



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

ECUACIONES PARAMÉTRICAS PUISEUX
VÍA LA AMIBA DEL DISCRIMINANTE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Víctor Manuel Saavedra Calderón

DIRECTOR DE LA TESIS
Dra. Fuensanta Aroca Bisquert
Instituto de Matemáticas Cuernavaca

MEXICO, D.F. ENERO, 2013.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria y agradecimientos

A mis padres **Emma Calderón Suastegui** y **José Manuel Saavedra Martínez** por su apoyo incondicional.

A mis hermanos **Diana**, **Carolina** y **Alfredo**. A mis familiares y amigos por sus consejos.

A mi gran amiga **Antonia Sánchez** por su entusiasmo y motivación.

A mi asesora **Dra. Fuensanta Aroca Bisquert** por la orientación y sugerencias en la elaboración de esta tesis.

A los **honorables miembros del jurado** por sus observaciones sobre la redacción de la tesis: Dr. Francisco Javier González A., Dr. Federico Sánchez Bringas, Dra. Lucía López de Medrano Alvarez, Dr. Adolfo Guillot Santiago y Dra. Fuensanta Aroca Bisquert.

Agradezco al **CONACYT** por la beca otorgada para realizar mis estudios de Maestría. La beca de apoyo a proyectos PAPIIT : Geometría tropical; clave: IN117110 a cargo de la Dra. F. Aroca Bisquert, la beca de proyecto de investigación: Dinámica y geometría compleja; a cargo del Dr. J.A. Seade Kuri; clave:164447.

Índice general

Introducción	v
1. Conjuntos analíticos y conjuntos algebraicos	1
1.1. Funciones holomorfas	1
1.2. Conjuntos analíticos	6
1.3. Conjuntos algebraicos.	11
1.4. Germen de un conjunto analítico en un punto.	12
2. Conos y politopos	15
2.1. Conos poliédricos.	15
2.2. El cono de recesión.	19
2.3. Conos asociados al politopo de Newton	20
3. Amibas	25
3.1. La función de Ronkin	26
3.2. Algunos resultados básicos sobre amibas	29
3.3. El cono de recesión de una componente conexa del complemento de la amiba	30
4. Cinceles	33
4.1. σ -Cinceles	33
4.2. Series de Laurent con exponentes en un cono.	37
4.3. Una relación entre conjuntos σ -completos y conos de recesión .	41
5. Parametrización local de variedades algebraicas	43
5.1. Espacios cubrientes y el teorema general de levantamiento . .	43
5.2. El teorema de Newton-Puiseux	48
5.3. El discriminante local de una proyección propia	55

5.4. Existencia de ecuaciones paramétricas locales de tipo Puiseux en variedades algebraicas	57
A. Ejemplos sobre el resultado principal	61
A.1. Ejemplos	61
Bibliografía	71

Introducción

La existencia de ecuaciones paramétricas en puntos suaves de conjuntos analíticos es una consecuencia del teorema de la función implícita. Para la curva $z^2 + w^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{C}[z, w]$ y el punto $(0, i)$, existe una serie de potencias de w , a saber, $w - i = i(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}z^4 + \dots)$, convergente en $|z| < 1$. La solución en w como serie de potencias es local, por el binomio de Newton se tiene que $(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ converge para $|z| < 1$ y no se puede expandir holomórficamente a un disco de radio mayor a 1. Es decir, se tiene una parametrización local de la forma

$$z \longrightarrow (z, \phi(z))$$

donde $\phi(z)$ es una serie de potencias no negativas en z .

No siempre existen parametrizaciones de la forma anterior, $\Phi(z) = (z, \phi(z))$, por ejemplo, si consideramos la cúbica cuspidal, definida por

$$f = z^2 + w^3,$$

entonces no puede existir una tal parametrización como la anterior. Supongamos que w fuese expresable en alguna z -vecindad, como una serie de potencias, digamos

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i.$$

Entonces si $a_1 \neq 0$, el término de orden menor en z de f sería $a_1^3 z^3$. Por otra parte si $a_1 = 0$, el término de orden menor en z sería $a_2^3 z^5$. Sin embargo, en una vecindad del origen, se tiene una parametrización local,

$$z \longrightarrow (z, -z^{\frac{2}{3}}) = (z, \varphi(z^{\frac{1}{3}})),$$

donde φ es una serie con exponentes fraccionarios en z .

Una serie de Puiseux, es una serie de la forma,

$$\varphi(z^{\frac{1}{d}}) := \sum_{i=k}^{\infty} a_i z^{\frac{i}{d}}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y $d \in \mathbb{N}$. Así, una parametrización de la forma $z \rightarrow (z, \varphi(z^{\frac{1}{d}}))$ es una parametrización Puiseux.

Para singularidades de curvas planas, el teorema de Newton-Puiseux afirma que podemos encontrar ecuaciones paramétricas locales de la forma,

$$z_1 = t^K \quad z_2 = \phi(t),$$

donde ϕ es una serie de potencias convergente.

Un resultado sobre parametrizaciones de tipo Puiseux en dimensión superior es el siguiente y es debido a F. Aroca.

En [1], F. Aroca demuestra que si \mathcal{A} es un conjunto analítico de \mathbb{C}^{N+M} de dimensión N , con $\underline{0} \in \mathcal{A}$ y la proyección,

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^N$$

$$(z_1, \dots, z_{N+M}) \mapsto (z_1, \dots, z_N)$$

es finita, existen ecuaciones paramétricas locales de la forma

$$z_i = t_i^k \quad i = 1, \dots, N, \quad z_{N+j} = \phi_j(t_1, \dots, t_N) \quad j = 1, \dots, M.$$

donde las ϕ_j son series de Laurent convergentes con exponentes contenidos en un cono poliedral fuertemente convexo.

En esta tesis mejoramos el resultado anterior de F. Aroca para el caso de variedades algebraicas. Dichas mejoras las explicamos más adelante. Nuestra herramienta principal, en el resultado de la tesis, es la amiba de una hipersuperficie algebraica y sus propiedades.

La noción de amiba fue introducida en Matemáticas en 1994 por I.M. Gelfand, M.M. Kapranov y A.V. Zelevinsky en su libro [7]. Dada una hipersuperficie algebraica V , la amiba de V es por definición, la imagen de V bajo la transformación

$$\begin{aligned} \text{Log} : (\mathbb{C}^*)^N &\mapsto \mathbb{R}^N \\ (z_1, \dots, z_N) &\mapsto (\log|z_1|, \dots, \log|z_N|). \end{aligned}$$

Las amibas tienen muchas aplicaciones en geometría algebraica real, análisis complejo, simetría de espejo y otras áreas. (Ver por ejemplo [16]).

Sea d un número natural y sea,

$$\xi_d : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

definida por

$$\xi_d(z_1, \dots, z_N) := (z_1^d, \dots, z_N^d).$$

Denotamos $\sqrt[d]{\Omega} := \xi_d^{-1}(\Omega)$ para $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

En esta tesis, (Véase def. 4.19) a cada componente \mathcal{F} del complemento de la amiba de una hipersuperficie le asociamos un cono, el cual denominamos, como el cono del politopo asociado a la componente \mathcal{F} .

Nuestro resultado principal en la tesis es el siguiente teorema 5.41.

Sea \mathcal{A} un conjunto algebraico en \mathbb{C}^{N+M} con $\dim_0 \mathcal{A} = N$ y supongamos que el discriminante de la proyección $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^N$ es una hipersuperficie algebraica. Entonces para cada componente \mathcal{F} del complemento de la amiba del discriminante de π , existen ecuaciones paramétricas locales de \mathcal{A} de la forma

$$z_i = t_i^k \quad i = 1, \dots, N, \quad z_{N+j} = \phi_j(t_1, \dots, t_N) \quad j = 1, \dots, M.$$

donde las ϕ_j son series de Laurent convergentes en $\sqrt[d]{\overline{\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})}}$ para algún número natural d y cuyos exponentes están contenidos en el cono asociado a la componente \mathcal{F} .

Nuestros resultados mejoran los resultados en [1], en el sentido de que a diferencia de las parametrizaciones dadas en [1], en nuestras parametrizaciones Puiseux, decimos explícitamente quienes son los dominios de convergencia, cuales son todas las parametrizaciones localmente y mostramos la existencia de ecuaciones paramétricas Puiseux con exponentes en conos no necesariamente convexos.

Cabe mencionar que durante el desarrollo de este trabajo, se encontró y se demostró un criterio sobre cuando un conjunto es σ -completo, el cual hemos denominado **Equivalencia de σ -completitud** (Prop. 4.21). La idea de conjunto σ -completo extiende la idea de dominios de Reinhardt para series de Taylor, es decir, series con exponentes en el cono denominado primer ortante, a series con exponentes en cualquier cono σ .

Ahora comentamos el desarrollo de los 5 capítulos de la tesis:

- En el capítulo 1 se definen los conjuntos analíticos y conjuntos algebraicos, ejemplos y propiedades principales.
- En el capítulo 2 se definen algunas nociones básicas de la geometría convexa, tales como politopos (En particular, el politopo de Newton $NP(f)$ de un polinomio f), cono, cono dual, cono normal interior C_V de un punto V del politopo, el cono de recesión de un conjunto. A cada punto V del politopo de Newton de f le asociamos un cono $\sigma_f(V)$. Se tiene la relación

$$\sigma_f(V) = (-C_V)^\vee$$

donde C_V^\vee denota el cono dual del cono C_V .

- En el capítulo 3 se introduce la noción de amiba y la función de Ronkin de un polinomio. Al gradiente de la función de Ronkin restringido a una componente conexa del complemento de la amiba, se le denomina orden de la componente. Con el orden de una componente, Fosberg, Passare y Tsik, establecen en [5] una inyección entre el conjunto de componentes complementarias de la amiba y los puntos enteros del politopo del polinomio que define la amiba. Para mostrar que a diferentes componentes le corresponden diferentes ordenes, utilizan en [5] un lema que relaciona el orden de una componente conexa del complemento de la amiba y el número de ceros de un polinomio de Laurent en una variable dentro del disco unitario. Con dicho lema se muestra una relación de contención entre el cono normal interior de un punto del politopo y el cono de recesión $\text{Rec}(\mathcal{F})$ de una componente conexa \mathcal{F} del complemento de la amiba.
- En el capítulo 4, dado un cono σ se introduce la noción de σ -cincel y conjuntos σ -completos, el cual es el análogo, para series con exponentes

en el cono σ , de los poldiscos para series con exponentes no negativos. Si se tiene una función holomorfa acotada en un dominio σ -completo, podemos determinar que el conjunto de exponentes de su serie de Laurent centrada en $\underline{0}$ está contenido en el cono σ , es lo que nos dice la siguiente proposición ([1], 4.5).

Sea σ un cono, Ω un dominio de Reinhardt σ -completo. Si f es una función holomorfa acotada en Ω y φ es su expansión en serie de Laurent en Ω , entonces $\varepsilon(\varphi) \subset \sigma$.

En [7] Gelfand, Kapranov y Zelevinsky asocian una única componente complementaria \mathcal{F} de \mathcal{A}_f a cada vértice V de $NP(f)$. Con esta asociación, mostramos que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es un dominio $\sigma_f(V)$ -completo, donde V es el vértice asociado a \mathcal{F} . (Prop. 4.20)

Utilizando la asociación de orden para cada componente conexa del complemento de la amiba, dada por Fosberg, Passare y Tsik también mostramos que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es un dominio $\sigma_f(V)$ -completo, donde V es el orden de la componente \mathcal{F} (Prop. 4.22).

Sea f un polinomio de Laurent y sea \mathcal{F} una componente conexa de \mathcal{A}_f^c de orden V . Entonces $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es $\sigma_f(V)$ -completo.

Para la prueba de la proposición anterior, demostramos la siguiente equivalencia para conjuntos σ -completos (Prop. 4.21).

(Equivalencia de σ completitud) *Sea σ un cono y sea Ω un conjunto de Reinhardt. Se tiene que, Ω es σ -completo si y sólo si*

$$(-\sigma)^\vee \subset \text{Rec}(\text{Log}(\tau(\Omega))).$$

- En el capítulo 5 se definen algunas nociones básicas de la topología algebraica en especial el teorema de levantamiento, el cual usaremos en la prueba del resultado de la tesis. Mencionamos el teorema de la función implícita y el teorema de Newton Puiseux. Se define el discriminante local de una proyección. Se considera la amiba del discriminante local de una proyección y se obtiene el resultado de la tesis (Teo. 5.41).

Con el resultado en ([1], 4.5) y la proposición 4.22 determinamos que los exponentes de las series ϕ_i s de la proposición 5.41 están contenidos en el cono $\sigma_\delta(V)$ donde δ es el polinomio que define el discriminante y V es el orden de una componente \mathcal{F} del complemento de la amiba.

Capítulo 1

Conjuntos analíticos y conjuntos algebraicos

El material presente en este capítulo está basado en [3], [13], [21], [2] y [10]. Tratamos las propiedades básicas de los conjuntos sobre los cuales se desarrolla la tesis. Solo suponemos conocidas algunas nociones básicas de topología tales como conexidad y compacidad.

1.1. Funciones holomorfas

Presentamos las principales definiciones y propiedades de las funciones que serán utilizadas para definir los conjuntos analíticos.

Recordemos que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ donde Ω es un abierto de \mathbb{C} y $z_0 \in \Omega$, se dice que f es **derivable** en z_0 si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}.$$

Al valor $f'(z_0)$ se le llama la derivada de f en z_0 .

Definición 1.1. Sea Ω un abierto de \mathbb{C} y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es **holomorfa** en un punto $z_0 \in \Omega$, si f es derivable en todos los puntos de un entorno de z_0 . Se dice que f es **holomorfa en Ω** si es holomorfa en $z_0, \forall z_0 \in \Omega$.

Ejemplo 1.2. Las funciones polinómicas en z con coeficientes complejos son holomorfas sobre \mathbb{C} y también las funciones trigonométricas de z y la función exponencial. Toda función racional, en forma irreducible, es holomorfa en \mathbb{C} excepto en los ceros del denominador.

Observación 1.3. Se tiene que las sumas, productos, composiciones de funciones holomorfas son también holomorfas y el cociente de dos funciones holomorfas lo es donde el denominador es distinto de cero. Las funciones holomorfas son analíticas, es decir, admiten una representación en serie de Taylor. Luego las funciones holomorfas son infinitamente diferenciables en cada punto donde es holomorfa.

Definición 1.4. La **serie de Taylor** de una función compleja f en el entorno de un número complejo a es la siguiente serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

donde $f^{(n)}(a)$ denota la derivada n -ésima de f en a .

Una serie de Laurent de una función compleja $f(z)$ es una representación de esa función como serie de potencias con exponentes en el conjunto de los enteros. Llamadas series de Laurent en honor al matemático Pierre Alphonse Laurent.

Definición 1.5. La **serie de Laurent** de una función compleja alrededor de un punto z_0 está dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde los coeficientes a_n están definidos por una integral de línea:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n-1}}.$$

y γ es el camino cerrado $|z - z_0| = \rho$ que encierra a z_0 contenido en un anillo $A := \{z : r < |z - z_0| < R\}$ en el cual f es holomorfa.

A la parte de una serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ se le denomina **parte principal** y a la parte $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ **parte entera**.

Se tienen las siguientes observaciones sobre series de Laurent y funciones holomorfas:

- Dada una serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. La serie de Laurent converge sobre el conjunto (Posiblemente vacío)

$$A := \{z : r < |z - z_0| < R\},$$

donde,

$$r = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{-k}|^{\frac{1}{k}} \quad y \quad R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}.$$

La serie define una función holomorfa sobre A . Una serie de Laurent converge si tanto la parte entera (de potencias positivas) y la parte principal (de potencias negativas) convergen. Además esta convergencia es uniforme sobre conjuntos compactos

- En el exterior del anillo A la serie de Laurent diverge. Sobre la frontera del anillo puede o no converger.
- Dado un anillo $A := \{z : r < |z - z_0| < R\}$ y una función holomorfa $f(z)$ definida en A , existe una única serie de Laurent la cual converge en A y representa a la función $f(z)$.

Ejemplo 1.6. Sea $f(z) = \frac{1}{3z-7}$. Como la función es holomorfa excepto en $z = \frac{7}{3}$, tenemos que es holomorfa en los anillos $0 < |z| < \frac{7}{3}$ y $\frac{7}{3} < |z| < +\infty$. Para el primer anillo tenemos que $|\frac{3z}{7}| < 1$, por tanto podemos usar la serie geométrica para obtener el desarrollo

$$f(z) = \frac{-1}{7} \frac{1}{1 - \frac{3}{7}z} = -\frac{1}{7} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n z^n.$$

Para el segundo anillo tenemos que $|\frac{7}{3z}| < 1$, nuevamente por la serie geométrica obtenemos el desarrollo

$$f(z) = \frac{1}{3z} \frac{1}{1 - \frac{7}{3z}} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n \frac{1}{z^n}.$$

Las series de Laurent no pueden, en general, ser multiplicadas. Similarmente, la suma de dos series de Laurent convergentes en distintos dominios no necesariamente converge.

Las series de Laurent permiten saber que tipos de singularidades tiene una función (Véase [3], p.109). Si expandimos una función holomorfa f en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

tomando como centro una singularidad a y como radio interior cero en un anillo de convergencia $A(a; 0, R)$, la cantidad de potencias negativas en la serie indicará que tipo de singularidad es:

- Si la serie no tiene potencias negativas, la singularidad a es evitable.
- Si la serie tiene finitas potencias negativas, la singularidad a es un polo. Aparecen siempre que $f(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$
- Si la serie tiene infinitas potencias negativas, la singularidad a es una singularidad esencial.

Definición 1.7. Sea f analítica en un subconjunto abierto U del plano complejo \mathbb{C} . Si V es un subconjunto abierto con $U \subset V$ y F es una función analítica definida en V tal que $F(z) = f(z) \forall z \in U$, entonces se dice que F es una **extensión analítica** de f (también se dice que F es una continuación analítica de f o que f se puede **extender holomórficamente** a V).

La siguiente proposición es llamada el teorema de singularidad removible o **teorema de extensión de Riemann** (Véase [3])

Proposición 1.8. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, $a \in D$ y f holomorfa en $D \setminus \{a\}$ y acotada en una vecindad de a , entonces f se extiende holomórficamente a a .

Presentamos las principales definiciones y resultados para funciones holomorfas en varias variables:

Un **polidisco** abierto en \mathbb{C}^n es un subconjunto $\Delta(w; r) \subset \mathbb{C}^n$ de la forma

$$\Delta(w; r) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Se dice que $w = (w_1, \dots, w_n)$ es el centro del polidisco y que $r = (r_1, \dots, r_n)$ es su poliradio.

Sea D un abierto en \mathbb{C}^n , denotemos por $\mathcal{C}^1(D)$ el espacio vectorial de funciones $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con derivadas parciales continuas.

En la siguiente definición utilizamos el operador diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Definición 1.9. Sea D un conjunto abierto en \mathbb{C}^n . Una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ se dice **holomorfa** en D si $f \in \mathcal{C}^1(D)$ y

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0,$$

para cada $z \in D$ y $j = 1, \dots, n$.

Para el siguiente resultado véase [13], teorema 2.6.

Proposición 1.10. Sea $D \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en D . Entonces en cada punto $w \in D$ existe un entorno U con $w \in U \subset D$, tal que f tiene un desarrollo en series de potencias, que converge para todo $z \in U$

$$f(z) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = 0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} (z_1 - w_1)^{k_1} \dots (z_n - w_n)^{k_n}.$$

Si f es holomorfa en \mathbb{C}^n con $(n > 1)$, también lo es en cada una de sus variables. El recíproco también es cierto y es conocido como el lema de Osgood.

Observación 1.11. Si f y g son funciones holomorfas en un abierto conexo $D \subset \mathbb{C}^n$ y $f(z) = g(z)$ en un abierto $U \subset D$, entonces $f(z) = g(z)$ en D .

Definición 1.12. Una **serie de Laurent multiple** es una expresión de la forma

$$\sum_{|k|=-\infty}^{+\infty} c_k (z - \alpha)^k,$$

la cual es la suma extendida sobre todos los multi-índices enteros

$$k = (k_1, \dots, k_n), |k| = k_1 + \dots + k_n, z = (z_1, \dots, z_n),$$

$$(z - \alpha)^k = (z_1 - \alpha_1)^{k_1} \cdots (z_n - \alpha_n)^{k_n}$$

En particular, un **polinomio de Laurent** en n variables es una expresión de la forma

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\omega \in A} a_\omega z^\omega,$$

donde $A \subset \mathbb{Z}^n$ es un conjunto finito de vectores enteros.

