



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN A FORMAS DIFERENCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

ELEAZAR TÉLLEZ ROJAS

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. OTTO HÉCTOR ROMERO GERMÁN



2012



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central

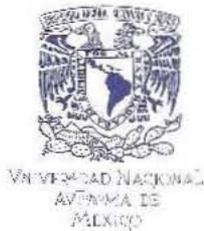


UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

DR. ISIDRO ÁVILA MARTÍNEZ
Director General
Dirección General de Administración Escolar
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Introducción a formas diferenciales

realizado por **Téllez Rojas Elcazar** con número de cuenta **0-9757708-5** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Santiago López de Medrano Sánchez

Propietario M. en C. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez

Propietario Tutor M. en C. Otto Héctor Romero Germán

Suplente M. en C. Noel Jaramillo Arce

Suplente Mat. Efraín Vega Landa

Atentamente,
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 14 de febrero de 2012
EL JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.
MAG/czs

Agradecimientos

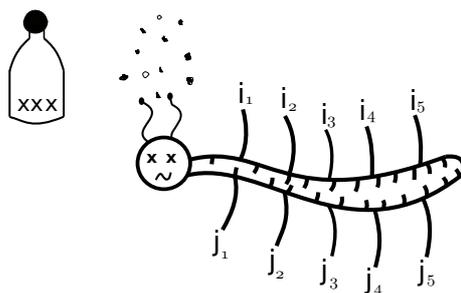
Agradezco profundamente a mi tutor Otto. A mi mamá está dedicada esta tesis. A mi papá y mis hermanos, Susana, Adrian y Mario. A Vicky que camina conmigo. A Otto, Noel, Efraín y Santiago de quienes no solo he aprendido matemáticas sino asuntos de la vida.

Índice

Introducción	1
1 Formas exteriores	7
1.1 1-forma exterior	7
1.2 2-forma exterior	9
1.3 k-forma exterior	10
1.4 El producto exterior de dos 1-formas exteriores	11
1.5 Multiplicación exterior	13
2 Formas diferenciales	15
2.1 Formas diferenciales	15
2.2 Integración de formas diferenciales	17
2.3 Pullback de formas diferenciales	18
2.3.1 Integración de una k-forma sobre una n variedad	19
2.4 Derivada exterior	20
2.5 Teorema de Stokes	22
2.6 Campos y formas diferenciales	24
2.6.1 Producto interior	24
2.7 $\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times$	25
3 Visualización de formas diferenciales	27
3.1 Visualización de formas diferenciales	27
4 Teorema de Gauss-Bonnet	32
4.1 Ecuaciones de estructura de Cartan	32
4.2 Haces fibrados I	35
4.3 Secciones	38

4.4	Haces fibrados II	38
4.5	Dualidad de Poincaré y Producto de intersección	40
4.5.1	Dual de Poincaré del disco y su circunferencia en el plano xy en \mathbf{R}^3	42
4.6	Teorema de Gauss-Bonnet $n=2$	44
5	Invariante de Hopf	48
5.1	Invariante de Hopf	48
5.2	Número de enlazamiento	50
5.2.1	Número de enlazamiento desde Teoría de intersección	51
5.2.2	Número de enlazamiento desde el grado de Brouwer	51
5.2.3	Número de enlazamiento desde ley de Ampère . .	54
5.3	Proyección estereográfica del círculo	55
5.4	Fibración de Hopf	57
5.5	Forma de volumen	59
5.6	Pullback de la forma de volumen	59
5.7	Cálculo explícito de la integral H $n=2$	67
5.8	Cálculo del invariante H usando fibras	69
5.9	Invariante H $n=2$	71
6	Conclusiones	76
6.1	Conclusiones	76
	Bibliografía	77

Introducción



Esta tesis es una introducción a formas diferenciales, herramienta fundamental en geometría. Veremos su aplicación en dos ejemplos: el Teorema de Gauss-Bonnet y el invariante de Hopf, ambos para el caso particular $n=2$. Para el invariante de Hopf presentamos un ejemplo de cálculo explícito.

El primer capítulo definiremos formas exteriores y algunas de sus propiedades más importantes. En el caso de una variedad \mathbf{M}^n en cada punto tenemos el espacio vectorial tangente, poner una forma exterior en cada espacio vectorial de manera suave en \mathbf{M}^n es a lo que llamamos una forma diferencial y es el contenido del capítulo 2.

Las formas diferenciales surgen cuando conceptos como el trabajo a lo largo de un camino y el flujo de un fluido se generalizan a todas las dimensiones. Las formas diferenciales aparecen dentro de integrales. En una integral de línea

$$\int_{\mathbf{M}^1} A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz.$$

Donde en el integrando tenemos la 1-forma diferencial $\omega^1 = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$. En una integral de superficie

$$\int_{\mathbf{M}^2} P(x, y, z)dxdy + Q(x, y, z)dydz + R(x, y, z)dxdz.$$

Tenemos la 2-forma diferencial $\omega^2 = P(x, y, z)dxdy + Q(x, y, z)dydz + R(x, y, z)dxdz$. En una integral de volumen

$$\int_{\mathbf{M}^3} H(x, y, z)dxdydz.$$

Tenemos la 3-forma diferencial $\omega^3 = H(x, y, z)dxdydz$. Consideremos ahora la integral

$$\int \int A(x, y)dxdy.$$

Con el cambio de variable

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v).\end{aligned}$$

La integral cambia como

$$\int \int_{\mathbf{D}} A(x, y) dx dy = \int \int_{\mathbf{D}^*} A(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Donde \mathbf{D}^* es como cambia la region \mathbf{D} debido al cambio de variables. Lo que nos lleva a

$$dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv.$$

Si ponemos $x=y$ el determinante es cero. También si intercambiamos x por y el determinante cambia de signo. Esto motiva las siguientes reglas

$$dx \wedge dx = 0$$

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx.$$

Existen diferentes operaciones entre formas diferenciales, producto wedge, producto interior, derivada exterior. La última es una generalización de la diferencial, gradiente, divergencia y rotacional. Si tenemos una $(n-1)$ -forma diferencial ω su derivada exterior es una n -forma diferencial. La definición es dada de manera que válida la fórmula general de Stokes

$$\int_{\partial \mathbf{M}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbf{M}^n} d\omega.$$

Primera aplicación. El Teorema de Gauss Bonnet es una manera sofisticada de calcular la característica de Euler de una variedad \mathbf{M} .

Sea \mathbf{M}^2 una superficie orientable, conexa y cerrada. En dimensión dos el Teorema de Gauss-Bonnet es

$$\int_{\mathbf{M}^2} K dA = 2\pi\chi(\mathbf{M}^2).$$

Deberíamos entender como la integral realiza el cálculo de la característica de Euler. Sea \mathbf{TM}^2 el haz tangente y consideremos la variedad \mathbf{M}^2 encajada en \mathbf{TM}^2 usando la sección cero, además consideramos la variedad que resulta de perturbar ésta un poco para que se intersecte con \mathbf{M}^2 transversalmente, esta intersección es la característica de Euler.

El dual de Poincaré de \mathbf{M}^2 en \mathbf{TM}^2 es una forma diferencial de grado 2 ya que el haz tangente tiene dimensión 4. Esta forma se llama la clase de Thom del haz tangente. El producto de intersección en \mathbf{TM}^2 es el producto wedge de los duales de Poincaré de la variedad \mathbf{M}^2 y \mathbf{M}^2 perturbada y este producto wedge a su vez es igual a la clase de Thom integrada ya sea en \mathbf{M}^2 metida en \mathbf{TM}^2 o en la perturbada.

La clase de Thom vive en el haz tangente y la podemos traer a la variedad base \mathbf{M}^2 haciendo pullback con la sección cero. Esta forma en \mathbf{M}^2 se llama clase de Euler y es la forma diferencial que integrada sobre \mathbf{M}^2 nos da la característica de Euler por la constante 2π .

El inconveniente de todo esto es la construcción explícita de duales de Poincaré. En cambio, el camino que sigui Chern fue diferente, él utiliza el haz tangente unitario en lugar del haz tangente.

Chern notó que la forma de curvatura Ω no siempre tiene potencial en \mathbf{M}^2 , pero al subir la forma de curvatura al haz tangente unitario sí tiene potencial. Este hecho fundamental es la clave que lleva a la prueba del teorema no solo en dimensión 2, sino en dimensiones pares.

Segunda aplicación. El invariante de Hopf se define para mapeos entre esferas

$$f: \mathbf{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbf{S}^n.$$

Para el caso $n=2$, el invariante de Hopf, como veremos con ms detalle se calcula tomando una 2-forma diferencial normalizada α que genera el segundo grupo de cohomología de De Rham de la esfera $H_{DR}^2(\mathbf{S}^2)$. Hacemos pullback de ésta mediante f para tener una 2-forma diferencial sobre \mathbf{S}^3 , pero como $H_{DR}^2(\mathbf{S}^3) = 0$ hay un potencial (una 1-forma) ω de manera que $f^*\alpha = d\omega$. Entonces el invariante de Hopf denotado $H(f)$ está definido como

$$H(f) = \int_{\mathbf{S}^3} \omega \wedge d\omega.$$

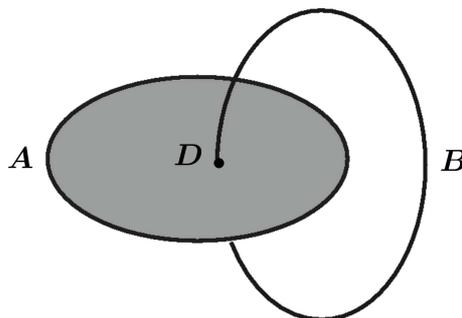


Figura 1: $H(f)=1$

Si $\mathbf{A} = \partial\mathbf{D}$, donde \mathbf{D} es el disco gris y el otro círculo es \mathbf{B} . En algún sentido \mathbf{D} corresponde a $\omega_{\mathbf{A}}$ y la frontera de \mathbf{D} corresponde a la derivada $\mathbf{A} = d\omega_{\mathbf{A}}$. Análogamente podemos hacer con un disco que tenga frontera \mathbf{B} . Entonces el producto de intersección del disco \mathbf{D} con el círculo \mathbf{B} se puede escribir en términos de formas diferenciales como

$$H(f) = \int_{\mathbf{S}^3} \omega_{\mathbf{A}} \wedge d\omega_{\mathbf{B}}$$

que veremos en el capítulo 5 que es igual a

$$H(f) = \int_{\mathbf{S}^3} \omega_{\mathbf{A}} \wedge d\omega_{\mathbf{A}}$$

por lo que el invariante de Hopf es un producto de intersección de sub-variedades y esto explica porque es un entero.

Capítulo 1

Formas exteriores

Este capítulo está basado en [8].

1.1 1-forma exterior

Sea \mathbf{R}^n un espacio vectorial real de dimensión n .

DEFINICIÓN 1.1. Una 1-forma exterior es una función lineal, $\omega : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}\omega(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) &= \lambda_1\omega(\xi_1) + \lambda_2\omega(\xi_2) \\ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Si elegimos un sistema de coordenadas lineales x_1, x_2, \dots, x_n para \mathbf{R}^n , cada x_i es una 1-forma exterior.

$$\begin{aligned}x_i : \mathbf{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x_i(\xi) &= \xi_i \\ \text{donde } \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_n).\end{aligned}$$

El espacio de 1-formas exteriores es un espacio de dimensión n dual a \mathbf{R}^n y el conjunto de estas 1-formas exteriores forman una base para el

espacio dual.

Es decir cualquier 1-forma exterior es una combinación lineal de las x_i

$$\omega = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$.

El valor de ω en cualquier vector $\xi \in \mathbf{R}^n$ es

$$\omega(\xi) = a_1x_1(\xi) + a_2x_2(\xi) + \dots + a_nx_n(\xi),$$

donde $x_1(\xi), x_2(\xi), \dots, x_n(\xi)$ son las componentes de ξ en el sistema de coordenadas elegido.

EJEMPLO 1.2. *Sea F campo de fuerza uniforme, el trabajo que realiza la fuerza es una 1-forma.*

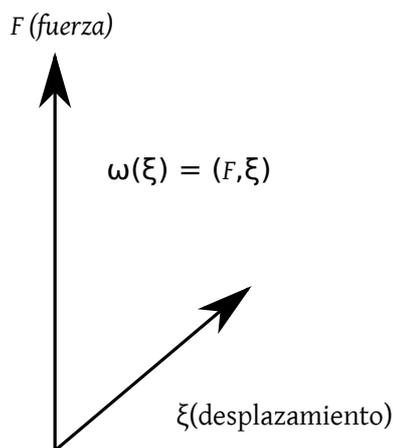


Figura 1.1: *El trabajo de una fuerza es una 1-forma exterior actuando en el desplazamiento.*

1.2 2-forma exterior

DEFINICIÓN 1.3. Una 2-forma exterior es una función bilineal y antisimétrica $\omega^2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es decir cumple que

$$\begin{aligned}\omega^2(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, \xi_3) &= \lambda_1\omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2\omega^2(\xi_2, \xi_3) \\ \omega^2(\xi_1, \xi_2) &= -\omega^2(\xi_2, \xi_1) \\ \forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 &\in \mathbf{R}^n \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 &\in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 1.4. Sea $A(\xi_1, \xi_2)$ el área orientada de un paralelogramo construido con los vectores ξ_1 y ξ_2 del plano \mathbf{R}^2 , entonces

$$A(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}$$

donde $\xi_1 = \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2$, y $\xi_2 = \xi_{21}e_1 + \xi_{22}e_2$

con e_1 y e_2 una base de \mathbf{R}^2 .

