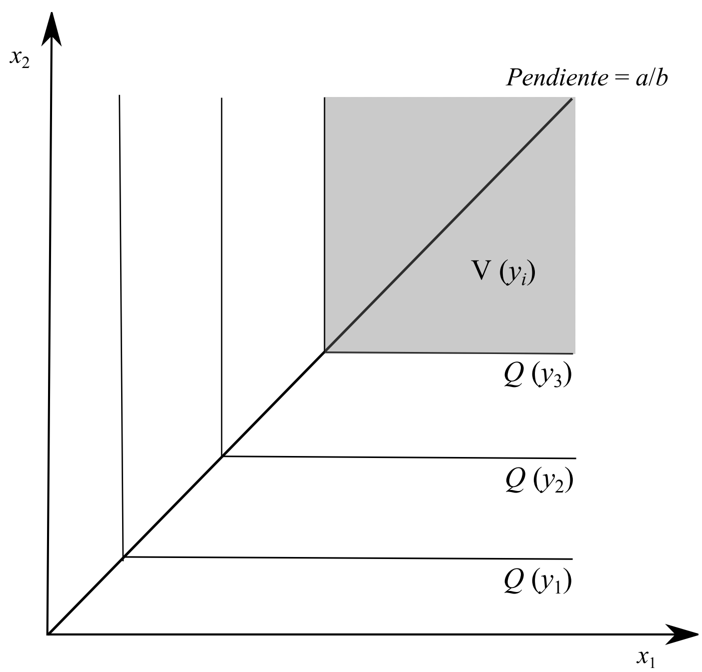

Figura 1.4: Tecnología de Leontief

1.4. Los Rendimientos a Escala

En el largo plazo se asume que todos los factores pueden variar. Para analizar los cambios de la producción a medida que cambian los factores en alguna proporción se utilizan los rendimientos a escala.

Los rendimientos a escala hacen referencia a la relación en el largo plazo entre los factores y el producto cuando se hace variar a todos los insumos. A saber, existen tres tipos de rendimientos a escala, especificados a continuación:

Definición 1.9. *Si f es la función de producción y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa los insumos, se dice que la función presenta rendimientos crecientes a escala si para un número real $t > 0$ se cumple:*

$$f(t\mathbf{x}) > tf(\mathbf{x})$$

Este caso sucede cuando se hace un aumento a todos los insumos pero este incremento es mayor que la producción aumentada t veces. El caso contrario se define a continuación.

Definición 1.10. *Se dice que la función de producción presenta rendimientos decrecientes a escala si para un número real $t > 1$ se cumple:*

$$f(t\mathbf{x}) < tf(\mathbf{x})$$

En este tipo de rendimiento, el incremento creado por un aumento en los factores a una escala t es menor que el incremento de la misma escala en la producción.

Naturalmente, la función de producción puede aumentar en la misma proporción t que sus factores, en este caso se dice que presenta rendimientos constantes a escala.

Definición 1.11. *Una tecnología presenta rendimientos constantes a escala si cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. $\mathbf{y} \in Y \Rightarrow t\mathbf{y} \in Y, \forall t \geq 0.$
2. $\mathbf{x} \in V(y) \Rightarrow t\mathbf{x} \in V(ty), \forall t \geq 0.$
3. La función de producción $f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado 1, esto es $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$.

Proposición 1.1. *Las condiciones 1, 2 y 3 de la definicion 1.11 son equivalentes.*

Demostración. Sea $y \in Y$, entonces por hipótesis $(y, -\mathbf{x}) \in Y$ y como $ty \in Y$ entonces por ser t un escalar tenemos que $t(y, -\mathbf{x}) \in Y \Rightarrow (ty, -t\mathbf{x}) \in Y \Rightarrow t\mathbf{x} \in V(ty)$ con lo cual queda demostrado que 1 implica 2.

Ahora, sea $\mathbf{x} \in V(y) \Rightarrow t\mathbf{x} \in V(ty)$ y como $\mathbf{x} \in V(y) \Rightarrow (y, -\mathbf{x}) \in Y \Rightarrow f(\mathbf{x}) = y \Rightarrow tf(\mathbf{x})\, ty$. Por otro lado, $t\mathbf{x} \in V(ty) \Rightarrow f(\mathbf{x})\, ty \therefore f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$.

Para la última implicación (3 implica 1) considérese $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, de aquí que $f(\mathbf{x}) \in Y$, entonces existe $\mathbf{x} \in V(y)$ tal que $(y, -\mathbf{x}) \in Y$. Sea $t \geq 0$ entonces tenemos que $t\mathbf{x} \in V(ty) \Rightarrow t\mathbf{x} \in Y \Rightarrow f(t\mathbf{x}) \in Y$ y por hipótesis $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$ pero $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \Rightarrow t\mathbf{y} \in Y$ □

La siguiente gráfica ilustra el caso de una función de producción con rendimientos constantes a escala para $t = 1,\ 2,\ 3$.

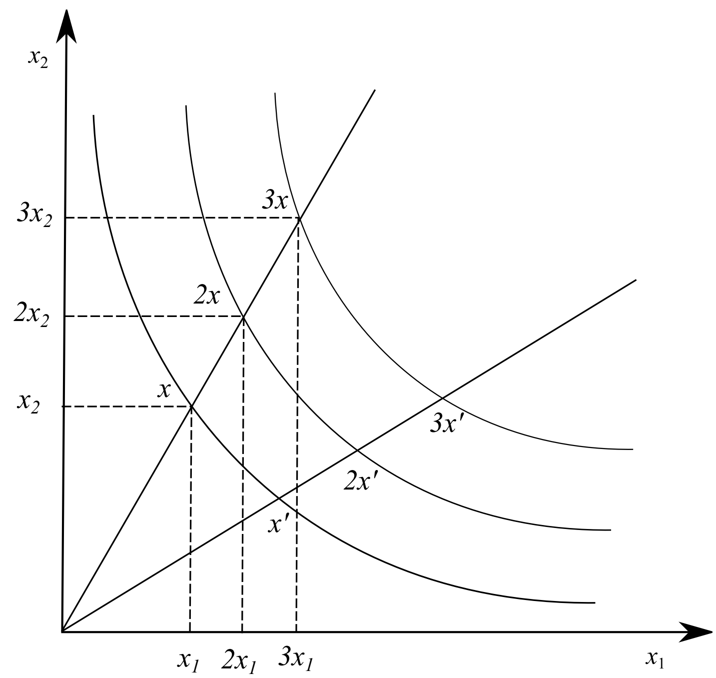

Figura 1.5: Rendimientos Constantes a Escala

Los rendimientos constantes a escala se refieren a un caso en particular: si se igualan el producto y los insumos al incrementar ambos en una escala t. Esto significa que la economía en cuestión es muy desarrollada, pues es capaz de utilizar los recursos nuevos al mismo nivel que los ya instalados.

A continuación se presenta una proposición que nos muestra una función de producción que puede tener diferentes tipos de rendimientos a escala.

Proposición 1.2. *Sea una función de producción Cobb - Douglas de la forma* $f(\mathbf{x}) = Ax_1^a x_2^b$, *con* A *una constante mayor que cero, en este caso:*

1. Si $a + b > 1$, entonces f tiene rendimientos crecientes a escala.
2. Si $a + b < 1$, entonces f tiene rendimientos decrecientes a escala.
3. Si $a + b = 1$, entonces f tiene rendimientos constantes a escala.

Demostración. Consideremos $t > 1$, y el hecho que $tf(\mathbf{x}) = Atx_1^a x_2^b$, por otro lado:

$$f(t\mathbf{x}) = A(tx_1)^a (tx_2)^b = At^{a+b} x_1^a x_2^b$$

Entonces, por ser $t > 1$, si consideramos $a + b > 1$, claramente tendremos

$$tf(\mathbf{x}) = Atx_1^a x_2^b < At^{a+b} x_1^a x_2^b = f(t\mathbf{x})$$

El resultado es análogo para el caso 2, pero con la desigualdad invertida.

Finalmente en el tercer caso necesitamos, por definición, tomar $t \geq 0$. Ahora bien, si consideramos $t = 0$ es trivial, por lo que tomando $t \neq 0$ se tiene $t = t^{a+b}$, por lo que

$$tf(\mathbf{x}) = Atx_1^a x_2^b = At^{a+b} x_1^a x_2^b = f(t\mathbf{x})$$

Con lo que queda demostrado. □

De este modo, se sigue inmediatamente de la proposición anterior que una función de producción Cobb - Douglas de la forma $f(\mathbf{x}) = x_1^a\, x_2^{1-a}$, es decir como la presentada en el ejemplo 1.1, tiene rendimientos constantes a escala, pues sus parámetros suman 1 y es el caso particular $A = 1$.

Asimismo, otro ejemplo de función de producción que siempre presenta rendimientos constantes a escala es la función de producción de Leontief, como se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *La función de producción de Leontief tiene rendimientos constantes a escala.*

Demostración. Como la función de producción es de Leontief tiene la forma

$$f(\mathbf{x}) = \text{mín}\{ax_1, bx_2\}$$

Entonces, consideremos el caso $\text{mín}\{ax_1, bx_2\} = ax_1$, tomando $t \geq 0$ tendremos que

$$f(t\mathbf{x}) = \text{mín}\{atx_1, btx_2\} = atx_1$$

por ser t y x_1 números no negativos. Pero también

$$tf(\mathbf{x}) = t\,\text{mín}\{ax_1, bx_2\} = atx_1$$

Si el mínimo fuese bx_2 el proceso sería análogo. □

Ahora bien, una tecnología tiene ciertas características para las diferentes formas de producción. Dos de nuestro interés son la aditividad y la divisibilidad.

Definición 1.12. *Sea Y un conjunto de posibilidades de producción. Se dice que una tecnología es aditiva si para todo $y, y' \in Y$:*

$$y + y' \in Y$$

La definición anterior nos señala que cuando dos planes de producción pertenecen al mismo conjunto de posibilidades de producción, la propiedad aditiva asegura que la suma de estos dos planes también pertenece al conjunto. La figura 1.6 representa esta idea.

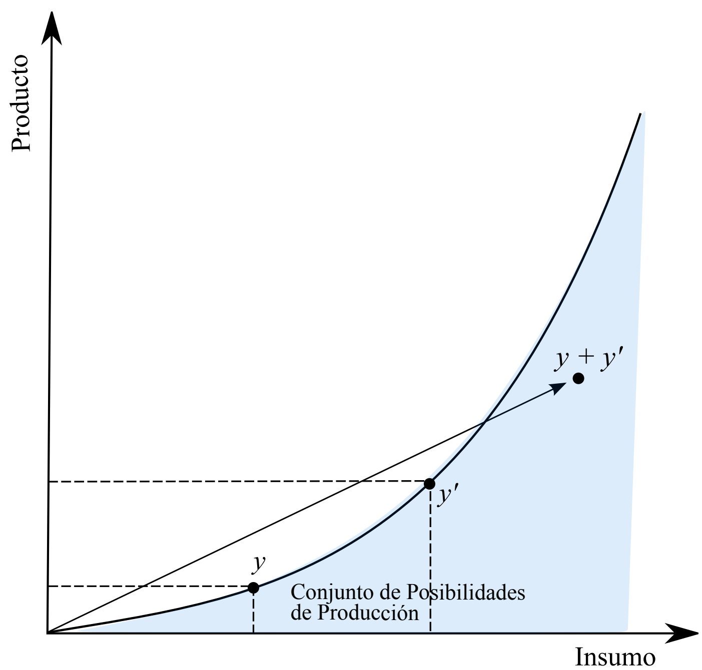

Figura 1.6: Aditividad

Siguiendo en este contexto, a continuación se define la tecnología divisible.