El siguiente resultado se encuentra en [21], p.43.

Proposición 1.13. *Sea f holomorfa en un dominio de Reinhardt $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ que no interseca ningún hiperplano $\{z_j = 0\}$. Entonces, existe una única serie de Laurent en n -variables con centro en 0 , $\varphi := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$, la cual converge a f en cada punto de D para algún orden total de sus términos. La serie φ es absolutamente convergente en D y converge uniformemente a f en cualquier subconjunto compacto de D .*

Observación 1.14. Se sabe que el dominio de convergencia de las series de Laurent en $(\mathbb{C}^*)^N$ tiene la forma $\text{Log}^{-1}(B)$, donde $B \subset \mathbb{R}^N$ es un subconjunto convexo, véase por ejemplo [7], p.192.

Sea D un dominio en \mathbb{C}^n y sea $X \subset D$. Recordemos que una función f definida en D se dice **localmente acotada** en X si para todo punto $z \in X$ existe un polidisco $\Delta(z; r) \subset D$ tal que la función f es acotada en $\Delta(z; r) \cap X$.

La forma que toma el **teorema de extensión de Riemann** en varias variables complejas es la siguiente (Véase [13], Teo.6.4).

Proposición 1.15. *Sea V una variedad analítica propia en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^N$. Sea f localmente acotada en U y $f : U \setminus V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces existe una única extensión holomorfa de f a todo U .*

1.2. Conjuntos analíticos

Definición 1.16. Sea $\mathcal{A} \subset \Omega$ donde Ω es una variedad compleja, \mathcal{A} se dice un **subconjunto analítico de Ω** si para cada punto $a \in \Omega$, existe una vecindad U de a y funciones holomorfas f_1, \dots, f_r en esta vecindad tales que

$$\mathcal{A} \cap U = \{z \in U \mid f_1(z) = 0, \dots, f_r(z) = 0\}.$$

Esto significa que localmente \mathcal{A} es el conjunto de ceros comunes de un conjunto finito de funciones holomorfas.

Sean \mathcal{A} y \mathcal{A}' subconjuntos analíticos en Ω . Decimos que \mathcal{A}' es un subconjunto analítico de \mathcal{A} , si $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

Definición 1.17. Se dice que \mathcal{A} es un **conjunto analítico local**, si en una vecindad de cada uno de sus puntos es el conjunto de ceros comunes de una cierta familia finita de funciones holomorfas.

Cualquier conjunto analítico en una variedad compleja es un subconjunto analítico de una cierta vecindad de él.

Proposición 1.18. *Cualquier abierto $D \subset \mathbb{C}^n$ es un conjunto analítico en \mathbb{C}^n pero es un subconjunto analítico en \mathbb{C}^n sólo si $D = \mathbb{C}^n$.*

Demostración. En efecto, claramente D es un conjunto analítico. Supongamos que D es un subconjunto analítico de \mathbb{C}^n . Sea $z_0 \in \overline{D}$, existe una sucesión $\{z_j\} \subset D$ tal que $z_j \rightarrow z_0$. Como D es un subconjunto analítico, existe una vecindad U_{z_0} de z_0 y funciones holomorfas f_1, \dots, f_r en esa vecindad tales que,

$$D \cap U_{z_0} = \{z \in U_{z_0} \mid f_1(z) = 0, \dots, f_r(z) = 0\}.$$

Notemos que para j suficientemente grande, $f_i(z_j) = 0$ para toda $i = 1, \dots, r$. Por la continuidad de las f_i en U_{z_0} y la unicidad del límite, se sigue que $f_i(z_j) \rightarrow f_i(z_0) = 0$, es decir, $f_i(z_0) = 0$ para toda $i = 1, \dots, r$. Entonces $z_0 \in D \cap U_{z_0}$. En particular, $z_0 \in D$ y por tanto D es cerrado. Como D es también abierto, se sigue que $D = \mathbb{C}^n$. □

Ejemplo 1.19. De la proposición 1.18 se tiene que

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 < 1\}$$

es un conjunto analítico local pero no es un subconjunto analítico en \mathbb{C}^2 .

Ejemplo 1.20. Los subconjuntos analíticos propios de \mathbb{C} son precisamente los conjuntos de puntos aislados sin punto de acumulación. Los conjuntos analíticos locales de \mathbb{C} son los conjuntos de puntos aislados, por ejemplo $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$.

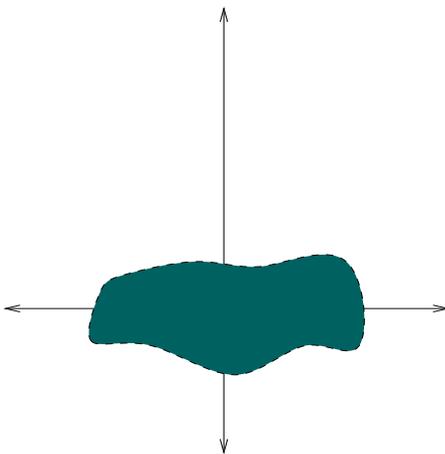


Figura 1.1: Un conjunto analítico en \mathbb{C} .

Observación 1.21.

1. La intersección de un número finito de conjuntos analíticos es un conjunto analítico.
2. La unión de un número finito de subconjuntos analíticos es un subconjunto analítico. Sea $U \subset \Omega$ un dominio y A_j , $j = 1, \dots, m$ conjuntos definidos por los sistemas de funciones holomorfas $\{f_{jk}\}_{k=1}^{N_j}$, respectivamente, entonces $(\bigcup_1^m A_j) \cap U$ es el conjunto de ceros comunes de todas las funciones de la forma $\prod_{j=1}^m f_{jk_j}$ donde $1 \leq k_j \leq N_j$.
3. La unión finita de conjuntos analíticos locales no necesariamente es analítico local, por ejemplo,

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 < 1\} \text{ y } \mathcal{B} = \{(1, 0)\} \text{ en } \mathbb{C}^2.$$

Se tiene que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ no satisface la condición de analiticidad local en el punto $(1, 0)$ (por el principio de identidad).

4. La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos analíticos de una variedad compleja es también un subconjunto analítico de la variedad ([2], 5.6).

Proposición 1.22. Sean X e Y variedades complejas, $\phi : X \rightarrow Y$ una transformación holomorfa. Sea $A \subset Y$ un conjunto analítico, se tiene que $\phi^{-1}(A)$ es un conjunto analítico en X .

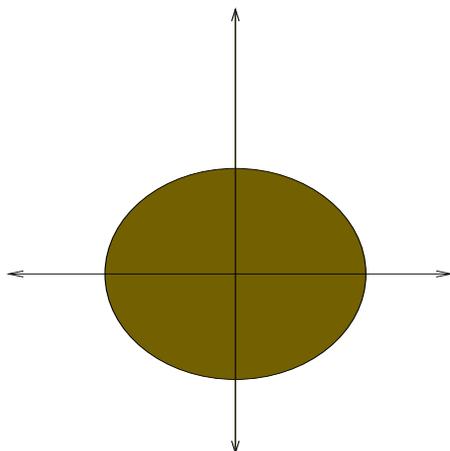


Figura 1.2: Un conjunto analítico que no es un subconjunto analítico de \mathbb{C} .

Demostración. Sea $\phi(b) = a \in A$, y sean f_1, \dots, f_N funciones holomorfas en una vecindad U de a definiendo $A \cap U$. Entonces $V = \phi^{-1}(U)$ es una vecindad de b en la cual $\phi^{-1}(A)$ es el conjunto de ceros comunes de las funciones holomorfas $f_1 \circ \phi, \dots, f_N \circ \phi$. \square

Proposición 1.23. Sean $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2$ subconjuntos analíticos, entonces el producto directo $A_1 \times A_2$ es un subconjunto analítico en $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Demostración. Sea π_j la proyección de $\Omega_1 \times \Omega_2$ sobre Ω_j , $j = 1, 2$. Entonces por la proposición 1.22, se tiene que $A_1 \times \Omega_2 = \pi_1^{-1}(A_1)$ y $\Omega_1 \times A_2 = \pi_2^{-1}(A_2)$ son subconjuntos analíticos en $\Omega_1 \times \Omega_2$. La intersección de estos conjuntos es $A_1 \times A_2$. \square

La siguiente proposición es llamada el teorema de unicidad para conjuntos analíticos y es consecuencia del teorema de unicidad para funciones holomorfas.

Proposición 1.24. Sea Ω una variedad compleja conexa y $A \subset \Omega$ un conjunto analítico, el cual contiene un subconjunto abierto no vacío en Ω . Entonces $A = \Omega$.

Demostración. Sea A° el conjunto de puntos interiores de A . Por hipótesis A° no es vacío, y por definición es abierto. Sea a un punto límite de A° . Entonces $a \in A$ ya que A es cerrado en Ω . Por tanto en alguna vecindad U de a el conjunto $A \cap U$ es el conjunto de ceros comunes de funciones

holomorfas f_1, \dots, f_N . Como todas las f_j se anulan en el conjunto abierto no vacío $A^\circ \cap U$, por el teorema de unicidad para funciones holomorfas, se tiene que $f_j \equiv 0$ en U , $\forall j = 1, \dots, N$. Por tanto $a \in U \subset A^\circ$. Luego A° es también cerrado en Ω y como Ω es conexo, $A^\circ = \Omega$. \square

Por una **superficie de Riemann** entendemos una variedad compleja conexa unidimensional.

Definición 1.25. Un subconjunto analítico A de una superficie de Riemann Ω se dice **localmente finito** si para cualquier conjunto compacto $K \subset \Omega$, se tiene $A \cap K$ es finito.

Proposición 1.26. *Sea A un subconjunto analítico propio en una superficie de Riemann Ω . Se tiene que A es localmente finito.*

Demostración. Sea $a \in A$ y f_1, \dots, f_N definiendo A en una vecindad conexa U de a , entonces al menos una $f_j \neq 0$ en U , de otra forma $U \subset A$ y $A = \Omega$ por la proposición 1.24. El teorema de unicidad para funciones de una variable compleja implica que f_j es libre de ceros en alguna vecindad agujerada $V \setminus \{a\}$ de a . Esto significa que $V \cap A = \{a\}$ y por tanto A es un conjunto discreto. Como A es cerrado, se tiene que $A \cap K$ es un conjunto compacto discreto, es decir un conjunto finito. \square

Proposición 1.27. *Un conjunto analítico $A \subset \mathbb{C}^n$ es compacto si y sólo si A es un conjunto finito.*

Demostración. Para $n = 1$, es el teorema de unicidad para conjuntos analíticos. La transición de $n - 1$ a n se realiza usando la proyección $\pi : z \mapsto z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Como A es compacto, $\pi(A)$ es un conjunto analítico compacto en \mathbb{C}^{n-1} y por tanto un conjunto finito. Como las fibras de $\pi|_A$ son localmente finitas, se tiene que A es un conjunto finito. \square

Denotemos por \max el máximo de un conjunto y por \min el mínimo.

Definición 1.28. Sea M una variedad compleja m -dimensional y sea $A \subset M$. Si A no es vacío, se define la **dimensión topológica de A** como,

$$\dim A := \max\{\dim N \mid N \text{ es una subvariedad de } M \text{ y } N \subset A\}.$$

Si $A = \emptyset$, se define $\dim \emptyset := -1$.

Definición 1.29. Sea A un conjunto en una variedad compleja M y $a \in M$. La **dimensión de A en el punto a** , denotado por $\dim_a A$, es definido como

$$\dim_a A := \min\{\dim(A \cap U) \mid U \text{ es una vecindad abierta de } a\}.$$

Si a es un punto que no está en A , es conveniente poner $\dim_a A = -1$. La codimensión de un conjunto analítico $A \subset \Omega$ es, por definición, igual a $\dim \Omega - \dim A$.

La definición anterior la podemos aplicar para conjuntos que son analíticos y así hablar de la **dimensión de un conjunto analítico en un punto**.

Ejemplo 1.30. El conjunto analítico $z_1 z_2 = z_1 z_3 = 0$ en \mathbb{C}^3 tiene dimensión 2 en todos los puntos del plano complejo \mathbb{C}_{23} donde $\mathbb{C}_{23} := \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 = 0\}$ y dimensión 1 en los puntos del plano uno-dimensional agujerado $\mathbb{C}_1 \setminus \{0\}$.

1.3. Conjuntos algebraicos.

Sea \mathbb{C} el campo de los números complejos, se denota por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ al anillo de polinomios en n variables con coeficientes en \mathbb{C} .

Recordemos que un subconjunto I de un anillo conmutativo A se dice que es un **ideal**, si con las operaciones de adición y producto en el anillo A se tiene que I es un subgrupo aditivo y el producto de un elemento de I por uno de A pertenece a I . Dado $A \subset \mathbb{C}^N$, se define el **ideal de A** en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ como

$$I(A) := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] \mid f(P) = 0 \quad \forall P \in A\}.$$

Definición 1.31. Un subconjunto $V \subset \mathbb{C}^n$ es un **conjunto algebraico** si existe un subconjunto $X \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall f \in X\}.$$

En particular, para un ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ denotamos su conjunto de ceros por

$$\mathcal{V}(I) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall f \in I\}.$$

Un conjunto algebraico V definido por un único polinomio f , se denomina **hipersuperficie algebraica** y se denota a V por $\mathcal{V}(f)$.

Notemos que un conjunto algebraico es en particular, un conjunto analítico. Aplicamos la misma definición (1.29) para referirnos a **la dimensión de un conjunto algebraico en un punto**.

Ejemplo 1.32.

1. En \mathbb{R}^2 , para $f = ax + by$ $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{V}(f)$ es una recta.
2. En \mathbb{R}^2 , si $g = x^2 + y^2$ se tiene que $\mathcal{V}(g) = \{(0, 0)\}$. Sin embargo en \mathbb{C}^2 es la unión de las rectas complejas $x + iy = 0$ y $x - iy = 0$.

Algunas propiedades básicas de los conjuntos algebraicos las podemos encontrar en [10], páginas 1-5:

- i) \mathbb{C}^n y \emptyset son conjuntos algebraicos.
- ii) Si V_1, \dots, V_m son conjuntos algebraicos, también lo es $V_1 \cup \dots \cup V_m$.
- iii) Si $\{V_i\}$ es una familia arbitraria de conjuntos algebraicos, entonces $\bigcap_i V_i$ también es un conjunto algebraico.
- iv) Sean I_1 y I_2 ideales de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, con $I_1 \subseteq I_2$, se tiene que

$$\mathcal{V}(I_1) \supseteq \mathcal{V}(I_2).$$

- v) Sea $f = f_1^{k_1} \dots f_r^{k_r}$, se tiene que $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}(f_r)$.
- vi) una curva algebraica $\mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ es irreducible si y sólo si $f = g^k$ para algún polinomio irreducible $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$; $k \in \mathbb{N}$. En particular, si f es irreducible, se tiene que $\mathcal{V}(f)$ es irreducible.
- vii) Una curva algebraica en \mathbb{C}^2 tiene sólo un número finito de puntos singulares.

1.4. Germen de un conjunto analítico en un punto.

Consideremos la cúbica nodal definida por el polinomio irreducible

$$f(X, Y) = Y^2 - X^2(X + 1).$$

La curva es algebraicamente irreducible, pero considerada en una vecindad del origen de radio menor a 1, tenemos la siguiente descomposición

$$f(X, Y) = (Y + X\sqrt{X+1})(Y - X\sqrt{X+1}).$$

Sea $g_1 := Y + X\sqrt{X+1}$ y $g_2 := Y - X\sqrt{X+1}$, cada $\mathcal{V}(g_i)$ $i = 1, 2$ es llamada una rama de la curva. Formalizamos la noción de rama a continuación.

Definición 1.33. Consideremos el conjunto de pares (V_α, U_α) donde U_α es una vecindad abierta del origen $\underline{0}$ en \mathbb{C}^n y V_α es un subconjunto analítico de U_α . Dos de tales pares (V_1, U_1) y (V_2, U_2) serán llamados equivalentes si existe una vecindad abierta $W \subseteq U_1 \cap U_2$ del origen $\underline{0}$ tal que $W \cap V_1 = W \cap V_2$. Esta relación es de equivalencia. Una clase de equivalencia mediante esta relación es llamada el **gérmen de un subconjunto analítico en el origen** en \mathbb{C}^n .

Denotemos por \mathcal{O}_n el anillo de germen de funciones holomorfas en \mathbb{C}^n en el origen y denotemos un germen de un subconjunto analítico en el origen por V .

Definición 1.34. Un germen V de un subconjunto analítico en el origen en \mathbb{C}^n se dice **reducible** si puede ser escrito como $V := V_1 \cup V_2$, donde los $V_i \subset V$ $i = 1, 2$ son también germen del subconjunto analítico en el origen. Un germen que no es reducible se dice **irreducible**.

Como consecuencia de que el anillo de germen de funciones holomorfas en el origen es noetheriano, es decir toda sucesión creciente de ideales propios se estaciona (a partir de un m todos los ideales I_m son el mismo en la sucesión), se tiene el siguiente resultado ([9], p.11).

Proposición 1.35. *Un germen V de un subconjunto analítico en el origen en \mathbb{C}^n puede ser escrito de forma única (salvo el orden) como*

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_r$$

donde los V_i son germen irreducibles.

Definición 1.36. Se dice que el germen irreducible V_i es una **componente irreducible o rama irreducible del germen V** si forma parte de la descomposición de V en germen irreducibles como en la proposición 1.35

Denotemos por $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ el anillo de polinomios en la variable z_n con coeficientes en el anillo \mathcal{O}_{n-1}

Definición 1.37. Un **polinomio de Weierstrass** de grado k en z_n es un elemento $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de la forma $P = z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} z_n + a_k$ donde los $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ no son unidades.

Definición 1.38. Un conjunto de coordenadas z_1, \dots, z_n en el origen en \mathbb{C}^n se dice un **sistema regular de coordenadas** para un ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_n$ si para algun entero $0 \leq k \leq n$ se tiene

- (i) $\mathcal{O}_k \cap \mathcal{I}$
- (ii) $\mathcal{O}_{j-1}[z_j] \cap \mathcal{I}$ contiene un polinomio de Weierstrass en z_j para cada $j = k + 1, \dots, n$.

Un ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_n$ se dice que es k **regular** en \mathcal{O}_n si hay un sistema regular de coordenadas para \mathcal{I} donde k es el entero de la definición de sistema regular.

Observación 1.39. Dado cualquier ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_n$ y un sistema de coordenadas z_1, \dots, z_n en el origen en \mathbb{C}^n , un cambio líneal de coordenadas transformará el sistema de coordenadas dado en un sistema regular de coordenadas para el ideal \mathcal{I} .

Capítulo 2

Conos y politopos

2.1. Conos poliédricos.

Recordemos algunas nociones de geometría convexa.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cualquier par de elementos $x, y \in A$ tenemos que $tx + (1-t)y \in A$ para cualquier $t \in [0, 1]$. Interpretado geoméricamente, decimos que A es convexo si contiene el segmento de línea \overline{xy} para cualquier par de elementos $x, y \in A$.

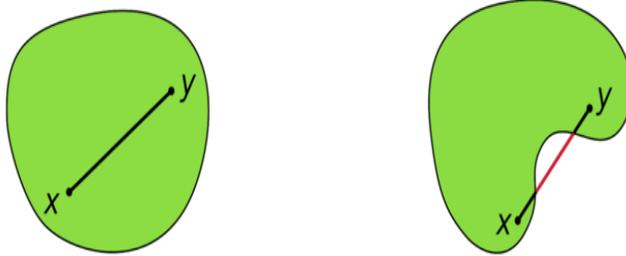


Figura 2.1: Conjunto convexo (izquierda) y no convexo (derecha).

Sea $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ una colección finita de puntos. Se dice que una combinación lineal

$$x = r_1 a_1 + \dots + r_k a_k, \quad r_i \in \mathbb{R}$$

es una **combinación convexa** si

$$r_1 + \cdots + r_k = 1 \quad \text{y} \quad r_i \geq 0, \quad \forall i.$$

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, la **envolvente convexa** de A es la unión de todas las combinaciones convexas de elementos de A . Escribimos

$$\text{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k r_i a_i \mid a_i \in A, r_i \geq 0, \sum_{i=1}^k r_i = 1 \right\}.$$

La envolvente convexa de A se puede caracterizar como el menor conjunto convexo que contiene a A . ([8], pg.14)

Un **politopo** es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.

Denotaremos el producto interno usual entre dos vectores x e y en \mathbb{R}^N por $\langle x, y \rangle$.

