Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Medidas de Riesgo Dinámicas Convexas

T E S I S

que para obtener el grado de:

Actuario

presenta:

Irvin Alí Ortega Medina

director de tesis:

Dra. Ana Meda Guardiola

Ciudad Universitaria Mayo, 2013

Medidas de Riesgo Dinámicas Convexas

por

Irvin Alí Ortega Medina

Tesis presentada para obtener el grado de

Actuario

en el

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria. Mayo, 2013

(i) Datos del alumno

Ortega

Medina

Irvin Alí

58 47 11 29

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Actuaría

305146933

(ii) Datos del tutor

Dra.

Ana

Meda

Guardiola

(iii) Datos del sinodal 1

Dra.

María Asunción Begoña

Fernández

Fernández

(iv) Datos del sinodal 2

Dr.

Mogens

Bladt

Petersen

(v) Datos del sinodal 3

Dr.

Gerardo

Rubio

Hernández

(vi) Datos del sinodal 4

Dr.

Fernando

Baltazar

Larios

(vii) Datos del trabajo escrito

Medidas de riesgo dinámicas convexas

101 p.

2013

A los pilares de mi formación,
mis abuelos, Dimas y Virginia
y mis padres, Arturo y Elisa.
Al regalo de la vida,
mi hermana, Sayuri.

Agradecimientos

A Dios, por darme la vida y permitirme llegar hasta la culminación de este sueño y el inicio de muchos otros. Por iluminar mi mente y fortalecer mi ser para hacer posible este trabajo. Por haber puesto en mi camino a las personas idóneas para mi compañía, formación y aprendizaje durante esta etapa de mi vida.

A mi asesora, Dra. Ana Meda, a quien no solo le agradezco todo el apoyo, tiempo y dedicación para aclarar todas mis dudas, siempre al pendiente del desarrollo de esta tesis, sino también le agradezco todos los cursos de probabilidad que me impartió y de los que después me dejó ser parte como ayudante, y que gracias a ellos creció en mi un gran interés hacia la probabilidad y obtuve un excelente conocimiento.

A mis sinodales, Dra. Begoña Fernández, Dr. Mogens Bladt, Dr. Gerardo Rubio, Dr. Fernando Baltazar, todos de gran importancia, ejemplos a seguir, a los cuales les agradezco sus cursos, y la motivación para acercarme y profundizar en temas de las finanzas y la teoría del riesgo. Por sus comentarios y sugerencias para esta tesis.

A mis padres, Arturo Ortega y Elisa Medina, por todo su amor y apoyo incondicional de toda la vida, por proveerme de todo lo necesario para mis estudios y ser un gran ejemplo. También a mis abuelos, Dimas Medina y Virginia Pedraza, que de igual manera su amor y apoyo han sido de vital importancia para mi formación. A mi hermana Sayuri por su amor y comprensión, haciéndome amenos los ratos de redacción. En general agradezco a todos mis tíos, primos y primas por sus críticas y consejos de vida siempre viendo por mi bienestar. También agradezco a Bere, por todo el apoyo, compañía, paciencia y comprensión que me ha brindado desde las primeras clases de mi carrera hasta el final de esta tesis.

A mis amigos de la Facultad de Ciencias, personas que han influido fuertemente en lo que soy ahora. Les agradezco profundamente a cada uno de ustedes todos esos momentos memorables que pasamos durante los cuatro años de la licenciatura, todas esas alegrías, angustias y tristezas. Gracias por compartir esta importante etapa de su vida conmigo.

Y por último pero no menos importante doy gracias a mi Alma Máter la Universidad Nacional Autónoma de México, cuyo conocimiento brindado es de valor incalculable, y con orgullo podré decir que soy egresado de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

In my life I've loved them all...

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

El estudio y análisis del riesgo es de gran importancia. Cada día las empresas se enfrentan a riesgos financieros, como por ejemplo volatilidad del tipo de cambio de tasas de interés, el no pago de préstamos. El desarrollo de modelos probabilísticos ha ayudado a evaluar y a hacer frente a diversos escenarios de pérdidas financieras.

El desarrollo de medidas de riesgo surgió a partir de cuestiones sobre pérdidas máximas posibles en un cierto periodo de tiempo. Las medidas de riesgo son una herramienta para enfrentar el problema de medir el riesgo de una posición financiera, las cuales las podemos entender como el capital mínimo que es requerido para mantener en cierto sentido una estabilidad financiera de cierta institución. Esta idea es la motivación para el desarrollo de medidas de riesgo coherentes, pero como se verá, una desventaja que presentan las medidas de riesgo coherentes es que en la realidad se adaptan a menos modelos por la forma en que se comporta el riesgo, ya que en la mayoría de los casos el riesgo crece de una forma no lineal contradiciendo la homogeneidad positiva, propiedad de las medidas de riesgo coherentes. De ahí se parte para generalizar las medidas de riesgo y llegamos a medidas de riesgo convexas. El por qué generalizar aún más el marco de las medidas de riesgo convexas, es principalmente el uso de la información disponible. El medir el riesgo a través del tiempo, digamos del momento en que adquirimos cierta posición financiera al tiempo final de esta, presenta ventajas sobre medir el riesgo solamente en el momento inicial, ya que, durante este tiempo se puede tener información extra que modifica el riesgo de la posición financiera. Esta razón es suficiente para desarrollar la teoría de las medidas de riesgo dinámicas convexas.

En este trabajo se hace un desarrollo de medidas de riesgo, empezando por las que llamamos medidas de riesgo estáticas, después, estas las llevamos a un ambiente condicional, y terminamos en un ambiente dinámico. Como complementación se incluyen dos apéndices, el primero contiene las definiciones básicas para la comprensión del trabajo, para las cuales me he apoyado en libros como: [10] para la parte de álgebra lineal. [3], [15], [11], [12] y [18] para las definiciones de análisis, teoría de la medida y probabilidad. En el segundo apéndice se incluyen algunos resultados de tópicos como: convexidad, esperanza y esperanza condicional, convergencia, medidas de probabilidad absolutamente continuas, supremo e ínfimo esencial de una familia de variables aleatorias, análisis funcional y entropía. Para el desarrollo de algunos resultados de este segundo apéndice me basé en textos como: [12] para esperanza y esperanza condicional, [12] y [6] para convergencia, [4] para medidas de probabilidad absolutamente continuas, [5] y [9] para supremo e ínfimo esencial de una familia de variables aleatorias, y por último, [9] para análisis funcional y entropía, y [20] para martingalas y tiempos de paro. El desarrollo del trabajo por capítulos es como sigue:

En el capítulo 2 abordamos el problema de cuantificar el riesgo de una posición financiera, hacemos el desarrollo mostrando los resultados para poder llevar a cabo esta medición del riesgo de una manera estática, es decir, en cierto punto del tiempo antes del fin de una operación financiera, y veremos a las medidas de riesgo como un requerimiento de capital. Definiremos medida de riesgo y las clasificamos de acuerdo a ciertas propiedades, así también se desarrolla teoría sobre ciertos conjuntos de posiciones financieras que son desde cierto punto que se verá más adelante, aceptables. Introducimos algunos ejemplos y por útlimo damos una caracterización de las medidas de riesgo mediante medidas de probabilidad. Para el desarrollo de este capítulo nos basamos principalmente en [9].

En el capítulo 3 extendemos la definición de una medida de riesgo convexa a un marco condicional. Interpretamos que ahora tenemos información disponible antes del fin de la operación financiera, y se puede aprovechar para tener una mejor medición del riesgo, ya que este factor hace que se modifique. Caracterizamos a estas medidas de riesgo mediante sus conjuntos de aceptación y mostramos una representación de ellas mediante esperanzas condicionales y medidas de probabilidad. Damos una propiedad de regularidad y requerimientos de capital condicional. Para el desarrollo de este capítulo nos basamos principalmente en [5].

En el capítulo 4 llegamos al desarrollo de medidas de riesgo en un ambiente dinámico donde se generaliza a una sucesión de medidas de riesgo. A diferencia de una medida de riesgo estática que medimos el riesgo en un punto del tiempo de la posición X, en una medida de riesgo dinámica vamos a medir el riesgo en distintos puntos del tiempo antes del fin de la operación financiera, ya que, como ya sabemos, hay información disponible que altera la medición del riesgo de X. Conforme el tiempo pasa, la información cambia, y por lo tanto el riesgo de la posición X cambia. Se estudia el desarrollo de medidas de riesgo en un ambiente dinámico donde se realiza una sucesión de medidas de riesgo, ahora, no mediremos el riesgo en un solo punto del tiempo, como lo hacíamos en medidas de riesgo estáticas; en cambio, nos fijaremos en distintos puntos del tiempo antes de la fecha del fin de de la posición financiera X, ya que el riesgo puede ir cambiando a través del tiempo gracias a la información adicional disponible. Para este propósito, consideremos un conjunto finito de fechas $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ donde en cada una de estas fechas se mide el riesgo de la posición financiera que se pagará a tiempo T. Primero, introduciré una clase especial de medidas de riesgo, que son un ejemplo de medidas de riesgo convexas condicionales que no son coherentes, después se definen las medidas de riesgo dinámicas, y en particular las convexas; damos tres propiedades importantes que son: consistencia en el tiempo, recursividad y supermartingala. Se dan algunos resultados consecuencia de estas propiedades y, terminamos con un ejemplo de medida de riesgo dinámica utilizando la clase de medidas de riesgo entrópicas, con las que se inició este capítulo.

En el último capítulo se muestra una aplicación de las medidas de riesgo dinámicas. El objetivo es relacionar las medidas de riesgo dinámicas con soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás (tipo “backward”, BSDEs por sus siglas en inglés). Esta relación se utiliza al medir el riesgo de un inversionista que elabora un portafolio mediante bonos y acciones. La relación ente BSDEs y las medidas de riesgo dinámicas convexas la damos mediante un teorema que nos asegura que bajo ciertas condiciones sobre el *generador* de una BSDE y la solución de la BSDE obtenemos una medida de riesgo dinámica convexa. Nos basamos como referencia para el desarrollo de las primeras secciones de este capítulo en [2]. En la última sección, utilizamos algunos resultados de [1], nos situamos en un mercado financiero y nuestro objetivo es medir el riesgo de un intrumento financiero, que en este caso serán acciones, se ve cómo describir la dinámica del precio de este instrumento mediante una BSDE, y bajo las condiciones del teorema que nos da la relación entre medidas de riesgo y BSDEs encontramos una medida de riesgo dinámica convexa.

Capítulo 2

Medidas de riesgo estáticas.

En este primer capítulo abordamos el problema de cuantificar el riesgo de una posición financiera, hacemos el desarrollo mostrando los resultados para poder llevar a cabo esta medición del riesgo de una manera estática, es decir, en cierto punto del tiempo antes del fin de una operación financiera. Veremos a las medidas de riesgo como un requerimiento de capital.

Definiremos medida de riesgo y las clasificamos de acuerdo a ciertas propiedades, así también se desarrolla teoría sobre ciertos conjuntos de posiciones financieras que son desde cierto punto que se verá más adelante aceptables, y por útlimo damos una caracterización de las medidas de riesgo mediante medidas de probabilidad (ver A.18).

Para el desarrollo de este capítulo nos basamos principalmente en [9].

2.1. Medidas de riesgo.

Sea Ω un conjunto que interpretaremos como un conjunto de escenarios. Una posición financiera es descrita por una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donde $X(\omega)$ es el valor (descontado[1]) de cierta posición al finalizar el periodo de una operación financiera si el escenario $\omega \in \Omega$ es realizado.

Sea $\mathcal{X}$ el espacio que contiene a todas las posiciones financieras X. Supongamos que $\mathcal{X}$ es un espacio lineal (ver A.1) de funciones acotadas (ver A.7) que contiene a las constantes. Particularizando estos conceptos, en este caso el espacio $\mathcal{X}$ antes mencionado corresponde a L^∞ (definición A.27), y las posiciones financieras $X \in L^\infty$ son variables aleatorias (ver A.20).

[1]El valor descontado o valor presente es el valor en una cierta fecha de una cierta cantidad de dinero en el futuro. Ver [14] página 4.

Definición 2.1.1. (Medida de riesgo).

Una función $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es llamada medida de riesgo si para todo $X, Y \in L^\infty$ se cumple:

- *Monotonía.* Si $X \leq Y$ c.s., $\rho(Y) \leq \rho(X)$.
- *Invarianza con respecto a traslaciones.* Si $m \in \mathbb{R}$, entonces $\rho(X+m) = \rho(X) - m$.

A $\rho(X)$ lo entendemos como la cantidad de dinero que debería ser agregada a la posición financiera X de forma tal que sea aceptable desde el punto de vista de un organismo supervisor, esto es, estamos buscando la cantidad mínima de capital que, si la agregamos a una posición financiera y la invertimos, podemos estar cubiertos ante una pérdida (ver 2.1).

La monotonía nos dice que si tenemos dos posiciones financieras, una mayor que otra, habrá que agregar un mayor capital a la posición menor que a la mayor.

La invarianza con respecto a traslaciones vemos que si agregamos una cantidad m a la posición, entonces el capital requerido dado por la medida de riesgo ρ se reduce en esa misma cantidad m. En particular, la invarianza con respecto a traslaciones implica que

$$\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0 \quad \text{ya que } \rho(X) \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

por lo que si X es constante, digamos $X = m$,

$$\rho(m) = \rho(0) - m \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Suponemos que $\rho(X)$ cumple **normalización**, *i.e.* $\rho(0) = 0$.

Lema 2.1.2. Cualquier medida de riesgo ρ es Lipschitz continua con respecto a la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$ (ver A.8 y A.28), y

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty.$$

Demostración. Sean $X, Y \in L^\infty$. Por definición tenemos

$$X - Y \leq \|X - Y\|_\infty, \quad c.s.$$

Entonces $X \leq Y + \|X - Y\|_\infty$, por monotonía $\rho(Y + \|X - Y\|_\infty) \leq \rho(X)$, y por invarianza respecto a traslaciones, $\rho(Y) - \|X - Y\|_\infty \leq \rho(X)$, entonces $\rho(Y) - \rho(X) \leq \|X - Y\|_\infty$.

Ahora intercambiando X y Y, $\rho(X)-\rho(Y) \leq \|Y-X\|_\infty = \|X-Y\|_\infty$, entonces $\rho(X)-\rho(Y) \leq \|X-Y\|_\infty$.

Por lo tanto $|\rho(X)-\rho(Y)| \leq \|X-Y\|_\infty$. ■

Ahora definiremos una propiedad de mucha importancia para el desarrollo del tema, como se verá más delante en el ejemplo 2.2.1.

Definición 2.1.3. (Medida de riesgo convexa).

Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es una medida de riesgo convexa si para $X, Y \in L^\infty$ satisface la siguiente porpiedad:

- *Convexidad:*

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Podemos considerar dos posibles estrategias de inversión que nos llevan a X y a Y respectivamente, el invertir solamente λ en la primera estrategia y $(1-\lambda)$ en la segunda estrategia (es decir, al diversificar), la definición de convexidad nos asegura que el riesgo no incrementará, y justamente está acotado por λ veces el riesgo de X más $(1-\lambda)$ veces el riesgo de Y.

El siguiente resulatado nos motiva para una nueva definición. Si ρ es convexa y normalizada, entonces:

$$\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Es sencillo ver esto ya que ρ es convexa y tomando $Y = 0$,

$$\begin{aligned}\rho(\lambda X) &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)0) \\ &\leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(0).\end{aligned}$$

Por hipótesis $\rho(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\rho(\lambda X) &\leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)0 \\ &= \lambda\rho(X).\end{aligned}$$

Definición 2.1.4. (Medida de riesgo coherente).

Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es una medida coherente de riesgo si satisface

- *Homogeneidad positiva*: Si $\lambda \geq 0$ entonces $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$
- *Subaditividad*: Si, $X, Y \in L^\infty$ entonces $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Bajo el concepto de homogeneidad, la convexidad de ρ es equivalente a la *subaditividad*:

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Ya que, por convexidad y tomando $X = \lambda W$ y $Y = (1-\lambda)Z$

$$\begin{aligned}\rho(X+Y) &= \rho(\lambda W + (1-\lambda)Z)\\ &\leq \lambda\rho(W) + (1-\lambda)\rho(Z).\end{aligned}$$

Por el supuesto de homegeneidad positiva,

$$\begin{aligned}\rho(X+Y) &\leq \rho(\lambda W) + \rho(Z(1-\lambda))\\ &= \rho(X) + \rho(Y)\end{aligned}$$

La subaditividad indica que el riesgo de dos posiciones financieras sumadas está acotado por la suma del riesgo de cada una de ellas.

2.2. Ejemplo

Ejemplo 2.2.1. Supogamos que tenemos una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ definida en $(\Omega, \mathcal{F})$ espacio de probabilidad (ver A.19). Sea X variable aleatoria una posición financiera, sea F_X la función de distribución de X (ver A.21), y sea $F_X^-(\alpha)$, con $\alpha \in [0,1]$ la función inversa generalizada continua por la izquierda de la distribución, *i.e.* $F_X^-(\alpha) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha\}$. La medida de riesgo correspondiente se llama $V@R_\alpha$, y está definida de la siguiente forma:

$$V@R_\alpha(X) = -\,\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(X \leq m) \geq \alpha\}.$$

El signo menos se usa por conveniencia, para las propiedades de medida de riesgo, esto es,

$$V@R_\alpha(X) = -F_X^-(\alpha).$$

En primera instancia tenemos la sigiente proposición sobre la función inversa generalizada de la distribución F:

Proposición 2.2.2. Sea F_X función de distribución de X y F_X^- su inversa generalizada continua por la izquierda, y sean $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in [0,1]$, donde

$$F_X^-(\alpha) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha\}.$$

Entonces:

1. F_X^- es una función creciente.

2. $F_X^-(F_X(x)) \leq x$. Si F_X es estrictamente creciente, entonces $F_X^-(F_X(x)) = x$.

3. $F_X^-(\alpha) < \infty$ implica que $F_X(F_X^-(\alpha)) \geq \alpha$.

4. $F_X(x) \geq \alpha$ si y solo si $x \geq F_X^-(\alpha)$. Además, si $F_X(x) \leq \alpha$ entonces $x \leq F_X^-(\alpha)$, lo que implica que si $F_X(x) = \alpha$ entonces $x = F_X^-(\alpha)$.

Demostración.

1. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ tales que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, veamos que

$$F_X^-(\alpha_1) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_1\} \geq F_X^-(\alpha_2) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_2\} :$$

Sea $m^* \in \{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_2\}$, entonces $F_X(m^*) \geq \alpha_2 \geq \alpha_1$ lo que nos lleva a que $m^* \in \{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_1\}$, entonces $\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_2\} \subseteq \{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_1\}$, por lo que $\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_1\} \leq \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha_2\}$, esto es, $F_X^-(\alpha_1) \leq F_X^-(\alpha_2)$.

2. Por definición tenemos que

$$F_X^-(\alpha) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha\},$$

como F_X es función de distribución, entonces $F_X(x) \in [0,1]$, por lo que $F_X^-(F_X(x))$ está bien definida y, $F_X^-(F_X(x)) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq F_X(x)\} \leq x$ ya que $F_X(x)$ es no decreciente.

Para la segunda parte, notemos que si F_X es estrictamente creciente implica que no hay una $m < x$ con $F_X(x) \leq F_X(m)$ entonces $x \leq F_X^-(F_X(x))$, por lo tanto $F_X^-(F_X(x)) = x$.

3. Que $F_X^-(\alpha) \leq \infty$ implica que el conjunto $M = \{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha\} \neq \emptyset$; entonces, existe $(m_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ tal que m_n converge a $\inf M = F_X^-(\alpha)$ cuando n tiende a infinito. Por la continuidad por la derecha de F_X, $F_X(m_n) \geq \alpha$ y $F_X(m_n)$ convege a $F_X(F_X^-(\alpha))$ cuando n tiende a infinito, y entonces $F_X(F_X^-(\alpha)) \geq \alpha$.

4. La primera implicación se sigue claramente de la definición de F_X^-, ya que si $F_X(x) \geq \alpha$ entonces $x \geq \inf\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha\} = F_X^-(\alpha)$. Para la implicación de regreso tenemos por hipótesis que $F_X^-(\alpha) \leq x < \infty$, usando el resultado del inciso 3 y como F_X es creciente, tenemos que, $\alpha \leq F_X(F_X^-(\alpha)) \leq F_X(x)$ entonces $\alpha \leq F_X(x)$. Para la última parte, sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(x) \leq \alpha$ y m cualquier número real tal que $\alpha \leq F_X(m)$. Dado que F_X es creciente, $x \leq m$, entonces $x \leq \inf\{m \in \mathbb{R} | F_X(m) \geq \alpha\} = F_X^-(\alpha)$.

■

Probemos que el $V@R_\alpha$ es medida de riesgo. Sean $X, Y \in L^\infty$.

Monotonía.

Sea $x \in \mathbb{R}$, $X \leq Y$ y sean F_X y F_Y sus funciones de distribución respectivamente. Probemos que $V@R_\alpha(Y) \leq V@R_\alpha(X)$.

Demostración. Partiendo de

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > x, Y > x) + \mathbb{P}(X > x, Y \leq x).$$

Como $\mathbb{P}(X > x, Y \leq x) = 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > x, Y > x) \leq \mathbb{P}(Y > x)$.

Entonces $\mathbb{P}(X > x) \leq \mathbb{P}(Y > x)$, lo que implica que,

$$F_Y(x) \leq F_X(x).$$

Ahora, tomemos $m \in \{m \in \mathbb{R} | F_Y(m) \geq \alpha\}$, entonces $\alpha \leq F_Y(m) \leq F_X(m)$. Por lo tanto $m \in \{n \in \mathbb{R} | F_X(n) \geq \alpha\}$, lo que implica que $\{m \in \mathbb{R} | F_Y(m) \geq \alpha\} \subseteq \{n \in \mathbb{R} | F_X(n) \geq \alpha\}$. Entonces, $\inf\{n \in \mathbb{R} | F_X(n) \geq \alpha\} \leq \inf\{m \in \mathbb{R} | F_Y(m) \geq \alpha\}$, por lo tanto, $V@R_\alpha(Y) \leq V@R_\alpha(X)$. ■

Invarianza con respecto a traslaciones.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. Probemos que $V@R_\alpha(X+a) = V@R_\alpha(X) - a$. Si

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \alpha.$$

Entonces $\mathbb{P}(X + a \leq x + a) = \alpha$. Y por definición, $F_{X+a}(x+a) = \alpha$.

Por la propiedad (4) de la función inversa generalizada, $F_{X+a}^{-1}(\alpha) = x + a$. Entonces,$F_{X+a}^{-1}(\alpha) = F_X^{-1}(\alpha) + a$. Y, $-F_{X+a}^{-1}(\alpha) = -F_X^{-1}(\alpha) - a$. Por lo tanto, $V@R_\alpha(X+a) = V@R_\alpha(X) - a$. ■

Por lo tanto el $V@R_\alpha$ es una medida de riesgo.

Ahora veamos que es positiva homogénea. Necesitamos probar que $V@R_\alpha(aX) = aV@R_\alpha(X)$.

Demostración. Sea $a \geq 0 \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{P}(X \leq x) = \alpha$, entonces $\mathbb{P}(aX \leq ax) = \alpha$, y $F_{aX}(ax) = \alpha$.

Por la propiedad (4) de la función inversa generalizada,

$$F_{aX}^{-1}(\alpha) = ax.$$

Entonces,

$$F_{aX}^{-1}(\alpha) = aF_X^{-1}(\alpha).$$

Y así,

$$-F_{aX}^{-1}(\alpha) = a(-F_X^{-1}(\alpha)).$$

Por lo tanto,

$$V@R_\alpha(aX) = a(V@R_\alpha(X)).$$

■

Ahora, esta medida de riesgo no es coherente ya que la subaditividad puede ser violada como se muestra a continuación: Supongamos que un banco hace un préstamo de \$100 a un cliente cuya posición financiera la describimos con X, tiene una probabilidad de incumplimiento de 0.008, si $\alpha = .01$ entonces el $V@R_\alpha(X) = 0$ ya que $.008 < \alpha = .01$ por lo tanto no necesitamos agregar capital a la posición, por que es la probabilidad de incumplimiento es menor que la α que se da. Ahora supongamos que el mismo banco hace un préstamo de 50 a un cliente cuya posición financiera la describimos con X y 50 a un cliente cuya posición financiera la describimos con Y, con probabilidad de inclumplimiento independiente entre X y Y, y donde Y tiene la misma probabilidad de incumplimiento que X, entonces el $V@R_\alpha(X+Y) = 50$ ya que la probabilidad de que incumpla X o Y es igual a que inclumpla X más la que incumpla Y menos la probabilidad de que incumplan ambos, esto da igual a $0.015936 \geq \alpha$ y tenemos que cubrirnos con este capital, por lo que

$$50 = V@R_\alpha(X+Y) > (V@R_\alpha(X) + V@R_\alpha(Y)) = 0$$

Por lo que la subaditividad no se cumple.

Observación 2.2.3. Es importante notar que existe una clase de distribuciones para las cuales se cumple que el $V@R_\alpha$ es subaditivo, estas distribuciones son llamadas distribuciones elípticas, la caracterización para esta familia de distribuciones así como el teorema que nos garantiza que el $V@R_\alpha$ es subaditivo cuando se tiene una distribución de probabilidad elíptica lo podemos encontrar en [16] en la página 93 y el teorema 6.8 en la página 242 respectivamente.

Dentro de la clase de las distribuciones elípticas encontramos a la distribución normal, la distribución t-Student y la distribución logística entre otras. Por esta razón encontramos que esta medida de riesgo es utilizada, ya que el cálculo de ella bajo estas distribuciones no es complicado y cumple con ser subaditivo.

Observación 2.2.4. Una desventaja que presentan las medidas de riesgo coherentes es que en la realidad se adaptan a menos modelos por la forma en que se comporta el riesgo, ya que en la mayoría de los casos el riesgo crece de una forma no lineal contradiciendo la homogeneidad positiva de las medidas coherentes. Por lo que enfocamos este trabajo a las medidas de riesgo con la propiedad de convexidad, aunque no pediremos que sean coherentes, además, las medidas de riesgo convexas son las que nos garantizan que la diversificación no incrementa el riesgo.