Definición 1.13. *Sea Y un conjunto de posibilidades de producción. Una tecnología es divisible si para todo $y \in Y$ y $0 \leq t \leq 1$, se cumple que:*

$$ty \in Y$$

Esta característica se refiere a que cualquier proporción del plan de producción pertenece al conjunto de posibilidades de producción si el plan de producción pertenece a este mismo conjunto.

Continuando con estas dos definiciones se da la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Si una tecnología es aditiva y divisible, entonces el conjunto de posibilidades de producción Y es convexo y exhibe rendimientos constantes a escala.*

Demostración. Primero se mostrará que Y es convexo. Sea $0 \leq t \leq 1$ y y, $y' \in Y$ entonces por divisibilidad tenemos que $ty \in Y$ y también $(1-t)\,y' \in Y$. Luego por aditividad $ty + (1-t)\,y' \in Y$, con lo que queda demostrado.

Ahora demostraremos que el conjunto de producción debe presentar rendimientos constantes a escala. Sea $t > 0$ entonces sabemos que podemos hallar un número natural n que cumpla la condición $n-1 < t \leq n$, pero $\frac{t}{n} \leq 1$. Ahora bien, por aditividad $ny \in Y$ y por divisibilidad $\frac{t}{n}ny \in Y$, por lo que $ty \in Y$, con lo que esta parte y la proposición quedan demostradas. □

1.5. El Progreso Técnico

La tecnología experimenta cambios cuando hay avances en la productividad y se dispone de nuevos conocimientos técnicos y científicos eficientes.[4] Estos cambios en la tecnología componen el progreso técnico.

El progreso técnico es la introducción de métodos y procedimientos técnicos y científicos a las diferentes ramas de producción que contribuyen al crecimiento de una economía.

Definición 1.14. *Si f es la función de producción con insumos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Se dice que el progreso técnico es aumentador del factor x_i si* $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, Ax_i, \ldots, x_n)$ *para alguna* $i = 1, 2, \ldots, n$ *y* $A > 0$.

En un caso particular en donde $0 < A < 1$, el factor de la i-ésima entrada disminuye en un porcentaje de acuerdo a A, pero se le sigue llamando progreso técnico aumentador del factor x_i

[4]A la vez hay técnicas que son ineficientes y por tanto resulta inútil utilizarlas en la función de producción

1.5.1. Progreso Técnico Neutral

Se han distinguido otros tipos de progreso técnico en los n factores según sus efectos pero es de nuestro interés resaltar uno por su importancia en nuestro estudio, el progreso técnico neutral, que mantendrá invariante el cociente entre los productos marginales de los factores y será explicado a continuación.

Si en $\mathbb{R}^2$ tomamos como factor x_1 al capital K, al factor x_2 a la mano de obra L y la función de producción $Y = f(K, L)$, entonces tendremos dos tipos de progreso técnico neutral:

Progreso Técnico Neutral en el Sentido de Harrod: Este tipo de progreso lo tenemos cuando se hace una variación en la producción al introducir el progreso técnico al factor trabajo. Este aumento fue descrito por Roy Harrod y se le conoce como progreso técnico *neutral en el sentido de Harrod* :

$$f(K,\, AL)$$

donde $A > 0$ es el progreso técnico que aumenta la eficiencia del trabajo.

Progreso Técnico Neutral en el Sentido de Hicks: Se le llama progreso técnico *neutral en el sentido de Hicks* a un incremento en la función de producción cuando el capital y el trabajo son afectados por el progreso técnico $A > 0$:

$$Af(K,\, L)$$

En este tipo de progreso la cantidad de factores utilizados disminuye, aumenta la eficiencia y la productividad de todos los factores utilizados.

Capítulo 2

El Modelo de Solow con Tecnología

El Modelo de Solow es un modelo de crecimiento que tiene orígenes en la teoría económica clásica, fue creado para dar una explicación cuantitativa del crecimiento económico y las variables que inciden en éste. En el presente capítulo analizaremos el Modelo de Solow ampliado con tecnología. Para comenzar estudiaremos los supuestos en que se basa dicho modelo.

2.1. Los supuestos del Modelo

2.1.1. Los Insumos y la Producción

Para el estudio del modelo, trabajaremos con una economía cerrada con un solo bien donde la tierra y los recursos naturales están considerados como dados. Suponemos también que dentro de la economía no hay gobierno, lo que implica que el gasto público es nulo. Asimismo, tampoco hay impuestos ni transferencias.[1]

De hecho, el modelo pone especial atención en la combinación de solamente tres factores,[2] el Capital $K(t)$, el Trabajo $L(t)$ y la Tecnología $A(t)$, para obtener una producción $Y(t)$, donde t denota al tiempo, el cual se considera continuo.[3]

[1] Al no haber impuestos, el valor de la producción es igual a la de la renta.

[2] Los factores pertenecen a los individuos y por lo tanto también la producción.

[3] Es importante hacer notar el supuesto de que las variables están definidas en cada momento del tiempo.

2.1.1.1. El Empleo y la Tecnología

Respecto al factor trabajo, se considera que existe una dotación inicial dada y que crece a una tasa constante n. Por la definición B.1. tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= nL(t) \\ \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} &= n\end{aligned}$$

por la proposición B.1. podemos escribir:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{d\ln L(t)}{dt}$$

y resolviéndola como una ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\ln L(t) &= \int n\,dt \\ &= nt + c\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}L(t) &= e^{nt+c} \\ &= e^{nt}e^{c} \\ &= L(0)\,e^{nt}\end{aligned}$$

Para alguna constante c. En la última igualdad el factor $L(0)$ representa las condiciones iniciales del empleo, ya que en el momento $t = 0$ tenemos que

$$L(0) = e^{0\cdot n}e^{c} = e^{c}$$

En el caso de la tecnología también se asume que ésta crece a una tasa constante g, es decir:

$$\begin{aligned}\dot{A}(t) &= gA(t) \\ \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} &= g\end{aligned}$$

y análogamente al procedimiento anterior obtenemos:

$$A\left(t\right)=A\left(0\right)e^{gt}$$

Lo que expresan las ecuaciones $L\left(t\right)=L\left(0\right)e^{nt}$ y $A\left(t\right)=A\left(0\right)e^{gt}$ es que tanto el trabajo como la tecnología presentan crecimiento exponencial.

2.1.1.2. El Trabajo Efectivo

Se le llama trabajo efectivo al producto de A y L.[4] La tecnología así incorporada es aumentadora de trabajo, es decir Neutral en el Sentido de Harrod y se refiere a la cantidad que se produce con los niveles de trabajo L, y conocimiento A, disponibles.

Como el trabajo efectivo está definido de la forma AL, entonces su tasa de crecimiento es:

$$\frac{\dot{AL}}{AL} = \frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L}=n+g$$

esto por el corolario B.1.

2.1.1.3. El Capital

El Capital $K\left(t\right)$, es una variable de stock ya que expresa el total de capital existente en la economía en el momento t.

Para determinar la trayectoria de crecimiento del stock de capital, nos servimos de algunas identidades de contabilidad nacional.

La producción es destinada al consumo $C\left(t\right)$ o a la inversión $I\left(t\right)$:

$$Y\left(t\right)=C\left(t\right)+I\left(t\right)$$

entonces,

$$I\left(t\right)=Y\left(t\right)-C\left(t\right)$$

por lo que:

[4]Sólo para fines prácticos, a menudo se prescindirá de la notación del tiempo t.

$$S(t) = I(t)$$

donde $S(t)$ es el ahorro nacional. Por otra parte, una proporción del producto es destinada a la inversión, llamémosla s, es decir:

$$s = \frac{S(t)}{Y(t)}$$

$$S(t) = sY(t)$$

de donde,

$$sY(t) = I(t)$$

Como la evolución en el tiempo del stock de capital depende de la inversión y está sometida a una depreciación δ, entonces:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

sustituyendo la inversión en la última ecuación obtenemos:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{2.1}$$

La ecuación 2.1 describe el comportamiento del stock de capital y es de nuestro interés porque nos ayudará a obtener la Ecuación Fundamental del Modelo de Solow la cual veremos más adelante.

2.1.2. La Función de Producción

El modelo de Solow ampliado con tecnología plantea una función de producción que centra su atención en la combinación del capital y del trabajo como fuentes endógenas de crecimiento, la cual precisamos a continuación:

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) \tag{2.2}$$

La función de producción se asume con rendimientos constantes a escala, esto reside en que la economía está lo suficientemente desarrollada como para que las cantidades adicionales de factores incorporados al proceso productivo sean explotadas de la misma manera que las ya existentes.

Como consecuencia de los rendimientos constantes a escala, la función de producción puede expresarse en su forma intensiva.

Si multiplicamos a la función de producción por $\frac{1}{AL}$, entonces por los rendimientos constantes a escala la función de producción toma la forma:

$$\frac{Y}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right)$$

Ahora, sea $k(t) = \frac{K}{AL}$ la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo y $y(t) = \frac{Y}{AL}$ la cantidad de producto por unidad de trabajo efectivo, entonces la forma intensiva de la función de producción por unidad de trabajo efectivo está dada por:

$$y = f(k)$$

Esta forma intensiva muestra que la producción por unidad de trabajo efectivo depende solamente de la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo y no del tamaño de la economía. La forma que toma la gráfica de la función de producción se muestra en la figura 2.1.

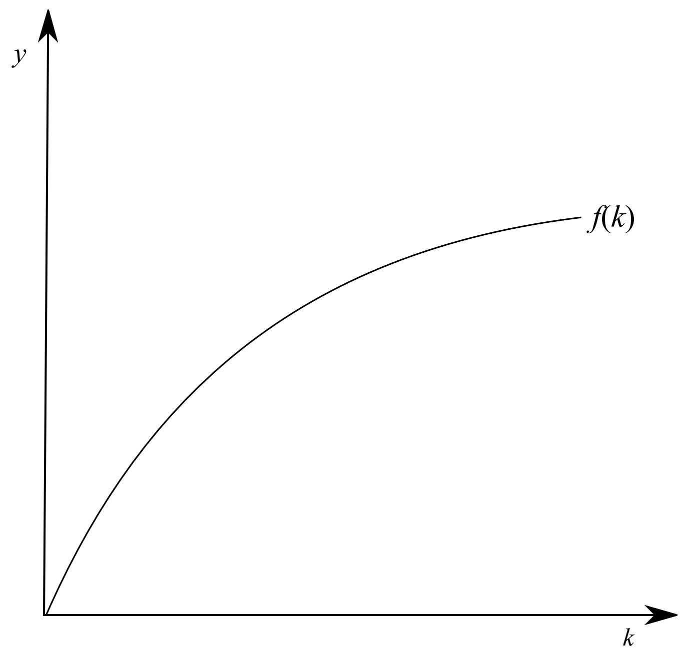

Figura 2.1: Forma Intensiva de la Función de Producción
La gráfica de la función de producción muestra cómo es determinada la producción por trabajador efectivo $y = f(k)$, por el capital k.