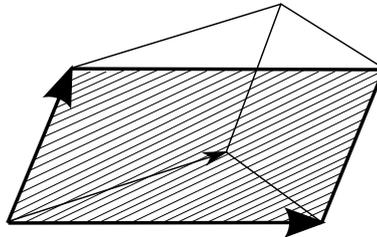


Figura 1.2: El área orientada es una 2-forma exterior

EJEMPLO 1.5. El flujo de un fluido: si v es un campo vectorial uniforme el flujo sobre un paralelogramo determinado por ξ_1, ξ_2 está dado por el triple producto escalar.

$$\omega^2(\xi_1, \xi_2) = (v, \xi_1, \xi_2)$$

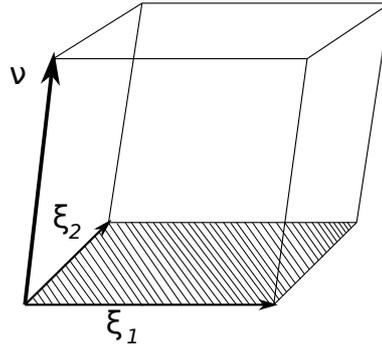


Figura 1.3: *Flujo de un fluido a través de una superficie es una 2-forma exterior*

1.3 k-forma exterior

DEFINICIÓN 1.6. Una k-forma exterior es una función k lineal y antisimétrica

$$\begin{aligned}\omega(\lambda_1\xi'_1 + \lambda_2\xi''_2, \xi_2, \dots, \xi_k) &= \lambda_1\omega(\xi'_1, \xi_2, \dots, \xi_k) + \lambda_2\omega(\xi''_2, \xi_2, \dots, \xi_k) \\ \omega(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) &= (-1)^\nu\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)\end{aligned}$$

donde

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{si la permutación } i_1, \dots, i_k \text{ es par} \\ 1 & \text{si la permutación } i_1, \dots, i_k \text{ es impar} \end{cases}$$

EJEMPLO 1.7. *El volumen orientado con lados $V(\xi_1, \dots, \xi_n)$ es una n-forma exterior*

$$V(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

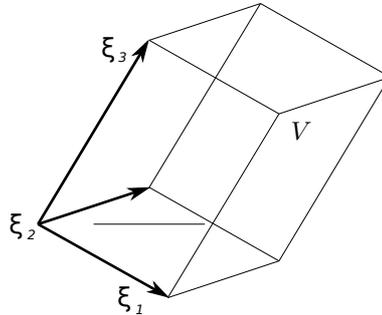


Figura 1.4: El volumen orientado es una 3-forma exterior

1.4 El producto exterior de dos 1-formas exteriores

Antes de definir el producto exterior de una k -forma exterior con una l -forma exterior en \mathbf{R}^n definiremos el producto exterior de dos 1-formas exteriores. El producto exterior de ω_1 y ω_2 es la 2-forma exterior denotada como $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Sea ξ un vector en \mathbf{R}^n . Podemos tomar las componentes $\omega_1(\xi)$ y $\omega_2(\xi)$ de ξ en el plano con coordenadas ω_1, ω_2 .

DEFINICIÓN 1.8. El valor del producto exterior $\omega_1 \wedge \omega_2$ en los vectores ξ_1, ξ_2 es el área orientada del paralelogramo con lados $\omega(\xi_1)$ y $\omega(\xi_2)$ en el plano ω_1, ω_2 :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{vmatrix}.$$

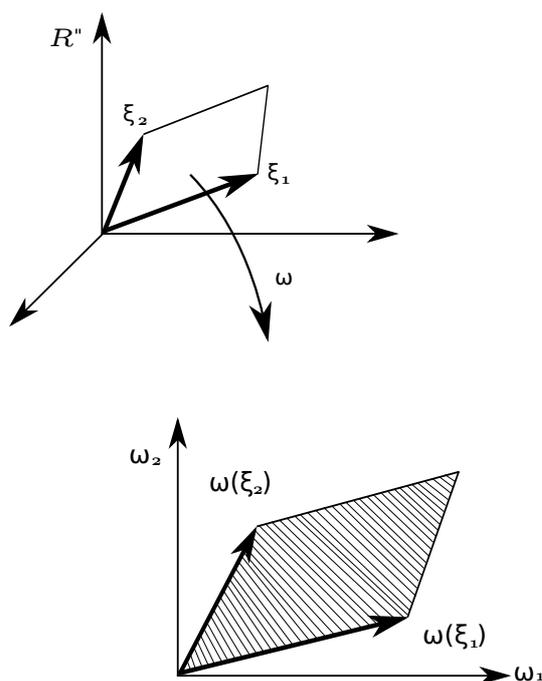


Figura 1.5: Definición del producto exterior de dos 1-formas exteriores

Supongamos que hemos elegido un sistema lineal de coordenadas en \mathbf{R}^n , desde el punto de vista de formas exteriores tenemos n 1-formas linealmente independientes x_1, \dots, x_n . Llamaremos a éstas formas básicas. El producto exterior de dos formas básicas son las formas $x_i \wedge x_j$, que por antisimetría cumplen

$$\begin{aligned} x_i \wedge x_i &= 0 \\ x_i \wedge x_j &= -x_j \wedge x_i. \end{aligned}$$

Estas 2-formas exteriores forman una base para el espacio vectorial de 2-formas exteriores en \mathbf{R}^n y la dimensión de este espacio es $\binom{n}{2}$.

El significado geométrico de las 2-formas exteriores $x_i \wedge x_j$ es el siguiente: su valor en el par de vectores $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n$ es igual al área orientada de la imagen del paralelogramo ξ_1, ξ_2 en las coordenadas x_i, x_j .

En particular, en \mathbf{R}^3 (x_1, x_2, x_3) , el área de la proyección en el plano (x_1, x_2) es $x_1 \wedge x_2$, en el plano (x_2, x_3) es $x_2 \wedge x_3$ y en el plano (x_3, x_1) es $x_3 \wedge x_1$.

Una cosa que notamos es que se puede formar el producto de k-formas exteriores básicas y con ellas construir una base para el espacio de k-formas exteriores

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}, 1 \leq i_m \leq n,$$

y habrá $\binom{n}{k}$, que es la dimensión del espacio de k-formas exteriores en \mathbf{R}^n .

DEFINICIÓN 1.9. En general el valor del producto de k 1-formas exteriores $\omega_1, \dots, \omega_k$ está definido como

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \dots & \omega_k(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(\xi_k) & \dots & \omega_k(\xi_k) \end{vmatrix}.$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbf{R}^n .$$

1.5 Multiplicación exterior

La multiplicación de una k-forma exterior ω^k y una l-forma exterior ω^l , $\omega^k \wedge \omega^l$ es una $(k + l)$ -forma exterior, la multiplicación resulta ser:

$$\begin{aligned} \text{Antisimétrica: } & \omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k \\ \text{Distributiva: } & (\lambda_1 \omega_1^k + \lambda_2 \omega_2^k) \wedge \omega^l = \lambda_1 \omega_1^k \wedge \omega^l + \lambda_2 \omega_2^k \wedge \omega^l \\ \text{Asociativa: } & (\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.10. La multiplicación de una k -forma exterior y una l -forma exterior es igual a

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum (-1)^\nu \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l})$$

donde $i_1 < \dots < i_k$ y $j_1 < \dots < j_l$; $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$ es una permutación de los números $(1, 2, \dots, k+l)$; y

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{si la permutación } i_1, \dots, i_k \text{ es par} \\ 1 & \text{si la permutación } i_1, \dots, i_k \text{ es impar.} \end{cases}$$

.

Es decir, cada partición de $k+l$ vectores ξ_1, \dots, ξ_{k+l} de dos grupos de k y l vectores da un término de la suma. Este término es igual al producto de la k - forma ω^k sobre los k vectores del primer grupo con el valor de la l -forma ω^l sobre los l valores del segundo grupo, con el signo mas o menos dependiendo de cómo los vectores están ordenados en el grupo. Si están ordenados de manera que los k vectores del primer grupo y los l vectores del segundo grupo escritos en una sucesión forman una permutación par de los vectores ξ_1, \dots, ξ_{k+l} entonces tendrán el signo $+$ y si forman una permutación impar tendrá el signo $-$.

EJEMPLO 1.11. *Ejemplo. Si $k=l=1$, hay solo dos particiones: ξ_1, ξ_2 y ξ_2, ξ_1 . Entonces,*

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_2(\xi_1)\omega_1(\xi_2)$$

y recuperamos la definición dada anteriormente por determinantes.

Capítulo 2

Formas diferenciales

Este capítulo está basado en [8] y [6].

2.1 Formas diferenciales

El ejemplo más sencillo de una forma diferencial es la diferencial de una función.

EJEMPLO 2.1. *Consideremos la función $f(x) = x^2$. Su diferencial es $df = 2xdx$ depende de x y del incremento del argumento, es decir del vector tangente ξ al eje x . Si fijamos el punto x . Entonces la diferencial de la función en x , $df|_x$, depende linealmente de ξ . Así que si la coordenada del vector tangente ξ es igual a 1, entonces $df = 2$, y si la coordenada de ξ es igual a 10, entonces $df = 20$.*

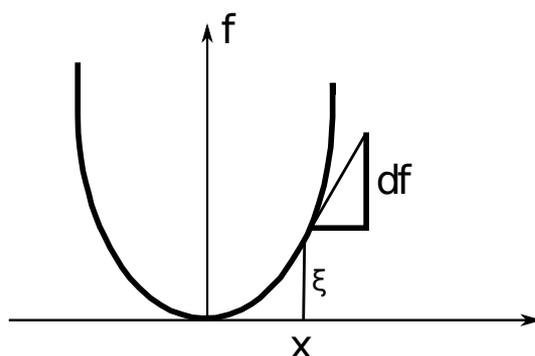


Figura 2.1: Diferencial de una función

Sea \mathbf{M}^n una variedad orientable, conexa, de dimensión n y $f : \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La diferencial $df|_x$ de f en el punto x es un mapeo lineal

$$df_x : \mathbf{TM}_x \rightarrow \mathbb{R}.$$

Notemos que la diferencial de una función en el punto x es una 1-forma exterior en el espacio tangente \mathbf{TM}_x .

DEFINICIÓN 2.2. Una 1-forma diferencial sobre una variedad \mathbf{M}^n es un mapeo suave

$$\omega : \mathbf{TM} \rightarrow \mathbb{R}$$

y lineal en cada espacio tangente \mathbf{TM}_x , $\forall x \in \mathbf{M}^n$.

DEFINICIÓN 2.3. Una k -forma diferencial $\omega^k|_x$ en el punto x de una variedad \mathbf{M}^n es una k -forma exterior en el espacio tangente \mathbf{TM}_x a \mathbf{M}^n en x , es decir una función k -lineal y antisimétrica en \mathbf{TM}_x .

2.2 Integración de formas diferenciales

Integremos una 1-forma diferencial ω^1 sobre una variedad \mathbf{M}^n , sea

$$\gamma : [0 \leq t \leq 1] \rightarrow \mathbf{M}^n$$

un mapeo suave (el camino de integración).

DEFINICIÓN 2.4. La integral de la 1-forma diferencial ω^1 sobre el camino γ es definido como el límite de una suma de Riemann. Cada suma consiste de los valores de ω^1 en el vector tangente ξ_i

$$\int_{\gamma} \omega^1 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega^1(\xi_i)$$

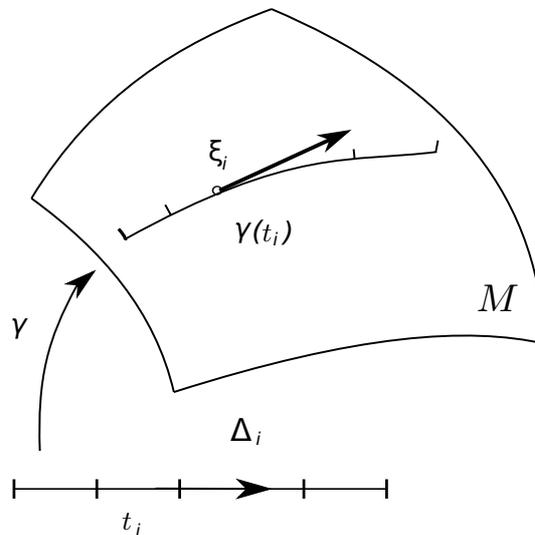


Figura 2.2: Integral de una 1-forma a lo largo de un camino

Los vectores tangentes ξ_i son construidos de la siguiente manera: el intervalo $0 \leq t \leq 1$ es dividido en partes $\Delta_i : t_i \leq t \leq t_{i+1}$ por los puntos t_i . El

intervalo Δ_i puede ser visto como un vector tangente al eje t en el punto t_i . Su imagen en el espacio tangente a \mathbf{M}^n en el punto $\gamma(t_i)$ es

$$\xi_i = d\gamma|_{t_i}(\Delta_i) \in TM_{\gamma(t_i)}.$$

El límite cuando $\Delta_i \rightarrow 0$ es la integral de la 1-forma diferencial ω^1 a lo largo del camino γ .

DEFINICIÓN 2.5. Para calcular una integral de superficie dividimos la superficie en pequeños paralelogramos en el espacio tangente. La suma de los valores de la 2-forma diferencial en los paralelogramos en el espacio tangente es la integral de 2-forma diferencial.

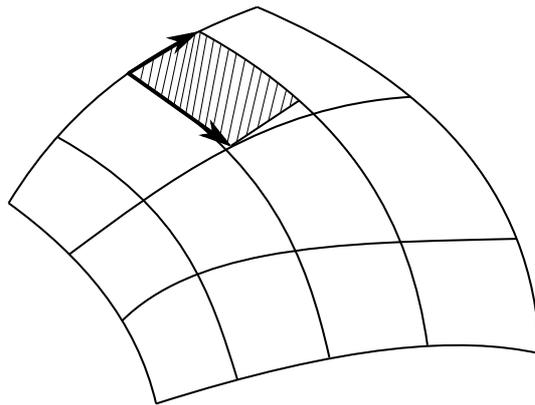


Figura 2.3: Integración de una 2-forma sobre una superficie

2.3 Pullback de formas diferenciales

Una ventaja de las formas diferenciales sobre el cálculo tensorial es su buen comportamiento bajo mapeos. Es una de las propiedades que vamos a utilizar de manera fundamental en el invariante de Hopf y el Teorema de Gauss-Bonnet. Sea $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ un mapeo diferenciable y sea ω una

k-forma diferenciable en \mathbf{N} .

DEFINICIÓN 2.6. Entonces podemos tener una k-forma diferenciable en \mathbf{M} : el pullback de ω por f , denotada por $f^*\omega$, definida por la relación

$$f^*\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(f_*\xi_1, \dots, f_*\xi_k)$$

para cualesquiera vectores tangentes $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbf{TM}_x$. Donde f_* es la diferencial del mapeo f . En otras palabras el valor de $f^*\omega$ en los vectores ξ_1, \dots, ξ_k es igual a el valor de ω en la imagen de estos vectores bajo la diferencial.