2.3. Conjuntos de aceptación de medidas de riesgo estáticas.

Hasta ahora hemos definido las medidas de riesgo y clasificaciones, pero eso no nos dice aún cuándo una posición financiera debería o no ser aceptada. Una medida de riesgo ρ induce el conjunto

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in L^\infty | \rho(X) \leq 0\}$$

de posiciones que se aceptan en el sentido que no requieren un capital adicional. Llamaremos a $\mathcal{A}_\rho$ conjunto de aceptación de ρ. Este nuevo concepto será de gran utilidad, podremos recuperar nuestra medida de riesgo a partir de nuestro conjunto de aceptación y viceversa, observemos la estrecha relación entre estos dos con el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. Supongamos que ρ es una medida de riesgo con conjunto de aceptación $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\rho$,

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in L^\infty | \rho(X) \leq 0\}.$$

Entonces,

(a) $\mathcal{A}$ es no vacío, y satisface las siguientes dos condiciones:

$$\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} > -\infty, \quad \text{y} \tag{2.2}$$

$$\text{si } X \in \mathcal{A}, Y \in L^\infty, Y \geq X, \text{ implica } Y \in \mathcal{A}. \tag{2.3}$$

Además, $\mathcal{A}$ cumple la siguiente propiedad de cerradura: Si $X \in \mathcal{A}$ y $Y \in L^\infty$,

$$\{\lambda \in [0,1] | \lambda X + (1-\lambda) Y \in \mathcal{A}\} \textit{ es cerrado en el } [0,1]. \tag{2.4}$$

(b) La medida de riesgo ρ puede ser recuperada del conjunto de aceptación $\mathcal{A}$ de la siguiente forma:

$$\rho(X) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}$$

(c) ρ es medida de riesgo convexa si y solo si $\mathcal{A}$ es un conjunto convexo (ver A.2).

(d) ρ es positiva homogénea si y solo si $\mathcal{A}$ es un cono (ver A.3). En particular, ρ es coherente si y solo si $\mathcal{A}$ es un cono convexo.

Demostración. (a) Primero probaremos (2.2). Sabemos que la medida de riesgo ρ toma únicamente valores finitos. Notemos que

$$\begin{aligned}\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} &= \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | \rho(m) \leq 0\} \\ &= \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | \rho(0) - m \leq 0\} \\ &= \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | \rho(0) \leq m\} \\ &= \rho(0) > -\infty.\end{aligned}$$

Para la siguiente propiedad (2.3). Si $X \in \mathcal{A}, Y \in L^\infty, Y \geq X$ $c.s.$ entonces $\rho(X) \leq 0$, por hipótesis $Y \geq X$ y por la propiedad de monotonía $0 \geq \rho(X) \geq \rho(Y)$, por lo tanto $Y \in \mathcal{A}$. Para la última propiedad de este inciso (2.4), tenemos por el lema 2.1.2 que la función $\rho(X)$ es continua, y como la función $f(\lambda) = \lambda X + (1-\lambda)Y$ también es continua la composición de estas funciones $h(\lambda) = \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y)$ con $X, Y \in L^\infty$ es continua. Por otra parte sabemos que la función inversa de una función continua mapea conjuntos abiertos (ver definición en A.5) en conjuntos abiertos[2]. Tomando como imagen el intervalo abierto $(0, \infty)$ por lo anterior con la función h^{-1} regresamos a este conjunto en un subconjunto abierto en el $[0, 1]$, es decir, el conjunto $\{\lambda \in [0, 1] : \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) > 0\}$ es abierto. Entonces nos fijamos en el complemento del conjunto anterior que es un conjunto cerrado, es decir, el conjunto $\{\lambda \in [0, 1] : \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq 0\}$ es cerrado.

(b) Sea $X \in L^\infty$. Por la propiedad de invarianza a traslaciones:

$$\begin{aligned}\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}_\rho\} &= \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | \rho(m + X) \leq 0\} \\ &= \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | \rho(X) - m \leq 0\} \\ &= \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | \rho(X) \leq m\} = \rho(X).\end{aligned}$$

(c) Sea ρ es una medida de riesgo convexa. Sean $X, Y \in \mathcal{A}$ y $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$, $\lambda \in [0, 1]$. Probemos que $Z \in \mathcal{A}$.

$$\rho(Z) = \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

[2]Si $f : M \to N$ es una función continua y M y N espacios métricos (ver A.4). Sea A un conjunto abierto en N, entonces $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en M.

Como $X, Y \in \mathcal{A}$ entonces $\rho(X), \rho(Y) \leq 0$, lo que implica que $\rho(Z) \leq 0$, y por lo tanto $\rho(Z) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es convexo.

Si $\mathcal{A}$ es un conjunto convexo, sea $X, Y \in L^\infty$, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tal que $X + m_1, Y + m_2 \in \mathcal{A}$. Si $\lambda \in [0,1]$, entonces la convexidad de $\mathcal{A}$ implica que $\lambda(m_1 + X) + (1-\lambda)(m_2 + Y) \in \mathcal{A}$.

Así,

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \rho(\lambda(m_1 + X) + (1-\lambda)(m_2 + Y)) \\
&= \rho(\lambda m_1 + \lambda X + m_2 + Y - \lambda m_2 - \lambda Y) \\
&= \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y + \lambda m_1 + (1-\lambda)m_2) \\
&= \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) - (\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2).
\end{aligned}
$$

Tomando $m_1 = \rho(X)$ y $m_2 = \rho(Y)$,

$$\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \geq \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y).$$

Por lo tanto ρ es convexa.

(d) Demostraremos que $\mathcal{A}$ es un cono, entonces si $X \in \mathcal{A}$ entonces $\lambda X \in \mathcal{A}$, para todo $\lambda \geq 0$. Sean $X \in \mathcal{A}$ y $\lambda \geq 0$. Entonces $\rho(X) \leq 0$, y $\lambda\rho(X) \leq 0$, y por hipótesis $\lambda\rho(X) = \rho(\lambda X) \leq 0$. Por lo tanto $\lambda X \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda \geq 0$.

Si $\mathcal{A}$ es un cono, sean $X \in L^\infty, m \in \mathbb{R}$ tal que $X + m \in \mathcal{A}$, entonces $\lambda(X+m) \in \mathcal{A}$, $\lambda \geq 0$

$$0 \geq \rho(\lambda(X+m)) = \rho(\lambda X) - \lambda m.$$

Tomando $m = \rho(X)$,

$$\lambda\rho(X) \geq \rho(\lambda X).$$

Ahora tomemos $m \leq \rho(X)$, entonces $0 \leq \rho(X+m)$, lo cual implica que $X + m \notin \mathcal{A}$ y como $\mathcal{A}$

es un cono $\lambda(X+m) \notin \mathcal{A}, \lambda \geq 0$ entonces,

$$0 \leq \rho(\lambda(X+m)).$$
$$= \rho(\lambda X) - \lambda m.$$

Tomando $m = \rho(X)$,

$$\lambda\rho(X) \leq \rho(\lambda X).$$

Entonces,

$$\lambda\rho(X) = \rho(\lambda X).$$

Por lo tanto ρ es positiva homogénea.

■

En todo este desarrollo obtuvimos un criterio para obtener un conjunto de aceptación de posiciones financieras con una determinada medida de riesgo. Inversamente podemos tomar una clase de posiciones financieras aceptables $\mathcal{A} \subset L^\infty$. Para una posición $X \in L^\infty$ podemos definir el capital requerido como la mínima cantidad m para que $m + X$ sea aceptable:

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}.$$

Notemos que con la igualdad que demostramos,

$$\rho(X) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\},$$

$\rho_{\mathcal{A}_\rho}$ toma la siguiente forma

$$\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$$

Tenemos ciertas propiedades que se cumplen como lo vemos en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. Supongamos que $\mathcal{A}$ es un subconjunto no vacío de L^∞ que satisface

$$\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} > -\infty, \quad \text{y}$$

$$\text{si } X \in \mathcal{A}, Y \in L^\infty, Y \geq X, \text{ implica } Y \in \mathcal{A}.$$

Entonces la medida de riesgo

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\},$$

cumple las siguientes propiedades:

(a) $\rho_{\mathcal{A}}$ es una medida de riesgo.

(b) Si $\mathcal{A}$ es un conjunto convexo, entonces $\rho_{\mathcal{A}}$ es una medida convexa de riesgo.

(c) Si $\mathcal{A}$ es un cono, entonces $\rho_{\mathcal{A}}$ es positiva homogénea. En particular, si $\mathcal{A}$ es un cono convexo $\rho_{\mathcal{A}}$ es una medida coherente de riesgo.

(d) $\mathcal{A}$ es subconjunto de $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$. Si $\mathcal{A}$ satisface la propiedad de cerradura dada por: si $X \in \mathcal{A}$ y $Y \in L^{\infty}$, entonces

$$\{\lambda \in [0,1] | \lambda X + (1-\lambda) Y \in \mathcal{A}\} \textit{ es cerrado en el } [0,1]$$

entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$.

Demostración. (a) Para probar que $\rho_{\mathcal{A}}$ es medida de riesgo probaremos que es monótona, invariante respecto a traslaciones y que toma valores finitos.

Para mostrar que es monótona. Sea $X, Y \in L^{\infty}$ tal que $X \geq Y$. Entonces,

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}.$$

$$\rho_{\mathcal{A}}(Y) = \text{ínf}\{n \in \mathbb{R} | n + Y \in \mathcal{A}\}.$$

Sea $n \in \{n \in \mathbb{R} | n + Y \in \mathcal{A}\}$, entonces $n + X \geq n + Y$, lo que por hipótesis implica que $n + X \in \mathcal{A}$. Entonces

$$\{n \in \mathbb{R} | n + Y \in \mathcal{A}\} \subseteq \{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\}.$$

Por lo tanto,

$$\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}\} = \rho_{\mathcal{A}}(X) \leq \rho_{\mathcal{A}}(Y) = \text{ínf}\{n \in \mathbb{R} | n + Y \in \mathcal{A}\}.$$

Ahora, para demostrar invarianza respecto a traslaciones, mostraremos que para $a \in \mathbb{R},\ X \in L^\infty$ implica

$$\rho_{\mathcal{A}}(X+a) = \rho_{\mathcal{A}}(X) - a,$$

es decir,

$$\text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + (X+a) \in \mathcal{A}\} = \text{ínf}\{n - a \in \mathbb{R} | n + X \in \mathcal{A}\}.$$

Sea $n-a \in \{n-a \in \mathbb{R}|n+X \in \mathcal{A}\}$, y sea $m = n-a$ entonces, $(m+a)+X \in \mathcal{A}$ y $m+(X+a) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $n-a = m \in \{m \in \mathbb{R}|m+(X+a) \in \mathcal{A}\}$ y $\{n-a \in \mathbb{R}|n+X \in \mathcal{A}\} \subseteq \{m \in \mathbb{R}|m+(X+a)\}$.

Inversamente, sea $m \in \{m \in \mathbb{R}|m+(X+a) \in \mathcal{A}\}$, y sea $n = m+a$ entonces, $n+X \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $m = n-a \in \{n-a \in \mathbb{R}|n+X \in \mathcal{A}\}$ y $\{n-a \in \mathbb{R}|n+X \in \mathcal{A}\} \supseteq \{m \in \mathbb{R}|m+(X+a)\}$, tomando los ínfimos completamos la prueba.

Solamente nos falta probar que $\rho_{\mathcal{A}}$ toma únicamente valores finitos. Para esto, fijemos alguna Y en el conjunto no vacío $\mathcal{A}$. Para una $X \in L^\infty$ dada, existe un número finito m tal que $m + X > Y$, ya que X y Y son acotadas *c.s.* Entonces

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) - m = \rho_{\mathcal{A}}(m+X) \leq \rho_{\mathcal{A}}(Y) \leq 0,$$

y entonces $\rho_{\mathcal{A}}(X) \leq m < \infty$. Observemos que $\text{ínf}\{m \in \mathbb{R}|m \in \mathcal{A}\} > -\infty$ es equivalente a que $\rho_{\mathcal{A}}(0) > -\infty$. Para $X \in L^\infty$, podemos tomar m' tal que $m' + X \leq 0$, entonces por monotonía de la medida $\rho_{\mathcal{A}}$, $\rho_{\mathcal{A}}(m'+X) \geq \rho_{\mathcal{A}}(0) > -\infty$, por la propiedad de invarianza respecto a traslaciones, $\rho_{\mathcal{A}}(X) - m \geq \rho_{\mathcal{A}}(0)$. Por lo tanto $\rho_{\mathcal{A}}(X) \geq \rho_{\mathcal{A}}(0) + m > -\infty$.

(b) Se sigue de la demostración del inciso (c) de la proposición 2.3.1.

(c) Se sigue de la demostración del inciso (d) de la proposición 2.3.1.

(d) Para ver que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$, donde $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}} = \{X \in L^\infty|\rho_{\mathcal{A}}(X) \leq 0\}$, entonces si $X \in \mathcal{A}$, $\rho_{\mathcal{A}}(X) \leq 0$. Por lo tanto $X \in \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{A}$ cumple que si $X \in \mathcal{A}$ y $Y \in L^\infty$,

$$\{\lambda \in [0,1] | \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}\} \textit{ es cerrado en el } [0,1].$$

Para demostrar la igualdad tenemos que ver que $X \notin \mathcal{A}$ implica que $\rho_{\mathcal{A}}(X) > 0$. Tomemos $m > \|X\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|$. Por la hipótesis de cerradura de $\mathcal{A}$, si nos fijamos en el complemento, existe $\epsilon \in (0,1)$ tal que $\epsilon m + (1-\epsilon)X \notin \mathcal{A}$. Entonces,

$$0 \leq \rho_{\mathcal{A}}(\epsilon m + (1-\epsilon)X) = \rho_{\mathcal{A}}((1-\epsilon)X) - \epsilon m.$$

Lo que implica que

$$\epsilon m \leq \rho_{\mathcal{A}}((1-\epsilon)X).$$

Por otra parte, dado que $\rho_{\mathcal{A}}$ es un medida de riesgo, el lema 2.1.2 nos afirma que

$$\begin{aligned}
|\rho_{\mathcal{A}}((1-\epsilon)X) - \rho_{\mathcal{A}}(X)| &\leq \|(1-\epsilon)X - X\| \\
&= \|X - \epsilon X - X\| \\
&= \| - \epsilon X\| \\
&= \epsilon\|X\|.
\end{aligned}$$

Como $\rho_{\mathcal{A}}((1-\epsilon)X) - \rho_{\mathcal{A}}(X) \leq |\rho_{\mathcal{A}}((1-\epsilon)X) - \rho_{\mathcal{A}}(X)|$, y por los dos resultados anteriores concluimos que

$$\rho_{\mathcal{A}}(x) \geq \rho_{\mathcal{A}}((1-\epsilon)X) - \epsilon\|X\| \geq \epsilon(m - \|X\|) > 0.$$

Por lo tanto concluimos que $\rho_{\mathcal{A}}(x) > 0$ si $X \notin \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$.

$\blacksquare$

Con los resultados anteriores podemos obtener información del conjunto de aceptación teniendo una medida de riesgo, o viceversa, así por ejemplo si tenemos un conjunto de aceptación que es convexo inmediatamente sabremos que la medida de riesgo inducida por este conjunto es también convexa. Lo ilustramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3.3. Definimos la *medida de riesgo del peor de los casos* (ρ_{max}) por

$$\rho_{max}(X) = -\inf_{\omega\in\Omega} X(\omega) \quad c.s.\text{para toda } X \in L^\infty.$$

Dada una posición financiera X, el valor de $\rho_{max}(X)$ es la mínima cota superior para la pérdida potencial que pudiese ocurrir para cualquier escenario $\omega \in \Omega$, donde por pérdida potencial entendemos como una pérdida posible pero no necesariamente real. El conjunto de aceptación

$$\mathcal{A}_{\rho_{max}} = \{X \in L^\infty | \rho_{max} \leq 0\} \text{ esta dado por,}$$

$$\mathcal{A}_{\rho_{max}} = \{X \in L^\infty | X \geq 0\}.$$

Es fácil ver que este conjunto es un cono convexo. Si $X, Y \in \mathcal{A}_{\rho_{max}}$, entonces $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_{\rho_{max}}$ con $\lambda \in [0,1]$. Si $X, Y \in \mathcal{A}_{\rho_{max}}$ $\lambda \in [0,1]$. Entonces $X \geq 0$ y $Y \geq 0$, lo que implica que $\lambda X \geq 0$ y $(1-\lambda)Y \geq 0$, por lo tanto $\lambda X + (1-\lambda)Y \geq 0$, y $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_{\rho_{max}}$.

Y para mostrar que es un cono, sea $X \in \mathcal{A}_{\rho_{max}}$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda X \geq 0$ por lo tanto $\lambda X \in \mathcal{A}_{\rho_{max}}$.

Podemos concluir que ρ_{max} es una medida de riesgo coherente por el proposición 2.3.1.

Ahora si pensamos en las medidas de riesgo como la cantidad monetaria que se necesita agregar a una posición financiera, la medida ρ_{max} es la más conservadora, es decir, tener una estrategia de inversión aversa al riesgo cuya prioridad es la conservación del capital, en el sentido que cualquier medida de riesgo normalizada ρ en L^∞ satisface

$$\rho(X) \leq \rho_{max}(X) \quad \text{para toda } X \in L^\infty.$$

Esto es por que

$$X(\omega) \geq \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\rho(X) &\leq \rho(\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)) \\
&= \rho(0) - \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \\
&= -\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \\
&= \rho_{max}(X).
\end{aligned}$$

Donde la primera desigualdad se da por la monotonía de ρ, la segunda igualdad se da por la invarianza con respecto a traslaciones, y la tercera por la normalización de la medida de riesgo.

A partir de este momento llamamos $\mathcal{M}$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad en

$(\Omega, \mathcal{F})$. $\mathbb{E}_Q(X)$ denota la esperanza de X con respecto a Q (ver A.25).

Ejemplo *2.3.4.* Consideremos la función $\gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Decimos que una posición financiera $X \in L^\infty$ es aceptable si

$$\gamma(Q) \leq \mathbb{E}_Q(X) \;\; \text{para todo } Q \in \mathcal{M}.$$

EL conjunto $\mathcal{A} = \{X \in L^\infty | \gamma(Q) \leq \mathbb{E}_Q(X) \;\; \text{para toda } Q \in \mathcal{M}\}$ satisface:

(I) $\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} > -\infty$

(II) si $X \in \mathcal{A}$, $Y \in L^\infty$, $Y \geq X$, implica $Y \in \mathcal{A}$,

(III) es convexo.

Para ver que cumple la propiedad (I), vemos que $\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{A}$, y además, como $\gamma(Q)$ toma valores finitos, entonces

$$\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\} = \mathbb{E}_Q(\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}\}) \geq \gamma(Q) > -\infty \;\; \text{para toda } Q \in \mathcal{M}.$$

Para la propiedad (II), sean $X \in \mathcal{A}$ y $Y \in L^\infty$ tales que $X \leq Y$. Como $\mathbb{E}_Q$ es no decreciente tenemos $\mathbb{E}_Q(X) \leq \mathbb{E}_Q(Y)$ y como $X \in \mathcal{A}$,

$$\gamma(Q) \leq \mathbb{E}_Q(X) \leq \mathbb{E}_Q(Y),$$

por lo tanto $Y \in \mathcal{A}$.

Por último para demostrar (III), sean $X, Y \in \mathcal{A}$. Esto implica que $\gamma(Q) \leq \mathbb{E}_Q(X)$ y $\gamma(Q) \leq \mathbb{E}_Q(Y)$, entonces $\lambda\gamma(Q) \leq \lambda\mathbb{E}_Q(X)$ y $(1-\lambda)\gamma(Q) \leq (1-\lambda)\mathbb{E}_Q(Y)$ para toda $Q \in \mathcal{M}$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces la linealidad de $\mathbb{E}_Q$, y sumando las desigualdades anteriores

$$\gamma(Q) = \lambda\gamma(Q) + (1-\lambda)\gamma(Q) \leq \mathbb{E}_Q(\lambda X + (1-\lambda)Y).$$

Por lo tanto $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es convexo, por la proposición 2.3.1 la medida de riesgo asociada $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$ es convexa, y $\rho(X)$ toma la siguiente forma

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}} (\gamma(Q) - \mathbb{E}_Q(X)).$$

Notemos que $\rho(X)$ no es necesariamente normalizada ya que $\rho(0) = \sup_{Q\in\mathcal{M}} \gamma(Q)$.

2.4. Representación robusta de medidas de riesgo convexas.

Nuestro propósito es dar una representación a las medidas de riesgo convexas a partir de medidas de probabilidad. Esto es de gran importancia ya que significa que un inversionista tiene un conjunto de posibles modelos de mercado en mente, y evalúa la peor pérdida esperada junto con algunos costos de penalización. Como vimos en el ejemplo 2.3.4 la medida de riesgo tiene una representación de esta forma.

Definición 2.4.1. (Representación robusta).

Una función $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ decimos que es representable o representada por α en $\mathcal{M}$ si existe una función $\alpha : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup +\infty$ tal que

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{M}} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)\}, \quad X \in L^\infty. \tag{2.5}$$

A α se le conoce como función de penalización.

Veamos que esta representación de ρ define una medida de riesgo convexa en L^∞ tal que $\rho(0) = -\operatorname{ínf}_{Q\in\mathcal{M}} \alpha(Q)$.

Para demostrar la monotonía. Sean $X, Y \in L^\infty$ tal que $X \leq Y$, entonces $-Y \leq -X$ y por la monotonía de la esperanza $\mathbb{E}_Q(-Y) \leq \mathbb{E}_Q(-X)$ para toda $Q \in \mathcal{M}$, finalmente restando $\alpha(Q)$ obtenemos

$$\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q) \leq \mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \ \text{ para toda } Q \in \mathcal{M}.$$

Tomando el supremo sobre $Q \in \mathcal{M}$ la igualdad se mantiene, por lo tanto $\rho(Y) \leq \rho(X)$. Ahora para probar la invarianza con respecto a traslaciones. Sean $X \in L^\infty$ y $m \in \mathbb{R}$, entonces por la linealidad de $\mathbb{E}_Q$ y para toda $Q \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(-(X+m)) - \alpha(Q) &= \mathbb{E}_Q(-X-m) - \alpha(Q)\\ &= (\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)) - m.\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre $Q \in \mathcal{M}$ la igualdad se mantiene y por lo tanto $\rho((X+m)) = \rho(X) - m$. Finalmente, para ver que es convexa sean $X, Y \in L^\infty$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces, por la linealidad de la esperanza y para toda $Q \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[-(\lambda X + (1-\lambda)Y)] - \alpha(Q) &= \mathbb{E}_Q[-\lambda X] + \mathbb{E}_Q[-(1-\lambda)Y] - \alpha(Q) \\
&= \lambda \mathbb{E}_Q[-X] + (1-\lambda)\mathbb{E}_Q[-Y] - \alpha(Q) \\
&= \lambda \mathbb{E}_Q[-X] + (1-\lambda)\mathbb{E}_Q[-Y] - \lambda\alpha(Q) - (1-\lambda)\alpha(Q) \\
&= \lambda(\mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q)) + (1-\lambda)(\mathbb{E}_Q[-Y] - \alpha(Q)),
\end{aligned}$$

Tomando el supremo concluimos que

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) &= \sup_{Q \in \mathcal{M}} \{\mathbb{E}_Q[-(\lambda X + (1-\lambda)Y)] - \alpha(Q)\} \\
&= \sup_{Q \in \mathcal{M}} \{\lambda(\mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q)) + (1-\lambda)(\mathbb{E}_Q[-Y] - \alpha(Q))\} \\
&= \lambda \sup_{Q \in \mathcal{M}} \{(\mathbb{E}_Q[-X] - \alpha(Q))\} + (1-\lambda) \sup_{Q \in \mathcal{M}} \{(\mathbb{E}_Q[-Y] - \alpha(Q))\} \\
&= \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).
\end{aligned}$$

Ahora, en especial podemos escribir cualquier medida de riesgo en términos de α_{min} donde

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \text{para } Q \in \mathcal{M}.$$

Entonces la medida de riesgo convexa queda de la forma

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{min}(Q)\}, \quad X \in L^\infty.$$

Bajo esta representación de ρ por α_{min} recordemos que, α_{min} es la mínima función de penalización que representa a ρ, es decir, cualquier función de penalización α para la cual la ecuación (2.5) está definida, satisface que $\alpha_{min}(Q) \leq \alpha(Q)$ para toda $Q \in \mathcal{M}$. Sea α cualquier función de penalización para ρ. Entonces para cada $Q \in \mathcal{M}$ y todo $X \in L^\infty$,

$$\rho(X) \geq \mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q),$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha(Q) &\geq \sup_{X \in L^\infty} (\mathbb{E}_Q(-X) - \rho(X)) \\
&\geq \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} (\mathbb{E}_Q(-X) - \rho(X)) \\
&\geq \alpha_{min}(Q).
\end{aligned}$$

La primera desigualdad es clara, ya que vale para toda $X \in L^\infty$, en especial tomando el supremo. La segunda se da gracias a que $\mathcal{A}_\rho \subseteq L^\infty$. La última es ya que $\rho(X) \leq 0$ porque $X \in \mathcal{A}_\rho$.

Observación 2.4.2. (a) Si en la desigualdad anterior tomamos $\alpha = \alpha_{min}$, entonces todas las desigualdades son igualdades. Por lo tanto tenemos una forma alternativa de escribir la mínima función de penalización α_{min}:

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in L^\infty} (\mathbb{E}_Q(-X) - \rho(X)) \quad \text{para cada } Q \in \mathcal{M}.$$

(b) Si tenemos un conjunto de aceptación $\mathcal{A} \subseteq L^\infty$ y ρ está definida vía $\rho = \rho_\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ determina a $\alpha_{min}(Q)$, y la definimos como:

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \text{para cada } Q \in \mathcal{M}.$$

La representación (2.5) está ligada a cierta propiedad de continuidad de ρ. Examinaremos una condición necesaria de "continuidad por arriba":

Lema 2.4.3. Una medida de riesgo convexa ρ que es representada como:

$$\rho(x) = \sup_{Q \in \mathcal{M}} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)\}, \quad X \in L^\infty$$

en $\mathcal{M}$, es continua por arriba en el sentido que:

$$\text{Si } X_n \text{ tiende por arriba a } X \ (X_n \searrow X) \text{ c.s. entonces } \rho(X_n) \text{ tiende por abajo a } \rho(X) \ (\rho(X_n) \nearrow \rho(X)). \tag{2.6}$$

Además, continuidad por arriba es equivalente a semicontinuidad inferior con respecto a la convergencia puntual acotada: Si (X_n) es una sucesión acotada en L^∞ que converge puntualmente a

$X \in L^\infty$, entonces

$$\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n). \tag{2.7}$$

Demostración. Primero mostraremos que $\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$ bajo la hipótesis que ρ tiene una representación en términos de medidas de probabilidad como en (2.5). Si (X_n) es una sucesión en L^∞ acotada que converge a $X \in L^\infty$ c.s. cuando n tiende a infinito, entonces como las variables son acotadas el teorema de convergencia dominada(teorema B.3.2) implica que $\mathbb{E}_Q(X_n)$ converge a $\mathbb{E}_Q(X)$ cuando n tiende a infinito para cada $Q \in \mathcal{M}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= \sup_{Q\in\mathcal{M}} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{min}(Q)\} \\
&= \sup_{Q\in\mathcal{M}} \{\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_Q(-X_n) - \alpha_{min}(Q)\} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{Q\in\mathcal{M}} \{\mathbb{E}_Q(-X_n) - \alpha_{min}(Q)\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n).
\end{aligned}$$

La desigualdad se cumple ya que $\sup_\alpha \{\lim_{n\to\infty}(f_\alpha(X_n))\} \leq \liminf_{n\to\infty} \{\sup_\alpha(f_\alpha(X_n))\}$ (ver observación B.5.8).