Un **hiperplano afín** es un conjunto de la forma

$$H(a; \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \alpha\},$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$ es un vector no cero y $\alpha \in \mathbb{R}$. Cada hiperplano afín define dos semiespacios de la forma

$$H^+(a; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq \alpha\}$$

$$H^-(a; \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \alpha\}.$$

Notemos que si $\alpha = 0$, entonces $H(a; 0) = a^\perp$ es el complemento ortogonal del espacio lineal generado por el vector a y $H(a; 0)$ es un subespacio lineal $n-1$ dimensional de \mathbb{R}^n . En general, cualquier hiperplano afín es una trasladada de algún tal subespacio. El vector a es llamado **vector normal interior** al medio espacio $H^+(a; \alpha)$.

Sea P un politopo. Llamamos **cara** del politopo P a un conjunto no vacío F , de la forma $F = H(a; \alpha) \cap P$, donde $P \subset H^+(a; \alpha)$. El conjunto vacío y el politopo también se consideran caras del politopo. Una cara de un politopo que no es el politopo ni el conjunto vacío, es una cara propia.

Sea F una cara de un politopo P . Se dice que un hiperplano $H(a; \alpha)$ es un **hiperplano soporte** para la cara F o hiperplano soporte del politopo P , si $F = H(a; \alpha) \cap P$ y $P \subset H^+(a; \alpha)$.

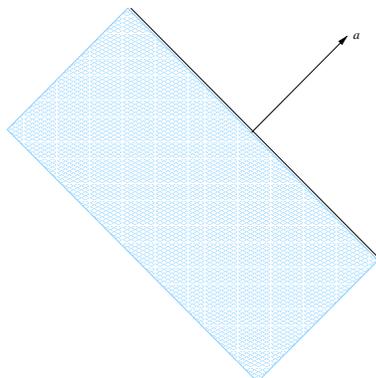


Figura 2.2: Medio espacio $H^-(a; 0)$.

Definición 2.1. Un conjunto $\sigma \subset \mathbb{R}^N$, se dice que es un **cono** si es cerrado bajo la multiplicación por escalares positivos. Es decir, si para cualquier $x \in \sigma$, se tiene que $\lambda x \in \sigma$ para todo $\lambda > 0$.

Observación 2.2. Notemos que un cono σ tal que $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in \sigma$, para cualesquiera escalares positivos λ_1, λ_2 y para cualquier $x, y \in \sigma$, es un cono convexo.

Un cono convexo σ se dice **finitamente generado** si existe

$$D := \{d_1, \dots, d_k\} \subset \mathbb{R}^n$$

tal que para todo $x \in \sigma$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ con $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i d_i$.

Definición 2.3. Un cono convexo σ se dice **poliedral** si existe una matriz A tal que $\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$. Geométricamente significa que σ es la intersección de un número finito de semiespacios lineales.

El teorema de Farkas-Minkowski-Weil dice que un cono convexo es poliedral si y sólo si es finitamente generado. ([22], p.87)

Definición 2.4. Dado $S = \{u^{(1)}, \dots, u^{(M)}\} \subset \mathbb{Z}^N$, el **cono poliedral convexo** generado por S es el conjunto convexo

$$\langle S \rangle := \{\lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \dots + \lambda_M u^{(M)} \mid \lambda_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Un cono σ es **racional**, si existe $S \subset \mathbb{Z}^N$ tal que $\sigma = \langle S \rangle$.

Definición 2.5. Un cono poliedral σ se dice **fuertemente convexo**, si no contiene ningún subespacio lineal no trivial, es decir, si $\sigma \cap (-\sigma) = \{\underline{0}\}$.

En lo que sigue del texto por **cono** entenderemos que el cono es poliedral convexo.

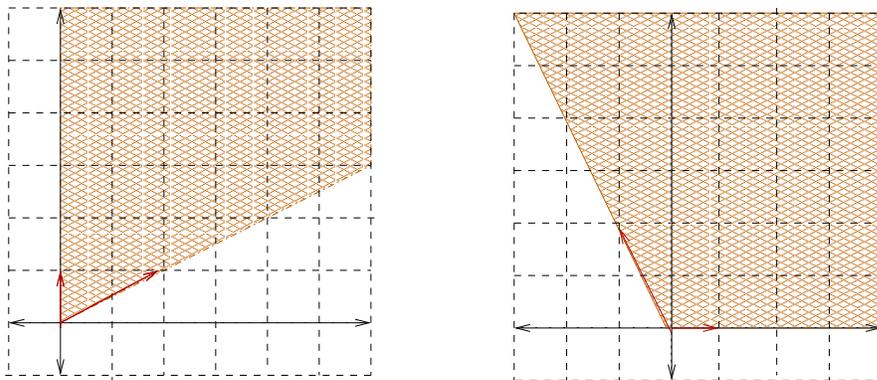


Figura 2.3: Un cono y su dual.

Definición 2.6. Dado un cono $\sigma \subset \mathbb{R}^n$, su **cono dual** es el conjunto

$$\sigma^\vee = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \geq 0, \forall u \in \sigma\}.$$

El cono dual σ^\vee es siempre convexo, incluso si el cono σ no es convexo.

Observación 2.7. Para cualquier cono $\sigma \subset \mathbb{R}^n$, se tiene $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.

Observación 2.8. Sea $\sigma = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ y $\beta \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\beta \in \sigma^\vee$ si y sólo si $\langle \beta, \alpha_j \rangle \geq 0$ para toda $j = 1, \dots, n$.

Ahora tenemos la siguiente relación entre el cono dual de un cono σ y los semiespacios cuyos vectores normales interiores son puntos del cono σ .

Proposición 2.9. Sea σ un cono y para cada $u \in \sigma$, sea $a_u \in \mathbb{R}$. Se tiene que, si $p \in \bigcap_{u \in \sigma} H(u; a_u)$, entonces $\bigcap_{u \in \sigma} H^+(u; a_u) = p + \sigma^\vee$.

Demostración. Sea $y \in \bigcap_{u \in \sigma} H^+(u; a_u)$, entonces $\langle y, u \rangle \geq a_u \forall u \in \sigma$. Puesto que $p \in \bigcap_{u \in \sigma} H(u; a_u)$, tenemos que $a_u = \langle p, u \rangle$. Por tanto,

$$\langle y - p, u \rangle \geq 0, \forall u \in \sigma.$$

La desigualdad anterior implica que $y - p$ está en σ^\vee . Luego si elegimos $x = y - p$, tenemos que $y = p + x$ con $x \in \sigma^\vee$. Inversamente sea $y = p + x$ con $x \in \sigma^\vee$. Como $x \in \sigma^\vee$ tenemos que $\langle x, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in \sigma$. Con lo que

$$\langle y, u \rangle = \langle P + x, u \rangle = \langle p, u \rangle + \langle x, u \rangle = a_u + \langle x, u \rangle \geq a_u.$$

Como la desigualdad se cumple para cualquier $u \in \sigma$, se tiene que y está en $\bigcap_{u \in \sigma} H^+(u; a_u)$. \square

2.2. El cono de recesión.

Definición 2.10. Dado un conjunto convexo no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$, se define el **cono de recesión de A**, como el conjunto

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid x + \lambda y \in A, \forall x \in A, \forall \lambda \geq 0\}.$$

Denotaremos el cono de recesión de A por $\text{Rec}(A)$.

Ejemplo 2.11. Algunos conjuntos convexos en \mathbb{R}^2 y sus conos de recesión:

$$\begin{aligned} \text{Sean } A_1 &= \{(x, y) \mid x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}, \\ A_2 &= \{(x, y) \mid y \geq x^2\}, \\ A_3 &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ se tiene,} \\ \text{Rec}(A_1) &= \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}, \\ \text{Rec}(A_2) &= \{(x, y) \mid x = 0, y \geq 0\}, \\ \text{Rec}(A_3) &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Mostramos otros ejemplos de conos de recesión en las figuras 2.9 - 2.11. El cono de recesión es convexo ([24], p.61):

Proposición 2.12. *Sea A un conjunto convexo no vacío. El cono de recesión de A es un cono convexo y es $\{y \mid A + y \subset A\}$.*

Demostración. Cada $y \in \text{Rec}(A)$ tiene la propiedad de que $x + y \in A$ para cada $x \in A$, es decir $A + y \subset A$. Por otro lado, si $A + y \subset A$ entonces

$$A + 2y = (A + y) + y \subset A + y \subset A$$

y así, en general $x + my \in A$ para cada $x \in A$ y m entero positivo. Los segmentos de línea que unen los puntos $x \in A$, $x + y$, $x + 2y$, ..., están

contenidos en A por la convexidad, así que $x + \lambda y \in A$ para cada $\lambda \geq 0$, con lo que $y \in \text{Rec}(A)$. Como la multiplicación escalar positiva no cambia la dirección, se tiene que $\text{Rec}(A)$ es un cono y además es convexo, pues si y_1 e y_2 están en $\text{Rec}(A)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene

$$(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 + A = (1 - \lambda)(y_1 + A) + \lambda(y_2 + A) \subset (1 - \lambda)A + \lambda A = A.$$

Por tanto $(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \in \text{Rec}(A)$. □

Enumeramos algunas propiedades básicas de los conos de recesión.

Observación 2.13. (Véase [24], p.64)

- i) Para cualquier conjunto no vacío A , se tiene que $\underline{0} \in \text{Rec}(A)$.
- ii) Un conjunto convexo cerrado no vacío A en \mathbb{R}^n es acotado si y sólo si $\text{Rec}(A) = \{\underline{0}\}$.
- iii) Para cualquier conjunto no vacío A , se tiene que $A + \text{Rec}(A) = A$.
- iv) $\text{Rec}(A \cup B) \supseteq (\text{Rec}(A) \cup \text{Rec}(B))$.
- v) $(\text{Rec}(A) \cap \text{Rec}(B)) \subseteq \text{Rec}(A \cap B)$.

2.3. Conos asociados al politopo de Newton

Definición 2.14. Dada una serie $\varphi = \sum_{I \in \mathbb{Z}^N} a_I z^I$, el **conjunto de exponentes** de φ es,

$$\{I \in \mathbb{Z}^N \mid a_I \neq 0\}.$$

Denotamos el conjunto de exponentes de φ por $\varepsilon(\varphi)$.

Definición 2.15. El **politopo de Newton** de $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es la envoltura convexa de $\varepsilon(f)$ y lo denotaremos por $NP(f)$.

En la tesis, todos nuestros polinomios serán supuestos complejos, es decir en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

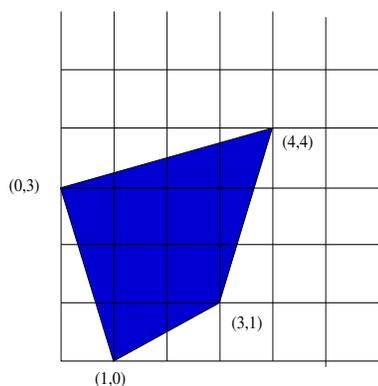


Figura 2.4: Polígono de Newton de $f = y^3 + x^4y^4 + x^3y + x$.

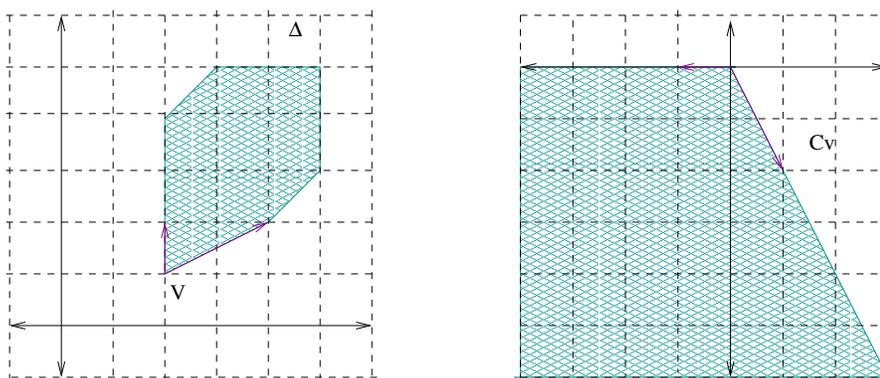


Figura 2.5: Cono normal interior de un vértice.

Definición 2.16. Sea f un polinomio. El **cono normal interior de un punto** $V \in NP(f)$, es el conjunto

$$C_V := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle \alpha - V, x \rangle \leq 0, \forall \alpha \in NP(f)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle V, x \rangle = \max_{\alpha \in NP(f)} \langle \alpha, x \rangle\}.$$

La figura 2.5 muestra el cono normal interior de un vértice.

Para un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, denotamos por

$$\mathbb{R}_+ A := \{ra \mid a \in A, r > 0\}.$$

Definición 2.17. Sea f un polinomio y V un punto de $NP(f)$. Llamamos **cono del $NP(f)$ asociado al punto V** , al cono,

$$\sigma_f(V) := \mathbb{R}_+(NP(f) - V).$$

Este cono es obtenido trasladando el politopo de Newton por $-V$ y luego trazando líneas desde el origen a todos los puntos del politopo. Un ejemplo de un cono asociado a un vértice es mostrado en la figura 2.6.

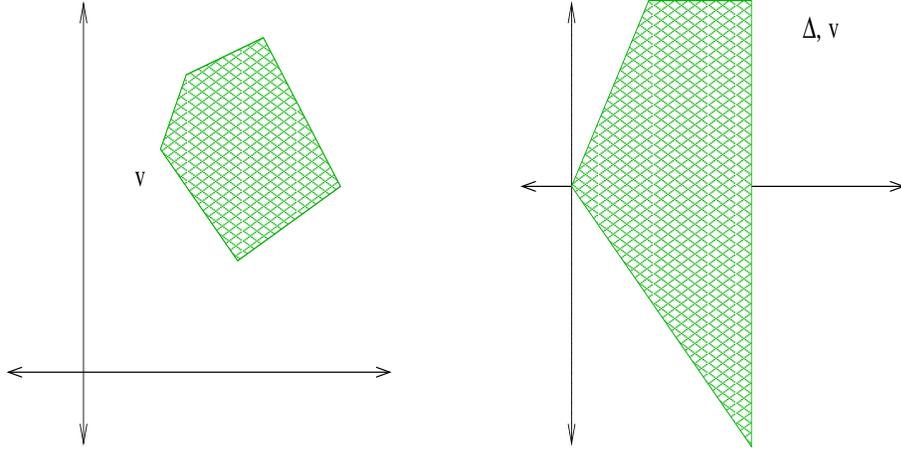


Figura 2.6: Cono asociado a un vértice.

Proposición 2.18. $\sigma_f(V) = (-C_V)^\vee$.

Demostración. Si $x \in \sigma_f(V)^\vee$ se tiene que

$$\langle \lambda(u - V), x \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, u \in NP(f).$$

En particular,

$$\langle u - V, x \rangle \geq 0,$$

y por tanto $\langle u - V, -x \rangle \leq 0$, es decir $x \in -C_V$. Inversamente si $x \in -C_V$, se tiene que $\langle u - V, -x \rangle \leq 0$. Luego $\langle \lambda(u - V), x \rangle \geq 0, \forall \lambda \geq 0$. \square

Observación 2.19. Notemos que cuando V es un vértice de $NP(f)$, $\sigma_f(V)$ representa un cono fuertemente convexo. Si V es un punto de la frontera (no vértice) del politopo, $\sigma_f(V)$ es un hiperplano y cuando V es un punto interior del politopo, $\sigma_f(V) = \mathbb{R}^N$.

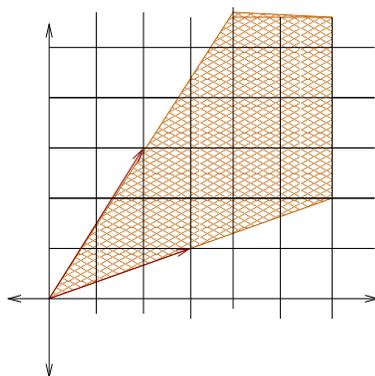


Figura 2.7: Cono fuertemente convexo, generado por los vectores $(3,1)$ y $(2,3)$.

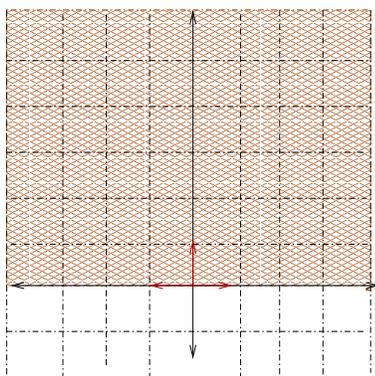


Figura 2.8: Un cono no fuertemente convexo, generado por $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1,0)$.

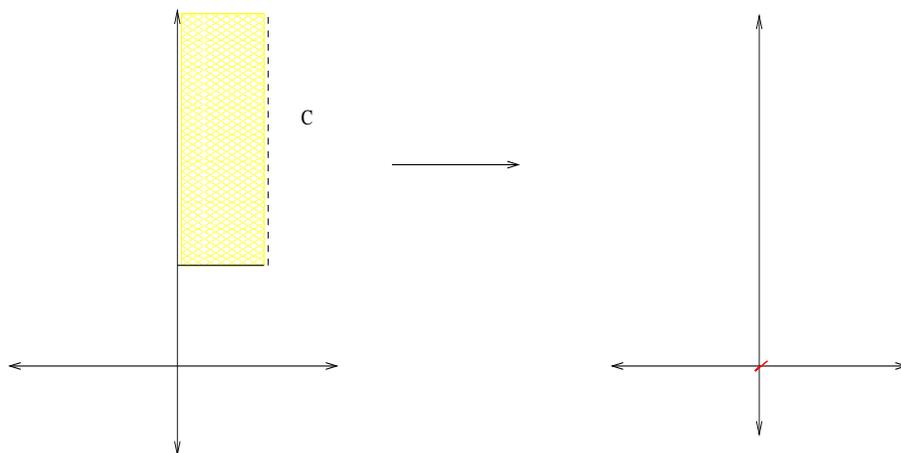


Figura 2.9: Para $C = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, y \geq 1\}$ se tiene $\text{Rec}(C) = \{0\}$.

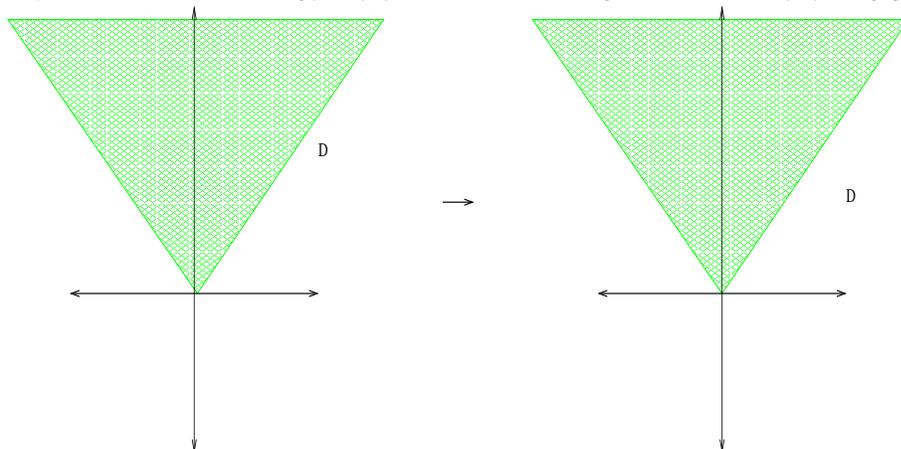


Figura 2.10: Para $D = \{(x, y) \mid y - x \geq 0, y + x \geq 0\}$ se tiene $\text{Rec}(D) = D$.

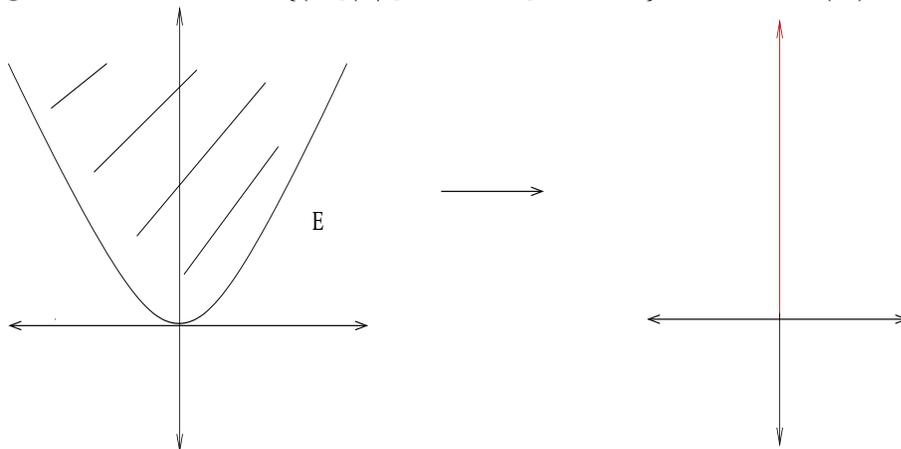


Figura 2.11: Para $E = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$ se tiene $\text{Rec}(E) = \{(0, y) : y \geq 0\}$.