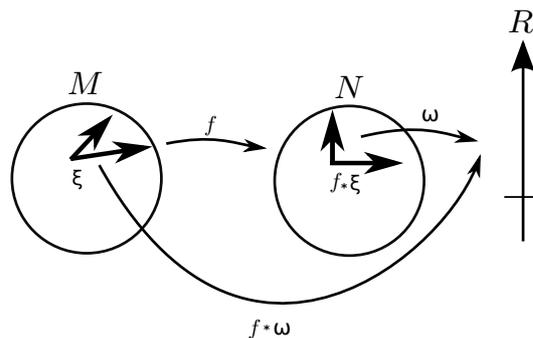
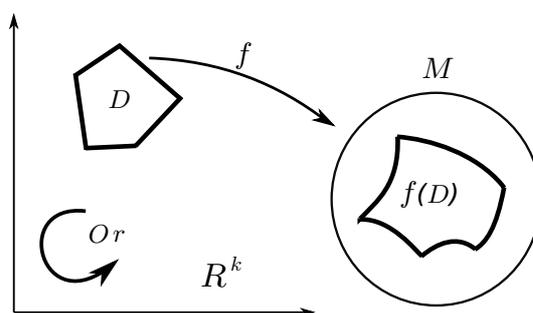


Figura 2.4: Una forma en \mathbf{N} induce una forma en \mathbf{M}

2.3.1 Integración de una k-forma sobre una n variedad

DEFINICIÓN 2.7. Sea ω una k-forma diferenciable en una variedad n dimensional \mathbf{M}^n . Sea D un poliedro convexo en el espacio euclidiano \mathbf{R}^k y $f : D \rightarrow \mathbf{M}^n$.

$$\int_{f(D)} \omega = \int_D f^*\omega$$

Figura 2.5: Integración de k-forma en una variedad M^n

2.4 Derivada exterior

La derivada exterior de una k-forma diferenciable es una $(k+1)$ - forma diferenciable. La derivada exterior es análoga a la diferencial de una función o la divergencia de un campo vectorial.

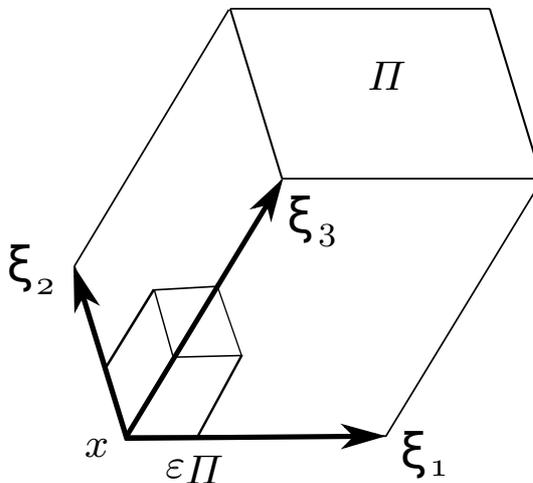


Figura 2.6: Definición de la divergencia de un campo vectorial

DEFINICIÓN 2.8. Recordemos la definición de divergencia. Sea \mathbf{A} un campo vectorial en \mathbf{R}^3 y sea \mathbf{S} la frontera del paralelepípedo Π con lados

$\xi_1, \xi_2,$ y ξ_3 en el vértice x . Consideremos el flujo a través de \mathbf{S} :

$$F(\Pi) = \int_{\mathbf{S}} (\mathbf{A}, dn).$$

Si el paralelepípedo Π es muy pequeño, el flujo F es aproximadamente proporcional al volumen V . La divergencia está definida como

$$\nabla \cdot A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\epsilon\Pi)}{\epsilon^3 V}.$$

Notamos que el flujo a través de una superficie es una 2-forma diferencial ω_A^2 . La divergencia es la densidad en la expresión de la 3-forma diferencial

$$\omega^3 = (\nabla \cdot A) dx \wedge dy \wedge dz.$$

DEFINICIÓN 2.9. Definiremos el valor de $d\omega^k$ sobre $k+1$ vectores ξ_1, \dots, ξ_{k+1} tangentes a \mathbf{M}^n en x . Para hacer esto elegimos un sistema de coordenadas en una vecindad para x en \mathbf{M} , es decir un mapeo diferenciable f que manda una vecindad de 0 en una vecindad de x .

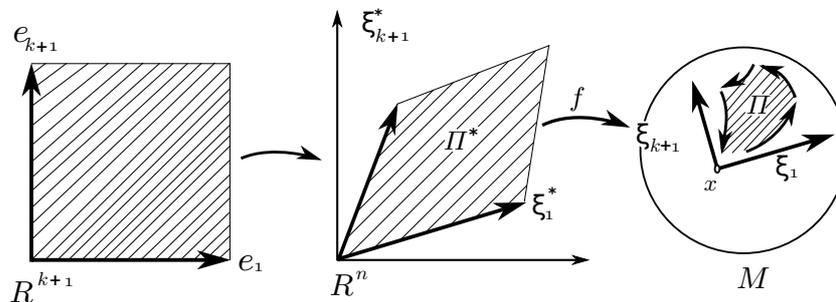


Figura 2.7: Paralelepípedo curvo

La preimagen de los vectores $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in \mathbf{TM}_x$, bajo la diferencial de f están en el espacio tangente a \mathbf{R}^n en cero. Este espacio tangente puede ser identificado naturalmente con \mathbf{R}^n , entonces las preimágenes son los vectores

$$\xi_1^*, \dots, \xi_{k+1}^* \in \mathbf{R}^n.$$

Tomamos el paralelepípedo Π^* formado por estos vectores. La integral de ω^k sobre la frontera $\partial\Pi$ de Π :

$$F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \int_{\partial\Pi} \omega^k.$$

Resulta que la parte $(k+1)$ lineal del incremento de $F(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})$ es una $(k+1)$ -forma diferencial en el espacio tangente \mathbf{TM}_x a \mathbf{M}^n . Esta forma es la derivada exterior de ω .

2.5 Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes dice que

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega,$$

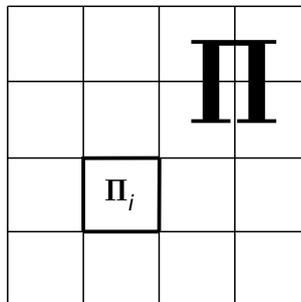


Figura 2.8: Partición de un paralelepípedo

Hacemos una partición de Π en N^{k+1} pequeños paralelepípedos Π_i . Entonces,

$$\int_{\partial\Pi} \omega = \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i,$$

donde

$$F_i = \int_{\partial\Pi_i} \omega.$$

Resulta que F_i es proporcional a $d\omega$

$$F_i \approx d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i),$$

y $\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i$ son los lados de Π_i .

En el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} d\omega(\xi_1^i, \dots, \xi_{k+1}^i) = \int_{\partial\Pi} d\omega.$$

Finalmente

$$\int_{\partial\Pi} \omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N^{k+1}} F_i = \int_{\Pi} d\omega.$$

2.6 Campos y formas diferenciales

Si estamos en coordenadas cartesianas en \mathbf{R}^3 , uno puede asociar al vector \mathbf{v} la 1-forma diferencial $\sum_i v^i dx^i$ y la 2-forma diferencial $v^1 dx^2 dx^3 + v^2 dx^1 dx^3 + v^3 dx^1 dx^2$, pero en coordenadas generales se tiene que hacer uso de una métrica y el producto interior que definiremos en la subsección que sigue.

2.6.1 Producto interior

El producto interior i_V reduce en uno el grado de la forma diferencial y es la evaluación del vector V en la primera coordenada.

$$i_V(w^k) = w^k(V, \xi_2, \dots, \xi_k).$$

EJEMPLO 2.10. *Tomemos el siguiente producto interior*

$$i_{e_x}(dx \wedge dy) = dy.$$

En este ejemplo sencillo podemos notar como el producto interior se comporta como una derivada en el siguiente sentido

$$i_{e_x} = \frac{\partial}{\partial dx}$$

En coordenadas,

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

$$i_X(\omega) =$$

$$\frac{1}{r!} \sum_1^r X^{\mu_s} \omega_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_r} (-1)^{(s-1)} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}^{\mu_s} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

2.7 ∇ , $\nabla \cdot$, $\nabla \times$

Lo que queremos ahora es escribir el cálculo vectorial de \mathbf{R}^3 en términos de formas diferenciales. Los operadores $\nabla \cdot$ y $\nabla \times$ son operadores en campos vectoriales en \mathbf{R}^3 así que tenemos que pasar los campos vectoriales a 1-formas diferenciales y 2-formas diferenciales.

La diferencial de una función es una 1-forma diferencial, para obtener el campo gradiente usamos una métrica

$$v^i = g^{ij} v_j.$$

Para definir la divergencia necesitamos una forma de volumen. Asociamos a un campo vectorial \mathbf{V} la 2-forma diferencial dada por el producto interior del campo con la forma diferencial de volumen $i_V(Vol^3) = \omega^2$

$$d\omega^2 = (\nabla \cdot V) Vol^3.$$

Partimos de un campo V , le podemos asociar la 1-forma diferencial ω^1 con la métrica. El rotacional se define con la siguiente ecuación

$$d\omega^1 = i_{\nabla \times V}(Vol^3).$$

En resumen se necesita una métrica y una forma diferencial de volumen. Esta estructura extra es la razón de que los difeomorfismos no preserven ∇ , $\nabla \cdot$, $\nabla \times$ y ∇^2 y son únicamente preservados por translaciones y rotaciones, pero la derivada exterior si es preservada bajo difeomorfismos.

Capítulo 3

Visualización de formas diferenciales

Este capítulo está basado en [13].

3.1 Visualización de formas diferenciales

Así como hay un dibujo para denotar un vector podemos asociar dibujos a formas diferenciales que nos serán de utilidad en duales de Poincaré de subvariedades. Aquí veremos formas en \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 .

Hay que pensar en una 1-forma diferencial como una cebolla y un vector como un alfiler. La evaluación de una 1-forma en un vector cuenta cuántas capas de cebolla corta el alfiler.

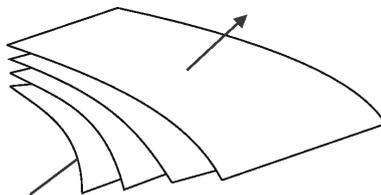


Figura 3.1: Evaluación de una 1-forma

EJEMPLO 3.1. dx en \mathbf{R}^3 son hojas de dimensión 2 perpendiculares al eje x , dy hojas perpendiculares al eje y , y dz hojas perpendiculares al eje z . El espaciamiento de las capas de cebolla nos da el coeficiente de la forma diferencial.

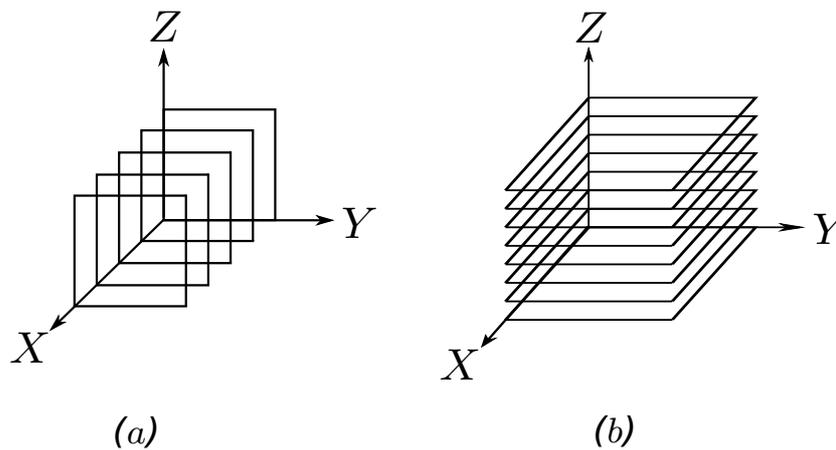


Figura 3.2: (a) La forma dx . (b) La forma $2dz$

El producto wedge de dos 1-formas diferenciales corresponde a la intersección de las capas de cebollas y forman tubitos, la evaluación de la 2-forma diferencial en dos vectores cuenta cuantos tubitos están contenidos en el paralelogramo determinado por los dos vectores.

EJEMPLO 3.2. $dx \wedge dy$ cuenta cuantos tubitos en la dirección z cortan los paralelogramos en el plano (x,y) .

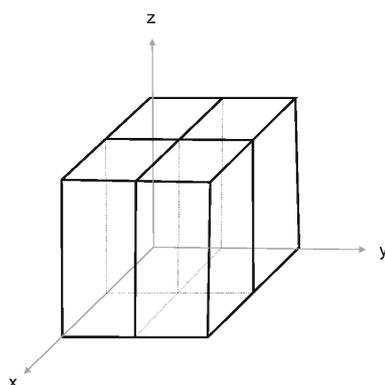


Figura 3.3: La 2-forma $dx \wedge dy$, con tubos en la dirección z

EJEMPLO 3.3. El producto wedge de tres 1-formas diferenciales son cubitos y la evaluación de una 3-forma diferencial en tres vectores cuenta cuantos cubitos hay dentro de la caja determinada por los tres vectores.

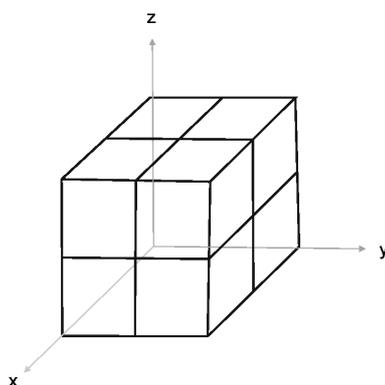
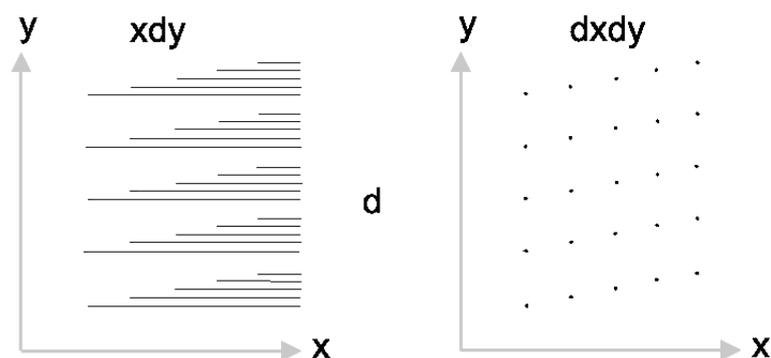


Figura 3.4: La 3-forma $dx \wedge dy \wedge dz$

La derivada exterior corresponde a tomar la frontera de los dibujos.