Ahora que ya demostramos (2.7) mostraremos que es equivalente a (2.6), suponemos primero (2.7). Por monotonía, $\rho(X_n) \leq \rho(X)$ para cada n si $X_n \searrow X$ y además tenemos que $\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$, por lo tanto $\rho(X_n)$ crece a $\rho(X)$, es decir, $\rho(X_n) \nearrow \rho(X)$. Ahora, si tenemos continuidad por arriba (2.6). Sea (X_n) una sucesión acotada en L^∞ que converge puntualmente a $X \in L^\infty$. Definimos $Y_m = \sup_{m\leq n} X_n \in L^\infty$. Entonces Y_m decrece c.s. a X. Como $X_n \leq Y_n$, por monotonía $\rho(Y_n) \leq \rho(X_n)$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} \rho(Y_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$ y por la condición (2.6) tenemos que $\lim_{n\to\infty} \rho(Y_n) = \rho(X)$. Por lo tanto,

$$\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n).$$

■

Por último damos un teorema donde mostramos equivalencias a la representabilidad robusta de una medida de riesgo. Las definiciones y resultados para este desarrollo las encontramos en la sección B.6.

Definimos un nuevo conjunto $\mathcal{P}$ de la siguiente manera: Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

$\mathcal{P} = \{Q \in \mathcal{M} |\ Q \ll \mathbb{P} \text{ en } \mathcal{F}\}$, las medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$ absolutamente continuas con respecto a $\mathbb{P}$ (definición A.17).

Teorema 2.4.4. Supongamos que $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es una medida de riesgo convexa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) ρ es representable por alguna función de penalización α en $\mathcal{P}$.

(b) ρ es representada por la función de penalización α_{min}:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{min}(Q)\}, \quad X \in L^\infty.$$

Recordando que

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}_Q(-X) \ \text{ para } Q \in \mathcal{P}.$$

(c) ρ es continua por arriba: Si X_n tiende por arriba a X casi seguramente entonces $\rho(X_n)$ tiende por abajo a $\rho(X)$.

(d) ρ tiene la *propiedad de Fatou*: para cualquier sucesión (X_n) que converge casi seguramente a X.

$$\rho(X) \leq \liminf_{n \to \infty} \rho(X_n).$$

(e) ρ es semicontinua por abajo para la *topología débil** $\sigma(L^\infty, L^1)$ (ver apéndice B.6), es decir, que $\mathcal{C} = \{X \in L^\infty | \rho(X) \leq c\}$ para $c \in \mathbb{R}$ es cerrado con respecto a la topología $\sigma(L^\infty, L^1)$.

(f) El conjunto de aceptación $\mathcal{A}_\rho$ de ρ es *cerrado débil** en L^∞, es decir, $\mathcal{A}_\rho$ es cerrado con respecto a la topología $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Demostración. (f)$\Longrightarrow$(b). Fijemos $X \in L^\infty$ y sea

$$m = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{min}(Q)).$$

Primero veamos que para toda $X \in \mathcal{X}$.

$$\rho(X) \geq m.$$

Para esto, llamemos $X' = \rho(X) + X$, entonces $\rho(X') = \rho(X) - \rho(X) = 0$, entonces $X' \in \mathcal{A}_\rho$. Entonces para toda $Q \in \mathcal{P}$ por la definición de α_{min},

$$\alpha_{min}(Q) \geq \mathbb{E}_Q(-X') = \mathbb{E}_Q(-X) - \rho(X).$$

Entonces, $\rho(X) \geq \mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{min}(Q)$ para toda $Q \in \mathcal{P}$, en especial para el supremo,

$$\rho(X) \geq \sup_{Q\in\mathcal{P}}(\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{min}(Q)) = m.$$

Ahora, necesitamos probar que $\rho(X) \leq m$, o equivalentemente, que $m+X \in \mathcal{A}_\rho$ ya que $\rho(X+m) \leq 0$ por la invarianza con respecto a traslaciones de ρ. Supongamos que $m + X \notin \mathcal{A}_\rho$. Dado que el conjunto no vacío y convexo $\mathcal{A}_\rho$ es *cerrado débil** por hipótesis, aplicando el lema de Hahn-Banach B.6.6 en el espacio localmente convexo $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$(ya que es un espacio de Banach y entonces es localmente covexo como se ve en la observación B.6.5), con $\mathcal{C} = \mathcal{A}_\rho$ y $\mathcal{B} = m + X$, ya que estos conjuntos cumplen con ser disjuntos y no vacíos, además $\mathcal{B}$ es compacto, y $\mathcal{C}$ cerrado por hipótesis. Entonces tenemos una función l^* lineal en $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ tal que

$$\sup_{Y\in\mathcal{A}_\rho} l^*(Y) < l^*(m + X).$$

Ahora, si tomamos $l^* = -l$, donde l tiene las mismas características de l^*. Entonces,

$$\sup_{Y\in\mathcal{A}_\rho} -l(Y) < -l(m + X)$$

Por lo que podemos concluir lo siguiente:

$$-\infty < \gamma = l(m + X) < \inf_{Y\in\mathcal{A}_\rho} l(Y) = \beta.$$

Por el inciso (c) de la proposición B.6.9, el espacio dual (observación B.6.7) de L^∞ para esta topología es L^1 , entonces l es de la forma $l = \int YZdp = \mathbb{E}(YZ)$ para alguna $Z \in L^1$. De hecho $Z \geq 0$. Para probar esto, sea $Y \geq 0$ entonces para $\lambda \geq 0$ vemos que $\rho(\lambda Y) \leq \rho(0)$, por monotonía.

Entonces $\rho(\lambda Y)+\rho(0)\leq 0$ y $\lambda Y+\rho(0)\in\mathcal{A}_\rho$ para toda $\lambda\geq 0$. Entonces por la desigualdad anterior

$$-\infty<\gamma<l(\lambda Y+\rho(0))=\lambda l(Y)+l(\rho(0)).$$

Ahora, si hacemos tender λ a infinito, entonces $l(Y)$ tiene que ser no negativa. Entonces como tenemos $Y\geq 0$ y $l(Y)=\mathbb{E}(YZ)\geq 0$ implica que $Z\geq 0$. Además como l es una función no cero, entonces $\mathbb{P}(Z\geq 0)>0$. Entonces, podemos definir la *derivada de Radon-Nikodym*:

$$\frac{dQ_0}{dP}=\frac{Z}{\mathbb{E}(Z)}$$

como una medida de probabilidad $Q_0\in\mathbb{P}$, ya que $\frac{Z}{\mathbb{E}(Z)}>0$ (Ver sección B.4). Entonces,

$$\alpha_{min}(Q_0)=\sup_{Y\in\mathcal{A}_\rho}\mathbb{E}_{Q_0}(-Y)=-\inf_{Y\in\mathcal{A}_\rho}\mathbb{E}_{Q_0}(Y),$$

ahora, veamos que

$$\mathbb{E}_{Q_0}(Y)=\int YdQ_0=\int YdP\frac{Z}{\mathbb{E}(Z)}=\frac{\mathbb{E}(YZ)}{\mathbb{E}(Z)}.$$

Entonces

$$\alpha_{min}(Q_0)=-\inf_{Y\in\mathcal{A}_\rho}\frac{\mathbb{E}(YZ)}{\mathbb{E}(Z)}=-\inf_{Y\in\mathcal{A}_\rho}\frac{l(Y)}{\mathbb{E}(Z)}=-\frac{\beta}{\mathbb{E}(Z)}.$$

Análogamente podemos ver que $\mathbb{E}_{Q_0}(X+m)=\mathbb{E}((X+m)Z)=l(X+m)$. Entonces

$$\mathbb{E}_{Q_0}(X)+m=\frac{l(m+X)}{\mathbb{E}(Z)}=\frac{\gamma}{\mathbb{E}(Z)}<\frac{\beta}{\mathbb{E}(Z)}=-\sup_{Y\in\mathcal{A}_\rho}\mathbb{E}_{Q_0}(-Y)=-\alpha_{min}(Q_0).$$

Encontramos $Q_0\in\mathcal{P}$ tal que $m<\mathbb{E}_{Q_0}(X)-\alpha_{min}(Q_0)$ que contradice la definición que dimos de m. Entonces $m+X\in\mathcal{A}_\rho$ y $\rho(X)\leq m$.

(b)$\Longrightarrow$(a). Es trivial por definición de representabilidad.

(a)$\Longrightarrow$(c)$\Longleftrightarrow$(d). Se sigue inmediatamente del lema 2.4.3, reemplazando convergencia puntual por convergencia casi seguramente.

(c)$\Longrightarrow$(e). Tenemos que mostrar que $\mathcal{C}=\{X\in L^\infty|\rho(X)\leq c\}$ para $c\in\mathbb{R}$ es cerrado con respecto a la topología $\sigma(L^\infty,L^1)$, es decir que es *cerrado débil**. Para demostrar esto, sea $\mathcal{C}_r=\mathcal{C}\cap\{X\in L^\infty|\|X\|_\infty\leq r\}$ para $r>0$. Si (X_n) es una sucesión en $\mathcal{C}_r$ que converge en L^1 a alguna variable X, entonces existe una subsucesión que converge casi seguramente, y además, como (c)$\Longleftrightarrow$(d) y las X_n son acotadas *c.s.* por la *propiedad de Fatou* de ρ implica que

$$\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n) \leq c,$$

entonces $X \in \mathcal{C}_r$. Entonces, $\mathcal{C}_r$ es cerrado en L^1, y por el lema B.6.10 implica que $\mathcal{C} = \{X \in L^\infty | \rho(X) \leq c\}$ es *cerrado débil**.

(e)$\Longrightarrow$(f). Es trivial tomando $c = 0$. ■

Capítulo 3

Medidas de riesgo convexas condicionales.

En este capítulo extendemos la definición de una medida de riesgo convexa a un marco condicional. Interpretamos que ahora tenemos información disponible antes del fin de la operación financiera, y se puede aprovechar para tener una mejor medición del riesgo, ya que tener información adicional modifica el cálculo del riesgo. Caracterizamos a estas medidas de riesgo mediante sus conjuntos de aceptación y mostramos una representación de estas mediante esperanzas condicionales y medidas de probabilidad. Damos una propiedad de regularidad y requerimientos de capital condicional.

Los resultados de este capítulo los seguimos principalmente de [5].

3.1. Estructura y definiciones.

Denotemos por L^0 al espacio de variables aleatorias finitas casi seguramente definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω (ver la definición en A.9). Sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra (ver A.10) de $\mathcal{F}$, y $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ es una medida de probabilidad. Definimos los siguientes subespacios:

$L^0_{\mathcal{G}} = \{X \in L^0 | \ X$ es $\mathcal{G}$-medible (ver A.15)$\}$,

$L^\infty_{\mathcal{G}} = L^\infty \cap L^0_{\mathcal{G}}$, con L^∞ definido en A.27.

Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$. Recordemos que definimos en el capítulo anterior el conjunto $\mathcal{P} = \{Q \in \mathcal{M} | \ Q \ll \mathbb{P} \text{ en } \mathcal{F}\}$, donde $\mathcal{M}$ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$. Ahora definimos el siguiente conjunto de medidas de probabilidad:

$\mathcal{P}_{\mathcal{G}} = \{Q \in \mathcal{P} | Q \equiv \mathbb{P} \text{ en } \mathcal{G}\}$, las medidas de probabilidad equivalentes a $\mathbb{P}$ (esto es, $Q \ll \mathbb{P}$ y $\mathbb{P} \ll Q$).

En un contexto práctico, al conjunto $\mathcal{P}$ lo entendemos como una colección de modelos probabilísticos con cierta propiedad. La σ-álgebra $\mathcal{G}$ es de gran importancia para el inversionista que está evaluando el riesgo de una posición financiera X, ya que recolecta la información disponible. A diferencia del caso estático donde la medida de riesgo de una posición financiera es un valor real, en este caso la medición del riesgo de la posición X que hemos llamado $\rho(X)$, es una variabe aleatoria que es medible con respecto a $\mathcal{G}$, es decir, es un elemento del espacio $L^0_{\mathcal{G}}$.

Observación 3.1.1. La información adicional $\mathcal{G}$ puede ser en el tiempo que inicia la operación financiera $t = 0$, alternativamente, sabemos que durante una operación financiera ocurren ciertos factores que pueden alterar el riesgo que adquirimos en la posición financiera X, por lo que $\mathcal{G}$ puede ser interpretada como información disponible en una tiempo futuro $t > 0$, que es resultante de la observación de dichos factores relacionados con la posición financiera X en el intervalo de tiempo $[0, t]$. En ambos casos dicha información puede estar disponible para todo el público inversor, o solamente para ciertos inversores "privilegiados," es decir, puede ser pública o privada. Si no tenemos información adicional disponible, $\mathcal{G}$ es la σ-álgebra trivial, entonces la definición de medida de riesgo condicional coincide con la medida de riesgo estática que se introdujo en el capítulo anterior. Y esa constante es la esperanza de la medida de riesgo $\rho(X)$.

A través de este capítulo, todas las igualdades o desigualdades entre variables aleatorias es entendido que se cumplen $\mathbb{P} - c.s.$.

Definición 3.1.2. (Medida de riesgo condicional).

Una función $\rho : L^\infty \to L^0_{\mathcal{G}}$ es llamada medida de riesgo condicional si para todo $X, Y \in L^\infty$ se cumple:

- *Monotonía*:

$$\text{Si } X \leq Y \ c.s. \text{ entonces } \rho(Y) \leq \rho(X) \ \ c.s.$$

∘ *Invarianza con respecto a traslaciones.* Si $Z \in L^\infty_{\mathcal{G}}$, entonces:

$$\rho(X + Z) = \rho(X) - Z \quad c.s.$$

Notemos que Z ya no es una constate

Ahora, introducimos la definición de medida de riesgo convexa condicional, que será el objeto de estudio de este capítulo.

Definición 3.1.3. (Medida de riesgo convexa condicional).

Una medida de riesgo $\rho : L^\infty \to L^0_{\mathcal{G}}$ es una medida de riesgo convexa condicional si para $X, Y \in L^\infty$ y $\Lambda \in L^\infty_{\mathcal{G}}$ con $\Lambda \in [0, 1]$, ρ satisface la siguiente propiedad:

∘ *Convexidad condicional:*

$$\rho(\Lambda X + (1 - \Lambda)Y) \leq \Lambda\rho(X) + (1 - \Lambda)\rho(Y) \quad c.s.$$

A partir de este momento, consideraremos a todas las medidas de riesgo normalizadas, es decir, $\rho(0) = 0$ c.s.

Observación 3.1.4. El tomar $\rho(0) = 0$ es muy natural desde el punto de vista económico, ya que si uno no invierte nada, no tiene riesgo alguno, pero tomar este supuesto tiene ciertas simplificaciones. Desde el punto de vista matemático, el supuesto de que $\rho(0) \in L^\infty_{\mathcal{G}}$ sería suficiente para asegurar la validez de algunos resultados.

Observación 3.1.5. Es importante ver que los valores que toma una medida de riesgo convexa condicional son siempre acotados por la forma en la que definimos ρ: Si $X \in L^\infty$, entonces $-\|X\|_\infty \leq X \leq \|X\|_\infty$, por la monotonía de ρ, implica que:

$$\rho(\|X\|_\infty) \leq \rho(X) \leq \rho(-\|X\|_\infty) \quad c.s.,$$

además, $\|X\|_\infty \in L^\infty_{\mathcal{G}}$ y por la invarianza con respecto a traslaciones (condicional) $\rho(\|X\|_\infty) = \rho(0) - \|X\|_\infty = -\|X\|_\infty$ *c.s.* por nuestro supuesto de normalización de ρ. Entonces,

$$-\infty < -\|X\|_\infty = \rho(\|X\|_\infty) \leq \rho(X) \leq \rho(-\|X\|_\infty) = \|X\|_\infty < \infty \quad c.s.$$

Por consecuencia $\rho(X) \in L^\infty_\mathcal{G}$, por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos escribir $\rho : L^\infty \to L^\infty_\mathcal{G}$ en la definición 3.1.3.

Notemos que $\rho(X) = -X$ *c.s.* para toda $X \in L^\infty_\mathcal{G}$. Análogamente con el caso estático, si en una medida de riesgo convexa condicional consideramos una propiedad de homogeneidad podemos definir una medida de riesgo homogénea positiva condicional, aunque como ya lo habíamos mencionado, esta condición de homogeneidad positiva no la vamos a pedir, solamente daremos la definición.

Definición 3.1.6. (Medida de riesgo homogénea condicional).

Una medida de riesgo convexa condicional es una medida de riesgo homogénea si satisface:

- *Homogeneidad positiva condicional:* Para todo $X \in L^\infty$ y $\Lambda \in L^\infty_\mathcal{G}$ tal que $\Lambda \geq 0$:

$$\rho(\Lambda X) = \Lambda \rho(X) \quad c.s.$$

3.2. Propiedad de regularidad.

Esta propiedad es de importancia en el momento de tener información adicional disponible. Cuando hay este tipo de información el agente o inversor tiene que hacer uso de esta información para evaluar el riesgo de la posición financiera X. Esto es, si se conoce que cierto evento $A \in \mathcal{G}$ está ocurriendo, entonces el riesgo de X debería depender únicamente de lo que realmente puede pasar, es decir, en la restricción de X a A. Este requerimiento lo podemos entender en la siguiente propiedad.

Definición 3.2.1. (Medida de riesgo condicional regular).

Una medida de riesgo condicional $\rho : L^\infty \to$ es regular si para toda $A \in \mathcal{G}$ y $X, Y \in L^\infty$ se cumple que

$$\text{si} \quad XI_A = YI_A \quad c.s. \quad \text{entonces} \quad \rho(X)I_A = \rho(Y)I_A \quad c.s.,$$

donde I_A es la función indicadora en A.

Ahora, en la siguiente proposición damos algunas definiciones equivalentes de regularidad.

Proposición 3.2.2. Las siguientes definiciones son equivalentes para una medida de riesgo condicional ρ que satisface $\rho(0) = 0$:

(a) ρ es regular;

(b) $\rho(XI_A) = \rho(X)I_A$ *c.s.* para toda $A \in \mathcal{G}$ y $X \in L^\infty$;

(c) $\rho(XI_A + YI_{A^c}) = \rho(X)I_A + \rho(Y)I_{A^c}$ *c.s.* para toda $A \in \mathcal{G}$ y $X, Y \in L^\infty$;

(d) $\rho\left(\sum_{n=1}^N X_n I_{A_n}\right) = \sum_{n=1}^N \rho(X_n)I_{A_n}$ *c.s.* para $A_n \in \mathcal{G}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, $X_n \in L^\infty$ y $N \geq 1$.

Demostración. (b)$\Longrightarrow$(c). Dado que $XI_A = (XI_A)I_A$ *c.s.* y $0I_{A^c} = (XI_A)I_{A^c}$ *c.s.*, ya que $I_AI_{A^c} = 0$, entonces por la propiedad de regularidad tenemos que $\rho(X)I_A = \rho(XI_A)I_A$ y $0 = \rho(0)I_{A^c} = \rho(XI_A)I_{A^c}$ c.s. ambas igualdades, entonces sumando estas dos igualdades tenemos $\rho(X)I_A + 0 = \rho(XI_A)I_A + \rho(XI_A)I_{A^c} = \rho(XI_A)$, por lo tanto $\rho(XI_A) = \rho(X)I_A$ *c.s.*.

(a)$\Longrightarrow$(b). Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\rho(XI_A + YI_{A^c}) &= \rho(XI_A + YI_{A^c})I_A + \rho(XI_A + YI_{A^c})I_{A^c} \\
&= \rho((XI_A + YI_{A^c})I_A) + \rho((XI_A + YI_{A^c})I_{A^c}) \\
&= \rho(XI_AI_A + YI_{A^c}I_A) + \rho(XI_AI_{A^c} + YI_{A^c}I_{A^c}) \\
&= \rho(XI_A) + \rho(YI_{A^c}) \quad c.s.,
\end{aligned}
$$

donde la segunda igualdad se da por el inciso (b).

(c)$\Longrightarrow$(d). Esta demostración la haremos por inducción sobre N. Cuando $N = 1$. Tomando $Y = 0$ en el inciso (c), tenemos

$$
\begin{aligned}
\rho\left(\sum_{n=1}^1 X_n I_{A_n}\right) &= \rho(X_1 I_{A_1}) \\
&= \rho(X_1 I_{A_1} + 0I_{A_1^c}) \\
&= \rho(X_1)I_{A_1} + \rho(0)I_{A_1^c} \\
&= \rho(X_1)I_{A_1} \\
&= \sum_{n=1}^1 \rho(X_n)I_{A_1} \quad c.s.,
\end{aligned}
$$

donde la tercera igualdad se da por el inciso (c), y la siguiente igualdad se sigue por la normalización de ρ.

Ahora, nuestra hipótesis de inducción es que la expresión vale para N. Probemos que vale para $N+1$.

Sea $(A_n)_{n=1}^{N+1} \subseteq \mathcal{G}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Definimos $B = \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{G}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\rho\left(\sum_{n=1}^{N+1} X_n I_{A_n}\right) &= \rho\left(\sum_{n=1}^{N} X_n I_{A_n} I_B + X_{N+1} I_{A_{N+1}} I_{B^c}\right)\\ &= \rho\left(\sum_{n=1}^{N} X_n I_{A_n}\right) I_B + \rho(X_{N+1} I_{A_{N+1}}) I_{B^c} \quad c.s.\end{aligned}$$

La primera igualdad se da gracias a las funciones indicadoras sobre A_n y la definición de B ya que $I_{A_n} I_B = I_{A_n}$ y $I_{A_{N+1}} I_{B^c} = I_{A_{N+1}}$, y la segunda igualdad es por el inciso (c). Ahora, por la hipótesis de inducción, y aplicando nuevamente la hipótesis del inciso (c) con $Y = 0$ para el término $\rho(X_{N+1} I_{A_{N+1}})$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\rho\left(\sum_{n=1}^{N+1} X_n I_{A_n}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \rho(X_n) I_{A_n} I_B + \rho(X_{N+1}) I_{A_{N+1}} I_{B^c}\\ &= \sum_{n=1}^{N} \rho(X_n) I_{A_n} + \rho(X_{N+1}) I_{A_{N+1}} \quad c.s.\end{aligned}$$

(d)$\Longrightarrow$(a). Primero notemos que del inciso (b) se sigue (d) con $N = 1$. Ahora, podemos mostrar que (a) se sigue de (b) de la siguiente forma: Si $XI_A = YI_A$, por el inciso (b) tenemos

$$\rho(X) I_A = \rho(X I_A) = \rho(Y I_A) = \rho(Y) I_A \quad c.s.$$

Lo que implica la regularidad de ρ. ∎

Observación 3.2.3. En el caso estático (no condicional), es decir, cuando $\mathcal{G}$ es la σ-álgebra trivial, cualquier medida de riesgo $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ es regular.

En la siguiente proposición mostramos una ventaja más al tratar con medidas de riesgo que sean convexas.

Proposición 3.2.4. *Si una medida de riesgo ρ es convexa condicional y $\rho(0) = 0$, entonces es regular.*

Demostración. De acuerdo a la proposición 3.2.2 la regularidad se sigue de $\rho(XI_A) = \rho(X)I_A$ *c.s.* para toda $A \in \mathcal{G}$ y $X \in L^\infty$. Entonces, $I_A \in L^\infty_\mathcal{G}$, $0 \leq I_A \leq 1$ y $I_{A^c} = 1 - I_A$, por la convexidad condicional de ρ y que $\rho(0) = 0$ tenemos

$$\rho(XI_A) = \rho(XI_A + 0I_{A^c}) \leq I_A\rho(X) + I_{A^c}\rho(0) = I_A\rho(X) \quad c.s.$$

En particular si tomamos $I_{A^c} \in \mathcal{G}$ en lugar de I_A y XI_A en lugar de X en la desigualdad anterior tenemos $0 = \rho(0) = \rho(XI_AI_{A^c}) \leq I_{A^c}\rho(XI_A)$ *c.s.*

Ahora, para probar la desigualdad $I_A\rho(X) \leq \rho(XI_A)$ *c.s.* Por convexidad condicional tenemos

$$\rho(X) = \rho(XI_A + XI_{A^c}) = \rho((XI_A)I_A + (XI_{A^c})I_{A^c}) \leq I_A\rho(XI_A) + I_{A^c}\rho(XI_{A^c}) \quad c.s.$$

Entonces, multiplicando por I_A la desigualdad anterior se sigue que

$$I_A\rho(X) \leq I_AI_A\rho(XI_A) + I_AI_{A^c}\rho(XI_{A^c}) = I_A\rho(XI_A) \quad c.s.$$

Además como $0 \leq I_{A^c}\rho(XI_A)$ *c.s.*, sumando este término concluimos que

$$I_A\rho(X) \leq I_A\rho(XI_A) + I_{A^c}\rho(XI_A) = \rho(XI_A) \quad c.s.$$

Por lo tanto $\rho(XI_A) = I_A\rho(X)$ *c.s.*, y la regularidad se sigue. ■

Por último, otra consecuencia de esta propiedad de regularidad en medidas de riesgo condicionales implica lo siguiente: si una posición financiera X es constante en un cierto evento $A \in \mathcal{G}$, es decir, $XI_A = \kappa I_A$ *c.s.* para una constante $\kappa \in \mathbb{R}$, entonces $\rho(X)$ debería ser constante en dicho evento. Para ver que se cumple, tomemos $XI_A = \kappa I_A$ *c.s.* para $\kappa \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{G}$, la regularidad implica que

$$\rho(X)I_A = \rho(XI_A) = \rho(\kappa I_A) = \rho(\kappa)I_A \quad c.s.$$

Por el hecho que $\rho(\kappa) = -\kappa$ concluimos que

$$\rho(\kappa)I_A = -\kappa I_A \quad c.s.,$$

por lo tanto $\rho(X)I_A = -\kappa I_A \;\; c.s.$

3.3. Requerimientos de capital condicional.

Recordando el concepto de un conjunto de aceptación para posiciones financieras que se introdujo en la sección 2.3, lo trasladamos al entorno condicional.