Recordando, el producto marginal del capital hace referencia al aumento de la producción, que se consigue a través de añadir una unidad adicional de alguno de los factores productivos, en este caso el capital, es decir: $\frac{\partial Y}{\partial K}$. En este sentido, la siguiente proposición nos ayuda a ver que es posible expresar la productividad marginal del capital en términos de y.

Proposición 2.1. *La Productividad Marginal del Capital (PMgK) es* $f'(k)$.[5]

Demostración. Como $F(K, AL) = ALf\left(\frac{K}{AL}\right)$, entonces

$$\frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} = ALf'\left(\frac{K}{AL}\right)\left(\frac{1}{AL}\right)$$

[5] Recordando, el producto marginal del capital hace referencia al aumento de la producción, que se consigue a través de añadir una unidad adicional de alguno de los factores productivos, en este caso el capital, es decir: $\frac{\partial Y}{\partial K}$.

por lo que

$$\frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} = f'(k)$$

$\square$

A continuación se muestra la gráfica de la Productividad Marginal del Capital $f'(k)$:

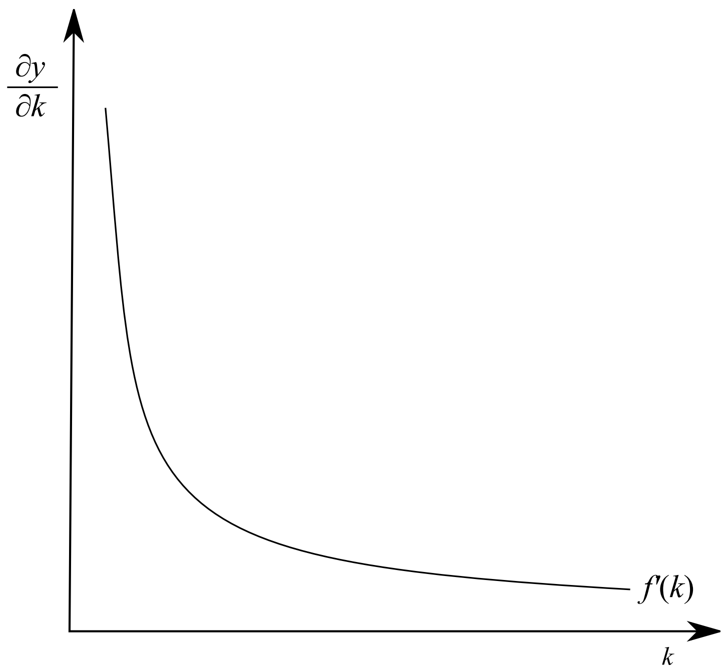

Figura 2.2: Productividad Marginal del Capital por unidad de trabajo efectivo.

Conforme k crece, la función de producción se va haciendo más plana, por esto el PMgK es decreciente tal y como se muestra en la gráfica.

La forma intensiva de la producción $f(k)$ cumple tanto con las condiciones de Inada como con las siguientes condiciones:[6]

1. $f(0) = 0$, a esta condición se le conoce como gratuidad y significa que es imposible producir mercancía sin ningún insumo.

[6]Para las condiciones de Inada véase el Apéndice C.

2. $f'(k) > 0$, la productividad marginal del capital siempre es positiva.

3. $f''(k) < 0$, la productividad marginal del capital disminuye a medida que la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo aumenta.

El resultado de estas condiciones es que la evolución de la economía nunca diverge.

2.2. Ecuación Fundamental del Modelo

El papel que juega el stock de capital por unidad de trabajo efectivo $k(t)$, es importante para el cálculo de *"La Ecuación Fundamental del Modelo de Solow"*, y dado que la economía está en función del tiempo es imprescindible desistir de la tasa de cambio del stock de capital por unidad de trabajo efectivo $\dot{k}(t)$:

$$\dot{k}(t) = \frac{dk(t)}{dt}$$

recordando, $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)\,L(t)}$, entonces por la regla de la cadena tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{A(t)\;L(t)\;\dot{K}(t) - K(t)\left(A(t)\;\dot{L}(t) + L(t)\;\dot{A}(t)\right)}{\left(A(t)\;L(t)\right)^2} \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)\;L(t)} - \frac{K(t)\;\dot{L}(t)}{A(t)\;L(t)^2} - \frac{K(t)\;\dot{A}(t)}{A(t)^2\;L(t)} \end{aligned}$$

sustituyendo la ecuación 2.1, $\dot{k}(t)$ y a las tasas de crecimiento del trabajo y la tecnología tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{sY(t) - \delta K(t)}{A(t)\;L(t)} - nk(t) - gk(t) \\ &= \frac{sY(t)}{A(t)\;L(t)} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo la forma intensiva de la función de producción en la ecuación anterior:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta) k(t) \tag{2.3}$$

A esta expresión se le llama la *"Ecuación fundamental del modelo de Solow"*. El primer término precisa la inversión realizada por unidad de trabajo efectivo, donde $s \in (0,1)$ es la proporción del producto que se destina a la inversión. El término $(n + g + \delta)$ indica la inversión de reposición: cuando se produce un incremento en el ritmo de crecimiento, ya sea de parte del empleo o la tecnología, entonces para mantener $k(t)$ invariante es necesario aumentar la inversión a la misma tasa, es decir $(n + g)$. Por último, $\delta k(t)$ repone el capital que se deprecia.

En la primera gráfica de la figura 2.3 se muestra la inversión realizada $sf(k)$ y la inversión de reposición $(s + g + \delta) k$ en función de k, alineada en k^* con el diagrama de fases de $\dot{k}$ en función de k. En el origen $\dot{k}$ es cero y conforme va creciendo la diferencia entre la inversión realizada y la inversión de reposición es cada vez menor hasta llegar a igualarse: el punto k^*.

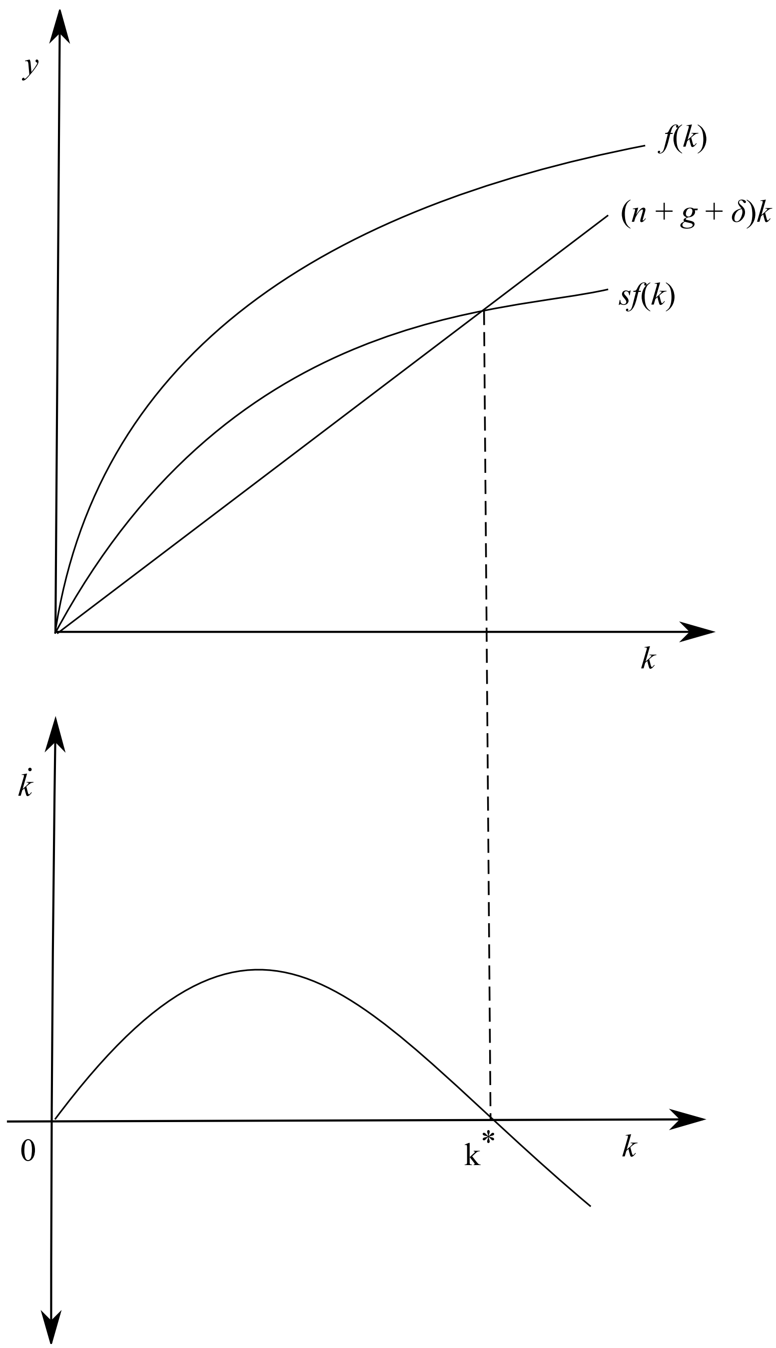

Figura 2.3: Representación de la Ecuación Fundamental.

Naturalmente tenemos que:

1. Si $sf(k(t)) > (n+g+\delta)k(t)$, k aumenta.
2. Si $sf(k(t)) < (n+g+\delta)k(t)$, k disminuye.
3. Si $sf(k(t)) = (n+g+\delta)k(t)$, k permanece constante.

El tercer punto donde se iguala el ahorro per cápita $sf(k(t))$, y la inversión de mantenimiento $(n+g+\delta)k(t)$, es especial y estudiaremos este caso detenidamente en la siguiente sección.

2.2.1. La Senda de Crecimiento Sostenido

Cuando la diferencia entre la inversión realizada y la de reposición es cero $(sf(k(t)) = (n+g+\delta)k(t))$, la economía alcanza un equilibrio y si ocurre llamamos a este fenómeno *estado estacionario* (en el stock de capital por unidad de trabajo efectivo), designándole a este punto la letra k^*, como se muestra en la figura 2.3.

Para cualquier valor $k < k^*$, la inversión realizada es superior a la de reposición y esto implica que $\dot{k}$ sea positiva y por tanto k está creciendo para así llegar al nuevo valor k^*. Por el contrario, si $k > k^*$, $\dot{k}$ es negativa y decrece. Consecuentemente, k converge a k^* independientemente de cuál sea su posición inicial. Supondremos desde ahora el estado estacionario $k = k^*$.

Ahora bien, sabemos que $\frac{\dot{AL}}{AL} = n+g$ y como $K = ALk$ y $k = k^*$, entonces tenemos que en el estado estacionario,

$$\frac{\dot{K}}{K} = n+g$$

Ya que k es constante.

Dado que todos nuestros factores aumentan a una tasa $n+g$ y gracias al supuesto de rendimientos constantes a escala,[7] la producción Y también crecerá a la misma tasa es decir,

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = n+g$$

[7]Por definición de rendimientos constantes a escala, sabemos que los factores se incrementan en $n+g$, entonces la producción también se debe incrementar en la misma proporción.

Finalmente, por el Corolario B.2, si $Z = \frac{K}{L}$ entonces:

$$\frac{\dot{Z}}{Z} = g$$

esto es, el capital por trabajador $\frac{K}{L}$, crece a una tasa g, y análogamente, la producción por trabajador $\frac{Y}{L}$, crece a una tasa g.

