UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Soluciones no radiales de un problema elíptico semilineal en la bola unitaria

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ANDRÉS ASTORGA ESPRIELLA

DIRECTOR DE TESIS:
Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora
2013

Soluciones no radiales de un problema elíptico semilineal en la bola unitaria

Andrés Astorga Espriella

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Es bien sabido que en distintas ciencias como la física o la economía, y en diversas áreas de las matemáticas como la probabilidad, se utilizan ecuaciones diferenciales parciales para modelar ciertos fenómenos. Para que estos modelos tengan validez es necesario comprobar que tienen al menos una solución. La mayoría de las veces las soluciones a estas ecuaciones no pueden darse explícitamente por la complejidad del problema, por lo tanto, se vuelve necesario obtener información que ayude a describir las soluciones, por ejemplo, si son radiales o no. Las funciones radiales son aquellas que sólo dependen de la norma del punto.

En 1979, Gidas, Ni y Nirenberg prueban en [10] que las soluciones positivas al problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y Ω es la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$, son radialmente simétricas. Subsecuente a este resultado surgió el interés por saber si también eran radiales las soluciones al problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, radialmente simétrica en la primera variable y monótona creciente con respecto a $|x|$.

En este trabajo considero el siguiente problema elíptico semilineal, del tipo del segundo problema antes mencionado,

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 - t\varphi_1 & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_t)$$

donde φ_1 es la función propia correspondiente al primer valor propio λ_1 de $-\Delta$ con valor cero en la frontera y tal que $\varphi_1(0) = 1$. El objetivo es probar que este problema tiene una solución radial y una solución no radial.

Para ello estudiaremos el índice de Morse de las soluciones radiales y probaremos que, para t suficientemente grande, éste es o bien cero o bien mayor igual que dos.

Demostraremos además una generalización del teorema clásico de paso de montaña de Ambrosetti y Rabinowitz, que no sólo asegura la existencia de un punto crítico, sino que proporciona además información sobre su índice de Morse. Aplicando este resultado a nuestro problema, probaremos que para algún t, éste tiene una solución con índice de Morse uno, de modo que no puede ser radial.

En el Capítulo 2 se repasan algunos conceptos y resultados que serán fundamentales para probar los resultados importantes de esta tesis. También, se da una prueba del lema de deformación, el cual juega un papel crucial en la demostración del teorema del paso de montaña.

El Capítulo 3 contiene la definición del índice de Morse y la demostración de la generalización del teorema del paso de montaña.

El último capítulo se concentra en probar con todo detalle el objetivo mencionado. Para t suficientemente grande, se prueba que cualquier solución radial no negativa o que cambia de signo de (P_t) tiene índice de Morse de al menos dos en el espacio de Sobolev, y también se prueba que para troda $t > 0$, el problema tiene una única solución negativa de índice cero, que es radial.

Capítulo 2

Conceptos y resultados preliminares

Este capítulo está dedicado a revisar algunos de los conceptos y resultados que usaremos para probar los resultados principales de esta tesis. Primero veremos brevemente los conceptos de derivada y derivadas de orden superior de funciones entre espacios de Banach, y algunos ejemplos importantes de funciones diferenciables que usaremos más adelante. Después recordaremos el concepto de espacio de Sobolev y enunciaremos los teoremas fundamentales sobre dichos espacios, que usaremos para probar la existencia de soluciones no radiales en el capítulo 4. Por último demostraremos el lema de deformación, que jugará un papel fundamental en la demostración del teorema del paso de montaña del capítulo 3.

2.1. Diferenciabilidad en espacios de Banach

Si V y W son espacios de Banach denotamos por

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(V,W) &:= \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal y continua}\},\\ \mathcal{B}_k(V,W) &:= \{T : V \times \cdots \times V \to W \mid T \text{ es } k\text{-multilineal y continua}\}.\end{aligned}$$

Éstos son espacios de Banach con la normas

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{B}(V,W)} &:= \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} \qquad \forall T \in \mathcal{B}(V,W),\\ \|T\|_{\mathcal{B}_k(V,W)} &:= \sup_{v_i\in V\setminus\{0\}} \frac{\|T(v_1,...,v_k)\|_W}{\|v_1\|_V \cdots \|v_k\|_V} \qquad \forall T \in \mathcal{B}_k(V,W).\end{aligned}$$

Definición 2.1 *Sean V y W espacios de Banach y Ω subconjunto abierto de V, entonces $\varphi : \Omega \to W$ es (Frechet-) diferenciable en Ω si para cada $u_0 \in \Omega$, existe*

$T \in \mathcal{B}(V,W)$ *tal que*

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|\varphi(v+u_0) - \varphi(u_0) - Tv\|_W}{\|v\|_V} = 0$$

T *se llama la derivada (de Frechet) de* φ *en* u_0 *y se denota* $\varphi'(u_0) = T$

Definición 2.2 *Decimos que* φ *pertenece a* $C^1(\Omega,W)$ *(o es una funcion de clase* C^1*) si la función* $u \to \varphi'(u)$ *está bien definida y es continua. También decimos que* $\varphi \in C^2(\Omega,W)$ *(o es una función de clase* C^2*) si* $\varphi' \in C^1(\Omega,\mathcal{B}(V,W))$*. En general, sea* $k \in \mathbb{N}$ *con* $k \geq 2$*, la función* φ *es* $k-$*veces diferenciables si* φ *es* $(k-1)-$*veces diferenciable y su derivada de orden* $(k-1)$*,* $D^{k-1}\varphi : \Omega \to \mathcal{B}_{k-1}(V,W)$*, es diferenciable en* Ω*. La derivada de* $D^{k-1}\varphi$ *se llama la derivada de orden* k *de* φ *y se denota:*

$$D^k\varphi : \Omega \to \mathcal{B}(V, \mathcal{B}_{k-1}(V,W)) \cong \mathcal{B}_k(V,W).$$

Si $D^k\varphi$ *es continua en* Ω *decimos que* $\varphi \in C^k(\Omega,W)$ *o* φ *es de clase* C^k *en* Ω*.*
Si φ *es de clase* C^k *en* Ω *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *decimos que* φ *es de clase* C^∞ *en* Ω*.*

Si H es un espacio de Hilbert, $\mathcal{O}$ es abierto en H y $\varphi' \in C^1(\mathcal{O},\mathbb{R})$, el teorema de representación de Fréchet-Riesz nos dice que para todo $u_0 \in \mathcal{O}$ que existe un único $v_{u_0} \in V$ tal que

$$\varphi'(u_0)(u) = \langle v_{u_0}, u\rangle \qquad \forall u \in H$$

y además $\|\varphi'(u_0)\|_{\mathcal{B}(H,\mathbb{R})} = \|v_{u_0}\|$.

Definición 2.3 *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $\Omega \subseteq H$ *abierto, si* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $u \in \Omega$*, entonces definimos el gradiente de* φ *en* u*, denotado por* $\nabla\varphi(u)$*, como el único elemento en* H *tal que:*

$$\varphi'(u)(v) = \langle \nabla\varphi(u), v\rangle \quad \forall v \in H.$$

Los siguientes ejemplos serán útiles en el capítulo 4.

Recordemos que $\varphi \in C^1(\mathcal{O},\mathbb{R})$ si y sólo si la función $G\varphi(u) : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$G\varphi(u)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t}$$

está bien definida, es lineal y continua para cada $u \in \mathcal{O}$ y, además, $G\varphi : \mathcal{O} \to \mathcal{B}(V,\mathbb{R})$ es continua. En tal caso

$$\varphi'(u)(v) = G\varphi(u)(v) \quad \forall v \in V \text{ y } \forall u \in \mathcal{O}.$$

Ejemplo 2.4 *Toda función constante es de clase* C^∞ *y todas sus derivadas son cero.*

Ejemplo 2.5 *Toda transformación lineal y continua $T : V \to W$ es de clase C^∞. Su primera derivada es $T'(u) = T$ para todo $u \in V$, ya que $T(u+v) - T(u) - T(v) = 0$ para cualesquiera $u, v \in V$. Por el ejemplo anterior, sus derivadas de orden ≥ 2 son cero.*

Ejemplo 2.6 *Si H es un espacio de Hilbert, entonces la función $Q : H \to \mathbb{R}$ dada por $Q(u) := \frac{1}{2}\|u\|^2$ es de clase C^∞. Su primera y segunda derivadas están dadas por*

$$Q'(u)v = \langle u, v \rangle \quad y \quad Q''(u)(v, w) = \langle v, w \rangle \qquad \forall u, v, w \in H,$$

y sus derivadas de orden ≥ 3 son cero.

Demostración: Sea $u \in H$. Como para toda $v \in H$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2,$$

entonces

$$\lim_{v \to 0} \frac{\left| \frac{1}{2}\|u + v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u, v \rangle \right|}{\|v\|} = \lim_{v \to 0} \|v\| = 0.$$

Claramente $\langle u, \cdot \rangle$ es lineal $\forall u \in H$. Además es continua, pues

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| \qquad \forall v \in H,$$

y también por esta razón

$$\|\langle u, \cdot \rangle\|_{\mathcal{B}(H,\mathbb{R})} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|v\|} \leq \|u\|.$$

Por lo tanto, $Q'(u) = \langle u, \cdot \rangle$ para toda $u \in H$ y $Q \in C^1(H, \mathbb{R})$. Notemos que por la bilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y el hecho de que $\|Q'(u)\|_{\mathcal{B}(H,\mathbb{R})} \leq \|u\|$, Q' es lineal y continua, por lo que los Ejemplos 2.4 y 2.5 nos dicen que Q es de clase C^∞, $Q''(u)(v, w) = \langle v, w \rangle$ para toda $u, v, w \in H$, y sus derivadas de orden ≥ 3 son cero. ■

Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ y $p \in (1, \infty)$ denotaremos por

$$|u|_p := \left(\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}$$

a la norma en el espacio $L^p(\Omega)$.

Ejemplo 2.7 *La función $\Psi : L^3(\Omega) \to L^{3/2}(\Omega)$ dada por $\Psi(u) = u^2$ es de clase C^∞. Su primera y segunda derivadas están dadas por*

$$\Psi'(u)v = 2uv \quad y \quad \Psi''(u)(v, w) = 2vw \qquad \forall u, v, w \in L^3(\Omega),$$

y sus derivadas de orden ≥ 3 son cero.

Demostración: Sea $u \in L^3(\Omega)$, nota que la función $G\Psi(u) : L^3(\Omega) \to L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, dada por

$$G\Psi(u)(w) = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(u+tw) - \Psi(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2tuw + t^2w^2}{t} = 2uw,$$

es continua pues

$$\begin{aligned} |G\Psi(u)(w)| &= 2(\int_\Omega |u|^{\frac{3}{2}} \, |w|^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} \\ &\leq 2(\left| |u|^{\frac{3}{2}} \right|_2 \left| |w|^{\frac{3}{2}} \right|_2)^{\frac{2}{3}} \\ &= 2(|u|_3^{\frac{1}{2}} \, |w|_3^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} \\ &= 2(|u|_3 \, |w|_3). \end{aligned}$$

Nota también que la función $G\Psi : L^3(\Omega) \to \mathcal{B}(L^3(\Omega), L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ también es lineal, y como

$$\begin{aligned} \|G\Psi\|_{\mathcal{B}(L^3(\Omega),.L^{\frac{3}{2}}(\Omega))} &= \sup_{\substack{w\in L^3(\Omega)\\ w\neq 0}} \frac{|G\Psi(u)(w)|_{\frac{3}{2}}}{|w|_3} \leq \sup_{\substack{w\in L^3(\Omega)\\ w\neq 0}} 2\frac{|u|_3 \, |w|_3}{|w|_3} \\ &= 2\,|u|_3\,, \end{aligned}$$

se tiene que $G\Psi$ es continua. Esto prueba que Ψ es de clase C^∞ y

$$\Psi'(u)(w) = 2uw \quad \forall u, w \in L^3(\Omega).$$

Además, por los Ejercicios 2.4 y 2.5, Ψ'es de clase C^1,

$$\Psi''(u) = \Psi \quad \text{y} \quad \Psi'''(u) = 0 \quad \forall u \in L^3(\Omega).$$

■

Ejemplo 2.8 *La función $\Phi : L^3(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(u) = \frac{1}{3}\int_\Omega u^3$ es de clase C^∞. Sus primeras tres derivadas están dadas por*

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega u^2 v, \quad \Phi''(u)(v,w) = 2\int_\Omega uvw,$$
$$\Phi'''(u)(v,w,z) = 2\int_\Omega vwz \qquad \forall u,v,w,z \in L^3(\Omega),$$

y sus derivadas de orden ≥ 4 son cero.

Demostración: Sea $u \in L^3(\Omega)$, nota nuevamente que la función $G\Phi(u) : L^3(\Omega) \to \mathbb{R}$, está dada por

$$\begin{aligned} G\Phi(u)(v) &= \lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{(u+tv)^3}{3} - \frac{u^3}{3}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int\limits_{\Omega} \Big(tu^2v + t^2uv^2 + \frac{t^3v^3}{3}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0}\Big(\int\limits_{\Omega} u^2v + t\int\limits_{\Omega} uv^2 + t^2\int\limits_{\Omega} v^3\Big) = \int\limits_{\Omega} u^2v \quad \forall v \in L^3(\Omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G\Phi(u)$ es lineal y, usando la desigualdad de Hölder

$$\left|\int_{\Omega} u^2 v\right| \le \left|u^2\right|_{\frac{3}{2}} |v|_3 \,,$$

vemos que $G\Phi(u)$ es continua.

Por el teorema de Representación de Riesz, la función $\rho : L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \to \mathcal{B}(L^3(\Omega),\mathbb{R})$ definida como:

$$\rho(w)(v) = \int\limits_{\Omega} wv \quad \forall w \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega),$$

es una isometría lineal y $G\Phi = \rho \circ \Psi$, donde Ψ es la función del Ejemplo 2.7. Por tanto, $G\Phi$ es de clase C^∞ y $\Phi' = G\Phi = \rho \circ \Psi$.

Por el Ejemplo 2.7, como:

$$\Phi'(u)(v) = (\rho \circ \Psi(u))(u)(v) = \int\limits_{\Omega} u^2v \quad \forall u, v \in L^3(\Omega),$$

aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\Phi''(u)(v,w) = (\rho(\Psi'(u))v)w = 2\int\limits_{\Omega} uvw \quad \forall u, v, w \in L^3(\Omega).$$

Análogamente, por el Ejemplo 2.7 y la regla de la cadena, obtenemos que

$$\Phi'''(u)(v,w,z) = 2\int_{\Omega} vwz \qquad \forall u, v, w, z \in L^3(\Omega).$$

■

2.2. Espacios de Sobolev

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$.

Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ al conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ en Ω con soporte compacto contenido en Ω.

Proposición 2.9 *(a) Si* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

(b) Si $f \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int\limits_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Demostración: (a) Sea $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida como

$$\overline{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Claramente $\overline{\varphi} \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sea $a > 0$ tal que $sop(\varphi) \subset [-a, a]^N$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 1$ y denotemos $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1} \equiv \mathbb{R}^N$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i} = \varphi(a, y) - \varphi(-a, y) = 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{N-1},$$

y entonces, por el teorema de Fubini

$$\int\limits_{\nleq} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \int\limits_{-a}^{a} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i}(t, y) dt dy = 0.$$

(b) Aplicando el inciso (a) al producto $f\varphi \in C_c^1(\Omega)$, tenemos

$$0 = \int\limits_\Omega \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_i} = \int\limits_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int\limits_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f.$$

$\blacksquare$

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ al conjunto de las funciones de Ω en $\mathbb{R}$ que son Lebesgue-integrable en todo subconjunto abierto ω de Ω con la propiedad de que $\overline{\omega}$ es compacto y $\overline{\omega} \subset \Omega$.

La proposición anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.10 *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que u es débilmente diferenciable en Ω si existen $D_i u = v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega v_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Definmos el gradiente débil de u como $\nabla u := (D_1 u, ..., D_n u)$.

Definición 2.11 *Sea $p \in [1, \infty)$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid u \text{ es débilmente diferenciable en } \Omega \text{ y } D_i u \in L^p(\Omega) \ \forall i\},$$

dotado de la siguiente norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(|u|_p^p + \sum_{i=1}^n |D_i(u)|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Si $p = 2$, se denota por

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

La norma en este espacio está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i(u) D_i(v) \qquad \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Teorema 2.12 *$W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para todo $p \in [1, \infty)$, y $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$.*

Demostración: La demostración se puede consultar en [5, 6, 7]. ■

Es sencillo comprobar que $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ para toda $p \in [1, \infty)$ y que $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para toda $f \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definición 2.13 *El espacio $H^1_0(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.*

Como $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $H^1(\Omega)$, tenemos que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Los siguientes resultados juegan un papel muy importante en la demostración de la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales mediante métodos variacionales, como veremos en el capítulo 4.

Teorema 2.14 (Desigualdad de Sobolev) *Sean $N \geq 3$ y $2^* := \frac{2N}{N-3}$. Existe una constante $C_N > 0$ tal que:*

$$|u|_{2^*} \leq C_N \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Demostración: La demostración se puede consultar en [5, 6, 7]. ■

Teorema 2.15 (Desigualdad de Poincaré) *Si $p \in [1, 2^*]$ y Ω es acotado, existe una constante $C_{\Omega,p} > 0$ tal que:*

$$|u|_p \leq C_{\Omega,p} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración: La demostración se puede consultar en [5, 6, 7]. ■

La desigualdad de Poincaré tiene las siguientes consecuencias importantes.

Corolario 2.16 *Si Ω es acotado, entonces*

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i(u) D_i(v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ y la norma inducida,

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2},$$

es equivalente a $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. Por consiguiente, $H_0^1(\Omega)$ con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un espacio de Hilbert.

Demostración: Claramente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es bilineal y simétrica. Veamos que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|u\|^2 \leq \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}\right)^2 \leq C_2 \|u\|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

de esta forma, es evidente que $\langle u, u\rangle > 0$ cuando $u \neq 0$ y que las normas son equivalentes.

Sean $u \in H_0^1(\Omega)$ y $C_2 := C_{\Omega,2}^2 + 1$,como $|u|_2^2 \leq C_{\Omega,2}^2 \|u\|^2$, se tiene que:

$$\left(\|u\|_{H^1(\Omega)}\right)^2 = \left(|u|_2^2 + \|u\|^2\right) \leq C_{\Omega,2}^2 \|u\|^2 + \|u\|^2 = \left(C_{\Omega,2}^2 + 1\right) \|u\|^2 \leq C_2 \|u\|^2.$$

Ahora, si $C_1 := 1$, tenemos que: $C_1 \|u\|^2 \leq |u|_2^2 + \|u\|^2 = \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}\right)^2$. ■

Corolario 2.17 (Encaje de Sobolev) *Si Ω es acotado, entonces $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, 2^*]$ y esta inclusión es continua.*

Demostración: Sean $u \in H_0^1(\Omega)$ y $p \in [1, 2^*]$, como Ω es acotado, por la desigualdad de Poincaré:

$$\int_\Omega |u|^p \leq (C_{\Omega,p})^p (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}} < \infty,$$

con $C_{\Omega,p} > 0$. Por lo tanto $|u|^p$ es integrable sobre Ω. ■

Teorema 2.18 (Rellich-Kondrachov) *Si $p \in [1, 2^*)$ y Ω es acotado, entonces toda sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión que converge fuertemente en $L^p(\Omega)$.*

Demostración: La demostración se puede consultar en [5, 6, 7]. ■

2.3. El lema de deformación

2.3.1. Funciones localmente Lipschitz continuas

Sean V, W espacios de Banach y $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de V. Si $x \in V$ y $\rho > 0$, denotamos por

$$B(x, \rho) := \{y \in V : \|y - x\| < \rho\}.$$

Definición 2.19 *Una función $\psi : \mathcal{O} \to W$ es localmente Lipschitz continua si para cada $x \in \mathcal{O}$ existen $\rho > 0$ y $M > 0$ (que dependen de x) tales que*

$$B(x,\rho) \subset \mathcal{O} \qquad y \qquad \|\psi(y) - \psi(z)\| \le M \|y - z\| \quad \forall y, z \in B(x,\rho).$$

Un ejemplo importante es el siguiente.

Proposición 2.20 *Si $\psi \in C^1(\mathcal{O}, W)$ entonces ψ es localmente Lipschitz continua.*

Demostración: Sea $x \in \mathcal{O}$. Como ψ' es continua, existe $\rho > 0$ tal que $B(x,\rho) \subset \mathcal{O}$ y

$$\|\psi'(y) - \psi'(x)\| < 1 \qquad \text{si} \quad \|y - x\| < \rho.$$

En consecuencia,

$$\|\psi'(y)\| \le \|\psi'(y) - \psi'(x)\| + \|\psi'(x)\| < 1 + \|\psi'(x)\| := M \qquad \forall y \in B(x,\rho).$$

Si $y, z \in B(x,\rho)$ entonces $x_t := (1-t)y + tz \in B(x,\rho)$ para todo $t \in [0,1]$ y el teorema del valor medio asegura que

$$\|\psi(y) - \psi(z)\| \le \max_{t\in[0,1]} \|\psi'(x_t)\| \, \|y - z\| \le M \|y - z\|.$$

Esto concluye la demostración. ■

Usaremos los siguientes dos lemas para probar el lema de deformación.