Si $\mathcal{A} \subseteq L^\infty$, entonces la función

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} |\; X + Y \in \mathcal{A}\} \;\; c.s.$$

siempre que sea finita, es llamada *requerimiento de capital condicional* asociado al conjunto de aceptación $\mathcal{A}$. Por ínf.es entendemos que se trata del ínfimo esencial, en el apéndice B en la sección B.5 se da la definición y algunas propiedades del ínfimo esencial de un conjunto de variables aleatorias. Sus propiedades son muy parecidas a las del ínfimo.

Para $\mathcal{A} \subset L^\infty$ podemos ver que $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$ si ρ es medida de riesgo; en particular solamente necesitamos la propiedad de invarianza con respecto a traslaciones , es decir, podemos escribir únicamente: $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$ si y sólo si ρ es invariante con respecto a traslaciones. Para probar esto, primero veamos que si ρ invariante con respecto a traslaciones implica $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$. Si $X \in L^\infty$, entonces,

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathcal{A}}(X) &= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} |\; X + Y \in \mathcal{A}\} \\
&= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} |\; \rho(X + Y) \leq 0\} \\
&= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} |\; \rho(X) - Y \leq 0\} \\
&= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} |\; \rho(X) \leq Y\} = \rho(X) \;\; c.s.,
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se da por la hipótesis.

Ahora, si $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$. Sean $X \in L^\infty$ y $Z \in L^\infty_{\mathcal{G}}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\rho(X + Z) = \rho_{\mathcal{A}}(X + Z) &= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} |\; (X + Z) + Y \in \mathcal{A}\} \\
&= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} |\; X + (Z + Y) \in \mathcal{A}\} \;\; c.s.
\end{aligned}$$

Definamos $Y' = Z + Y \;\; c.s.$, entonces $Y = Y' - Z \;\; c.s.$ y partiendo de la igualdad anterior,

$$
\begin{aligned}
\rho(X+Z) &= \text{ínf.es}\{Y' - Z \in L^{\infty}_{\mathcal{G}} |\; X + Y' \in \mathcal{A}\} \\
&= \text{ínf.es}\{Y' \in L^{\infty}_{\mathcal{G}} |\; X + Y' \in \mathcal{A}\} - Z \\
&= \rho_{\mathcal{A}}(X) - Z = \rho(X) - Z \;\; c.s.
\end{aligned}
$$

A partir de lo anterior, queda claro que la siguiente elección es posible

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho} = \{X \in L^{\infty} | \rho(X) \leq 0\}.$$

En la siguiente proposición damos características para $\mathcal{A}_{\rho}$ cuando tenemos una medida de riesgo convexa.

Proposición 3.3.1. Si ρ es una medida de riesgo condicional convexa normalizada, entonces su conjunto de aceptación asociado $\mathcal{A}_{\rho}$ cumple que:

(a) es condicionalmente convexo, es decir, si $\Lambda \in L^{\infty}_{\mathcal{G}}$, $0 \leq \Lambda \leq 1$ y $X, Y \in \mathcal{A}_{\rho}$, entonces

$$(\Lambda X + (1 - \Lambda) Y) \in \mathcal{A}_{\rho}.$$

(b) es sólido, es decir, si $X \in L^{\infty}$ $Y \in \mathcal{A}_{\rho}$ y $Y \leq X$, entonces $X \in \mathcal{A}_{\rho}$.

(c) ínf.es$\{X \in L^{\infty}_{\mathcal{G}} | X \in \mathcal{A}_{\rho}\} = 0 \;\; c.s.$, y $0 \in \mathcal{A}_{\rho}$.

Y además, inversamente, si $\mathcal{A}_{\rho} \subset L^{\infty}$ entonces

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \text{ínf.es}\{Y \in L^{\infty}_{\mathcal{G}} |\; X + Y \in \mathcal{A}\} \;\; c.s.$$

es una medida de riesgo condicional convexa normalizada.

Demostración. Sea ρ una medida de riesgo condicional convexa.

(a) Sea $\Lambda \in L^{\infty}_{\mathcal{G}}$, $0 \leq \Lambda \leq 1$ y $X, Y \in \mathcal{A}_{\rho}$, entonces $\rho(X) \leq 0 \;\; c.s.$ y $\rho(Y) \leq 0 \;\; c.s.$, lo que implica que $\Lambda \rho(X) \leq 0 \;\; c.s.$ y $(1 - \Lambda)\rho(Y) \leq 0 \;\; c.s.$, sumando estas dos igualdades llegamos a que

$\Lambda\rho(X) + (1-\Lambda)\rho(Y) \leq 0$ $c.s.$, ahora sabemos que ρ es condicionalmete convexa entonces,

$$\rho(\Lambda X + (1-\Lambda)Y) \leq \Lambda\rho(X) + (1-\Lambda)\rho(Y) \leq 0 \ \ c.s.,$$

lo que implica que $\Lambda X + (1-\Lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho$.

(b) Sea $X \in L^\infty$ $Y \in \mathcal{A}_\rho$ y $Y \leq X$ $c.s.$ entonces por la monotonía de la medida de riesgo, $\rho(X) \leq \rho(Y) \leq 0$ $c.s.$, ya que $Y \in \mathcal{A}_\rho$, lo que implica que $X \in \mathcal{A}_\rho$.

(c) Esta propiedad se cumple ya que $\text{ínf.es}\{X \in L^\infty_\mathcal{G} | X \in \mathcal{A}_\rho\} = \rho(0) = 0$ $c.s.$

Inversamente, sea $\mathcal{A} \subset L^\infty$ que satisface las propiedades anteriores. Entonces, la prueba de que $\rho_\mathcal{A}$ es invariante con respecto a traslaciones es idéntica a la demostración que se hizo para probar que ρ es invariante con respecto a traslaciones si $\rho = \rho_\mathcal{A}$.

Ahora para ver que $\rho_\mathcal{A}$ es monótona, sean $X, Y \in L^\infty$ tal que $Y \leq X$ $c.s.$, y $\rho_\mathcal{A}(Y)$ está dado por $\rho_\mathcal{A}(Y) = \text{ínf.es}\{Z \in L^\infty_\mathcal{G} | Z + Y \in \mathcal{A}\}$ $c.s.$ Sea $Z \in \{Z \in L^\infty_\mathcal{G} | Z + Y \in \mathcal{A}\}$, entonces $Z + Y \in \mathcal{A}$, por hipótesis $Y \leq X$ $c.s.$ entonces $Y + Z \leq X + Z$ $c.s.$, y dado que $\mathcal{A}$ es sólido $X + Z \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto probamos que: $\{Z \in L^\infty_\mathcal{G} | Z + Y \in \mathcal{A}\} \subseteq \{Z \in L^\infty_\mathcal{G} | Z + X \in \mathcal{A}\}$, tomando el ínfimo esencial $\text{ínf.es}\{Z \in L^\infty_\mathcal{G} | Z + X \in \mathcal{A}\} \leq \text{ínf.es}\{Z \in L^\infty_\mathcal{G} | Z + Y \in \mathcal{A}\}$ $c.s.$, por lo tanto $\rho_\mathcal{A}(X) \leq \rho_\mathcal{A}(Y)$ $c.s.$

La prueba que $\rho_\mathcal{A}(0) = 0$ $c.s.$, tenemos que $\rho_\mathcal{A}(0) = \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_\mathcal{G} | Y + 0 \in \mathcal{A}_\rho\} = 0$ $c.s.$ por hipótesis del inciso (c).

Probemos que es convexa condicional. Supongamos que $X, Y \in L^\infty$ y $Z_X, Z_Y \in L^\infty_\mathcal{G}$, tal que $Z_X + X, Z_Y + Y \in \mathcal{A}$. Sea $\Lambda \in L^\infty_\mathcal{G}$ tal que $0 \leq \Lambda \leq 1$, la convexidad condicional de $\mathcal{A}$ implica que $\Lambda(Z_X + X) + (1-\Lambda)(Z_Y + Y) \in \mathcal{A}$, entonces,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \rho_\mathcal{A}(\Lambda(Z_X + X) + (1-\Lambda)(Z_Y + Y)) \\
&= \rho_\mathcal{A}(\Lambda Z_X + \Lambda X + (1-\Lambda)Z_Y + (1-\Lambda)Y) \\
&= \rho_\mathcal{A}((\Lambda X + (1-\Lambda)Y) + (\Lambda Z_X + (1-\Lambda)Z_Y)) \\
&= \rho_\mathcal{A}(\Lambda X + (1-\Lambda)Y) - (\Lambda Z_X + (1-\Lambda)Z_Y) \ \ c.s.,
\end{aligned}$$

donde la útltima igualdad es gracias a la invarianza con respecto a traslaciones de $\rho_\mathcal{A}$, ya que $(\Lambda Z_X + (1-\Lambda)Z_Y) \in L^\infty_\mathcal{G}$. Tomando $Z_X = \rho_\mathcal{A}(X)$ $c.s.$ y $Z_Y = \rho_\mathcal{A}(Y)$ $c.s.$ tenemos que $\Lambda\rho_\mathcal{A}(X) +$

$(1-\Lambda)\rho_{\mathcal{A}}(Y) \geq \rho_{\mathcal{A}}(\Lambda X + (1-\Lambda)Y)$ *c.s.*, por lo tanto la convexidad de $\rho_{\mathcal{A}}$ se sigue. ■

3.4. Representación robusta de medidas de riesgo condicionales convexas.

Como vimos en la sección 2.4 en el caso no condicional, una medida de riesgo convexa $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ podemos representarla de como:

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathcal{P}}\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)\}, \quad X \in L^\infty,$$

en términos de $\alpha : \mathcal{P} \to \mathbb{R} \cup +\infty$ la función de penalización. Además, ρ es continua por arriba (proposición 2.4.3). Ahora, probaremos una caracterización similar que vale para medidas de riesgo convexas condicionales. En este caso más general, las esperanzas son condicionales con respecto a la información adicional disponible $\mathcal{G}$, la función de penalización α es una variable aleatoria y el supremo ahora será entendido como un supremo esencial. Además, la información adicional en el caso condicional nos ayuda a excluir a priori algunos modelos probabilísticos. Vamos a ver que solamente los modelos $\mathcal{P}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{P}$ que se definieron al principio de este capítulo, serán los que entran en la representación.

Para la siguiente definición es necesario introducir el siguiente subconjunto del conjunto de las variables aleatorias extendidas $L^0(\overline{\mathbb{R}})$ (apéndice B.5).

$$L^0_{\mathcal{G}}(\overline{\mathbb{R}_+}) = \{X \in L^0(\overline{\mathbb{R}}) | X \text{ es } \mathcal{G}\text{-medible}, \ X \geq 0\}.$$

Definición 3.4.1. (Representación robusta condicional).

Una función $\rho : L^\infty \to L^\infty_{\mathcal{G}}$ decimos que es representable si existe una función $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{G}} \to L^0_{\mathcal{G}}(\overline{\mathbb{R}_+})$ tal que

$$\rho(X) = \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_{\mathcal{G}}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha(Q)\} \quad c.s. \quad X \in L^\infty. \tag{3.1}$$

En este caso a α la llamaremos función de penalización aleatoria para ρ.

Claramente la medida de riesgo representable es $\mathcal{G}$-medible ya que es la resta de dos funciones $\mathcal{G}$-medibles y su supremo esencial es $\mathcal{G}$-medible (observación B.5.2). Mostraremos que cualquier función representable con función de penalización (aleatoria) α que satisface

$$\text{ínf.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\alpha(Q) = 0 \ \ c.s.,$$

es una medida de riesgo convexa condicional normalizada.

Para demostrar que es medida de riesgo veamos:

Monotonía. Sean $X, Y \in L^\infty$ tal que $X \leq Y \ \ c.s.$ Entonces $-Y \leq -X \ \ c.s.$ y por la monotonía de la esperanza condicional (ver A.26) $\mathbb{E}_Q(-Y|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) \ \ c.s.$ para toda $Q \in \mathcal{P}$, restamos $\alpha(Q)$ y obtenemos

$$\mathbb{E}_Q(-Y|\mathcal{G}) - \alpha(Q) \leq \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - \alpha(Q) \ \ c.s. \ \text{ para toda } Q \in \mathcal{P}.$$

Tomando el supremo esencial sobre Q concluimos que $\rho(Y) \leq \rho(X) \ \ c.s.$.

Para probar la invarianza con respecto a traslaciones. Sean $X \in L^\infty$ y $Z \in L^\infty_\mathcal{G}$, entonces por la linealidad de $\mathbb{E}_Q$, para toda $Q \in \mathcal{P}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q(-(X+Z)|\mathcal{G}) - \alpha(Q) &= \mathbb{E}_Q(-X - Z|\mathcal{G}) - \alpha(Q) \\
&= \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - Z - \alpha(Q) \\
&= (\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - \alpha(Q)) - Z \ \ c.s.,
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se debe al hecho de que Z es $\mathcal{G}$-medible. Tomando el supremo esencial sobre $Q \in \mathcal{P}$ la igualdad se mantiene y $\rho((X+Z)) = \rho(X) - Z \ \ c.s.$

Por último, para mostrar convexidad. Sean $X, Y \in L^\infty$ y $\Lambda \in L^\infty_\mathcal{G}$ con $0 \leq \Lambda \leq 1$. Entonces, por la linealidad de la esperanza condicional y tomando en cuenta que Λ es $\mathcal{G}$-medible e independiente de X y Y, entonces $\mathbb{E}_Q(\Lambda X|\mathcal{G}) = \Lambda\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) \ \ c.s.$ Para toda $Q \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_Q[-(\Lambda X + (1-\Lambda)Y)|\mathcal{G}] - \alpha(Q) &= \mathbb{E}_Q[-\Lambda X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}_Q[-(1-\Lambda)Y|\mathcal{G}] - \alpha(Q) \\
&= \Lambda\mathbb{E}_Q[-X|\mathcal{G}] + (1-\Lambda)\mathbb{E}_Q[-Y|\mathcal{G}] - \alpha(Q) \\
&= \Lambda\mathbb{E}_Q[-X|\mathcal{G}] + (1-\Lambda)\mathbb{E}_Q[-Y|\mathcal{G}] - \Lambda\alpha(Q) - (1-\Lambda)\alpha(Q) \\
&= \Lambda(\mathbb{E}_Q[-X|\mathcal{G}] - \alpha(Q)) + (1-\Lambda)(\mathbb{E}_Q[-Y|\mathcal{G}] - \alpha(Q)) \ \ c.s.,
\end{aligned}$$

Tomando el supremo esencial concluimos que:

$$
\begin{aligned}
\rho(\Lambda X + (1-\Lambda)Y) &= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}}\{\mathbb{E}_Q[-(\Lambda X + (1-\Lambda)Y)|\mathcal{G}] - \alpha(Q)\} \\
&= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}}\{\Lambda(\mathbb{E}_Q[-X|\mathcal{G}] - \alpha(Q)) + (1-\Lambda)(\mathbb{E}_Q[-Y|\mathcal{G}] - \alpha(Q))\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Lambda \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}}\{\mathbb{E}_Q[-X|\mathcal{G}] - \alpha(Q)\} + (1-\Lambda)\text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}}\{\mathbb{E}_Q[-Y|\mathcal{G}] - \alpha(Q)\} \\
&= \Lambda\rho(X) + (1-\Lambda)\rho(Y) \;\; c.s.
\end{aligned}
$$

La penúltima igualdad se da gracias al lema B.5.4.

Para ver que es normalizada $\rho(0) = \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{-\mathbb{E}_Q(0|\mathcal{G}) - \alpha(Q)\} = \text{ínf.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\alpha(Q) = 0 \;\; c.s.$

Observación 3.4.2. Bajo esta representación de ρ (3.1), si consideramos la función $\rho_0 : L^\infty \to \mathbb{R}$ como $\rho_0 = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\rho(X)] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha(Q)\}]$ recuperamos una medida de riesgo convexa estática, tomando en cuenta que $\rho(X)$ es medida de riesgo condicional convexa.

Demostración. Para ver que es monótona. Sean $X, Y \in L^\infty$ y $X \leq Y \;\; c.s.$, entonces $\rho(Y) \leq \rho(X) \;\; c.s.$ y por la monotonía de la esperanza $\rho_0(Y) = \mathbb{E}_Q(\rho(Y)) \leq \mathbb{E}_Q(\rho(X)) = \rho_0(X) \;\; c.s.$ Para probar invarianza con respecto a traslaciones sean $X \in L^\infty$ y $m \in \mathbb{R}$. $\rho_0(X+m) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(\rho(X+m)) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(\rho(X) - m) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(\rho(X)) - m = \rho_0(X) - m \;\; c.s.$ Por útlimo para probar la convexidad, sean $X,\ Y \in L^\infty$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces $\rho_0(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y)) \leq \mathbb{E}_\mathbb{P}(\lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)) = \lambda\mathbb{E}(\rho(X)) + (1-\lambda)\mathbb{E}_\mathbb{P}(\rho(Y)) = \lambda\rho_0(X) + (1-\lambda)\rho_0(Y)$. Por lo tanto la esperanza de una medida de riesgo convexa condicional, es una medida de riesgo no condicional (estática) que estudiamos en el capítulo 2. ■

Ahora, damos un teorema de representación de medidad de riesgo condicionales convexas.

Teorema 3.4.3. Sea $\rho : L^\infty \to L^\infty_\mathcal{G}$ una medida de riesgo condicional convexa, y sean $\{X_n\}, X \in L^\infty$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) ρ es continua por arriba, es decir, si X_n tiende por arriba a X casi seguramente implica que $\rho(X_n)$ tiende por abajo a $\rho(X)$ casi seguramente;

(b) ρ es representable; (ver 3.1),

(c) ρ es representable en términos de

$$\alpha(Q) = \alpha^*(Q) = \text{sup.es}_{X \in L^\infty}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho(X)\} \;\; c.s., \quad Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}. \tag{3.2}$$

Demostración. (c)$\Longrightarrow$(b). Es inmediata a partir de la definición de representabilidad.

(b)$\Longrightarrow$(a). Suponemos que ρ es representable con función de penalización α y que X_n decrece a X $c.s.$ Entonces X_n crece a X $c.s.$ Por el teorema de convergencia dominada (B.3.2) concluimos que

$$-\mathbb{E}_Q(X_n|\mathcal{G}) - \alpha(Q) \nearrow -\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha(Q) \;\; c.s.,$$

para toda $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$. Entonces por hipótesis podemos escribir a ρ como:

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \text{sup.es}_{Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha(Q)\} \\
&= \text{sup.es}_{Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}}\{\lim_{n\to\infty}[-\mathbb{E}_Q(X_n|\mathcal{G}) - \alpha(Q)]\} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \text{sup.es}\{-\mathbb{E}_Q(X_n|\mathcal{G}) - \alpha(Q)\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n) \;\; c.s.,
\end{aligned}$$

donde la desigualdad la tenemos por el lema B.5.7.

Por otro lado, tenemos que $X \leq X_n$ $c.s.$ para toda n ya que X_n decrece a X $c.s.$. Entonces por la monotonía de ρ pasa que $\rho(X_n) \leq \rho(X)$ $c.s.$ para toda n, en especial $\liminf_{n\to\infty} \rho(X_n) \leq \rho(X)$ $c.s.$ Y además como $\rho(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(X_n)$ $c.s.$, entonces $\rho(X_n)$ crece a $\rho(X)$ casi seguramente.

(a)$\Longrightarrow$(c). A partir de la definición de α^* (3.2), para $Q \in \mathcal{P}$ podemos obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha^*(Q) &= \text{sup.es}_{X \in L^\infty}\{\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho(X)\} \\
&\geq \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho(X) \;\; c.s.,
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathcal{X}$. Entonces podemos ver que $\rho(X) \geq \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)$ $c.s.$ para toda $Q \in \mathcal{P}$, en especial para el supremo esencial. Entonces

$$\rho(X) \geq \text{sup.es}_{Q \in \mathcal{P}}\{\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)\} \;\; c.s.$$

Ahora, para probar la representabilidad de ρ, es suficiente mostrar que

$$\mathbb{E}_Q[\rho(X)] \leq \mathbb{E}_Q[\text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}}\{\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)\}],$$

ya que si $X \leq Y$ $c.s.$ y además $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$ entonces $X = Y$ $c.s.$ (ver proposición B.2.1).

Para mostrar esto, consideremos la función $\rho_0 : L^\infty \to \mathbb{R}$ como $\rho_0(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho(X))$. Como vimos en la observación 3.4.2 ρ_0 es una medida de riesgo convexa estática, por lo que podemos usar resultados vistos en el capítulo anterior; además, si X_n decrece a X $c.s.$, entonces $\rho(X_n)$ crece a $\rho(X)$ $c.s.$ y, por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\rho_0(X_n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho(X_n)) \nearrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho(X)) = \rho_0(X).$$

Entonces ρ_0 es continua por arriba como se definió en el lema 2.4.3. Ahora, por el teorema 2.4.4 para medidas de riesgo estáticas que vimos en el capítulo anterior, como ρ es continua por arriba tiene la siguiente representación:

$$\rho_0(X) = \sup_{Q\in\mathcal{P}}\{-\mathbb{E}_Q(X) - \alpha_0^*(Q)\},$$

donde,

$$\alpha_0^*(Q) = \sup_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(qX) - \rho_0(X)\}.$$

Ahora, probaremos que si $\alpha_0^*(Q) < +\infty$ entonces $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$. Veamos que si $X \in L^\infty_{\mathcal{G}}$ entonces por la invarianza con respecto a traslaciones tenemos que $\rho_0(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho(X)) = -\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$. Supongamos que $Q(A) \neq \mathbb{P}(A)$ para alguna A en $\mathcal{G}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha_0^*(Q) &= \sup_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_Q(X) - \rho_0(X)\} \\
&\geq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{-\mathbb{E}_Q(\lambda I_A) - \rho_0(\lambda I_A)\} \\
&= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{-\mathbb{E}_Q(\lambda I_A) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\lambda I_A)\} \\
&= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{-\lambda Q(A) + \lambda\mathbb{P}(A)\} = +\infty,
\end{aligned}$$

la primera desigualdad se da gracias a la indicadora sobre A ya que tenemos un subconjunto, y la segunda igualdad se da por la definición de ρ_0 y la invarianza con respecto a traslaciones de ρ.

Ahora, dado que $\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}))$ para toda $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$, y la última igualdad se da ya que $\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})$ es $\mathcal{G}$-medible. Entonces por las dos pruebas anteriores podemos reescribir a ρ_0 como:

$$\rho_0(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}} \{-\mathbb{E}_\mathbb{P}(\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})) - \alpha_0^*(Q)\}.$$

El siguiente paso es probar que $\mathbb{E}_\mathbb{P}(\alpha^*(Q)) = \alpha_0^*(Q)$ para toda $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$. Para probar esto, definamos el conjunto $\mathcal{B}_Q = \{\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho(X) | X \in L^\infty\}$. Probaremos que este conjunto es dirigido hacia arriba, es decir, que para cualesquier $X, Y \in \mathcal{B}_Q$, existe $Z \in \mathcal{B}_Q$ con $\text{máx}(\{X, Y\}) \leq Z$. Sean $X, Y \in L^\infty$, $A = \{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho(X) \geq -\mathbb{E}_Q(Y|\mathcal{G}) - \rho(Y)\} \in \mathcal{G}$, podemos definir $Z = XI_A + YI_{A^c} \in L^\infty$. Entonces, dado que I_A y I_{A^c} son $\mathcal{G}$-medibles, $0 \leq I_A \leq 1$ y $I_{A^c} = 1 - I_A$, por la convexidad condicional de ρ tenemos que:

$$\rho(Z) = \rho(XI_A + YI_{A^c}) \leq I_A \rho(X) + I_{A^c} \rho(Y) \quad c.s.$$

Como consecuencia de estos hechos podemos ver que

$$\begin{aligned}
-\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \rho(Z) &= -\mathbb{E}_Q(XI_A + YI_{A^c}|\mathcal{G}) - \rho(XI_A + YI_{A^c}) \\
&\geq -\mathbb{E}_Q(XI_A\mathcal{G}) - \mathbb{E}_Q(YI_{A^c}|\mathcal{G}) - I_A\rho(X) - I_{A^c}\rho(Y) \\
&= -I_A\mathbb{E}_Q(X\mathcal{G}) - I_{A^c}\mathbb{E}_Q(Y|\mathcal{G}) - I_A\rho(X) - I_{A^c}\rho(Y) \\
&= I_A[-\mathbb{E}_Q(X\mathcal{G}) - \rho(X)] + I_{A^c}[-\mathbb{E}_Q(Y|\mathcal{G}) - \rho(Y)] \\
&\geq \text{máx}(-\mathbb{E}_Q(X\mathcal{G}) - \rho(X), -\mathbb{E}_Q(Y\mathcal{G}) - \rho(Y)) \quad c.s.,
\end{aligned}$$

la primera desigualdad se da por la convexidad de ρ, la segunda igualdad es gracias a que I_A y I_{A^c} son $\mathcal{G}$-medibles, y la última desigualdad es gracias a como definimos el conjunto A. Por lo tanto $\mathcal{B}_Q$ es dirigido hacia arriba.

Entonces, por el resultado anterior para $\mathcal{B}_Q$ el lema B.5.3, implica que para todo $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mathbb{P}(\alpha^*(Q)) &= \mathbb{E}_\mathbb{P}(\text{sup.es}_{X \in L^\infty}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho(X)\}) \\
&= \sup_{X \in L^\infty}\{\mathbb{E}_\mathbb{P}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho(X))\}
\end{aligned}$$

$$= \sup_{X \in L^\infty} \{-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho(X))\}$$

$$= \sup_{X \in L^\infty} \{-\mathbb{E}_Q(X) - \rho_0(X)\} = \alpha_0^*(Q),$$

la última igualdad se da gracias a la equivalencia de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}))$ antes dada y la definición de ρ_0.