Capítulo 3

Amibas

La noción de amiba fue introducida en los 90s por los matemáticos Gelfand, Kapranov y Zelevinsky [7].

Dada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$ y $z = (z_1, \dots, z_N)$ utilizaremos la notación

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_N^{\alpha_N}.$$

Recordemos que un **polinomio de Laurent** en n variables es una expresión de la forma

$$f(z) = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha z^\alpha$$

donde $J \subset \mathbb{Z}^n$ es un conjunto finito y que dado un polinomio de Laurent f denotamos su conjunto de ceros en \mathbb{C}^n por

$$\mathcal{V}(f) := \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0\}.$$

Sean $\tau : \mathbb{C}^n \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ y $\text{Log} : (\mathbb{R}_{> 0})^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ las transformaciones definidas por

$$\tau(z_1, \dots, z_n) := (|z_1|, \dots, |z_n|)$$

$$\text{Log}(x_1, \dots, x_n) = (\log x_1, \dots, \log x_n).$$

Definición 3.1. Sea $\mathcal{V}(f) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ una hipersuperficie. **La amiba de $\mathcal{V}(f)$** es su imagen bajo la transformación $\text{Log} \circ \tau$. Denotaremos a la amiba por \mathcal{A}_f . Es decir, $\mathcal{A}_f := \text{Log}(\tau(\mathcal{V}(f)))$.

Dada $z \in \mathbb{C}^n$, cuando no haya confusión, escribiremos $\text{Log}(z)$ en lugar de $\text{Log} \circ \tau(z)$, así para $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $\text{Log}(\Omega)$ significa $\text{Log} \circ \tau(\Omega)$.

Definición 3.2. Un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ es llamado de **Reinhardt** si $\tau^{-1}(\tau(\Omega)) = \Omega$.

Definición 3.3. Un conjunto de Reinhardt $\Omega \subset (\mathbb{C}^*)^N$ se dice **logarítmicamente convexo** si el conjunto $\text{Log}(\Omega)$ es convexo.

3.1. La función de Ronkin

Una herramienta útil para el estudio de las amibas es la función de Ronkin.

Definición 3.4. Sea $p(z)$ un polinomio de Laurent en n variables, se define la **función de Ronkin**

$$N_p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

mediante la fórmula

$$N_p(x) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(x)} \log|p(z)| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \frac{dz_2}{z_2} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n},$$

donde x es una n -tupla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Equivalentemente, en coordenadas polares, N_p es dada por la integral

$$N_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} \log|p(z)| d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n,$$

donde $z = (e^{x_1+i\theta_1}, e^{x_2+i\theta_2}, \dots, e^{x_n+i\theta_n})$.

Ejemplo 3.5.

i) Cuando $n = 1$ y p es un polinomio con $p(0) \neq 0$, obtenemos la clásica fórmula de Jensen del análisis complejo:

$$N_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|p(re^{i\theta})| d\theta = \log|p(0)| + \sum_{j=1}^m \log\left(\frac{r}{|a_j|}\right),$$

donde los a_j son ceros de p y m es el índice mas grande tal que $|a_m| < r$.

La fórmula de Jensen relaciona el promedio de una función analítica sobre un círculo con el número de sus ceros dentro del círculo. Nótese que $\partial N_p(x)/\partial x$ es el número de ceros de p dentro del círculo $|z| < r$.

ii) Para un monomio $P(z) = az_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n}$ con $a \neq 0$, la función de Ronkin es

$$N_p(x) = \log|a| + k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n.$$

Observación 3.6. Sea f un polinomio. Se sabe por ([20], 3.1) que la función de Ronkin es una función convexa sobre \mathbb{R}^n y es estrictamente convexa sobre la \mathcal{A}_f .

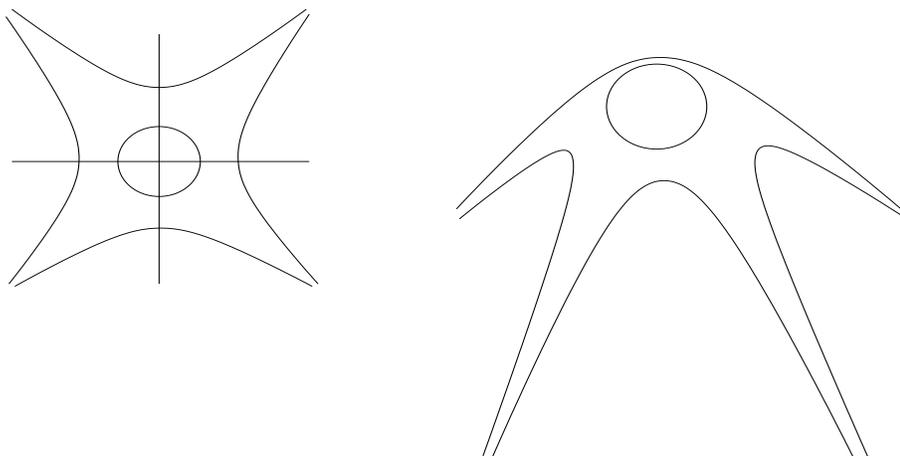


Figura 3.1: La amiba de $f := x + x^{-1} + y + y^{-1} + 5$ (izquierda) y la imagen de la función de Ronkin de f (Derecha)([12]).

Observación 3.7. Fosberg Passare and Tsikh demuestran ([5], 2.1) que $\partial N_p(x)/\partial x_i$ es constante para toda x en la misma componente conexa del complemento de \mathcal{A}_p . Esto implica que N_p es afín en cada componente conexa del complemento de la amiba.

Definición 3.8. Sea \mathcal{F} una componente conexa de \mathcal{A}_p^c y $x \in \mathcal{F}$. Llamamos **orden de la componente \mathcal{F}** , al gradiente de la función de Ronkin para p restringido a \mathcal{F} y lo denotamos por $\text{Ord}(\mathcal{F})$, es decir,

$$\text{Ord}(\mathcal{F}) = \left(\partial N_p(x)/\partial x_1, \partial N_p(x)/\partial x_2, \cdots, \partial N_p(x)/\partial x_n \right).$$

Si $x \in \mathcal{F}$, **por orden de x** , entenderemos el orden de \mathcal{F} y lo denotaremos por $\text{Ord}(x)$.

Observación 3.9. Es mostrado ([5], Prop.2.4 y 2.5) que el orden de una componente es un punto con coordenadas enteras de $NP(p)$ y que diferentes componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_p$ tienen diferentes órdenes.

Observación 3.10. Como N_p es afín en cada componente del complemento de la amiba, tenemos que si \mathcal{F} es una componente de orden α , entonces,

$$N_p(x) = c + \langle \alpha, x \rangle \quad \text{en } \mathcal{F}.$$

Ejemplo 3.11. Consideremos un polinomio en una variable

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{m-1}z^{m-1} + z^m = (z + \alpha_1) \cdots (z + \alpha_m)$$

donde asumimos que $0 < |\alpha_1| \leq \cdots \leq |\alpha_m|$ y $a_0 \neq 0$. La amiba de f es el conjunto discreto de puntos

$$\{\log|\alpha_1|, \dots, \log|\alpha_m|\}.$$

Como $x \in (\log|\alpha_j|, \log|\alpha_{j+1}|)$ si y sólo si $|\alpha_j| < e^x < |\alpha_{j+1}|$ tenemos, por la fórmula de Jensen, que

$$\begin{aligned} N_f(x) &= \int_0^{2\pi} \log|f(e^{x+i\theta})| d\theta = \log|a_0| + \sum_{k=1}^j \log\left(\frac{e^x}{|\alpha_k|}\right) \\ &= \log|a_0| - \sum_{k=1}^j \log|\alpha_k| + jx. \end{aligned}$$

Por tanto $\partial N_f(x)/\partial x = j$ es decir hay j ceros de f en el círculo $|z| < e^x$. Luego las componentes conexas del complemento de la amiba

$$(\log|\alpha_j|, \log|\alpha_{j+1}|) \quad \text{para } j = 1, \dots, m-1,$$

tienen orden j y las componentes no acotadas

$$(-\infty, \log|\alpha_1|) \quad \text{y} \quad (\log|\alpha_m|, +\infty)$$

tienen orden 0 y m , respectivamente.

3.2. Algunos resultados básicos sobre amibas

A continuación enunciamos algunas propiedades sobre las amibas en las cuales juega un rol importante el politopo de Newton.

Denotamos por $\mathcal{C}(f)$ el conjunto de componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_f$ (Véase [7], p.192).

Proposición 3.12. *Todo elemento $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(f)$ es convexo y $\mathcal{C}(f)$ esta en correspondencia biyectiva con las distintas expansiones de Laurent de $1/f$.*

Demostración. Se tienen los siguientes hechos generales sobre series de Laurent (Véase [7], p.192):

El dominio de convergencia de una serie de Laurent $F \in \mathbb{C}[[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]]$ es un dominio de Reinhardt logarítmicamente convexo. Si φ es una función holomorfa en un dominio de Reinhardt, existe una única serie de Laurent F centrada en $\underline{0}$ convergente a φ en este dominio.

Luego el resultado se sigue como consecuencia de que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es un dominio de Reinhardt y $1/f$ es holomorfa en $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$. \square

Observación 3.13. Por la prueba anterior se tiene que para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(f)$, $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es el dominio de convergencia de una expansión en serie de Laurent de $1/f$.

Observación 3.14. ([5], Th.2.8)

Existe una inyección natural $\mathcal{C}(f) \hookrightarrow NP(f) \cap \mathbb{Z}^n$, definida por

$$\mathcal{F} \mapsto \text{Ord}(\mathcal{F}).$$

Los vértices de $NP(f)$ están siempre en la imagen de esta inyección. Un elemento de $\mathcal{C}(f)$ es acotado si y sólo si su imagen está en el interior de $NP(f)$. Como consecuencia, se tienen las siguientes desigualdades

$$\#\{\text{vértices de } NP(f)\} \leq \#\mathcal{C}(f) \leq \#(NP(f) \cap \mathbb{Z}^n).$$

Donde $\#A$ denota la cardinalidad del conjunto A .

Observación 3.15. Si $\mathcal{V}(f) \subset (\mathbb{C}^*)^2$, entonces (área de \mathcal{A}_f) $\leq \pi^2$ (área de $NP(f)$)(Véase [18]).

3.3. El cono de recesión de una componente conexa del complemento de la amiba

Esta sección está basada en [5]. El siguiente Lema es probado y utilizado por Fosberg, Passare y Tsik para demostrar que diferentes componentes tienen diferentes órdenes.

Sea $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ y $w \in \mathbb{C}$, denotamos

$$cw^\mu := (c_1 w^{\mu_1}, \dots, c_n w^{\mu_n}).$$

Lema 3.16. *Sea f un polinomio de Laurent, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(f)$, $x \in \mathcal{F}$ y V el orden de \mathcal{F} . Para cualquier $\mu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, se tiene que $\langle \mu, V \rangle$ es igual al número de ceros menos el número de polos contando multiplicidades del polinomio de Laurent en una variable*

$$w \mapsto f(cw^\mu)$$

dentro del disco unitario $|w| < 1$, donde $c = (c_1, \dots, c_n)$ es un punto arbitrario en $\text{Log}^{-1}(x)$.

Demostración. Sabemos por el clásico principio del argumento (ver por ejemplo [3], p.123) que el número de ceros menos el número de polos de $f(cw^\mu)$ en el disco unitario está dado por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{df(cw^\mu)}{f(cw^\mu)}.$$

La imagen del círculo unitario $|w| = 1$ bajo cw^μ es un lazo contenido en $\text{Log}^{-1}(x)$ el cual es homólogo a $\mu_1 \gamma_1 + \dots + \mu_n \gamma_n$ donde,

$$\gamma_j : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (c_1, \dots, c_{j-1}, c_j e^{it}, c_{j+1}, \dots, c_n)$$

(Ver [19], 4.6). Entonces, podemos reescribir

$$\begin{aligned} \int_{|w|=1} \frac{df(cw^\mu)}{f(cw^\mu)} &= \sum_{j=1}^n \mu_j \int_{|\zeta_j|=e^{x_j}} \frac{f'_j(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta_j \\ &= 2\pi i \sum_{j=1}^n \mu_j V_j = 2\pi i \langle \mu, V \rangle \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. □

Lema 3.17. *Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(f)$, $x \in \mathcal{F}$, $c \in \text{Log}^{-1}(x)$ y $\mu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Se tiene que, $x + \mu\mathbb{R}_{>0} \cap \mathcal{A}_f = \emptyset$ si y sólo si $w \mapsto f(cw^\mu)$ tiene todos sus ceros dentro del disco unitario.*

Demostración. Sea $\lambda > 0$ y sea $x' = x + \lambda\mu$, $V = \text{Ord}(x)$, $V' = \text{Ord}(x')$. Por el lema 3.16, sabemos que $\langle \mu, V \rangle$ y $\langle \mu, V' \rangle$ son respectivamente iguales al número de ceros menos el número de polos en el disco unitario de

$$w \mapsto f(cw^\mu) \quad \text{y} \quad w \mapsto f(c'w^\mu),$$

donde $c' = (c'_1, \dots, c'_n) \in \text{Log}^{-1}(x')$. Elijamos c' tal que $c'_j = c_j e^{\lambda\mu_j}$, por tanto, $c'w^\mu = c(e^\lambda w)^\mu$. Esto significa que $\langle \mu, V' \rangle$ es el número de ceros menos el número de polos de $f(cw^\mu)$ dentro del disco $|w| = e^\lambda$. Si x y x' pertenecieran a diferentes componentes, existiría un $y \in \overline{xx'}$ tal que $y \in \mathcal{A}_f$, pero por otra parte $y \in \mathcal{A}_f^c$ por ser de la forma $x + \lambda_1\mu$ para algún $\lambda_1 > 0$. Entonces x y x' están en \mathcal{F} . Por tanto $\langle \mu, V \rangle = \langle \mu, V' \rangle$, así que $w \mapsto f(cw^\mu)$ no tiene ceros en el anillo $R = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |w| < e^\lambda\}$. Como λ puede ser arbitrariamente grande, se sigue que $w \mapsto f(cw^\mu)$ tiene todos sus ceros dentro del disco unitario. Inversamente, supongamos que $w \mapsto f(cw^\mu)$ tiene todos sus ceros dentro del disco unitario. Entonces no tiene ceros en el anillo $R' = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |w| \leq e^\lambda\}$. Por tanto, no hay puntos de la amiba sobre el segmento $\overline{xx'}$. Esto implica que x y x' están en la misma componente. \square

Proposición 3.18. *Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(f)$ y sea V el orden de \mathcal{F} . Se tiene que $C_V \subset \text{Rec}(\mathcal{F})$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{F}$, $c \in \text{Log}^{-1}(x)$ y $\mu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ un punto de C_V . Como $\mu \in C_V$, se tiene que $\langle \mu, V \rangle = \max_{\alpha \in NP(f)} \langle \mu, \alpha \rangle$ (Véase 2.16) y por el lema 3.16, se sabe que $\langle \mu, V \rangle$ cuenta el número de ceros menos el orden del polo en cero del polinomio de Laurent $w \mapsto f(cw^\mu)$. Como el grado del polinomio $f(cw^\mu)$ es $\max_{\alpha \in NP(f)} \langle \mu, \alpha \rangle$ y su número de ceros es igual al grado del polinomio más el orden del polo en cero, se tiene que todos los ceros de $w \mapsto f(cw^\mu)$ están dentro del disco unitario. Por el lema 3.17, tenemos que, $x + \mu\mathbb{R}_{>0} \cap \mathcal{A}_f = \emptyset$. Por tanto, los puntos enteros de C_V están en $\text{Rec}(\mathcal{F})$. Puesto que C_V es un cono racional, se sigue que $C_V \subset \text{Rec}(\mathcal{F})$. \square

Capítulo 4

Cinceles

4.1. σ -Cinceles

En este capítulo tratamos la noción de σ -Cincel, el cual es el análogo para series con exponentes en el cono σ de polidiscos para series con exponentes no negativos. El desarrollo de Taylor de una función holomorfa en un disco centrado en el origen es una serie con exponentes en el ortante no negativo. Se tiene un resultado similar para σ -Cinceles y series con exponentes en el cono σ (véase [1], 4.5).

Introducimos algunas notaciones. Para $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_N) \in (\mathbb{R}_{>0})^N$, definimos

$$\overline{\mathbb{D}}_\varrho := \{z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N \mid |z_i| \leq \varrho_i, \quad i = 1, \dots, N\}$$

y $\overline{\mathbb{D}}_\varrho^* := \overline{\mathbb{D}}_\varrho \cap (\mathbb{C}^*)^N$ donde $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Sea d un número natural, y sea $\xi_d : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ definida por

$$\xi_d(z_1, \dots, z_N) := (z_1^d, \dots, z_N^d).$$

Dada $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, definamos $\sqrt[d]{\Omega} := \xi_d^{-1}(\Omega)$.

Definición 4.1. Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^N$ un cono. Para $\varrho \in (\mathbb{R}_{>0})^N$, el σ -Cincel de poliradio ϱ es el conjunto

$$C(\sigma, \varrho) := \{z = (z_1, \dots, z_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \mid \tau(z)^u \leq \varrho^u, \forall u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^N\},$$

donde $\tau(z) := (|z_1|, \dots, |z_N|)$.

Observación 4.2.

1. Si σ es el cono generado por $A = \{u^{(1)}, \dots, u^{(M)}\} \subset \mathbb{Z}^N$ y $\varrho \in (\mathbb{R}_{>0})^N$ se tiene,

$$C(\sigma, \varrho) := \{z \in (\mathbb{C}^*)^N \mid \tau(z)^{u^{(i)}} \leq \varrho^{u^{(i)}}, \forall i = 1, \dots, M\}.$$

2. Si $\sigma_1 \subset \sigma_2$, entonces $C(\sigma_2, \varrho) \subset C(\sigma_1, \varrho)$.

3. $\sqrt[d]{C(\sigma, \varrho)} = C(\sigma, \sqrt[d]{\varrho})$.

4. Los σ -Cinceles son conjuntos de Reinhard.

Ejemplo 4.3. Sea σ el cono generado por $(1, 0)$ y $(-2, 1)$ en \mathbb{R}^2 y sea $\varrho = (1, 1)$. Se tiene que

$$C(\sigma, \varrho) = \{z \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \tau(z)^u \leq \varrho^u, u = (1, 0), (-2, 1)\},$$

$$\tau(C(\sigma, \varrho)) = \left\{ \tau(z_1, z_2) = (|z_1|, |z_2|) \mid (z_1, z_2) \in C(\sigma, \varrho) \right\}.$$

Haciendo $|z_1| = x$ y $|z_2| = y$, tenemos que

$$\tau(C(\sigma, \varrho)) = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_{>0})^2 \mid x \leq 1, x^{-2}y \leq 1 \right\},$$

es la región del plano mostrada en la figura 4.1.

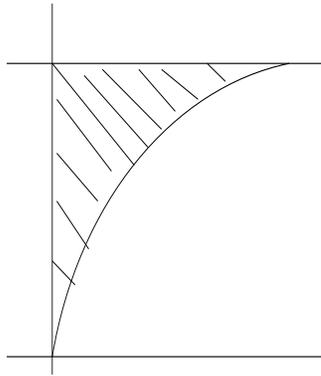


Figura 4.1: La imagen bajo τ de un cincel.

Observación 4.4. Si σ no es fuertemente convexo, existe $u \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ tal que $\langle u, -u \rangle \subset \sigma$. Entonces, por la Observación 4.2,2, tenemos que,

$$\begin{aligned} C(\sigma, \varrho) \subset C(\langle u, -u \rangle, \varrho) &= \{z \in (\mathbb{C}^*)^N \mid \tau(z)^u \leq \varrho^u, \tau(z)^{-u} \leq \varrho^{-u}\} \\ &= \{z \in (\mathbb{C}^*)^N \mid \tau(z)^u = \varrho^u\}. \end{aligned}$$

Por tanto $C(\sigma, \varrho)$ tiene interior vacío.