Lema 2.21 *Si $\psi : \mathcal{O} \to W$ y $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ son localmente Lipschitz continuas, entonces su producto $f\psi : \mathcal{O} \to W$ es localmente Lipschitz continua.*

Demostración: Sea $x_0 \in \mathcal{O}$ y sean $\delta_1, C_1 > 0$ tales que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le C_1 \|x_2 - x_1\| \qquad \forall x_2, x_1 \in B(\delta_1, x_0).$$

Sean $\delta_2, C_2 > 0$ tales que

$$\|\psi(x_2) - \psi(x_1)\| \le C_2 \|x_2 - x_1\| \qquad \forall x_2, x_1 \in B(\delta_2, x_0).$$

Como $|f(x) - f(x_0)| \le C_1 \|x - x_0\|$ para toda $x \in B(\delta_1, x_0)$, se tiene que

$$|f(x)| \le |f(x_0)| + C_1 \|x - x_0\| < |f(x_0)| + C_1\delta_1 \;\forall x \in B(\delta_1, x_0),$$

y como $\|\psi(x) - \psi(x_0)\| \le C_2 \|x - x_0\|$ para toda $x \in B(\delta_2, x_0)$, se tiene que

$$\|\psi(x)\| \le \|\psi(x_0)\| + C_2 \|x - x_0\| < \|\psi(x_0)\| + C_2\delta_2 \;\forall x \in B(\delta_1, x_0).$$

Sea $C_3 := |f(x_0)| + C_1\delta_1$ y $C_4 := \|\psi(x_0)\| + C_2\delta_2$, así tenemos

$$\begin{aligned}
&\|f(x_2)\psi(x_2) - f(x_1)\psi(x_1)\| \\
&= \|f(x_2)\psi(x_2) + f(x_1)\psi(x_2) - f(x_1)\psi(x_2) - f(x_1)\psi(x_1)\| \\
&\leq |f(x_1)| \, \|\psi(x_2) - \psi(x_1)\| + \|\psi(x_2)\| \, |f(x_2) - f(x_1)| \\
&\leq (C_3C_2 + C_4C_1) \, \|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in B(\delta, x_0),
\end{aligned}$$

si $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo tanto $f\psi$ es localmente Lipschitz continua. ■

Lema 2.22 *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz continua y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{O}$, entonces $\frac{1}{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz continua.*

Demostración: Sea $x_0 \in \mathcal{O}$ y sean $\delta_1, C_1 > 0$ tales que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C_1 \|x_2 - x_1\| \qquad \forall x_2, x_1 \in B(\delta_1, x_0).$$

Sea $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x_0)| - |f(x)| < |f(x_0) - f(x)| \leq \frac{|f(x_0)|}{2} \quad \forall x \in B(\delta_2, x_0),$$

así

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{f(x_0)} \quad \forall x \in B(\delta_2, x_0),$$

por lo que entonces, si $C := \frac{C_1}{f(x_0)^2}$ y $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, tenemos

$$\left|\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}\right| = \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1)f(x_2)}\right| \leq \frac{C_1 \|x_1 - x_2\|}{f(x_0)^2} = C \|x_1 - x_2\| \qquad \forall x_2, x_1 \in B(\delta, x_0).$$

Por lo tanto $\frac{1}{f}$ es localmente Lipschitz continua ■

2.3.2. El lema de deformación

Sean H un espacio de Hilbert, $\mathcal{O}$ un subconjunto abierto de H y $\chi : \mathcal{O} \to H$ un campo vectorial, es decir, una función continua.

Definición 2.23 *Una solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{dt} = \chi(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u, \end{cases} \tag{2.1}$$

es una función continuamente diferenciable $\sigma(\cdot, u) : J \to \mathcal{O}$, definida en un intervalo J de $\mathbb{R}$ que contiene a 0, que satisface

$$\frac{d\sigma}{dt}(t, u) = \chi(\sigma(t, u)) \quad \forall t \in J \qquad y \qquad \sigma(0, u) = u.$$

El siguiente resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias es esencial en la demostración del lema de deformación.

Teorema 2.24 (de existencia y unicidad para el problema de Cauchy) *Sea $\chi : \mathcal{O} \to H$ un campo vectorial localmente Lipschitz continuo. Entonces dado $u \in \mathcal{O}$, existe $\delta > 0$ tal que el problema de Cauchy tiene una única solución en el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. El intervalo máximo donde esta solución existe es abierto y lo denotamos:*

$$\mathcal{I}(u) := (\mathcal{T}^+(u), \mathcal{T}^-(u)).$$

El dominio de σ :

$$\mathcal{D} := \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid t \in \mathcal{I}(u)\}$$

es abierto en $\mathbb{R} \times \Omega$ y la función $\sigma : \mathcal{D} \to \mathcal{O}$ es continua. Si $\|\chi(\sigma(t, u))\| \leq K < \infty$ para todo $t \in [0, \mathcal{T}^+(u))$, entonces $\mathcal{T}^+(u) = \infty$. La afirmación análoga para $\mathcal{T}^-(u)$ también vale.

Demostración: La demostración se puede consultar en [1, 3]. ■

Definición 2.25 *Una función $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ si cualquier sucesión (u_n) en H tal que*

$$\varphi(u_n) \to c \qquad y \qquad \varphi'(u_n) \to 0$$

contiene una subsucesión convergente.

Si $c \in \mathbb{R}$ denotamos por

$$K_c := \{x \in H : \varphi(x) = c \text{ y } \nabla\varphi(x) = 0\}.$$

Dados $\alpha > 0$ y un subconjunto X de H, denotamos por

$$N_\alpha(X) := \{u \in H : \operatorname{dist}(u, X) < \alpha\},$$

donde

$$\operatorname{dist}(u, X) := \inf_{x \in X} \|u - x\|.$$

Si $X = \emptyset$, definimos $N_\alpha(X) := \emptyset$.

Necesitaremos el siguiente resultado para probar el lema de la deformación.

Lema 2.26 *Si $\varphi \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisface $(PS)_c$ entonces se tiene lo siguiente:*

(a) *K_c es un conjunto compacto (posiblemente vacío).*

(b) *Para cada $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\|\nabla\varphi(u)\| \geq \frac{\varepsilon}{\delta} \qquad \forall u \in \varphi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \setminus N_\delta(K_c).$$

Demostración: La demostración de (a) es clara pues, como φ satisface $(PS)_c$, toda sucesión en K_c contiene una subsucesión convergente.

Demostremos (b). Argumentando por contradicción, supongamos que existe una sucesión (u_k) tal que

$$u_k \in H \setminus N_\delta(K_c), \qquad \varphi(u_k) \in [c-\frac{1}{k}, c+\frac{1}{k}] \qquad \text{y} \qquad \|\nabla\varphi(u_k)\| < \frac{1}{k\delta}.$$

Como φ satisface $(PS)_c$ esta sucesión converge a un punto $u \in K_c \cap (H \setminus N_\delta(K_c))$, lo cual es una contradicción. ■

Nota que podemos tomar la ε del lema anterior tan pequeña como queramos. Para $a \in \mathbb{R}$, denotaremos por

$$\varphi^a := \{u \in H : \varphi(u) \leq a\}.$$

Teorema 2.27 (Lema de deformación) *Si $\varphi \in C^2(H,\mathbb{R})$ satisface $(PS)_c$ entonces, dada $\delta > 0$, existen $\varepsilon > 0$ y $\eta \in C^0(H,H)$ tales que*

(1) $\varphi(\eta(u)) \leq \varphi(u) \quad \forall u \in H,$

(2) $\eta(u) = u \quad \forall u \notin \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cup N_\delta(K_c),$

(3) $\eta(\varphi^{c+\varepsilon} \setminus N_{3\delta}(K_c)) \subset \varphi^{c-\varepsilon}.$

Demostración: Por el lema anterior, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\|\nabla\varphi(u)\| \geq \frac{2\varepsilon}{\delta} \quad \forall u \in \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon],$$

Sean

$$A := (H \setminus \varphi^{-1}\{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]\}) \cup B_\delta(K_c) \text{ y } B := \varphi^{-1}\{[c-\varepsilon, c+\varepsilon]\} \setminus B_{2\delta}(K_c).$$

Sea $\rho : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(u) := \frac{dist(u,A)}{dist(u,A) + dist(u,B)}.$$

Notemos que, por los Lemas 2.21 y 2.22 , ρ es localmente Lipschitz continua y cumple que $\rho(u)=1$ en B, y $\rho(u)=0$ en A. También, por los Lemas 2.21, 2.22 y la Proposición 2.20, el campo vectorial:

$$\chi(u):=\begin{cases} \frac{-\rho(u)\nabla\varphi(u)}{\|\nabla\varphi(u)\|^2} & \text{si } u\in B, \\ 0 & u\in H\setminus B, \end{cases}$$

es localmente Lipschitz continuo y está bien definido, pues para toda $u\in B$ se tiene que

$$\|\varphi(u)\|\geq\frac{2\varepsilon}{\delta}>0.$$

Como

$$\|\chi(u)\|=\frac{\|-\rho(u)\nabla\varphi(u)\|}{\|\nabla\varphi(u)\|^2}\leq\frac{1}{\|\nabla\varphi(u)\|}\leq\frac{\delta}{2\varepsilon}.$$

El Teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy asegura que existe $\sigma:\mathbb{R}\times H\to H$ continua tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma(t,u)=\chi(\sigma(t,u)), \\ \sigma(0,u)\,. \end{cases}$$

Observa que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= \left\langle\nabla\varphi(\sigma(t,u)),\frac{d}{dt}\sigma(t,u)\right\rangle \\ &= -\left\langle\nabla\varphi(\sigma(t,u)),\chi(\sigma(t,u))\right\rangle=-\rho(\sigma(t,u))\leq 0,\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\varphi(\sigma(t,u))$ es decreciente en t. Definimos $\eta:H\to H$ como $\eta(u):=\sigma(2\varepsilon,u)$ para toda $u\in H$, nota que como $\varphi(\sigma(t,u))$ es decreciente en t, entonces

$$\varphi(\eta(u))=\varphi(\sigma(2\varepsilon,u))\leq\varphi(\sigma(0,u))=\varphi(u),$$

también, como $\chi(u)=0$ para toda $u\in(H\setminus\varphi^{-1}\{[c-\varepsilon,c+\varepsilon]\})\cup B_\delta(K_c)$, tenemos que $u=\sigma(2\varepsilon,u))=\eta(u)$ para toda $u\in A$, por lo tanto, η satisface (1) y (2). Veamos que satisface (3), sea $u\in\varphi^{c+\varepsilon}\setminus N_{3\delta}(K_c)$, notemos que sólo pueden ocurrir dos cosas: si existe $t\in[0,2\varepsilon]$ tal que

$$\varphi(\sigma(t,u))<c-\varepsilon,$$

en cuyo caso

$$\varphi(\sigma(2\varepsilon,u))\leq\varphi(\sigma(t,u))<c-\varepsilon,$$

o bien

$$c-\varepsilon\leq\varphi(\sigma(t,u))$$

para toda $t \in [0, 2\varepsilon]$. En este último caso, como $c - \varepsilon \leq \varphi(\sigma(t, u)) \leq \varphi(\sigma(0, u)) \leq c + \varepsilon$ para toda $t \in [0, 2\varepsilon]$, y como

$$\|u - \sigma(t, u)\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}\sigma(s, u)ds \right\| \leq \int_0^t \|\chi(\sigma(s, u))\| \, ds \leq \frac{t\delta}{2\varepsilon} \leq \delta$$

con $t \in [0, 2\varepsilon]$, tenemos que, dado que $u \notin N_{3\delta}(K_c)$, $\sigma(t, u) \notin N_{2\delta}(K_c)$, para toda $t \in [0, 2\varepsilon]$, $\sigma(t, u) \in B$, y así entonces, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned} \varphi(\eta(u)) = \varphi(\sigma(2\varepsilon, u)) &= \varphi(u) + \int_0^{2\varepsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t, u)) \\ &= \varphi(u) - \int_0^{2\varepsilon} \rho(\sigma(t, u)) \leq c - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\eta(\varphi^{c+\varepsilon} \setminus N_{3\delta}(K_c)) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$. ■

Capítulo 3

Información de segundo orden en el teorema del paso de montaña

El teorema clásico del paso de montaña de Ambrosetti y Rabinowitz [4] asegura que, si $\varphi \in C^2(H, \mathbb{R})$ satisface $(PS)_c$ y existen $u, v \in H$ tales que

$$\max\{\varphi(u), \varphi(v)\} < c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

donde $\Gamma := \{\gamma \in C^0([0,1], H) : \gamma(0) = u \text{ y } \gamma(1) = v\}$, entonces φ tiene un punto crítico $u_* \in H$ tal que $\varphi(u_*) = c$.

En este capítulo se demuestra una generalización de este resultado que afirma que, bajo las mismas hipótesis, φ tiene un punto crítico $u_* \in H$ tal que $\varphi(u_*) = c$, cuyo índice de Morse es menor que 2. Intuitivamente, el índice de Morse de un punto crítico es el número de direcciones linealmente independientes en las que la función es decreciente alrededor de dicho punto.

Este resultado, que a primera vista puede parecer de poca importancia, es muy fuerte, ya que garantiza la existencia de un punto crítico con índice de Morse a lo más 1 aún en el caso en el que H es de dimensión infinita y hay muchas posibles direcciones en donde la función pudiera ser decreciente alrededor de los puntos críticos.

En [8], Fang y Ghossoub prueban la generalización del Teorema del paso de montaña con la restricción de que φ es Hölder continua en una vecindad de $\varphi^{-1}(c)$; con base en esta demostración, el autor de esta tesis aporta a continuación otra prueba del Teorema sin la retricción utilzada. Esta nueva prueba podría parecer muy técnica; sin embargo, la herramienta utilizada es conocida por cualquier estudiante de mátematicas.

3.1. El teorema del paso de montaña

3.1.1. El índice de Morse

Sean H un espacio de Hilbert y $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una función bilineal y continua.

Definición 3.1 *Decimos que un subespacio vectorial W de H es un A-subespacio negativo si*

$$A(w,w) < 0 \qquad \forall w \in W,\ w \neq 0.$$

El índice de Morse de A en H se define como

$$Morse_H A := \sup\{\dim W : W \text{ es un } A\text{-subespacio negativo}\}.$$

Definición 3.2 *Si $\varphi \in C^2(H,\mathbb{R})$ y $x \in H$ es un punto crítico de φ, definimos el índice de Morse de φ en x como*

$$Morse_H(\varphi, x) := Morse_H(\varphi''(x)).$$

Si $\varphi \in C^2(H,\mathbb{R})$ y $x \in H$ es un punto crítico de φ, la fórmula de Taylor asegura que

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)(y-x, y-x) + r_2(y-x) \tag{3.1}$$

donde

$$\lim_{y \to x} \frac{r_2(y-x)}{\|y-x\|^2} = 0.$$

Así que el índice de Morse de φ en x es la máxima dimensión de un subespacio en el que φ es decreciente cerca de x.

Ejemplo 3.3 *Sea $\varphi \in C^2(H,\mathbb{R})$ definida como $\varphi(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2$ para toda $x \in H$. Por el Ejemplo 2.6, tenemos que 0 es el único punto crítico de φ y*

$$\varphi''(x)(w,w) = \|w\|^2 \geq 0 \qquad \forall w \in H.$$

Por lo tanto, $Morse_H(\varphi, 0) = 0$.

Recordemos que si $H = \mathbb{R}^n$ y si $\varphi \in C^2(H,\mathbb{R})$, entonces para toda $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\varphi''(x)(w,w) = w^t H_\varphi(x) w$ para toda $w \in \mathbb{R}^n$, donde $H_\varphi(x)$ es la matriz hessiana, la cual es simétrica. Por lo tanto existe una base $\{v_1, ..., v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por eigenvectores de $H_\varphi(x)$, con eigenvalores $\lambda_1, ..., \lambda_n$, tal que

$$\varphi''(x)(w,w) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \lambda_i, \tag{3.2}$$

donde $w = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$.

La siguiente proposición resulta útil para calcular el índice de Morse de φ en un punto crítico cuando el dominio es un espacio de dimensión finita.

Proposición 3.4 *Sea $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico de φ. Entonces $Morse_H(\varphi, x)$ es igual al número de eigenvalores negativos de $H_\varphi(x)$.*

Demostración: Sean $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ los eigenvectores de $H_\varphi(x)$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ sus correspondientes eigenvalores. Supongamos que $\lambda_1, ..., \lambda_m$ son los eigenvalores negativos de $H_\varphi(x)$. Denotemos por W^- al espacio generado por $\{v_1, ..., v_m\}$ y por W^+ al espacio generado por $\{v_{m+1}, ..., v_n\}$. Entonces, de la fórmula (3.2) se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi''(x)(w, w) < 0 \qquad & \forall w \in W^-,\ w \neq 0, \\ \varphi''(x)(z, z) \geq 0 \qquad & \forall z \in W^+,\ z \neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto W^- es un $\varphi''(x)$-subespacio negativo de $H_\varphi(x)$. Cualquier subespacio V de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k > m$ cumple que $\dim(V \cap W^+) \geq 1$. De modo que existe $z \in V \cap W^+$ con $z \neq 0$. Como $\varphi''(x)(z, z) \geq 0$, V no es un $\varphi''(x)$-subespacio negativo de $H_\varphi(x)$. Esto prueba que $Morse_H(\varphi, x) = m$. ■

3.1.2. El teorema del paso de montaña

Recordemos que una función $\varphi \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ si cualquier sucesión (u_n) en H tal que

$$\varphi(u_n) \to c \qquad \text{y} \qquad \varphi'(u_n) \to 0$$

contiene una subsucesión convergente (ver Definición 2.25).

Nuestro objetivo es demostrar la siguiente variante del teorema del paso de montaña de Fang y Ghoussoub [8].

Teorema 3.5 *Sean $\varphi \in C^3(H, \mathbb{R})$, $u, v \in H$ tales que*

$$\max\{\varphi(u), \varphi(v)\} < c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

donde

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C^0([0, 1], H) : \gamma(0) = u \quad y \quad \gamma(1) = v\right\}.$$

Supongamos que φ satisface $(PS)_c$. Entonces, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, existe $x_\varepsilon \in H$ tal que

(i) $c - \varepsilon \leq \varphi(x_\varepsilon) \leq c + \varepsilon$,

(ii) $\|\varphi'(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$,

(iii) Si existe un subespacio vectorial W de H tal que $\varphi''(x_\varepsilon)(u,u) < -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \|u\|^2$ para toda $u \in W \setminus \{0\}$, entonces $\dim(W) \leq 1$.

El resto de este capítulo estará dedicado a la demostración de este teorema. Una consecuencia importante de él, que aplicaremos en el capítulo 4, es la siguiente.

Corolario 3.6 *Sean $\varphi \in C^3(H,\mathbb{R})$, $u,v \in H$ tales que*

$$\text{máx}\{\varphi(u),\varphi(v)\} < c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t))$$

donde

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C^0([0,1],H) \mid \gamma(0) = u \quad y \quad \gamma(1) = v\right\}.$$

Supongamos que φ satisface $(PS)_c$. Entonces existe $u_* \in H$ tal que

$$\varphi(u_*) = c, \qquad \varphi'(u_*) = 0 \qquad y \qquad Morse_H(\varphi,u_*) \leq 1.$$

Demostración: Sean $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$ y $u_n := x_{\varepsilon_n}$ como en el teorema anterior. Entonces $\varphi(u_n) \to c$ y $\varphi'(u_n) \to 0$. Como φ satisface $(PS)_c$, la sucesión (u_n) contiene una subsucesión, a la que por simplicidad denotaremos del mismo modo, tal que $u_n \to u_*$ en H. Como φ y φ' son continuas, se tiene entonces que $\varphi(u_*) = c$ y $\varphi'(u_*) = 0$. Probaremos ahora que $Morse_H(\varphi,u_*) \leq 1$.

Argumentando por contradicción, supongamos que existe un subespacio vectorial W de H de dimensión 2 tal que

$$\varphi''(u_*)(w,w) < 0 \qquad \forall w \in W,\ w \neq 0.$$

Sea

$$a := \sup_{v\in\Sigma} \varphi''(u_*)(v,v) \qquad \text{con} \quad \Sigma := \{v \in W : \|v\| = 1\}.$$

Como Σ es compacta, se tiene que $a < 0$. Escojamos $b \in (a,0)$. Como φ'' es continua y $u_n \to u_*$ en H, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $-(\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}} \in (b,0)$ y

$$|\varphi''(u_n)(v,v) - \varphi''(u_*)(v,v)| \leq \|\varphi''(u_n) - \varphi''(u_*)\|_{\mathcal{B}(H,\mathbb{R})} < b - a \qquad \forall v \in \Sigma.$$

Por tanto,

$$\varphi''(u_n)(v,v) < b < -(\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}} \qquad \forall v \in \Sigma$$

y, en consecuencia,

$$\varphi''(u_n)(w,w) = \|w\|^2 \varphi''(u_n)\left(\frac{w}{\|w\|},\frac{w}{\|w\|}\right) < -(\frac{1}{n})^{\frac{1}{4}} \|w\|^2 \qquad \forall w \in W,\ w \neq 0,$$

para todo $n \geq N$. lo que contradice la afirmación (iii) del teorema anterior. Esto demuestra que $Morse_H(\varphi,u_*) \leq 1$. ■

El resto de este capítulo estará dedicado a la demostración del Teorema 3.5.

3.2. Resultados preliminares

Demostraremos a continuación una serie de lemas, el último de los cuales se aplicará en la demostración del Teorema 3.5. Denotaremos por

$$B(x_0,\delta) := \{x \in H : \|x - x_0\| < \delta\}$$

y por $\overline{B}(x_0,\delta)$ a su cerradura en H.