Por último notemos lo siguiente: que para toda $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$,

$$-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q) \leq \text{sup.es}_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)\} \quad c.s.,$$

entonces por la monotonía de la esperanza $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)\}) \quad c.s.$, en especial para el supremo. Entonces,

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q))] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)\}) \quad c.s.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho(X)) &= \sup_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}} [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\alpha^*(Q))] \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)\}) \quad c.s. \end{aligned}$$

■

Observación 3.4.4. Análogamente al caso estático, la función de penalización α^* del teorema anterior 3.4.3 es la *mínima función de penalización* para la representación de la medida de riesgo ρ, es decir, $\alpha^* \leq \alpha$ para toda función de penalización α para ρ.

Demostración. Para probar esto, en el teorema 3.4.3 definimos $\alpha^*(Q) = \text{sup.es}_{X \in L^\infty}\{-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X|\mathcal{G}) - \rho(X)\} \quad c.s.$ Entonces sea α cualquier función de penalización para ρ, entonces para todo todo $Q \in \mathcal{P}$ y todo $X \in L^\infty$;

$$\rho(X) \geq \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - \alpha(Q) \quad c.s.,$$

y entonces, $\alpha(Q) \geq \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - \rho(X) \quad c.s.$ para toda $X \in L^\infty$, en especial para el supremo esencial, entonces $\alpha(Q) \geq \text{sup.es}_{X \in L^\infty}(\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - \rho(X)) = \alpha^*(Q) \quad c.s.$

Ahora, veamos que se cumple la siguiente igualdad como el caso no condicional:

$$\alpha^*(Q) = \alpha_{min}(Q) = \text{sup.es}_{X\in\mathcal{A}_\rho}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})\} \;\; c.s., \quad Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}.$$

Veamos que que:

$$\begin{aligned}\alpha^*(Q) &= \text{sup.es}_{X\in L^\infty}(\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - \rho(X))\\ &\geq \text{sup.es}_{X\in\mathcal{A}_\rho}(\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G}) - \rho(X))\\ &\geq \text{sup.es}_{X\in\mathcal{A}_\rho}(\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{G})) = \alpha_{min}(Q) \;\; c.s.,\end{aligned}$$

la primera desigualdad es por que $\mathcal{A}_\rho \subseteq L^\infty$, y la última es gracias a que $\rho(X) \leq 0$ ya que $X \in \mathcal{A}_\rho$. Pero habíamos probado que α^* es la mínima función de penalización, entonces $\alpha^*(Q) = \alpha_{min}(Q)$. ■

Por último, damos el siguiente lema que nos será de utilidad en el próximo capítulo.

Lema 3.4.5. Si α^* es la *mínima función de penalización* de una medida de riesgo ρ representable y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ sub-σ-álgebra, entonces

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}(\rho(X)|\mathcal{H}) = \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{H}) - \mathbb{E}_\mathbb{P}(\alpha^*(Q)|\mathcal{H})\} \;\; c.s., \quad X \in L^\infty.$$

Demostración. Primero definamos el siguiente conjunto $\mathcal{C}_X = \{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q)|Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}\}$. Veamos que $\mathcal{C}_X$ es dirigido hacia arriba, sean Q' y $Q'' \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$. Definamos la medida de probabidad $Q \in \mathcal{F}$ como:

$$Q(B) = Q'(A \cap B) + Q''(A^c \cap B), \quad B \in \mathcal{F},$$

donde al conjunto A lo definimos como:

$$A = \{-\mathbb{E}_{Q'}(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q') \geq -\mathbb{E}_{Q''}(X|\mathcal{G}) - \alpha^*(Q'')\} \subseteq \mathcal{G}.$$

como Q' y $Q'' \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$ entonces $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{G}$. Por la definición de Q sobre el conjunto A podemos escribir $\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) = I_A\mathbb{E}_{Q'}(X|\mathcal{G}) + I_{A^c}\mathbb{E}_{Q''}(X|\mathcal{G})$ para toda $X \in L^\infty$. Por este resultado y por la definición de α^* (ecuación 3.2),

$$\begin{aligned}\alpha^*(Q) &= \text{sup.es}_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})-\rho(X)\}\\ &= \text{sup.es}_{X\in L^\infty}\{I_A(-\mathbb{E}_{Q'}(X|\mathcal{G})-\rho(X))+I_{A^c}(-\mathbb{E}_{Q''}(X|\mathcal{G})-\rho(X))\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= I_A\text{sup.es}_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_{Q'}(X|\mathcal{G})-\rho(X)\}+I_{A^c}\text{sup.es}_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_{Q''}(X|\mathcal{G})-\rho(X)\}\\ &= I_A\alpha^*(Q')+I_{A^c}\alpha^*(Q'') \quad c.s.,\end{aligned}$$

la tercera igualdad la obtenemos haciendo uso del lema B.5.4, y la útlima por definición de α^*. Por consecuencia de esto,

$$\begin{aligned}-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})-\alpha^*(Q) &= I_A(-\mathbb{E}_{Q'}(X|\mathcal{G})-\alpha^*(Q'))+I_A(-\mathbb{E}_{Q''}(X|\mathcal{G})-\alpha^*(Q''))\\ &\geq \text{máx}(\mathbb{E}_{Q'}(X|\mathcal{G})-\alpha^*(Q'),-\mathbb{E}_{Q''}(X|\mathcal{G})-\alpha^*(Q'')) \quad c.s.,\end{aligned}$$

gracias a la definición de A. Entonces, el conjunto $\mathcal{C}_X$ es dirigido hacia arriba y por el lema B.5.3 concluimos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho(X)|\mathcal{H}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}((\text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})-\alpha^*(Q)\})|\mathcal{H})\\ &= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})-\alpha^*(Q)|\mathcal{H})\}\\ &= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\alpha^*(Q)|\mathcal{H})\}\\ &= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\alpha^*(Q)|\mathcal{H})\}\\ &= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{H})-\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\alpha^*(Q)|\mathcal{H})\} \quad c.s.,\end{aligned}$$

donde la última igualdad la tenemos ya que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G})|\mathcal{H})=\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{H})$ $c.s.$ por el lema B.2.2 y que $Q\in\mathcal{P}_\mathcal{G}$. ■

Capítulo 4

Medidas de riesgo dinámicas convexas.

En este capítulo llegamos al desarrollo de medidas de riesgo en un ambiente dinámico donde se realiza una suseción de medidas de riesgo. A diferencia de una medida de riesgo estática que medimos el riesgo en un punto del tiempo de la posición financiera X, en una medida de riesgo dinámica vamos a medir el riesgo en distintos puntos del tiempo antes del fin de la posición X, ya que como vimos en el capítulo anterior hay información disponible que altera la medición del riesgo de X, entonces conforme el tiempo pasa, la información cambia, y por lo tanto el riesgo de la posición X cambia. Primero introduciremos una clase especial de medidas de riesgo, que son un ejemplo de medidas de riesgo convexas condicionales que no son coherentes.

4.1. La clase de medidas de riesgo entrópicas.

Las medidas de riesgo entrópicas dependen de la aversión al riesgo del inversionista, y, donde las preferencias del inversionista las podemos representar mediante una función de *utilidad esperada* exponencial del la posición financiera X, denotada por: $U(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(X))$, donde $u_\gamma(X) = 1 - \exp(-\gamma X)$, conocida como función de utilidad exponencial, y $\gamma > 0$ es el coeficiente de aversión al riesgo. Este hecho, hace que la medida de riesgo provee distintos valores de riesgo para distintos individuos.

4.1.1. Medidas de riesgo entrópicas estáticas.

Consideremos la función de penalización $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{G}} \to (0, \infty]$ definida de la siguiente forma:

$$\alpha(Q) = \frac{1}{\gamma} H(Q|\mathbb{P}),$$

donde $\gamma > 0$ es una constante y

$$H(Q|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_Q \left[\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right]$$

es la entropía relativa de $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ con respecto a $\mathbb{P}$ (definición B.7.1), donde $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}$ es conocida como la densidad de Radon-Nikodym (ver B.4) que para este fin suponemos que es finita casi seguramente. La medida de riesgo en su representación robusta correspondiente a la función de penalización α está dada por

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}} \left(\mathbb{E}_Q(-X) - \frac{1}{\gamma} H(Q|\mathbb{P}) \right).$$

Esta es la medida de riesgo entrópica, y la constante γ es el coeficiente de aversión al riesgo para un agente inversor. Ahora, por el lema B.7.2 tenemos que

$$H(Q|\mathbb{P}) \geq \mathbb{E}_Q(Z) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z), \quad \text{para todo } Z \in L^\infty.$$

Tomando $Z = -\gamma X$, $X \in L^\infty$ y $\gamma \geq 0$. Entonces, $H(Q|\mathbb{P}) \geq \gamma \mathbb{E}_Q(-X) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X})$, lo que implica que

$$\mathbb{E}_Q(-X) - \frac{1}{\gamma} H(Q|\mathbb{P}) \leq \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}).$$

La cota superior es alcanzada por la medida con la densidad $\frac{dQ}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{-\gamma X}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X})}$, ya que

$$\begin{aligned} H(Q|\mathbb{P}) &= \mathbb{E}_Q \left[\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[\log \frac{e^{-\gamma X}}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X})} \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[\log e^{-\gamma X} \right] - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}) \\ &= \gamma \mathbb{E}_Q(-X) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}). \end{aligned}$$

Entonces, $\mathbb{E}_Q(-X) - \frac{1}{\gamma}H(Q|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_Q(-X) - \frac{1}{\gamma}(\gamma\mathbb{E}_Q(-X) - \log\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X})) = \frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X})$. Por lo tanto, la medida entrópica de riesgo toma la forma

$$\rho(X) = \frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}).$$

Notemos que $\alpha = \alpha^*$ la mínima función de penalización que representa a ρ, tomando $Z = -\gamma X$, $X \in L^\infty$ y $\gamma \geq 0$, el lema B.7.2 implica que:

$$\alpha(Q) = \frac{1}{\gamma}H(Q|\mathbb{P}) = \sup_{X \in L^\infty}\left(\mathbb{E}_Q(-X) - \frac{1}{\gamma}\log\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X})\right) = \alpha^*(Q).$$

Por último, de acuerdo a lo que mencionamos que las preferencias del inversionista las podemos representar mediante una *utilidad esperada* exponencial del la posición financiera X; $U(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(X))$, donde $u_\gamma(X) = 1 - \exp(-\gamma X)$ y $\gamma > 0$ es el coeficiente de aversión al riesgo, es natural pensar que el conjunto de aceptación para estás posiciónes financieras sería:

$$\mathcal{A}_\gamma = \{X \in L^\infty | \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(X)) \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(0)) = 0\},$$

es decir, aceptamos la posición si la utilidad esperada de esta es mayor que la utilidad de la posición cero que es cero. Podemos ver que este conjunto es sólido y convexo. Para probar que es sólido, sean $X \in \mathcal{A}_\gamma$ y $Y \in L^\infty$ tal que $X \leq Y$. Tenemos que ver que $Y \in \mathcal{A}_\gamma$. Entonces, claramente u_γ es monótona al igual que la esperanza, entonces $0 \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(X)) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(Y))$ ya que $X \in \mathcal{A}_\gamma$, por lo tanto $Y \in \mathcal{A}_\gamma$. Para ver que es convexo, sean $X, Y \in \mathcal{A}_\gamma$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces, $\lambda\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(X)) \geq 0$ y $(1-\lambda)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(Y)) \geq 0$. Esto implica que $\lambda\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(X)) + (1-\lambda)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(Y)) \geq 0$. Ahora, para concluir la prueba veamos que la función $u_\gamma(X) = 1 - \exp(-\gamma X)$ es cóncava, es decir, $\lambda u_\gamma(X) + (-\lambda)u_\gamma(Y) \leq u_\gamma(\lambda X + (1-\lambda)Y)$. Entonces, partiendo del hecho de que la función exponencial es convexa tenemos que: $e^{\lambda X + (1-\lambda)Y} \leq \lambda e^{-X} + (1-\lambda)e^{-Y}$, multiplicando por -1 tenemos que $-\lambda e^{-X} - (1-\lambda)e^{-Y} \leq -e^{\lambda X + (1-\lambda)Y}$, sumamos 1 de cada lado de la desigualdad y obtenemos $[\lambda - \lambda e^{-X}] + [(1-\lambda) - (1-\lambda)e^{-Y}] \leq 1 - e^{\lambda X + (1-\lambda)Y}$, finalmente factorizando concluimos que

$$\lambda(1 - e^{-X}) + (1-\lambda)(1 - e^{-Y}) \leq 1 - e^{\lambda X + (1-\lambda)Y}.$$

Por lo tanto como $\gamma > 0$ no afecta las desigualdades, y podemos concluir que

$$\lambda u_\gamma(X) + (1-\lambda)u_\gamma(Y) \leq u_\gamma(\lambda X + (1-\lambda)Y).$$

Entonces

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(\lambda X + (1-\lambda)Y)) \geq \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(X)) + (1-\lambda)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u_\gamma(Y)) \geq 0,$$

por lo tanto $\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\gamma$.

Entonces, con la definición de este conjuto de aceptación podemos definir una medida de riesgo convexa entrópica $\rho_{\mathcal{A}_\gamma}$ asociada al coeficiente de aversión al riesgo γ como:

$$\rho_{\mathcal{A}_\gamma} = \text{ínf}\{m \in \mathbb{R} | m + X \in \mathcal{A}_\gamma\}.$$

4.1.2. Medidas de riesgo entrópicas condicionales.

Fijemos $\mathcal{G}$ subσ-álgebra de $\mathcal{F}$ en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que entenderemos nuevamente como información adicional disponible. Supongamos, como antes, que las preferencias del agente inversor las podemos caracterizar por medio de una función de utilidad exponencial $u_\gamma(X) = 1 - \exp(-\gamma X)$, y el coeficiente de aversión al riesgo para este agente $\gamma > 0$. La función de utilidad esperada (aleatoria) del inversionista condicionada a la información disponible $\mathcal{G}$ es:

$$U_\gamma = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(1 - e^{(-\gamma X)}|\mathcal{G}) = 1 - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{(-\gamma X)}|\mathcal{G}) \in L^0_{\mathcal{G}}.$$

Análogamente, como en el caso no condicional, el conjunto de aceptación

$$\mathcal{A}_\gamma = \{X \in L^\infty | U_\gamma(X) \geq U_\gamma(0) = 0, \} = \{X \in L^\infty | \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{G}) \leq 1\}$$

es sólido y convexo condicional, además, ínf.es$\{X \in L^\infty_{\mathcal{G}} | X \in \mathcal{A}_\gamma\} = 0$ por como hemos definido $\mathcal{A}_\gamma$. Entonces por la proposición 3.3.1, la medida de riesgo asociada a este conjunto es convexa condicional, y podemos representarla como:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{A}_\gamma}(X) = \rho_\gamma(X) &= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} | X + Y \in \mathcal{A}_\gamma\} \\ &= \text{ínf.es}\{Y \in L^\infty_{\mathcal{G}} | \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma(X+Y)}|\mathcal{G}) \leq 1\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \text{ínf.es}\{Y \in L^{\infty}_{\mathcal{G}} | \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X} e^{-\gamma Y} | \mathcal{G}) \leq 1\} \\
&= \text{ínf.es}\{Y \in L^{\infty}_{\mathcal{G}} | \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X} | \mathcal{G}) e^{-\gamma Y} \leq 1\} \\
&= \text{ínf.es}\{Y \in L^{\infty}_{\mathcal{G}} | \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X} | \mathcal{G}) \leq e^{\gamma Y}\} \\
&= \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X} | \mathcal{G}) c.s.,
\end{aligned}
$$

donde la cuarta igualdad se da por el hecho de que Y es $\mathcal{G}$-medible, por lo tanto $e^{-\gamma Y}$ también lo es. Y la última igualdad es gracias a que el ínfimo esencial se alcanza en esa variable.

Definición 4.1.3. (Medida de riesgo entrópica condicional). La medida de riesgo

$$
\rho_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma} \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X} | \mathcal{G})
$$

es llamada medida de riesgo entrópica condicional asociada con el coeficiente de aversión al riesgo $\gamma > 0$.

El término *entrópica* se deriva, como en el caso condicional, de la forma de la función de penalización en la representación robusta. Esto es, podemos extender el concepto de entropía relativa (definición B.7.1) al ámbito condicional:

Definición 4.1.4. (Entropía relativa condicional). Para toda $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ la entropía relativa condicional de Q con respecto a $\mathbb{P}$ es

$$
H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_Q \left(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}} | \mathcal{G} \right).
$$

Ahora, se obtiene un resultado análogo al que se tenía para la familia de medidas de riesgo entrópicas en el caso no condicional. Es importante notar que estos resultados son equivalentes a los que se tienen en el caso no condicional, pero tomando en cuenta esperanzas condicionales.

Con esta noción de entropía relativa condicional, podemos representar la mínima función de penalización de una medida de riesgo entrópica condicional. Para este fin damos el siguiente lema.

Lema 4.1.5. Para todo $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ pasa que:

$$
\text{sup.es}_{Z \in L^{\infty}} \{\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z | \mathcal{G})\} = H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) \quad c.s.
$$

Demostración. Primero probaremos que

$$\text{sup.es}_{Z\in L^\infty}\{\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G})\} \leq H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) \quad c.s.$$

Para este fin tenemos que suponer que $H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) < \infty$. Para todo $Z \in L^\infty$ definimos la siguiente variable aleatoria:

$$\varphi^Z = \frac{d\mathbb{P}^Z}{\mathbb{P}} = \frac{e^Z}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G})} \quad c.s.,$$

que es estrictamente positiva c.s., integrable y $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi^Z) = 1$, entonces, es la densidad con respecto a la medida $\mathbb{P}$ de una medida de probabilidad $\mathbb{P}^Z$, que es equivalente a $\mathbb{P}$, esto implica que $Q \ll \mathbb{P}^Z$ y entonces, partiendo del hecho de que $\frac{e^Z}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G})} = \frac{d\mathbb{P}^Z}{d\mathbb{P}}$, tomando el logaritmo en ambos lados de la igualdad, y por hipótesis de que $Q \ll \mathbb{P}$ obtenemos que

$$Z - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G}) = \log \frac{d\mathbb{P}^Z}{d\mathbb{P}} = \log \frac{\frac{dQ}{d\mathbb{P}}}{\frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}} = \log \frac{dQ}{d\mathbb{P}} - \log \frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z} \quad c.s.$$

Tomando la esperanza condicional con respecto a $\mathcal{G}$ bajo la medida Q

$$\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \mathbb{E}_Q(\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G})|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G}) \quad c.s.$$

Ahora, definimos a la siguiente función $g(x) = x \log x$ para $x > 0$ y $g(0) = 0$ que es convexa (sección B.1). Como ya vimos, $\mathbb{P}^Z \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$, entonces, aplicando la desigualdad de Jensen (Teorema B.2.3) para la función g, y como $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^Z}(\frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G}) = 1$ es la densidad de Q con respecto a $\mathbb{P}^Z$, entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = g(1) &= g(\mathbb{E}_{\mathbb{P}^Z}(\frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G})) \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}^Z}(g(\frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z})|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^Z}(\frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z} \log \frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G}) \quad c.s. \end{aligned}$$

Entonces, probamos que $\mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G}) \geq 0$ *c.s.*, y regresando a la igualdad que habíamos obtenido

$$\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G}) \quad c.s.,$$

notando que $\mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}) = H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P})$, entonces,

$$\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G}) = H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) - \mathbb{E}_Q(\log \frac{dQ}{d\mathbb{P}^Z}|\mathcal{G}) \leq H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) \;\; c.s.$$

para todo $Z \in L^\infty$, en especial para el supremo esencial.

Ahora, probaremos que

$$H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) \leq \text{sup.es}_{Z\in L^\infty}\{\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^Z|\mathcal{G})\} \;\; c.s.$$

Sea $\varphi = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$, que como habíamos mencionado antes es finita, y definamos la sucesión de variables aleatorias acotadas para $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n = \text{mín}(\text{máx}(-n, \log \varphi), n).$$

Z_n converge a $\log \varphi$ casi seguramente ya que la derivada de Radon-Nikodym es positiva e integrable, lo que implica que es finita casi seguramente. Entonces podemos asegurar que e^{Z_n} converge a $e^{\log \varphi}$ casi seguramente. Considerando la esperanza condicional $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{Z_n}|\mathcal{G})$, y ya que e^{Z_n} está acotada por $e^{\log \varphi} = \varphi$ para toda n, y además φ es una variable finita casi seguramente e integrable por como la definimos, entonces, por el teorema de convergencia dominada (observación B.3.3) vemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{Z_n}|\mathcal{G}) \text{ converge a } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{\log \varphi}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{dQ}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}) = 1 \; c.s.$$

Ahora, consideremos los siguientes casos; separando en los conjuntos $\{\varphi \geq 1\}$ y $\{\varphi < 1\}$, por el lema de Fatou (Observación B.3.3) que podemos aplicar sin problemas para el caso $\{\varphi \geq 1\}$ ya que $\varphi Z_n \geq 0$, y para el caso $\{\varphi < 1\}$ lo podemos aplicar como sigue: Por como definimos las variable Z_n vemos que en este caso, $\varphi \log \varphi \leq \varphi Z_n \leq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, además, φZ_n tiende a $\varphi \log \varphi$ cuando n tiende a ∞ como ya lo habíamos dicho. Entonces, $\varphi Z_n - \varphi \log \varphi \geq 0$ $c.s.$ y aplicamos el lema de Fatou para esta variable de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q(\log \varphi|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}_Q(\liminf_{n\to\infty} Z_n|\mathcal{G}) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\liminf_{n\to\infty} \varphi Z_n|\mathcal{G})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\liminf_{n\to\infty}(\varphi Z_n - \varphi\log\varphi + \varphi\log\varphi)|\mathcal{G}) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\liminf_{n\to\infty}(\varphi Z_n - \varphi\log\varphi) + \varphi\log\varphi|\mathcal{G}) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\liminf_{n\to\infty}(\varphi Z_n - \varphi\log\varphi)|\mathcal{G}) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi\log\varphi|\mathcal{G}) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi Z_n - \varphi\log\varphi|\mathcal{G})) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi\log\varphi|\mathcal{G}) \\
&= \liminf_{n\to\infty}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi Z_n|\mathcal{G})) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi\log\varphi|\mathcal{G}) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi\log\varphi|\mathcal{G}) \\
&= \liminf_{n\to\infty}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi Z_n|\mathcal{G})) \\
&= \liminf_{n\to\infty}(\mathbb{E}_{Q}(Z_n|\mathcal{G})) \quad c.s.
\end{aligned}
$$

Notemos que no hay problema al tomar $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi\log\varphi|\mathcal{G})$, ya que φ es finita casi seguramente y además, la función $x\log x \geq -\frac{1}{e}$, ya que es el mínimo de esta función, entonces tenemos que $\varphi\log\varphi \geq -\frac{1}{e}$.

Por lo anterior obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi\log\varphi|\mathcal{G}) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\liminf_{n\to\infty}\varphi Z_n|\mathcal{G}) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi Z_n|\mathcal{G}) \\
&= \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}_{Q}(Z_n|\mathcal{G}) \quad c.s.
\end{aligned}
$$

Entonces, partiendo del hecho anterior se sigue que

$$
\begin{aligned}
H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}) &\leq \liminf_{n\to\infty}\{\mathbb{E}_{Q}(Z_n|\mathcal{G})\} \\
&= \liminf_{n\to\infty}\{\mathbb{E}_{Q}(Z_n|\mathcal{G})\} - \log\liminf_{n\to\infty}\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{Z_n}|\mathcal{G})\} \\
&= \liminf_{n\to\infty}\{\mathbb{E}_{Q}(Z_n|\mathcal{G}) - \log\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{Z_n}|\mathcal{G})\} \\
&\leq \text{sup.es}_{Z\in L^\infty}\{\mathbb{E}_{Q}(Z|\mathcal{G}) - \log\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{Z}|\mathcal{G})\} \quad c.s.,
\end{aligned}
$$

las igualdades se siguen apartir de que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{Z_n}|\mathcal{G})$ converge a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{\log\varphi}|\mathcal{G}) = 1$ c.s. que habíamos probamos anteriormente, y la última desigualdad se da ya que estamos tomando el supremo esencial.

Con esto la prueba está terminada. ■

Ahora, estamos listos para la siguente proposición sobre la función de penalización de la medida entrópica de riesgo.

Proposición 4.1.6. Para todo $\gamma > 0$, $\rho_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{G})$ es representable con la mínima función de penalización

$$\alpha^*(Q) = \frac{1}{\gamma} H_{\mathcal{G}}(Q|\mathbb{P}), \quad Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}.$$

Demostración. Primero, probaremos que ρ_γ es continua por arriba. Sean $X_n \in L^\infty$ tiende por arriba a $X \in L^\infty$ casi seguramente cuando n tiende a infinito, probaremos que $\rho_\gamma(X_n)$ tiende por abajo a $\rho_\gamma(X)$ casi seguramente. Por hipótesis $X \leq X_n$ *c.s.* para toda $n \in \mathbb{N}$, sea $\gamma > 0$, entonces, $-\gamma X_n \leq -\gamma X$ *c.s.* y, además, $-\gamma X_n$ tiende a $-\gamma X$ casi seguramente cuando n tiende a infinito, y como la función exponecial es continua y monótona, $e^{-\gamma X_n} \leq e^{-\gamma X}$, además, $e^{-\gamma X_n}$ tiende a $e^{-\gamma X}$ casi seguramente cuando n tiende a infinito. Ahora, como las variables aleatorias son acotadas por la función $e^{-\gamma X}$ que es acotada e integrable, por el teorema de convergencia dominada para esperanza condicional (observación B.3.3)

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X_n}|\mathcal{G}) \text{ tiende por abajo a } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{G}).$$

Y, como el logaritmo es una función continua y monótona y $\frac{1}{\gamma} > 0$, entonces

$$\rho_\gamma(X_n) = \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X_n}|\mathcal{G}) \text{ tiende por abajo a } \rho_\gamma(X) = \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{G}) \quad c.s.$$

Ahora, por el teorema 3.4.3, ρ_γ es representable en términos de α^*. La forma de la mínima función de penalización se sigue de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\alpha^*(Q) &= \text{sup.es}_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \rho_\gamma(X)\} \quad Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}} \\
&= \text{sup.es}_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) - \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{G})\} \\
&= \frac{1}{\gamma}\text{sup.es}_{Z\in L^\infty}\{\mathbb{E}_Q(Z|\mathcal{G}) - \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{Z}|\mathcal{G})\} \\
&= \frac{1}{\gamma} H_\gamma(Q|\mathbb{P}) \quad c.s.
\end{aligned}$$

la penúltima igualdad se da tomando $Z = -\frac{1}{\gamma}X$ *c.s.*, y la última gracias al lema 4.1.5. ■

Con esto concluimos la representación de una medida de riesgo entrópica condicional.