En definitiva, independientemente del origen de k, la economía converge hacia una *senda de crecimiento sostenido* (k converge a k^*), esto es, una situación en la que todas y cada una de las variables crecen a una tasa constante. En estado estacionario, la tasa de crecimiento de la producción por trabajador depende exclusivamente de la tasa de crecimiento del progreso técnico.

2.3. Tasa de Ahorro y Crecimiento

En esta sección examinaremos cómo una variación de la tasa de ahorro determina los niveles de la producción y del consumo.[8]

La tasa de ahorro es el porcentaje de la producción que se destina al ahorro $\left(s = \frac{S(t)}{Y(t)}\right)$ y es determinante para el crecimiento de una economía puesto que una alta tasa de ahorro garantiza que existan recursos suficientes para invertir, por lo cual nos interesa saber qué sucede al variar la tasa de ahorro. Sin embargo, esta tasa se supone que es un parámetro exógeno y que está determinada por la política económica.

Para este apartado supondremos que tratamos con una economía tipo Solow que se encuentra sobre su senda de crecimiento sostenido y donde s está aumentando de forma permanente.

[8] La tasa de ahorro es un parámetro exógeno que está determinado por la política económica.

2.3.1. Efectos en la Producción

Analicemos ahora qué pasa con la producción cuando hay un cambio en la tasa de ahorro:

Como lo podemos notar en la figura 2.4, al incrementar s (de s_0 a s_1) la curva de inversión realizada se desplaza hacia arriba, de manera que k^* también aumenta, llamemos k_0^* al punto antes de que haya incrementado s, y k_1^* al nuevo estado estacionario.

Gracias al aumento de s, inicialmente k no alcanza inmediatamente a k_1^*. En un primer momento $k = k_0^*$, y en este punto, la inversión realizada es mayor que la inversión de reposición esto es, se están dedicando más recursos a la inversión de los necesarios para mantener constante k (hay un exceso de ahorro) y por lo anterior $\dot{k}$ es positiva. Esto explica que k comience a aumentar y que siga haciéndolo hasta alcanzar el nuevo valor de k^* (es decir, k_1^*), a partir del cual se mantiene constante; por otro lado, si $k > k_1^*$ sucede que hay un déficit de ahorro y k tiene que disminuir hasta el punto k_1^*.

Veamos ahora lo que pasa con la producción por trabajador $\frac{Y}{L}$. Si k es constante, $\frac{Y}{L}$ tiene la misma tasa de crecimiento que la tecnología, es decir g y sabemos que $\frac{Y}{L} = Af(k)$. Luego, si incrementa s, la producción por trabajador también lo hará porque A y $f(k)$ crecen, y su tasa será mayor que g hasta el punto donde alcance a k_1^* donde permanecerá constante y volverá a depender exclusivamente de A y su tasa de crecimiento volverá a ser g.

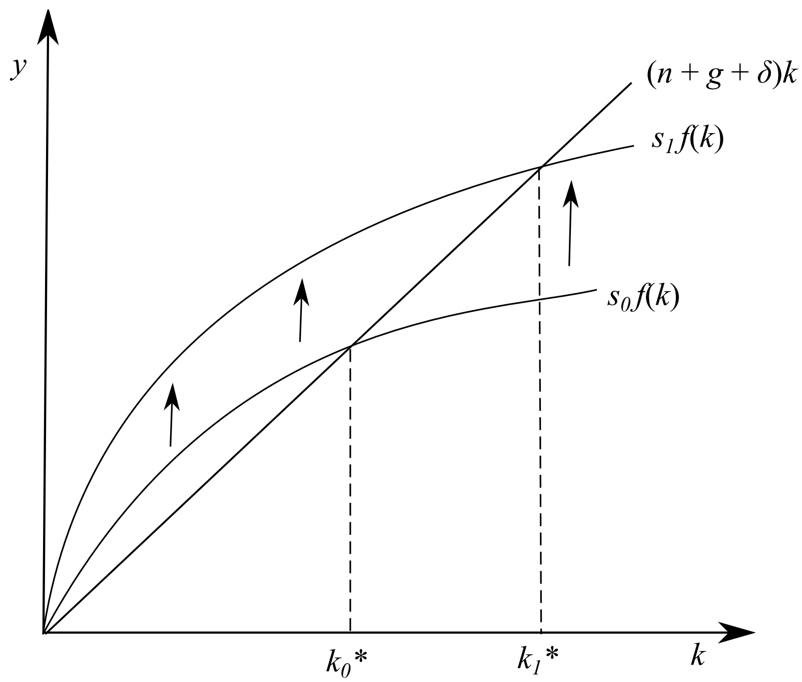

Figura 2.4: Efectos de un aumento de la tasa de ahorro en la producción.
Al aumentar la tasa de ahorro s, la inversión realizada es desplazada hacia arriba, ya que una cantidad superior en el ahorro crea un aumento en la inversión. En el punto k_0^* la inversión realizada es mayor que la inversión de reposición, esto provoca que el stock de capital se desplace hasta k_1^*.

Después de todo, un incremento permanente de la tasa de ahorro genera un incremento temporal en la tasa de crecimiento de la producción por trabajador: aunque k aumenta durante un determinado período finalmente llega a un punto en el que todo el ahorro adicional es destinado en su totalidad a mantener ese mayor nivel de k. También un cambio en la tasa de ahorro altera la senda de crecimiento sostenido de la economía y por tanto la producción por trabajador, sin embargo no afecta a su tasa de crecimiento en el nuevo estado.

2.3.2. Efectos en el Consumo

El bienestar de las familias depende más del consumo que de algún otro parámetro. Por ello, analizaremos el impacto de los cambios en la tasa de ahorro en el consumo.

El consumo por unidad de trabajo efectivo $c = \frac{C}{AL}$, es la proporción de la producción que no se ahorra, si la tasa de ahorro es s, la proporción destinada al consumo debe ser $1 - s$ multiplicada por la producción:[9]

$$\begin{aligned} c &= f(k)(1-s) \\ &= f(k) - sf(k) \end{aligned}$$

En el estado estacionario $sf(k) = (n+g+\delta)k$, por lo tanto el consumo adquiere la forma:

$$c^* = f(k^*) - (n+g+\delta)k^* \tag{2.4}$$

La igualdad anterior expresa que en la senda de crecimiento sostenido, el consumo es la distancia entre la producción y la inversión de reposición. La siguiente figura representa esta idea.

[9]El consumo es el gasto de las familias en bienes o servicios. Este parámetro es endógeno y los factores que la determinan son: el ingreso del consumidor, su riqueza y las tasas de interés.

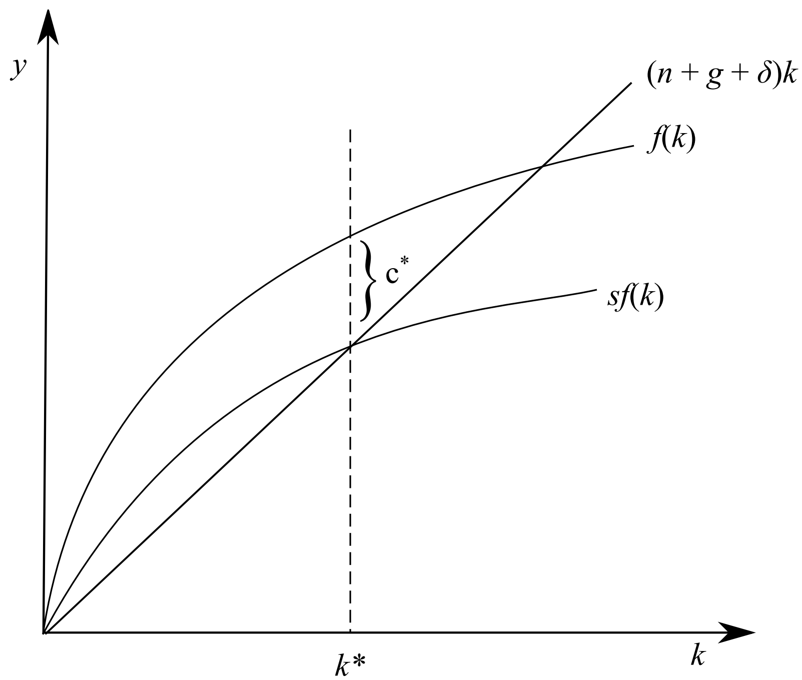

Figura 2.5: Representación del consumo.

Como k^* depende de s, n, g y δ, podemos escribir $k^* = k^*(s, n, g, \delta)$. De esta manera, la variación de consumo respecto a un cambio en la tasa de ahorro será:

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left[f'(k^*(s, n, g, \delta)) - (n+g+\delta)\right] \frac{\partial k^*(s, n, g, \delta)}{\partial s}$$

El último término $\frac{\partial k^*(s, n, g, \delta)}{\partial s}$, es siempre positivo pues un incremento en la tasa de ahorro se traduce siempre en un incremento en k^*.

A continuación mostraremos como afecta s al consumo. Como s tiene influencia sobre k^*, entonces veremos cómo afecta una variación de k^* en el consumo.

Sabemos que la pendiente de la recta de la inversión de reposición y de la inversión realizada son $(n+g+\delta)$ y $f'(k)$ respectivamente. Si k aumenta, la inversión de reposición por unidad de trabajo efectivo se incrementa en $(n+g+\delta)$ multiplicado por la variación experimentada por k para que el incremento pueda mantenerse. Conscuentemente, puede ocurrir dos cosas:

Como se muestra en la figura 2.6, si $f'(k^*) < (n+g+\delta)$, el producto adicional que se obtiene gracias al aumento de k no resulta suficiente para mantener el nuevo stock de capital, en cuyo caso el consumo debe disminuir. Por otra parte, si $f'(k^*) > (n+g+\delta)$, existe un exceso de producto, por tanto el consumo debe elevarse para mantener el estado estacionario, esta idea está representada en la figura 2.7.

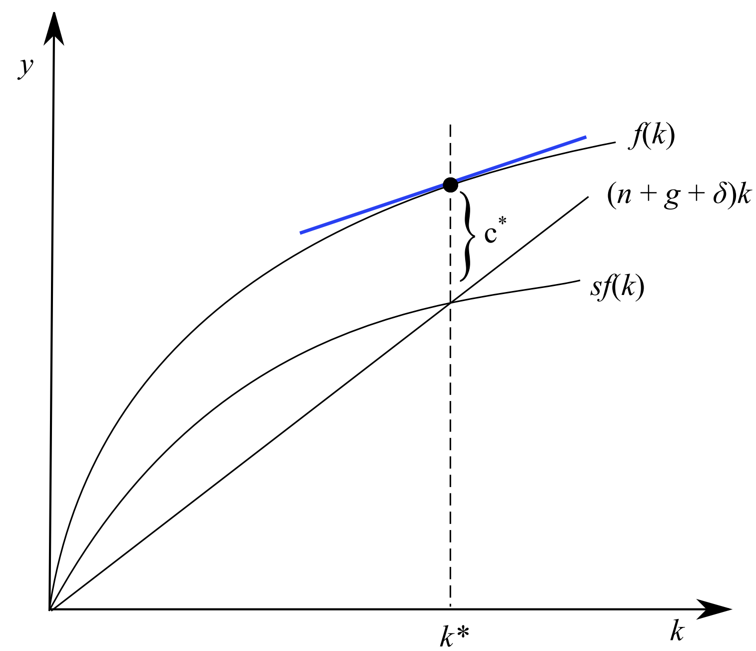

Figura 2.6: Gráfica del consumo cuando $f'(k^*) < (n+g+\delta)$.