EJEMPLO 3.4. La 1-forma $x dy$ en \mathbf{R}^2 está representado por líneas que se hacen más densas al avanzar en el eje x . La derivada exterior corresponde a tomar la frontera de este dibujo.

Figura 3.5: *Derivada exterior*

Podemos también visualizar el Teorema de Stokes que se usa para cambiar una integral sobre una variedad a la integral sobre la frontera de la variedad

$$\int_C dw = \int_{\partial C} \omega.$$

En otras palabras el teorema de Stokes en dos dimensiones se puede enunciar cómo el número de líneas que pasan a través del camino C y que es igual al al número de puntos que hay dentro del área delimitada por C .

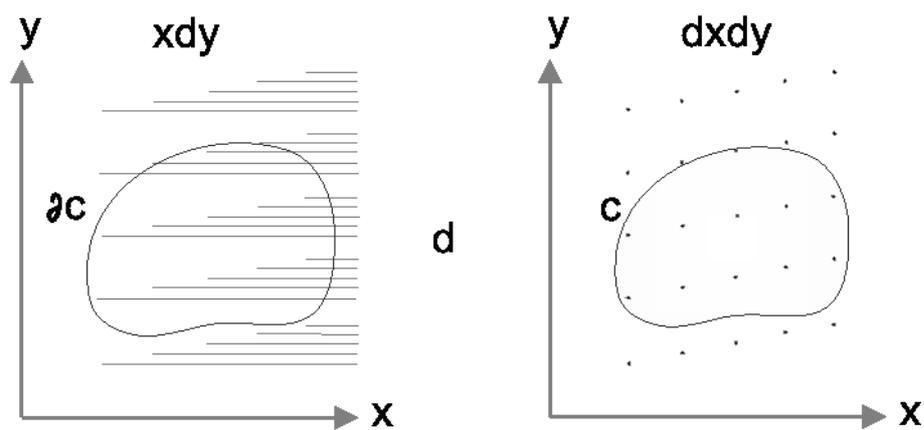


Figura 3.6: Teorema de Stokes

Capítulo 4

Teorema de Gauss-Bonnet

Este capítulo está basado en [19], [5], [14] y [4].

4.1 Ecuaciones de estructura de Cartan

Empezaremos por mencionar que las ecuaciones de estructura de Cartan codifican la conexión y curvatura de una variedad Riemanniana. Sea $\{\hat{e}_\alpha\}$ una base ortonormal y $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ la base dual en una vecindad U de p en \mathbf{M}^n , sea la conexión de Levi-Civita de \mathbf{M}^n

$$\nabla_{\hat{e}_\alpha} \hat{e}_\beta = \omega_{\alpha\beta}^\gamma \hat{e}_\gamma.$$

DEFINICIÓN 4.1. La matriz de conexión con entradas 1-formas diferenciales $\{\omega_{\beta}^\alpha\}$.

$$\omega_{\beta}^\alpha \equiv \omega_{\gamma\beta}^\alpha \hat{\theta}^\gamma.$$

Nota: no confundir ω con dos índices y la que tiene tres índices. La 1-forma diferencial ω_{β}^α satisface las ecuaciones de estructura de Cartan

$$d\hat{\theta}^\alpha + \omega_{\beta}^\alpha \wedge \hat{\theta}^\beta = T^\alpha$$

$$d\omega_{\beta}^\alpha + \omega_{\gamma}^\alpha \wedge \omega_{\beta}^\gamma = \Omega_{\beta}^\alpha.$$

donde

$$T^\alpha \equiv \frac{1}{2} T^\alpha_{\beta\gamma} \hat{\theta}^\beta \wedge \hat{\theta}^\gamma \text{ es la 2-forma diferencial de torsión}$$

$$\Omega^\alpha_{\beta} \equiv \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \hat{\theta}^\gamma \wedge \hat{\theta}^\delta \text{ es la 2-forma diferencial de curvatura.}$$

EJEMPLO 4.2. \mathbf{S}^2 . Para calcular la 1-forma de conexión y 2-forma de curvatura para la esfera usamos las ecuaciones de estructura. Damos una parametrización de \mathbf{S}^2

$$X(\phi, \theta) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$$

$$X_\phi = (-\sin \phi \sin \theta, \cos \phi \sin \theta, 0)$$

$$X_\theta = (\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, -\sin \theta),$$

entonces los vectores unitarios y sus correspondientes formas duales quedan como

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sin \theta} X_\phi \qquad \hat{\theta}^1 = \sin \theta d\phi$$

$$\hat{e}_2 = X_\theta \qquad \hat{\theta}^2 = d\theta,$$

del hecho de que la conexión sea métrica se tiene que $\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$, usando las ecuaciones de estructura de Cartan libre de torsión

$$d(d\theta) + \omega_2^1 \wedge \sin \theta d\phi = 0$$

$$d(\sin \theta d\phi) + \omega_1^2 \wedge d\theta = 0,$$

de la segunda ecuación se obtiene que $\omega_1^2 = \cos \theta d\phi$, y así la matriz de conexión es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta d\phi \\ \cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de curvatura viene dada por la segunda ecuación de estructura y el único término que contribuye es

$$\Omega_1^2 = d\omega_1^2 = -\sin\theta d\theta d\phi$$

y por tanto la matriz de curvatura queda como

$$\begin{pmatrix} 0 & \sin\theta d\theta d\phi \\ -\sin\theta d\theta d\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 4.3. \mathbb{H}^2 . Análogamente, se puede calcular la 1-forma de conexión y la 2-forma de curvatura del espacio hiperbólico. Tomando una base ortonormal, su base dual y usando las ecuaciones de estructura.

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= y \frac{\partial}{\partial x} & \hat{\theta}^1 &= \frac{1}{y} dx \\ \hat{e}_2 &= y \frac{\partial}{\partial y} & \hat{\theta}^2 &= \frac{1}{y} dy \end{aligned}$$

La matriz de conexión es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} dx \\ \frac{1}{y} dx & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de curvatura

$$\Omega_1^2 = d\omega_1^2 = -\frac{1}{y^2} dx dy$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2}dxdy \\ \frac{1}{y^2}dxdy & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 Haces fibrados I

Empecemos con un tratamiento informal. Si tenemos una variedad diferenciable \mathbf{M}^n a la que llamaremos variedad base y otra variedad \mathbf{F} a la que llamaremos fibra. Un haz fibrado \mathbf{E} sobre \mathbf{M}^n con fibra \mathbf{F} es una variedad que localmente es un producto de \mathbf{M}^n con \mathbf{F} . Esto es, si \mathbf{M}^n es cubierto por un conjunto de coordenadas locales \mathbf{U}_i , entonces el haz \mathbf{E} es topológicamente descrito en cada vecindad \mathbf{U}_i por la variedad producto $\mathbf{U}_i \times \mathbf{F}$.

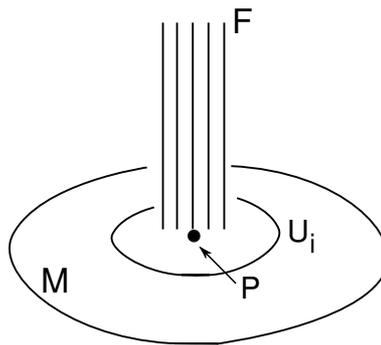


Figura 4.1: Estructura local de un haz fibrado. Una línea vertical representa una fibra en cada punto

Que localmente el haz sea un producto deja abierto muchas posibilidades acerca de la topología global del haz. Para especificar completamente el haz \mathbf{E} debemos proporcionar un conjunto de funciones de transición Φ_{ij} que nos dicen cómo se pegan las fibras en el traslape de dos vecindades $\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j$. Escribimos Φ_{ij} como el mapeo

$$\Phi_{ij} : \mathbf{F}|_{\mathbf{U}_i} \rightarrow \mathbf{F}|_{\mathbf{U}_j} \text{ en } \mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j.$$

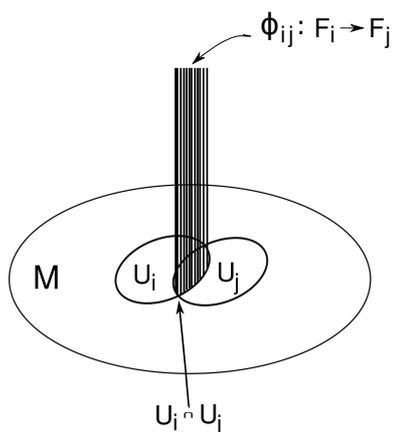


Figura 4.2: Las funciones de transición Φ_{ij} definen un mapeo de las coordenadas de las fibras sobre U_i a aquellas sobre U_j .

Aunque la topología local es trivial, la topología global puede ser bastante complicada debida al torcimiento de las fibras.

EJEMPLO 4.4. *Banda de Möbius.* La variedad base es el círculo S^1 parametrizado por el ángulo θ . Cubrimos al círculo con dos vecindades U_{\pm} definidas como

$$U_+ = \{\theta : -\epsilon < \theta < \pi + \epsilon\}$$

$$U_- = \{\theta : \pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon = 0 + \epsilon\}.$$

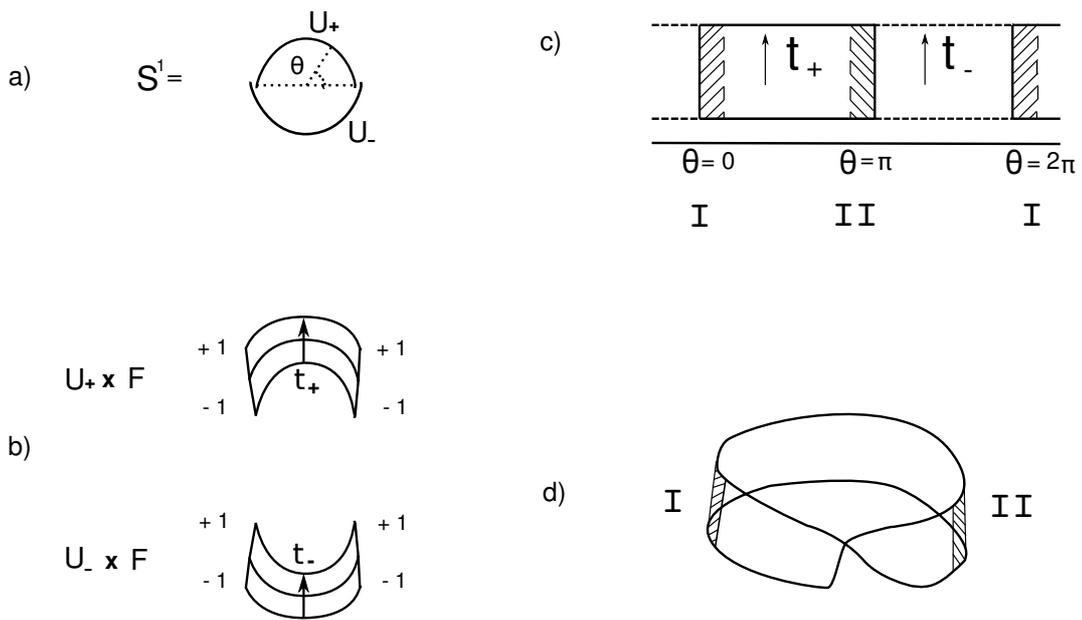


Figura 4.3: Banda de Möbius. (a) El espacio base S^1 cubierto por las vecindades U_{\pm} que se traslapan en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. (b) Piezas del haz formadas por el producto U_{\pm} con las fibras. (c) Las regiones I y II es el traslape (d) La banda de Möbius es obtenida al pegar las fibras con las funciones de transición $t_+ = t_-$ en la región I y $t_+ = -t_-$ en la región II

La fibra es el intervalo con coordenadas $t \in [-1, 1]$, el haz consiste de dos piezas

$U_+ \times \mathbf{F}$ con coordenadas (θ, t_+) y $U_- \times \mathbf{F}$ con coordenadas (θ, t_-)

Con funciones de transición

$$t_+ = t_- \text{ en la región I} = \{\theta : -\epsilon < \theta < \epsilon\}$$

$$t_+ = -t_- \text{ en la región II} = \{\theta : \pi - \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\}.$$

Identificando t con $-t$ en la región II tuerce el haz y proporciona una topología global no trivial.

4.3 Secciones

DEFINICIÓN 4.5. Una sección del haz fibrado \mathbf{E} es una regla que asigna a cada punto de \mathbf{x} una fibra.

$$s : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{E}$$

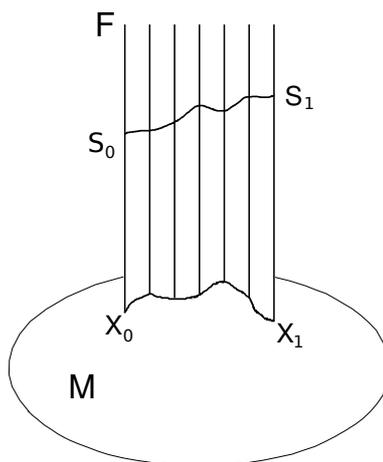


Figura 4.4: sección

Siempre se pueden definir secciones locales de un parche, estas secciones son funciones de U_i en \mathbf{F} . La construcción de secciones globales depende de la topología del haz y existen haces fibrados que no tienen secciones globales.

4.4 Haces fibrados II

Para definir un haz fibrado se requiere de una proyección π que mapea el haz fibrado \mathbf{E} en el espacio base \mathbf{M} contrayendo cada fibra a un punto. Si $x \in \mathbf{M}$, $\pi^{-1}(x)$ es la fibra sobre x ; $\pi^{-1}(x)$ actúa como una linterna puesta en un hoyo en x para producir un rayo de luz igual a la fibra. A la fibra en x se denota como \mathbf{F}_x .

$\pi^{-1}(\mathbf{U}_i)$ denota el subconjunto de \mathbf{E} que se proyecta a la vecindad \mathbf{U}_i en \mathbf{M} . Asumimos que hay un isomorfismo que mapea $\mathbf{U}_i \times \mathbf{F}$ en $\pi^{-1}(\mathbf{U}_i)$. Estos mapeos se llaman trivializaciones locales. Es importante observar que no hay un isomorfismo canónico.