4.2. Medidas de riesgo dinámicas convexas.

En esta sección estudiamos el desarrollo de medidas de riesgo en un ambiente dinámico donde se realiza una sucesión de medidas de riesgo. Ahora no mediremos el riesgo en un solo punto del tiempo como lo hacíamos en medidas de riesgo estáticas; en cambio, nos fijaremos en distintos puntos del tiempo antes de la fecha del fin de la posición financiera X, ya que el riesgo puede ir cambiando a través del tiempo gracias a la información adicional disponible. Para este propósito, consideremos un conjunto finito de fechas $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ donde en cada una de estas fechas se mide el riesgo de la posición financiera T. Introducimos una filtración $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ (ver A.13) donde la σ-algebra $\mathcal{F}_n$ es la información disponible al tiempo t_n, $n = 0, \ldots, N$. Además, suponemos que $\mathcal{F}_0$ es la σ-álgebra trivial y $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Sean $L_n^0 = L^0(\mathcal{F}_n)$ y $L_n^\infty = L^\infty(\mathcal{F}_n)$ para toda $0 \leq n \leq N$, los espacios como los definimos en el capítulo anterior.

Definición 4.2.1. (Medida de riesgo dinámica, medida de riesgo dinámica convexa).

Una familia $(\rho_n)_{n=0}^N$ donde cada $\rho_n : L^\infty \to L_n^0$ es una medida de riesgo condicional, se llama medida de riesgo dinámica. Cuando todas las medidas de riesgo son condicionales convexas, la familia se llama medida de riesgo dinámica convexa.

La medida de riesgo dinámica se puede ver como un mapeo de una variable $X \in L^\infty$ en el proceso adaptado (ver definición A.24) $(\rho_n)_{n=0}^N$ y la podemos entender como el resultado de una evaluación del riesgo final de la posición X a través del tiempo. Ahora damos algunas características que una medida de riesgo dinámica puede tener.

- Si para todo $X, Y \in L^\infty$ y $0 \leq n \leq N-1$ se cumple que:

$$\text{si } \rho_{n+1}(X) = \rho_{n+1}(Y) \ c.s. \text{ entonces } \ \rho_n(X) = \rho_n(Y) \ c.s.,$$

  entonces decimos que hay **consistencia en el tiempo.**

- Si para todo $X \in L^\infty$ y $0 \leq n \leq N-1$ se tiene que:

$$\rho_n(X) = \rho_n(-\rho_{n+1}(X)) \ c.s.,$$

entonces decimos que hay **recursividad.**

- Si para todo $X \in L^\infty$ y $0 \leq n \leq N-1$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho_{n+1}(X)|\mathcal{F}_n) \leq \rho_n(X) c.s.,$$

entonces decimos que se tiene la propiedad de **supermartingala.**

Entendemos las propiedades anteriores como sigue:

El significado financiero de la propiedad de consistencia en el tiempo es, si dos posiciones financieras tendrán mañana el mismo riesgo, entonces, deberían de tener el mismo riesgo el día de hoy.

En el caso de la recursividad, podemos entenderla desde el punto de vista de que cada elemento ρ_n es un capital condicional requerido que se tiene que agregar a la posición para hacerla aceptable. Si $\rho_{n+1}(X)$ es el capital condicional requerido que se tiene que guardar en la fecha t_{n+1} con relación a la posición X, entonces, lo que esta propiedad nos dice, es que la posición es equivalente al describirla, en la fecha t_n, por el pago $-\rho_{n+1}$ que se da en el tiempo t_{n+1}; entonces, el capital condicional requerido que debemos guardar para este último pago en la fecha t_n, es igual al que tenemos que guardar para el pago final de la posición X en esta misma fecha t_n, también podemos verlo utilizando la propiedad de invarianza con respecto a traslaciones, viendo que, el riesgo de la posición financiera a la fecha t_n, es igual, al riesgo de este mismo a la fecha t_{n+1}. Por último, la propiedad de supermartingala, la podemos interpretar de la siguiente manera: sabemos que, mientras el tiempo avanza, la información disponible sobre el pago final es mayor, lo que implica que, el riesgo debería de ir disminuyendo en un sentido condicional. Entonces si tenemos la información en la fecha t_n que está dada por $\mathcal{F}_n$, el riesgo esperado en la fecha t_{n+1} es menor, que el riesgo el la fecha t_n sin información disponible.

Notemos que si se trata de una medida de riesgo dinámica convexa, los componentes son $\rho_n : L^\infty \to L^\infty_n$, por la observación 3.1.5. En la siguiente proposición damos una relación entre dos de las propiedades anteriores para las medidas de riesgo dinámicas convexas.

Proposición 4.2.2. Para una medida de riesgo dinámica convexa, las propiedades:

1. *Consistencia en el tiempo.* Para todo $X, Y \in L^\infty$ y $0 \leq n \leq N-1$ se cumple que las propiedades

$$\text{Si } \rho_{n+1}(X) = \rho_{n+1}(Y) \ c.s. \text{ entonces } \ \rho_n(X) = \rho_n(Y) \ c.s.$$

2. *Recursividad.* Para todo $X \in L^\infty$ y $0 \leq n \leq N-1$ se cumple que:

$$\rho_n(X) = \rho_n(-\rho_{n+1}(X)) \ c.s.,$$

son equivalentes.

Demostración. Supongamos que $(\rho_n)_{n=0}^N$ cumple consistencia en el tiempo y fijemos $n \leq N$ por invarianza con respecto a traslaciones tenemos que $\rho_{n+1}(-\rho_{n+1}(X)) = \rho_{n+1}(X)$ *c.s.*, entonces por hipótesis se tiene que $\rho_n(-\rho_{n+1}(X)) = \rho_n(X)$ *c.s.*, por lo que cumple con la recursividad. Inversamente, tenemos que $\rho_{n+1}(-\rho_{n+1}(X)) = \rho_{n+1}(X)$ *c.s.*, pero tambiénpor ser recursiva se cumple $\rho_n(-\rho_{n+1}(X)) = \rho_n(X)$ *c.s.* Por lo tanto, la consistencia en el tiempo se cumple. ∎

4.3. Representación robusta de medidas de riesgo dinámicas convexas

Ahora suponemos que la medida de riesgo dinámica convexa $(\rho_n)_{n=0}^N$ es representable, es decir, cada elemento que la compone es representable, en este caso como lo vimos en el capítulo 3, para toda n se cumple

$$\rho_n(X) = \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_n}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_n) - \alpha_n^*(Q)\}, \quad X \in L^\infty$$

donde $\mathcal{P}_n = \{Q \in \mathcal{P} | Q \equiv \mathbb{P} \text{ en } \mathcal{F}_n\}$ y

$$\alpha_n^*(Q) = \text{sup.es}_{X\in L^\infty}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_n) - \rho_n(X), \quad Q \in \mathcal{P}_n\}.$$

Claramente, $\mathcal{P}_{n+1} \subset \mathcal{P}_n$ para toda n, ya que $(\mathcal{F}_n)$ es una filtración, y $\mathcal{P}_N = \{\mathbb{P}\}$. El siguiente objetivo es relacionar algunas propiedades dinámicas de la colección $(\rho_n)_{n=0}^N$ con algunas propiedades de la familia de funciones de penalización mínimas $(\alpha_n^*)_{n=0}^N$. La siguiente proposición es una condición suficiente para propiedad de supermartingala.

Proposición 4.3.1. Si $\mathbb{E}_\mathbb{P}(\alpha_n^*(Q)|\mathcal{F}_{n-1}) \geq \alpha_{n-1}^*(Q)$ *c.s.* para cada $Q \in \mathcal{P}_n$, entonces $(\rho_n(X))_{n=0}^N$ es supermartingala con respecto a la medida $\mathbb{P}$ para toda $X \in L^\infty$, es decir, para todo $X \in L^\infty$ y

$0 \le n \le N-1$ se cumple que:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho_{n+1}(X)|\mathcal{F}_n) \le \rho_n(X) \;\; c.s.$$

Demostración. Por el lema 3.4.5 tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho_n(X)|\mathcal{F}_{n-1}) = \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_n}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\alpha^*(Q)|\mathcal{F}_{n-1})\}, \;\; c.s. \;\; X \in L^\infty,$$

y como observamos antes $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n-1}$, entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho_n(X)|\mathcal{F}_{n-1}) &= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_n}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\alpha_n^*(Q)|\mathcal{F}_{n-1})\} \\ &\le \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_{n-1}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_{n-1}) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\alpha_{n-1}^*(Q)|\mathcal{F}_{n-1})\} \\ &= \text{sup.es}_{Q\in\mathcal{P}_{n-1}}\{-\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_{n-1}) - \alpha_{n-1}^*(Q)\} = \rho_{n-1}(X) \;\; c.s.,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da gracias a que $\alpha_{n-1}^*(Q)$ es $\mathcal{F}_{n-1}$-medible. Por lo tanto $(\rho_n(X))_{n=0}^N$ es supermartingala. ∎

4.4. Ejemplo de medida de riesgo dinámica convexa.

Ejemplo 4.4.1. Un ejemplo de una medida de riesgo dinámica convexa es la medida de riesgo dinámica entrópica, cuyos componentes son

$$\rho_n(X) = \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_n) \;\; c.s., \quad X \in L^\infty$$

con un coeficiente de aversión al riesgo $\gamma > 0$ fijo.

Esta medida de riesgo dinámica se derivó en la sección 4.1, y como vamos a ver en la siguiente proposición cumple con las propiedades de consistencia en el tiempo, recursividad y supermartingala (recordemos que consistencia en el tiempo y recursividad son equivalentes para este caso).

Proposición 4.4.2. Toda medida de riesgo dinámica entrópica es consistente en el tiempo y satisface la propiedad de supermartingala.

Demostración. Primero, probaremos consistencia en el tiempo. Para toda $n \in \mathbb{N}$ y $X \in L^\infty$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\rho_n(X) &= \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{n+1})\}|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp\{-\gamma(-\frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{n+1}))\}|\mathcal{F}_n) \\
&= \rho_n(\rho_{n+1}(X)) \quad c.s.,
\end{aligned}
$$

donde la tercera igualdad se da gracias a la proposición de la esperanza condicional conocida como propiedad de la torre (se puede ver en B.2.2).

Ahora, probaremos que es una supermatingala. Aplicamos un corolario de la desigualdad de Jensen donde se invierte la desigualdad con una función cóncava (se puede ver en B.2.4) a la variable aleatoria $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{n+1})$ donde $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^N$ es una filtración y la función concava $\frac{1}{\gamma}\log(x)$ con $\gamma > 0$ constante, obtenenmos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{1}{\gamma}\log(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{n+1}))|\mathcal{F}_n) &\leq \frac{1}{\gamma}\log(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n)) \\
&= \frac{1}{\gamma}\log(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma X}|\mathcal{F}_n)) \quad c.s.,
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad se da por la propiedad de torre (ver B.2.2). Por lo tanto,

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\rho_{n+1}(X)|\mathcal{F}_n) \leq \rho_n(X) \quad c.s.
$$

■

Capítulo 5

Aplicación de medidas de riesgo dinámicas convexas.

En este último capítulo se muestra una aplicación de las medidas de riesgo dinámicas convexas. El objetivo es relacionar las medidas de riesgo dinámicas con soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás (tipo "backward", BSDEs por sus siglas en inglés). Esta relación se utiliza al medir el riesgo de un inversionista que elabora un portafolio mediante bonos y acciones. En este capítulo mencionaremos los principales resultados sobre BSDEs que son necesarios pero sin demostraciones. Los detalles se pueden encontrar en la literatura, por ejemplo en [20] podemos en contrar resultados para ecuaciones diferenciales estocásticas en el capítulo 9, página 139. Específicamente resultados sobre ecuaciones diferenciales de tipo backward los tomamos de [13] en las páginas 39 a 43. Así también definiciones que se utilizan en esta sección algunos conceptos de procesos estocásticos (ver A.23), y resultados de procesos de Itô que se pueden encontrar en [17].

5.1. Definiciones y algunos resultados sobre BSDEs.

Definiremos las BSDEs y mencionaremos ciertos resultados sobre existencia y unicidad de soluciones.

5.1.1. Estructura general y definición.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el que está definido un movimiento Browniano $W = (W_t; t \leq T_H)$ (pág. 19 [17]), donde $T_H > 0$ es el horizonte de tiempo de estudio. Consideremos a la filtración Browniana natural dada por las σ-álgebras $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(W_s; 0 \leq s \leq t; t \geq 0)$ y $(\mathcal{F}_t; t \leq T_H)$, donde la familia $\mathcal{F}_t$ es la completación. En este capítulo denotamos únicamente por $\mathbb{E}$ la esperanza con respecto a $\mathbb{P}$, esto es, $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}$.

A continuación definimos ciertos espacios que son importantes en la estructura de las BSDEs. Sea $T_H > 0$. Tomaremos un tiempo $T \leq T_H$, ya que a veces el horizonte de tiempo T_H es modificado, y definimos:

- $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) = \{\eta : \eta$ es $\mathcal{F}_t$-medible y $\mathbb{E}(|\eta|^2) < \infty\}$.
- $\mathcal{P}_n(0,T) = \{(\phi_t; 0 \leq t \leq T)$: tal que ϕ es $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$-medible con valores en $\mathbb{R}^n\}$.
- $\mathcal{S}_n^2(0,T) = \{(\phi_t; 0 \leq t \leq T)$: tal que $\phi \in \mathcal{P}_n(0,T)$ y $\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |\phi_t|^2) < \infty\}$.
- $\mathcal{H}_n^2(0,T) = \{(\phi_t; 0 \leq t \leq T)$: tal que $\phi \in \mathcal{P}_n(0,T)$ y $\mathbb{E}(\int_0^T |\phi_t|^2 ds) < \infty\}$.
- $\mathcal{H}_n^1(0,T) = \{(\phi_t; 0 \leq t \leq T)$: tal que $\phi \in \mathcal{P}_n(0,T)$ y $\mathbb{E}[(\int_0^T |\phi_t|^2 ds)^{\frac{1}{2}}] < \infty\}$.

Ahora, daremos la definición de una ecuación diferencial estocástica hacia atrás (o de tipo "backward").

Definición 5.1.2. Sea $\xi_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ un proceso que llamamos *condición terminal* y $g = g(t,y,z)$ una función medible con respecto a $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ que llamamos generador. Una solución para la BSDE asociada a (g, ξ_T) es una pareja $(Y_t, Z_t)_{t \leq T}$ de procesos $\mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{F}_t$-medibles con valores en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1 \times d}$ tal que:

$$(Y_t) \in \mathcal{S}_1^2(0,T), \ (Z_t) \in \mathcal{H}_{1 \times d}^2(0,T), \text{ y}$$
$$Y_t = \xi_T + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5.1}$$

La expresión anterior para Y_t tiene como forma diferenciable

$$-dY_t = g(t, Y_t, Z_t) dt - Z_t dW_t, \quad Y_T = \xi_T. \tag{5.2}$$

5.1.3. Resultados importantes sobre BSDEs.

Empezaremos mencionando un resultado sobre existencia y unicidad de soluciones para BSDEs, y otro donde no necesariamente hay unicidad. En este segundo caso aseguramos una solución máxima y una mínima, es decir, que si tenemos una solución máxima, cualquier otra solución es menor casi seguramente, y equivalentemente con la solución mínima.

Teorema 5.1.4. (Existencia y unicidad de soluciones de BSDEs (Uniformemente Lipschitz)). Supongamos que $(g(t,0,0); 0 \leq t \leq T)$ pertenece a $\mathcal{H}^2(0,T)$ y que g es uniformemente Lipschitz continua con respecto a (y,z), es decir, existe una constante $C \geq 0$ tal que para todo (y, y', z, z'),

$$|g(w,t,y,z) - g(w,t,y',z')| \leq C(|y-y'| + |z-z'|) \quad d\mathbb{P} \times dt - \text{c.s.},$$

entonces, para cualquier condición terminal $\xi_T \in L^2((\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}))$ la BSDE

$$Y_t = \xi_T + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T$$

tiene una única solución, es decir, existe una única pareja de procesos $\mathcal{F}_t$-adaptados (ver A.24) $(Y_t, Z_t)_{t \leq T}$, $(Y_t) \in \mathcal{S}_1^2(0,T)$, $(Z_t) \in \mathcal{H}^2_{1\times d}(0,T)$ que satisfacen la BSDE.

Teorema 5.1.5. (Existencia de soluciones de BSDEs (Caso continuo con crecimiento lineal)). Supongamos que existe una constante $k \geq 0$ tal que para todo (y,z)

$$|g(w,t,y,z)| \leq k(1 + |y| + |z|) \quad d\mathbb{P} \times dt - c.s.,$$

y además $g(w,t,\cdot,\cdot)$ es, continua en (y,z); entonces, para cualquier condición terminal $\xi_T \in L^2((\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}))$, la BSDE (5.1) tiene una solución máxima y una mínima.

El siguiente resultado es, como veremos en el desarrollo de este capítulo una gran herramienta para obtener ciertos resultados. Este teorema es llamado el teorema de comparación.

Teorema 5.1.6. (Teorema de comparación). Sea (ξ_T^1, g^1) y (ξ_T^2, g^2) dos pares de condiciones terminales y generadores que satisfacen las condiciones de alguno de los teoremas de existencia (teorema 5.1.4, o teorema 5.1.5).Ambas parejas deben satisfacer las mismas condiciones. Sean (Y^1, Z^1) y (Y^2, Z^2) las soluciones máximas respectivas asociadas a la BSDE (5.1). Entonces,

1. Si suponemos que $\xi_T^1 \leq \xi_T^2$, $c.s.$ y que para toda (y,z), $g^1(w,t,y,z) \leq g^1(w,t,y,z)$ $d\mathbb{P}\times dt$-c.s., entonces,

$$Y_t^1 \leq Y_t^2 \; c.s. \text{ para todo } t \in [0,T].$$

2. Además, bajo las condiciones de exisencia y unicidad del teorema 5.1.4, si $Y_t^1 = Y_t^2$ en $B \in \mathcal{F}_t$, entonces:

$$\xi_T^1 = \xi_T^2 \ c.s. \ \text{ en } \ B, \ \text{ para toda } \ t \leq s, \ \ Y_s^1 = Y_s^2 \ \text{ y}$$

$$g^1(s, Y_s^1, Z_s^1) = g^1(s, Y_s^2, Z_s^2) \ \ d\mathbb{P} \times ds - c.s. \ \text{ en } \ B \times [t, T].$$

Ahora, estamos interesados en el operador dinámico generado por la solución máxima de una BSDE, tal como lo definimos a continuación:

Definición 5.1.7. (Operador g-dinámico). Sea g el generador de una BSDE. El operador g-dinámico, denotado por $\mathcal{Y}^g$, es tal que $\mathcal{Y}_t^g(\xi_T)$ es la solución máxima de la ecuación diferencial estocástica tipo "backward" asociada a g y con condición terminal ξ_T (BSDE(g, ξ_T)).

Por último enunciarmeos el siguiente lema, el cual nos garantiza unicidad en los generadores de las BSDEs.

Lema 5.1.8. (Unicidad de los generadores). Sean g^1 y g^2 dos generadores, tales que la unicidad de la solución para la BSDE(g^1) se cumple. Sea $\mathcal{Y}^{g^i}$ el operador g^i-dinámico $(i = 1, 2)$. Supongamos que para toda (T, ξ_T) $\mathcal{Y}_t^{g^1}(\xi_T) = \mathcal{Y}_t^{g^2}(\xi_T)$. Entonces,

1. Si los generadores g^1 y g^2 dependen solamente de t y z, entonces $g^1(t, z) = g^2(t, z)$ $d\mathbb{P} \times dt$ para toda z.

2. En el caso general, es decir, cuando no pedimos únicamente la dependencia de t y z, la misma igualdad se da, dado que los generadores son continuos con respecto a t, entonces, $g^1(t, y, z) = g^2(t, y, z)$ $d\mathbb{P} \times dt$ para toda z.

Teniendo estos resultados podemos relacionar las medidas de riesgo dinámicas con soluciones a BSDEs, como se desarrolla en la siguiente sección.

5.2. Medidas de riesgo dinámicas convexas y BSDEs

En esta sección se dará una relación entre las medidas de riesgo dinámicas convexas y las BSDEs. Específicamente trabajaremos con el operador dinámico $\mathcal{Y}^g$ que definimos anteriormente en 5.1.7. Notemos que en el caso de la unicidad dada por el teorema 5.1.4, $\mathcal{Y}^g$ es el de la solución única. Trasladando esta teoría al contexto de las medidas de riesgo que hemos estudiado, podemos ver a la condición terminal de una BSDE al tiempo T (ξ_T) como el pago al tiempo T de cierta posición financiera. En el siguiente ejemplo se da la primera idea de la relación que queremos establecer entre las medidas de riesgo dinámicas convexas y BSDEs.

Para empezar esta relación recordemos la medida de riesgo dinámica entrópica que fue introducida en el ejemplo 4.4.1, llamémosle $\rho_t^{e,\gamma}(\xi_T) = \rho_t(\xi_T) = \frac{1}{\gamma}\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-\gamma\xi_T}|\mathcal{F}_t), \xi_T \in L^\infty$ con coeficiente de aversión al riesgo $\gamma > 0$ fijo. Vamos a ver que es posible relacionar esta medida $\rho_t^{e,\gamma}$ con la solución de una BSDE, como sigue:

Proposición 5.2.1. La medida entrópica de riesgo $(\rho_t^{e,\gamma}(\xi_T); t \in [0,T])$ es solución de la siguiente BSDE con generador cuadrático $g(t,z) = \frac{\gamma}{2}\|z\|^2$ y condición terminal acotada $\xi_T \in L^\infty$:

$$-d\rho_t^{e,\gamma}(\xi_T) = \frac{\gamma}{2}\|Z_t\|^2 dt - Z_t dW_t, \qquad \rho_T^{e,\gamma}(\xi_T) = -\xi_T.$$

Demostración. Sea $M_t = M_t(\xi_T) = \mathbb{E}\left(\exp(-\frac{1}{\gamma}\xi_T)|\mathcal{F}_t\right)$. M_t es positiva c.s. ya que es la esperanza de una función exponencial. Es acotada, ya que ξ_T es acotada c.s. y la exponencial resulta entonces ser acotada al igual que la esperanza condicional. M_t es continuna por ser composición de funciones continuas, y por último, M_t es una martingala (definición B.8.1) con respecto a $\mathcal{F}_t$, ya que para $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{t+s}|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp(-\frac{1}{\gamma}\xi_T)|\mathcal{F}_t + s\right)|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp(-\frac{1}{\gamma}\xi_T)|\mathcal{F}_t\right)|\mathcal{F}_t + s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\exp(-\frac{1}{\gamma}\xi_T)|\mathcal{F}_t\right) \\
&= M_t \ \ c.s.,
\end{aligned}$$

donde la segunda y tercera igualdad se dan gracias la propiedad de la torre de la esperanza condicional (lema B.2.2 del apéndice). Como $\mathbb{E}(M_t - \mathbb{E}(M_0)) = \mathbb{E}(M_t) - \mathbb{E}(M_0)$, y como $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ por ser M_t martingala, tenemos que $\mathbb{E}(M_t) - \mathbb{E}(M_0) = 0$. Si aplicamos el teorema de la representación martingala al proceso $M_t - \mathbb{E}(M_0)$ (ver este resutado en el teorema B.8.2 del apéndice), nos dice que $d(M_t - \mathbb{E}(M_0)) = dM_t = \phi(t)dW_t$ donde $\phi(t) \in \mathcal{H}_n^2(0,T)$. Ahora, la martingala M_t como habíamos mencionado es positiva y acotada casi seguramente, además el proceso $\xi \in L^\infty$, por lo que es acotado casi seguramente. Entonces al tomar $\frac{\gamma\phi(t)}{M_t}$ está acotado, ya que $\gamma > 0$ es una constante y además ξ está acotado casi seguramente, utilizando esta cota, digamos $\kappa \in \mathbb{R}$, $M_t \geq \mathbb{E}\left(\exp(-\frac{1}{\gamma}\kappa)|\mathcal{F}_t\right) > 0$. Entonces $Z_t = \frac{\gamma\phi(t)}{M_t} < \infty \ \in \mathcal{H}_n^2(0,T)$. Entonces podemos reescribir

$$dM_t = \phi(t)dW_t = \frac{1}{\gamma}M_t\left(\frac{\gamma\phi(t)}{M_t}dW_t\right) = \frac{1}{\gamma}M_t(Z_t dW_t),$$

donde $(Z_t; t \geq 0)$ es un proceso *cuadrado integrable.*

Aplicando la fórmula de Itô (ver [17] pág. 147) a la función $\frac{1}{\gamma}\log M_t$, (no se presenta ningún problema ya que la función $\frac{1}{\gamma}\log x$ es doblemente diferenciable), entonces tenemos:

$$\begin{aligned} d\frac{1}{\gamma}\log M_t &= \left(-\frac{1}{2}\gamma^2 M_t^2 (Z_t)^2 \frac{1}{\gamma M_t^2}\right)dt + (\gamma M_t Z_t)\left(\frac{1}{\gamma M_t}dW_t\right) \\ &= -\frac{\gamma}{2}Z_t^2 dt + Z_t dW_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-d\rho_t^{e,\gamma}(\xi_T) = -d\frac{1}{\gamma}\log M_t = \frac{\gamma}{2}\|Z_t\|^2 dt - Z_t dW_t$$

. ■

Ahora hemos relacionado la teoría de BSDEs para tener una interpretación de riesgo a un problema en el cual la dinámica que sigue cierto objeto de estudio se pueda representar mediante una BSDE, esto es interpretando la solución de la BSDE como una medida de riesgo dinámica convexa, en este caso la entrópica. La relación anterior que nos da la proposición 5.2.1 entre la medida de riesgo dinámica entrópica y la solución de una BSDE se puede extender en general a medidas de riesgo dinámicas convexas como se muestra en el siguinte teorema 5.2.2, y en la sección siguiente veremos en un ejemplo el uso de este resultado.

Para el siguiente teorema, necesitamos la definición de un tiempo de paro que la encontramos en el apéndice, en la sección B.8. En la prueba de este resultado se realiza para todo tiempo $0 \leq t \leq T$, a excepción de la prueba de la primera afirmación en la que sí pedimos tiempos de paro.