Lema 3.7 *Sean $\varphi \in C^2(H,\mathbb{R})$, $x_0 \in H$ y $\beta > 0$. Supóngase que existen un subespacio cerrado no trivial E de H y $\delta > 0$ tales que*

$$\varphi''(x)(w,w) < -\beta \|w\|^2 \qquad \forall x \in B(x_0,\delta) \text{ y } \forall w \in E,\ w \neq 0.$$

Sea $P : H \to E$ la proyección ortogonal. Para $x \in H$ definimos

$$w_1(x) := \begin{cases} -\frac{P(\nabla\varphi(x))}{\|P(\nabla\varphi(x))\|} & \text{si } P(\nabla\varphi(x)) \neq 0, \\ 0 & \text{si } P(\nabla\varphi(x)) = 0. \end{cases}$$

Entonces, para todo $x \in B(x_0,\frac{\delta}{2})$, se cumple lo siguiente:

(1) *Si $w_1(x) \neq 0$, entonces*

$$\varphi(x + tw_1(x)) < \varphi(x) - \beta\frac{t^2}{2} \qquad \forall t \in (0,\frac{\delta}{2}).$$

(2) *Si $w_1(x) = 0$, entonces*

$$\varphi(x + tw) < \varphi(x) - \beta\frac{t^2}{2} \qquad \forall t \in (0,\frac{\delta}{2}) \quad \text{y } \forall w \in E \text{ con } \|w\| = 1.$$

Más aún, existe $\delta_x \in (0,\frac{\delta}{8})$ tal que

$$\varphi(y + \frac{3}{8}\delta w) < \varphi(y) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \qquad \forall y \in \overline{B}(x,\delta_x) \quad \text{y} \quad \forall w \in E \text{ con } \|w\| = 1.$$

Demostración: Sea $x \in B\left(x_0,\frac{\delta}{2}\right)$. Demostremos (1).
Si $w_1(x) \neq 0$, por el teorema de Taylor para cada $t \in \left(0,\frac{\delta}{2}\right)$ existe $\theta_t^x \in [0,1]$ tal que

$$\varphi(x + tw_1(x)) = \varphi(x) + t\langle\nabla\varphi(x), w_1(x)\rangle + \frac{t^2}{2}\varphi''(x + t\theta_t^x w_1(x))(w_1(x), w_1(x)).$$

Vemos que $\langle x, P(x)\rangle = \|P(x)\|^2$, pues como $x - P(x) \in E^{\perp}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x, P(x)\rangle &= \langle P(x), P(x)\rangle + \\ &\langle x - P(x), P(x)\rangle \\ &= \|P(x)\|^2,\end{aligned}$$

ahora, como $x \in B\left(x_0, \frac{\delta}{2}\right)$ tenemos que $x + t\theta_t^x w_1(x) \in B(x_0,\delta)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi(x + tw_1(x)) &= \varphi(x) + t\langle \nabla\varphi(x), w_1(x)\rangle + \frac{t^2}{2}\varphi''(x + t\theta_t^x w_1(x))(w_1(x), w_1(x)) \\ &< \varphi(x) - \left\langle \nabla\varphi(x), \frac{P(\nabla\varphi(x))}{\|P(\nabla\varphi(x))\|}\right\rangle - \frac{t^2}{2}\beta \\ &= \varphi(x) - \frac{t}{\|P(\nabla\varphi(x))\|}\|P(\nabla\varphi(x))\|^2 - \frac{t^2}{2}\beta \\ &\leq \varphi(x) - \frac{t^2}{2}\beta.\end{aligned}$$

Demostremos (2). Si $w_1(x) = 0$, entonces $\nabla\varphi(x) \in E^{\perp}$, y análogamente, para toda $t \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ y para toda $w \in E$ tal que $\|w\| = 1$, existe $\theta_t^w \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi(x + tw) &= \varphi(x) + t\langle \nabla\varphi(x), w\rangle + \frac{t^2}{2}\varphi''(x + t\theta_t^w w)(w, w) \\ &< \varphi(x) - \frac{t^2}{2}\beta.\end{aligned}$$

Por la continuidad de la derivada, existe $0 < \delta_x < \frac{\delta}{8}$ tal que $\forall y \in \overline{B}(x, \delta_x)$

$$\|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)\| \leq \frac{\beta\delta}{48}.$$

De nuevo, por el teorema de Taylor, $\forall y \in \overline{B}(x, \delta_x)$ y $\forall w \in E$ con $\|w\| = 1$ existe $\theta_{\frac{3}{8}\delta}^w \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(y + \frac{3}{8}\delta w) = \varphi(x) + \frac{3}{8}\delta\langle \nabla\varphi(y), w\rangle + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\delta\right)^2\varphi''(y + t\theta_{\frac{3}{8}\delta}^w w)(w, w).$$

Observemos que

$$\langle \nabla\varphi(y), w\rangle = \langle \nabla\varphi(y), w\rangle - \langle \nabla\varphi(x), w\rangle \leq |\langle \nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(x), w\rangle| \leq \|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)\|$$

y que para toda $y \in \overline{B}(x, \delta_x)$, como $x \in B(x_0, \frac{\delta}{2})$, tenemos que

$$y + \frac{3}{8}\delta\theta_{\frac{3}{8}\delta}^w w \in B(x_0, \delta).$$

Por lo tanto, para toda $w \in E$ con $\|w\| = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(y + \frac{3}{8}\delta w) &= \varphi(y) + \frac{3}{8}\delta \langle \nabla\varphi(y), w\rangle + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\delta\right)^2 \varphi''(y + \frac{3}{8}\delta\theta^w_{\frac{3}{8}\delta} w)(w,w) \\
&\leq \varphi(y) + \frac{3}{8}\delta \|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)\| + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\delta\right)^2 \varphi''(y + \frac{3}{8}\delta\theta^w_{\frac{3}{8}\delta} w)(w,w) \\
&< \varphi(y) + \frac{3}{8}\delta \|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)\| - \frac{\beta}{2}\left(\frac{3}{8}\delta\right)^2 \\
&\leq \varphi(y) + \frac{3}{8}\delta^2\beta(\frac{1}{48} - \frac{3}{16}) = \varphi(y) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \quad \forall y \in \overline{B}\left(x, \delta_x\right).
\end{aligned}$$

■

Lema 3.8 *Supongamos que se cumplen las hipótesis del lema anterior y que además* $\dim E \geq 2$. *Sea* $f : [a,b] \to \overline{B}(x_0, \frac{\delta}{2})$ *una función continua. Entonces, para cada* $\theta \in (0, \frac{b-a}{2})$, *existe una función continua* $f_\theta : [a,b] \to B(x_0, \frac{7}{8}\delta)$ *que satisface:*

(i) $f_\theta(a) = f(a)$, $f_\theta(b) = f(b)$ *y* $\varphi(f_\theta(t)) \leq \varphi(f(t))$ $\forall t \in [a,b]$,

(ii) $\varphi(f_\theta(t)) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2$ $\forall t \in [a+\theta, b-\theta]$,

(iii) $\|f_\theta(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{8}\delta$ $\forall t \in [a,b]$.

Demostración: Sea $\theta \in (0, \frac{b-a}{2})$ y sea

$$\begin{aligned}
T &= \{t \in [a,b] \mid P(\nabla\varphi(f(t))) = 0\} \\
&= \left\{t \in [a,b] \mid \nabla\varphi(f(t)) \in E^{\perp}\right\}.
\end{aligned}$$

Para toda $s \in T$, por el Lema 3.7 existe $\delta_{f(s)} \in (0, \frac{\delta}{8})$ tal que para toda $w \in E$ con $\|w\| = 1$, y para toda $y \in B\left(f(s), \delta_{f(s)}\right)$ tenemos que

$$\varphi(y + \frac{3}{8}\delta w) < \varphi(y) - \frac{\beta}{16}\delta^2.$$

Por la continuidad de f, existe una bola abierta $B\left(s, \nu_s\right)$ de $[a,b]$ tal que para toda $w \in E$ con $\|w\| = 1$ y para toda $t \in B\left(s, \nu_s\right)$

$$\varphi(f(t) + \frac{3}{8}\delta w) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2. \tag{3.3}$$

Construiremos la función f_θ dependiendo si $a, b \in T$.

Caso 1: si $a,b \notin T$.

Entonces, $T \subseteq int([a,b])$ y también $B(s,v_s) \subseteq int([a,b])$ para toda $s \in T$. Como T es compacto, existe una subcubierta finita: $B\left(s_1, \frac{\nu_{s_1}}{2}\right) \cup ... \cup B\left(s_k, \frac{\nu_{s_k}}{2}\right)$ de T, con $s_1 < ... < s_k$. Recordando que, como la unión de intervalos en $\mathbb{R}$ que no son ajenos es nuevamente un intervalo, sean $a < a_1 < b_1 < ... < a_k < b_k < b$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{k} B\left(s_i, v_{s_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} (a_i, b_i).$$

Supongamos por ahora que $a < a + \theta < a_1$ y $b_m < b - \theta < b$, notemos que como $T \subset \bigcup_{i=1}^{m} (a_i,b_i)$, $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ (si $i \neq j$) y T es compacto, $a_i, b_i \notin T$ para toda i. Dado que $\dim E \geq 2$, para cada $j \in \{1, ..., k\}$, existe una función continua $\sigma_j : [a_j,b_j] \to E$ tal que

$$\sigma_j(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a_j, b_j], \quad \sigma_j(a_j) = w_1(f(a_j)) \quad \text{y} \quad \sigma_j(b_j) = w_1(f(b_j)),$$

es decir, existe una trayectoria que une a $\sigma_j(a_j) = w_1(f(a_j))$ con $\sigma_j(b_j) = w_1(f(b_j))$ y que no pasa por el cero. Definimos $w^j : [a_j,b_j] \to E$ como

$$w^j(t) := \frac{\sigma_j(t)}{\|\sigma_j(t)\|} \forall t \in [a_j, b_j],$$

la cual es claramente continua y satisface

$$\left\|w^j(t)\right\| = 1 \quad \forall t \in [a_j, b_j] \quad \text{y} \quad w^j(a_j) = w_1(f(a_j)) \quad w^j(b_j) = w_1(f(b_j)). \tag{3.4}$$

Sea $f_\theta : [a,b] \to H$ dada por:

$$f_\theta(t) := \begin{cases} f(t) + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a)w_1(f(t)) & t \in [a, a+\theta], \\ f(t) + \frac{3}{8}\delta w_1(f(t)) & t \in [a+\theta, b-\theta] \setminus \bigcup_{j=1}^{m}[a_j, b_j], \\ f(t) + \frac{3}{8}w^j(t) & t \in [a_j, b_j] \text{ con } j \in \{1, ..., m\}, \\ f(t) + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a)w_1(f(t)) & t \in [b-\theta, b]. \end{cases}$$

Notemos que f_θ es continua por (3.4) y por ser suma y composición de funciones continuas. Ahora, como

$$\|f(t) - x_0\| \leq \frac{\delta}{2} \quad \forall t \in [a, b],$$

y como $\theta \in (0, \frac{b-a}{2})$

$$\begin{aligned}\|f_\theta(t) - x_0\| &= \left\| f(t) + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a)(w_1(f(t))) - x_0 \right\| \\ &\leq \|f(t) - x_0\| + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a)\,\|w_1(f(t))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta = \frac{7}{8}\delta \quad \forall t \in [a, a+\theta],\end{aligned}$$

análogamente

$$\|f_\theta(t) - x_0\| \leq \frac{7}{8}\delta \quad \forall t \in [a+\theta, b],$$

por lo tanto $f_\theta : [a,b] \to \overline{B(x_0, \frac{7}{8}\delta)}$. También, de manera similar podemos demostrar que

$$\|f_\theta(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{8}\delta \quad \forall t \in [a,b].$$

Veamos que f_θ satisface (ii). Por (1) de el Lema 3.7, y por (3.3), respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(f_\theta(t)) &= \varphi(f(t) + \frac{3}{8}\delta(w_1(f(t)))) \qquad (3.5)\\ &< \varphi(f(t)) - \beta\frac{(\frac{3}{8}\delta)^2}{2} < \varphi(f(t)) - \beta\frac{\delta^2}{16} \;\forall t \in [a+\theta, b-\theta] \setminus \bigcup_{j=1}^{m}[a_j, b_j], \\ \varphi(f_\theta(t)) &= \varphi(f(t) + \frac{3}{8}\delta w^j(t)) \\ &< \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \;\forall t \in [a_j, b_j] \text{ con } j \in \{1, ..., m\}.\end{aligned}$$

Así, $\varphi(f_\theta(t)) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2$ para toda $t \in [a+\theta, b-\theta]$.

Por último, como $0 < \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a) < \frac{\delta}{2}$y $w_1(f(t)) \neq 0$ para toda $t \in [a, a+\theta]$, por (1) del Lema 3.7

$$\varphi(f_\theta(t)) = \varphi(f(t) + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a_i)(w_1(f(t)))) < \varphi(f(t)) - \beta\frac{\delta^2}{4} \leq \varphi(f(t)).$$

Análogamente $\varphi(f_\theta(t)) \leq \varphi(f(t))$ para toda $t \in [b_j - \theta, b]$, así pues, por lo anterior y por (3.5) tenemos que

$$f_\theta(a) = f(a), \quad f_\theta(b) = f(b) \quad \text{y} \quad \varphi(f_\theta(t)) \leq \varphi(f(t)) \quad \forall t \in [a,b],$$

y por lo tanto satisface (i).

Recordemos que trabajamos en el supuesto de que $a < a + \theta < a_1$. En el caso de que $\theta \in (0, \frac{b-a}{2})$, es tal que $a_1 \leq a + \theta$ y $b - \theta \leq b_m$, tomamos una $\nu \in (0, \frac{b-a}{2})$ con $\nu < \theta$ tal que $a < a + \nu < a_1$ y $b_m < b - \theta < b$, y entonces, claramente $f_\nu = f_\theta$ es la función buscada.

Caso 2: $a \in T$ y $b \notin T$.

Caso 2.1: Para toda $t \in [a, a + \theta]$, $P(\varphi'(f(t))) = 0$.

Razonando de manera similar al caso anterior, como T es compacto, existe una subcubierta finita $B(s_1, v_{s_1}) \cup ... \cup B(s_k, v_{s_k})$ de T con la propiedad de (3.3), y tal que, sin pérdida de generalidad, $b \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(s_i, \nu_{s_i})$. Nuevamente, sean $a = a_1 < b_1 < ... < a_m < b_m = b$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{k} B(s_i, \frac{1}{2}\nu_{s_i}) = [a_1, b_1) \cup \bigcup_{j=2}^{m} (a_j, b_j).$$

Supongamos que $\theta \in (0, \frac{b-a}{2})$ es tal que $a < a + \theta < b_1$ y análogamente al caso anterior sean $w^j : [a_j, b_j] \to E$ funciones continuas tales que

$$\begin{aligned} &\left\| w^j(t) \right\| = 1 \ \forall t \in [a_j, b_j] \ \text{ y} \\ &w^j(a_j) = w_1(f(a_j)), \ w^j(b_j) = w_1(f(b_j)) \ \forall j \in \{2, ..., m\}. \end{aligned}$$

Denotamos $v_1 = w_1(f(b_1))$ y definimos

$$f_\theta(t) := \begin{cases} f(t) + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a)v_1 & t \in [a, a+\theta], \\ f(t) + \frac{3}{8}\delta v_1 & t \in [a+\theta, b_1], \\ f(t) + \frac{3}{8}\delta w^j(t) & t \in [a_j, b_j] \text{ con } j \in \{2, ..., m\}, \\ f(t) + \frac{3}{8}\delta w_1(f(t)) & t \in [b_1, b-\theta] \setminus \bigcup\limits_{j=2}^{m} [a_j, b_j], \\ f(t) + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(b-t) w_1(f(t)) & t \in [b-\theta, b]. \end{cases}$$

Análogamente al caso 1, f_θ es continua, $f_\theta([a, b]) \subseteq \overline{B(x_0, \frac{7}{8}\delta)}$ y satisface (iii) del Lema 3.8.

Si $t \in [a, a + \theta]$, tenemos que por (2) del Lema 3.7, como $\frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t - a) \in (0, \frac{\delta}{2})$,

$$\varphi(f(t) + \frac{3}{8}\frac{\delta}{\theta}(t-a)v_1) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \leq \varphi(f(t)),$$

y si $t \in [a + \theta, b_1]$, tenemos que por la propiedad (3.3) de la cubierta abierta:

$$\varphi(f(t) + \frac{3}{8}\delta v_1) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \leq \varphi(f(t)).$$

Así entonces, f_θ satisface (i) y (ii) si $t \in [a+\theta, b_1]$. De la misma manera que en el caso anterior, f_θ satisface (i) y (ii) cuando t pertenezca a $[a_j,b_j]$ (con $j \in \{2, ..., m\}$), $[b_1,b-\theta] \setminus \bigcup_{j=2}^{m} [a_j,b_j]$, o a $[b-\theta,b]$.

Análogamente al caso 1, se tiene el resultado para $\theta \in (0, \frac{b-a}{2})$ tal que $b_1 \leq a+\theta$.

Caso 2.2: Si existe $c \in (a, a+\theta]$ tal que $P(\nabla\varphi(f(t))) \neq 0$.

Sea $a' \in (a,c)$ tal que $P(\nabla\varphi(f(t))) \neq 0$ y sea $\widehat{f} = f_{|[a',b]}$. Definimos $\gamma \in (0, \frac{b-a'}{2})$ como $\gamma := a+\theta-a' < \theta$, tenemos que γ satisface

$$[a+\theta, b-\theta] \subset [a'+\gamma, b-\gamma].$$

Sea $\widehat{f_\gamma} : [a', b] \to B(x_0, \frac{7}{8}\delta)$ la función construida por el caso 1 de este lema aplicado a $\widehat{f}$ y a γ. Definimos

$$f_\theta(t) := \begin{cases} f(t) & t \in [a,a'], \\ \widehat{f_\gamma}(t) & t \in [a', b], \end{cases}$$

la cual es claramente continua y satisface (i), (ii) y (iii), pues $\widehat{f_\gamma}$ lo satisface con γ.

Caso 3: si $a \notin T$ y $b \in T$.

Es simétrico al caso anterior.

Caso 4: si $a,b \in T$.

Es una combinación de los casos anteriores y del razonamiento del caso 1. ■

Lema 3.9 *Sean T un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y $\{B_i := (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)\}_{i=1,..,n}$ una cubierta finita de T tal que $x_i < x_j$ si $i < j$. Entonces existe un subconjunto de índices $\{i_1, ..., i_k\}$ de $\{1, ..., n\}$ tal que:*

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}$,

(ii) $\overline{B_{i_j}} \cap \overline{B_{i_l}} = \emptyset$ *si* $l \notin \{j, j+1, j-1\}$ *y* $1 < j < k$,

$\overline{B_{i_1}} \cap \overline{B_{i_l}} = \emptyset$ *si* $l > 2$,

$\overline{B_{i_k}} \cap \overline{B_{i_l}} = \emptyset$ *si* $l < k-1$.

Es decir, podemos extraer una subcubierta de $\{B_i\}_{i=1,..,n}$ cuya unión es la misma y en la que sólo se intersecten intervalos consecutivos.

Demostración: Sea $a_i := x_i - \delta_i$ y $b_i := x_i + \delta_i$, consideremos las siguientes posibilidades.

Caso 1. Si existe i tal que $a_{i+1} \leq a_i$.

Entonces $x_{i+1}-\delta_{i+1}\leq x_i-\delta_i$, así $0\leq x_{i+1}-x_i\leq \delta_{i+1}-\delta_i$, y por lo tanto $\delta_i\leq\delta_{i+1}$, de modo que $b_i\leq b_{i+1}$. Por lo tanto, como $a_{i+1}\leq a_i$ y $b_{i+1}\geq b_i$, tenemos que $\overline{B_i}\subset\overline{B_{i+1}}$.

Caso 2. Si existe i tal que $b_{i+1}\leq b_i$.

Entonces $x_{i+1}+\delta_{i+1}\leq x_i+\delta_i$, así $0\leq x_{i+1}-x_i\leq \delta_i-\delta_{i+1}$, y por lo tanto $\delta_{i+1}\leq\delta_i$, de modo que $a_i\leq a_{i+1}$. Por lo tanto, como $a_i\leq a_{i+1}$ y $b_i\geq b_{i+1}$, tenemos que $\overline{B_{i+1}}\subset\overline{B_i}$.

Así, para toda i en la que suceda el caso uno o dos, podemos quitar B_i o B_{i+1} según sea el caso, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_i<a_{i+1}$ y $b_i<b_{i+1}$ para toda i.

La demostración se hará por inducción sobre n.

Si $n=3$ y $\overline{B_1}\cap\overline{B_3}\neq\emptyset$ (en otro caso ya habríamos terminado), entonces notemos que $a_3\leq b_1$ pues si no $\overline{B_1}$ no intersectaría a $\overline{B_3}$, como $a_1<a_2<a_3\leq b_1<b_2<b_3$, tenemos que $\overline{B_2}\subset\overline{B_1}\cup\overline{B_3}$ por lo que si $i_1=1$ y $i_2=3$, tenemos el resultado buscado.

Lo suponemos cierto para $n\geq 3$ y lo demostramos para $n+1$. Sea $i_1,...,i_k$ subconjunto de índices de $\{1,...,n\}$ con la propiedad (i) y (ii). Notemos que si $\overline{B_{n+1}}\cap\overline{B_{i_j}}=\emptyset$ para toda $j\neq k$, entonces claramente el conjunto de índices que queremos es $\{i_1,...,i_k,i_{k+1}=n+1\}$. Por lo tanto supongamos que $\overline{B_{n+1}}\cap\overline{B_{i_j}}\neq\emptyset$ para alguna $j\neq k$, notemos que j tendría que ser $k-1$, pues si $j\neq k-1,k$ y si $x\in\overline{B_{n+1}}\cap\overline{B_{i_j}}$, como $\overline{B_{i_k}}\cap\overline{B_{i_j}}=\emptyset$, $x_{i_k}\in\overline{B_{i_k}}$, $x_{i_j}\in\overline{B_{i_j}}$ y $x_{i_k}>x_{i_j}$,se tiene que $a_{i_k}>b_{i_j}$, por lo que $a_n>a_{i_k}>b_{i_j}\geq x\geq a_{n+1}$, una contradicción a nuestra suposición.

Por lo tanto $\overline{B_{k+1}}\cap\overline{B_{i_{k-1}}}\neq\emptyset$, de manera análoga a la base de inducción, se tiene que $\overline{B_{i_k}}\subset\overline{B_{i_{k-1}}}\cup\overline{B_{n+1}}$, por lo tanto si $j_l=i_l$ con $l<k$ y $j_k=n+1$ tenemos que la colección $\{j_1,...,j_k\}$ es la buscada pues $\{i_1,...,i_k\}$ ya satisfacían (i) y (ii) ■

Lema 3.10 *Sea $\varphi\in C^3(H,\mathbb{R})$ y sea $f:\mathbb{R}\to H$ una función continua. Supongamos que $D\subset\mathbb{R}$ es un subconjunto compacto con la siguiente propiedad: existen dos constantes $\gamma,\beta>0$ tales que para cada $t\in D$ existe un subespacio cerrado E_t de H con $\dim(E_t)\geq 2$ tal que*

$$\varphi''(x)(w,w)<-\beta \qquad \forall x\in B\left(f(t),\gamma\right)\quad y\quad \forall w\in E_t\ \ con\ \ \|w\|=1.$$

Entonces, para cada $\delta\in(0,\gamma]$ y para cada $\theta>0$, existe una función continua $\widehat{f}:\mathbb{R}\to H$ que satisface:

(i) $\widehat{f}(t)=f(t)\quad\forall t\in\mathbb{R}\setminus N_\theta(D)\quad y\quad \varphi(\widehat{f}(t))\leq\varphi(f(t))\quad\forall t\in\mathbb{R}.$

(ii) $\varphi(\widehat{f}(t))<\varphi(f(t))-\frac{\beta}{16}\delta^2\quad\forall t\in D.$

(iii) $\left\|\widehat{f}(t)-f(t)\right\|\leq\frac{3}{4}\delta\quad\forall t\in N_\theta(D).$

Demostración: Sea $\delta \in (0,\gamma]$ fijo.