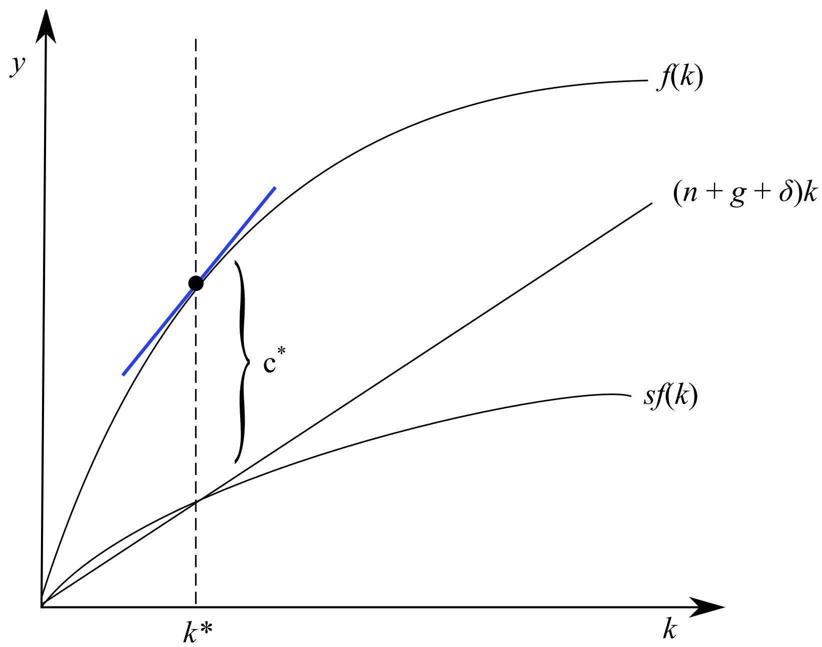

Figura 2.7: Gráfica del consumo cuando $f'(k^*) > (n+g+\delta)$.

El último caso lo tenemos cuando $f'(k^*) = (n+g+\delta)$, este asunto se tratará detenidamente a continuación.

2.3.2.1. La Regla de Oro

Como se había mencionado que el bienestar de las familias depende del consumo, nos interesa ver la manera de cómo llevar la economía a un consumo superior y para hacerlo tenemos que maximizar el consumo respecto a k^*, es decir:

$$\frac{\partial c_{oro}}{\partial k^*} = 0$$

$$f'(k^*) - (n+g+\delta) = 0$$

$$f'(k^*_{oro}) = (n+g+\delta) \tag{2.5}$$

La siguiente gráfica muestra la distancia donde se maximiza el consumo en el estado estacionario al cual llamamos c^*_{oro}, este punto debe de cumplir la igualdad $f'\left(k^*_{oro}\right) = (n + g + \delta)$.

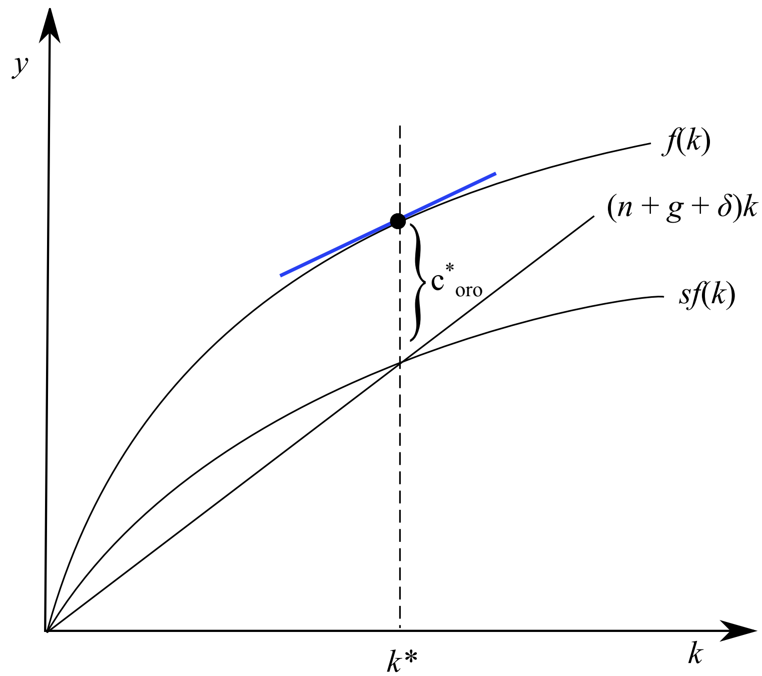

Figura 2.8: Gráfica de la Regla de Oro: $f\,\acute{}\,(k^*) = (n + g + \delta)$.

Por un lado, si tenemos un stock de capital por debajo del estado estacionario de la regla de oro, esto nos conduce a un aumento del capital del estado estacionario hacia k^*_{oro}. Por otro lado, si contamos con un stock de capital por encima del estado estacionario de la regla de oro, el aumento del capital del estado estacionario reduce al stock de capital hasta llegar a k^*_{oro}.

A la ecuación 2.5 se le llama *La regla de oro* y expresa la pendiente de la curva, donde la distancia entre las curvas $f(k^*)$ y $(n + g + \delta)\,k^*$ es la máxima en el estado estacionario y determina el consumo oro c^*_{oro}.

2.3.3. Efectos en la Producción en el largo plazo

Una vez que hemos visto los efectos de la tasa de ahorro en el corto plazo, estudiaremos ahora lo referente a la evolución del modelo con un cambio en la tasa de ahorro respecto a la producción en el largo plazo, es decir $\frac{\partial y^*}{\partial s}$.[10]

Como en el corto plazo, comenzaremos analizando los cambios que se obtienen variando k^*. Para saber cuál es la influencia sobre la producción, primero estudiaremos los efectos de $\frac{\partial k^*}{\partial s}$, tenemos que:

$$sf\left(k^*\right) = \left(n+g+\delta\right)k^*$$

Nuevamente k^* depende de s (y de $n,\ g,$ y δ) por lo que derivando la igualdad anterior respecto a s tenemos:

$$sf'\left(k^*\right)\frac{\partial k^*}{\partial s} + f\left(k^*\right) = \left(n+g+\delta\right)\frac{\partial k^*}{\partial s}$$

Reescribiéndola obtenemos:

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f\left(k^*\right)}{\left(n+g+\delta\right) - sf'\left(k^*\right)} \tag{2.6}$$

Ahora podemos continuar calculando $\frac{\partial y^*}{\partial s}$, sabemos que:

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'\left(k^*\right)\frac{\partial k^*}{\partial s} \tag{2.7}$$

Sustituyendo 2.6 en 2.7:

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{f'\left(k^*\right)\ f\left(k^*\right)}{\left(n+g+\delta\right) - sf'\left(k^*\right)} \tag{2.8}$$

Con el fin de interpretar mejor 2.8, implementaremos el factor $\frac{s}{y^*}$ para obtener una elasticidad:[11]

$$\begin{aligned}
\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} &= \frac{s}{f\left(k^*\right)} \cdot \frac{f'\left(k^*\right)\ f\left(k^*\right)}{\left(n+g+\delta\right) - sf'\left(k^*\right)} \\
&= \frac{\left(n+g+\delta\right)\ k^*\ f'\left(k^*\right)}{f\left(k^*\right)\left[\left(n+g+\delta\right) - \left(n+g+\delta\right)\ k^*\left(f'(k^*)/f(k^*)\right)\right]}
\end{aligned}$$

[10]Se estudiará este cambio en el estado estacionario.

[11]Ver apéndice C para elasticidad.

$$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{k^*\left(f'(k^*)/f(k^*)\right)}{1-k^*\left(f'(k^*)/f(k^*)\right)} \tag{2.9}$$

El factor $k^*f'(k^*)$ es la cuantía total percibida por el capital (por unidad de trabajo efectivo) en $k = k^*$. Ahora, sea $\alpha_K(k^*) = k^*\left(f'(k^*)/f(k^*)\right)$, la ecuación 2.9 toma la forma[12]:

$$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)} \tag{2.10}$$

A la expresión 2.10 se le llama elasticidad de la producción con respecto al ahorro y, el nuevo factor $\alpha_K(k^*)$ es la elasticidad de la producción con respecto al capital en $k = k^*$ esto es, la participación del capital en la producción total.

Un valor inferior de $\alpha_K(k^*)$ hace que los efectos de la tasa de ahorro sebre la producción sean menores por dos razones. En primer lugar, porque supone que la pendiente de la curva de inversión realizada $sf(k)$, comienza a decrecer muy pronto, de modo que un desplazamiento de la curva hacia arriba hace variar relativamente poco su intersección con la curva de inversión de reposición. Y en segundo lugar, porque cuando $\alpha_K(k^*)$ es pequeño, los efectos sobre y^* de un cambio en k^* son modestos: Romer(2001).

[12]Esto se cumple siempre y cuando los mercados sean competitivos y no haya externalidades.

2.4. Ritmo de Convergencia

Si el punto que queremos alcanzar es $k = k^*$, nos interesa saber con qué ritmo se acerca el stock de capital por unidad de trabajo efectivo al estado estacionario.[13]

Para nuestro objetivo nos aproximamos por medio de una serie de Taylor de primer orden de $\dot{k}(k)$ alrededor de $k = k^*$,[14] de esta manera tenemos:[15]

$$\dot{k} \approx \left[\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \Big|_{k=k^*} \right] (k - k^*) \tag{2.11}$$

Sea $\lambda = -\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}\Big|_{k=k^*}$, entonces la ecuación 2.11 puede expresarse como:

$$\dot{k} \approx -\lambda (k - k^*) \tag{2.12}$$

La igualdad 2.12 indica que k se acerca a k^* a una velocidad proporcional a la distancia que la separa de k^* en algún punto cercano a k^*.

Linealizando a 2.12 de $\dot{k}$ alrededor de $k = k^*$ y como k converge a k^*, tenemos:

$$k(t) \approx k^* + e^{-\lambda t} [k(0) - k^*] \tag{2.13}$$

Donde $k(0)$ es el valor inicial de k. La ecuación 2.13 señala que la tasa de crecimiento de $k(t) - k^*$ es constante y aproximadamente igual a $-\lambda$.

Para saber el ritmo de convergencia, nuestro objetivo es hallar λ. Diferenciando la ecuación fundamental del modelo de $\dot{k}$ con respecto de k y evaluándola en $k = k^*$:

[13]Como en las secciones anteriores, nos centraremos en k para ver el impacto en la producción por unidad de trabajo efectivo y.

[14]Recordemos que para una función $f(x)$, la aproximación del $n-$ésimo orden de la función es: $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$.

[15]Nótese que como $\dot{k}$ depende de k podemos escribir $\dot{k}(k)$.