Si σ es fuertemente convexo, entonces $C(\sigma, \varrho)$ es un dominio de Reinhardt logarítmicamente convexo con interior no vacío ([1], 3.6).

Lema 4.5. *Sea σ un cono. Para cualquier $\varrho \in (\mathbb{R}_{>0})^N$, se tiene*

$$\text{Log}(\tau(C(\sigma, \varrho))) = \bigcap_{u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^N} H^+(-u; -\log \varrho^u).$$

Demostración. Sea $x \in \text{Log}(\tau(C(\sigma, \varrho)))$, entonces existe $z \in C(\sigma, \varrho)$, tal que $x = \text{Log}(\tau(z))$.

Sea $u = (u_1, \dots, u_n) \in \sigma$, entonces $\tau(z)^u \leq \varrho^u$, así que

$$-\log(\tau(z)^u) \geq -\log \varrho^u.$$

Por tanto

$$\langle x, -u \rangle = \sum_{j=1}^N -u_j \log |z_j| = \log(\tau(z)^{-u}) \geq \log \varrho^{-u}.$$

Y ya que u fue cualquier punto del cono σ , se tiene que

$$x \in \bigcap_{u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} H^+(-u; -\log \varrho^u).$$

Inversamente, sea $x \in \bigcap_{u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n} H^+(-u; -\log \varrho^u)$, entonces, para cualquier $u \in \sigma$ se tiene que $\langle x, u \rangle \leq \log \varrho^u$. Como $x = \text{Log}(\tau(z))$ para algún $z = (z_1, \dots, z_N) \in (\mathbb{C}^*)^N$ tenemos que

$$\log(\tau(z)^u) = \sum_{j=1}^N u_j \log |z_j| = \langle x, u \rangle \leq \log \varrho^u.$$

Con lo que $\tau(z)^u \leq \varrho^u$. Así que $z \in C(\sigma, \varrho)$ y por tanto $x \in \text{Log}(\tau(C(\sigma, \varrho)))$. \square

Observación 4.6. Para σ un cono racional y $\varrho \in (\mathbb{R}_{>0})^N$, se tiene que $\text{Log}(\tau(C(\sigma, \varrho)))$ es la intersección de medios hiperplanos y por tanto es un conjunto conexo de interior conexo. Como Log es un homeomorfismo, también se tiene que $C(\sigma, \varrho)$ es un conjunto conexo de interior conexo.

Definición 4.7. Sea σ un cono. Diremos que un conjunto $\Omega \subset (\mathbb{C}^*)^N$ es σ -completo si se cumple que,

$$C(\sigma, \tau(z)) \subset \Omega, \quad \forall z \in \Omega.$$

Observación 4.8.

1. Un σ -cincel es σ -completo.
2. Un conjunto σ -completo es un conjunto de Reinhardt.

Proposición 4.9. Si Ω es σ -completo, entonces $\sqrt[d]{\Omega}$ es σ -completo para cualquier número natural d .

Demostración. Sea d un número natural, Ω un conjunto σ -completo y sea $z \in \sqrt[d]{\Omega}$. Como $z^d = (z_1^d, \dots, z_N^d) \in \Omega$, tenemos que,

$$C(\sigma, \tau(z^d)) \subset \Omega.$$

Esto implica que

$$\sqrt[d]{C(\sigma, \tau(z^d))} \subset \sqrt[d]{\Omega}.$$

Luego, por la observación 4.2,3 tenemos que, $C(\sigma, \tau(z)) \subset \sqrt[d]{\Omega}$, es decir, $\sqrt[d]{\Omega}$ es σ -completo. \square

Proposición 4.10. Sea σ un cono y $\varrho \in (\mathbb{R}_{>0})^N$. Se cumple que,

$$\text{Log}(\tau(C(\sigma, \varrho))) = \text{Log} \varrho + (-\sigma)^\vee.$$

Demostración. Por definición de $H(-u; -\log \varrho^u)$, se tiene que,

$$\text{Log} \varrho \in \bigcap_{u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^N} H(-u; -\log \varrho^u).$$

Además por el lema 4.5, se tiene que,

$$\text{Log}(\tau(C(\sigma, \varrho))) = \bigcap_{u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^N} H^+(-u; -\log \varrho^u).$$

Luego el resultado se sigue de la proposición 2.9 \square

4.2. Series de Laurent con exponentes en un cono.

Damos una demostración de la siguiente afirmación, que aparece como observación en ([1], 4.2).

Proposición 4.11. *Sea Ω el dominio de convergencia de una serie de Laurent φ con exponentes en un cono σ . Se tiene que Ω es σ -completo.*

Demostración. Sea $\varphi = \sum_{u \in \sigma} c_u z^u$ y sea $z_0 \in \Omega$. Puesto que φ es absolutamente convergente en Ω , se tiene que

$$\sum_{u \in \sigma} |c_u z_0^u| < \infty.$$

Sea $w \in C(\sigma, \tau(z_0))$, se tiene,

$$\tau(w)^u \leq \tau(z_0)^u \quad \forall u \in \sigma.$$

Con lo que $|c_u w^u| < |c_u z_0^u| \quad \forall u \in \sigma$. Ahora, por la prueba de comparación para series, se tiene que $w \in \Omega$. Con lo que,

$$C(\sigma, \tau(z)) \subset \Omega \quad \forall z \in \Omega,$$

es decir, Ω es σ -completo. □

Recordemos que dada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$ y $z = (z_1, \dots, z_N)$ utilizaremos la notación

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_N^{\alpha_N}.$$

Dada una M -tupla de vectores $\mathcal{B} = \{u^{(1)}, \dots, u^{(M)}\} \subset \mathbb{Z}^N$ definimos la transformación

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{B}} : (\mathbb{C}^*)^N &\rightarrow (\mathbb{C}^*)^M \\ z &\mapsto (z^{u^{(1)}}, z^{u^{(2)}}, \dots, z^{u^{(M)}}). \end{aligned}$$

Usaremos la transformación $\Phi_{\mathcal{B}}$ en el siguiente lema ([1], 4.4).

Lema 4.12. *Sea Ω un dominio de Reinhardt, $\nu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\underline{0}\}$ y una función holomorfa acotada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Si Ω es $H^+(\nu; 0)$ -completo, entonces el conjunto de exponentes de la expansión en serie de Laurent centrada en $\underline{0}$ de f está contenido en $H^+(\nu; 0)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{e^{(1)}, \dots, e^{(n-1)}, \nu\} \subset \mathbb{Z}^n$ una base ortogonal de \mathbb{R}^n . Tenemos que $H^+(\nu; 0) = \langle e^{(1)}, \dots, e^{(n-1)}, -e^{(1)}, \dots, -e^{(n-1)}, \nu \rangle$. Para $I \in \mathbb{Z}^n$, sea $I_{\mathcal{B}}$ las coordenadas de I en la base \mathcal{B} . Como $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^n$, existe un número natural d tal que $dI_{\mathcal{B}} \in \mathbb{Z}^n$ para cualquier $I \in \mathbb{Z}^n$.

Sea $\varphi = \sum_{I \in \mathbb{Z}^n} a_I z^I$ la expansión en serie de Laurent de f , y sea,

$$\psi := \sum_{I \in \mathbb{Z}^n} a_I y^{dI_{\mathcal{B}}}, \quad \text{donde } y = (y_1, \dots, y_n).$$

Para cualquier $z \in \sqrt[d]{\Omega}$, $\psi(\Phi_{\mathcal{B}}(z)) = \varphi(z^d)$. Por tanto, ψ es convergente y acotada en $\Phi_{\mathcal{B}}(\sqrt[d]{\Omega})$. De la forma en que ψ ha sido definida se tiene:

i) $\varepsilon(\varphi) \subset H^+(\nu; 0)$ si y sólo si $\varepsilon(\psi) \subset H^+((0, \dots, 0, 1); 0)$.

Sea π la transformación definida por $\pi(y_1, \dots, y_n) := (y_1, \dots, y_{n-1})$. Reescribimos la serie ψ en la forma

$$\psi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j(\pi(y)) y_n^j, \quad \text{donde } g_j = \sum_{(0, \dots, 0, 1) dI_{\mathcal{B}} = j} a_I x^{d\pi(I_{\mathcal{B}})}$$

para $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Por tanto tenemos que,

ii) $\varepsilon(\varphi) \subset H^+(\nu; 0)$ si y sólo si $g_j(x) \equiv 0$ para todo $j < 0$.

Para cualquier $\varrho \in \tau(\sqrt[d]{\Omega})$, por la observación 4.2, el círculo $C(H^+(\nu; 0), \varrho)$ es contenido en $\sqrt[d]{\Omega}$. Así que,

$$\Phi_{\mathcal{B}}(C(H^+(\nu; 0), \varrho)) \subset \Phi_{\mathcal{B}}(\sqrt[d]{\Omega}).$$

Por tanto ψ es convergente y acotada en:

$$\Phi_{\mathcal{B}}(C(H^+(\nu; 0), \varrho)) = \{y \in (\mathbb{C}^*)^n; |y_n| \leq \varrho^\nu, |y_i| = \varrho^{e^{(i)}}, i = 1, \dots, n-1\}.$$

Para cualquier $z \in \sqrt[d]{\Omega}$, la serie en una variable

$$\psi_z(y_n) := \psi(\pi(\Phi_{\mathcal{B}}(z)), y_n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j(\pi(\Phi_{\mathcal{B}}(z))) y_n^j$$

es convergente y acotada sobre $\mathbb{D}_{\tau(z)^\nu}^*$. Entonces, existe una única función, holomorfa en $\mathbb{D}_{\tau(z)^\nu}$, que extiende a ψ_z . Entonces ψ_z es necesariamente el desarrollo de Taylor de esa función, y como consecuencia, no puede tener

exponentes negativos. Así que para $j < 0$, se tiene, $g_j(x) = 0$ para toda $x \in \pi(\Phi_{\mathcal{B}}(\sqrt[d]{\Omega}))$. Como $\pi(\Phi_{\mathcal{B}}(\sqrt[d]{\Omega}))$ es un subconjunto abierto no vacío de \mathbb{C}^{n-1} , se tiene que $g_j \equiv 0$. □

Con el lema 4.12 se prueba el siguiente resultado,

Proposición 4.13. *Sea σ un cono y Ω un dominio de Reinhardt σ -completo. Si f es una función holomorfa acotada sobre Ω y φ su expansión en serie de Laurent centrada en $\underline{0}$, sobre Ω , entonces $\varepsilon(\varphi) \subset \sigma$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ con $\sigma \subset H^+(\alpha; 0)$. Por la observación 4.2 $C(H^+(\alpha; 0), \tau(z)) \subset C(\sigma, \tau(z)) \subset \Omega$ con lo que Ω es $H^+(\alpha; 0)$ -completo. Así, por el lema previo, se tiene que, $\varepsilon(\varphi) \subset H^+(\alpha; 0)$. Ahora, el resultado se sigue del hecho general de que para cualquier cono σ , se tiene

$$\sigma = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}^N, \sigma \subset H^+(\alpha; 0)} H^+(\alpha; 0).$$

□

Definición 4.14. Sea $f(z) = \sum a_w z^w$ un polinomio de Laurent y sea V un vértice en $NP(f)$. Definamos la expansión en serie de Laurent

$$R_V(z) := \frac{1}{f(z)} = a_V^{-1} z^{-V} (1 - g(z) + g(z)^2 - \dots),$$

donde $g(z) := \sum_{w \neq V} \frac{a_w}{a_V} z^{w-V}$. La cual resulta de escribir

$$f(z) = a_V z^V (1 + \sum_{w \neq V} \frac{a_w}{a_V} z^{w-V}) = a_V z^V (1 + g(z))$$

y de la serie geométrica para $\frac{1}{1+g(z)}$.

Observación 4.15. De la definición previa, se tiene que

$$\varepsilon(R_V) \subset -V + \sigma_f(V).$$

El cono afín $-V + \sigma_f(V)$ es obtenido trazando líneas desde V a todos los puntos de $NP(f)$ y luego trasladando el resultado por $(-2V)$. Nótese que $\sigma_f(V)$ es fuertemente convexo, así que $g(z)^i$ en 4.14 tiene sentido.

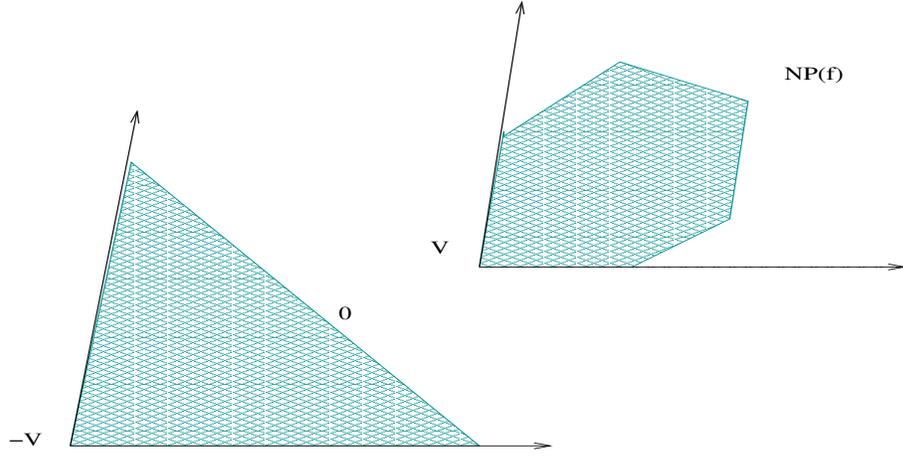


Figura 4.2: Politopo de f y cono que contiene los exponentes de $1/f$.

El siguiente resultado aparece en [7], Prop.1.7.

Proposición 4.16. *Sea f un polinomio de Laurent, V un vértice de $NP(f)$. Existe $y \in C_V$ tal que $R_V(z)$ converge absolutamente para cualquier z en $\text{Log}^{-1}(y + C_V)$. En particular, para tales z se tiene que $f(z) \neq 0$.*

Demostración. Sea $f(z) = \sum a_w z^w$. La serie $R_V(z)$ convergerá absolutamente para cualquier z tal que $|g(z)| < 1$. Puesto que V es un vértice de $NP(f)$, existe $y_0 \in C_V$ tal que $\langle w - V, y_0 \rangle < 0$ para todo $w \neq V$ con $w \in PN(f) \cap \mathbb{Z}^n$. Ahora notemos que para cada w se tiene que $g_w(t) := e^{\langle w - V, ty_0 \rangle}$ es decreciente como función de t y tiene límite cero cuando $t \rightarrow \infty$. Esto implica que para algún $t > 0$ suficientemente grande, digamos t_0 , se tiene que $\sum_{w \neq V} |a_w a_V^{-1}| e^{\langle w - V, t_0 y_0 \rangle} < 1$. Sea $y := t_0 y_0 \in C_V$ y sea $z \in \text{Log}^{-1}(y + C_V)$. Tenemos que $\text{Log}(z) = y + y_1$ para algún $y_1 \in C_V$ y se tiene que,

$$|g(z)| = \left| \sum_{w \neq V} a_w a_V^{-1} z^{w-V} \right| \leq \sum_{w \neq V} |a_w a_V^{-1}| e^{\langle w - V, y + y_1 \rangle} \leq \sum_{w \neq V} |a_w a_V^{-1}| e^{\langle w - V, y \rangle} < 1.$$

□

Observación 4.17. *Sea f un polinomio de Laurent, V un vértice de $NP(f)$. Por la observación 3.13 sabemos que R_V es la expansión en serie de Laurent centrada en $\underline{0}$ de $1/f$ sobre $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ para alguna $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(f)$. Luego esta \mathcal{F} debe contener a $y + C_V$ donde y es como en la proposición 4.16. Zelevinsky,*

Kapranov y Gelfand demuestran que tal \mathcal{F} es única, es decir, existe una única componente \mathcal{F} conteniendo una trasladada de C_V . La unicidad de \mathcal{F} aparece en la prueba del siguiente resultado (Véase [7], páginas 195-196).

Proposición 4.18. *Los vértices de $NP(f)$ están en biyección con aquellas componentes conexas del complemento de la \mathcal{A}_f que contienen un cono convexo afín con interior no vacío.*

La observación 4.17 nos permite hacer la siguiente definición

Definición 4.19. Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio, sea V un vértice de $NP(f)$ y C_V el cono de normal interior a V . Llamamos **la componente conexa del complemento de \mathcal{A}_f asociada al vértice V** , a la única componente conexa no acotada \mathcal{F} que contiene una trasladada del cono C_V . También decimos que C_V es el **cono del politopo $NP(f)$ asociado a la componente \mathcal{F}** .

Proposición 4.20. *Sea f un polinomio de Laurent y sea \mathcal{F} la componente conexa de \mathcal{A}_f^c asociada a un vértice V de $NP(f)$. Entonces $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es $\sigma_f(V)$ -completo.*

Demostración. Por la observación 3.13 sabemos que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es el dominio de convergencia de una expansión en serie de Laurent de $1/f$. Al ser \mathcal{F} la componente asociada al vértice V se tiene por la observación 4.17 que R_V es la expansión en serie de Laurent centrada en $\underline{0}$ de $1/f$ sobre $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$. Luego por la observación 4.15 los exponentes de R_V están contenidos en el cono afín $-V + \sigma_f(V)$. Sea $g = z^V R_V$, entonces g tiene exponentes en $\sigma_f(V)$ y su dominio de convergencia es $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$. Se sigue de la proposición 4.11 que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es $\sigma_f(V)$ -completo. \square

4.3. Una relación entre conjuntos σ -completos y conos de recesión

Demostramos una equivalencia de la definición de conjunto σ -completo, la cual utilizaremos para probar que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es $\sigma_f(V)$ -completo, donde V es el orden de la componente conexa \mathcal{F} . Nótese que a diferencia de la proposición 4.20, V no es necesariamente un vértice del politopo de Newton.

Proposición 4.21. (*Equivalencia de σ completitud*) Sea σ un cono y sea Ω un conjunto de Reinhardt. Se tiene que Ω es σ -completo si y sólo si $(-\sigma)^\vee \subset \text{Rec}(\text{Log}(\tau(\Omega)))$.

Demostración. Sea $p \in \text{Log}(\Omega)$, existe $q \in \Omega$ tal que $\text{Log}(\tau(q)) = p$. Puesto que $C(\sigma, \tau(q)) \subset \Omega$ se tiene que

$$\text{Log}(\tau(C(\sigma, \tau(q)))) \subset \text{Log}(\tau(\Omega)).$$

Por la proposición 4.10 esto equivale a

$$p + (-\sigma)^\vee \subset \text{Log}(\tau(\Omega)).$$

Por lo tanto $(-\sigma)^\vee \subset \text{Rec}(\text{Log}(\tau(\Omega)))$.

Inversamente, sea $q \in \Omega$, como Ω es conjunto de Reinhardt, $\tau(q) \in \Omega$. Puesto que

$$(-\sigma)^\vee \subset \text{Rec}(\text{Log}(\tau(\Omega))),$$

se sigue que,

$$\text{Log}(\tau(\Omega)) \supset \text{Log}(\tau(q)) + (-\sigma)^\vee = \text{Log}(\tau(C(\sigma, \tau(q)))).$$

Por ser Log un homeomorfismo se tiene que $\tau(C(\sigma, \tau(q))) \subset \tau(\Omega)$ y al ser Ω un conjunto de Reinhardt, se sigue que $C(\sigma, \tau(q)) \subset \Omega$. \square

Corolario 4.22. Sea f un polinomio de Laurent y sea \mathcal{F} una componente conexa de \mathcal{A}_f^c de orden V . Entonces $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es $\sigma_f(V)$ -completo.

Demostración. Tenemos que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es un dominio de Reinhardt. Por la observación 2.18, se tiene que $-\sigma_f(V)^\vee = C_V$ y por la proposición 3.18, se tiene que, $C_V \subset \text{Rec}(\mathcal{F})$. Se sigue de la proposición 4.21 que $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es $\sigma_f(V)$ -completo. \square

Capítulo 5

Parametrización local de variedades algebraicas

5.1. Espacios cubrientes y el teorema general de levantamiento

En esta sección enunciamos algunos conceptos y resultados básicos de la topología algebraica que necesitaremos para el resultado de la tesis proposición 5.41. Para un estudio mas profundo de estos conceptos véase por ejemplo [6] .

Definición 5.1. Sea X un espacio topológico. Un **lazo con punto base** $x \in X$ es una aplicación continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x$.