Por la continuidad de f, para toda $z \in D$, existe una bola $B(z,\varepsilon_z)$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(s) \in \overline{B}(f(z), \frac{\delta}{16}) \subset B(f(z), \frac{\delta}{8}) \subset B\left(f(z), \gamma\right) \qquad \forall s \in \overline{B}\left(z, \varepsilon_z\right).$$

Sea $B_z = B(z,\delta_z)$ con $\delta_z \leq \text{mín}\{\varepsilon_z, \theta\}$. Dado que D es compacto, existe una subcubierta finita $B_{z_1},...,B_{z_m}$ de T, que por el Lema 3.9, podemos suponer que $B_{z_i} := (s_i,t_i)$ para toda $i \in \{1,...,m\}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{z_i} \subset N_\theta(D)$ y

$$\begin{aligned}\overline{B}_{z_i} \cap \overline{B}_{z_j} &= \emptyset \text{ para } j \text{ distintos de } i-1, i \text{ e } i+1,\\ \overline{B_{i_1}} \cap \overline{B_{i_l}} &= \emptyset \text{ si } l > 2,\\ \overline{B_{i_1}} \cap \overline{B_{i_l}} &= \emptyset \text{ si } l < k-1.\end{aligned}$$

Sea $\sigma \in (0,\theta)$ tal que $D \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m}(s_i + \sigma,t_i - \sigma)$ y $\sigma < \frac{1}{2}\,\text{mín}\{t_i - s_i \mid i \in \{1,...,m\}\}$, definimos

$$\begin{aligned}D_i &= D \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i}[s_j+\sigma, t_j-\sigma]\right),\\ U_1^1 &= \emptyset,\\ U_j^i &= \bigcup_{k=1,k\neq j}^{i} B_{z_j} \cap B_{z_k}.\end{aligned}$$

La demostración se hará de la siguiente forma: construiremos inductivamente una familia de funciones continuas $f_1,...,f_m : \mathbb{R} \to H$ tal que para toda $i \in \{1,...,m\}$, éstas satisfacen:

$$f_i(t) = f(t) \text{ si } t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{i} B_{z_j} \quad \text{ y } \quad \varphi(f_i(t)) \leq \varphi(f(t)) \ \forall t \in \bigcup_{j=1}^{i} B_{z_j}, \tag{3.6}$$

$$\varphi(f_i(t)) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \text{ si } t \in D_i, \tag{3.7}$$

y para $1 \leq j \leq i$:

$$\|f_j(t) - f(t)\| \leq \begin{cases} \frac{3}{8}\delta & t \in B_{z_j} \setminus U_j^i, \\ \frac{3}{4}\delta & t \in U_j^i. \end{cases} \tag{3.8}$$

Empezemos con el paso base. Notemos que f manda a $[s_1,t_1]$ en $B(f(z_1), \frac{\delta}{8})$ para algún $z_1 \in [s_1,t_1] \cap D$ y es tal que para algún subespacio cerrado E_{z_1} de H de $\dim(E_{z_1}) \geq 2$ tenemos que

$$\forall x \in B(f(z_1), \frac{\delta}{4}) \text{ y } \forall w \in E_{z_1} \text{ con } \|w\| = 1, \quad \varphi''(x)(w)(w) < -\beta,$$

por el Lema 3.8, aplicado a σ y f,existe $g_1 : [s_{1,}t_1] \to H$ tal que:

$$g_1(s_1) = f(s_1),\ g(t_1) = f(t_1) \quad \text{y} \quad \varphi(g_1(t)) \leq \varphi(f(t))\ \forall t \in [s_1, t_1],$$

$$\varphi(g_1(t)) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \quad \forall t \in [s_1 + \sigma, t_1 - \sigma],$$

$$\|f(t) - g_1(t)\| \leq \frac{3}{8} \quad \forall t \in [s_1, t_1].$$

Definimos

$$f_1(t) := \begin{cases} g_1(t) & t \in [s_1,t_1], \\ f(t) & t \in \mathbb{R} \setminus [s_1,t_1]. \end{cases}$$

Claramente f_1 es continua, y como $\sigma \in (0,\theta)$ y $U_1^1 = \emptyset$, f_1 satisface (3.6), (3.7) y (3.8).

Supongamos que f_1,...,f_i $(i < m)$ han sido construidas y satisfacen (3.6), (3.7) y (3.8). Como

$$\overline{B}_{z_i} \cap \overline{B}_{z_j} \cap \overline{B}_{z_k} = \emptyset \text{ para } i, j, k \text{ distintos y } k, j, i \in \{1, ..., m\},$$

vemos que

$$U_j^i \cap [s_{i+1}, t_{i+1}] = (\bigcup_{k=1, k\neq j}^{i} B_{z_j} \cap B_{z_k}) \cap [s_{i+1}, t_{i+1}] = \emptyset \quad \forall j \in \{1, ..., i\},$$

por lo tanto, si $t \in [s_{i+1}, t_{i+1}]$, entonces $t \notin U_j^i$ para toda $j \in \{1, ..., i\}$ y por lo tanto

$$\|f_i(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{8}\delta \quad \forall t \in [s_{i+1}, t_{i+1}],$$

así, tenemos que $f_i : [s_{i+1},t_{i+1}] \to B(f(z_{i+1}), \frac{3}{8}\delta + \frac{\delta}{8})$ con $z_{i+1} \in [s_{i+1},t_{i+1}]$. Por hipótesis, existe un subespacio cerrado $E_{z_{i+1}}$ con $\dim(E_{z_{i+1}}) \geq 2$, tal que

$$\forall x \in B(f(z_{i+1}), \frac{\delta}{2}) \text{ y } \forall w \in E_{z_{i+1}} \text{ con } \|w\| = 1, \text{ se tiene que } \varphi''(x)(w)(w) < -\beta,$$

por lo tanto, por el Lema 3.8, existe una función continua $g_{i+1} : [s_{i+1},t_{i+1}] \to H$ tal que

$$g_{i+1}(s_{i+1}) = f(s_{i+1}),\ s(t_{i+1}) = f(t_{i+1}) \quad \text{y} \quad \varphi(g_{i+1}(t)) \leq \varphi(f_i(t))\ \forall t \in [s_{i+1}, t_{i+1}],$$

$$\varphi(g_{i+1}(t)) < \varphi(f_i(t)) - \frac{\beta}{16}t^2 \quad \forall t \in [s_{i+1} + \sigma, t_{i+1} - \sigma],$$

$$\|f_i(t) - g_{i+1}(t)\| \leq \frac{3}{8} \quad \forall t \in [s_{i+1}, t_{i+1}].$$

Definimos

$$f_{i+1}(t) := \begin{cases} g_{i+1}(t) & t \in [s_{i+1}, t_{i+1}], \\ f_i(t) & t \in \mathbb{R} \setminus [s_{i+1}, t_{i+1}]. \end{cases}$$

Veamos que f_{i+1} satisface (3.8). Si $j \in \{1, ..., i\}$ y $t \in B_{z_j} \setminus U_j^{i+1}$, como

$$B_{z_j} \setminus U_j^{i+1} = B_{z_j} \setminus (\bigcup_{k=1, k \neq j}^{i+1} B_{z_j} \cap B_{z_k}),$$

entonces $t \notin [s_{i+1}, t_{i+1}]$, por lo tanto $f_{i+1}(t) = f_i(t)$, y por hipótesis de inducción

$$\|f_{i+1}(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{8}\delta \quad \forall t \in B_{z_j} \setminus U_j^{i+1} \text{ y } j \in \{1, ..., i\}.$$

Por otro lado, si $t \in B_{z_{i+1}} \setminus U_{i+1}^{i+1}$, entonces $t \in [s_{i+1}, t_{i+1}]$ y $t \notin \bigcup_{j=1}^{i} B_{z_j}$, por lo tanto $f_i(t) = f(t)$ y $f_{i+1}(t) = g_{i+1}(t)$, así tenemos que

$$\|f_{i+1}(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{8}\delta \quad \forall t \in B_{z_j} \setminus U_j^{i+1} \text{ y } j \in \{1, ..., i+1\}.$$

Como para toda $j \in \{1, ..., i\}$,

$$U_j^{i+1} = \bigcup_{k=1, k \neq j}^{i+1} B_{z_j} \cap B_{z_k} = U_j^i \cup \left(B_{z_{i+1}} \cap B_{z_j}\right) \quad \text{y} \quad U_j^i \cap B_{z_{i+1}} = \emptyset,$$

si $t \in U_j^{i+1}$, tenemos los siguientes casos.

($\bullet$) Si $t \in U_j^i$ entonces $f_{i+1}(t) = f_i(t)$ y así por hipótesis de inducción

$$\|f_{i+1}(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{4}\delta.$$

($\bullet\bullet$) Si $t \in B_{z_{i+1}} \cap B_{z_j}$, entonces $t \in [s_{i+1}, t_{i+1}]$ y $t \notin U_j^i$, por lo tanto $f_{i+1}(t) = g_{i+1}(t)$ y se tiene que

$$\|f_{i+1}(t) - f(t)\| \leq \|f_{i+1}(t) - f_i(t)\| + \|f_i(t) - f(t)\| < \frac{3}{8}\delta + \frac{3}{8}\delta = \frac{3}{4}\delta.$$

Finalmente, como

$$U_{i+1}^{i+1} = \bigcup_{j=1}^{i} \left(B_{z_{i+1}} \cap B_{z_j}\right) = B_{z_{i+1}} \cap B_{z_i},$$

por la propiedad de la cubierta construida, tenemos que para toda $t \in U_{i+1}^{i+1} = B_{z_{i+1}} \cap B_{z_i}$, $t \notin B_{z_j}$ para toda $j \in \{1, ..., i-1\}$ y $t \in [s_{i+1}, t_{i+1}]$, así, $f_{i+1}(t) = g_{i+1}(t)$ y por hipótesis de inducción, como f_i cumple (3.8), tenemos que

$$\|f_{i+1}(t) - f(t)\| \leq \|f_{i+1}(t) - f_i(t)\| + \|f_i(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{8}\delta + \frac{3}{8}\delta = \frac{3}{4}\delta \quad \forall t \in U_{i+1}^{i+1},$$

por lo tanto, tenemos que f_{i+1} satisface (3.8).

Verifiquemos que satisface (3.7). Notemos que si $t \in D \cap \bigcup_{j=1}^{i+1} [s_j + \sigma, t_j - \sigma]$, similarmente tenemos dos casos.

($\bullet$) Si $t \in D \cap [s_{i+1} + \sigma, t_{i+1} - \sigma]$, entonces $f_{i+1}(t) = g_{i+1}(t)$ y

$$\varphi(f_{i+1}(t)) < \varphi(f_i(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \leq \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \ .$$

($\bullet\bullet$) Si $t \in D \cap \bigcup_{j=1}^{i} [s_j + \sigma, t_j - \sigma] = D_i$, entonces tenemos dos subcasos:

Si $t \in [s_{i+1}, t_{i+1}]$ entonces $\varphi(f_{i+1}(t)) = \varphi(g_{i+1}(t)) \leq \varphi(f_i(t)) < \varphi(f(t)) - \dfrac{\beta}{16}\delta^2$.

Si $t \notin [s_{i+1}, t_{i+1}]$ entonces $\varphi(f_{i+1}(t)) = \varphi(f_i(t)) \leq \varphi(f(t)) - \dfrac{\beta}{16}\delta^2$

y por lo tanto, f_{i+1} satisface (3.7).

Por último, veamos que f_{i+1} cumple (3.6). Si $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{i+1} B_{z_j}$, entonces $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{i} B_{z_j}$ y $t \notin [s_{i+1}, t_{i+1}]$, por lo que $f_{i+1}(t) = f_i(t)$, así por hipótesis de inducción, $f_{i+1}(t) = f_i(t) = f(t)$.

Ahora, si $t \in \bigcup_{j=1}^{i+1} B_{z_j}$, tenemos dos casos.

($\bullet$) Si $t \in [s_{i+1}, t_{i+1}]$, entonces tenemos dos subcasos:

$$\text{Si } t \in \bigcup_{j=1}^{i} B_{z_j} \text{ entonces } \varphi(f_{i+1}(t)) = \varphi(g_{i+1}(t)) \leq \varphi(f_i(t)) \leq \varphi(f(t)).$$

$$\text{Si } t \notin \bigcup_{j=1}^{i} B_{z_j} \text{ entonces } \varphi(f_{i+1}(t)) = \varphi(g_{i+1}(t)) \leq \varphi(f_i(t)) = \varphi(f(t)).$$

($\bullet\bullet$) Si $t \notin [s_{i+1}, t_{i+1}]$, entonces $t \in \bigcup_{j=1}^{i} B_{z_j}$ y además $f_{i+1}(t) = f_i(t)$, así por hipótesis inductiva $\varphi(f_{i+1}(t)) = \varphi(f_i(t)) \leq \varphi(f(t))$.

Por lo tanto f_{i+1} satisface (3.6), con lo que hemos terminado la inducción.

Por construcción de las f_i, $\widehat{f} = f_m$ satisface

$$f_m(t) = f(t) \text{ si } t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_{z_j} \quad y \quad \varphi(f_m(t)) \leq \varphi(f(t)) \ \ \forall t \in \bigcup_{j=1}^{m} B_{z_j},$$

$$\varphi(f_m(t)) < \varphi(f(t)) - \frac{\beta}{16}\delta^2 \text{ si } t \in D_m,$$

y para $1 \leq j \leq m$:

$$\|f_m(t) - f(t)\| \leq \begin{cases} \frac{3}{8}\delta & t \in B_{z_j} \setminus U_j^m, \\ \frac{3}{4}\delta & t \in U_j^m. \end{cases}$$

Recordemos que $D \subseteq D_m$ y que $D \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{z_i} \subseteq N_\theta(D)$, por lo tanto, claramente f_m satisface (i) y (ii) del Lema 3.10. Ahora, como

$$\|f_m(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{4}\delta \quad \forall t \in \bigcup_{j=1}^{m} B_{z_j},$$

y como $\bigcup\limits_{j=1}^{m} B_{z_j} \subset N_\theta(D)$, $f_m(t) = f(t)$ si $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_{z_j}$, entonces

$$\|f_m(t) - f(t)\| \leq \frac{3}{4}\delta \quad \forall t \in N_\theta(D),$$

por lo que f_m también cumple (iii). Por lo tanto $f_m = \widehat{f}$ es la función buscada. ■

3.3. Demostración del teorema del paso de montaña

Dados $\alpha > 0$ y un subconjunto X de H, denotamos por

$$N_\alpha(X) := \{y \in H : \operatorname{dist}(y, X) < \alpha\},$$

donde

$$\operatorname{dist}(y, X) := \inf_{x \in X} \|y - x\|.$$

Si $X = \emptyset$, definimos $N_\alpha(X) := \emptyset$.

Lema 3.11 *Sean $\varphi \in C^1(H,\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que φ satisface $(PS)_c$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|\nabla\varphi(x)\| < \varepsilon \qquad \forall x \in N_\delta(K_c),$$

donde $K_c := \{x \in H : \varphi(x) = c,\ \nabla\varphi(x) = 0\}$.

Demostración: Como

$$U := \{x \in H \mid \|\nabla\varphi(x)\| < \varepsilon\}$$

es abierto en H, K_c es compacto y $K_c \subset U$, se tiene que:

$$dist(K_c, H \setminus U) > 0.$$

Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < dist(K_c, H \setminus U)$. Entonces $N_\delta(K_c) \subset U$. ■

Lema 3.12 *Sean $\varphi \in C^2(H,\mathbb{R})$ y $u, v \in H$ tales que*

$$\max\{\varphi(u), \varphi(v)\} < c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t)),$$

donde $\Gamma := \{\gamma \in C^0([0,1], H) \mid \gamma(0) = u,\ \gamma(1) = v\}$. Si φ satisface $(PS)_c$ entonces, dados $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon \qquad y \qquad \gamma(0,1) \cap \varphi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap N_\delta(K_c) \neq \emptyset.$$

Demostración: Sin perder generalidad podemos suponer que

$$c - 2\varepsilon > \max\{\varphi(u), \varphi(v)\}.$$

Escogemos $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]}\varphi(\widetilde{\gamma}(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Sea $\eta \in C^0(H,H)$ como en el Teorema 2.27 (con $\frac{\delta}{3}$ en vez de δ) y sea $\gamma := \eta \circ \widetilde{\gamma}$. Entonces $\gamma \in \Gamma$ y

$$\max_{t\in[0,1]}\varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon.$$

Si $\gamma[0,1] \cap \varphi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \cap N_\delta(K_c) = \varnothing$ entonces $\varphi(\gamma(t)) \leq c - \varepsilon$ para toda $t \in [0,1]$, lo cual contradice la definición de c ■

Lema 3.13 *Si V y W son espacios de Banach, $\psi \in C^1(V,W)$ y K es un subconjunto compacto de V, entonces existen $\rho > 0$ y $M > 0$ tales que*

$$\|\psi(y) - \psi(z)\| \leq M \|y - z\| \qquad \forall y, z \in B(x,\rho) \text{ y } \forall x \in K.$$

Demostración: Por la Proposición 2.20, para cada $x \in K$, existen $M_x > 0$ y $\rho_x > 0$ tales que

$$\|\psi(y) - \psi(z)\| \leq M_x \|y - z\| \qquad \forall y, z \in B(x, \rho_x).$$

Como K es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\rho_{x_i}}{2}).$$

Sean $M := \max\{M_{x_1}, ..., M_{x_n}\}$ y $\rho := \frac{1}{2}\min\{\rho_{x_1}, ..., \rho_{x_n}\}$. Entonces, para cada $x \in K$ y $y, z \in B(x,\rho)$, escogiendo x_i tal que $x \in B(x_i, \frac{\rho_{x_i}}{2})$, tenemos que

$$\|y - x_i\| \leq \|y - x\| + \|x - x_1\| < \rho + \frac{\rho_{x_i}}{2} \leq \rho_{x_i}.$$

Análogamente, $\|z - x_i\| < \rho_{x_i}$. Por lo tanto

$$\|\psi(y) - \psi(z)\| \leq M_x \|y - z\| \leq M \|y - z\|,$$

como afirma el enunciado del lema. ■

Demostración del Teorema 3.5. Por el Lema 3.13 existen $M, \rho > 0$ tales que

$$\|\varphi''(y) - \varphi''(z)\| \leq M \|y - z\| \quad \forall y, z \in B(x,\rho) \text{ con } x \in K_c.$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon^{\frac{1}{4}} < \min\left\{M\rho, \frac{1}{128M^2}\right\} \text{ y } c - \varepsilon > \max\{\varphi(u), \varphi(v)\}.$$

Escogemos $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2M}\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right\} \text{ y } \|\nabla\varphi(x)\| < \varepsilon \;\forall x \in N_\delta(K_c),$$

y escogemos $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon \text{ y } \gamma(0,1) \cap \varphi^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \cap N_\delta(K_c) \neq \emptyset$$

lo cual podemos hacer por los lemas 3.11 y 3.12.

Definimos

$$D := \{t \in [0,1] \mid \varphi(\gamma(t)) \geq c - \varepsilon,\ \gamma(t) \in N_\delta(K_c)\}.$$

Entonces, D es compacto, $D \neq \varnothing$ y $D \subset (0,1)$.

Probaremos a continuación que existe $t_\varepsilon \in D$ tal que, si para algún subespacio W de H se cumple que

$$\varphi''(\gamma(t_\varepsilon))(w,w) < -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \|w\|^2 \ \ \forall w \in W \setminus \{0\}$$

entonces $\dim W \leq 1$. De esta afirmación se obtiene el resultado, ya que $x_\varepsilon := \gamma(t_\varepsilon)$ satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 3.5.

Argumentando por contradicción, supongamos que para todo $t \in D$ existe un subespacio W_t de H tal que $\dim W_t \geq 2$ y

$$\varphi''(\gamma(t))(w,w) < -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \|w\|^2 \quad \forall w \in W_t \setminus \{0\}$$

Sean $t \in D$, $y \in B(\gamma(t), \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2M})$ y $x \in K_c$ tal que

$$\|\gamma(t) - x\| < \delta.$$

Entonces

$$\|y - x\| \leq \|y - \gamma(t)\| + \|\gamma(t) - x\| < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2M} + \delta < \rho.$$

Por tanto, si $w \in W_t$ y $\|w\| = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} |\varphi''(y)(w,w) - \varphi''(\gamma(t))(w,w)| &\leq \|\varphi''(y) - \varphi''(\gamma(t))\| \\ &\leq M \|y - \gamma(t)\| < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\varphi''(y)(w,w) < -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2} \quad \forall w \in W_t \text{ con } \|w\| = 1.$$

Sea $\theta > 0$ tal que $D \subset (\theta, 1-\theta)$ y sea $f : \mathbb{R} \to H$ tal que

$$f(s) = \begin{cases} u & \text{si } s \in (-\infty, 0], \\ \gamma(s) & \text{si } s \in [0,1], \\ v & \text{si } s \in [1, \infty). \end{cases}$$

Por el Lema 3.10 existe $\widehat{f}:\mathbb{R}\to H$ continua tal que $\widehat{f}(0)=f(0)=u$, $\widehat{f}(1)=f(1)=v$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\widehat{f}(s)) \leq \varphi(f(s)) < c-\varepsilon \quad \forall s\in\mathbb{R}\setminus D,\\
&\varphi(\widehat{f}(s)) < f(s) - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{16}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{4M^2} \leq c+\varepsilon-2\varepsilon = c-\varepsilon \ \forall s\in D.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\widehat{\gamma}:=\widehat{f}_{|[0,1]}\in\Gamma$ y $\varphi(\widehat{\gamma}(s))<c-\varepsilon$ para toda $s\in[0,1]$, lo que contradice la definición de c. ■

Capítulo 4

Soluciones no radiales para un problema superlineal en la bola

Sea $B(0,1)$ la bola unitaria de $\mathbb{R}^N$. Una función $u : B(0,1) \to \mathbb{R}$ es *radial* si su valor depende únicamente de $|x|$, es decir, si existe $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $u(x) = v(|x|)$. Consideremos el problema elíptico semilineal

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } B(0,1), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B(0,1), \end{cases}$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz continua. Gidas, Ni y Nirenberg demostraron en [10] que todas las soluciones positivas de este problema son radialmente simétricas. A partir de este resultado, es natural preguntarse si las soluciones del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{en } B(0,1), \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B(0,1), \end{cases}$$

donde $f : \overline{B(0,1)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, radialmente simétrica en la primera variable y monótona decreciente con respecto a $r = |x|$, son radialmente simétricas o no.

En [9] de Figueiredo, Srikanth y Santra probaron la existencia de soluciones no radiales para un problema de este tipo. Expondremos aquí en detalle la demostración de su resultado. Para probarlo se hace un análisis detallado del índice de Morse de las soluciones radiales de este problema y se demuestra que cualquier solución radial no negativa o que cambia de signo tiene índice de Morse al menos dos en $H_0^1(B(0,1))$. Se prueba además que el problema tiene una única solución negativa de índice cero Posteriormente se utiliza la generalización del teorema del paso de montaña del capítulo anterior para encontrar una solución, distinta de la solución negativa, cuyo índice de Morse es menor igual que uno. Por lo tanto, esta solución no puede ser radial.

4.1. Existencia de soluciones radiales y no radiales

4.1.1. Planteamiento del problema

De ahora en adelante supondremos que $2 \leq N \leq 5$ y denotaremos por $\Omega := B(0,1)$ a la bola en $\mathbb{R}^N$ de radio 1 con centro en el origen. Estudiaremos el siguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 - t\varphi_1 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_t}$$

donde $t > 0$ y φ_1 es la primera función propia de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ tal que $\varphi_1 > 0$ en Ω y $\varphi_1(0) = 1$.