DEFINICIÓN 4.6. Un haz fibrado \mathbf{E} con fibra \mathbf{F} sobre una variedad base \mathbf{M} consiste de un espacio topológico \mathbf{E} junto con una proyección $\pi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{M}$ el cual satisface la condición de trivialidad local:

Para cada $x \in \mathbf{M}$ existe una vecindad \mathbf{U}_i de x y un isomorfismo Φ_i que mapea $\mathbf{U}_i \times \mathbf{F}$ al subconjunto $\pi^{-1}(\mathbf{U}_i)$ del haz \mathbf{E} . (x, f) denota un punto de $\mathbf{U}_i \times \mathbf{F}$ y requerimos que $\pi(\Phi_i(x, f)) = x$ como condición de consistencia. Las funciones de transición están definidas como

$$\Phi_{ij} = \Phi_i^{-1}\Phi_j$$

en el traslape de las vecindades \mathbf{U}_i y \mathbf{U}_j . Para cada $x \in \mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j$, este es un mapeo de \mathbf{F} en \mathbf{F} ; Φ_{ij} relaciona la estructura local de \mathbf{U}_i con la de \mathbf{U}_j . Requerimos que las funciones de transición pertenezcan al grupo G de transformaciones de la fibra \mathbf{F} , este grupo G es llamado el grupo de estructura del haz fibrado.

Las funciones de transición satisfacen las condiciones de cociclo:

$$\begin{aligned} \Phi_{ii} &= \text{identidad} \\ \Phi_{ij}\Phi_{jk} &= \Phi_{ik} \\ \text{para } x &\in \mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j \cap \mathbf{U}_k. \end{aligned}$$

El conjunto de funciones de transición pueden ser usadas para definir de manera consistente el procedimiento de pegado de las piezas locales de un haz si y solamente si las condiciones de cociclo son satisfechas. El haz está completamente determinado por las funciones de transición.

4.5 Dualidad de Poincaré y Producto de intersección

Dualidad de Poincaré en una de sus versiones es la simetría en los números de Betti de una variedad de dimensión n . Existe la misma cantidad de hoyos de dimensión k que de dimensión $n-k$.

DEFINICIÓN 4.7. Otra versión de la dualidad de Poincaré es: a cada subvariedad S de dimensión k de M le corresponde una $(n-k)$ -forma diferencial $[\eta_S]$ tal que

$$\int_S \omega = \int_M \omega \wedge \eta_S \quad (\text{A})$$

para cualquier ω in $H_c^{n-k}(M)$.

La dualidad de Poincaré permite calcular productos de intersección. Si A y B son dos subvariedades de M , el producto de intersección $I(A, B)$ está dado por

$$I(A, B) = \int_M \eta_A \wedge \eta_B$$

EJEMPLO 4.8. Sea $M=\mathbb{R}^3$, A el plano xy y B el eje z . Los duales de Poincaré correspondientes

$$\begin{aligned} \eta_A^1 &= \delta(z)dz \\ \eta_B^1 &= \delta(x)\delta(y)dxdy \end{aligned}$$

$$I(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{\mathbf{R}^3} \delta(x)\delta(y)\delta(z) dx dy dz = 1.$$

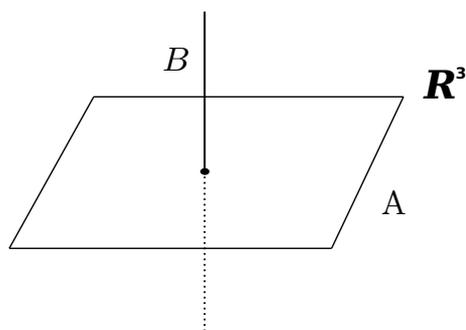
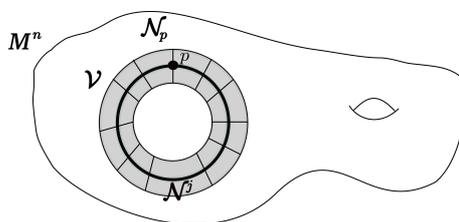


Figura 4.5: Producto de intersección

EJEMPLO 4.9. Sea \mathbf{M} una variedad compacta, conexa, y orientable. N_j una subvariedad y ν una vecindad tubular de N_j con fibras N_p

Figura 4.6: Vecindad tubular de N_j

Escogemos η una $(n-j)$ -forma diferencial en \mathbf{M} que tiene soporte en la vecindad ν y cumple que

$$\int_{N_p} \eta = 1$$

$$\forall p \in N_j$$

Si cualquier j -forma diferencial α en \mathbf{M} es multiplicada por η , $\alpha \wedge \eta$ está tendrá soporte en ν y por la condición de que la forma η al integrarse sobre las fibras es 1, se checa que cumple la condición (A) y por tanto η es la dual de Poincaré a N_j . En esa vecindad tubular solo aporta α y por lo tanto η es el dual de Poincaré de N .

4.5.1 Dual de Poincaré del disco y su circunferencia en el plano xy en \mathbf{R}^3

Dual de Poincaré del disco D en el plano xy .

Por la simetría del disco usemos coordenadas cilíndricas. El disco tiene dimensión 2 por lo tanto le corresponde una 1-forma diferencial $[\eta_D]$.

Como el disco está en el plano xy los tubitos de una 2-forma diferencial que contribuyen deben atravesar esta superficie. En este caso los tubitos provienen de $dpd\theta$.

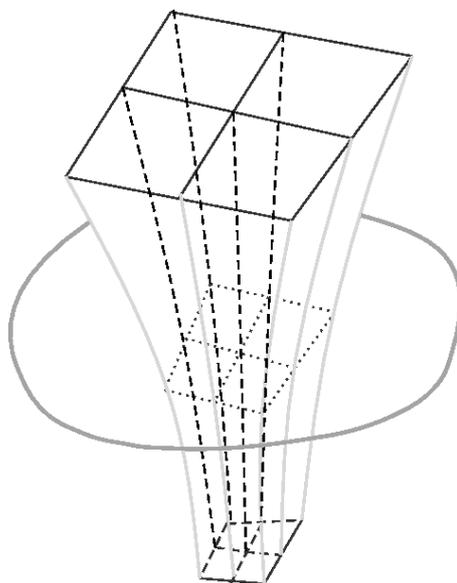


Figura 4.7: Tubitos que contribuyen al conteo

Entonces el producto wedge de $d\rho d\theta$ con $[\eta_{\mathbf{D}}]$ debe recuperar la cuenta de los tubitos cuando se integra sobre todo \mathbf{R}^3 , $[\eta_{\mathbf{D}}]$ debe ser proporcional a dz y únicamente puede tener soporte dentro de la variedad. Esto es muy parecido a la δ de Dirac que da cuenta de dónde se encuentra la carga, el dual de Poincaré da cuenta de dónde se encuentra la variedad.

Entonces el dual del disco es la 1-forma diferencial

$$\tilde{D} = \delta(z)h(\rho - 1)dz.$$

El dual de Poincaré de la circunferencia.

La circunferencia tiene dimensión 1, así que el dual es una 2-forma diferencial. Las únicas contribuciones son los planos que cortan al círculo, es decir, $d\theta$. Entonces el dual es la 2-forma diferencial proporcional a $d\rho dz$

$$\tilde{C} = \delta(\rho - 1)\delta(z)d\rho dz$$

Podemos ver cómo se refleja el cálculo diferencial exterior en dibujos.

$$\partial\mathbf{D} = \mathbf{C}.$$

Su dual es

$$d\tilde{D} = \tilde{C}$$

z =cte planos, ρ =cte cilindros, θ =cte planos.

4.6 Teorema de Gauss-Bonnet $n = 2$

La 2-forma de curvatura Ω es un objeto global ya que al cambiar de marcos \mathbf{e}_u y \mathbf{e}_v en las vecindades \mathbf{U} y \mathbf{V} ($\mathbf{U} \cap \mathbf{V} \neq \emptyset$) la forma de curvatura se transforma como

$$\Omega_v = g_{vu} \Omega_u g_{uv} .$$

Mientras que la 1-forma de conexión no se transforma bien por lo que no es un objeto global en general, se transforma con la siguiente regla

$$\omega_v = g_{vu} \omega_u g_{uv} + g_{vu} dg_{vu} .$$

Sea \mathbf{SM}^2 el haz tangente unitario con fibra $\mathbf{SO}(2)$. Sea π la proyección

$$\pi : \mathbf{SM}^2 \rightarrow \mathbf{M}^2 .$$

Sea $\Phi_{\mathbf{U}}$ una trivialización local y P_F la proyección del producto a la fibra, definimos a f como

$$f := P_F \circ \Phi_{\mathbf{U}} .$$

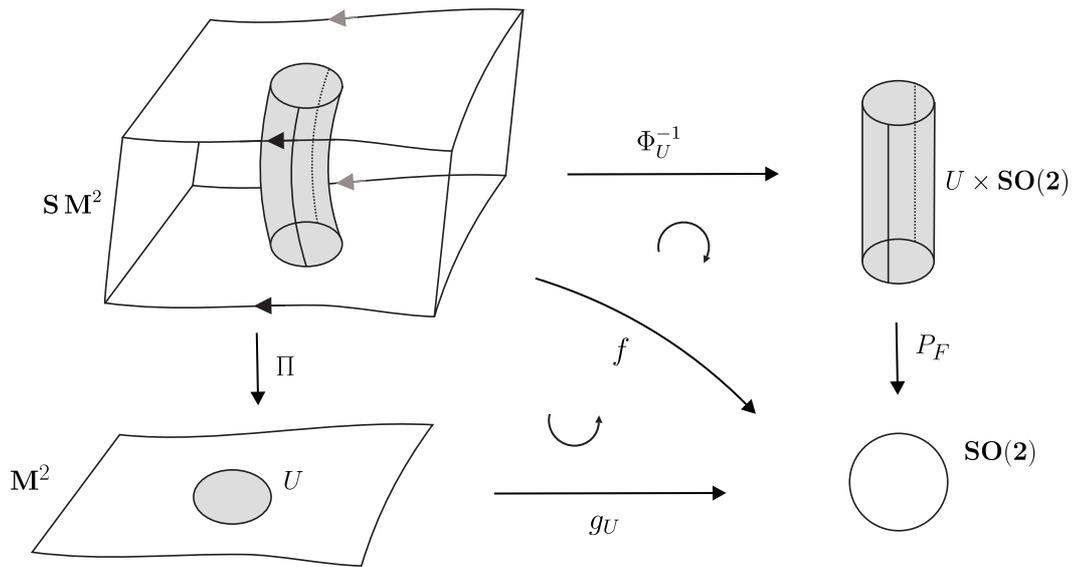


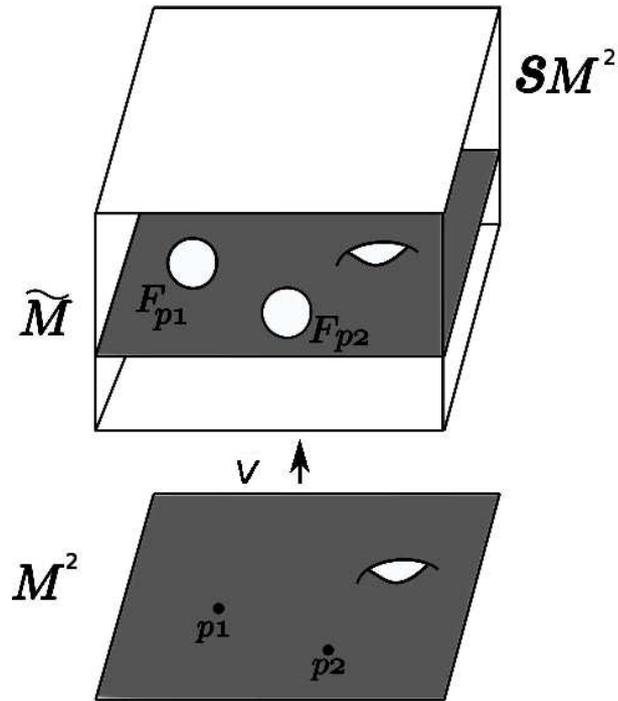
Figura 4.8: Definición de f

Se define ahora la 1-forma diferencial en SM^2 denotada $\bar{\omega}_u$ que será global, a partir de la 1-forma local ω_u por

$$\bar{\omega}_u := \pi^*(\omega_u) + f^*(d\alpha) .$$

Resulta que esta corrección de la 1-forma de conexión en SM^2 si es global y coincide con el potencial del pullback de la 2-forma de curvatura en el haz tangente unitario. Esto es la clave para la demostración intrínseca de Chern.

Sea V un campo vectorial unitario en $M^2 - \{p_1, \dots, p_k\}$, de manera que $\text{Ind}(V, p_i)$ sea $+1$ $+1$. Subimos a M^2 agujerada con V al haz tagente unitario.


 Figura 4.9: Subir $M^2 - \{p_1, \dots, p_k\}$ con una sección V

Sea $\tilde{M}^2 = \overline{V(M - \{p_1, \dots, p_k\})}$, es una superficie en SM^2 con frontera dada por

$$\partial\tilde{M}^2 = \bigcup_{i=1}^k F_{p_i}.$$

Integrando la entrada 1,2 de Ω ,

$$\int_{M^2} \Omega_1^2 = \int_{\overline{V(M^2 - \{p_1, \dots, p_k\})}} \pi^*(\Omega_1^2) = \int_{\tilde{M}^2} \pi^*(\Omega_1^2)$$

usando que $\Omega_1^2 = d\bar{\omega}_1^2$

$$\int_{\tilde{M}^2} \pi^*(\Omega_1^2) = \int_{\tilde{M}^2} d\bar{\omega}_1^2.$$

Por Stokes

$$\int_{\widetilde{M}^2} d\bar{\omega}_1^2 = \int_{\partial\widetilde{M}^2} \bar{\omega}_1^2 ,$$

pero $\bar{\omega}_1^2$ es una 1-forma diferencial que al integrarse sobre las fibras es 1. Entonces usando el teorema de Poincaré-Hopf tenemos que

$$\int_{M^2} \Omega_1^2 = \sum_{i=1}^k \int_{F_{p_i}} \bar{\omega}_1^2 = \sum_{i=1}^k 2\pi \text{Ind}(V, p_i).$$

Finalmente

$$\int_{\widetilde{M}} \bar{\Omega}_1^2 = 2\pi\chi(M) .$$

Capítulo 5

Invariante de Hopf

Este capítulo está basado en [4], [3] y [15].