Ejemplo 5.2. Para $c \in X$, tenemos el camino constante $\alpha_c : [0, 1] \rightarrow X$ definido por $\alpha_c(t) = c$ para todo $t \in [0, 1]$. Sea α un camino de a a b , se tiene que la aplicación $\bar{\alpha}$ definida por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ es también un camino. Es el camino recorrido en sentido contrario, es decir, de b a a .

Definición 5.3. Sean α y β dos lazos con un punto base común en el espacio topológico X . Se define el producto $\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X$ por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definición 5.4. Dos lazos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ con base en un punto común x son **homotópicos** si existe una aplicación continua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $F(s, 0) = \alpha(s)$, $F(s, 1) = \beta(s)$, $F(0, t) = F(1, t) = x$.

La relación entre los lazos de ser homotópicos es una relación de equivalencia y a las clases de equivalencia se les denomina clases de homotopía. Intuitivamente una clase de homotopía es un paquete de curvas que se deforman continuamente entre si.

Definición 5.5. Sean α y β dos lazos con un punto base común. Se define un producto de clases de equivalencia por

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta].$$

Definición 5.6. Sea $x \in X$. El conjunto de clases de equivalencia de lazos con punto base x es un grupo y se denota por $\pi_1(X, x)$. A $\pi_1(X, x)$ se le llama el **grupo fundamental** de X con punto base x o grupo de Poincaré.

Observación 5.7. Dados $x, y \in X$, si existe un camino de x a y , se tiene que $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos. Caminos diferentes de x a y pueden inducir diferentes isomorfismos entre $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$. A veces se suele eliminar la x de $\pi_1(X, x)$ cuando X es arcoconexo, escribiendo $\pi_1(X)$.

Observación 5.8. Dada $f : X \rightarrow Y$ continua, se tiene que la imagen de un camino en X bajo f es un camino en Y . En particular, la imagen de un lazo con punto base x es un lazo con punto base $f(x)$ y si dos lazos son homotópicos en X sus imágenes son homotópicas en Y .

Definición 5.9. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua, se define el **homomorfismo inducido** por la aplicación f como

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x)) \\ f_*([\alpha]) &= [f(\alpha)]. \end{aligned}$$

El siguiente resultado se encuentra en [11] Prop.1.12.

Proposición 5.10. Sean X e Y dos espacios arcoconexos, se tiene que, $\pi_1(X \times Y)$ es isomorfo a $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X \times Y) &\rightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \\ \phi([\alpha]) &= (p_*([\alpha]), q_*([\alpha])) \end{aligned}$$

donde p_* y q_* son los morfismos inducidos por las proyecciones sobre X e Y respectivamente.

Ejemplos de algunos grupos fundamentales:

1. $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{1\}$.
2. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.
3. $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Recordemos que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo local** si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U de x y una vecindad V de $f(x)$ tal que $f|_U : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo.

Definición 5.11. Sean X e Y espacios topológicos. Se dice que Y es un **espacio cubriente** de X , si existe una aplicación continua y suprayectiva $\rho : Y \rightarrow X$ tal que, para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta U de x que satisface las siguientes propiedades:

- i) $\rho^{-1}(U) = \bigcup_j V_j$, con V_j abiertos en Y para toda j .
- ii) $\rho|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo para toda j .

A la aplicación ρ se le llama **aplicación cubriente** y a las vecindades V_j , **hojas** de la cubriente. Además si X es conexo se tiene que los conjuntos $\rho^{-1}(x)$ tienen la misma cardinalidad, para toda $x \in X$ (Ver por ejemplo [11], pg.61). Al conjunto $\rho^{-1}(x)$ se le llama la **fibra** sobre x y su cardinalidad se conoce como el **número de hojas** de la cubriente.

Ejemplo 5.12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $f(t) = e^{2\pi it}$, se tiene que f es una cubriente con un número infinito de hojas, mientras que $g : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $g(z) = z^n$ con n entero positivo, es una cubriente con n hojas.

Proposición 5.13. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación cubriente, donde Y es conexo y sea $\mathcal{C} \subset X$ una componente conexa. Entonces $f|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow Y$ es una aplicación cubriente.

Demostración. Sea $q \in Y$, entonces existe una vecindad V de q tal que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$. Sea $p_i \in U_i$, donde $f(p_i) = q$ y sea

$$I_0 := \{i \in I \mid p_i \in \mathcal{C}\} \quad \text{y} \quad I_1 = I \setminus I_0.$$

Como \mathcal{C} es una componente conexa, se tiene que,

$$U_i \subset \mathcal{C} \quad \text{para} \quad i \in I_0 \quad \text{y} \quad U_i \cap \mathcal{C} = \emptyset \quad \text{para} \quad i \in I_1.$$

□

Definición 5.14. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ de espacios topológicos es **propia** si para cualquier conjunto compacto en Y , su imagen inversa es un conjunto compacto en X .

Proposición 5.15. Sean X e Y espacios de Hausdorff. Una aplicación propia $f : X \rightarrow Y$ que es un homeomorfismo local es una aplicación cubriente.

Demostración. Sea $y \in Y$. Para cada $x \in f^{-1}(y)$, existe una vecindad U_x de x y una vecindad V_x de y tal que $f : U_x \rightarrow V_x$ es un homeomorfismo. Puesto que cada U_x tiene una única preimagen de y , se tiene que $f^{-1}(y)$ es discreto y ya que f es propia, $f^{-1}(y)$ es compacto. Por tanto $f^{-1}(y)$ es finito, digamos,

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Consideremos U_{x_i} vecindad de x_j para $i = 1, \dots, m$ tal que

$$f|_{U_{x_i}} : U_{x_i} \rightarrow V_{x_i}$$

es un homeomorfismo. Por ser X de Hausdorff podemos suponer que dos cualesquiera de los U_{x_j} no se intersectan y sea $U := U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$. Como f es aplicación propia, es cerrada y ya que $X \setminus U$ es cerrado, se tiene que $f(X \setminus U)$ es cerrado. Por tanto

$$V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_m} \setminus f(X \setminus U)$$

es una vecindad abierta de y con $f^{-1}(V) \subset U$. Como los U_{x_i} son disjuntos, se tiene que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^m (f^{-1}(V) \cap U_{x_i})$. Como V es un abierto contenido en V_{x_i} se tiene que $f^{-1}(V) \cap U_{x_i}$ es mapeado homeomorficamente sobre V . \square

Definición 5.16. Dada $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y $f : Z \rightarrow X$ una aplicación continua. Un **levantamiento** de f es una aplicación continua $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\rho \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ & \searrow f & \downarrow \rho \\ & & X \end{array}$$

La prueba del resultado principal de la tesis se centra en la aplicación del teorema general de levantamiento:

Proposición 5.17. (*Propiedad de levantamiento de caminos*) Sea $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y supongamos que $\rho(y_0) = x_0$. Entonces cualquier camino $\alpha : I \rightarrow X$ que comienza en x_0 tiene un levantamiento único a un camino $\tilde{\alpha}$ en Y que comienza en y_0 .

Demostración. Véase [15], 3.1. □

Proposición 5.18. (*Teorema General de Levantamiento*) Considere una aplicación cubriente $\rho : Y \rightarrow X$ con $\rho(y_0) = x_0$. Sea Z arco-conexo y localmente arco-conexo y $f : Z \rightarrow X$ una aplicación continua con $f(z_0) = x_0$. La aplicación f tiene un levantamiento único a una aplicación $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ tal que $\tilde{f}(z_0) = y_0$ si y sólo si

$$f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \rho_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

Demostración. Véase [15], 5.1. □

Proposición 5.19. El número de hojas del espacio recubridor es igual al índice del subgrupo $\rho_*(\pi_1(Y, y_0))$ en $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Véase [15], p.161. □

A continuación, analizamos la acción del grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ sobre la fibra $\rho^{-1}(x)$. Mas precisamente tenemos lo siguiente.

Sea $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y $g_0, g_1 : [0, 1] \rightarrow Y$ caminos en Y con el mismo origen. Si $\rho(g_0) \sim \rho(g_1)$, entonces $g_0 \sim g_1$; en particular g_0 y g_1 tienen el mismo extremo ([15], p.152).

Sea $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y $x \in X$. Para todo $y \in \rho^{-1}(x)$ y todo $\alpha \in \pi_1(X, x)$, definimos $y \cdot \alpha \in \rho^{-1}(x)$ como el extremo de la clase de caminos de $\bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha}$ es el levantamiento de α . Con la definición anterior, se cumplen las siguientes relaciones:

$$(y \cdot \alpha) \cdot \beta = y \cdot (\alpha \cdot \beta),$$

$$y \cdot 1 = y.$$

Se dice que $\pi_1(X, x)$ es un grupo de operadores por la derecha sobre el conjunto $\rho^{-1}(x)$ ([15], p.161).

Proposición 5.20. Sea Y arcoconexo y $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente. Para $x \in X$ se tiene que el grupo $\pi_1(X, x)$ opera transitivamente sobre el conjunto $\rho^{-1}(x)$.

Demostración. Consideremos $y_0, y_1 \in \rho^{-1}(x)$, puesto que Y es arcoconexo, existe una clase de caminos $\bar{\alpha}$ en Y con origen y_0 y extremo y_1 . Sea $\alpha = \rho_*(\bar{\alpha})$. Entonces α es una clase de equivalencia de caminos cerrados, y claramente $y_0 \cdot \alpha = y_1$. \square

De la proposición 5.20 se deduce el siguiente resultado.

Proposición 5.21. *Sea $\rho : Y \rightarrow X$ una aplicación cubriente y consideremos la acción del grupo $\pi_1(X, x)$ sobre $\rho^{-1}(x)$. El número de componentes conexas por caminos de Y está en correspondencia biunívoca con el conjunto de orbitas de $\rho^{-1}(x)$. En particular, Y es conexo por caminos si y sólo si $\rho^{-1}(x)$ tiene una única orbita.*

Demostración. Si Y no fuese arcoconexo, consideremos la descomposición en componentes conexas por caminos de Y . Por el razonamiento anterior si $y_0, y_1 \in \rho^{-1}(x)$, están en la misma componente conexa por caminos, entonces y_0 y y_1 están en la misma orbita (clase). Recíprocamente si y_0 y y_1 están en la misma orbita, tenemos $y_0 \cdot \alpha = y_1$ con $\alpha \in \pi_1(X, x)$. Entonces si g es un representante de la clase α se tiene que el levantamiento \bar{g} de g es un camino con origen y_0 y extremo y_1 . Por lo tanto y_0 y y_1 están en la misma componente conexa por caminos. \square

5.2. El teorema de Newton-Puiseux

El **anillo de series de potencias formales** es el conjunto de expresiones de la forma

$$f := \sum_{(v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} a_{v_1, \dots, v_n} X_1^{v_1} \cdots X_n^{v_n},$$

donde $a_{v_1, \dots, v_n} \in \mathbb{C}$. Lo denotamos por $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$.

Sean

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n \text{ y } X = (X_1, \dots, X_n),$$

denotaremos por

$$|v| := v_1 + \cdots + v_n \text{ y } X^v := X_1^{v_1} \cdots X_n^{v_n},$$

y así escribimos en forma mas simple

$$f := \sum_{v \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n} a_v X^v \in \mathbb{C}[[X]].$$

El polinomio

$$f_{(d)} := \sum_{|v|=d} a_v X^v \in \mathbb{C}[[X]]$$

es la **parte homogénea** de grado d de f .

Si $f \neq 0$, se define el **orden de f** como

$$\mathbf{ord} f := \min\{d : f_{(d)} \neq 0\}.$$

Si $f \equiv 0$ se define $\mathbf{ord}(f) = \infty$.

El conjunto de **series de potencias convergentes** en una vecindad de $\underline{0}$ es denotado por

$$\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, llamamos **campo de series de Laurent con n -denominador** al conjunto de todas las series de Laurent en una variable cuyos exponentes fraccionarios comparten como denominador común a n y lo denotamos por $\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}}))$. Es decir,

$$\mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})) := \left\{ \sum_{K=m}^{\infty} a_k x^{\frac{k}{n}} \mid m \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Nótese que $\mathbb{C}((x))$ es el **campo de series de Laurent sin singularidad esencial** en 0. ([3], pg.109)

Definición 5.22. El **campo de series de Puiseux formales** es definido como la unión de todos los campos $\mathbb{K}((x^{\frac{1}{n}}))$ en el conjunto de series con exponentes fraccionarios en la indeterminada x , es denotado por $\mathbb{C} \ll x \gg$, es decir,

$$\mathbb{C} \ll x \gg := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}((x^{\frac{1}{n}})).$$

El **orden** de una serie de Puiseux $\phi \neq 0$, es $\mathbf{ord}\phi := \min \varepsilon(\phi)$. Si $\phi \equiv 0$ se define $\mathbf{ord}\phi := \infty$.

Definición 5.23. Si $\mathcal{C} := \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 : f(X, Y) = 0\}$ es una curva algebraica plana y $(X_0, Y_0) \in \mathcal{C}$. Una **parametrización local** de \mathcal{C} en (X_0, Y_0) es una función $\phi(t) := (X(t), Y(t))$ en un sólo parámetro complejo t , definida para $|t|$ suficientemente chico tal que

- i) $f(X(t), Y(t)) = 0$,
- ii) $X(0) = X_0, Y(0) = Y_0$.

Definición 5.24. Un punto $P = (X_0, Y_0)$ en una curva algebraica plana $\mathcal{C} = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(X, Y) = 0\}$ es un **punto suave** si

- i) $f(X_0, Y_0) = 0 \quad (P \in \mathcal{C})$
- ii) $(\frac{\partial f}{\partial X}(X_0, Y_0), \frac{\partial f}{\partial Y}(X_0, Y_0)) \neq (0, 0)$.

Esto significa que existe una dirección tangente bien definida en P .

La solución a la existencia de parametrizaciones locales de curvas algebraicas en puntos suaves nos la da el siguiente resultado (Véase [4], 6.9).

Proposición 5.25. (Teorema de la función implícita)

Sea $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n, Y\}$, donde $f(0, \dots, 0) = 0$ y $\frac{\delta f}{\delta Y}(0, \dots, 0) \neq 0$. Entonces, existe exactamente una serie $\varphi \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ tal que

$$\varphi(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{y} \quad f(X_1, \dots, X_n, \varphi(X_1, \dots, X_n)) = 0.$$

La condición sobre la derivada significa que esta curva es suave y tiene una tangente no vertical en el origen. Por tanto son excluidos los casos mostrados en la figura 5.1.

Geoméricamente, la serie f define un conjunto analítico alrededor del origen $(\underline{0}, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. La existencia de tal φ significa que en una vecindad de $\underline{0} \in \mathbb{C}^n$ el conjunto analítico es la gráfica de una función holomorfa, como en la figura 5.2.

Ejemplo 5.26. Consideremos la curva suave $X^2 + Y^2 + 1 = 0$. Para el punto suave $(0, i)$, se tiene que en la vecindad $|X| < 1$, existe una serie de potencias de Y , a saber, $Y - i = i(\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{8}X^4 + \dots)$, la cual resulta de escribir

$$Y = i(1 + X^2)^{\frac{1}{2}}$$

y expandir aplicando la generalización del binomio de Newton. Note que la solución es local ya que no podemos expandir holomórficamente a un disco de radio mayor a 1.

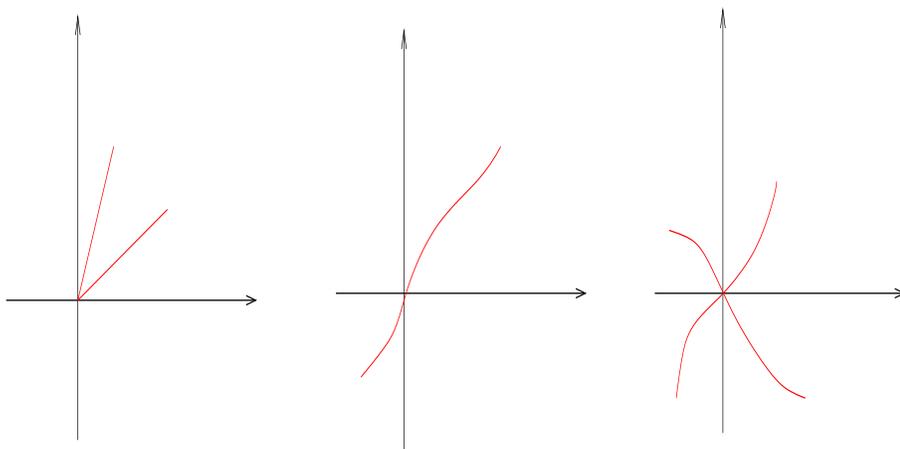


Figura 5.1: Casos en que no se satisfacen las hipótesis del teorema de la función implícita

Ejemplo 5.27. No siempre existen parametrizaciones de la forma

$$\Phi = (x, \varphi(x)).$$

Por ejemplo, si consideramos la cúbica cuspidal, definida por $f = X^2 + Y^3$, entonces no puede existir una tal parametrización como la anterior. Si X fuese expresable en alguna Y -vecindad, como una serie de potencias, digamos

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Y^i,$$

si $a_1 \neq 0$, entonces en $X^2 + Y^3$ el término de orden menor en Y sería $a_1^2 Y^2$, por otra parte si $a_1 = 0$, el término de orden menor en Y sería Y^4 .

Luego, lo único que podemos decir es que en una vecindad del origen, se tiene que $X = iY^{\frac{3}{2}}$ o $Y = -X^{\frac{2}{3}}$, las cuales son ejemplos simples de series de Puiseux.

El siguiente teorema se encuentra en [4], 7.2.

Proposición 5.28. (Teorema de Newton-Puiseux) Sea $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$. Entonces existe un número natural $k \geq 1$ y $\varphi \in \mathbb{C}\{T\}$ tal que

$$\varphi(0) = 0 \quad y \quad f(T^k, \varphi(T)) = 0.$$

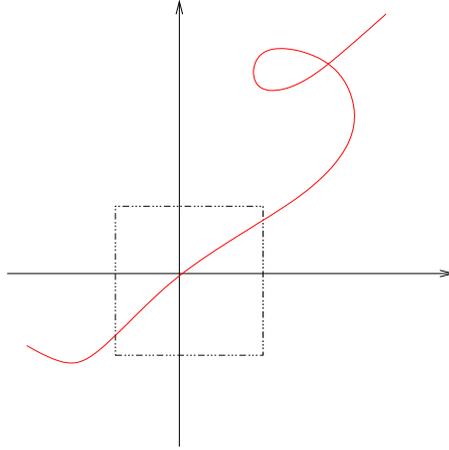


Figura 5.2: Conjunto analítico como la gráfica de una función holomorfa cerca del origen.

Siguiendo ideas de K.J.Nowak [17] presentamos una prueba del teorema de Newton-Puiseux. Dicha prueba esta basada en el teorema de levantamiento y en el siguiente resultado de Rückert (Véase [14], p.189).

Es útil al lector recordar la definiciones de **sistema regular de coordenadas** e **ideal k regular** (Véase definición 1.38)

Lema 5.29. (*Lema de Rückert*) Suponga que $A = \mathcal{V}(I)$ es un germen de un ideal primo k regular I en \mathcal{O}_n . Entonces existe una vecindad abierta conexa U de $\underline{0}$ en \mathbb{C}^k , un subconjunto analítico propio Z de U y un representante X de A analítico en $U \times \mathbb{C}^{n-k}$, tal que:

- (i) la proyección $\pi|_X : X \rightarrow U$ es propia
- (ii) $(\pi|_X)^{-1}(0, 0) = \{(0, 0)\}$
- (iii) $X \cap \pi^{-1}(U \setminus Z)$ es una variedad k -dimensional y localmente en cada $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \in X$ una gráfica de una función holomorfa sobre una vecindad de (x_1, \dots, x_k) .

Proposición 5.30. Sea X un germen analítico irreducible en $\underline{0} \in \mathbb{C}^n$ de dimensión uno. Podemos encontrar un representante V del germen X y una parametrización f para V el cual es un homeomorfismo de la forma,

$$f : D \longrightarrow V$$

$$t \mapsto (t^p, g(t)),$$

donde $D := \{t \in \mathbb{C} : |t| < \delta\}$, $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ es una transformación holomorfa con $g(0) = 0$.

Demostración. Haciendo un cambio lineal de coordenadas, el lema 5.29 implica que existe un representante V del germen X , analítico en $\Omega \times \mathbb{C}^{n-1}$, donde $\Omega := \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1| < \epsilon\}$ ($\epsilon > 0$), tal que

i) La proyección canónica $\psi : V \longrightarrow \Omega$ es propia;

ii) $\psi^{-1}(0) = \{0\}$;

iii) Sea $V^\circ := V \setminus \{0\}$ y $\Omega^\circ := \Omega \setminus \{0\}$. La restricción $\psi^\circ := \psi|_{V^\circ} : V^\circ \longrightarrow \Omega^\circ$ es un biholomorfismo local.