Consideraremos a

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \qquad \|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2},$$

como el producto escalar y la norma correspondiente en $H_0^1(\Omega)$. Recordemos que, como Ω es acotado, esta norma es equivalente a la usual (ver Corolario 2.16).

Denotemos por

$$\lambda_1 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2}$$

al primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. La primera función propia de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ es una función $v \neq 0$ que satisface

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda_1 v & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Nota que cualquier múltiplo tv con $t \in \mathbb{R}$ también satisface (4.1). Se sabe que toda solución de este problema pertenece a $C^\infty(\overline{\Omega})$, y no cambia de signo. Además, el conjunto de soluciones de (4.1) es un subespacio de dimensión 1 de $H_0^1(\Omega)$. La demostración de esto se puede consultar en [7]. También, en [13], se prueba que las soluciones de (4.1) son radiales. Así pues, existe una única solución radial φ_1 de (4.1) tal que $\varphi_1 > 0$ en Ω y $\varphi_1(0) = 1$.

Definición 4.1 *Una solución débil del problema (P_t) es una función $u_t \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla v - \int_\Omega u_t^2 v + t\int_\Omega \varphi_1 v = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Consideremos el funcional $I_t : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido como

$$I_t(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{3}\int_\Omega u^3 + t\int_\Omega \varphi_1 u \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

De los Ejemplos 2.6, 2.8 y 2.5 se sigue que I_t es de clase C^∞ en $H_0^1(\Omega)$ y

$$\begin{aligned} I_t'(u)v &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega u^2 v + t\int_\Omega \varphi_1 v, \\ I_t''(u)(v,w) &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w - 2\int_\Omega uvw \qquad \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Así pues, las soluciones débiles del problema (P_t) son los puntos críticos de I_t. El siguiente resultado de regularidad asegura que las soluciones débiles de (P_t) son soluciones clásicas.

Teorema 4.2 (de regularidad) *Si $u_t \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema (P_t), entonces $u_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$ y, en consecuencia, u_t es solución clásica del problema (P_t).*

Demostración: En el apéndice B de [12] se prueba que $u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. El Teorema 6.19 de [11] asegura entonces que $u_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Usando la fórmula de Green es sencillo probar que u_t es solución clásica del problema (P_t) (véase [5, Sección IX.5, Etapa D]). ∎

Denotamos por $H_{0,rad}^1(\Omega)$ al subespacio de todas las funciones radiales de $H_0^1(\Omega)$. Es sencillo demostrar que $H_{0,rad}^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega)$, de modo que resulta ser un espacio de Hilbert.

Notación 4.3 *Si $u_t \in H_0^1(\Omega)$ es una solución del problema (P_t) denotaremos al índice de Morse de I_t en u_t simplemente por*

$$\mu(u_t) := Morse_{H_0^1(\Omega)}(I_t, u_t).$$

Si $u_t \in H_{0,rad}^1(\Omega)$ es una solución radial del problema (P_t) denotaremos al índice de Morse de la restricción de I_t a $H_{0,rad}^1(\Omega)$ en u_t por

$$\mu_{rad}(u_t) := Morse_{H_{0,rad}^1(\Omega)}(I_t\,|_{H_{0,rad}^1(\Omega)}, u_t).$$

4.1.2. El teorema de existencia

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.4 *Para $t > 0$ suficientemente grande, el problema (P_t) tiene una solución radial y una solución no radial.*

Para ello, demostraremos las siguientes afirmaciones.

Proposición 4.5 *Para cada $t > 0$, el problema (P_t) tiene una única solución negativa $u_{t,0}$. Más aún, esta solución es radial y existen $\alpha_0, c_0 > 0$ tales que*

$$I_t(u_{t,0} + \alpha v) - I_t(u_{t,0}) > c_0\alpha^2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ con } \|v\| = 1, \ \forall \alpha \in (0, \alpha_0).$$

En particular, $u_{t,0}$ es un mínimo local estricto de I_t.

Proposición 4.6 *Para $t > 0$ suficientemente grande, todas las soluciones radiales no negativas del problema (P_t) tienen índice de Morse $\mu(u_t) \geq 2$.*

Proposición 4.7 *Para $t > 0$ suficientemente grande, todas las soluciones radiales que cambian de signo del problema (P_t) tienen índice de Morse $\mu(u_t) \geq 2$.*

Demostraremos las proposiciones anteriores en las próximas secciones. Ahora las aplicaremos para demostrar el Teorema 4.4.

Demostración del Teorema 4.4. El funcional $I_t : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Probaremos que cumple las condiciones del Corolario 3.6. Notemos que

$$I_t(r\varphi_1) = \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2\right) r^2 - \left(\frac{1}{3}\int_\Omega \varphi_1^3\right) r^3 + \left(t\int_\Omega \varphi_1^2\right) r$$

es un polinomio en r y que el coeficiente del término de grado máximo es negativo. Por tanto,

$$I_t(r\varphi_1) \to -\infty \qquad \text{cuando } r \to \infty.$$

Por la Proposición 4.5, sea $u_{t,0}$ la única solución radial negativa del problema (P_t) y sean $\alpha, \rho > 0$ tales que

$$I_t(u_{t,0} + v) - I_t(u_{t,0}) > \rho \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ con } \|v\| = \alpha.$$

Escojamos $r > 0$ suficientemente grande de modo que $\|r\varphi_1 - u_{t,0}\| \geq 2\alpha$ y $I_t(u_{t,0}) > I_t(r\varphi_1)$. Sea $\Gamma := \{\gamma \in C^0([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = u_{t,0} \text{ y } \gamma(1) = r\varphi_1\}$. Para cada $\gamma \in \Gamma$, la función $f_\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_\gamma(s) := \|\gamma(s) - u_{t,0}\|$ es continua, $f_\gamma(0) = 0$ y

$f_\gamma(1) \geq 2\alpha$. Así que, por el teorema del valor intermedio, existe $s_\gamma \in (0,1)$ tal que $\|\gamma(s_\gamma) - u_{t,0}\| = \alpha$. En consecuencia,

$$\max_{s\in[0,1]} I_t(\gamma(s)) \geq I_t(\gamma(s_\gamma)) = I_t(u_{t,0} + [\gamma(s_\gamma) - u_{t,0}]) > I_t(u_{t,0}) + \rho \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Esto implica que

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} I_t(\gamma(s)) > \max\{I_t(u_{t,0}), I_t(r\varphi_1)\}.$$

Probaremos ahora que I_t cumple la condición de Palais-Smale $(PS)_d$ para cualquier $d \in \mathbb{R}$. Sea (u_n) una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I_t(u_n) = d \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} I_t'(u_n) = 0.$$

Demostraremos que (u_n) contiene una subsucesión convergente. Notemos que

$$I_t(u_n) - \frac{1}{3} I_t'(u_n)u_n = \frac{1}{3}\|u_n\|^2 + \frac{2}{3}\int_\Omega \varphi_1 u_n.$$

En consecuencia, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe $c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\|u_n\|^2 &= I_t(u_n) - \frac{1}{3} I_t'(u_n)u_n - \frac{2}{3}\int_\Omega \varphi_1 u_n \\
&\leq |I_t(u_n)| + \frac{1}{3}\left(\|I_t'(u_n)\|_{\mathcal{B}(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})} + 2|\varphi_1|_2\right)\|u_n\| \\
&\leq c_1(1 + \|u_n\|).
\end{aligned}$$

Esto prueba que (u_n) está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Dado que $2 \leq N \leq 5$, se cumple que $3 < 2^* := \frac{2N}{N-2}$. Así que, por el Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema 2.18), la sucesión (u_n) contiene una subsucesión, a la que por simplicidad continuaremos denotando del mismo modo, tal que

$$\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u \qquad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega), \\
u_n &\to u \qquad \text{fuertemente en } L^3(\Omega).
\end{aligned}$$

Observemos que

$$I_t'(u_n)[u_n - u] - I_t'(u)[u_n - u] = \|u_n - u\|^2 - \int_\Omega (u_n^2 - u^2)(u_n - u). \tag{4.2}$$

Como $u_n - u \rightharpoonup 0$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y $I_t'(u)[u_n - u] = \langle \nabla I_t(u), u_n - u\rangle$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} I_t'(u)[u_n - u] = 0. \tag{4.3}$$

Además, dado que

$$\left|I_t'(u_n)\left[u_n-u\right]\right| \leq \left\|I_t'(u_n)\right\|_{\mathcal{B}(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})}\left\|u_n-u\right\|,$$

que la sucesión (u_n-u) está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} I_t'(u_n)=0$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} I_t'(u_n)\left[u_n-u\right]=0. \tag{4.4}$$

Finalmente, de la desigualdad de Hölder y el teorema de encaje de Sobolev (2.17) se sigue que

$$\left|\int_\Omega (u_n^2-u^2)(u_n-u)\right| \leq \left|u_n^2-u^2\right|_{3/2}\left|u_n-u\right|_3 \leq C\left|u_n^2-u^2\right|_{3/2}\left\|u_n-u\right\|.$$

El Ejemplo 2.7 asegura que la función $\Psi : L^3(\Omega)\to L^{3/2}(\Omega)$ dada por $\Psi(u)=u^2$ es continua. Así que, como $u_n\to u$ fuertemente en $L^3(\Omega)$, se tiene que $u_n^2\to u^2$ fuertemente en $L^{3/2}(\Omega)$ y, dado que (u_n-u) está acotada en $H_0^1(\Omega)$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (u_n^2-u^2)(u_n-u)=0. \tag{4.5}$$

De las afirmaciones (4.2), (4.3), (4.4) y (4.5) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u_n-u\right\|^2=0$$

y, puesto que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, se tiene que

$$u_n\to u \qquad \text{fuertemente en } H_0^1(\Omega).$$

Esto prueba que I_t satisface la condición de Palais-Smale.

El Corolario 3.6 asegura entonces que existe $u_{t,1}\in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I_t(u_{t,1})=c>I_t(u_{t,0}), \qquad I_t'(u_{t,1})=0 \qquad \text{y} \qquad \mu(u_{t,1})\leq 1. \tag{4.6}$$

Así que $u_{t,1}$ es una solución del problema (P_t) y $u_{t,1}\neq u_{t,0}$. La Proposición 4.5 implica entonces que, o bien $u_{t,1}$ es no negativa, o bien $u_{t,1}$ cambia de signo.

Fijemos $t>0$ suficientemente grande de modo que se cumplan las Proposiciones 4.6 y 4.7. Si $u_{t,1}$ fuera una solución radial, dichas proposiciones asegurarían que $\mu(u_{t,1})\geq 2$, contradiciendo (4.6). Esto prueba que $u_{t,1}$ es una solución no radial de (P_t). ■

4.2. Propiedades de las soluciones radiales

Si $u_t : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función radial, denotamos por $v_t : [0,1] \to \mathbb{R}$ a la función tal que $u_t(x) = v_t(|x|)$ para toda $x \in \Omega$. En esta sección probaremos algunas propiedades básicas de las soluciones radiales de (P_t), que requeriremos más adelante.

Proposición 4.8 *Si u_t es una solución radial del problema (P_t), entonces v_t es una solución del problema*

$$\begin{cases} -v_t''(r) - (N-1)\frac{v_t'(r)}{r} = v_t^2(r) - t\varphi_1(r), & r \in (0,1), \\ v_t'(0) = v_t(1) = 0. \end{cases} \tag{P_t^*}$$

Demostración: Sea u_t una solución radial del problema (P_t). Primero notemos que, si $e \in \mathbb{R}^N$ es un vector unitario, entonces $v_t(r) = u_t(re)$ para toda $r \in [0,1]$. De modo que v_t se extiende a una función de clase C^∞ en $[-1,1]$. Dado que $e \in \partial\Omega$ se tiene que $v_t(1) = u_t(e) = 0$. Además,

$$v_t(r) = u_t(re) = u_t(-re) = v_t(-r) \qquad \forall r \in [-1,1],$$

pues u_t es radial. Derivando ambos lados tenemos que

$$v_t'(r) = -v_t'(-r).$$

Por lo tanto $v_t'(0) = 0$. Así, sólo falta comprobar que v_t satisface la ecuación (P_t^*). Dado que $u_t(x) = v_t(|x|)$ para toda $x \in \Omega$, se tiene que

$$\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x) = v_t'(|x|)\frac{x_i}{|x|} \quad \text{ si } |x| \neq 0,$$

para cada $i = 1, ..., N$. Derivando ahora esta ecuación, tenemos que

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial x_i^2}(x) = \frac{v_t'(|x|)}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}v_t'(|x|) + \frac{x_i^2}{|x|^2}v_t''(|x|) \quad \text{ si } |x| \neq 0.$$

Sumando sobre $i = 1, ..., N$ y sustituyendo $|x| = r$ obtenemos

$$-v_t''(r) - (N-1)\frac{v_t'(r)}{r} = -\Delta u_t(x) = v_t^2(r) - t\varphi_1(r) \qquad \forall r \in (0,1),$$

pues u_t es solución de (P_t). ■

Notación 4.9 *En adelante, para simplificar la notación, denotaremos del mismo modo a una función radial* $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *y a la función* $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tal que* $u(x) = u(|x|)$ *para toda* $x \in \Omega$. *Diremos que* u *tiene un único máximo (mínimo) local, si la función* $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tiene un único máximo (mínimo) local en* $[0,1]$.

Necesitamos primero demostrar algunas propiedades de la función $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Proposición 4.10 *La función* $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, *solución de (4.1), satisface las siguientes desigualdades:*

$$\varphi_1''(0) < 0 \quad y \quad \varphi_1' < 0 \ \text{en} \ (0,1].$$

Demostración: De manera similar a la prueba de la proposición anterior, podemos demostrar que φ_1 satisface

$$\begin{cases} -\varphi_1''(r) - (N-1)\frac{\varphi_1'(r)}{r} = \lambda_1\varphi_1(r), & r \in (0,1), \\ \varphi_1'(0) = \varphi_1(1) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Observa que

$$-(N-1)\varphi_1''(0) = -(N-1)\lim_{r\to 0}\frac{\varphi_1'(r)}{r} = \varphi_1''(0) + \lambda_1,$$

y por lo tanto $\varphi_1''(0) < 0$. Así pues, 0 es un máximo local de φ_1. Observa también que si existe $a_t \in (0,1)$ punto crítico de φ_1, entonces por (4.7)

$$-\varphi_1''(a_t) = \lambda_1\varphi_1(a_t) > 0,$$

y por lo tanto a_t es un máximo local de φ_1. Por lo tanto, si existiera en $(0,1)$ un punto crítico, ese punto tendría que ser también un máximo local de φ_1, pero esto es imposible, ya que 0 es un máximo local de φ_1. Así pues, como $\varphi_1''(0) < 0$, tenemos que

$$\varphi_1' < 0 \text{ en } (0,1).$$

Por esta razón, también tenemos que

$$\varphi_1'' \leq 0 \text{ en } [0,1],$$

y por lo tanto, φ_1' es nocreciente. Observa que, como φ_1' satisface (4.7) y φ_1' es nocreciente, φ_1' tiene que ser decreciente. Así pues, obtenemos

$$0 = \varphi_1'(0) > \varphi_1'(1),$$

por lo tanto

$$\varphi_1' < 0 \text{ en } (0,1].$$

■

Los siguientes lemas jugarán un papel importante en la demostración de las Proposiciones 4.6 y 4.7.

Lema 4.11 *Sea u_t una solución radial del problema (P_t) y sea $a_t \in [0,1)$ un punto crítico de u_t tal que $u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) \geq 0$. Entonces a_t es un máximo local de u_t y existe $\delta_t > 0$ tal que*

$$u_t^2(r) - t\varphi_1(r) > 0 \qquad \forall r \in (a_t, a_t + \delta_t).$$

Demostración: Sea u_t una solución radial del problema (P_t^*) y sea $a_t \in [0,1)$ punto crítico de u_t. Entonces,

$$-u_t''(a_t) = u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t).$$

Consideraremos tres casos:
Caso 1. $u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) > 0$.

En este caso $u_t''(a_t) < 0$ y la afirmación es clara.
Caso 2. $u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) = 0$ y $a_t > 0$.

Como u_t satisface (P_t^*), tenemos que

$$-u_t''(r)r - (N-1)u_t'(r) = \left[u_t^2(r) - t\varphi_1(r)\right] r \qquad \forall r \in [0,1].$$

Derivando respecto a r obtenemos

$$-u_t'''(r)r - Nu_t''(r) = u_t^2(r) - t\varphi_1(r) + \left[2u_t(r)u_t'(r) - t\varphi_1'(r)\right] r \qquad \forall r \in (0,1).$$

Como $u_t'(a_t) = u_t''(a_t) = 0$ y $\varphi_1' < 0$ en $(0,1)$, se tiene que

$$-u_t'''(a_t)a_t = -t\varphi_1'(a_t)a_t > 0.$$

Por lo tanto, $u_t'''(a_t) < 0$. Así pues, existe $\delta_t > 0$ tal que $(a_t - \delta_t, a_t + \delta_t) \subset (0,1)$ y

$$u_t'''(r) < 0 \qquad \forall r \in (a_t - \delta_t, a_t + \delta_t).$$

En consecuencia, u_t'' es decreciente en $[a_t - \delta_t, a_t + \delta_t]$, y como $u_t''(a_t) = 0$, se tiene que

$$u_t''(r) > 0 \quad \forall r \in (a_t - \delta_t, a_t) \qquad \text{y} \qquad u_t''(r) < 0 \quad \forall r \in (a_t, a_t + \delta_t).$$

Análogamente,

$$u_t'(r) > 0 \quad \forall r \in (a_t - \delta_t, a_t) \qquad \text{y} \qquad u_t'(r) < 0 \quad \forall r \in (a_t, a_t + \delta_t).$$

Esto prueba que a_t es un máximo local de u_t. Dado que u_t satisface (P_t^*), se tiene además que

$$u_t^2(r) - t\varphi_1(r) > 0 \qquad \forall r \in (a_t, a_t + \delta_t).$$

Caso 3. $u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) = 0$ y $a_t = 0$.

Recordemos que u_t se extiende a una función de clase C^∞ en $[-1, 1]$ mediante $u_t(-r) := u_t(r)$. Esta función satisface

$$-u_t''(r)r - (N-1)u_t'(r) = \left[u_t^2(r) - t\varphi_1(r)\right] r \qquad \forall r \in [-1, 1].$$

Derivando tres veces esta ecuación respecto a r obtenemos

$$\begin{aligned} -u_t'''(r)r - Nu_t''(r) &= u_t^2(r) - t\varphi_1(r) + \left[2u_t(r)u_t'(r) - t\varphi_1'(r)\right] r, && (4.8)\\ -u_t''''(r)r - (N+1)u_t'''(r) &= 4u_t(r)u_t'(r) - 2t\varphi_1'(r)\\ &\quad + \left[2(u_t'(r))^2 + 2u_t(r)u_t''(r) - t\varphi_1''(r)\right] r, && (4.9)\\ -u_t'''''(r)r - (N+2)u_t''''(r) &= 4(u_t'(r))^2 + 4u_t(r)u_t''(r) - 2t\varphi_1''(r)\\ &\quad + 2(u_t'(r))^2 + 2u_t(r)u_t''(r) - t\varphi_1''(r)\\ &\quad + \frac{d}{dr}\left[2(u_t'(r))^2 + 2u_t(r)u_t''(r) - t\varphi_1''(r)\right] r. && (4.10) \end{aligned}$$

Como $u_t'(0) = u_t''(0) = \varphi_1'(0) = 0$ y $\varphi_1''(0) < 0$, evaluando (4.9) en $r = 0$ obtenemos que $u_t'''(0) = 0$, y evaluando (4.10) en $r = 0$ obtenemos que

$$(N+2)u_t''''(0) = 3t\varphi_1''(0) < 0.$$

Así pues, existe $\delta_t \in (0, 1)$ tal que

$$u_t''''(r) < 0 \qquad \forall r \in (-\delta_t, \delta_t).$$

Argumentando como en el caso anterior concluimos que a_t es un máximo local de u_t y que $u_t^2(r) - t\varphi_1(r) > 0$ para todo $r \in (a_t, a_t + \delta_t)$. ∎

Lema 4.12 *Sea u_t una solución radial del problema (P_t) y sea $a_t \in (0, 1)$ un mínimo local de u_t, entonces existe $\delta_t > 0$ tal que*

$$u_t^2(r) - t\varphi_1(r) < 0 \qquad \forall r \in (a_t - \delta_t, a_t).$$

Demostración: Como u_t es una solución radial de (P_t) y a_t es un mínimo local de u_t se tiene que $-u_t''(a_t) = u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) \leq 0$. Del lema anterior se sigue entonces que $u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) < 0$ y la afirmación de lema es clara. ∎

4.3. Unicidad de la solución negativa

El objetivo de esta sección es demostrar la Proposición 4.5. Para ello usaremos los siguientes resultados.

Teorema 4.13 (Principio del máximo) *Si* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *es tal que*

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{en } \Omega \qquad y \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

entonces $u \geq 0$ *en* Ω.

Demostración: Véase [7, Sección 6.4, Teorema 3]. ■

Teorema 4.14 (Amann 1971) *Sean* $f \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, $\underline{h}, \overline{h} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *tales que* $\underline{h} \leq \overline{h}$ *y*

$$-\Delta \underline{h} \leq f(x, \underline{h}) \quad \text{en } \Omega \qquad y \qquad \underline{h} \leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{4.11}$$

$$-\Delta \overline{h} \geq f(x, \overline{h}) \quad \text{en } \Omega \qquad y \qquad \overline{h} \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{4.12}$$

Supongamos además que existe $m \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *tal que* $m \geq 0$ *y*

$$f(x,r) - f(x,s) \geq -m(x)(r-s) \qquad \text{si } \underline{h}(x) \leq s \leq r \leq \overline{h}(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \ r, s \in \mathbb{R}.$$

Entonces existen soluciones $\underline{u}$, $\overline{u}$ *del problema*

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{en } \Omega \qquad y \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{4.13}$$

tales que $\underline{h} \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq \overline{h}$, *y cualquier otra solución* u *de (4.13) tal que* $\underline{h} \leq u \leq \overline{h}$ *cumple que*

$$\underline{h} \leq \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \leq \overline{h}.$$

Más aún, si $f, \underline{h}, \overline{h}$ *y* m *son funciones radiales, entonces* $\underline{u}$ *y* $\overline{u}$ *son funciones radiales.*

Demostración: Véase [2, Teorema 1]. ■

A una función $\underline{h}$ que satisface (4.11) se le llama una subsolución de (4.13), y a una función $\overline{h}$ que satisface (4.12) se le llama una supersolución de (4.13).