5.1 Invariante de Hopf

El problema de describir grupos de homotopía de esferas ha sido un problema fundamental en topología algebraica. Hay básicamente dos aproximaciones. La más antigua tiene que ver con el estudio del mapeo $f: \mathbf{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbf{S}^n$ en términos de la imagen inversa $f^{-1}(x)$ de un valor regular. El grado de Brower está definido de esta manera así como la definición original del invariante de Hopf. Pontryagin mostró que las clases de homotopía de un mapeo f está completamente determinado por la geometría de la imagen inversa de $f^{-1}(B(x; \epsilon))$ de una pequeña vecindad de un valor regular. Él introdujo el cobordismo enmarcado y la cirugía enmarcada e identificó el grupo $\pi_{n+k}(S^n)$ con el grupo de cobordismo de k -variedades inmersas en \mathbf{R}^{n+k} y equipado con un marco de sus haces normales estables.

En la otra aproximación se comparan esferas con espacios cuyos grupos de homotopía son conocidos. Este método fue introducido por Serre quien usó sucesiones espectrales y espacios de Eilenberg-MacLane $K(A, n)$ con la propiedad

$$\pi_i(K(A, n)) = \begin{cases} A & i=n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El invariante de Hopf veremos que es un invariante discreto como la característica de Euler. Una especie de característica de Euler de funciones entre esferas, si dos funciones son homotópicas entonces tienen el mismo invariante de Hopf. Si dos espacios son homotópicos tienen la misma característica de Euler.

Brouwer creía que si hay dos mapeos $f, g : \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$ con el mismo Brouwer degree entonces f y g son homotópicos, él mismo probó esto para $n = 2$ y el caso general fue demostrado por Hopf. Pero antes que él no se sabía nada de mapeos más altos $\mathbf{M}^k \rightarrow \mathbf{S}^n$ con $k > n$, incluso entre esferas, así que fue natural que considerara mapeos entre esferas.

El invariante se define para mapeos entre esferas

$$f : \mathbf{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbf{S}^n .$$

La imagen inversa de un punto bajo f es una \mathbf{S}^{n-1} , "se rellena" la \mathbf{S}^{n-1} de manera que se tiene algo de dimensión n y al intersectarlo con la imagen inversa de otro punto el resultado es un conjunto finito de puntos.

Por ejemplo para el caso clásico $n=2$ y la fibración usual de Hopf. La imagen inversa de un punto es un círculo, la intersección del disco con un círculo es un punto y entonces el invariante de Hopf es 1.

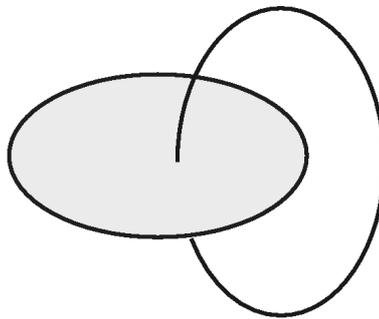


Figura 5.1: $H(f)=1$

Por otra parte Kelvin encontró una integral asociada con la vorticidad que mide cómo las líneas de campo de velocidad del fluido se trenzan en sí mismas, alrededor de 1950 Whitehead expresó el invariante de Hopf en la forma de la integral de Kelvin.

Una manera de definir el invariante de Hopf es tomando una 2-forma diferencial normalizada α , que genera el segundo grupo de cohomología De Rham de la esfera $H_{DR}^2(\mathbf{S}^2)$. Se hace el pullback de ésta mediante f para tener una 2-forma diferencial sobre \mathbf{S}^3 , pero como $H_{DR}^2(\mathbf{S}^3) = 0$ hay un potencial (una 1-forma diferencial) ω de manera que $f^*\alpha = d\omega$. Multiplicando con ω se construye una 3-forma diferencial y obtenemos la otra definición del invariante de Hopf

$$H(f) = \int_{S^3} \omega \wedge d\omega.$$

5.2 Número de enlazamiento

DEFINICIÓN 5.1. El invariante de Hopf de la función $f : S^3 \rightarrow S^2$ se puede también definir como

$$\mathbf{H}(f) = \text{número de enlazamiento de la preimagen de dos puntos}.$$

El número de enlazamiento de dos círculos orientados puede ser definido de diferentes maneras. Aquí nos interesan tres, una desde teoría de intersección, otra usando el Brouwer degree y la última debida a Gauss es usando la ley Ampère.

5.2.1 Número de enlazamiento desde Teoría de intersección

DEFINICIÓN 5.2. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos círculos en \mathbf{S}^3 y sea \mathbf{D} una superficie suave con frontera \mathbf{A} , tal que \mathbf{D} intersecta a \mathbf{B} transversalmente. El número de enlazamiento se define como

$$Link(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}} signo(x) .$$

La suma es sobre todos los puntos de intersección de \mathbf{D} con \mathbf{B} y el signo se escoge con la convención usual: en un punto x en $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ el signo es 1 si $\mathbf{T}_x \mathbf{S}^3$ tiene la misma orientación que $D_x \times B_x$ -1 en caso contrario.

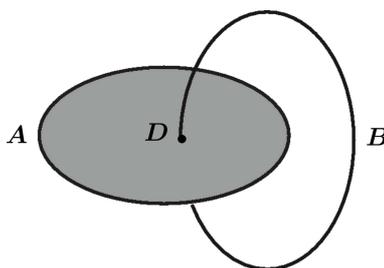


Figura 5.2: $Link(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$

5.2.2 Número de enlazamiento desde el grado de Brouwer

El grado de un mapeo entre variedades cerradas y orientables de la misma dimensión, mide cuantas veces la imagen de \mathbf{M}^n envuelve a \mathbf{V}^n .

Sea $\phi: \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$. Sea ω^n una n - forma diferencial tal que

$$\int_{\mathbf{V}^n} \omega^n = 1.$$

DEFINICIÓN 5.3. El grado de Brouwer del mapeo ϕ se define como

$$\text{Deg}(\phi) = \int_{\mathbf{M}^n} \phi^* \omega .$$

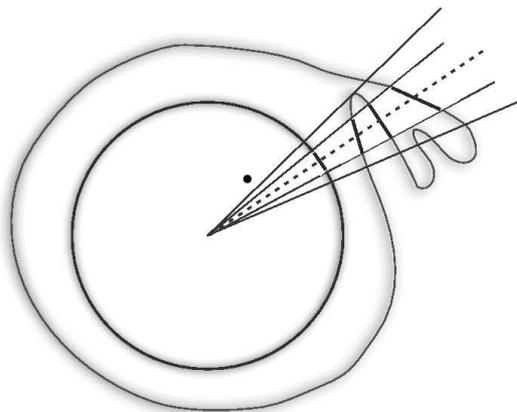


Figura 5.3: $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ con grado 1

El significado geométrico está dado por el siguiente:

TEOREMA 5.4. Sea y en \mathbf{V} un valor regular de $\phi: \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$. Para cada $x \in \phi^{-1}(y)$, $\phi_*: \mathbf{M}_x \rightarrow \mathbf{V}_y$ y se define el signo de $\phi(x)$ como $+1$ si ϕ_* preserva orientación y -1 en caso contrario. Entonces

$$\text{Deg}(\phi) = \sum_{x \in \phi^{-1}(y)} \text{Sign} \phi(x).$$

EJEMPLO 5.5. Una aplicación muy bella del grado de Brouwer es el Teorema de Gauss-Bonnet en dos dimensiones. El grado del mapeo normal de Gauss $n: \mathbf{M}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ resulta ser básicamente la característica de Euler, es decir, $Deg(n) = \frac{1}{2}\chi(\mathbf{M}^2)$.

TEOREMA 5.6. (*Gauss-Bonnet*)

Sea $\mathbf{M}^2 \subset \mathbf{R}^3$ una superficie orientable compacta y sin frontera, n el mapeo normal de Gauss, entonces

$$\int_{\mathbf{M}^2} K dA = 4\pi Deg(n).$$

EJEMPLO 5.7. Otra aplicación es dada por Freedman quien usa el grado de Brouwer para demostrar la ley de Biot Savart.

DEFINICIÓN 5.8. Definamos el número de enlazamiento usando el grado de un mapeo. Consideremos el toro abstracto \mathbf{T}^2 con coordenadas (θ, ϕ) y el mapeo $L: \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ definido por

$$L(\theta, \phi) = \frac{\mathbf{r}_2(\phi) - \mathbf{r}_1(\theta)}{|\mathbf{r}_2(\phi) - \mathbf{r}_1(\theta)|},$$

donde r_1, r_2 son los vectores posición de B y A respectivamente, ver figura (5.5)

Entonces

$$Link(A, B) = deg(L) .$$

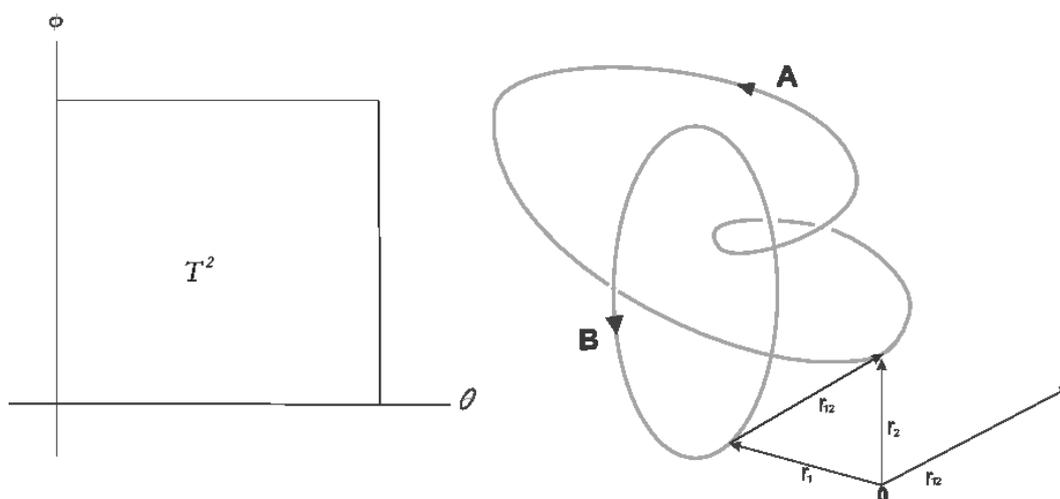


Figura 5.4: Grado de Brouwer

5.2.3 Número de enlazamiento desde ley de Ampère

DEFINICIÓN 5.9. Si L es la función definida en 5.8, entonces

$$L(A, B) = \oint_B \frac{\mathbf{r}_{12} \times d\mathbf{r}_2}{r_{12}^3}$$

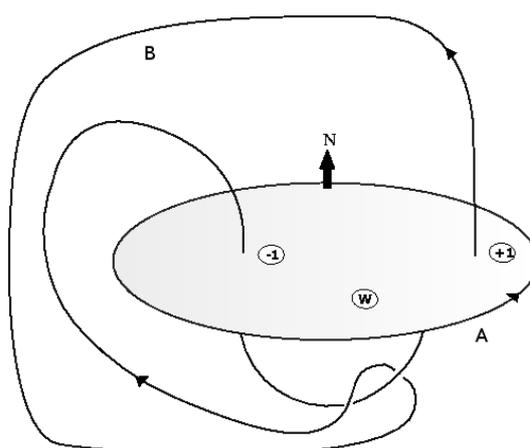


Figura 5.5: Ley de Ampère

Esta es mi favorita. Usando la ley de Ampère, Gauss definió el número de enlazamiento. La idea es la siguiente: si se tiene una corriente por B , se puede calcular usando la ley de Biot Savart el campo magnético producido alrededor de A y entonces calcular la integral de línea a largo de A que por ley de Ampère son las corrientes que atraviesan una superficie con frontera A y éste es precisamente el número de enlazamiento.

Tuvo que pasar siglo y medio para que otro físico (Witten) encontrara otro invariante de enlaces usando teoría de campos, solo que esta vez campos cuánticos y el invariante resultante es el polinomio de Jones.

5.3 Proyección estereográfica del círculo

Para visualizar S^3 inmersa en R^4 usaremos proyección estereográfica. Primero vamos a encontrar la proyección desde el polo norte de S^1 sobre R^1 . El método se extiende para la proyección de S^n sobre R^n .

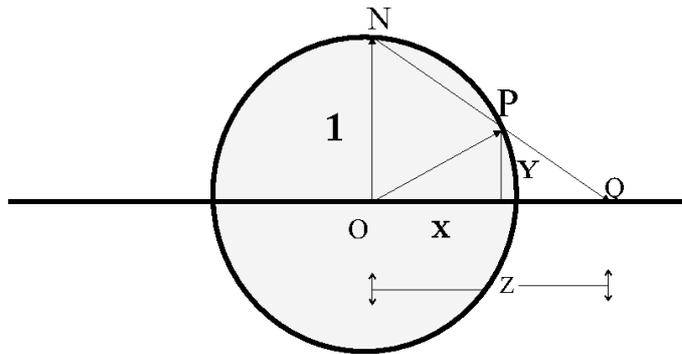


Figura 5.6: Proyección del círculo en la recta

Usando semejanza de triángulos de la figura de 3.1

$$\frac{z}{1} = \frac{z-x}{y} = \frac{z-(z-x)}{1-y} = \frac{x}{1-y}. \quad (5.1)$$

Tenemos que

$$z = \frac{x}{1-y}. \quad (5.2)$$

Para obtener el mapeo inverso usamos vectores de la figura 5.8. $\overrightarrow{NP} = t\overrightarrow{NQ}$ y $1 + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$, en coordenadas $\overrightarrow{OP} = (tz, 1-t)$ pero \overrightarrow{OP} esta en el círculo, entonces $t^2z^2 + (1-t)^2 = 1$, lo que implica que $t = \frac{2}{1+z^2}$. El mapeo inverso es

$$z \rightarrow \left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{-1+z^2}{1+z^2} \right) \quad (5.3)$$

Se puede extender de manera inmediata la proyección de \mathbf{S}^2 . Los análogos de las ecuaciones (5.2) y (5.3)

$$(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \quad (5.4)$$

El mapeo inverso esta dado por

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right). \quad (5.5)$$

5.4 Fibración de Hopf

La fibración de Hopf es la descomposición de \mathbf{S}^3 en círculos, un círculo por cada punto en \mathbf{S}^2 y está dado por $f : \mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ donde

$$(z_0, z_1) \rightarrow \frac{z_0}{z_1}. \quad (5.6)$$

Veamos que el inverso de cada punto $a = r_1 e^{i\theta}$ es un círculo máximo en \mathbf{S}^3 . Aunque no todos los círculos máximos son fibras.

$$z_0 = r_1 e^{i\theta} z_1 \quad (5.7)$$

$$z_1 = r_2 e^{i\eta}. \quad (5.8)$$

El inverso de a corresponde a todos los puntos de la forma

$$(r_2 r_1 \cos(\theta + \eta), r_2 r_1 \sin(\theta + \eta), r_1 \cos(\theta), r_1 \sin(\theta)) \quad (5.9)$$

y la condición por estar en \mathbf{S}^3

$$r_2^2 r_1^2 + r_1^2 = 1. \quad (5.10)$$

La aceleración apunta en dirección opuesta al vector de posición lo que implica que es un círculo máximo en \mathbf{S}^3 y como vemos de (5.9) cada círculo está en un toro.