Por tanto, tenemos que $\psi^\circ := \psi|_{V^\circ} : V^\circ \longrightarrow \Omega^\circ$ es una cubierta topológica finita. Sea $p \in \mathbb{N}$ el grado de la cubierta ψ° , sea $D := \{t \in \mathbb{C} : |t| < \sqrt[p]{\epsilon}\}$, $D^\circ := D \setminus \{0\}$ y consideremos la cubierta de grado p ,

$$\phi^\circ : D^\circ \longrightarrow \Omega^\circ$$

$$\phi^\circ(t) := t^p$$

El índice de los subgrupos $\psi^\circ_*(\pi_1(V^\circ))$ y $\phi^\circ_*(\pi_1(D^\circ))$ en el grupo $\pi_1(\Omega^\circ) \simeq \mathbb{Z}$ es p , por tanto estos subgrupos son iguales. Por el teorema del levantamiento existe un homeomorfismo $f^\circ : D^\circ \longrightarrow V^\circ$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} D^\circ & \xrightarrow{f^\circ} & V^\circ \\ & \searrow \phi^\circ & \downarrow \psi^\circ \\ & & \Omega^\circ \end{array}$$

Entonces $f^\circ(t) = (t^p, g^\circ(t))$ para una transformación $g^\circ : D^\circ \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$. Como las transformaciones ψ° y ϕ° son biholomorfismos locales, así es f° ; por tanto f° es un biholomorfismo. Ahora, por el teorema de extensión de

Riemann (1.15) implica que f° y g° pueden ser extendidas a transformaciones holomorfas $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $g : D \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ con $f(t) = (t^p, g(t))$.

Como $\psi^{-1}(0) = \{0\}$, obtenemos que $f(0) = 0 \in \mathbb{C}^n$ y $g(0) = 0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, con lo que f es una transformación uno a uno sobre el conjunto V .

Como $\psi \circ f(t) = t^p$ es propia, se tiene que $f : D \rightarrow V$ es propia y por tanto f es una transformación cerrada. Como $f : D \rightarrow V$ es una biyección continua y cerrada, se tiene que f es un homeomorfismo. □

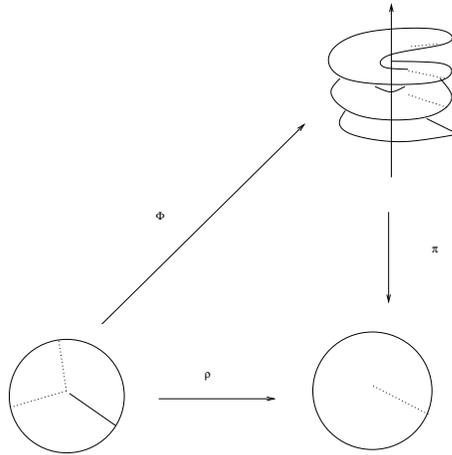


Figura 5.3: Representación geométrica del teorema de Puiseux.

Ejemplo 5.31. La cúbica nodal de Newton es dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^2(x + 1)\}.$$

Una parametrización local de esta curva es

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow C$$

$$t \mapsto (t^2, \varphi(t)),$$

donde $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} t^{3-k}$, convergente para $|t| > 1$.

5.3. El discriminante local de una proyección propia

Definición 5.32. Una transformación $f : X \rightarrow Y$, se dice **finita** si la preimagen de cada punto es un número finito de puntos.

Se tienen las siguientes propiedades sobre transformaciones propias:

- i) Una transformación propia es cerrada, es decir, la imagen de un conjunto cerrado es cerrado.
- ii) Sea $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ transformaciones continuas tal que $h = g \circ f$ es propia. Entonces f y $g|_{f(X)}$ son transformaciones propias.
- iii) Sea $D \subset X$ y $G \subset Y$ subconjuntos con \overline{G} compacta y sea ∂G la frontera de G . La restricción de la proyección $(x, y) \mapsto x$ sobre un subconjunto cerrado $A \subset D \times G$ es propia si y sólo si A no tiene puntos límites sobre el conjunto $D \times \partial G$.
- iv) Si $f : X \rightarrow Y$ es una transformación propia finita y $a \in X$, entonces existe una vecindad U de a y una vecindad V de $f(a)$ tal que $f : U \rightarrow V$ es propia.

Definición 5.33. Una aplicación holomorfa $f : X \rightarrow Y$ se dice **biholomorfa** o que es un **biholomorfismo**, si f^{-1} también es holomorfa.

Definición 5.34. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es **localmente biholomorfa**, si para todo $x \in X$, existe una vecindad U_x de x y una vecindad $V_{f(x)}$ de $f(x)$ tal que $f|_{U_x} : U_x \rightarrow V_{f(x)}$ es biholomorfa.

En ([2], 3.2) podemos encontrar el siguiente lema

Lema 5.35. *Sea $\pi : \mathbb{C}^{N+M} \rightarrow \mathbb{C}^N$ la proyección usual y $A \subseteq \mathbb{C}^{N+M}$ un subconjunto analítico tal que $\pi : A \rightarrow \mathbb{C}^N$ es una proyección propia. Se tiene que $A' = \pi(A)$ es un subconjunto analítico en \mathbb{C}^N y el número de preimágenes $\#\pi^{-1}(z) \cap A$ es localmente finito en \mathbb{C}^N . Además si A es un subconjunto algebraico en \mathbb{C}^{N+M} , entonces A' es un subconjunto algebraico en \mathbb{C}^N .*

Con el lema 5.35 se prueba la siguiente proposición ([2], 3.7)

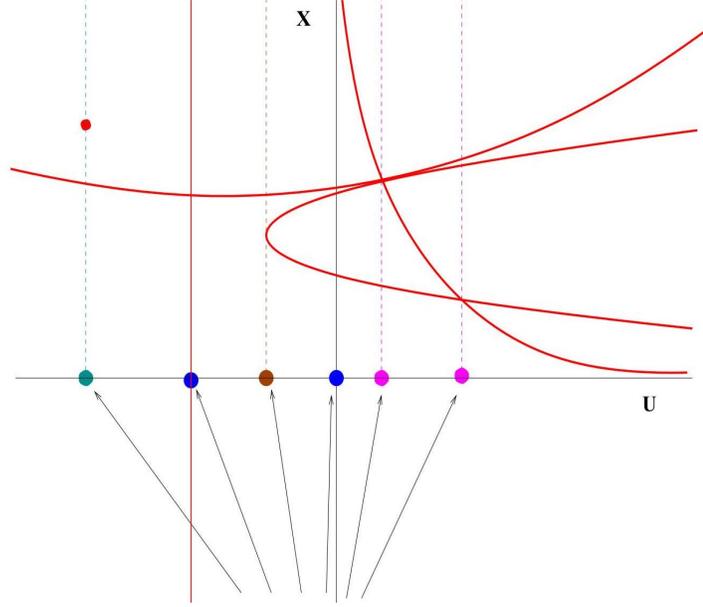


Figura 5.4: Discriminante local (F. Roullier).

Proposición 5.36. *Sea A un conjunto analítico tal que $\underline{a} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}^{N+M}$ donde N es la dimensión de A en \underline{a} , sea $\rho : \mathbb{C}^{N+M} \rightarrow \mathbb{C}^N$ una proyección lineal, U una vecindad de \underline{a} tal que $\rho : A \cap U \rightarrow \mathbb{C}^N$ es una proyección propia. Entonces, existe un subconjunto analítico $\Delta \subset \mathbb{C}^N$, con $\dim \Delta < N$ y un número natural k tal que la restricción*

$$\rho : A \cap U \setminus \rho^{-1}(\Delta) \rightarrow \rho(A \cap U) \setminus \Delta$$

es una cubriente de k hojas localmente biholomorfa.

Una observación sobre la vecindad U de la proposición anterior, es que si A es un subconjunto analítico en \mathbb{C}^{N+M} y $\dim_{\underline{0}} A \leq N$. Entonces existe una transformación unitaria l y una vecindad pequeña $U = U_1 \times U_2 \ni \underline{0}$ donde $U_1 \subseteq \mathbb{C}^N$ y $U_2 \subseteq \mathbb{C}^M$, tal que la proyección ortogonal $\pi : l(A) \cap U \rightarrow U_1$ es una proyección propia ([2], lema 1).

La proposición 5.36 nos permite definir el discriminante local de una proyección.

Definición 5.37. *Sea A un conjunto analítico tal que $\underline{0} \in \mathcal{A}$, $\dim_{\underline{0}} A < N$ y $\rho : \mathbb{C}^{N+M} \rightarrow \mathbb{C}^N$ una proyección lineal tal que, para una vecindad U de $\underline{0}$,*

$\rho : A \cap U \rightarrow \mathbb{C}^N$ es una proyección propia. Llamamos **discriminante local de ρ** a la intersección de todos los subconjuntos analíticos Δ tal que

$$\rho : A \cap U \setminus \rho^{-1}(\Delta) \rightarrow \rho(A \cap U) \setminus \Delta$$

es localmente biholomorfa.

Note que por la observación 1.21 el discriminante de ρ es un subconjunto analítico. Denotaremos el discriminante local de ρ por $\Delta(\rho)$.

Observación 5.38. Sea ρ como en la definición 5.37 con $\Delta(\rho)$ una hipersuperficie algebraica. Consideremos la amiba del discriminante local de ρ y sea $\Omega := \text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$, donde \mathcal{F} es una componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{A}_{\Delta(\rho)}$, se tiene que, $\Omega \cap \Delta(\rho) = \emptyset$. Luego $\rho : \rho^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$ es localmente biholomorfa.

5.4. Existencia de ecuaciones paramétricas locales de tipo Puiseux en variedades algebraicas

En esta última sección, demostramos el resultado principal de la tesis, enunciado en la introducción. Antes probamos que el grupo fundamental de la imagen inversa de una componente conexa del complemento de la amiba en \mathbb{C}^N es un \mathbb{Z}^N . Más precisamente tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.39. *La imagen inversa de cada componente conexa del complemento de la amiba bajo la aplicación Log es homotópica a un toro.*

Demostración. Sea \mathcal{F} una componente conexa del complemento de una amiba \mathcal{A}_f y $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punto de la componente \mathcal{F} , por definición,

$$\begin{aligned} \text{Log}^{-1}(x) &= \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \text{Log}(z) = x\} \\ &= \{z : (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) = (x_1, \dots, x_n)\} = \{z : |z_i| = e^{x_i}\}. \end{aligned}$$

Es decir, $\text{Log}^{-1}(x)$ es el producto de n circunferencias de radio e^{x_i} , o sea, un toro n dimensional. Como \mathcal{F} es convexa es contraíble al punto x . Luego $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$ es homotópicamente equivalente al toro $\text{Log}^{-1}(x)$. \square

Corolario 5.40. *Si $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{A}_f$, entonces $\pi_1(\text{Log}^{-1}(\mathcal{F})) \approx \mathbb{Z}^N$.*

En [1], F. Aroca demuestra que si \mathcal{A} es un conjunto analítico de \mathbb{C}^{N+M} de dimensión N , con $\underline{0} \in \mathcal{A}$ y la proyección

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^N$$

$$(z_1, \dots, z_{N+M}) \mapsto (z_1, \dots, z_N)$$

es finita, existen ecuaciones paramétricas locales de la forma

$$z_i = t_i^k \quad i = 1, \dots, N, \quad z_{N+j} = \phi_j(t_1, \dots, t_N) \quad j = 1, \dots, M.$$

donde las ϕ_j son series de Laurent convergentes con exponentes contenidos en un cono poliedral fuertemente convexo.

Ahora, demostramos el resultado principal de la tesis. A diferencia de las parametrizaciones dadas en [1], para las parametrizaciones del resultado de la tesis decimos explícitamente quienes son los dominios de convergencia, cuales son todas las parametrizaciones localmente y mostramos la existencia de ecuaciones paramétricas Puiseux con exponentes en conos no necesariamente convexos.

Teorema 5.41. *Sea A un conjunto algebraico de \mathbb{C}^{N+M} , $\underline{0} \in A$, $\dim_{\underline{0}}(A) = N$. Sea*

$$\Pi : \mathbb{C}^{N+M} \rightarrow \mathbb{C}^N$$

la proyección dada por

$$(z_1, \dots, z_{N+M}) \mapsto (z_1, \dots, z_N)$$

y supongamos que U es una vecindad de $\underline{0}$ tal que $\Pi : A \cap U \rightarrow \mathbb{C}^N$ es una proyección propia con $\Delta(\Pi)$ una hipersuperficie algebraica. Sea \mathcal{F} una componente conexa de $\mathcal{A}_{\Delta(\Pi)}^c$ y sea $\Omega := \text{Log}^{-1}(\mathcal{F})$. Entonces para cada componente conexa de $\Pi^{-1}(\Omega) \cap A \cap U$, existe un número natural d y M series Laurent ϕ_1, \dots, ϕ_M convergentes en $\sqrt[d]{\Omega}$, tal que $f(z_1^d, \dots, z_N^d, \phi_1, \dots, \phi_M) = 0$ para toda $f \in \mathcal{I}(A)$.

Demostración. Por definición Ω es un dominio de Reinhardt logarítmicamente convexo y por la observación 5.38, $\Pi : A \cap U \cap \Pi^{-1}(\Omega) \rightarrow \Omega$ es localmente biholomorfa. Sea \mathcal{C} una componente conexa de $A \cap U \cap \Pi^{-1}(\Omega)$, y sea d el cardinal de la fibra genérica de $\Pi|_{\mathcal{C}}$. Como $\Pi|_{\mathcal{C}}$ y $\xi_d|_{\sqrt[d]{\Omega}}$ son localmente biholomorfos, los pares (\mathcal{C}, Π) y $(\sqrt[d]{\Omega}, \xi_d)$ son, respectivamente, una d hoja y una

d^N hoja cubriente de Ω . Elija un punto $z_0 \in \Omega$, un punto $z_1 \in \xi_d^{-1}(z_0)$ y un punto $z_2 \in \Pi^{-1}(z_0) \cap \mathcal{C}$. Considere los monomorfismos inducidos en los grupos fundamentales :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\sqrt[d]{\Omega}, z_1) & & \pi_1(\mathcal{C}, z_2) \\ & \searrow \xi_{d*} & \downarrow \Pi_* \\ & & \pi_1(\Omega, z_0) \end{array}$$

Un elemento $\gamma \in \pi_1(\Omega, z_0)$ está en el subgrupo $\xi_{d*} \pi_1(\sqrt[d]{\Omega}, z_1)$ si y sólo si $\gamma = \alpha^d$ para algún $\alpha \in \pi_1(\Omega, z_0)$. Por otro lado, el índice de $\Pi_*(\pi_1(\mathcal{C}, z_2))$ en $\pi_1(\Omega, z_0)$ es igual a d (ver por ejemplo [6], V§7) ya que $\pi_1(\Omega, z_0)$ es abeliano, las clases de $\Pi_*(\pi_1(\mathcal{C}, z_2))$ en $\pi_1(\Omega, z_0)$ forman un grupo de orden d . Entonces, para cualquier $\alpha \in \pi_1(\Omega, z_0)$ el elemento α^d pertenece a $\Pi_*(\pi_1(\mathcal{C}, z_2))$. Entonces $\xi_{d*}(\pi_1(\sqrt[d]{\Omega}, z_1)) \subset \Pi_*(\pi_1(\mathcal{C}, z_2))$. El lema del levantamiento (Prop.5.18) asegura la existencia de una única transformación φ , tal que $\varphi(z_1) = z_2$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[d]{\Omega} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C} \\ & \searrow \xi_d & \downarrow \Pi \\ & & \Omega \end{array}$$

Luego podemos expresar φ como

$$\varphi : \sqrt[d]{\Omega} \rightarrow A$$

$$(z_1, \dots, z_N) \rightarrow (z_1^d, \dots, z_N^d, \varphi_1, \dots, \varphi_M)$$

donde $\varphi_i : \sqrt[d]{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa para $i = 1, \dots, M$. Como $\sqrt[d]{\Omega}$ es un dominio de Reinhard, para cada $i = 1, \dots, M$ existe una serie de Laurent ϕ_i que converge uniformemente a φ_i en subconjuntos compactos de $\sqrt[d]{\Omega}$. Ahora, para cualquier z en el dominio de convergencia de los ϕ_i s, el punto $P = (z_1^d, \dots, z_N^d, \phi_1(z), \dots, \phi_M(z))$ está en A y entonces, cualquier f anulándose en A también se anula en P .

□

Proposición 5.42. Sean ϕ_i las series de Laurent convergentes como en la proposición 5.41, se tiene que $\varepsilon(\phi_i) \subset \sigma_\delta(V)$ para toda $i = 1, \dots, M$, donde δ es el polinomio que define el discriminante de la proyección Π .

Demostración. De la proposición 4.22 se tiene que, si \mathcal{F} es una componente conexa del complemento de \mathcal{A}_δ de orden V , entonces Ω es $\sigma_\delta(V)$ -completo y por 4.9, $\sqrt[d]{\Omega}$ es también $\sigma_\delta(V)$ -completo. Como $\varphi(\sqrt[d]{\Omega}) \subset \mathcal{A} \cap U$, cada φ_i es acotada en $\sqrt[d]{\Omega}$. Se sigue de la proposición 4.13 que $\varepsilon(\phi_i) \subset \sigma_\delta(V)$ para toda $i = 1, \dots, M$. \square

Corolario 5.43. *Puesto que para cada $P \in \Pi^{-1}(z_0) \cap \mathcal{C}$ existe una única φ tal que $\varphi(z_1) = P$, se sigue que existen d diferentes φ 's. Por tanto, si k es el grado de la proyección Π , existen k M -tuplas (ϕ_1, \dots, ϕ_M) de series Laurent convergentes tales que $f(z_1^d, \dots, z_N^d, \phi_1(z), \dots, \phi_M(z)) = 0$ para toda $f \in I(\mathcal{A})$.*

Apéndice A

Ejemplos sobre el resultado principal

A.1. Ejemplos

A continuación hacemos algunos ejemplos para ilustrar el teorema 5.41 y la proposición 5.42.

Ejemplo A.1. Consideremos la hipersuperficie en \mathbb{C}^3 definida por el polinomio

$$f := z^2 - x - y + 1.$$

Una parametrización multivaluada para esta hipersuperficie esta dada por $(x, y, \sqrt{x + y - 1})$ y el discriminante esta definido por el polinomio

$$g := x + y - 1.$$

La imagen de $\mathcal{V}(g)$ bajo la transformación $\tau(x, y) = (|x|, |y|)$ es el conjunto

$$\tau(\mathcal{V}(g)) = \{(u, v) \in \mathbb{R}_{>0}^2 \mid 1 \leq u + v, u \leq 1 + v, v \leq 1 + u\},$$

(Véase fig.A.1) y la amiba de g es la imagen de $\tau(\mathcal{V}(g))$ bajo la transformación $(u, v) \rightarrow (\log u, \log v)$.

Notemos que la región $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}_{>0}^2 \mid u > 1, v < u - 1\}$ es mapeada bajo Log a la componente 1 de la amiba de g (Véase fig.A.3), denotamos tal componente por \mathcal{F}_1 . Sea $\Omega := \text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_1)$, se tiene por corolario 5.40, que $\pi_1(\Omega) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Consideremos el teorema de levantamiento de caminos aplicado a la cubriente

$$\pi : \mathcal{V}(f) \cap \pi^{-1}(\Omega) \cap U \longrightarrow \Omega$$

donde U es alguna vecindad de $P := (3, 1, 3^{\frac{1}{2}})$ como en la Prop.5.41 y los lazos $(3e^{i\theta}, 1)$ y $(3, e^{i\theta})$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ con punto base $(3, 1) \in \Omega$.