Demostración de la Proposición 4.5. La función

$$\underline{h}_t := -\frac{t\varphi_1}{\lambda_1}$$

satisface:
$$-\Delta \underline{h}_t = -\frac{t}{\lambda_1}\Delta\varphi_1 = -t\varphi_1 \leq \underline{h}_t^2 - t\varphi_1 \text{ en } \Omega,$$
por tanto, $\underline{h}_t$ es subsolución de (P_t). Por otra parte, la función $\overline{h}_t := 0$ satisface
$$-\Delta\overline{h}_t = 0 \geq -t\varphi_1 = \overline{h}_t - t\varphi_1 \text{ en } \Omega,$$
así que $\overline{h}_t$ es supersolución de (P_t). Además, $\underline{h}_t, \overline{h}_t$, y la función
$$f_t(x,r) := r^2 - t\varphi_1(x)$$
satisface
$$\begin{aligned} f_t(x,r) - f_t(x,s) &:= r^2 - s^2 = (r+s)(r-s) \\ &\geq -\frac{2t\varphi_1(x)}{\lambda_1}(r-s), \end{aligned}$$
si $\underline{h}_t(x) \leq s \leq r \leq \overline{h}_t(x)$ para toda $x \in \overline{\Omega}$. En consecuencia, el Teorema 4.14 asegura que existe una solución radial $u_t := \overline{u}_t \leq 0$ tal que cualquier otra solución u de (P_t) con $\underline{h_t} \leq u \leq \overline{h_t}$, satisface
$$u \leq u_t \leq 0 \text{ en } \Omega.$$

Observemos que toda solución u de (P_t) satisface que $\underline{h_t} \leq u$, ya que:
$$-\Delta(u - \underline{h}_t) = -\Delta u_t + \Delta\underline{h}_t = u^2 - t\varphi_1 + t\varphi_1 = u^2 \geq 0,$$
y el principio del máximo asegura entonces que $u - \underline{h}_t \geq 0$.

En consecuencia, toda solución $u \leq 0$ de (P_t) satisface
$$u \leq u_t \leq 0 \text{ en } \Omega.$$
Pero entonces
$$-\Delta(u - u_t) = u^2 - u_t^2 \geq 0 \text{ en } \Omega,$$
y el principio del máximo asegura que
$$u_t \leq u \text{ en } \Omega.$$
Así que u_t es la única solución negativa de (P_t).

Sea $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Notemos que
$$I_t(u_t + \alpha v) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla(u_t + \alpha v)|^2 - \frac{1}{3}\int\limits_\Omega (u_t + \alpha v)^3 + t\int\limits_\Omega w_1(u_t + \alpha v),$$

por lo que

$$I_t(u_t+\alpha v)-I_t(u_t)=\alpha\int_\Omega \nabla u_t\cdot\nabla v+\frac{1}{2}\alpha^2\int_\Omega |\nabla v|^2-\alpha\int_\Omega {u_t}^2 v$$
$$-\alpha^2\int_\Omega u_t v^2-\frac{1}{3}\alpha^3\int_\Omega v^3+\alpha t\int_\Omega \varphi_1 v.$$

Como u_t es solución de (P_t),

$$I_t'(u_t)(v)=\int_\Omega \nabla u_t\cdot\nabla v-\int_\Omega u_t^2 v+t\int_\Omega \varphi_1 v=0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_t(u_t+\alpha v)-I_t(u_t)&=\frac{1}{2}\alpha^2\int_\Omega |\nabla v|^2-\alpha^2\int_\Omega u_t v^2-\frac{1}{3}\alpha^3\int_\Omega v^3\\ &=\alpha^2(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2-\int_\Omega u_t v^2-\frac{1}{3}\alpha\int_\Omega v^3)\\ &\geq \alpha^2(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2-\frac{1}{3}\alpha\int_\Omega v^3), \end{aligned}$$

pues $-u_t v^2\geq 0$. Por la desigualdad de Poincaré, existe $C:=C_{3,\Omega}>0$ tal que $|u|_3\leq C_{3,\Omega}\|u\|$ para toda $u\in H_0^1(\Omega)$. Vemos que:

$$\begin{aligned} \alpha^2(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2-\frac{1}{3}\alpha\int_\Omega v^3)&\geq \alpha^2(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2-\frac{1}{3}C^{\frac{3}{2}}\alpha(\int_\Omega |\nabla v|^2)^{\frac{3}{2}})\\ &=\alpha^2(\frac{1}{2}-\frac{C^{\frac{3}{2}}}{3}\alpha)>0 \end{aligned}$$

si $\alpha\in(0,\frac{3}{2C^{\frac{3}{2}}})$. ■

4.4. El índice de Morse de soluciones radiales no negativas

El objetivo de esta sección es demostrar la Proposición 4.6. Para estimar el índice de Morse usaremos el siguiente resultado.

Lema 4.15 *Si u_t es un punto crítico de I_t y existen funciones $\psi_1, \psi_2 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ con soportes ajenos tales que*

$$I_t''(u_t)(\psi_i, \psi_i) < 0 \text{ para } i = 1, 2,$$

entonces $\mu(u_t) \geq 2$. Si además u_t, ψ_1 y ψ_2 son funciones radiales, entonces $\mu_{rad}(u_t) \geq 2$.

Demostración: Como ψ_1 y ψ_2 tienen soportes ajenos,

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_\Omega \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_2 = 0.$$

En consecuencia, el subespacio W de $H_0^1(\Omega)$ generado por ψ_1 y ψ_2 tiene dimensión 2. Pero también

$$I_t''(u_t)(\psi_1, \psi_2) = \int_\Omega \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_2 - 2 \int_\Omega u_t \psi_1 \psi_2 = 0.$$

Por tanto, para todo $w = \alpha \psi_1 + \beta \psi_2 \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$I_t''(u_t)(w, w) = \alpha^2 I_t''(u_t)(\psi_1, \psi_1) + \beta^2 I_t''(u_t)(\psi_2, \psi_2) < 0.$$

Esto prueba que $\mu(u_t) \geq 2$. La segunda afirmación del lema es clara. ∎

La demostración anterior tiene como consecuencia el siguiente corolario.

Corolario 4.16 *Si u_t es un punto crítico de I_t y existen funciones $\psi_1, \psi_2 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tales que*

$$I_t''(u_t)(\psi_i, \psi_i) < 0 \text{ para } i = 1, 2,$$
$$\int_\Omega \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_2 = 0 \quad y \quad \int_\Omega u_t \psi_1 \psi_2 = 0,$$

entonces $\mu(u_t) \geq 2$. Si además u_t, ψ_1 y ψ_2 son funciones radiales, entonces $\mu_{rad}(u_t) \geq 2$.

Subdividiremos la demostración de la Proposición 4.6 en varios casos, considerados en los siguientes lemas.

Lema 4.17 *Sea $T \subset (0, \infty)$ tal que, para todo $t \in T$, el problema (P_t) tiene una solución radial u_t que tiene un único máximo local positivo $a_t \in [0, 1)$ y tal que $u_t \geq 0$ en $[a_t, 1]$. Supongamos además que*

$$a := \sup_{t \in T} a_t < 1.$$

Entonces existe $t_1 > 0$ tal que $\mu_{rad}(u_t) \geq 2$ para todo $t \in T$ con $t \geq t_1$.

Demostración: Si T está acotado, tomamos

$$t_1 := \sup T$$

y el resultado es cierto por vacuidad.

Supongamos que T no está acotado. Fijamos $a < b < c < 1$. Como

$$0 \leq -u_t''(a_t) = u^2(a_t) - t\varphi_1(a_t),$$

se tiene que

$$u^2(a_t) \geq t\varphi_1(a_t) > t\varphi_1(c) > 0.$$

Como a_t es el único máximo de u_t en $[0,1]$ y $u_t(1) = 0$, existe $d_t \in (a_t, 1)$ tal que

$$u_t^2(d_t) = \frac{t\varphi_1(c)}{4}.$$

Probaremos que existe $\tau > 0$ tal que

$$d_t > b \quad \forall t \in T,\ t \geq \tau. \tag{4.14}$$

Argumentando por contradicción, supongamos que existe $t_n \in T$ tal que

$$t_n \to \infty \quad \text{y} \quad d_{t_n} \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\begin{aligned} -u_{t_n}''(r) &\leq -u_{t_n}''(r) - (N-1)\frac{u_{t_n}'(r)}{r} \\ &= u_{t_n}^2(r) - t_n\varphi_1(r) \\ &< \frac{t_n\varphi_1(c)}{4} - t_n\varphi_1(c) = -\frac{3}{4}t_n\varphi_1(c) \quad \forall r \in (d_{t_n}, c), \end{aligned}$$

usando el teorema de Taylor se tiene que

$$\left(\frac{t_n\varphi_1(c)}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u_{t_n}(d_{t_n}) = u_{t_n}(c) + u'(c)(d_{t_n} - c) + \frac{u_{t_n}''(\xi_n)}{2}(d_{t_n} - c)^2$$

donde $\xi_n \in (d_{t_n}, c)$. En consecuencia,

$$\left(\frac{t_n\varphi_1(c)}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = u_{t_n}(d_{t_n}) > \frac{u_{t_n}''(\xi_n)}{2}(d_{t_n} - c)^2 \geq \frac{3}{4}t_n\varphi_1(c)(b-c)^2.$$

Esta es una contradicción a que $t_n \to \infty$; lo que demuestra (4.14).

Se tiene entonces que

$$u_t^2(r) \geq \frac{t\varphi_1(c)}{4} \quad \forall r \in [a_t, b],\ \forall t \in T,\ t \geq \tau.$$

Sean $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ funciones radiales, no negativas, con soportes ajenos, que satisfacen

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\geq c_1 > 0 \text{ si } |x| \in [a, a+\varepsilon], \\ \psi_2(x) &\geq c_2 > 0 \text{ si } |x| \in [b-\varepsilon, b], \end{aligned}$$

donde $\varepsilon := \frac{b-a}{3}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t\psi_1^2 &\geq \int_{a\leq|x|\leq a+\varepsilon} u_t\psi_1^2 \geq (\frac{t\varphi_1(c)}{4})^{\frac{1}{2}} c_1^2(vol(\{x \mid a \leq |x| \leq a+\varepsilon\})) \\ &=: \widetilde{c}_1 t^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \in T,\ t \geq \tau, \\ \int_\Omega u_t\psi_2^2 &\geq \int_{b-\varepsilon\leq|x|\leq b} u_t\psi_2^2 \geq (\frac{t\varphi_1(c)}{4})^{\frac{1}{2}} c_2^2(vol(\{x \mid b-\varepsilon \leq |x| \leq b\})) \\ &=: \widetilde{c}_2 t^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \in T,\ t \geq \tau. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} I_t''(u_t)(\psi_i, \psi_i) &= \int_\Omega |\nabla\psi_i|^2 - 2\int_\Omega u_t\psi_i^2 \\ &\leq \int_\Omega |\nabla\psi_i|^2 - 2\widetilde{c}_i t^{\frac{1}{2}} \quad \forall t \geq \tau,\ i = 1, 2. \end{aligned}$$

Por tanto, existe $t_1 \geq \tau$ tal que

$$I''(u_t)(\psi_i)(\psi_i) < 0 \quad \forall t \in T,\ t \geq \tau,\ i = 1, 2.$$

Como $sop(\psi_1) \cap sop(\psi_2) = \varnothing$, el Lema 4.15 asegura que

$$\mu_{rad}(u_t) \geq 2$$

para todo $t \in T$ con $t \geq t_1$. ■

Lema 4.18 *Si una solución radial no negativa u_t del problema (P_t) tiene más de un máximo local en $[0,1)$, entonces $\mu_{rad}(u_t) \geq 2$.*

Demostración: Sean a_{t_1} y a_{t_2} máximos de la función u_t y sea $F:\Omega\to\mathbb{R}$ definida como

$$F(x) := u_t^2(x) - t\varphi_1(x) \text{ con } x\in\Omega,$$

Notemos que claramente $F\in H^1_{0,rad}(\Omega)$ y además como:

$$\frac{\partial u_t^2}{\partial x_i} = 2u_t(x)\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x) \qquad \forall x\in\Omega,$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u_t^2}{\partial x_i^2} = 2u_t(x)\frac{\partial^2 u_t}{\partial x_i^2} + 2\left(\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x)\right)^2 \qquad \forall x\in\Omega.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}-\Delta F(x) &= 2u_t(x)(-\Delta u_t(x)) - 2\left|\nabla u_t(x)\right|^2 - t\lambda_1\varphi_1(x)\\ &= 2u_t(x)F(x) - 2\left|\nabla u_t(x)\right|^2 - t\lambda_1\varphi_1(x) \qquad \forall x\in\Omega.\end{aligned}$$

Claramente $2\left|\nabla u_t\right|^2 + t\lambda_1 w_1 > 0$ en Ω.

Caso 1. Si $a_{t_1} = 0$.

Sea $m_t\in(a_{t_1}, a_{t_2})$ el punto donde u_t tiene un mínimo. Por el Lema 4.11 tenemos que existe $\delta_{1,t}>0$ tal que

$$u_t^2(r) - t\varphi_1(r) > 0 \ \forall r\in(a_{t_1}, a_{t_1}+\delta_{1,t}).$$

Por el Lema 4.12, existe $\delta_{2,t}>0$ tal que

$$u_t^2(r) - t\varphi_1(r) < 0 \ \forall r\in(m_t-\delta_{2,t}, m_t).$$

y por lo tanto, existe $n_t\in(a_{t_1}, m_t)$ tal que $F>0$ en $[a_{t_1}, n_t]$ y $F(n_t)=0$. De igual manera, existe $\delta_{3,t}>0$ tal que

$$u_t^2(r) - t\varphi_1(r) > 0 \ \forall r\in(a_{t_2}, a_{t_2}+\delta_{3,t})$$

Por lo tanto, existen $n_t'\in[m_t, a_{t_2}]$ y $n_t''\in[a_{t_2}+\delta_{3,t}, 1]$ tal que $F>0$ en $[n_t', n_t'']$ y $F(n_t') = F(n_t'') = 0$. Definimos

$$F_1(x) := \begin{cases} F(x) & \text{si } x\in\Omega_1 := B(0,n_t),\\ 0 & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

y

$$F_2(x) := \begin{cases} F(x) & \text{si } x\in\Omega_2 := \left\{x\in\Omega \mid n_t' < |x| < n_t''\right\},\\ 0 & \text{si } x\in\Omega\setminus\Omega_2.\end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I_t''(u_t)(F_i,F_i) &= \int\limits_{\Omega} |\nabla F_i|^2 - \int\limits_{\Omega} 2u_t F_i^2 \\
&= -\int\limits_{\Omega} (\Delta F_i)F_i - \int\limits_{\Omega} 2u_t F_i \\
&= -\int\limits_{\Omega_i} (\Delta F_i)F_i - \int\limits_{\Omega_i} 2u_t F_i^2 \\
&= \int\limits_{\Omega_i} (2u_t F_i^2 - 2\left|\nabla u_t\right|^2 F_i - t\lambda_1\varphi_1 F_i) - \int\limits_{\Omega_i} 2u_t F_i^2 \\
&= -2\int\limits_{\Omega_i} \left|\nabla u_t\right|^2 F_i - t\lambda_1 \int\limits_{\Omega_i} \varphi_1 F_i < 0 \ \forall i \in \{1,2\}\,.
\end{aligned}$$

y como F_1 y F_2 tienen soportes ajenos, tenemos que el índice de Morse de u_t es al menos dos $H^1_{0,rad}(\Omega)$.

Caso 2. La solución u_t tiene dos máximos, uno en a_{t_1} y otro en a_{t_2} en $(0,1)$ con $a_{t_1} < a_{t_2}$.

En este caso existe m_t mínimo de u_t tal que $a_{t_1} < m_t < a_{t_2} < 1$, sean $\delta_{1,t}, \delta_{2,t} > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
v_t^2(r) - t\varphi_1(r) > 0 \ \forall r \in (a_{t_1}, a_{t_1} + \delta_{1,t}) \\
v_t^2(r) - t\varphi_1(r) < 0 \ \forall r \in (m_t - \delta_{2,t}, m_t),
\end{aligned}$$

esto implica que, existen $p_t \in [0, a_{t_1}]$ y $p_t' \in (a_{t_1}, m_t)$ tales que $F > 0$ en $[p_t, p_t']$ y $F(p_t) = F(p_t') = 0$. Usando la función F_2 como en el caso anterior y la función:

$$F_3(x) := \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in \{x \in \Omega \mid p_t < |x| < p_t'\}\,, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

tenemos que F_2, $F_3 \in H^1_{0,rad}(\Omega)$ tienen soportes ajenos, y también

$$I_t''(u_t)(F_i,F_i) < 0 \qquad \forall i \in \{2,3\}$$

por lo que en este caso $\mu_{rad}(u_t) \geq 2$. ■

Si una solución radial no negativa u_t de (P_t) tiene un único máximo local a_t en $[0,1)$ y $a_t \neq 0$, entonces el Lema 4.11 asegura que $u_t^2(0) - t\varphi_1(0) < 0$ y, como $u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) \geq 0$, existe $b_t \in [0, a_t]$ tal que $u_t^2(b_t) - t\varphi_1(b_t) = 0$. Notemos que b_t es el único punto en $[0, a_t]$ con esta propiedad, pues u_t es creciente en $[0, a_t]$ y φ_1 es decreciente en $[0,1]$.

Notación 4.19 *Si u_t es una solución radial no negativa de (P_t) que tiene un único máximo local $a_t \neq 0$ en $[0,1)$, denotamos por b_t al único punto en $(0, a_t)$ tal que*

$$u_t^2(b_t) - t\varphi_1(b_t) = 0.$$

Lema 4.20 *Sea $T \subset (0,\infty)$ tal que, para todo $t \in T$, el problema (P_t) tiene una solución radial no negativa u_t que tiene un único máximo local a_t en $[0,1)$. Supongamos además que*

$$b := \sup_{t\in T} b_t < 1.$$

Entonces existe $t_1 > 0$ tal que $\mu_{rad}(u_t) \geq 2$ para todo $t \in T$ con $t \geq t_1$.

Demostración: Si T está acotado, tomamos

$$t_1 := \sup T$$

y el resultado se tiene por vacuidad. Supongamos que T no está acotado. Por el Lema 4.17, si

$$a := \sup_{t\in T} a_t < 1,$$

entonces se tendría el resultado. Por lo tanto, supongamos que $a = 1$. Fijemos $b < c < d < 1$ y sea $\tau > 0$ tal que

$$d < a_t \quad \forall t \in T,\ t \geq \tau.$$

Como b_t es el único número en $[0, a_t]$ que satisface $u^2(b_t) = t\varphi_1(b_t)$ y como $u^2(a_t) \geq t\varphi_1(a_t)$, se tiene que

$$u_t(r) \geq t\varphi_1(r) \quad \forall r \in [b_t, a_t],$$

y por lo tanto

$$u_t^2(r) \geq t\varphi_1(r) \geq t\varphi_1(d) \quad \forall r \in [c,d]\ ,\forall t \in T,\ t \geq \tau.$$

De forma análoga al Lema 4.17 podemos encontrar $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ funciones radiales, no negativas, con soportes ajenos, tales que

$$I_t''(u_t)(\psi_i,\psi_i) < 0 \quad \forall t \in T,\ t \geq t_1,\ i = 1,2.$$

Por lo tanto $\mu_{rad}(u_t) \geq 2$ para todo $t \in T$ con $t \geq t_1$. ■

Lema 4.21 *Supongamos para alguna sucesión $t_n \to \infty$ el problema (P_t) tiene una solución radial no negativa u_{t_n} con un único máximo local a_{t_n} en $(0,1)$ tal que $\mu_{rad}(u_{t_n}) \leq 1$. Entonces (b_{t_n}) no converge a 1.*

Demostración: Supongamos que $b_{t_n} \to 1$ cuando $n \to \infty$. Primero veamos que para toda $a \in [0, \frac{3}{4}]$, existe $M_a > 0$ que no depende de n tal que

$$0 \leq u_{t_n}(a) \leq M_a \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Supongamos que

$$u_{t_n}(a) \to \infty \text{ cuando } n \to \infty.$$

Recordemos que u_{t_n} es creciente en $(0, a_{t_n})$ y $0 < b_{t_n} < a_{t_n}$. Sean $b \in (a, 1)$ y n_0 tal que para $n \geq n_0$, $a_{t_n} > b_{t_n} > b$. Notemos que, por lo dicho con anterioridad, $u_{t_n} \to \infty$ uniformemente en $[a, b]$. Sea $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ función radial, no negativa tal que:

$$\psi(x) \geq c > 0 \quad \forall\, |x| \in [a, b].$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{t_n}\psi^2 &\geq \int_{a\leq|x|\leq b} u_{t_n}\psi^2 \\ &\geq c^2(\min_{a\leq|x|\leq b} u_{t_n}(x))(vol(\{x \in \Omega \mid a \leq |x| \leq b\}) \to \infty \text{ cuando } n \to \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando un procedimiento análogo al que se usó en el Lema 4.17, tenemos que para n suficientemente grande, el índice de Morse de u_{t_n} es mayor que uno, lo cual no puede suceder. Por lo tanto, se cumple (4.15).

Consideraremos dos casos:

Caso 1. $u_{t_n}^2(b_{t_n}) = t_n\varphi_1(b_{t_n}) \to C$ cuando $n \to \infty$ con $C \geq 0$.