Teorema 5.2.2. Sea $\mathcal{Y}^g$ el operador g-dinámico definido en 5.1.7. Entonces,

1. $\mathcal{Y}^g$ es consistente en el tiempo, es decir, Para $S \leq T \leq U$, tres tiempos de paro acotados, para toda ξ_U, $\mathcal{Y}_S^g(\xi_U) = \mathcal{Y}_S^g(\mathcal{Y}_T^g(\xi_U))$ $\mathbb{P}-c.s.$

2. Si g es convexa, entonces $\mathcal{Y}^g$ es convexa, es decir, para todo tiempo de paro $S \leq T$, para todo

(ξ_T^1, ξ_T^2) y para $\lambda \in [0,1]$, $\mathcal{Y}_S^g(\lambda\xi_T^1 + (1-\lambda)\xi_T^2) \leq \lambda\mathcal{Y}_S^g(\xi_T^1) + (1-\lambda)\mathcal{Y}_S^g(\xi_T^2)$ *c.s.*

3. Si $g^1 \leq g^2$, entonces $\mathcal{Y}^{g^1} \leq \mathcal{Y}^{g^2}$

4. Además, bajo las condiciones del lema 5.1.8, $\mathcal{Y}^g$ es invariante con respecto a traslaciones, es decir, para todo tiempo de paro $S \leq T$ y para todo $\eta_S \in \mathcal{F}_S$ (ver definición B.8.4) y para toda ξ_T, $\mathcal{Y}_S^g(\xi_T + \eta_S) = \mathcal{Y}_S^g(\xi_T) + \eta_S$ *c.s.* si y solo si g no depende de y.

Entonces, si g cumple las condiciones de 2. y 4., $\mathcal{Y}^g(-\xi_T)$ es una medida de riesgo dinámica convexa.

Demostración. Probaremos uno a uno los puntos de este teorema.

1. Consideremos tres tiempos de paro $S \leq T \leq U$. Si escribimos la solución de las BSDEs como una función de la condición final (fecha final), queremos probar que $Y_S(T, Y_T(U, \xi_U)) = Y_S(U, \xi_U)$ *c.s.* Desarrollando tenemos que

$$\begin{aligned}
Y_S(T, Y_T(U, \xi_U)) &= Y_T(U, \xi_U) + \int_S^T g(t, Z_t)dt - \int_S^T Z_t dW_t \\
&= \xi_U + \int_T^U g(t, Z_t)dt - \int_T^U Z_t dW_t + \int_S^T g(t, Z_t)dt - \int_S^T Z_t dW_t \\
&= \xi_U + \int_S^U g(t, Z_t)dt - \int_S^U Z_t dW_t \\
&= Y_S(U, \xi_U),
\end{aligned}$$

El proceso definido por $Y_t(T, Y_T(U, \xi_U))$ en $[0, T]$ y por $Y_t(U, \xi_U)$ en $[T, U]$ es la solución máxima de la BSDE(g, ξ_U, U). La unicidad de la solución máxima implica que $\mathcal{Y}_S^g(\xi_U) = \mathcal{Y}_S^g(\mathcal{Y}_T^g(\xi_U))$ *c.s.*

2. Consideremos dos BSDEs con generador g función convexa y condiciones terminales ξ_T^1 y ξ_T^2: sea $t \leq T$, y sean (Y_t^1, Z_t^1) y (Y_t^2, Z_t^2) soluciones (máximas) de (g, ξ_T^1) y (g, ξ_T^1) respectivamente, digamos $\mathcal{Y}_t^g(\xi_T^1)$ y $\mathcal{Y}_t^g(\xi_T^2)$. Y tomemos $\tilde{Y}_t = \lambda Y_t^1 + (1-\lambda)Y_t^2$, con $\lambda \in [0,1]$. Entonces tenemos que

$$-\tilde{Y}_t = (\lambda g(t, Y_t^1, Z_t^1) + (1-\lambda)g(t, Y_t^2, Z_t^2))dt - (\lambda Z_t^1 + (1-\lambda)Z_t^2)dW_t; \quad \tilde{Y}_T = \lambda\xi_T^1 + (1-\lambda)\xi_T^2.$$

Dado que por hipótesis g es convexa, podemos reescribir la BSDE anterior como:

$$-\tilde{Y}_t = (g(t, \tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t) + \alpha(t, Y_t^1, Y_t^2, Z_t^1, Z_t^2))dt - \tilde{Z}_t dW_t$$

donde α es un proceso no negativo casi seguramente. Entonces, usando el teorema de comparación 5.1.6; la solución de esta BSDE $\tilde{Y}_t$ es mayor o igual casi seguramente que las solución de la BSDE $(g, \lambda\xi_T^1 + (1-\lambda)\xi_T^2)$ Y_t, es decir

$$\lambda Y y_t^g(\xi_{T^1}) + (1-\lambda)\mathcal{Y}_t^g(\xi_{T^2}) \geq \mathcal{Y}_t^g(\lambda\xi_T^1 + (1-\lambda)\xi_T^2).$$

3. Es una consecuencia directa del teorema de comparación 5.1.6.

4. Sea $g_m(t, y, z) = g(t, y+m, z)$. Notemos que $Y^m(\xi_T) = Y(\xi_T + m) - m$ es la solución máxima a la BSDE(g_m, ξ_T). La propiedad de traslación con respecto a traslaciones es equivalente a que $Y^m = Y$ $c.s.$ por el lema 5.1.8 esta igualdad es equivalente a

$$g(t, y, z) = g_m(t, y, z) = g(t, y+m, z) \quad c.s.$$

Esta última igualdad implica que g no depende de y.

■

Con este resultado hemos relacionado las medidas de riesgo dinámicas convexas con soluciones de BSDEs, en la última sección se da un ejemplo del uso de esta relación.

5.3. Aplicación al riesgo de instrumentos financieros.

En esta sección nos basamos principalmente en artículo [1], en este artículo se da el desarrollo para obtener la dinámica del valor de un portafolio constituido por bonos y acciones mediante una BSDE, posteriormente hago una interpretación desde el punto de vista del riesgo asociando la solución a una medida de riesgo dinámica convexa probando que se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad 5.1.4 y del teorema 5.2.2, que nos relaciona la solución de la BSDE con la medida de riesgo dinámica convexa para medir el riego de este activo.

Nos situamos en un mercado financiero y nuestro objetivo es medir el riesgo de un intrumento financiero. Sea $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathcal{F}_t \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado, donde la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ es la información disponible al tiempo t.

Consideremos $d+1$ activos financieros, un bono y d acciones (activos con riesgo), digamos que $P_0(t)$ es el precio del bono al tiempo t, y $P_i(t)$ es el precio de la i-ésima acción al tiempo t. Supongamos que $P_0(t)$ es solución a la siguiente ecuación diferencial ordinaria (ODE por sus siglas en inglés).

$$dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt. \;\; P_0(0) = 1,$$

donde $r(t)$ es la tasa de interés del bono, es decir, la dinámica del precio del bono está dada por el cambio en el tiempo de la tasa de interés por el precio del bono, con la condición inicial de que el precio a tiempo cero sea igual a 1.

Ahora, para cada $i = 1, \dots, d$, $\{P_i(t)\}_{i=1}^d$ es la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dP_i(t) = P_i(t)[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dB_t^j], \quad P_i(0) = p_i, \;\; i = 1, \dots, d.$$

En este caso $b_i(t)$ es la tasa del retorno esperado, y $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^d$ es la sucesión de volatilidades para las acciones. Supongamos que los pocesos r_i, b_i, σ_{ij} y σ_{ji}^{-1} son $\mathcal{F}_t$-adaptados, y uniformemente acotados en $[0, \infty)$.

Nuestro objetivo es evaluar el riesgo a través del tiempo que un inversionista asume al comprar un portafolio compuesto por bonos y acciones, mediante una medida de riesgo dinámica convexa. Podemos decir que $\xi_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ es el pago recibido por este portafolio a una fecha final T.

Consideremos que un inversionista tiene a tiempo $t \leq T$ $n_0(t)$ bonos, y $n_i(t)$ es la cantidad de acciones del tipo i, $i = 1, \dots, d$. Entonces, invierte $n_0(t)P_0(t)$ en el bono, y $\pi_i(t) = n_i(t)P_i(t)$ en la i-ésima acción. Sea $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_d(t)), \;\; 0 \leq t \leq T$ un proceso $\mathcal{F}_t$-adaptado. Definamos por Y_t la cantidad de dinero invertida por el inversionista en el mercado a tiempo t.

$$Y_t = n_0(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} \pi_i(t).$$

Suponemos que el inversionista en el periodo de tiempo $[0, T]$ no hace retiros ni depósitos monetarios. Bajo esta suposición, el valor Y_t evoluciona de acuerdo a la siguiente dinámica:

$$dY_t = n_0(t)dP_0(t) + \sum_{i=1}^{d} n_i(t)dP_i(t).$$

Podemos ver que se da la siguiente igualdad, sustituyendo dP_0 y dP_i:

$$\begin{aligned}
dY_t &= n_0(t)(r(t)P_0(t)dt) + \sum_{i=1}^{d} n_i(t)[P_i(t)(b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dB_t^j)] \\
&= n_0(t)(r(t)P_0(t)dt) + \sum_{i=1}^{d} n_i(t)[P_i(t)b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} P_i(t)\sigma_{ij}(t)dB_t^j] \\
&= n_0(t)(r(t)P_0(t)dt) + \sum_{i=1}^{d} n_i(t)P_i(t)b_i(t)dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} n_i(t)P_i(t)\sigma_{ij}(t)dB_t^j \\
&= [n_0(t)r(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} n_i(t)P_i(t)b_i(t)]dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} n_i(t)P_i(t)\sigma_{ij}(t)dB_t^j \\
&= [n_0(t)r(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} \pi_i(t)b_i(t)]dt + \sum_{i,j=1}^{d} \pi_i(t)\sigma_{ij}(t)dB_t^j,
\end{aligned}$$

ya que habíamos definido $\pi_i(t) = n_i(t)P_i(t)$. Ahora, si sumamos y restamos $\sum_{i=1}^{d} \pi_i(t)r(t)$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$dY_t = [r(t)n_0(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} r(t)\pi_i(t) + \sum_{i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\pi_i(t)]dt + \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{i,j}\pi_i(t)dB_t^j.$$

Ahora, si denotamos

$$g(t,y,z) = -r(t)n_0(t)P_0(t) - \sum_{i=1}^{d} r(t)\pi_i(t) - \sum_{j,i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)z_j.$$

Donde la variable $z_j(t)$ está dada como: $z_j(t) = \sum_{i=1}^{d} \sigma_{ij}(t)\pi_i(t)$. Entonces la ecuación de arriba queda como:

$$-dY_t = g(t,y,z(t)) - z(t)dB_t.$$

Por como definimos a $r(t)$, $b(t)$, σ_{ij} y σ_{ji}^{-1} que son uniformemente acotados, $g(t,y,z)$ pertenece a $\mathcal{H}_n^2(0,T)$. Ahora, por como está definida g, es uniformemente Lipschitz con respecto a (y,z), ya que para todo (y, y', z, z')

$$g(t,y,z) - g(t,y',z') =$$

$$= -r(t)n_0(t)P_0(t) - \sum_{i=1}^{d} r(t)\pi_i(t) - \sum_{j,i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)z_j$$
$$+ r(t)n_0(t)P_0(t) + \sum_{i=1}^{d} r(t)\pi_i(t) + \sum_{j,i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)z'_j.$$

Simplificando, tenemos que es igual a

$$-\sum_{j,i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)z_j + \sum_{j,i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)z'_j,$$

o también podemos escribirla como:

$$\sum_{j,i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)(z'_j - z_j).$$

Entonces, tomando $C = (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)$ obtenemos que:

$$\sum_{j,i=1}^{d} (b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)(z'_j - z_j) \leq \sum_{j,i=1}^{d} C(|z'_j - z_j|).$$

Por teorema de existencia y unicidad 5.1.4 tenemos que para toda ξ_T que pertenece a $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, existe una única solución $(Y_t^*, Z(t))$ con la condición terminal $Y_T = \xi_T$. Ahora, nuevamente por la forma en que está definida $g(t,y,z)$, es inmediato ver que esta no depende del parámetro y, y además es convexa. Para ver esto podemos fijarnos solamente en el parámetro z ya que es independiente de y. Si tenemos z y z', y por simplificar definimos

$$k(t) = -r(t)n_0(t)P_0(t) - \sum_{i=1}^{d} r(t)\pi_i(t),$$

$$s_{i,j}(t) = b_i(t) - r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t),$$

entonces,

$$\begin{aligned}
g(t,y,\lambda z+(1-\lambda)z') &= -r(t)n_0(t)P_0(t)-\sum_{i=1}^{d} r(t)\pi_i(t)-\sum_{j,i=1}^{d}(b_i(t)-r(t))\sigma_{ij}^{-1}(t)(\lambda z+(1-\lambda)z')\\
&= k(t)-\sum_{j,i=1}^{d} s_{i,j}(t)(\lambda z+(1-\lambda)z')\\
&= k(t)-\sum_{j,i=1}^{d} s_{i,j}(t)(\lambda z)+\sum_{j,i=1}^{d} s_{i,j}(t)((1-\lambda)z')\\
&= \lambda k(t)+(1-\lambda)k(t)-\lambda\sum_{j,i=1}^{d} s_{i,j}(t)z-(1-\lambda)\sum_{j,i=1}^{d} s_{i,j}(t)((1-\lambda)z')\\
&= \lambda\left(k(t)-\sum_{j,i=1}^{d} s_{i,j}(t)z\right)+(1-\lambda)\left(k(t)-\sum_{j,i=1}^{d} s_{i,j}(t)((1-\lambda)z')\right)\\
&= \lambda g(t,y,z)+(1-\lambda)g(t,y,z').
\end{aligned}$$

Así, $g(t,y,z)$ cumple los puntos 2. y 4. del teorema 5.2.2. Usando esta relación, la solución Y_t^* corresponde a una medida de riesgo dinámica convexa $\rho_t(\xi_T)$. Para estar cubiertos del riesgo del activo financiero al tiempo t, se tiene que tener el capital mínimo $\rho_t(\xi_T)=Y_t^*$ para hacer aceptable esta posición financiera.

En este ejemplo vimos una aplicación directa del teorema 5.2.2, que fue el teorema principal de este capítulo.

Como se presentó en el trabajo, se tiene una relación entre medidas de riesgo dinámicas convexas y soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás, aquí presentamos un ejemplo de una cobertura en cierto modo sencilla, y un modelo que es útil para entender esta aplicación.

Mediante el uso de herramientas más avanzadas se han desarrollado teorías más generales y complejas. Usando que las medidas de riesgo dinámicas convexas son soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales estocas hacia atrás, por ejemplo en [8], usando *cálculo de Malliavin*, desarrollan un modelo Binomial discreto para implementar una medida de riesgo dinámica convexa para evaluar el riesgo no lineal inherente al *trading* de opciones de tipo Europeas.

En [19] usando cálculo funcional de Itô y ecuaciones diferenciales estocásticas hacia adelante y hacia atrás, dan una forma de evaluar medidas de riesgo dinámicas convexas para opciones de tipo Europeo en un ambiente continuo no Markoviano.

Apéndice A

Definiciones.

Definición A.1. (Espacio Lineal).

Un espacio lineal V sobre el campo $\mathbb{R}$ consiste de un conjunto en el que están definidas dos operaciones: una de ellas, $+ : V \times V \to V$ tal que para cualquier $x, y \in V$ exista un elemento (único) $x + y \in V$, y otra, $\cdot : V \times \mathbb{R} \to V$ tal que para cada elemento $x \in V$ y $a \in \mathbb{R}$ exista un único $a \cdot x = ax \in V$, de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- Para toda $x, y \in V$, $x + y = y + x$. (Conmutatividad para la suma).
- Para toda $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$. (Asociatividad para la suma).
- Existe un elemento en V llamado 0 tal que $x + 0 = x$ para toda $x \in V$. (Neutro para la suma).
- Para cada $x \in V$ existe $y \in V$ tal que $x + y = 0$ para toda $x \in V$. (Inverso para la suma).
- Para cada $x \in V$, $1x = x$. (Neutro para la la multiplicación).
- Para cada $a, b \in F$ y cada $x \in V$, $(ab)x = a(bx)$. (Asociatividad para la multiplicación).
- Para cada $a \in F$ y cada $x, y \in V$, $a(x + y) = ax + ay$. (Distributiva).
- Para cada $a, b \in F$ y cada $x \in V$, $(a + b)x = ax + bx$. (Distributiva).

En espacios lineales hay conjuntos importantes, como:

Definición A.2. (Conjunto convexo).

El conjunto A es convexo si para $x, y \in A$ la combinación convexa $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ para toda $\lambda \in [0, 1]$.

Definición A.3. (Cono).

El conjunto A es un cono, si para $x \in A$ entonces $\lambda x \in A$ para toda $\lambda \geq 0$.

Definición A.4. (Métrica, espacio métrico).

Una métrica $\delta : M \times M \to \mathbb{R}$ para un conjunto M, es una función real, no negativa que tiene las siguientes propiedades:

- $\delta(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.
- $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$,para $z \in M$.

A la pareja (M, δ) se le llama espacio métrico.

Definición A.5. (Conjunto abierto, conjunto cerrado).

Un subconjunto A de un espacio métrico (M, d) es un conjunto abierto si dado cualquier x en A, existe $\epsilon > 0$ tal que la bola con centro en x y radio ϵ está contenida en A. Esto se denota $B_\epsilon(x) \subseteq A$.

Un subconjunto A es cerrado si y solo si su complemento es abierto.

Definición A.6. (Conjunto acotado).

Sea M un espacio métrico y A un subconjunto de M. Se dice que el conjunto A está acotado si existe un punto x_0 en M y una bola abierta con radio $R > 0$ y centro en x_0, $B_R(x_0)$, tal que, $A \subset B_R(x_0)$.

Definición A.7. (Función acotada).

Una función $F : D \to M$ donde M es un espacio métrico, se llama función acotada cuando el conjunto imagen de la función es acotado, es decir, cuando $f(D) \subseteq M$ es un conjunto acotado.

Definición A.8. (Función Lipschitz continua).

Una función $f : M \to N$ entre espacios métricos $M = (\mathcal{M}, \delta)$ y $N = (\mathcal{N}, \delta')$ se dice que es Lipschitz continua si existe una constante $\kappa > 0$ tal que

$$\delta'(f(x), f(y)) \leq \kappa \delta(x, y) \text{ para todo } x, y \in M.$$

Observación. Toda función Lipschitz continua es continua, esto es, $E \subseteq M$, $p \in E$ y $f : E \to N$ f es cotinua en p si para cada $\epsilon > 0$ existe $\tau > 0$ tal que $\delta'(f(x), f(p)) < \epsilon$ para todo $x \in E$ para los cuales $\delta(x, p) < \tau$.

Definición A.9. (Sigma-álgebra, espacio medible).

Sea $\mathcal{P}(\Omega)$ la potencia de Ω. Una colección $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones:

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$
- Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

A la pareja $(\Omega, \mathcal{F})$ se le llama espacio medible y a los elemtentos de $\mathcal{F}$ se les conoce como conjuntos medibles. A $\mathcal{F}$ se le llama σ-álgebra.

Definición A.10. (Subsigma-álgebra).

Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ σ-álgebras en Ω. Decimos que $\mathcal{G}$ es una subσ-álgebra si y solo si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Definición A.11. (Sigma-álgebra generada.)

Sea $\mathcal{C}$ una colección no vacía de subconjuntos de Ω. Llamamos σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ a la colección

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{\mathcal{F} | \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Para ver que $\sigma(\mathcal{C})$ existe, tenemos que ver que $\sigma(\mathcal{C})$ es no vacía y que es σ-álgebra.

Para la primera parte, notemos que el conjunto potencia $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra, entonces por definición de conjunto potencia $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(\Omega) \in \sigma(\mathcal{C})$.

Ahora para mostrar que es σ-álgebra tenemos la siguiente proposición.

Proposición A.12. La Intersección finita, numerable o bien arbitraria de σ-álgebras de un mismo conjunto es una σ-álgebra.

Demostración. Sea $T \neq \emptyset$ un conjunto arbitario. Suponga que para cada $t \in T$ se tiene una σ-álgebra $\mathcal{F}_t$ de subconjuntos de Ω. Sea $\mathcal{F} = \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Veamos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

- Como cada $\mathcal{F}_t$ es σ-álgebra, entonces $\Omega \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \in T$. Por lo tanto $\Omega \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$
- Sea $A \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$. Entonces $A \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \in T$. Por lo tanto $A^c \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \in T$, es decir, $A^c \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$.
- Sea $A_1, A_2, \ldots \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$. Entonces $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \in T$. Por lo tanto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \in T$, es decir, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$. ■

Definición A.13. (Filtración)

Una filtración en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es una sucesión $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ de subσ-álgebras crecientes, es decir,

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}.$$

Definición A.14. (Sigma-álgebra de Borel).

La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos en los reales, es decir,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} | a \leq b\}.$$

A los conjuntos de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ se les llama borelianos.

Definición A.15. (Función medible).

Sean, $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(\Sigma, \mathcal{S})$ dos espacios medibles. Una función $f : \Omega \to \Sigma$ se llama medible si $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}$, i.e. $f^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ para todo $S \in \mathcal{S}$.

Definición A.16. (Medida).

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una medida en $(\Omega, \mathcal{F})$ es una función $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con las siguientes propiedades:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$
- μ es σ-aditiva, es decir, si (A_n) es una sucesión de elementos disjuntos dos a dos de $\mathcal{F}$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición A.17. (Medida absolutamente continua).

Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dos medidas. Decimos que μ_2 es absoutamente continua con respecto a μ_1 si $\mu_2(E) = 0$ siempre que $\mu_1(E) = 0$. Lo denotamos $\mu_2 \ll \mu_1$.

Definición A.18. (Medida de probabilidad).

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ es una medida $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que satisface que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Definición A.19. (Espacio de probabilidad).

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, en donde Ω es un conjunto arbitrario, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$.

Definición A.20. (Variable aleatoria).

Una variable aleatoria es una función medible $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, donde $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es espacio de probabilidad.

Definición A.21. (Función de distribución).

Sea X una variable aleatoria. La función de distribución $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de X es

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definición A.22. (Variable aletoria discreta, continua y absolutamente continua).

Una variable aleatoria X se llama discreta si toma a lo más una cantidad numerable de valores. En este caso la función de distribución tiene discontinuidades. Sean $x_1, x_2, \ldots$ los puntos de discontinuidad de F(x). En cada uno de estos puntos el tamaño de la discontinuidad es $\mathbb{P}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^-) > 0$. La función de densidad $f(x)$, se define

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x) & \text{si } x = x_1, x_2, \ldots \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

La función de distribución en este caso se expresa de la siguiente forma:

$$F(x) = \sum_{u \leq x} f(u).$$

Una variable aleatoria X se llama continua, si su correspondiente función de distribución es una función continua.

Una variable aleatoria X con distribución $F(x)$ se llama absolutamente continua, si existe una función no negativa e integrable f que le llamamos densidad de X, tal que se cumple

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

Definición A.23. (Proceso estocástico).

Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias $\{X(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$ definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Definición A.24. (Proceso estocástico adaptado a la Filtración $\mathcal{F}_n$).

Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0$ se dice adaptado a la filtración $\mathcal{F}_n$ si $X(t)$ es $\mathcal{F}_n$-medible para todo $t \geq 0$. También es llamado proceso estocástico $\mathcal{F}_n$-adaptado.

Definición A.25. (Esperanza).

Sea X variable aleatoria con función de distribución $F(x)$. La esperanza de X, denotada por $\mathbb{E}(X)$, se define como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(X),$$

cuando esta integral es absolutamente convergente, es decir, cuando $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(X) < \infty$, en tal caso se dice que X es integrable, o que la esperanza de X es finita.

Otra expresión más general que utilizaremos, dada una medida de probabilidad Q en $(\Omega, \mathcal{F})$. Definimos la esperanza de X bajo la medida Q como

$$\mathbb{E}_Q(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dQ(\omega), \quad \text{o, simplemente,} \quad \int X dQ.$$

Cuando X es discreta con función de probabilidad f(x), la esperanza se calcula

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x f(x).$$

Si X es absolutamente continua con densidad $f(x)$, entonces su esperanza es

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Si X es una variable mixta, donde la función de distribución $F(x)$ admite la descomposición

$$F(x) = \alpha F^d(x) + (1 - \alpha) F^c(x),$$

para $\alpha \in [0, 1]$, en donde $F^d(x)$ es una función de distribución discreta, y F^c es una función de distribución continua $F^c(x)$. llamemos X_d una variable con distribución $F^d(x)$, y X_c una variable con distribución $F^c(x)$. entonces X tiene esperanza finita si, y sólo si, X_d, X_c tienen esperanza finita, y se expresa

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\mathbb{E}(X_d) + (1-\alpha)\mathbb{E}(X_c).$$

Hay casos más generales que no discutiremos aquí.

Definición A.26. (Esperanza condicional).

Sea X una variable aleatoria con esperanza finita($\mathbb{E}(X) \leq \infty$), y sea $\mathcal{G}$ una σ-álgebra de $\mathcal{F}$. La esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$, es una variable aleatoria que denotamos por $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, que cumple las siguientes propiedades:

(a) Es $\mathcal{G}$-medible.

(b) Tiene esperanza finita.

(c) Para cualquier evento $G \in \mathcal{G}$ y una medida Q en $(\Omega, \mathcal{F})$,

$$\int_G (\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))dQ = \int_G (XdQ).$$

Definición A.27. (Espacio L infinito).

Denotamos con L^∞ al espacio que contiene a todas las variables acotadas casi seguramente ($c.s.$), definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definición A.28. (Norma del supremo).

La norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$ asigna a una función φ definida en L^∞ el valor no negativo

$$\|\varphi(k)\|_\infty = \text{ínf}\{x > 0 \;|\{k : \varphi(k) > x\} \text{ es nulo}\}.$$

Apéndice B

Resultados importantes.

B.1. Convexidad.

Proposición B.1.1. La función $g(x) = x \log x$ para $x > 0$ y $g(0) = 0$ es convexa.

Demostración. Mediante el siguiente criterio: Para una función g doblemente diferenciable, g es convexa si y solo si $\frac{d^2 g}{dx} \geq 0$ para todo x en el dominio de g y dominio de g convexo. En este caso $g(x) = x \log x$ y el dominio de g es $(0, +\infty)$ que es convexo, entonces, $\frac{d^2 g(x)}{dx} = \frac{1}{x} > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto $g(x)$ es convexa. ■

B.2. Esperanza y esperanza condicional.