Puesto que el lazo $(3, e^{i\theta})$ no rodea el discriminante, se levanta al lazo $(3, e^{i\theta}, (2 + e^{i\theta})^{\frac{1}{2}})$, mientras que el lazo $(3e^{i\theta}, 1)$ rodea el discriminante, se levanta al camino $(3e^{i\theta}, 1, 3^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}})$, el cual es un lazo si $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq 2\pi$, es decir, se requieren dos vueltas del lazo en Ω para levantarse a un lazo. Luego tenemos que hay una arco-componente en una vecindad de P , la cual es una cubriente de grado 2 de Ω y $\pi_*(\pi_1(\mathcal{V}(f) \cap \pi^{-1}(\Omega) \cap U)) \approx 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

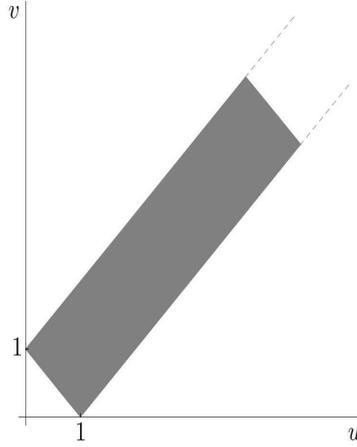


Figura A.1: La imagen de $\mathcal{V}(g)$ bajo τ .

Por la fórmula generalizada del binomio de Newton, tenemos que un desarrollo en serie de Laurent de $g^{\frac{1}{2}}$ es

$$\varphi_1 = (x+y-1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} y^k (-1+x)^{\frac{1}{2}-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}-k}{j} (-1)^j y^k x^{\frac{1}{2}-k-j}$$

con φ_1 convergente para $|x| > 1$ y $|\frac{y}{x-1}| < 1$. Como φ_1 converge en la región $|x| > 1$ y $|y| < |x| - 1$, la cual es la región A y esta región es mapeada bajo

Log a la componente 1 de la amiba de g (Véase fig.A.3), tenemos que φ_1 converge en $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_1)$.

Consideremos los conos C_V donde V es un vértice del politopo de g . Se tiene que $C_{(1,0)}$ es el único de estos conos tal que una traslación de el esta contenida en \mathcal{F}_1 . Luego la componente \mathcal{F}_1 esta asociada al vector $(1, 0)$ y de acuerdo a la proposición 5.42 se debe tener que

$$\varepsilon(\varphi_1) \subset \sigma_g(1, 0) = \langle (-1, 0), (-1, 1) \rangle.$$

Veamos donde se encuentran los exponentes de φ_1 ,

$$\varepsilon(\varphi_1) = \left\{ \left(\frac{1}{2} - k - j, k \right) \mid j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Como $(\frac{1}{2} - k - j, k) = j - \frac{1}{2}(-1, 0) + k(-1, 1)$, tenemos que $\varepsilon(\varphi_1) \subset \sigma_g(1, 0)$.

Razonando de forma analoga, obtenemos otra expansión en serie de Laurent de $g^{\frac{1}{2}}$,

$$\varphi_2 = (x+y-1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k (-1+y)^{\frac{1}{2}-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}-k}{j} (-1)^j x^k y^{\frac{1}{2}-k-j}.$$

para la convergencia de φ_2 se debe tener $|y| > 1$ y $|\frac{x}{y-1}| < 1$. Luego φ_2 converge en $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_2)$ donde \mathcal{F}_2 es la componente complementaria de la amiba de g asociada a $(0, 1)$ (Véase figura A.3, componente 2), por lo que se espera que $\varepsilon(\varphi_2) \subset \sigma_g(0, 1) = \langle (0, -1), (1, -1) \rangle$ y esto es cierto ya que

$$\varepsilon(\varphi) = \left\{ \left(k, \frac{1}{2} - k - j \right) \mid j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

y

$$\left(k, \frac{1}{2} - k - j \right) = j - \frac{1}{2}(0, -1) + k(1, -1).$$

El tercer desarrollo en serie de Laurent de $g^{\frac{1}{2}}$ es

$$\varphi_3 = (x+y-1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^{\frac{1}{2}-k} (x+y)^k$$

la cual converge para $|x+y| < 1$. Luego converge en $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_3)$ donde \mathcal{F}_3 es la componente complementaria de la amiba de g asociada a $(0, 0)$ (Véase figura A.3, componente 3) y claramente $\varepsilon(\varphi_3) \subset \sigma_g(0, 0) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.

Ejemplo A.2. Consideremos la cúbica nodal de Newton dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^2(x + 1)\}.$$

Una parametrización multivaluada para esta hipersuperficie está dada por $(x, x\sqrt{x+1})$ y el discriminante de C es el conjunto

$$D := \{x \in \mathbb{C} \mid x = 0, x = -1\}$$

La imagen de D bajo la aplicación τ es $\{0, 1\}$ y la amiba del discriminante es $\mathcal{A}_D = \{0\}$. Luego hay dos componentes conexas del complemento de la amiba,

$$\mathcal{F}_1 := (-\infty, 0) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2 := (0, +\infty).$$

Para la primera componente tenemos que $\Omega_1 := \text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{B}^\circ(0; 1)$ y para la segunda componente tenemos que $\Omega_2 := \text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{B}(0; 1)^c$. Tenemos que $\pi_1(\Omega_1) = \pi_1(\Omega_2) \approx \mathbb{Z}$. Consideremos el lazo $\frac{1}{2}e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ con punto base $\frac{1}{2}$ en Ω_1 .

Por el teorema de levantamiento para caminos aplicado a la cubriente

$$\pi : C \cap \pi^{-1}(\Omega_1) \cap U \longrightarrow \Omega_1$$

donde U es una vecindad de $\underline{0}$ como en la prop.5.41, el lazo $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ se levanta al camino $(\frac{1}{2}e^{i\theta}, \frac{1}{2}e^{i\theta}(\frac{1}{2}e^{i\theta} + 1)^{\frac{1}{2}})$. Se requieren dos vueltas del lazo $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ para levantarse a un lazo.

Luego tenemos que $C \cap \pi^{-1}(\Omega_1) \cap U$ consta de una única componente tal que $\pi : C \cap \pi^{-1}(\Omega_1) \cap U \longrightarrow \Omega_1$ es una aplicación cubriente de grado 2 y $\Pi^*(\pi_1(C \cap \pi^{-1}(\Omega_1) \cap U)) \approx 2\mathbb{Z}$. Consideremos la aplicación cubriente $\xi_2 : \sqrt{\Omega_1} \longrightarrow \Omega_1$ de grado 2. Puesto que las clases de $\xi_{2*}(\pi_1(\sqrt{\Omega_1}))$ son de la forma α^2 para algún $\alpha \in \pi_1(\Omega_1)$, entonces $\xi_{2*}(\pi_1(\sqrt{\Omega_1})) \approx 2\mathbb{Z}$.

Se tiene la parametrización,

$$(x, y_1(x)) = (x, x\sqrt{x+1}) = (x, x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} 1^{\frac{1}{2}-k} x^k)$$

con $y_1(x)$ convergente para $|x| < 1$.

Ahora, notemos que el discriminante está definido por el polinomio

$$g := x^2(x + 1),$$

el cual tiene por politopo de Newton el segmento en \mathbb{R} que une 2 con 3. Tenemos que \mathcal{F}_1 está asociada con el número 2 y por tanto de acuerdo a la proposición 5.42, $\varepsilon(y_1)$ debe estar contenido en el conjunto de reales no negativos, lo cual se cumple.

Ahora para Ω_2 , se tiene que $\Pi : \mathcal{C} \cap U \cap \Pi^{-1}(\Omega_2) \longrightarrow \Omega_2$ es una aplicación cubriente de grado 2 y se tiene la parametrización

$$(x, y_2(x)) = (x, x\sqrt{x+1}) = (x, x^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^{-k})$$

convergente para $|x| > 1$. Como \mathcal{F}_2 esta asociada al número 3, de acuerdo a la proposición se debe tener que $\varepsilon(y_2(x))$ deben de ser negativos, lo cual es cierto.

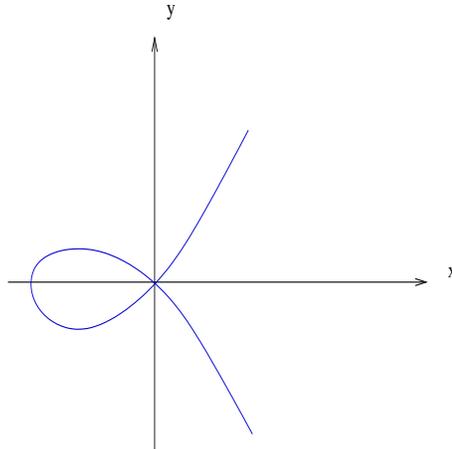


Figura A.2: Cúbica nodal.

Ejemplo A.3. Consideremos la hipersuperficie $f := z^6 - x^3 + y^2$ en \mathbb{C}^3 . Tenemos que su discriminante es el conjunto de ceros del polinomio

$$g := x^3 - y^2$$

en $(\mathbb{C})^2$ y la amiba de este discriminante es

$$\mathcal{A}_g := \{(\log|x|, \log|y|) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0, (x, y) \in (\mathbb{C}^*)^2\}$$

la cual es una recta en \mathbb{R}^2 de la forma $y = \frac{3}{2}x$. Entonces \mathcal{A}_g^c consta de dos componentes conexas, a saber,

$$\mathcal{F}_1 := \{(\log|x|, \log|y|) \in \mathbb{R}^2 \mid 3\log|x| < 2\log|y|\}$$

y

$$\mathcal{F}_2 := \{(\log|x|, \log|y|) \in \mathbb{R}^2 \mid 3\log|x| > 2\log|y|\}.$$

Para la primera componente un punto en $\Omega := \text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_1)$ es $(1, 2)$ pues $1 < 2^2$. Consideremos el teorema de levantamiento de caminos aplicado a la cubriente

$$\pi : \mathcal{V}(f) \cap \pi^{-1}(\Omega) \cap U \longrightarrow \Omega$$

donde U es alguna vecindad de $\underline{0}$ como en la Prop.5.41. Ahora tomemos los lazos $(e^{i\theta}, 2)$ y $(1, 2e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ los cuales tienen punto base $(1, 2)$. Nótese que el lazo $(e^{i\theta}, 2)$ no rodea el discriminante, (es homotópico a un punto) por lo que se levanta a un lazo. Sin embargo, el segundo lazo que rodea el discriminante se levanta al camino $(1, 2e^{i\theta}, (1 - 4e^{2i\theta})^{\frac{1}{6}})$. Luego tenemos en una vecindad de $\underline{0}$, que hay 3 componentes conexas, cada una es una cubriente de Ω de grado 2.

Tenemos la expansión en serie de Laurent,

$$\varphi_1 := (x^3 - y^2)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{6}}{k} (-1)^k y^{2k} x^{-3k}$$

convergente para $|y|^2 < |x|^3$. Como φ_1 converge en la región $|y|^2 < |x|^3$ y esta región es mapeada bajo Log a la componente 2 de la amiba del discriminante g , tenemos que φ_1 converge en $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_2)$. El politopo de g es el segmento con extremos $(0, 2)$ y $(3, 0)$. Consideremos los conos C_V donde V es un vértice del politopo g . Nótese que el cono $C_{(3,0)}$ es el único de estos conos tal que una traslación de él está contenida en \mathcal{F}_2 . Luego la componente \mathcal{F}_2 está asociada al vector $(3, 0)$ y de acuerdo a la proposición 5.42 se debe tener que $\varepsilon(\varphi_1) \subset \sigma_g(3, 0) = \langle(-3, 2)\rangle$ y esto se cumple ya que

$$\varepsilon(\varphi_1) = \{(-3k, 2k) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

Tenemos la otra expansión en serie de Laurent,

$$\varphi_2 := (x^3 - y^2)^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{3}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{-k} \binom{\frac{1}{6}}{k} x^{3k} y^{-2k}$$

la cual converge para $|x|^3 < |y|^2$. Tenemos que la serie converge en $\text{Log}^{-1}(\mathcal{F}_1)$ y que \mathcal{F}_1 está asociada al vértice $(0, 2)$. De acuerdo a la proposición 5.42 se debe tener que $\varepsilon(\varphi_2) \subset \sigma_g(0, 2) = \langle (3, -2) \rangle$, lo cual se cumple, pues

$$\varepsilon(\varphi_2) = \left\{ (3k, -2k) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

Ejemplo A.4. Consideremos $g := z^m - x^a y^b$ en \mathbb{C}^3 . Con esta hipersuperficie el discriminante de la proyección es el cero en \mathbb{C}^2 . Así que la amiba del discriminante es el vacío. Luego su única componente complementaria es \mathbb{R}^2 , con lo que $\Omega = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ y $\varepsilon_m^{-1}(\Omega) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Tomando como base el punto $(1, 1)$ en Ω , notemos que los lazos son de la forma

$$\left\{ \left(e^{\frac{ak}{m}\theta}, e^{\frac{bl}{m}\theta} \right) \mid \theta \in (0, 2\pi), ak + bl \equiv 0 \pmod{m} \right\}$$

por lo que el grupo $\Pi^*(\pi_1(\mathcal{C})) \subset m\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$ y puesto que los lazos en $\varepsilon_m^{-1}(\Omega)$ son de la forma,

$$\left\{ \left(e^{\frac{ak}{m^2}\theta}, e^{\frac{bl}{m^2}\theta} \right) \mid \theta \in (0, 2\pi), ak + bl \equiv 0 \pmod{m^2} \right\}.$$

Así tenemos que $\varepsilon_m^*(\pi_1(\varepsilon_m^{-1}(\Omega))) \subset \Pi^*(\pi_1(\mathcal{C}))$.

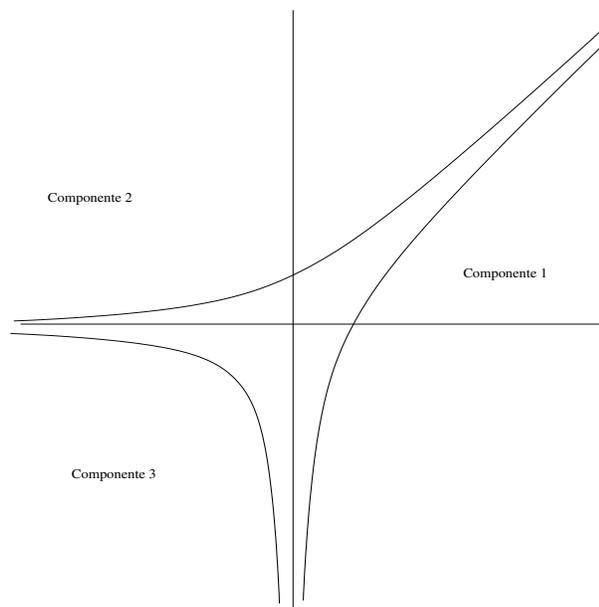


Figura A.3: Amiba de $g := x + y - 1$ y sus componentes complementarias.

Índice alfabético

- $I(A)$, 11
- $NP(f)$, 20
- \mathbb{R}_+A , 21
- σ^\vee , 18
- $\sigma_f(V)$, 22
- cw^μ , 30
- $C(\sigma, \varrho)$, 33
- C_V , 21
- $H(a; \alpha)$, 16
- $H^+(a; \alpha)$, 16
- $H^-(a; \alpha)$, 16
- $N_p(x)$, 26
- $R_V(z)$, 39
- Δ , 56
- $\Delta(\rho)$, 57
- $\Phi_{\mathcal{B}}$, 37
- $\alpha * \beta$, 44
- $\langle S \rangle$, 17
- $\langle x, y \rangle$, 16
- $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$, 48
- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, 11
- $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$, 29
- $\mathbb{C} \ll x \gg$, 49
- $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$, 49
- \mathbb{C}^* , 33
- $\mathbb{K}((x^{\frac{1}{n}}))$, 49
- \mathcal{A} , 6
- \mathcal{A}_f , 25
- $\mathcal{C}(f)$, 29
- $\mathcal{V}(f)$, 11
- $\dim A$, 10
- $\dim_a A$, 11
- $\bar{\alpha}$, 43
- $\overline{\mathbb{D}}^*_{\varrho}$, 33
- $\overline{\mathbb{D}}_{\varrho}$, 33
- $\pi_1(X, x)$, 44
- σ , 17
- σ -completo, 39
- $\sqrt[\varrho]{\Omega}$, 33
- ord** f , 49
- $\text{Rec}(A)$, 19
- Log , 25
- $\text{Ord}(\mathcal{F})$, 27
- $\text{conv}(A)$, 16
- $\varepsilon(\varphi)$, 20
- $f_{(d)}$, 49
- f_* , 44
- z^α , 25, 37
- logarítmicamente convexo, 35
- El politopo de Newton, 20
- subconjunto analítico, 7
- amiba, 25
- aplicación propia, 46
- biholomorfismo, 55
- campo de series de Puiseux, 49
- cíncel, 33
- combinación convexa, 16

- componente asociada a un vértice, 41
- conjunto σ completo, 36
- conjunto algebraico, 11
- Conjunto de Reinhardt, 26
- cono asociado, 22
- cono convexo, 17
- cono de recesión, 19
- cono dual, 18
- cono normal, 21
- discriminante local, 57
- espacio cubriente, 45
- extensión analítica, 4
- fórmula de Jensen, 26
- fuertemente convexo, 18, 35
- función de Ronkin, 26
- función holomorfa acotada, 37
- germen analítico, 52
- grupo fundamental, 44
- hiperplano afín, 16
- hiperplano soporte, 16
- homeomorfismo local, 45
- homomorfismo inducido, 44
- homotópicamente equivalente, 57
- levantamiento, 46
- localmente biholomorfa, 55
- localmente finito, 10
- logarítmicamente convexo, 26
- número de hojas, 45
- orden de la componente, 27
- orden de la componente , 27, 31
- parametrización local, 49
- polidisco, 4
- Polinomio de Laurent, 25
- polinomio de Laurent, 6, 30
- politopo, 16
- principio del argumento, 30
- serie de Laurent multiple, 5
- series de potencias convergentes, 49
- series de potencias formales, 48
- teorema de extensión de Riemann, 4, 6
- Teorema de la función implícita, 50
- Teorema de levantamiento, 47
- Teorema de Newton-Puiseux, 51
- transformación finita, 55
- vector normal interior, 16

Bibliografía

- [1] F. Aroca, *Puiseux parametric equations of analytic sets*. (English summary) Proc. Amer. Math. Soc. 2004
- [2] E. M. Chirka, *Complex analytic sets*. Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
- [3] J. B. Conway, *Function of One Complex Variable 1*, Second edition. Ed. Board, pub. Springer.
- [4] G. Fischer, *Plane Algebraic Curves*, translate by Leslie Kay, 2001. Ed. Board.
- [5] M. Forsberg, M. Passare and Tsikh, *Laurent Determinants and Arrangements of hyperplane Amoebas*, 1999.
- [6] W. Fulton, *Algebraic Topology A First Course*, 1995. Ed. Board, pub. Springer.
- [7] I.M. Gelfand ; Kapranov, M. M.; Zelevinsky, A. V., *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhauser Classics. Birkhauser Boston, Inc., Boston.
- [8] B. Grunbaum, *Convex Polytopes*, Second edition. Ed. Board, pub. Springer.
- [9] R.C. Gunning, *Lectures on Complex Analytic Varieties: The Local Parametrization Theorem*. Princeton University Press and the University of Tokyo Press, 1970.
- [10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Department of Mathematics University of California, Berkeley California, 1977. Ed. Board, pub. Springer.

- [11] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2002.
- [12] R. Kenyon.,A. Okounkov, S. Sheffield, *Dimers and Amoebae*, Annals of Mathematics, Vol.163 pgs.1019-1056, 2006.
- [13] C. Laurent-Thiebaud, *Holomorphic Function Theory in Several Variables, An introduction*, 1997. Ed. Board, pub. Springer.
- [14] S. Lojasiewicz , *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhauser, 1991.
- [15] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, 1991. Ed. Board, pub. Springer.
- [16] G. Mikhalkin, *Real algebraic curves, moment map and amoebas*, Ann. of Math. 151 (2000), no. 1, 309-326.
- [17] K.J. Nowak , *A simple proof of Puiseux theorem*, Univ. Iagel. Acta Math.32 (1995) 199-200.
- [18] M. Passare, H. Rullgard, *Amoebas Monge- Ampere measures and triangulations of the Newton polytope*. Preprint, Stockholm University, 2000.Duke mathematical journal Vol. 121 No.3, 2004.
- [19] W. Rudin, *Function Theory in Polydiscs*, Mathematics Lecture Note Series, Benjamin, NewYork-Amsterdam, 1969
- [20] H. Rullgard, *Polynomial amoebas and convexity*. Research report in mathematics number 8, 2001. Department of mathematics Stockholm University.
- [21] V. Scheidemann, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Birkhauser Verlag, 2000.
- [22] A. Shrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley-interscience series indiscrete mathematics and optimization, 1999.
- [23] N. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1951.
- [24] R.Tyrrel Rockafellar, *Convex Analysis*, Second printing, Princeton University Press, 1972.