EJEMPLO 5.10. Ahora visualizamos la imagen inversa de los puntos $(1,0)$ y $(2,0)$ cuyos círculos respectivamente son (5.11) y (5.12). Usaremos la proyección estereográfica para visualizarlos

$$\left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right) \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{2 \cos \theta}{\sqrt{5}}, \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{5}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{5}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{5}} \right) \quad (5.12)$$

Usando proyección estereográfica

$$\left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2} - \operatorname{Sen} \theta}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2} - \sin \theta}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{2} - \sin \theta} \right) \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{2 \cos \theta}{\sqrt{5} - \sin \theta}, \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{5} - \sin \theta}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{5} - \sin \theta} \right). \quad (5.14)$$

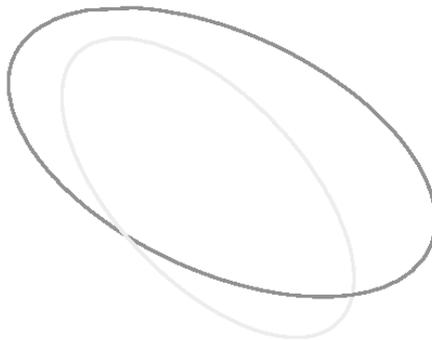


Figura 5.7: Enlace de Hopf usando proyección estereográfica

5.5 Forma de volumen

Sean u_1, u_2 y u_3 las coordenadas estándar en \mathbf{R}^3 , la forma de volumen de \mathbf{S}^2 es

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(u_1 du_2 du_3 - u_2 du_1 du_3 + u_3 du_1 du_2) . \quad (5.15)$$

Podemos simplificar la forma de volumen usando la ecuación de la esfera

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \quad (5.16)$$

tomando su diferencial se sigue que

$$u_1 du_1 + u_2 du_2 + u_3 du_3 = 0, \quad (5.17)$$

sustituyendo du_3 en σ resulta

$$\sigma = \frac{1}{4\pi u_3} du_1 du_2 \quad (5.18)$$

5.6 Pullback de la forma de volumen

Como el mapeo inverso va de \mathbf{CP}^1 a \mathbf{S}^2 podemos llevar la forma de volumen de \mathbf{S}^2 a \mathbf{CP}^1 , para eso debemos tener los puntos de \mathbf{S}^2 como función de puntos de \mathbf{CP}^1 , es decir

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\
 u_2 &= \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\
 u_3 &= \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \\
 &\cdot
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Tomando las diferenciales

$$\begin{aligned}
 du_1 &= \partial_x u_1 dx + \partial_y u_1 dy \\
 &= \frac{2(1+y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} dx - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} dy
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
 du_2 &= \partial_x u_2 dx + \partial_y u_2 dy \\
 &= \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} dx - \frac{2(1+y^2-x^2)}{(1+x^2+y^2)^2} dy \\
 &\cdot
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Haciendo el producto

$$\begin{aligned}
 du_1 du_2 &= \frac{4(1+y^2-x^2)(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^4} dx dy - \frac{16x^2 y^2}{(1+x^2+y^2)^4} dx dy \\
 &= \frac{4(1-x^2-y^2)(1+x^2+y^2)}{\pi(1+x^2+y^2)^4} \\
 &\cdot
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Dividimos por $4\pi u_3$ y nos queda la forma de área en $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$

$$\frac{-1}{\pi(1+x^2+y^2)^2} dx dy \quad (5.23)$$

Pasemos esta forma de área pero con el signo positivo usando coordenadas complejas.

Sea

$$z = x + iy \quad (5.24)$$

diferenciando,

$$dz = dx + idy \quad (5.25)$$

$$d\bar{z} = d\bar{x} - id\bar{y}. \quad (5.26)$$

Multiplicando $dzd\bar{z}$ y despejando $dx dy$ resulta

$$dx dy = \frac{idz d\bar{z}}{2}. \quad (5.27)$$

La forma de área en coordenadas complejas es

$$\frac{-i}{2\pi(1+|z|^2)^2} dz d\bar{z}. \quad (5.28)$$

Ahora llevemos la forma de área a \mathbf{S}^3 mediante el mapeo de Hopf. Debemos entonces tener los puntos $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ como función de los puntos en \mathbf{S}^3

$$z = \frac{z_0}{z_1}. \quad (5.29)$$

Tomando la diferencial y su conjugada

$$dz = \frac{z_1 dz_0 - z_0 dz_1}{z_1^2} \quad (5.30)$$

$$d\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 d\bar{z}_0 - \bar{z}_0 d\bar{z}_1}{\bar{z}_1^2}. \quad (5.31)$$

El pullback es una 2- forma diferencial en \mathbf{S}^3

$$\alpha = \frac{i(z_1 dz_0 - z_0 dz_1)(\bar{z}_1 d\bar{z}_0 - \bar{z}_0 d\bar{z}_1)}{2\pi(|z_0|^2 + |z_1|^2)^2}. \quad (5.32)$$

Regresando a las coordenadas cartesianas de \mathbf{R}^4 , la ecuación de \mathbf{S}^3 es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \quad (5.33)$$

diferenciando resultan las siguientes igualdades

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0 \quad (5.34)$$

$$z_0 = x_1 + ix_2 \quad (5.35)$$

$$dz_0 = dx_1 + idx_2 \quad (5.36)$$

$$d\bar{z}_0 = dx_1 - idx_2 \quad (5.37)$$

$$z_1 = x_3 + ix_4 \quad (5.38)$$

$$dz_1 = dx_3 + idx_4 \quad (5.39)$$

$$d\bar{z}_1 = dx_3 - idx_4 \quad (5.40)$$

sustituimos de (5.35) a (5.40) en (5.32)

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{i}{2\pi} ((x_3 + ix_4)(dx_1 + idx_2) - (dx_1 + idx_2)(dx_3 - idx_4)) \\ & ((x_3 - ix_4)(dx_1 - idx_2) - (dx_1 - idx_2)(dx_3 - idx_4)) \end{aligned} \quad (5.41)$$

multiplicando resulta que

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{i}{2\pi} (x_3^2 + x_4^2)(-2idx_1dx_2)(x_1^2 + x_2^2)(-2idx_3dx_4) \\ & + \frac{i}{2\pi} (2iAdx_1dx_4 - 2iAdx_2dx_3 - 2iBdx_1dx_3 - 2iBdx_2dx_4) \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde

$$A = x_1x_3 + x_2x_4 \quad (5.43)$$

$$B = x_1x_4 - x_2x_3. \quad (5.44)$$

Sustituyendo

$$x_3^2 + x_4^2 \tag{5.45}$$

por

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \tag{5.46}$$

y

$$x_3^2 + x_4^2 \tag{5.47}$$

por

$$1 - x_1^2 + x_2^2 \tag{5.48}$$

α resulta

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\pi}(dx_1dx_2 + dx_3dx_4) \\ &+ \frac{i}{\pi}(i((x_1^2 + x_2^2)dx_1dx_2 + (x_3^2 + x_4^2)(dx_3dx_4))) \\ &+ \frac{i}{\pi}(Adx_1dx_4 - Adx_2dx_3 - Bdx_1dx_3 - Bdx_2dx_4) \end{aligned} \tag{5.49}$$

Veamos que toda la expresión después de $\frac{1}{\pi}(dx_1dx_2 + dx_3dx_4)$ es cero.

Entonces

$$\begin{aligned} &(x_1^2 + x_2^2)(dx_1dx_2) + (x_3^2 + x_4^2)(-idx_3dx_4) \\ &x_1x_3dx_1dx_4 + x_2x_4dx_1dx_4 - x_1x_3dx_2dx_3 - x_2x_4dx_2dx_3 \end{aligned}$$

$$-x_1x_4dx_1dx_3 + x_2x_3dx_1dx_3 - x_1x_4dx_2dx_4 + x_2x_3dx_2dx_4 .$$

Sustituyendo $dx_1 = \frac{1}{x_1}(-x_2dx_2 - x_3dx_3 - x_4dx_4)$ en el primer término y haciendo el producto wedge con dx_4 resulta

$$\begin{aligned} & x_1^2dx_1dx_2 + x_2^2dx_1dx_2 + \cancel{x_3^2dx_3dx_4} + x_4^2dx_3dx_4 \\ & \cancel{-x_2x_3dx_2dx_4} - \cancel{x_3^2dx_3dx_4} + x_2x_4dx_1dx_4 - x_1x_3dx_2dx_3 - x_2x_4dx_2dx_3 \\ & -x_1x_4dx_1dx_3 + x_2x_3dx_1dx_3 - x_1x_4dx_2dx_4 + \cancel{x_2x_3dx_2dx_4} \end{aligned}$$

quedan los siguientes términos

$$\begin{aligned} & x_1^2dx_1dx_2 + x_2^2dx_1dx_2 + x_4^2dx_3dx_4 \\ & x_2x_4dx_1dx_4 - x_1x_3dx_2dx_3 - x_2x_4dx_2dx_3 \\ & -x_1x_4dx_1dx_3 + x_2x_3dx_1dx_3 - x_1x_4dx_2dx_4. \end{aligned}$$

Sustituyendo $dx_4 = \frac{1}{x_4}(-x_1dx_1 - x_2dx_2 - x_3dx_3)$ en la primera expresión

$$\begin{aligned} & x_1^2dx_1dx_2 + \cancel{x_2^2dx_1dx_2} + x_4^2dx_3dx_4 \\ & \cancel{-x_2^2dx_1dx_2} - \cancel{x_2x_3dx_1dx_3} - x_1x_3dx_2dx_3 - x_2x_4dx_2dx_3 \\ & -x_1x_4dx_1dx_3 + \cancel{x_2x_3dx_1dx_3} - x_1x_4dx_2dx_4 \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} & x_1^2dx_1dx_2 + x_4^2dx_3dx_4 \\ & -x_1x_3dx_2dx_3 - x_2x_4dx_2dx_3 \\ & -x_1x_4dx_1dx_3 - x_1x_4dx_2dx_4. \end{aligned}$$

Sustituyendo $dx_3 = \frac{1}{x_3}(-x_1dx_1 - x_2dx_2 - x_4dx_4)$ en la primera expresión

$$\begin{aligned} & \cancel{x_1^2 dx_1 dx_2} + x_4^2 dx_3 dx_4 \\ & + \cancel{x_1^2 dx_2 dx_1} + \cancel{x_1 x_4 dx_2 dx_4} - x_2 x_4 dx_2 dx_3 \\ & - x_1 x_4 dx_1 dx_3 - \cancel{x_1 x_4 dx_2 dx_4} \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} & x_4^2 dx_3 dx_4 \\ & - x_2 x_4 dx_2 dx_3 \\ & - x_1 x_4 dx_1 dx_3 \end{aligned}$$

sustituyendo $dx_2 = \frac{1}{x_2}(-x_1dx_1 - x_2dx_2 - x_4dx_4)$ en la primera

$$\begin{aligned} & \cancel{x_4^2 dx_3 dx_4} \\ & \cancel{x_1 x_4 dx_1 dx_3} + \cancel{x_4^2 dx_4 dx_3} \\ & - \cancel{x_1 x_4 dx_1 dx_3}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\alpha = \frac{1}{\pi}(dx_1 dx_2 + dx_3 dx_4) \quad (5.50)$$

cuyo potencial α es simplemente

$$\omega = \frac{1}{\pi}(x_1 dx_2 + x_3 dx_4) \quad (5.51)$$

5.7 Cálculo explícito de la integral \mathbf{H} $n=2$

Entonces si hacemos el producto wedge de (5.50) y (5.51) el invariante de Hopf es

$$\mathbf{H}(f) = \int_{\mathbf{S}^3} \omega \wedge d\omega \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(f) &= \int_{\mathbf{S}^3} x_1 dx_2 dx_3 dx_4 + x_3 dx_1 dx_2 dx_4 \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_{\mathbf{S}^3} x_1 dx_2 dx_3 dx_4 \end{aligned} \quad (5.53)$$

Hacemos la integral usando coordenadas hiperesféricas, donde $0 \leq \xi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

$$x_1 = \sin \xi \sin \phi \cos \theta \quad (5.54)$$

$$x_2 = \sin \xi \sin \phi \sin \theta \quad (5.55)$$

$$x_3 = \sin \xi \cos \phi \quad (5.56)$$

$$x_4 = \cos \xi. \quad (5.57)$$

Cuyas diferenciales son

$$dx_1 = \sin \phi \sin \theta \cos \xi d\xi + \sin \xi \sin \theta \cos \phi d\phi + \sin \xi \sin \phi \cos \theta d\theta \quad (5.58)$$

$$dx_2 = \sin \phi \sin \theta \cos \xi d\xi + \sin \xi \sin \theta \cos \phi d\phi + \sin \xi \sin \phi \cos \theta d\theta \quad (5.59)$$

$$dx_3 = \cos \phi \cos \xi d\xi - \sin \xi \sin \phi d\phi \quad (5.60)$$

$$dx_4 = -\sin \xi d\xi. \quad (5.61)$$

Los cuatro términos de la forma de volumen \mathbf{S}^3 son

$$x_1 dx_2 dx_3 dx_4 - x_2 dx_1 dx_3 dx_4 + x_3 dx_1 dx_2 dx_4 - x_4 dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5.62)$$