Proposición B.2.1. Si $X \leq Y$ *c.s.* y además $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$ entonces $X = Y$ *c.s.*

Demostración. Sea $X \leq Y$ *c.s.*. Por la monotonía de la esperanza $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y)$ y por hipótesis $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X)$, entonces $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y)$. Ahora, tenemos $X \leq Y$ *c.s.*, entonces tomemos $Z = Y - X \geq 0$, entonces $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X + Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y)$, lo que implica que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y)$. Vimos que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y)$, entonces $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 0$. Como Z es no negativa y $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 0$ entonces $Z = 0$ *c.s.* (ver [12], Teorema 4.4 página 52). Por lo tanto $X = Y$ *c.s.* ■

Lema B.2.2. (Propiedad de la torre).

Sea X variable aleatoria, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Para $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ subσ-álgebras se cumple que:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) \quad c.s.$$

Demostración. Ver [12], Lema 1.1 página 472. ■

Teorema B.2.3. (Desigualdad de Jensen). Sea X una variable aleatoria, g una función convexa, y supongamos que X y g son integrables. Entonces

$$g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X)).$$

También se cumple para el caso con esperanza condicional, y la demostración es la misma que el caso no condicional.

Demostración. Ver [12], Teorema 5.1. página 132. ■

Corolario B.2.4. Sea X una variable aleatoria, g una función concava, y supongamos que X y g son integrables. Entonces

$$\mathbb{E}(g(X)) \leq g(\mathbb{E}(X)).$$

B.3. Convergencia.

Teorema B.3.1. (Lema de Fatou). Si $\{X_n, n \geq 1\}$ son variables aleatorias no negativas, entonces

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

Demostración. Ver [12], Teorema 5.2. página 56. ■

Teorema B.3.2. (Teorema de convergencia dominada).

Sean $\{X_n, n \geq 1\}$ y Y variables aleatorias. Supongamos que $|X_n| \leq Y$, para toda n, donde $\mathbb{E}(Y) \leq \infty$ y X_n tiende a X c.s. cuando n tiende a infinito. Entonces

$$\mathbb{E}(X_n - X) \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

en particular,

$$\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X), \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

Demostración. Ver [12], Teorema 5.3. página 57. ■

Observación B.3.3. Podemos generalizar estos teoremas para el caso de esperanza condicional, se puede ver una prueba de este hecho en [12], proposición 1.2. página 473.

B.4. Medidas de probabilidad absolutamente continuas.

Sean $\mathbb{P}$ y Q dos medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

El siguiente teorema es una caracterización de medidas aboslutamente continuas (definición A.17) conocido como el teorema de Radon-Nikodym:

Teorema B.4.1. (Radon-Nikodym). Q es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}$ en $\mathcal{F}$ si y solo si existe una función $\mathcal{F}$-medible $\varphi \geq 0$ tal que

$$\int F dQ = \int F \varphi dP$$

para toda función $\mathcal{F}$-medible, y $F \geq 0$.

Demostración. Ver [4], sección §17 página 96. ■

Observación B.4.2. La función φ es llamada *densidad o derivada de Radon-Nikodym* de Q con respecto a $\mathbb{P}$, y la escribiremos como

$$\frac{dQ}{dP} = \varphi.$$

B.5. Supremo e ínfimo esencial de una familia de variables aleatorias.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Denotamos por $L^0(\overline{\mathbb{R}})$ el espacio extendido de variables aleatorias finitas $\mathbb{P}$-casi seguramente, es decir, las $\mathbb{P}$-clases de equivalencia de las funciones $\mathcal{F}$-medibles definidas de Ω a $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (una función g en la clase de equivalencia asociada a la función f cumple que $f = g\ \mathbb{P}-c.s.$), con $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$, es decir, $\sigma(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, +\infty, -\infty)$. Para $\mathcal{X} \subseteq L^0(\overline{\mathbb{R}})$ llamemos $\mathcal{D}(\mathcal{X}) = \{Z \in L^0(\overline{\mathbb{R}}) \mid Z \geq X$ para toda $X \in \mathcal{X}\}$ a la familia de variables aleatorias dominantes, la cual es no vacía ya que contiene al menos a la variable aleatoria constante igual a $+\infty$.

Las igualdades o desigualdades entre variables aleatorias es entendido que se cumplen $\mathbb{P}-c.s.$.

Teorema B.5.1. Para cualquier $\mathcal{X} \subseteq L^0(\overline{\mathbb{R}})$ existe un único elemento $X^* \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$ tal que $X^* \leq Z$ para cualquier $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$. Si además $\mathcal{X}$ es dirigido hacia arriba, (es decir, para cualesquier $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, existe $X \in \mathcal{X}$ con $\max(\{X_1, X_2\}) \leq X$), entonces existe una sucesión creciente $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ tal que X_n converge a X^* *c.s.* cuando n tiende a infinito.

Demostración. Ver [9], Teorema A.32. página 417. ■

Observación B.5.2. La variable aleatoria X^* del teorema anterior es llamada *supremo esencial* de $\mathcal{X}$ en $L^0(\overline{\mathbb{R}})$ y la denotamos por $\text{sup.es}\mathcal{X}$. El *ínfimo esencial* es definido por $\text{ínf.es}\mathcal{X} = -\text{sup.es}(-\mathcal{X})$. Se puede ver que si cada $X \in \mathcal{X}$ es $\mathcal{G}$-medible, donde $\mathcal{G}$ es una subσ-álgebra de $\mathcal{F}$, entonces el sup.es y el ínf.es son también $\mathcal{G}$-medibles.

Lema B.5.3. Si $\mathcal{X} \in L^0(\overline{\mathbb{R}})$ es dirigido hacia arriba (recordemos que esto se define como: para cualesquier $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ existe $X \in \mathcal{X}$ con $\max(\{X_1, X_2\}) \leq X$), entonces se cumple que:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}\mathcal{X}) = \sup_{X\in\mathcal{X}} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}X),$$

si las esperanzas existen.

Demostración. Primero probemos que $\sup_{X\in\mathcal{X}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}X) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}\mathcal{X})$, partiendo que $X \leq \text{sup.es}\mathcal{X}$. Por la monotonía de la esperanza llegamos a que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}\mathcal{X})$. Tomando el supremo, $\sup_{X\in\mathcal{X}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}X) \leq \sup_{X\in\mathcal{X}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}\mathcal{X})) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}\mathcal{X})$. Ahora, para probar $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}\mathcal{X}) \leq \sup_{X\in\mathcal{X}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}X)$, por el teorema B.5.1 existe una sucesión creciente $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ tal que X_n converge a $\text{sup.es}\mathcal{X}$ cuando n tiende a infinito. Entonces,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\text{sup.es}\mathcal{X}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_n) \leq \sup_{X\in\mathcal{X}} (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}X),$$

donde la última igualdad se da por el teorema de convergencia dominada B.3.2, ya que las variables X_n son finitas casi seguramente. ■

El resultado del lema anterior (B.5.3) sigue válido si tomamos esperanza condicional con respecto a una $\mathcal{G}$ subσ-álgebra de $\mathcal{F}$ en lugar de la esperanza, y consideramos el supremo esencial en lugar del supremo en el lado derecho de la última desigualdad.

Lema B.5.4. Si $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset L^0(\overline{\mathbb{R}})$ y $\Lambda, \Lambda' \in L^0$, $\Lambda, \Lambda' \geq 0$ entonces

$$\text{sup.es}\{\Lambda X + \Lambda' Y | X \in \mathcal{X},\ Y \in \mathcal{Y}\} = \Lambda \text{sup.es}\mathcal{X} + \Lambda' \text{sup.es}\mathcal{Y}.$$

Hacemos la convención que $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Demostración. Primero probaremos que

$$\text{sup.es}\{\mathcal{X} + \mathcal{Y}\} = \text{sup.es}\mathcal{X} + \text{sup.es}\mathcal{Y}.$$

Sean $Z^* = \text{sup.es}\{\mathcal{X} + \mathcal{Y}\}$, $X^* = \text{sup.es}\mathcal{X}$ y $Y^* = \text{sup.es}\mathcal{Y}$. Por definición $Z^* \in \mathcal{D}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})$ entonces $X + Y \leq Z^*$ para todo $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$, además $Z^* \leq Z$ para todo $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})$. Por otra parte tenemos que $X \leq X^*$ para todo $X \in \mathcal{X}$ y $Y \leq Y^*$ para toda $Y \in \mathcal{Y}$, entonces $X + Y \leq X^* + Y^*$ para todo $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$, entonces $X^* + Y^* \in \mathcal{D}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})$, pero Z^* es el más pequeño. Por lo tanto $Z^* \leq X^* + Y^*$.

Ahora, por otro lado consideremos $\epsilon > 0$. $X^* \leq Z$ para toda $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$, entonces $X^* - \frac{\epsilon}{2} \notin \mathcal{D}(\mathcal{X})$, por lo que existe $X \in \mathcal{X}$ tal que $X^* - \frac{\epsilon}{2} < X$. Con el mismo razonamiento para Y^* concluimos que $Y^* - \frac{\epsilon}{2} < Y$ para $Y \in \mathcal{Y}$. Sumando estas desigualdades y por la definición de Z^* tenemos que:

$$Y^* + X^* - \epsilon < X + Y \leq Z^*.$$

Por lo tanto $Y^* + X^* < Z^* + \epsilon$, y vale para toda $\epsilon \geq 0$, entonces concluimos que $Y^* + X^* \leq Z^*$.

Falta probar que para $\Lambda \in L^0$ y $\Lambda \geq 0$ pasa:

$$\text{sup.es}(\Lambda \mathcal{X}) = \Lambda \text{sup.es}\mathcal{X}.$$

El caso $\Lambda = 0$ es trivial.

Para el caso $\Lambda > 0$. Sea X^* igual que como se definió arriba, y sea $W^* = \text{sup.es}(\Lambda \mathcal{X})$, entonces $\Lambda X \leq W^*$ para toda $\Lambda X \in \Lambda \mathcal{X}$. Por definición tenemos que $X \leq X^*$, entonces $\Lambda X \leq \Lambda X^*$, lo que implica que $\Lambda X^* \in \mathcal{D}(\Lambda \mathcal{X})$. Por lo tanto $W^* \leq \Lambda X^*$ por definición de W^*.

Ahora, terminaremos la demostración observando que en la desigualdad anterior llegamos a una contradicción si suponemos que $W^* < \Lambda X^*$. Sea un incremento $\Delta > 0$ tal que $W^* + \Delta = \Lambda X^*$. Por otro lado existe $X \in \mathcal{X}$ tal que $X^* - \frac{\Delta}{\Lambda} < X$, ya que $X^* - \frac{\Delta}{\Lambda} \notin \mathcal{D}(\mathcal{X})$. Entonces multiplicando por

Λ concluimos que $W^* = \Lambda X^* - \Delta < \Lambda X$, pero, por definición $\Lambda X \leq W^*$ para toda $\Lambda X \in \Lambda\mathcal{X}$, por lo que contradice el supuesto. Por lo tanto

$$W^* = \text{sup.es}(\Lambda\mathcal{X}) = \Lambda X^* = \Lambda\text{sup.es}\mathcal{X}.$$

■

Lema B.5.5. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in L^\infty$ y sea f una función definida en $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Definimos las siguientes funciones: $f_1(X) = \text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}}\{f(X,Y)\}$ y $f_2(Y) = \text{sup.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f(X,Y)\}$. Entonces,

$$\text{sup.es}_{X\in\mathcal{X},Y\in\mathcal{Y}}\{f(X,Y)\} = \sup_{X\in\mathcal{X}}\{f_1(X)\} = \sup_{Y\in\mathcal{Y}}\{f_2(Y)\},$$

que también podemos expresar como:

$$\text{sup.es}_{X\in\mathcal{X},Y\in\mathcal{Y}}\{f(X,Y)\} = \text{sup.es}_{X\in\mathcal{X}}\text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}}\{f(X,Y)\} = \text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}}\text{sup.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f(X,Y)\}.$$

Demostración. Sea $Z^* = \text{sup.es}_{X\in\mathcal{X},Y\in\mathcal{Y}}\{f(X,Y)\}$, entonces se cumple que $f(X,Y) \leq Z^*$ para todo $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Entonces $f_1(X) \leq Z^*$ para todo $X \in \mathcal{X}$, en especial para el supremo esencial, por lo tanto

$$\text{sup.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f_1(X)\} \leq Z^*.$$

Inversamente, sea $\epsilon > 0$. Existe (X_0, Y_0) tal que $Z^* - \epsilon < f(X_0, Y_0)$, lo que implica que $Z^* - \epsilon < \text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}}\{f(X_0,Y)\} = f_1(X_0)$. Entonces $Z^* - \epsilon < \text{sup.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f_1(X)\}$. Como vale para toda ϵ mayor que cero, se cumple que:

$$Z^* \leq \text{sup.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f_1(X)\}.$$

Por lo tanto $Z^* = \text{sup.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f_1(X)\}$. Análogamente para $f_2(Y)$ concluimos lo que se pide. ■

Lema B.5.6. Sean f y f_1 como en el lema anterior (B.5.5), y sea $g(Y) = \text{ínf.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f(X,Y)\}$. Se cumple que:

$$\text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}}g(Y) \leq \text{ínf.es}_{X\in\mathcal{X}}f_1(X),$$

que también pordemos expresar como:

$$\text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}}\text{ínf.es}_{X\in\mathcal{X}}f(X,Y) \leq \text{ínf.es}_{X\in\mathcal{X}}\text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}}f(X,Y).$$

Demostración. Por definición tenemos que $g(Y) = \text{ínf.es}_{X\in\mathcal{X}}\{f(X,Y)\}$ para todas $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$ en especial para el supremo esencial sobre las $Y \in \mathcal{Y}$, entonces $\text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}} g(Y) \leq f(X,Y)$ para toda $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$. Inversamente, $f(X,Y) \leq \text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}} f(X,Y) = f_1(X)$ para todas $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{Y}$ en especial para el ínfimo sobre las $X \in \mathcal{X}$, entonces $f(X,Y) \leq \text{ínf.es}_{X\in\mathcal{X}} f_1(X)$. Por lo tanto,

$$\text{sup.es}_{Y\in\mathcal{Y}} g(Y) \leq \text{ínf.es}_{X\in\mathcal{X}} f_1(X).$$

■

Lema B.5.7. Sean $X_n \in L^\infty$, f_α funciones definidas en $\mathcal{X}$ y $\alpha \in I$ un conjunto. Se cumple que:

$$\text{sup.es}_{a\in I}\{\lim_{n\to\infty} f_\alpha(X_n)\} \leq \liminf_{n\to\infty}\{\text{sup.es}_{\alpha\in I}\} f_\alpha(X_n)\}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\text{sup.es}_{a\in I} \lim_{n\to\infty} f_\alpha(X_n) &= \text{sup.es}_{\alpha\in I}\text{sup.es}_{n\geq 1}\text{ínf.es} k \geq n f_\alpha(X_n) \\
&= \text{sup.es}_{n\geq 1}\text{sup.es}_{\alpha\in I}\text{ínf.es} k \geq n f_\alpha(X_n) \\
&\leq \text{sup.es}_{n\geq 1}\text{ínf.es} k \geq n[\text{sup.es}_{\alpha\in I} f_\alpha(X_n)] \\
&= \liminf_{n\to\infty}\{\text{sup.es}_{\alpha\in I}\} f_\alpha(X_n)\}.
\end{aligned}$$

La primera igualdad es por definición, la segunda igualdad la tenemos gracias al lema B.5.5, la desigualdad se da por el lema B.5.6 y la última igualdad es por definición. ■

Observación B.5.8. El resultado del lema anterior B.5.7 se puede aplicar a conjuntos de numeros reales tomando supremos e ínfimos en lugar de supremos e ínfimos esenciales, la demostración es análoga.

B.6. Análisis funcional.

Definición B.6.1. (Topología, espacio topológico).

Dado un conjunto $\mathcal{X}$, por una topología en $\mathcal{X}$ nos referimos a un sistema τ de subconjuntos $G \subseteq \mathcal{X}$, llamados conjuntos abiertos (relativos a τ), con las siguientes dos propiedades:

1. Los conjuntos $\mathcal{X}, \emptyset$ pertenecen a τ.

2. Unión arbitraria $\bigcup_\alpha G_\alpha$ e intersecciones finitas $\bigcap_\alpha G_\alpha$ de conjuntos abiertos pertencen a τ.

Por espacio topológico entendemos una pareja $(\mathcal{X}, \tau)$, que consiste de un conjunto $\mathcal{X}$ y una topología τ en $\mathcal{X}$.

Observación B.6.2. Los conjuntos abiertos en un espacio métrico (deinición A.4) satisfacen las dos propiedades de la definición anterior. Entonces toda métrica genera una topología (ver [15], ejemplo 1 página 79).

Recordemos que definimos el espacio L^0 en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ como el conjunto de todas las variables finitas $\mathbb{P}$-casi seguramente. En este espacio usamos la topología de convergencia en la medida $\mathbb{P}$. Esta topología es generada por la métrica:

$$d(X,Y) = \mathbb{E}[\text{mín}(|X - Y|, 1)], \quad X, Y \in L^0.$$

Definición B.6.3. (Espacio vectorial topológico).

Un espacio lineal E que tiene una topología es llamado espacio vectorial topológico si para cada conjunto unitario x con $x \in E$ es cerrado, y si las operaciones del espacio vectorial son continuas en el siguiente sentido:

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

es una función continua de $E \times E$ en E, y

$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$$

es continua de $\mathbb{R} \times E$ en E.

Definición B.6.4. (Espacio localmente convexo).

Un espacio vectorial topológico es llamado espacio localmente convexo si su topología tiene una base de conjuntos convexos.

Observación B.6.5. Si E es un espacio de Banach (espacio vectorial normado donde toda sucesión de Cauchy converge) con la norma $\|\cdot\|$, entonces las bolas abiertas

$$\{y \in E | \|y - x\| < r\}, \quad x \in E, \ r > 0,$$

por definición forman una base para la topología de E. Claramente estas bolas son conjuntos convexos, entonces cualquier espacio de Banach es localmente convexo.

Teorema B.6.6. (Hahn-Banach). Supongamos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos subconjuntos de un espacio localmente convexo E, no vacíos y disjuntos. Entonces, si $\mathcal{B}$ es compacto y $\mathcal{C}$ es cerrado, existe una función continua l en E tal que

$$\sup_{x\in\mathcal{C}} l(x) < \inf_{y\in\mathcal{B}} l(y).$$

Demostración. Ver [7], Teorema V.2.10. página 417. ■

Observación B.6.7. Un corolario del resultado anterior, nos dice que , un espacio localmente convexo E, la colección

$$E' = \{l : E \to \mathbb{R} | l \text{ es continua y lineal}\}$$

separa a los puntos de E, es decir, para cualesquier $x, y \in E$ distintos existe alguna función $l \in E'$ tal que $l(x) \neq l(y)$. El espacio E' es llamado **espacio dual de E**.

Definición B.6.8. (F-Topología, topología débil).

Sea E un espacio lineal, y supongamos que F es una clase lineal de funciones lineales en E que separa los puntos de E (ver observación anterior). La F-topología en E, denotada por $\sigma(E, F)$, es la topología en E que es obtenida tomando como base todos los conjuntos de la forma

$$\{y \in E | l_i(y) - l_i(x) < r, \quad i = 1, ...n\},$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$, $l_i \in F$, y $r > 0$. Si E ya tiene una topología localmente convexa, entonces la E'-topología $\sigma(E, E')$ es llamada **topología débil** en E.

Proposición B.6.9. Consideremos la situación de la definición anterior B.6.8. Entonces:

(a) E es un espacio localmente convexo para la F-topología.

(b) La F-topología es la topología más gruesa en E para la cual toda $l \in F$ es continua.

(c) El espacio dual de E para la F-topología es igual a F.

Demostración. Ver [7], Sección V.3 página 418. ■

Para un espacio localmente convexo E podemos cambiar las cosas y considerar E como un conjunto de funciones lineales en el espacio dual E' haciendo $x(l) = l(x)$ para $l \in E'$ y $x \in E$. la E-topología $\sigma(E', E)$ obtenida de esta forma es llamada la **topología débil***

Lema B.6.10. Un conjunto convexo $\mathcal{C} \subseteq L^\infty$ es cerrado débil* si para toda $r > 0$

$$\mathcal{C}_r = \mathcal{C} \cap \{X \in L^\infty | \|X\|_\infty \leq r\}$$

es cerrado en L^1.

Demostración. Ver [9], Lema A.64. página 431. ■

B.7. Entropía

Definición B.7.1. (Entropía relativa).

La entropía relativa de una medida de una medida de probabilidad Q con respecto a $\mathbb{P}$ es definida como:

$$H(Q|\mathbb{P}) = \begin{cases} \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP}\right) & \text{si } Q \ll \mathbb{P}, \\ +\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lema B.7.2. Para cualquier medida de probabilidad Q.

$$\begin{aligned} H(Q|\mathbb{P}) &= \sup_{Z \in L^\infty}(\{\mathbb{E}_Q(Z) - \log \mathbb{E}_\mathbb{P}(e^Z)) \\ &= \sup(\mathbb{E}_Q(Z) - \log \mathbb{E}_\mathbb{P}(e^Z) | e^Z \in L^1). \end{aligned}$$

El segundo supremo es alcanzado por $Z = \log \frac{dQ}{dP}$ si $Q \ll \mathbb{P}$.

Demostración. Ver [9], Lema 3.29 página 122. ■

B.8. Martingalas y tiempos de paro.

Definición B.8.1. (Martingala). Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias y $\{\mathcal{F}_t\}$ una filtración. Si X_t es medible con respecto a $\mathcal{F}_t$, decimos que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es martingala con respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si:

$\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ para toda $0 \leq t < \infty$ y

$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ para toda $0 \leq s \leq t < \infty$.

Teorema B.8.2. (Representación martingala).

Supongamos que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, donde $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la filtración Browniana. Si existe T tal que $\mathbb{E}(X_T^2) < \infty$ y si $X_0 = 0$, entonces existe un proceso $\phi(w,s) \in \mathcal{H}_n^2(0,T) = \{(\phi_t; 0 \leq t \leq T)|\ \mathbb{E}(\int_0^T |\phi_t|^2 ds) < \infty\}$ tal que

$$X_t = \int_0^t \phi(w,s)dB_s \ \text{ para todo } 0 \leq t \leq \infty.$$

Además, la representación anterior es única excepto posiblemente en un conjunto de medida cero.

Demostración. Ver [20] teorema 12.3, página 197. ∎

Ahora introducimos la definición de tiempo de paro, y la definición de una sigma-álgebra generada por un tiempo de paro

Definición B.8.3. (Tiempo de paro).

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ una filtración. Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ es un tiempo de paro respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si para cada $t \geq 0$,

$$(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t.$$

Definición B.8.4. (Sigma-álgebra generada hasta un tiempo de paro).

La σ-álgebra generada hasta un tiempo de paro τ está dada por:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \ \text{para toda } t \geq 0\}.$$

Notemos que la restricción de tomar conjuntos en $\mathcal{F}_\infty$ es por la posibilidad de que el tiempo de paro sea infinito, y eso nos asegura que $A \cap \{\tau \leq \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$.

Bibliografía

[1] Back, Kerry, Tomasz R. Bielecki, Christian Hipp, Shige Peng, Walter Schachermayer y Shige Peng: *Nonlinear Expectations, Nonlinear Evaluations and Risk Measures.* En *Stochastic Methods in Finance*, volumen 1856 de *Lecture Notes in Mathematics*, páginas 243–256. Springer, 2004.

[2] Barrieu, Pauline y Nicole El Karoui: *Pricing, Hedging and Optimally Designing Derivatives via Minimization of Risk Measures.* En *Volume on indifference pricing Rene Carmona, ed.,*. Princeton University Press, 2005.

[3] Bartle, Robert G.: *The Elements of Real Analysis.* John Wiley & Sons, EUA, primera edición, 1964.

[4] Bauer, Heinz: *Measure and Integration Theory.* Walter de Gruyter Studies in Mathematics 26, Alemania, Berlín, 2001.

[5] Detlefsen, Kai y Giacomo Scandolo: *Conditional and dynamic convex risk measures.* Finance and Stochastics, 9(4):539–561, 2005.

[6] Dudley, Richard M.: *Real Analysis and Probability.* Cambridge University Press, Reino Unido, Cambridge, 2004.

[7] Dunford, Nelson y Jacob Schwartz: *Linear Operators. Part I: General Theory.* Interscience Publishers, EUA, New York, 1958.

[8] Elliot, Robert J., Tak Kuen Siu y Samuel N. Cohen: *Backward Stochastic Difference Equations for Dynamic Convex Risk Measures on a Binomial Tree.* Working Paper, Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford., Enero 2011.

[9] Föllmer, Hans y Alexander Shied: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter Studies in Mathematics 27, Alemania, Berlín, segunda edición, 2004.

[10] Friedberg, Stephen H., Arnold J. Insel y Lawrence E. Spence: *Álgebra Lineal*. Publicaciones Cultural, S.A., México, primera edición, 1982.

[11] Grabinsky, Guillermo: *Teoría de la medida*. Las prensas de ciencias, México, D.F., primera edición, 2009.

[12] Gut, Allan: *Probability: A Graduate Course*. Springer, EUA, New York, primera edición, 2005.

[13] Karoui, Nicole El, Said Hamadène y Anis Matoussi: *Backward Stochastic Differential Equations and Applications*. In Volume on Indifference Pricing (ed Rene Carmona) Princeton University Press, páginas 267–320, 2009.

[14] Kellison, Stephen G.: *The theory of interest*. Richard D. Irwin, segunda edición, 1991.

[15] Kolmogorov, Andreí N. y Sergei V. Fomin: *Introductory real analysis*. Dover Publications, Inc, EUA, New York, primera edición, 1975.

[16] McNeil, Alexander J., R¨udiger Frey y Paul Embrechts: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, New Jersey, Estados Unidos, primera edición, 2005.

[17] Revuz, Daniel y Marc Yor: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, Alemania, tercera edición, 1999.

[18] Rincon, Luis: *Curso intermedio de probabilidad*. Las prensas de ciencias, México, D.F., primera edición, 2007.

[19] Siu, Tak Kuen: *Functional Itô's calculus and dynamic convex risk measures for derivative securities*. Communications on Stochastic Analysis, 6(2):339–358, 2012.

[20] Steele, J. Michael: *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, New York, EUA., primera edición, 2000.