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -\left.\frac{\partial \dot{k}\,(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*} \\
&= -\left[sf\,'\,(k^*) - (n+g+\delta)\right] \\
&= (n+g+\delta) - sf\,'\,(k^*) \\
&= (n+g+\delta) - \frac{(n+g+\delta)\,k^* f\,'\,(k^*)}{f\,(k^*)} \\
&= \left[1-\alpha_K\,(k^*)\right](n+g+\delta)
\end{aligned}
$$

La última expresión indica que k converge hacia su valor correspondiente al estado estacionario $k = k^*$ a una tasa:

$$
\left[1-\alpha_K\,(k^*)\right](n+g+\delta) \tag{2.14}
$$

Capítulo 3

El Residuo de Solow

Ahora que tenemos las herramientas necesarias, el propósito de este capítulo será presentar y analizar las dos formas tradicionales de estimación del residuo de Solow. Vale la pena señalar que este residuo es visto como una forma indirecta para calcular la serie correspondiente al progreso técnico.

La primera de esas técnicas de estimación consiste en utilizar una función de producción con progreso técnico neutral en el sentido de Hicks, tal como lo hiciera Solow en su artículo seminal de 1957, mientras que en la segunda se utiliza una función de producción con progreso técnico neutra en el sentido de Harrod.

3.1. El residuo de Solow con una función de producción con progreso técnico neutral en el sentido de Hicks

En su artículo seminal de 1957 el economista norteamericano Robert M. Solow se propuso averiguar cómo los insumos contribuyen al crecimiento de la producción. El residuo de Solow es interpretado intuitivamente como la fracción de crecimiento económico atribuible al progreso técnico.

Solow parte de una función de producción agregada de la forma:

$$Y = F\left(K, L; t\right) \tag{3.1}$$

donde las variables K y L representan el stock de capital y el trabajo en unidades de trabajadores respectivamente. La tercera variable t representa el tiempo, con lo cual se permite que haya progreso técnico en el modelo.[1]

Por comodidad, Solow supone que el cambio técnico es neutral en el sentido de Hicks es decir, que las tasas marginales de sustitución permanecen inalteradas y simplemente la producción aumenta o disminuye de acuerdo a la cantidad de insumos. En consecuencia, la función de producción toma la siguiente forma:

$$Y = A(t)\, f(K, L) \tag{3.2}$$

donde $A(t)$ es el factor multiplicativo que mide los efectos acumulados de los cambios en el tiempo. Diferenciando la ecuación 3.2 con respecto al tiempo y multiplicándola por el factor $\frac{1}{Y}$ obtenemos:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + A\frac{\partial f}{\partial K} \cdot \frac{\dot{K}}{Y} + A\frac{\partial f}{\partial L} \cdot \frac{\dot{L}}{Y} \tag{3.3}$$

Sean $w_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y}$ y $w_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}$ la participación relativa del capital y del trabajo en la producción respectivamente, entonces la ecuación 3.3 puede reescribirse de la forma:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + w_k\frac{\dot{K}}{K} + w_L\frac{\dot{L}}{L} \tag{3.4}$$

Despejando $\frac{\dot{A}}{A}$ de la ecuación 3.4 obtenemos:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(w_k\frac{\dot{K}}{K} + w_L\frac{\dot{L}}{L}\right) \tag{3.5}$$

Esta última ecuación es la que Solow (1957), propuso para estimar el progreso técnico y que actualmente se conoce como *Residuo de Solow.*

[1] En los términos de Solow, cualquier factor que provoque cambios en la función de producción es considerado como progreso técnico. En particular se refiere a factores como la educación de la fuerza laboral.

3.1.1. Construcción del Residuo de Solow en presencia de Rendimientos Constantes a Escala

En cuanto a los rendimientos a escala, Solow notó que cuando se asumen rendimientos constantes a escala la suma de la remuneración de los factores capital y trabajo deber ser igual 1. Esta observación la presentamos a continuación siguiendo a Mankiw (2001), por lo que partimos de una función de producción sin tecnología para construir paso a paso el residuo de Solow con rendimientos constantes a escala.

Tomamos una función de producción de la forma:

$$Y = F(K, L)$$

que cumple los siguientes supuestos:

1. $F(K, L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \cdot L +$ Beneficio económico.[2]

2. Rendimientos constantes a escala (homogénea de grado 1).

3. Es diferenciable.

El primer supuesto implica que el beneficio económico está dado por la siguiente ecuación:

$$\text{Beneficio económico} = F(K, L) - \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \cdot K - \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \cdot L$$

y por los supuestos 2 y 3 es posible enunciar la siguiente proposición:

Proposición 3.1. *Si una función de producción es diferenciable y además tiene rendimientos constantes a escala entonces el beneficio económico es idénticamente cero.*

Demostración. Por hipótesis la función de producción tiene rendimientos constantes a escala, es decir cumple que:

$$F(tK, tL) = tF(K, L)$$

[2]Se define el beneficio económico como el ingreso que le queda a los propietarios de una empresa una vez retribuidos todos los factores de la producción.

Entonces por el teorema A.1, diferenciando la función de producción con respecto a t obtenemos:

$$F(K,L) = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} \cdot K + \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} \cdot L$$

Por lo tanto el beneficio económico es igual al cero. $\square$

Gracias a la proposición 3.1 podemos escribir nuestra función de producción como sigue:

$$F(K,L) = (PMgK \cdot K) + (PMgL \cdot L)$$

Donde los términos $(PMgK \cdot K)$ y $(PMgL \cdot L)$ se refieren al productor marginal del capital y del empleo respectivamente.

Si suponemos una variación tanto en el capital como en el empleo en una cantidad $\dot{K}$ y $\dot{L}$ respectivamente, nuestra función de producción se convierte en

$$\dot{Y} = \left(PMgK \cdot \dot{K}\right) + \left(PMgL \cdot \dot{L}\right) \tag{3.6}$$

Así pues, el término $\left(PMgK \cdot \dot{K}\right)$ representa el incremento provocado por el aumento del capital, mientras que $\left(PMgL \cdot \dot{L}\right)$ indica el incremento causado por el aumento en el empleo es decir, la ecuación 3.6 nos muestra como se atribuye el crecimiento a cada factor.

Podemos convertir la ecuación 3.6 a través de manipulaciones algebraicas sencillas en una equivalente:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \left(\frac{PMgK \cdot K}{Y}\right)\frac{\dot{K}}{K} + \left(\frac{PMgL \cdot L}{Y}\right)\frac{\dot{L}}{L} \tag{3.7}$$

Del primer término, el multiplicador $\left(\frac{PMgK \cdot K}{Y}\right)$ es la participación del capital en la producción total. Por otro lado, el producto marginal del empleo es el salario real, por lo que $PMgL \cdot L$ es la remuneración total. Por lo tanto, el término $\left(\frac{PMgL \cdot L}{Y}\right)$ es la participación de la remuneración del empleo en el producto.

Después de esto debemos probar que, como Solow señalara, la suma de la participación del capital y del trabajo da como resultado la unidad.

Proposición 3.2. *Bajo los supuestos de la proposición 3.1, la suma de los términos* $\left(\frac{PMgK \cdot K}{Y}\right)$ y $\left(\frac{PMgL \cdot L}{Y}\right)$ *es igual a la unidad.*

Demostración. Nótese que $\left(\frac{PMgK \cdot K}{Y}\right) + \left(\frac{PMgL \cdot L}{Y}\right) = 1$ si y sólo si $Y = (PMgK \cdot K) + (PMgL \cdot L)$, lo cual es cierto por la proposición 3.1. $\square$

La proposición anterior nos permite expresar la ecuación como:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}}{L} \tag{3.8}$$

Donde $\alpha \in (0, 1)$. Esta última ecuación nos dice que para estudiar el crecimiento de la producción es necesario que intervengan las tasas de crecimiento de los factores de K y L.

Para obtener el residuo, tenemos que a la ecuación 3.8 le agregamos el progreso técnico $\frac{\dot{A}}{A}$, lo cual puede escribirse como:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A} \tag{3.9}$$

Se deduce inmediatamente de la ecuación 3.9 que la tasa de crecimiento de la productividad total de los factores se puede calcular como un residuo, resultando:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}}{L}\right) \tag{3.10}$$

Lo cual nos da como resultado el *residuo de Solow* en presencia de rendimientos constantes a escala.

3.2. El residuo de Solow con una función de producción con progreso técnico neutral en el sentido de Harrod

Para esta sección partimos de una función de producción de la forma:

$$Y = F\left(K,\, AL\right)$$

La cual es particularmente importante por ser la función con la que se presentó el modelo de Solow en el capítulo anterior. Así pues, asumiendo que esta función es diferenciable y usando la regla de la cadena tenemos que:

$$\dot{Y} = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \dot{K} + \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \dot{L} + \frac{\partial Y}{\partial A} \cdot \dot{A} \tag{3.11}$$

donde $\frac{\partial Y}{\partial L} = \left[\frac{\partial Y}{\partial (AL)}\right] A$ y $\frac{\partial Y}{\partial A} = \left[\frac{\partial Y}{\partial (AL)}\right] L$. Si dividimos ambos lados de la expresión 3.11 por Y y reescribimos los términos del lado derecho, obtenemos:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{K}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{\dot{K}}{K} + \frac{L}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{\dot{L}}{L} + \frac{A}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial A} \cdot \frac{\dot{A}}{A}$$

reescribiendo esta ecuación obtenemos:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha_K \frac{\dot{K}}{K} + \alpha_L \frac{\dot{L}}{L} + R \tag{3.12}$$

Donde $\alpha_L = \frac{L}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial L}$ es la elasticidad de la producción con respecto al trabajo; $\alpha_K = \frac{K}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial K}$ es la elasticidad de la producción con respecto al capital y $R = \frac{A}{Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial A} \cdot \frac{\dot{A}}{A}$.

De acuerdo a lo anterior, si asumimos rendimientos constantes a escala y restamos $\frac{\dot{L}}{L}$ de ambos lados de la ecuación 3.12 para tener la igualdad en términos de la elasticidad del capital. Utilizando el hecho de que $\alpha_K + \alpha_L = 1$ obtenemos la tasa de crecimiento de la producción por trabajador:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha_K \left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}\right] + R \tag{3.13}$$

Por lo que el residuo de Solow R se puede despejar a de la ecuación 3.13, esto es:

$$R = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} - \alpha_K \left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \right] \tag{3.14}$$

3.3. La Función de Producción Cobb – Douglas

En esta sección presentamos la forma de obtener el residuo de Solow a través de una función en particular: la Cobb-Douglas, demostrando primero que ya sea con progreso técnico neutral en el sentido de Harrod o en el sentido de Hicks, cumple con los supuestos del modelo de Solow presentado en el capítulo 2.

3.3.1. La Función de Producción Cobb – Douglas con progreso técnico en el sentido de Harrod y el modelo de Solow

Sabemos que la función de producción con progreso técnico en el sentido de Harrod es de la forma:

$$Y = F(K, AL)$$

Por lo que usando la función de producción Cobb–Douglas toma la forma

$$Y = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha}$$

Donde $\alpha \in (0, 1)$. Un requisito para que una función pueda ser utilizada en el modelo de Solow es que cumpla con los rendimietos constantes a escala, lo cual demostramos a continuación.