El primer término es

$$dx_2 dx_3 dx_4 = \sin^3 \xi \sin^2 \phi \cos \theta d\theta d\phi d\xi \quad (5.63)$$

$$x_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \sin^4 \xi \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\theta d\phi d\xi. \quad (5.64)$$

El segundo término es

$$dx_1 dx_3 dx_4 = -\sin^3 \xi \sin^2 \phi \sin \theta d\theta d\phi d\xi \quad (5.65)$$

$$-x_2 dx_1 dx_3 dx_4 = \sin^4 \xi \sin^3 \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi d\xi \quad (5.66)$$

El tercer término es

$$dx_1 dx_2 dx_4 = \sin^3 \xi \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi d\xi \quad (5.67)$$

$$x_3 dx_1 dx_2 dx_4 = \sin^4 \xi \sin \phi \cos^2 \phi d\theta d\phi d\xi. \quad (5.68)$$

El cuarto término es

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 dx_3 &= -\sin^2 \xi \cos \xi \sin^3 \phi \sin^2 \theta - \sin^2 \xi \cos \xi \sin^3 \phi \cos^2 \theta \\ &= -\sin^2 \xi \cos \xi \sin \phi \cos^2 \phi \sin^2 \theta \\ &\quad - \sin^2 \xi \cos \xi \sin \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.69)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(f) &= \frac{2}{\pi^2} \int x_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^4 \xi \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\theta d\phi d\xi \end{aligned} \quad (5.70)$$

el resultado es

$$\mathbf{H}(f) = 1. \quad (5.71)$$

5.8 Cálculo del invariante H usando fibras

También se puede calcular el invariante de Hopf integrando el potencial a lo largo de fibras . El potencial está dado por

$$\frac{1}{\pi}(x_1 dx_2 + x_3 dx_4). \quad (5.72)$$

Con fibras círculos máximos dada una η constante

$$(r_2 r_1 \cos(\theta + \eta), r_2 r_1 \sin(\theta + \eta), r_1 \cos(\theta), r_1 \sin(\theta)) \quad (5.73)$$

y la condición por estar en \mathbf{S}^3 .

$$r_2^2 r_1^2 + r_1^2 = 1 \quad (5.74)$$

Si integramos el potencial a lo largo de cualquier fibra

$$\begin{aligned} x_1 &= r_2 r_1 \cos(\theta + \eta) \\ dx_2 &= -r_2 r_1 \sin(\theta + \eta) d\theta \\ x_3 &= r_1 \cos(\theta) \\ dx_4 &= -r_1 \sin(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\mathbf{H}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (r_2^2 r_1^2 \cos^2(\theta + \eta) + r_1^2 \cos^2(\theta)) d\theta = 1 \quad (5.76)$$

y tenemos nuevamente que

$$\mathbf{H}(f) = 1. \quad (5.77)$$

5.9 Invariante H n=2

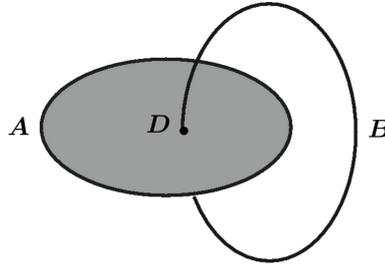


Figura 5.8: $H(f)=1$

Sea \mathbf{W}_A y \mathbf{W}_B vecindades abiertas de \mathbf{A} y \mathbf{B} respectivamente. η_A y η_B los duales de Poincaré compactos en $H_c^2(\mathbf{W}_A)$ y $H_c^2(\mathbf{W}_B)$. Ya que $H_{DR}^2(\mathbf{S}^3) = 0$ se puede extender por cero η_A y η_B a todo \mathbf{S}^3 tal que

$$\begin{aligned} d\omega_A &= \eta_A \\ &\text{y} \\ d\omega_B &= \eta_B. \end{aligned}$$

En términos de formas unos esperaría, de manera inocente, que en teoría de intersección

$$\int_{\mathbf{S}^3} \omega_A \wedge \eta_B$$

si $\mathbf{A} = \partial\mathbf{D}$ y $\eta_A = d\omega_A$, entonces en algún sentido \mathbf{D} corresponde a ω_A . Veamos que es independiente de todas las elecciones que se pueden hacer. Primero si ω'_A otra forma con $d\omega'_A = \eta_A$. Entonces $\omega'_A - \omega_A$ es cerrada. Así

$$\int_{\mathbf{S}^3} (\omega'_A - \omega_A) \wedge \eta_B = \int_{\mathbf{S}^3} d[(\omega'_A - \omega_A)] \wedge \eta_B = 0.$$

Por otro lado, si η'_B es otro representante de $[\eta'_B]$, entonces $\eta_B - \eta'_B = d\mu$, para algún μ en $\Omega_c^1(\mathbf{W}_B)$. Por tanto,

$$\int_{\mathbf{S}^3} \omega_A \wedge (\eta_B - \eta'_B) = - \int_{\mathbf{S}^3} (\omega_A \wedge \mu) + \int_{\mathbf{S}^3} \omega_A \wedge \mu.$$

Ambos términos de la derecha desaparecen: el primero por el teorema de Stokes y el segundo porque el soporte de η_A y μ son disjuntos.

Esta forma diferencial es bastante parecida al invariante de Hopf. Para llevarla a la forma de invariante de Hopf elegimos dos vecindades \mathbf{U}_p y \mathbf{U}_q de un valores regulares de p y q de f y ponemos $\mathbf{W}_A = f^{-1}\mathbf{U}_p$ y $\mathbf{W}_B = f^{-1}\mathbf{U}_q$. Después elegimos formas α_p y α_q en $\Omega_c^2(\mathbf{U}_p)$ y $\Omega_c^2(\mathbf{U}_q)$ representando los duales de Poincaré de p y q y ponemos $\eta_A = f^*\alpha_p$ y $\eta_B = f^*\alpha_q$. Entonces el número de enlazamiento de \mathbf{A} y \mathbf{B} es dado por

$$\int_{\mathbf{S}^3} \omega_A \wedge \eta_B.$$

Ya que α_p y α_q son ambos representantes de $H_{DR}^2(\mathbf{S}^2)$, hay una forma β en $\Omega^2(\mathbf{S}^2)$ tal que $\alpha_p - \alpha_q = d\beta$ y por tanto

$$\omega_A(\eta_A - \eta_B) = \omega_A f^* d\beta = -d(\omega_A f^* d\beta) + d(\omega_A) f^* d\beta$$

$$\eta_A \wedge f^* \beta = f^*(\alpha_p \wedge \beta).$$

Pero $\alpha_p \wedge \beta$ está en $\Omega^3(\mathbf{S}^2)$ y por lo tanto desaparece. Por Teorema de Stokes se sigue que

$$\int_{\mathbf{S}^3} \omega_A \wedge \eta_B = \int_{\mathbf{S}^3} \omega_A \wedge \eta_A.$$

Veamos que el invariante de Hopf definido como el número de enlazamiento y con formas diferenciales coinciden.

DEFINICIÓN 5.11. Empezamos con una superficie como \mathbf{D} con frontera \mathbf{A} , puede ser extendido de manera difeomorfa a $\mathbf{A} \times [0, 1]$. Es decir, existe un embedding

$$\phi : \mathbf{A} \times [0, 1] \hookrightarrow \mathbf{S}^3$$

tal que ϕ mapea difeomorficamente a $\mathbf{A} \times [0, 1]$ en una vecindad cerrada de $\mathbf{A} = \partial\mathbf{D}$ en \mathbf{D} , con $\mathbf{A} \times \{0\}$ va a \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \mathbf{D} \cup \phi(\mathbf{A} \times [0, 1]) \\ \mathbf{D}_{-1} &= \mathbf{D} - \phi(\mathbf{A} \times [0, 1]) \end{aligned}$$

Hay un anidamiento de subvariedades

$$\mathbf{D}_1 \supset \mathbf{D} \supset \mathbf{D}_{-1}.$$

Con el interior de $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_{-1}$ es difeomorfo a $\mathbf{A} \times (0, 1)$. El mapeo ϕ es llamado un collar alrededor de $\partial\mathbf{D}$ y la restricción de ϕ a $\mathbf{A} \times (0, 1)$ se llama un collar abierto alrededor de $\partial\mathbf{D}$.

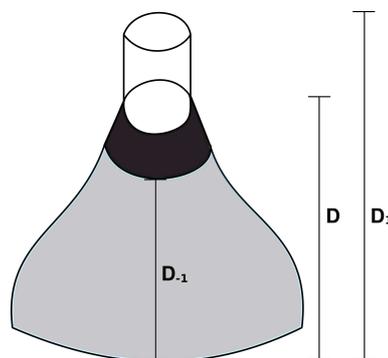


Figura 5.9: Collar

Usando la parametrización ϕ podemos construir una función suave $\xi_{\mathbf{A}}$ sobre \mathbf{D}_1 tal que

- (1) $\xi_{\mathbf{A}} \equiv 0$ cerca de frontera de \mathbf{A} y
- (2) $\xi_{\mathbf{A}} \equiv 1$ en una vecindad de \mathbf{D}_{-1} en \mathbf{D}_1 .

Se tiene que $d\xi_{\mathbf{A}}$ es una 1-forma diferencial con soporte compacto en un collar abierto de $\mathring{\mathbf{D}}_1 - \mathbf{D}_{-1}$. Donde $\mathring{\mathbf{D}}_1$ es el interior de \mathbf{D}_1 . Además $d\xi_{\mathbf{A}}$ representa el dual de Poincaré de \mathbf{A} en $\Omega_c^1(\mathring{\mathbf{D}}_1 - \mathbf{D}_{-1})$.

Ahora elegimos una vecindad de \mathbf{D}_1 en S^3 , digamos \mathbf{W} , lo suficientemente pequeña para admitir una retracción r

$$r : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{D}_1.$$

(Para una ϵ pequeña una ϵ -vecindad de \mathbf{D}_1 relativo a alguna métrica riemanniana en \mathbf{S}^3 lo hará). Sea \mathbf{T} una vecinda tubular de $\mathbf{D}_1 - \partial\mathbf{D}_1$ en $W - \partial\mathbf{D}_1$ difeomorfo al haz tangente unitario en el haz normal de $\mathbf{D}_1 - \partial\mathbf{D}_1$ en $W - \partial\mathbf{D}_1$ y sea $\mathring{\omega}$ representa la clase de Thom de \mathbf{T} en $\Omega_{cv}^1(T)$.

Consideramos la 1-forma diferencial

$$\omega_{\mathbf{A}} = (r^*\xi_{\mathbf{A}})\mathring{\omega}_{\mathbf{A}}.$$

Tiene varias virtudes. Primero tiene soporte compacto en W , así puede ser extendida por cero a todo \mathbf{S}^3 . $d\omega_{\mathbf{A}} \in \Omega_c^2(\mathbf{W}_{\mathbf{A}})$ representa el dual de Poincaré de \mathbf{A} en $\mathbf{W}_{\mathbf{A}}$.

Ahora elegimos una vecindad pequeña de $\mathbf{W}_{\mathbf{B}}$ de \mathbf{B} , un pequeño collar de \mathbf{D}_1 y una pequeña vecindad tubular \mathbf{T} de $\mathring{\mathbf{D}}_1$ tal que

$$\mathbf{W}_B \cap \mathbf{T} \subset r^{-1}(\mathbf{D}_{-1})$$

$$\int_{\mathbf{S}^3 - \partial \mathbf{D}_1} \dot{\omega}_A \wedge \eta_B$$

$$\int_{\mathbf{S}^3} \omega_A \wedge \eta_B = \sum_{\mathbf{D} \cap \mathbf{B}} \pm 1.$$

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones

Las formas diferenciales se utilizan en muy diversos contextos de matemáticas y física. Hay varias ventajas al usar cálculo diferencial exterior en lugar de cálculo tensorial, por ejemplo se simplifican los cálculos .

Otra herramienta fundamental en geometría es el producto de intersección. La intersección de dos subvariedades se puede calcular con formas diferenciales. Con esto se puede entender la característica de Euler y el invariante de Hopf .

El producto de intersección es una idea que aparece bastante en matemáticas como en topología simpléctica con los invariante de Gromov-Witten o en el trabajo de Freedman de 4-variedades .

Las ideas más fundamentales en matemáticas como conexidad (cohomología de De Rham), producto de intersección , cobordismo, aparecen una y otra vez en múltiples facetas y como fondo por supuesto nuestra noción de espacio y simetría.

Bibliografía

- [1] Guillemin, P., *differential forms*.
- [2] Flanders, H., *differential forms* Academic press, New York (1963).
- [3] Whitehead, J.H.C., *An expression of Hopf's invariati as an integral*.
- [4] Bott, R., Tu, L.W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Vol. 82 of Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York (1982).
- [5] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing (1990).
- [6] Frankel, T., *The Geometry of Physics: An Introduction*, Cambridge University Press, New York (1997).
- [7] Leys, Ghys, Alvarez <http://www.dimensions-math.org/>.
- [8] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, 2^a ed. (1989).
- [9] Rolfsen, D., *Knots and Links* , Publish or Perish, ed. (1976).
- [10] Misner, W.C, *Gravitation* , HF Co., 1973.
- [11] Warnick,k.F., *Teaching electromagnetic field theory using differential forms* .
- [12] Vega, L.,E., *Debrayes sobre curvatura* Tesis de licenciatura, UNAM, (2009).
- [13] Piponi, D., *On visualisation of differetial forms* .

-
- [14] Romero, G.,O., *El teorema de Guauss-Bonnet en variedades suaves* Tesis de maestria, UAM, (2011).
- [15] Hopkins, M.,J., *Algebraic topology and modular forms* ICM, Vol.1, (2002).
- [16] Novikov, S., *Henri Poincaré and XXth century topology* (2004).
- [17] Dieudonne, J.,A., *A history of algebraic and differential topology, 1900-1960* Birkhauser, Boston (1989).
- [18] Jaramillo, A.,N., *Sobre el teorema de Guauss-Bonnet-Chern* Tesis de licenciatura, UNAM, (2006).
- [19] Egughi, T. *Gravitation, gauge theories and differential geometry* .