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$:

$$\varphi_1(b_{t_n}) \leq \frac{C_2}{t_n} \text{ y } b_{t_n} \in (\frac{1}{2}, 1)$$

con $C_2 > 0$, por el teorema del valor medio, existe $\theta_n \in (b_{t_n}, 1)$ tal que

$$\varphi_1(b_{t_n}) = -\varphi_1'(\theta_n)(1 - b_{t_n}),$$

y por lo tanto, como φ_1' es decreciente, tenemos que

$$(1 - b_{t_n}) \leq \frac{C_2}{-\varphi_1'(\theta_n)t_n} < \frac{C_2}{-\varphi_1'(\frac{1}{2})t_n} = \frac{C_3}{t_n}$$

con $C_3 > 0$. Sabemos que u_{t_n} satisface la siguiente ecuación

$$-u_{t_n}''(r) - \frac{(N-1)u_{t_n}'(r)}{r} = u_{t_n}^2(r) - t_n\varphi_1(r),$$

y por tanto

$$-r^{N-1}u''_{t_n}(r) - (N-1)r^{N-2}u'_{t_n}(r) = u^2_{t_n}(r)r^{N-1} - t_n\varphi_1(r)r^{N-1}, \tag{4.16}$$

integrando la igualdad anterior y multiplicando por menos, tenemos que

$$r^{N-1}u'_{t_n}(r) = t_n \int_0^r \varphi_1 s^{N-1} ds - \int_0^r u^2_{t_n} s^{N-1} ds,$$

así pues

$$\left|u'_{t_n}(r)\right| \le t_n \int_0^r |\varphi_1|\, s^{N-1} ds \le \frac{t_n \|\varphi_1\|_\infty r^N}{N} \le \frac{t_n \|\varphi_1\|_\infty}{N}.$$

Como $a_{t_n} \in (b_{t_n}, 1)$,

$$u_{t_n}(a_{t_n}) - u_{t_n}(b_{t_n}) = \int_{b_{t_n}}^{a_{t_n}} u'_{t_n}(r) dr \le \frac{t_n}{N} \|\varphi_1\|_\infty (1 - b_{t_n}) \le C_3 \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{N},$$

por lo tanto, como $u^2_{t_n}(b_{t_n}) \to C$, se tiene que

$$|u_{t_n}(a_{t_n})| \le \frac{\|\varphi_1\|_\infty C_3}{N} + C_1 = M_1$$

para toda $n \ge n_1$ y por lo tanto para n suficientemente grande $\|u_{t_n}\|_\infty \le M_1$, usando este hecho, como u_{t_n} satisface,

$$\int_\Omega u^2_{t_n}\varphi_1 - t_n \int_\Omega \varphi_1^2 = -\int_\Omega \Delta(u_{t_n})\varphi_1 = \int_\Omega \nabla u_{t_n} \cdot \nabla\varphi_1 = -\int_\Omega (\Delta\varphi_1)u_{t_n} = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u_{t_n}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \varphi_1^2\right| &\le \frac{1}{t_n}\left|\int_\Omega u^2_{t_n}\varphi_1\right| + \frac{1}{t_n}\left|\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u_{t_n}\right| \\ &\le \frac{M_1^2}{t_n}\int_\Omega \varphi_1 + \frac{M_1\lambda_1}{t_n}\int_\Omega \varphi_1. \end{aligned}$$

Haciendo tender $n \to \infty$, vemos que $\int_\Omega \varphi_1^2 = 0$, y ésto es una contradicción.

Caso 2. $t_n\varphi_1(b_{t_n}) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Definimos

$$\delta := \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_1 r^{N-1} dr > 0.$$

Demostraremos que para n suficientemente grande existe $r_{t_n} \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ tal que

$$0 < u'_{t_n}(r_{t_n}) < \frac{\delta}{2} t_n.$$

Supongamos que para toda $r \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

$$u'_{t_n}(r) \geq \frac{\delta}{2} t_n$$

para toda n tal que $a_{t_n} > \frac{3}{4}$, entonces

$$u_{t_n}\left(\frac{3}{4}\right) - u_{t_n}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} u'_{t_n} dr \geq t_n \frac{\delta}{8} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pero esto no puede pasar pues por (4.15),

$$u_{t_n}\left(\frac{3}{4}\right) - u_{t_n}\left(\frac{1}{2}\right) \leq M_{\frac{3}{4}} + M_{\frac{1}{2}} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto, para toda $n \geq n_1$, existe $r_{t_n} \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ tal que

$$0 < u'_{t_n}(r_{t_n}) < \frac{\delta}{2} t_n. \tag{4.17}$$

Como la sucesión $(\varphi_1(b_{t_n}))$ tiende a cero, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{\varphi_1(b_{t_n})}{N} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2,$$

y $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2})$. Por (4.16), tenemos que

$$r_{t_n}^{N-1} u'_{t_n}(r_{t_n}) = t_n \int_0^{r_{t_n}} \varphi_1 s^{N-1} ds - \int_0^{r_{t_n}} u_{t_n}^2 s^{N-1} ds,$$

y por lo tanto, usando (4.17)

$$\delta < \int_0^{r_{t_n}} \varphi_1 s^{N-1} ds = \frac{r_{t_n}^{N-1} u'_{t_n}(r_{t_n})}{t_n} + \frac{\int_0^{r_{t_n}} u_{t_n}^2 s^{N-1} ds}{t_n}$$
$$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\int_0^{r_{t_{n_2}}} u_{t_n}^2 s^{N-1} ds}{t_n}.$$

Sabemos que para n suficientemente grande se cumple

$$u_{t_n}^2(r) \leq u_{t_n}^2(r_{t_n}) \leq u_{t_n}^2\left(\frac{3}{4}\right) \leq t_n \varphi_1(b_{t_n}) \quad \forall r \in (0, r_{t_n}),$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} t_n \varphi_1(b_{t_n}) = \infty \text{ y } u_{t_n}^2(\frac{3}{4}) \leq M_{\frac{3}{4}}^2 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

así pues, tenemos que para toda $n \geq n_2$

$$\delta < \frac{\delta}{2} + \frac{\int_0^{r_{t_n}} u_{t_n}^2 s^{N-1} ds}{t_n} \leq \frac{\delta}{2} + \varphi_1(b_{t_n}) \int_0^{r_{t_n}} s^{N-1} ds$$
$$= \frac{\delta}{2} + \frac{\varphi_1(b_{t_n})(r_{t_n})^N}{N} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\varphi_1(b_{t_n})}{N} < \frac{\delta}{2} + \varepsilon < \delta$$

una contradicción. Por lo tanto b_{t_n} no puede converger a uno. ∎

Demostración de la Proposición 4.6. Argumentando por contradicción, supongamos que para alguna sucesión $t_n \to \infty$ el problema (P_{t_n}) tiene una solución radial no negativa u_{t_n} con $\mu_{rad}(u_{t_n}) \leq 1$. Por el Lema 4.18, u_{t_n} tiene un único máximo local a_{t_n} en $[0, 1)$. De los Lemas 4.17 y 4.21 se sigue entonces que (t_n) contiene una subsucesión (t_{n_k}) tal que $a_t \neq 0$ para todo $t \in T := \{t_{n_k}\}$ y

$$\sup_{t\in T} b_t < 1.$$

Esto contradice al Lema 4.20. ∎

4.5. El índice de Morse de soluciones radiales que cambian de signo

El objetivo de esta sección es demostrar la Proposición 4.7. Subdiviremos la demostración de la Proposición en dos casos pricipalmente, considerados en los siguientes lemas.

Lema 4.22 *Sea $t \in (0, \infty)$ tal que el problema (P_t) tiene una solución radial u_t que cambia de signo y sea $a_t \in [0, 1)$ máximo local de u_t, supongamos que existe $m_t \in (a_t, 1)$ punto crítico de u_t, entonces $\mu(u_t) \geq 2$.*

Demostración: Sea $h_t : \Omega \to \mathbb{R}$, como

$$h_t(x) := \frac{u_t'(|x|)x_N}{|x|} = \frac{\partial u_t}{\partial x_N}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Observa que $h_t \in C^1(\Omega)$. Derivando $-\Delta u_t = u_t^2 - t\varphi_1$ con respecto a x_N, obtenemos

$$-\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 u_t}{\partial x_N \partial x_j \partial x_j}\right) = 2u_t \frac{\partial u_t}{\partial x_N} - t\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N}$$

y por lo tanto, dado que $u_t \in C^2(\Omega)$, h_t satisface

$$-\Delta h_t = 2u_t h_t - t\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N} = 2u_t \frac{u_t'(|x|)x_N}{|x|} - t\frac{\varphi_1'(|x|)x_N}{|x|}.$$

Sabemos por el Lema 4.11 que existe $\delta_t > 0$ tal que

$$u_t' < 0 \text{ en } (a_t, a_t + \delta_t),$$

y como $u_t'(m_t) = 0$, existe $b_t \in (a_t, m_t]$ tal que

$$u_t'(b_t) = 0 \quad \text{y} \quad u_t'(r) \leq 0 \quad \forall r \in [a_t, b_t].$$

Por lo tanto, definimos

$$w_t(x) := \begin{cases} h_t(x) & \text{si} \quad x \in \Omega_{1,t} := \{x \in \Omega \mid a_t \leq |x| \leq b_t\}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \Omega \setminus \Omega_{1,t}. \end{cases}$$

Nota que $w_t \in H_0^1(\Omega)$ y que, como $\varphi_1'(|x|) \leq 0$ para toda $x \in \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned}
I_t''(u_t)(w_t, w_t) &= \int_\Omega \nabla w_t \cdot \nabla w_t - 2\int_\Omega u_t w_t \\
&= \int_\Omega (\Delta w_t) w_t - 2\int_\Omega u_t w_t^2 \\
&= \int_{\Omega_{1,t}} (\Delta w_t) w_t - 2\int_{\Omega_{1,t}} u_t w_t^2 \\
&= \int_{\Omega_{1,t}} \left(2u_t w_t - t\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N}\right) w_t - 2\int_{\Omega_{1,t}} u_t w_t^2 \\
&= -\int_{\Omega_{1,t}} t\frac{u_t'(|x|)}{|x|}\frac{\varphi_1'(|x|) x_N^2}{|x|} < 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sean $n_t, p_t \in [0,1]$ tal que $u_t \geq 0$ en $[n_t, p_t]$ y $u_t(n_t) = u_t(p_t) = 0$, y sea:

$$u_t^+(x) := \begin{cases} u_t(x) & \text{si } x \in \Omega_{2,t} := \{x \in \Omega \mid n_t \leq |x| \leq p_t\}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Nota que $u_t^+ \in H_0^1(\Omega)$ y que

$$\begin{aligned}
I_t''(u_t)(u_t^+, u_t^+) &:= -\int_\Omega (\Delta u_t^+) u_t^+ - 2\int_\Omega u_t (u_t^+)^2 = -\int_{\Omega_{2,t}} ((u_t^+)^2 - t\varphi_1) u_t^+ - 2\int_{\Omega_{2,t}} u_t (u_t^+)^2 \\
&= \ -\int_{\Omega_{2,t}} ((u_t^+)^2 + t\varphi_1) u_t^+ < 0.
\end{aligned}$$

Sea $\omega_t := \Omega_{1,t} \cap \Omega_{2,t}$ y sean $\omega_t^+ := \{x \in \omega \mid x_N \geq 0\}$, $\omega_t^- := \{x \in \omega \mid x_N \leq 0\}$. Definimos $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ como

$$\rho(x_1, ..., x_N) := (x_1, ..., -x_N) \ \ \forall (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

nota que ρ es una isometría cuyo Jacobiano es -1 , por lo tanto, por el teorema del cambio de variable, tenemos que

$$\int_{\omega_t^+} (u_t^+)^2(x) \frac{u_t'(|x|)}{|x|} x_N = -\int_{\omega_t^-} (u_t^+)^2(x) \frac{u_t'(|x|)}{|x|} x_N$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} (u_t^+)^2 w_t = \int_{\omega_t} (u_t^+)^2 w_t = \int_{\omega_t^+} (u_t^+)^2(x) \frac{u_t'(|x|)}{|x|} x_N + \int_{\omega_t^-} (u_t^+)^2(x) \frac{u_t'(|x|)}{|x|} x_N = 0.$$

De manera similar, se demuestra que

$$\langle u_t^+, w_t \rangle = \int_{\Omega} \nabla u_t^+ \cdot \nabla w_t = -\int_{\Omega} ((u_t^+)^2 - t\varphi_1)(x) \frac{u_t'(|x|)}{|x|} x_N = 0,$$

por lo que

$$I_t''(u_t)(u_t^+, w_t) = \int_{\Omega} \nabla u_t^+ \cdot \nabla w_t - 2 \int_{\Omega} (u_t^+)^2 w_t = 0, \tag{4.18}$$

y como

$$I_t''(u_t)(u_t^+, u_t^+) < 0 \quad \text{y} \quad I_t''(u_t)(w_t, w_t) < 0,$$

por el Corolario 4.16, concluimos que $\mu(u_t) \geq 2$. ■

Observa que para demostrar la Proposición 4.7, por el lema anterior, las únicas soluciones de (P_t) que nos interesa conocer su índice de Morse, son soluciones u_t que tienen una única parte negativa seguida de una parte positiva, asi no habría un mínimo negativo después de un máximo. Si esta solución u_t satisface que

$$u_t^2(0) - t\varphi_1(0) \geq 0,$$

por el Lema 4.11, se tendría que 0 es un máximo, y dado que u_t tiene sólo un máximo positivo, la función u_t tendría que ser positiva o tendría que tener un mínimo después de cero. Por lo tanto se debe de tener que

$$-u_t''(0) = u_t^2(0) - t\varphi_1(0) < 0,$$

y así entonces, 0 es un mínimo de u_t, que por el Lema 4.22, tiene que ser el único. Nota que, por esto último y por que la solución cambia de signo, se debe de cumplir que:

$$u_t(0) < 0.$$

En resumen, las soluciones de (P_t) que nos falta estimar su índice de Morse, son las soluciones u_t descritas como sigue:

1. $u_t(0) < 0$,
2. Existe un único $d_t \in (0, 1)$ tal que $u_t(d_t) = 0$, (4.19)
3. Existe un único máximo $a_t \in (d_t, 1)$ tal que $u_t(a_t) > 0$ y $u_t' \geq 0$ en $[0, a_t]$.

Lema 4.23 *Sea $t \in (0,\infty)$ tal que el problema (P_t) tiene una solución radial u_t como en (4.19). Entonces, existe $C > 0$, independiente de t tal que*

$$\|u_t\|_\infty \leq C\sqrt{t}.$$

Demostración: Dado que $u_t^2(a_t) - t\varphi_1(a_t) \geq 0$ y que $u_t^2(d_t) - t\varphi_1(d_t) < 0$, existe $b_t \in (d_t, a_t]$ tal que $u_t^2(b_t) - t\varphi_1(b_t) = 0$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $|u_t(0)| \geq |u_t(a_t)|$.

Como $u_t' \geq 0$, para toda $r \in [0, d_t]$

$$u_t(0) \leq u_t(r) \leq 0,$$

y como $a_t \in (d_t, 1)$ es el único máximo positivo, tenemos que, para toda $r \in [d_t, 1]$

$$0 \leq u_t(r) < u_t(a_t)$$

por lo tanto, como $|u_t(0)| \geq |u_t(a_t)|$, tenemos que

$$|u_t(r)| \leq |u_t(0)| \qquad \forall r \in [0,1]$$

así pues

$$\|u_t\|_\infty = -u_t(0) < (t\varphi_1(0))^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{t}$$

y por lo tanto, el resultado es cierto en este caso.

Caso 2. $|u_t(a_t)| \geq |u_t(0)|$.

Análogamente al caso anterior, podemos notar que

$$\|u_t\|_\infty = u_t(a_t).$$

Notemos que si $a_t = b_t$, entonces

$$u_t^2(r) \leq u_t^2(a_t) = t\varphi_1(a_t) \leq t \quad \forall r \in [d_t, 1],$$

y así pues, vemos que claramente el resultado es cierto en este caso. Por lo tanto, supongamos que $b_t < a_t$. Recordemos que u_t satisface

$$\begin{cases} -\frac{1}{r^{n-1}}(r^{N-1}u_t'(r))' = u_t^2(r) - t\varphi_1(r), \\ 0 = u_t'(0) = u_t'(a_t) = u_t(1). \end{cases} \tag{4.20}$$

Multiplicando por $r^{N-1}u_t'(r)$ en ambos lados de la ecuación e integrando de 0 a a_t, obtenemos

$$-\int_0^{a_t} u_t'(r^{N-1}u_t')' = \int_0^{a_t} r^{N-1}u_t'u_t^2 - t\int_0^{a_t} r^{N-1}u_t'\varphi_1. \tag{4.21}$$

Por un lado, si integramos por partes, obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{a_t} u_t'(r^{N-1}u_t')' &= -\int_0^{a_t} u_t''u_t'r^{N-1} - (N-1)\int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2} \\
&= \frac{(N-1)}{2}\int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2} - (N-1)\int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2} \\
&= -\frac{(N-1)}{2}\int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2}.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Por otro lado, también, integrando por partes obtenemos

$$
\int_0^{a_t} r^{N-1}u_t'u_t^2 = \frac{u_t^3(a_t)a_t^{N-1}}{3} - \frac{N-1}{3}\int_0^{a_t} u_t^3 r^{N-2} \qquad \text{y} \tag{4.23}
$$

$$
\int_0^{a_t} r^{N-1}u_t'\varphi_1 = \varphi_1(a_t)u_t(a_t)a_t^{N-1} - (N-1)\int_0^{a_t}\varphi_1 u_t r^{N-2} - \int_0^{a_t}\varphi_1' u_t r^{N-1}.
$$

Por lo tanto, juntando las expresiones (4.22) y (4.23) en (4.21), obtenemos la siguiente igualdad:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_t^3(a_t)a_t^{N-1}}{3} = -\frac{(N-1)}{2}\int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2} - t\int_0^{a_t}\varphi_1' u_t r^{N-1} - t(N-1)\int_0^{a_t}\varphi_1 u_t r^{N-2} \\
+ t\varphi_1(a_t)u_t(a_t)a_t^{N-1} + \frac{N-1}{3}\int_0^{a_t} u_t^3 r^{N-2}.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Multiplicando la ecuación (4.20) por $u_t r^{N-2}$ e integrando de 0 a a_t, obtenemos

$$
-\int_0^{a_t}\frac{(r^{N-1}u_t')'u_t}{r} = \int_0^{a_t} u_t^3 r^{N-2} - t\int_0^{a_t}\varphi_1 u_t r^{N-2},
$$

y como

$$
\frac{(r^{N-1}u_t')'u_t}{r} = (\frac{r^{N-1}u_t'u_t}{r})' - (u_t')^2 r^{N-2} + \frac{u_t'u_t r^{N-2}}{r},
$$

entonces

$$
\int_0^{a_t} u_t^3 r^{N-2} = t\int_0^{a_t}\varphi_1 u_t r^{N-2} + \int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2} - \int_0^{a_t}\frac{u_t'u_t r^{N-2}}{r},
$$

recordando que $u_t < 0$ en $(0, d_t)$, $u_t > 0$ en (d_t, a_t) y $u_t' > 0$ en $(0, a_t)$, de la igualdad anterior, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\int_0^{a_t} u_t^3 r^{N-2} < t \int_0^{a_t} \varphi_1 u_t r^{N-2} + \int_0^{a_t} (u_t')^2 r^{N-2} - \int_0^{d_t} \frac{u_t' u_t r^{N-2}}{r}. \tag{4.25}$$

Ahora, dado que u_t satisface (P_t^*), tenemos la siguiente igualdad

$$-\int_0^{d_t} \frac{u_t' u_t r^{N-2}}{r} = \frac{1}{N-1} \int_0^{d_t} (u_t'' + u_t^2 - t\varphi_1) u_t r^{N-2} \tag{4.26}$$

y como

$$u_t'' u_t r^{N-2} = (u_t' u_t r^{N-2})' - (u_t')^2 r^{N-2} - (N-2) \frac{u_t' u_t r^{N-2}}{r}, \tag{4.27}$$

y $u_t(d_t) = u_t'(0) = 0$, se tiene que, por las identidades (4.26) y (4.27), obtenemos

$$-\int_0^{d_t} \frac{u_t' u_t r^{N-2}}{r} = \frac{-1}{N-1} \left(\int_0^{d_t} (u_t')^2 r^{N-2} - (N-2) \int_0^{d_t} \frac{u_t'}{r} u_t r^{N-2} + \int_0^{d_t} (u_t^2 - t\varphi_1) u_t r^{N-2} \right),$$

así pues

$$-\int_0^{d_t} \frac{u_t' u_t r^{N-2}}{r} = -\int_0^{d_t} (u_t')^2 r^{N-2} + \int_0^{d_t} u_t^3 r^{N-2} - t \int_0^{d_t} \varphi_1 u_t r^{N-2}.$$

Como $u_t < 0$ en $(0, d_t)$, tenemos que por la ecuación anterior y la desigualdad (4.25)

$$\begin{aligned} \int_0^{a_t} u_t^3 r^{N-2} &< t \int_0^{a_t} \varphi_1 u_t r^{N-2} + \int_0^{a_t} (u_t')^2 r^{N-2} - \int_0^{d_t} (u_t')^2 r^{N-2} + \int_0^{d_t} u_t^3 r^{N-2} - t \int_0^{d_t} \varphi_1 u_t r^{N-2} \\ &< t \int_0^{a_t} \varphi_1 u_t r^{N-2} + \int_0^{a_t} (u_t')^2 r^{N-2} - t \int_0^{d_t} \varphi_1 u_t r^{N-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la ecuación (4.24):

$$
\begin{aligned}
\frac{u_t^3(a_t)a_t^{N-1}}{3} &= -\frac{(N-1)}{2}\int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2} - t\int_0^{a_t}\varphi_1' u_t r^{N-1} - t(N-1)\int_0^{a_t}\varphi_1 u_t r^{N-2} \\
&\quad + \varphi_1(a_t)u_t(a_t)a_t^{N-1} + \frac{(N-1)}{3}\int_0^{a_t} u_t^3 r^{N-2} \\
&\leq -\frac{(N-1)}{6}\int_0^{a_t}(u_t')^2 r^{N-2} - \frac{2t(N-1)}{3}\int_0^{a_t}\varphi_1 u_t r^{N-2} - t\int_0^{a_t}\varphi_1' u_t r^{N-1} \\
&\quad + t\varphi_1(a_t)u_t(a_t)a_t^{N-1} - \frac{t(N-1)}{3}\int_0^{d_t}\varphi_1 u_t r^{N-2} \\
&\leq -\frac{2t(N-1)}{3}\int_0^{a_t}\varphi_1 u_t r^{N-2} - t\int_0^{a_t}\varphi_1' u_t r^{N-1} \\
&\quad + t\varphi_1(a_t)u_t(a_t)a_t^{N-1} - \frac{t(N-1)}{3}\int_0^{d_t}\varphi_1 u_t r^{N-2},
\end{aligned}
$$

así entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{u_t^3(a_t)a_t^{N-1}}{3} &\leq \frac{2t(N-1)}{3}(\|\varphi_1\|_\infty \|u_t\|_\infty \frac{{a_t}^{N-1}}{N-1}) + t(\|\varphi_1\|_\infty \|u_t\|_\infty a_t^{N-1}) \\
&\quad + t(\|\varphi_1\|_\infty \|u_t\|_\infty a_t^{N-1}) + \frac{t(N-1)}{3}(\|\varphi_1\|_\infty \|u_t\|_\infty \frac{{a_t}^{N-1}}{N-1}),
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, recordando que $\|u_t\|_\infty = u_t(a_t)$, tenemos que dividiendo entre $u_t(a_t)a_t^{n-1}$ y multiplicando por tres:

$$
\begin{aligned}
\|u_t\|_\infty^2 = u^2(a_t) &\leq 2t\|\varphi_1\|_\infty + \frac{t}{N}(\|\varphi_1\|_\infty a_t) + 3t\|\varphi_1\|_\infty + t\|\varphi_1\|_\infty \\
&\leq 2t\|\varphi_1\|_\infty + t(\|\varphi_1\|_\infty) + 3t\|\varphi_1\|_\infty + t\|\varphi_1\|_\infty = 7t.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene el resultado buscado. ■