Proposición 3.3. *La función de producción Cobb-Douglas de la forma* $Y = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha}$ *tiene rendimientos constantes a escala.*

Demostración. Debemos demostrar que la función de producción cumple:

$$tf(\mathbf{x}) = f(t\mathbf{x})$$

tenemos que,

$$
\begin{aligned}
F(tK, tAL) &= (tK)^{\alpha}(tAL)^{1-\alpha} \\
&= t^{\alpha}K^{\alpha}\cdot t^{1-\alpha}(AL)^{1-\alpha} \\
&= tF(K, AL)
\end{aligned}
$$

con lo que queda demostrado. □

Para obtener la forma intensiva de la función de producción Cobb-Douglas, obsérvese que:

$$
\frac{Y}{AL} = f\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha}
$$

renombrando $k = \frac{K}{AL}$, la forma intensiva se puede reescribir como:

$$
f(k) = k^{\alpha} \tag{3.15}
$$

La cual cumple con las condiciones de Inada, esto es: $\lim\limits_{k\to 0}\alpha k^{\alpha-1} = \infty$ *y* $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha k^{\alpha-1} = 0$ *ya que* $\alpha \in (0,1)$ *y* $k > 0$. Cuyas condiciones son suficientes para asegurar que la Función de Producción Cobb – Douglas con progreso técnico en el sentido de Harrod no sea divergente.

1. También cumple con la gratuidad: $f(0) = 0$.

2. La productividad marginal del capital por trabajador efectivo es positiva: $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} > 0$.

3. La productividad marginal disminuye a medida que la cantidad del capital por trabajador efectivo aumenta: $f'(k) = -\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0$.

Con lo que hemos probado que cumple con los supuestos del modelo de Solow, por lo tanto una funcion Cobb-Douglas con progreso técnico en el sentido de Harrod se puede usar para el desarrollo de tal modelo.

3.3.1.1. Obtención del Residuo de Solow

De acuerdo a la ecuación 3.11, para estimar la ecuación del resíduo de Solow de la forma:

$$Y = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha}$$

y como ${}^{\partial Y}/_{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha}$, ${}^{\partial Y}/_{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} (AL)^{-\alpha} A$ y ${}^{\partial Y}/_{\partial A} = (1-\alpha) K^{\alpha} (AL)^{-\alpha} L$ tenemos que:

$$\dot{Y} = \left(\alpha K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha}\right) \cdot \dot{K} + \left((1-\alpha) K^{\alpha} (AL)^{-\alpha} A\right) \cdot \dot{L} + \left((1-\alpha) K^{\alpha} (AL)^{-\alpha} L\right) \cdot \dot{A}$$

dividiendo la ecuación anterior por Y obtenemos:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{Y} \cdot \left(\alpha K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha}\right) + \frac{\dot{L}}{Y} \cdot \left((1-\alpha) K^{\alpha} (AL)^{-\alpha} A\right) + R$$

Donde $R = \frac{\dot{A}}{Y} \cdot \left((1-\alpha) K^{\alpha} (AL)^{-\alpha} L\right)$, entonces despejando R en la ecuación anterior tenemos la ecuación del residuo de Solow:

$$R = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left[\frac{\dot{K}}{Y} \cdot \left(\alpha K^{\alpha-1} (AL)^{1-\alpha}\right) + \frac{\dot{L}}{Y} \cdot \left((1-\alpha) K^{\alpha} (AL)^{-\alpha} A\right)\right] \qquad (3.16)$$

3.3.2. Obtención del Residuo de Solow con una función de producción Cobb-Douglas con progreso técnico neutral en el sentido de Hicks

En el sentido de Hicks, la función de producción es de la forma:

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

Donde $\alpha \in (0,1)$. Demostraremos ahora que esta función cumple todos los supuestos del modelo de Solow presentados en el capítulo 2.

Proposición 3.4. *Una función Cobb-Douglas de la forma* $Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ *tiene rendimientos constantes a escala.*

Demostración. Basta observar que la suma de los exponentes del capital y el empleo es 1, entonces se sigue del caso 3 de la proposición 1.2 que tiene rendimientos constantes a escala. □

Ahora debemos verificar que cumple con las condiciones de Inada. Para ello es necesario encontrar primero la forma intensiva de la función Cobb-Douglas, obsérvese que utilizando la proposición 3.4 y por los rendimientos constantes a escala podemos multiplicar a la función en cuestión por $\frac{1}{AL}$ y obtener la forma intensiva:

$$AF(K,L) = F(AK,AL)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{AL}\cdot AF(K,L) &= \frac{1}{AL}\cdot F(AK,AL) \\
&= F\left(\frac{K}{L},1\right) \\
&= F\left(\frac{K}{L}\right) \\
&= \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

definiendo $k=\frac{K}{L}$ como el capital por trabajador y sustituyéndolo en la última ecuación tenemos:

$$f(k) = k^{\alpha}$$

Nótese que a diferencia del progreso técnico en el sentido de Harrod se obtiene el capital por trabajador y no el capital por trabajador efectivo, es claro que esta ecuación cumple las condiciones de Inada, ya que su primera derivada es:

$$f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$$

la cual siempre es mayor que cero y cuando $k\to\infty$ entonces $f'(k)$ tiende a cero, también si $k\to 0$ entonces $f'(k)$ tiende a infinito lo cual asegura las condiciones de Inada.

1. También cumple con la gratuidad: $f(0) = 0$.

2. La productividad marginal del capital por trabajador es positiva: $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} > 0$.

3. La productividad marginal disminuye a medida que el capital por trabajador efectivo aumenta: $f''(k) = -\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2} < 0$.

Con lo que queda demostrado que la función Cobb-Douglas con progreso técnico en el sentido de Hicks puede ser utilizada para desarrollar el modelo de Solow.

Una vez que hemos visto que la función Cobb-Douglas cumple con los supuestos básicos del modelo de Solow, obtendremos su residuo.

De acuerdo con la ecuación 3.7, calculamos las derivadas parciales de la función respecto a cada una de sus variables:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha}$$

Agregando el progreso técnico para obtener el residuo y sustituyendo las derivadas anteriores obtenemos la variación de la producción como se muestra a continuación:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \left[\frac{(\alpha A K^{\alpha} L^{1-\alpha})}{Y}\right] \cdot \frac{\dot{K}}{K} + \left[\frac{((1-\alpha) A K^{\alpha} L^{1-\alpha})}{Y}\right] \cdot \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A}$$

Finalmente, al despejar $\frac{\dot{A}}{A}$ de la ecuación anterior obtenemos el residuo de Solow:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left[\frac{(\alpha A K^{\alpha} L^{1-\alpha})}{Y}\right] \cdot \frac{\dot{K}}{K} - \left[\frac{((1-\alpha) A K^{\alpha} L^{1-\alpha})}{Y}\right] \cdot \frac{\dot{L}}{L} \qquad (3.17)$$

La importancia de obtener el residuo en términos de la función Cobb-Douglas con progreso técnico en el sentido de Hicks, es práctico puesto que ofrece una forma sencilla de estimar el resíduo de Solow. Obsérvese que dada la forma funcional de dicha ecuación basta aplicar el logaritmo natural para linealizarla y asi obtener:

$$\ln A = \ln Y - \alpha \ln K - (1-\alpha) \ln L \tag{3.18}$$

La ecuación anterior es la forma tradicional de definir el resíduo de Solow de acuerdo a Chiarini y Piselli (2000).

3.4. Observaciones al Residuo de Solow

Una vez que hemos visto el procedimiento para obtener el residuo de Solow tanto por el progreso técnico neutral en el sentido de Hicks como por el sentido de Harrod, procederemos a exponer algunas de las principales observaciones que se han hecho a este residuo.

La primera de ellas corresponde a la forma en que se estima de manera práctica esto es, de acuerdo a Acosta *et al* (2012),[3] el residuo de Solow puede ser estimado como el residuo de un modelo de mínimos cuadrados de la siguiente manera:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{L}}{L} + (1-\alpha) \frac{\dot{K}}{K} + \varepsilon_t \tag{3.19}$$

por lo que

$$\varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

y además debe satisfacer los supuestos que se hacen de manera regular sobre los residuos de un modelo de regresión, es decir: no autocorrelación, no heteroscedasticidad y estabilidad.

Sin embargo, dado que se estima como un residuo, de acuerdo a Gujarati y Porter (2009), entonces es un sustituto de todas las variables que se omiten en el modelo y que en conjunto afectan, en este caso, a la tasa de crecimiento de la producción. Ahora bien, los principales motivos de que tales variables no sean introducidas en el modelo son la siguientes:

1. Vaguedad en la teoría.

2. Variables centrales y variables periféricas.

[3] Obsérvese que Acosta *et al* (2012) utilizan el exponente α en el empleo, esto no afecta a la ecuación ya que la suma de los exponentes sigue siendo 1.

3. Principio de parsimonia.

El primer motivo hace referencia a una teoría incompleta y en esta situación el residuo funciona como un sustituto de todas las variables omitidas. En el caso particular de la tasa de crecimiento de la producción algunos economistas piensan que existen factores como los referentes al medio ambiente que afectan al crecimiento económico, por ejemplo la escacez del petróleo.

Si bien es cierto, de acuerdo a Romer (2001), el residuo de Solow es interpretado como una medida de la contribución del progreso técnico al crecimiento económico, aunque en realidad refleja la contribución de todas las demás fuentes de crecimiento económico exceptuando la que hace el capital a través de su rendimiento.

Con el segundo punto sólo nos referimos a que existen variables que tienen mayor reelevancia que otras. Así pues, el tercer punto se refiere a que de acuerdo con el principio de la navaja de Occam, conviene mantener el modelo de regresión lo más sencillo posible. En este sentido, Romer (2001) señala que el modelo de Solow omite variables relevantes para el crecimiento económico, por ejemplo, omite la participación del Estado en la economía, asume que se produce un sólo bien y tambien asume constantes las tasas de crecimiento, los cuales son supuestos poco realistas y que tienen como objetivo hacer un modelo relativamente sencillo y aislar exclusivamente los efectos que nos interesan.

Conclusiones

En la presente tesis se ha estimado el residuo de Solow de dos maneras distintas bajo supuestos y deducciones estudiadas a lo largo de cada capítulo. Mostraremos ahora los resultados más importantes a los que llegamos.

Comenzaremos con los resultados no sin antes mencionar que los supuestos para una economía no son del todo exactos, pues no son propios de una economía real, sin embargo se procede con ellos ya que este modelo no pretendía se idéntico a la realidad sino mostrar lo más importante de ella.

El trabajo efectivo con tasa de crecimiento $n + g$, es el resultado del progreso técnico del trabajo. Por su parte se llegó a la conclusión de que las tasas de crecimiento del trabajo y la tecnología tienen un crecimiento exponencial. La tecnología constituye un factor que es esencial para el estudio del crecimiento económico a largo plazo.

Una función de producción con progreso técnico en el sentido de Harrod pudo ser representada en la forma intensiva gracias a la incorporación del supuesto de rendimientos constantes a escala lo cual se traduce en que la producción por unidad de trabajo efectivo depende solamente de la cantidad de capital por unidad de trabajo efectivo y no del tamaño de la economía. Esto es una importante aseveración pues a pesar de que una economía sea pequeña puede obtener una producción mayor. Respecto a la producción, quedó demostrado que la productividad marginal del capital cumple con las condiciones del modelo, lo cual asegura que la producción no diverge.

Gracias a las igualdades de contabilidad nacional pudimos deducir el comportamiento del stock de capital como $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$, cuyo objetivo fue apoyarnos en el cálculo de la ecuación fundamental del modelo de solow y como resultado de dicha ecuación, fue posible hacer un análisis en el capital, en la producción y en el consumo, ya sea en el corto o en el largo plazo.

En la senda de crecimiento sostenido, la economía alcanza su equilibrio, el estado estacionario (k^*), el cual es único y estable. Aunque k sea mayor o menor que k^*, siempre converge hacia este estado. Esto nos indica que la economía en el largo plazo tiende a un equilibrio dinámico estable.

Las consecuencias de un aumento en la tasa de ahorro son varias, a saber, llegamos a la conclusión que en el corto plazo, un incremento permanente de esta tasa genera un incremento temporal en la tasa de crecimiento de la producción por trabajador. Por otra parte, como el consumo es la distancia entre la producción y la inversión de reposición, al maximizarlo requerimos que se cumpla la igualdad $f'(k^*_{oro}) = (n + g + \delta)$, la cual es condición básica para maximizar, en el estado estacionario, el consumo oro c^*_{oro}.

En el largo plazo, por medio de la elasticidad de la producción respecto al capital, llegamos a que un valor inferior de la tasa de ahorro provoca que la producción sea menor. Y en cuanto al ritmo de convergencia, concluimos que por medio de una aproximación de la serie de Taylor, k converge hacia su estado estacionario k^* a una tasa: $[1 - \alpha_K(k^*)](n + g + \delta)$.

En definitiva, las explicaciones exógenas del crecimiento económico parecen poco satisfactorias pues en el modelo de Solow no se contempla la posibilidad de optimización ya que se considera la tasa de ahorro simplemente como una variable exógena y constante.

Otra conclusión esencial de este modelo es que la acumulación del capital físico no basta para explicar ni el gran crecimiento de la producción *per cápita* que ha tenido lugar en el tiempo ni las vastas diferencias geográficas existentes.

Respecto al progreso técnico en el sentido de Hicks, el cálculo del residuo de solow incorporando rendimientos constantes a escala es una ventaja, pues caemos en la conclusión de que el beneficio económico es cero y las participaciones de los factores en la producción total $\left(\frac{PMgL \cdot L}{Y}\right)$y $\left(\frac{PMgL \cdot L}{Y}\right)$ suman uno, lo cual nos permite resumir el residuo de Solow como

$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(\alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L}\right)$. Esto nos sugiere que el residuo es la diferencia que hay entre la tasa de crecimiento de la producción y una proporción de la tasa de crecimiento de sus factores.

En cuanto a la estimación de este residuo por medio del progreso técnico en el sentido de Harrod, $R = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} - \alpha_K \left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}\right]$, plantea que el residuo es la tasa de crecimiento de la producción menos la del empleo y la elasticidad multiplicada por el factor $\left[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}\right]$.

Vimos también que es posible obtener el residuo con una función particular, la función de producción Cobb-Douglas, la cual por cumplir con los supuestos del modelo, nos permite obtener el residuo respecto al progreso técnico en el sentido de Harrod y de Hicks. La importancia de obtener el residuo de acuerdo a Hicks es que es conveniente su uso pues al aplicar el logaritmo natural para linealizarla obtenemos $\ln A = \ln Y - \alpha \ln K - (1-\alpha)\ln L$, lo cual es más sencillo de calcular en términos prácticos.

De acuerdo a Acosta *et al* (2012), el residuo de Solow puede ser estimado como el residuo de un modelo de mínimos cuadrados $\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{L}}{L} + (1-\alpha)\frac{\dot{K}}{K} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, donde ε_t debe ser entendido como la parte no explicada del modelo. Aparte debe de satisfacer los supuestos base de residuos de regresión: no autocorrelación, no heteroscedasticidad y estabilidad.

Bibliografía

[1] Acosta, J., C. Bethencourt, G. A. Marrero y F. Perrera, (2012), *Los Modelos de tasa de ahorro exógenas. El modelo de Solow,* Curso de Macroeconomía III, Tema 1, Tenerife: Universidad de la Laguna.

[2] Chiarini, B. y P. Piselli, (2000), *Un'Interpretazione del Residuo di Solow per l'Economia Italiana*, Rivista di Politica Economica.

[3] Clement, N. C. y J. C. Pool, (1997), *Economía: Enfoque América Latina*, 4a. ed., México: McGraw-Hill.

[4] Gujarati, D. N. y D. C. Porter, (2009), *Econometría Básica*, 5a. ed., México: McGraw-Hill.

[5] Hyman, D. N., (1993), *Modern Microeconomics Analysis and Aplications*, 3a. ed., California: Irwin Inc.

[6] Jones, H., (1988), *Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico*, 2a. ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.

[7] Koutsoyiannis, A., (1985), *Microeconomía Moderna*, Buenos Aires: Amorrortu Editores.

[8] Larson, R., R. P. Hostetler y B. H. Edwards, (2006), *Cálculo II: Cálculo de varias Variables*, 8a ed., México: McGraw-Hill.

[9] Mankiw, N. G., (2000), *Macroeconomía* , 4a ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.

[10] Martinez, X., (2008), *Macroeconomia Avanzada*, CODE y Departament d'Economia, Universitat Autònoma de Barcelona.

[11] Olva, H., (2009), *Análisis de la Función de Producción Cobb-Douglas y su Aplicación en el Sector Productivo Mexicano*, Tesis de Licenciatura, México: Universidad Autónoma Chapingo.

[12] Romer,D., (2001), *Macroeconomía Avanzada*, 2a. ed., Madrid: McGraw-Hill.

[13] Solow, R. M., (1957), "Technical Changes and the Aggregate Production Function" in *The Review of Economics and Statistics*, The MIT Press.

[14] Varian, H. R., (1992), *Análisis Microeconómico*, 3a. ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.

[15] ________, (1999), *Microeconomía Intermedia: un Enfoque Actual*, 5a. ed., Barcelona: Antoni Bosch, Editor.

Apéndice A

Funciones Homogéneas

Definición A.1. *Una función* $f : \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *es homogénea de grado* k *si* $f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$ *para toda* $t > 0$ *.*

Para fines prácticos tomaremos sólo los casos en que $k = 0$ y $k = 1$, de los cuales se desprende la siguiente observación:

Observación A.1. *Si una función de producción es homogénea de grado cero, entonces si se duplican los factores de la producción la producción resultante no se altera. Más aún, si la función de producción es homogénea de grado 1, entonces al duplicar los factores de la producción, la producción se duplica.*

Demostración. Para demostrar la primera parte tenemos, por la **definición A.1**, que

$$f(2\mathbf{x}) = 2^0 f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

Para el caso de la función de producción homogénea de grado 1, la demostración es análoga a la anterior tomando $k = 1$. □

A continuación se presenta un teorema conocido como la *Ley de Euler*.

Teorema A.1. (Ley de Euler) *Sea f una función diferenciable que es homogénea de grado 1, entonces*

$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} x_i$$

Demostración. Sabemos que $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$ por se homogénea de grado 1. Diferenciando la función con respecto a t, tenemos que

$$\sum_i \frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i} x_i = f(\mathbf{x})$$

Tomando $t = 1$ obtenemos el resultado. □

Proposición A.1. *Si $f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado $k \geq 1$, entonces $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ es homogénea de grado $k-1$.*

Demostración. Diferenciando con respecto a x_i a

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x})$$

tenemos que

$$\sum_i \frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i} t = t^k \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

dividiendo por t, tenemos:

$$\sum_i \frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i} = t^{k-1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

□

Observación A.2. Las pendientes de las superficies de nivel de una función homogénea son constantes a lo largo de los rayos que parten del origen, esto es:

$$\frac{\dfrac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_j}} = \frac{\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}} \quad \forall\, t > 0$$

Apéndice B

Propiedades de la Tasa de Crecimiento

Definición B.1. (Tasa de Crecimiento) *Se define la tasa de crecimiento de una variable como su tasa de cambio proporcional. Es decir, la tasa de crecimiento se puede expresar como* $\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$*, donde* $\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Proposición B.1. *La tasa de crecimiento de una variable es igual a la tasa de crecimiento de su logaritmo natural, esto es:*

$$\frac{\dot{X}(t)}{X(t)} = \frac{d\ln X(t)}{dt}$$

Demostración. Tomando el lado derecho de la igualdad, tenemos que

$$\frac{d\ln X(t)}{dt} = \frac{d\ln X(t)}{dX(t)}\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{X(t)}\dot{X}(t)$$

□

Corolario B.1. *Si* $Z(t) = X(t)\,Y(t)$ *entonces* $\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} + \frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$.

Demostración. Por la proposición B.1. sabemos que

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(z)} = \frac{d\ln Z(t)}{dt} = \frac{d\ln (X(t)\,Y(t))}{dt}$$

Por lo que

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(z)} = \frac{1}{X(t)\,Y(t)}\left(\dot{X}(t)\,Y(t) + \dot{Y}(t)\,X(t)\right) = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} + \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$$

con lo que queda demostrado. □

Corolario B.2. *Si* $Z(t) = \dfrac{X(t)}{Y(t)}$ *, entonces* $\dfrac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = \dfrac{\dot{X}(t)}{X(t)} - \dfrac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$.

Demostración. Por la proposición B.1 sabemos que

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(z)} = \frac{d\ln Z(t)}{dt} = \frac{d\ln\left(\dfrac{X(t)}{Y(t)}\right)}{dt}$$

Por lo que

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(z)} = \frac{Y(t)}{X(t)}\left(\frac{\dot{X}(t)\,Y(t) - \dot{Y}(t)\,X(t)}{(Y(t))^2}\right) = \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} - \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}$$

Con lo que queda demostrado. □

Corolario B.3. *Si* $Z(t) = X(t)^a$ *, entonces* $\dfrac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = a\dfrac{\dot{X}(t)}{X(t)}$.

Demostración. Por la proposición B.1. sabemos que

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(z)} = \frac{d\ln Z(t)}{dt} = \frac{d\ln\left(X(t)^a\right)}{dt}$$

de donde

$$\frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = a\frac{X(t)^{a-1}\,\dot{X}(t)}{X(t)^a} = a\frac{\dot{X}(t)}{X(t)}$$

□

Apéndice C

Condiciones de Inada y otros Conceptos.

Definición C.1. *La función $f(k)$cumple las condiciones de inada si:*

1. *El límite de la primera derivada de $f(k)$ es muy grande cuando k es pequeño: $\lim\limits_{k\to 0} f'(k) = \infty$.*
2. *El límite de la primera derivada de $f(k)$ muy pequeño cuando k crece en exceso: $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k) = 0$.*

Estas condiciones son una hipótesis sobre una función de producción que garantizan que la economía no sea divergente.

Proposición C.1. *Sea la función $y = g(x)$, entonces la elasticidad de y con respecto de x es:*

$$\epsilon = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$$

Siempre que x, $y > 0$.
La elasticidad de sustitución se refiere al cambio de porcentaje en y inducido por un cambio de porcentaje en x.

Demostración. Si x y $y > 0$, la derivada de ϵ la podemos escribir como:

$$\epsilon = \frac{d\ln y}{d\ln x}$$

Ahora, por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{d\,\mathrm{ln}y}{d\,\mathrm{ln}x}\,\frac{d\,\mathrm{ln}x}{dx} = \frac{d\mathrm{ln}y}{dx}$$

haciendo lo mismo en ambos lados de la igualdad tenemos:

$$\frac{d\,\mathrm{ln}y}{d\,\mathrm{ln}x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\,\mathrm{ln}y}{d\,\mathrm{ln}x} = \frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx}$$

$\square$