Lema 4.24 *Sea $T \subset (0,\infty)$ no acotado tal que, para todo $t \in T$, el problema (P_t) tiene una solución u_t como en (4.19) tal que $\mu(u_t) \leq 1$. Entonces*

$$\sup_{t\in T} d_t = 1.$$

Demostración: Por el Lema 4.17, sabemos que

$$\sup_{t\in T} a_t = 1.$$

Supongamos que

$$d := \sup_{t\in T} d_t < 1.$$

Sean (d_{t_n}) sucesión tal que $d_{t_n} \to d$ y (a_{t_n}) sucesión tal que $a_{t_n} \to 1$, con $(t_n) \subset T$ y $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $d + \varepsilon < 1 - 2\varepsilon < 1 - \varepsilon$. Como $a_{t_n} \to 1$ cuando $n \to \infty$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_{t_n} \in (1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1) \quad \forall n \geq K.$$

Primero demostremos lo siguiente: existe $R > 0$ con la siguiente propiedad

$$0 < u_{t_n}(1 - \varepsilon) \leq R \quad \forall n \geq K.$$

En caso contrario, se tendría $u_{t_n}(1-\varepsilon) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, notemos que, como $1 - \frac{\varepsilon}{2} < a_{t_n}$ y $u'_{t_n} \geq 0$ en $[0, a_{t_n}]$ para toda $n \geq K$, tenemos que

$$0 \leq u_{t_n} \to \infty \ \forall r \ \in (1-\varepsilon, 1 - \frac{\varepsilon}{2}) \text{ cuando } n \to \infty$$

y por lo tanto $u_{t_n} \to \infty$ uniformemente en

$$\left\{ x \in \Omega \mid 1 - \varepsilon < |x| < 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

análogamente a la prueba de (4.15) del Lema 4.21, podemos concluir que $\mu(u_{t_n}) \geq 2$, una contradicción a que $t_n \in T$. Por lo tanto, existe $R > 0$ tal que

$$u_{t_n}(r) \leq u_{t_n}(1-\varepsilon) \leq R \quad \forall n \geq K \text{ y } \forall r \in (0, 1-\varepsilon).$$

Sea $M > 0$ tal que

$$\|u_t\|_\infty \leq \sqrt{t} M \quad \forall t \in T$$

y sea

$$\delta := \int_{d+\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \varphi_1 r^{N-1} > 0.$$

Probaremos que existe $r_{t_n,1} \in (d, d+\varepsilon)$ tal que

$$0 < u'_{t_n}(r_{t_n,1}) < \frac{\delta}{2} t_n \quad \forall n \geq K.$$

Argumentando por contradicción, supongamos que para toda $r \in (d, d+\varepsilon)$

$$u'_{t_n} \geq t_n \frac{\delta}{2},$$

como

$$u_{t_n}(d+\varepsilon) - u_{t_n}(d) = \int_d^{d+\varepsilon} u'_{t_n} \geq t_n \varepsilon \frac{\delta}{2} \quad \forall n \geq K,$$

y como $u_{t_n}(d) \geq 0$ $(d \geq d_{t_n})$, tenemos que

$$M\sqrt{t_n} \geq u_{t_n}(d+\varepsilon) \geq t_n \varepsilon \frac{\delta}{2} \quad \forall n \geq K,$$

lo cual es imposible, pues dividiendo entre t_n y tendiendo $n \to \infty$, tendríamos que $\varepsilon\delta = 0$. Por lo tanto, existe $r_{t_n,1} \in (d, d+\varepsilon)$ tal que

$$0 < u'_{t_n}(r_{t_n,1}) < \frac{\delta}{2} t_n \quad \forall n \geq K$$

De la misma manera, podemos demostrar que existe $r_{t_n,2} \in (1-2\varepsilon, 1-\varepsilon)$ tal que

$$0 < u'_{t_n}(r_{t_n,2}) < \frac{\delta}{2} t_n \quad \forall n \geq K.$$

Sabemos que u_{t_n} satisface:

$$(r^{N-1} u'_{t_n}(r))' = (u^2_{t_n}(r) - t_n \varphi_1(r)) r^{N-1}$$

integrando esta igualdad de $r_{t_n,1}$ a $r_{t_n,2}$ tenemos

$$r^{N-1}_{t_n,1} u'_{t_n}(r_{t_n,1}) - r^{N-1}_{t_n,2} u'_{t_n}(r_{t_n,2}) = \int_{r_{t_n,1}}^{r_{t_n,2}} u^2_{t_n}(r) r^{N-1} - t_n \int_{r_{t_n,1}}^{r_{t_n,2}} \varphi_1(r) r^{N-1}.$$

Dividiendo entre t_n y recordando que $r_{t_n,1} \in (d, d+\varepsilon)$, $r_{t_n,2} \in (1-2\varepsilon, 1-\varepsilon)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
-\frac{\delta}{2} &< \frac{r^{N-1}_{t_n,1} u'_{t_n}(r_{t_n,1})}{t_n} - \frac{r^{N-1}_{t_n,2} u'_{t_n}(r_{t_n,2})}{t_n} \\
&= \frac{1}{t_n} \int_{r_{t_n,1}}^{r_{t_n,2}} u^2_{t_n}(r) r^{N-1} - \int_{r_{t_n,1}}^{r_{t_n,2}} \varphi_1(r) r^{N-1} \leq \frac{R^2}{t_n} - \int_{d+\varepsilon}^{1-2\varepsilon} \varphi_1 r^{N-1} = \frac{R^2}{t_n} - \delta,
\end{aligned}$$

por lo tanto, haciendo tender $n \to \infty$, tenemos que

$$-\frac{\delta}{2} < -\delta,$$

una contradicción. ■

Lema 4.25 *Sea $T \subset (0,\infty)$ no acotado tal que, para todo $t \in T$, el problema (P_t) tiene una solución u_t como en (4.19) tal que $\mu(u_t) \leq 1$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\tau > 0$ tal que*

$$\left|\frac{u'(r)}{t}\right| < \varepsilon \quad \forall r \in [d_t, 1] \text{ y } \forall t \geq \tau,\ t \in T.$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Sea $M > 0$ tal que

$$\|u_t\|_\infty \leq \sqrt{t}M.$$

Por el Lema 4.24, sabemos que existe $\tau > 0$ tal que

$$a_t - d_t \leq 1 - d_t < \varepsilon\frac{n}{M^2} \text{ y } d_t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \forall t \geq \tau,\ t \in T.$$

Recordemos que u_t satisface

$$-(r^{N-1}u_t')' = (u_t^2 - t\varphi_1)r^{N-1}.$$

Si $r \in [a_t, 1]$, integrando de a_t a r

$$\begin{aligned}
-r^{N-1}u_t'(r) &= \int_{a_t}^{r} u_t^2 s^{N-1} - t\int_{a_t}^{r} \varphi_1 s^{N-1} \leq \int_{a_t}^{r} u_t^2 s^{N-1} \\
&\leq tM^2 \int_{a_t}^{r} s^{N-1} \leq \frac{tM^2}{N}(1-a_t) < t\varepsilon \quad \forall t \geq \tau,\ t \in T
\end{aligned}$$

y por lo tanto como $u_t'(r) \leq 0$, tenemos que

$$\frac{|u_t'(r)|}{t} < \varepsilon\frac{1}{r^{N-1}} \leq \varepsilon\,(2)^{N-1} \quad \forall t \geq \tau,\ t \in T.$$

Por otro lado, si $r \in [d_t, a_t]$, integrando ahora desde r a a_t

$$
\begin{aligned}
r^{N-1}u_t'(r) &= \int_r^{a_t} u_t^2 s^{N-1} - t\int_r^{a_t} \varphi_1 s^{N-1} \\
&\leq \int_r^{a_t} u_t^2 s^{N-1} \leq \frac{tM^2}{n}\int_r^{a_t} s^{N-1} \leq \frac{tM^2}{N}(a_{t_0} - r) < t\varepsilon \quad \forall t \geq \tau,\ t \in T,
\end{aligned}
$$

así entonces

$$\frac{|u_t'(r)|}{t} < \varepsilon\frac{1}{r^{N-1}} \leq \varepsilon\,(2)^{N-1} \quad \forall t \geq \tau,\ t \in T.$$

Por lo tanto

$$\frac{|u_t'(r)|}{t} < \varepsilon\frac{1}{r^{N-1}} \leq \varepsilon\,(2)^{N-1} \quad \forall r \in [d_t, 1] \text{ y } \forall t \geq \tau,\ t \in T.$$

■

Lema 4.26 *Sea $T \subset (0, \infty)$ no acotado tal que, para todo $t \in T$, el problema (P_t) tiene una solución u_t como en (4.19) tal que $\mu(u_t) \leq 1$, entonces, existe $\tau > 0$ tal que para toda $t \in T$, $t \geq \tau$, la función $F_t : [d_t, 1] \to \mathbb{R}$, dada por:*

$$F_t(r) := -u_t^2(r)r^2 - t\varphi_1(r)r^2 + (N-1)u_t(r) \quad \forall r \in [d_t, 1],$$

es menor que cero en $(d_t, 1)$.

Demostración: Sea $\varepsilon_0 := -\varphi_1'(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$. Por el Lema 4.24, existe $t_0 > 0$ tal que

$$(d_t, 1) \subset \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \quad \forall t \geq t_0,\ t \in T.$$

Por los lemas 4.24 y 4.25, y dado que T no es acotado, existe $\tau \geq t_0 > 0$ tal que

$$
\begin{gathered}
\frac{u'(1)}{t} < \frac{\varphi'(1)}{N-1}\ , \ \frac{(N-1)u_t'(r)}{t} < \frac{\varepsilon_0}{3}, \\
\frac{2(16)(\sqrt{3})}{9(2)t} < \frac{\varepsilon_0}{3},\ 2\frac{(\sqrt{3})}{2}\varphi_1(r) < \frac{\varepsilon_0}{3}\ \forall r \in (d_t, 1),\ \forall t \geq \tau,\ t \in T.
\end{gathered}
\tag{4.28}
$$

Observa que, si $u_t(r) \geq \frac{4}{3}(N-1)$ para alguna $r \in (d_t, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} F_t(r) &= -u_t^2(r)r^2 - t\varphi_1(r)r^2 + (N-1)u_t(r) \\ &\leq -r^2(\frac{4}{3})^2(N-1)^2 - t\varphi_1(r)r^2 + (N-1)u_t(r) \\ &\leq -(\frac{3}{4})(\frac{4}{3})^2(N-1)^2 - t\varphi_1(r)r^2 + (N-1)u_t(r) \\ &= -\frac{4}{3}(N-1)^2 - t\varphi_1(r)r^2 + (N-1)u_t(r) \\ &< -t\varphi_1(r)r^2 < 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, si existe $r \in (d_t, 1)$, tal que $F_t(r) \geq 0$, entonces

$$0 < u_t(r) < \frac{4}{3}(N-1). \tag{4.29}$$

Nota que $F_t(d_t) < 0$ ya que $u_t(d_t) = 0$, y también, claramente $F_t(1) = 0$. Probaremos primero que $F_t'(1) > 0$ para toda $t \in T$, con $t \geq \tau$, para esto, notemos que

$$F_t'(r) = -2u_t(r)u_t'(r)r^2 - 2ru_t(r)^2 - t\varphi_1'(r)r^2 - 2tr\varphi_1(r) + (N-1)u_t'(r),$$

y por lo tanto

$$F_t'(1) = -t\varphi_1'(1) + (N-1)u_t'(1).$$

Como

$$\frac{F_t'(1)}{t} = -\varphi_1'(1) + (N-1)\frac{u_t'(1)}{t},$$

por (4.28), vemos que para toda $t \in T$,con $t \geq \tau$, $F_t'(1) > 0$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe $\widehat{t} \in T$, con $\widehat{t} \geq \tau$, tal que $F_{\widehat{t}}$ cambia de signo en $[d_{\widehat{t}}, 1]$. Por lo tanto, como $F_{\widehat{t}}(1) = 0$ y $F_{\widehat{t}}'(1) > 0$, tenemos que $F_{\widehat{t}} < 0$ en algún intervalo $(1-\delta, 1)$. Así, dado que $F_{\widehat{t}}(d_{\widehat{t}}) < 0$ y $F_{\widehat{t}} < 0$ en algún intervalo $(1-\delta, 1)$, como $F_{\widehat{t}}$ cambia de signo, deben existir $r_{\widehat{t},1}, r_{\widehat{t},2} \in (d_{\widehat{t}}, 1)$ con $r_{\widehat{t},1} < r_{\widehat{t},2}$, tales que

$$F_{\widehat{t}}(r_{\widehat{t},1}) = F_{\widehat{t}}(r_{\widehat{t},2}) = 0 \quad \text{ y } \quad F_{\widehat{t}}'(r_{\widehat{t},1}) \geq 0,\ F_{\widehat{t}}'(r_{\widehat{t},2}) \leq 0.$$

Definimos

$$A_t := \left\{ r \in [d_t, 1] \mid u_t(r) \leq \frac{4}{3}(N-1) \right\} \ \forall t \in T,\ t \geq \tau,$$

Nota que por (4.29), $r_{\widehat{t},1}, r_{\widehat{t},2} \in A_{\widehat{t}}$.

Demostraremos que para $t \in T$, con $t \geq \tau$, se tiene que

$$F_t'(r) > 0 \quad \forall r \in A_t,$$

contradiciendo la existencia de $r_{t,1}, r_{t,2} \in A_t$. Sea $t \geq \tau$, con $t \in T$, y $r \in A_t$, como

$$\frac{F_t'(r)}{t} = -\frac{2u_t(r)u_t'(r)r^2}{t} - \frac{2ru_t(r)^2}{t} - \varphi_1'(r)r^2 - 2r\varphi_1(r) + (N-1)\frac{u_t'(r)}{t},$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{F_t'(r)}{t} \geq& -\frac{(N-1)2(4)u_t'(r)r^2}{3t} - \frac{(N-1)^2 2(16)r}{9t} \\ &- \varphi_1'(r)r^2 - 2r\varphi_1(r) + (N-1)\frac{u_t'(r)}{t}.\end{aligned}$$

Por esto último, observa que

$$\frac{F_t'(r)}{t} > 0, \quad r \in A_t$$

si y sólo si

$$\begin{aligned}- \varphi_1'(r)r^2 >& \frac{2(4)(N-1)u_t'(r)r^2}{3t} + \frac{(N-1)^2 2(16)r}{9t} \\ &+ 2r\varphi_1(r) - (N-1)\frac{u_t'(r)}{t} \\ &\geq \frac{2(N-1)(4)(3)u_t'(r)}{(3)(4)t} + \frac{2(N-1)^2(16)(\sqrt{3})}{9(2)t} \\ &+ 2\frac{(\sqrt{3})}{2}\varphi_1(r) - (N-1)\frac{u_t'(r)}{t} \\ &= \frac{(N-1)u_t'(r)}{t} + \frac{2(N-1)^2(16)(\sqrt{3})}{9(2)t} + 2\frac{(\sqrt{3})}{2}\varphi_1(r) \quad \forall r \in A_t.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Nota que, como $-\varphi_1'(r)r^2 > -\varphi_1'(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \varepsilon_0$ para toda $r \in (d_t, 1)$, por (4.28)

$$\begin{aligned}-\varphi_1'(r)r^2 &> -\varphi_1'(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \varepsilon_0 \\ &> \frac{(N-1)u_t'(r)}{t} + \frac{2(N-1)^2(16)(\sqrt{3})}{9(2)t} + 2\frac{(\sqrt{3})}{2}\varphi_1(r) \quad \forall r \in (d_t, 1),\end{aligned}$$

en consecuencia, por (4.30)

$$\frac{F_t'(r)}{t} > 0 \quad \forall r \in A_t \text{ y } \forall t \geq \tau,\ t \in T,$$

que como lo mencionamos anteriormente, contradice la existencia $r_{\hat{t},1}, r_{\hat{t},2} \in A_{\hat{t}}$. Por lo tanto, existe $\tau > 0$, tal que

$$F_t(r) < 0 \quad \forall r \in [d_t, 1] \text{ y } \forall t \geq \tau,\ t \in T.$$

■

Demostración de la Proposoción 4.7. Si suponemos que la Proposición 4.7 es falsa, por el Lema 4.22, debe de existir un conjunto $T \subset (0, \infty)$ no acotado, tal que para todo $t \in T$, existe u_t solución de (P_t) que satisface (4.19), y tal que $\mu(u_t) \leq 1$.

Para toda $t \in T$, definimos $w_t : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$w_t(x) := \begin{cases} \frac{u_t(|x|)x_N}{|x|} & \text{si } x \in \Omega_{1,t} := \{x \in \Omega \mid d_t < |x| < 1\}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observa que $w_t \in H_0^1(\Omega)$. Sea $f_t : [d_t, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f_t(r) := \int_{d_t}^{r} u_t ds \quad \forall r \in [d_t, 1]$$

y sea $g_t : \Omega_{1,t} \to \mathbb{R}$ como $g_t(x) := f_t(|x|)$, notemos que

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_N} = w_t,$$

por esta razón, dado que g_t es de clase $C^3(\Omega_{1,t})$, tenemos que

$$\Delta w_t = \Delta \frac{\partial g_t}{\partial x_N} = \frac{\partial}{\partial x_N}(\Delta g_t). \tag{4.31}$$

Calculemos Δg_t, como

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_i}(x) = \frac{f_t'(|x|)x_i}{|x|} = \frac{u_t(|x|)x_i}{|x|} \quad \forall i \in \{1, ...N\},$$

vemos que

$$\frac{\partial^2 g_t}{\partial x_i^2}(x) = \frac{1}{|x|}u_t(|x|) - \frac{x_i^2}{|x|^3}u_t(|x|) + \frac{x_i^2}{|x|^2}u_t'(|x|) \quad \forall i \in \{1, ...N\},$$

y por lo tanto

$$\Delta g_t(x) = \frac{(N-1)}{|x|}u_t(|x|) - u_t'(|x|) \quad \forall x \in \Omega_{1,t}.$$

Por lo tanto, por (4.31)

$$\begin{aligned}
\Delta w_t(x) &= \frac{\partial}{\partial x_N}(\Delta g)(x)\\
&= \frac{(N-1)}{|x|}u_t'(|x|)x_N - u_t''(|x|)\frac{x_N}{|x|} - (N-1)u_t(|x|)\frac{x_N}{|x|^3}\\
&= \frac{x_N}{|x|}\Delta u + (N-1)u_t(x)\frac{x_N}{|x|^3}\\
&= \frac{x_N}{|x|}(t\varphi_1 - u_t^2) - (N-1)u_t(x)\frac{x_N}{|x|^3}\ \forall x \in \Omega_{1,t}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $t \in T$, w_t satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} -\Delta w_t(x) = (2u_t)w_t(x) - \frac{u_t^2 x_N}{|x|} - \frac{t\varphi_1 x_N}{|x|} + (N-1)\frac{u_t x_N}{|x|^3} & \text{en } \Omega_{1,t},\\ \\ 0 & \text{sobre } \partial\Omega_{1,t}. \end{cases} \tag{4.32}$$

Por la demostración del Lema 4.22, sabemos que la función $u_t^+ \in H_0^1(\Omega)$, definida como

$$u_t^+(x) := \begin{cases} u_t(x) & \text{si } x \in \Omega_{1,t},\\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

satisface

$$I_t''(u_t)(u_t^+, u_t^+) < 0,$$

Veamos que para $t \in T$ suficientemente grande,

$$I_t''(u_t)(w_t, w_t) < 0.$$

Por el Lema 4.26, existe $\tau > 0$, tal que

$$F_t(|x|) = -u_t^2(|x|)\,|x|^2 - t\varphi_1(|x|)\,|x|^2 + (N-1)u_t(|x|) < 0 \quad \forall x \in \Omega_{1,t} \text{ y } \forall t \geq \tau,\ t \in T,$$

y por lo tanto, por la ecuación (4.32), obtenemos

$$\begin{aligned}
I_t''(u_t)(w_t, w_t) &= -\int_\Omega (\Delta w_t)w_t - 2\int_\Omega w_t^2 u_t = -\int_{\Omega_1}(\Delta w_t)w_t + 2\int_{\Omega_1} w_t^2 u_t\\
&= \int_{\Omega_{1,t}} ((2u_t)w_t(x) - \frac{u_t^2 x_N}{|x|} - \frac{t\varphi_1 x_N}{|x|} + \frac{(N-1)u_t x_N}{|x|^2})w_t + 2\int_{\Omega_{1,t}} w_t^2 u_t\\
&= \int_{\Omega_{1,t}} \frac{u_t x_N^2}{|x|^4}(-u_t^2\,|x|^2 - t\varphi_1\,|x|^2 + (N-1)u_t) < 0\\
&= \int_{\Omega_{1,t}} \frac{u_t x_N^2}{|x|^4} F_t(|x|) < 0 \quad \forall t \geq \tau,\ t \in T.
\end{aligned}$$

así pues
$$I_t''(u_t)(w_t, w_t) < 0 \quad \forall t \geq \tau,\ t \in T.$$

Análogamente a la prueba de (4.18) del Lema 4.22, se prueba que

$$I_t''(u_t)(u_t^+, w_t) = \int_\Omega \nabla u_t^+ \cdot \nabla w_t - 2 \int_\Omega (u_t^+)^2 w_t = 0$$

por lo tanto, $\mu(u_t) \geq 2$ para $t \in T$, tal que $t \geq \tau$, una contradicción a que $\mu(u_t) \leq 1$ para toda $t \in T$. ■

Bibliografía

[1] N. Ackermann, El lujo del flujo y teoremas minimax en el cálculo de variedades, notas del minicurso impartido en la Escuela de Verano en Ecuaciones Diferenciales Parciales, 6-10 de Junio de 2011, Instituto de Matemáticas, UNAM. http://www.matem.unam.mx/festin2011/.

[2] H. Amann, On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, Indiana University Mathematics Journal **21** (1971), 125-146.

[3] H. Amann, Ordinary Differential Equations, de Gruyter Studies in Math. 13, Walter de Gruyter, Berlin-New York 1990.

[4] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[5] H. Brezis, Análisis Funcional, Alianza Editorial, Madrid 1984.

[6] M. Clapp, Introducción al Análisis Real, notas de curso, http://www.matem.unam.mx/mclapp/cursos/.

[7] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence RI 1998.

[8] G. Fang, N. Ghossoub, Second order information on Palais-Smale sequences in the mountain pass theorem, Manuscripta mathematica **75** (1992), 81-96.

[9] D.G. de Figueiredo, P.N. Srikanth, S. Santra, Non-radially symmetric solutions for a superlinear Ambrosetti-Prody type in a ball, Communications in Contemporary Mathematics **7** (2005), 849-866.

[10] B. Gidas, W. M. Ni, L. Niremberg, Symmetries and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68 (1979),** 209-243.

[11] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2001.

[12] M. Struwe, Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2008.

[13] M. Willem, Minimax theorems, Birkhäuser 1996.