UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DE LAS DESIGUALDADES A LA FUNCIÓN GAMMA Y BETA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

P R E S E N T A :

BENJAMIN TORRICO MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. JOSÉ LUIS NAVARRO URRUTIA
(2011)

Hoja de Datos del Jurado

1 Datos del Alumno
Torrico
Martínez
Benjamín
54 25 51 33
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
090524930

2. Datos del tutor
M en C
José Luis
Navarro
Urrutia

3. Datos del sinodal 1
M en C
Emma
Lam
Osnaya

4. Datos del sinodal 2
M en C
Elena
De Oteyza
De Oteyza

5. Datos del sinodal 3
M en C
María Guadalupe Elena
Ibargüengoitia
González

6. Datos del sinodal 4
M en C
Alejandro
Bravo
Mojica

7. Datos del trabajo escrito
De las Desigualdades a la Función Gamma y Beta
85 p
2011

Agradezco a esta gran casa de estudios, centro de sabiduría y forjadora de hombres ilustres, hoy me siento muy agradecido y orgulloso de ser uno de sus integrantes lo que me compromete a llevar muy en alto su nombre.

Agradezco a mis padres, a Herlinda y a toda mi familia que me alientan y brindan todo su apoyo para seguir adelante como siempre lo han hecho.

Un reconocimiento muy especial al M. en C. José Luis Navarro Urrutia que por el soporte que me permitió lograr la elaboración de este trabajo.

Reconocimiento muy especial a mis sinodales M. en C. Emma Lam Osnaya, M. en C. Elena De Oteyza De Oteyza, M. en C. María Guadalupe Elena Ibargüengoitia González y M. en C. Alejandro Bravo Mojica por su conocimiento, paciencia y patrocinio.

Agradezco a todos mis amigos de escuela, trabajo y a todas las personas que me han animado en todos los aspecto.

ÍNDICE

Pagina

Introducción 1

Capítulo I
1.1 Desigualdades numéricas 2
1.2 Valor absoluto 5
1.3 Desigualdad del triángulo 6
1.4 Desigualdad triangular para un espacio n-dimensional 11
1.5 Función cuadrática 12
1.6 Una desigualdad fundamental media geométrica-media aritmética 17
1.7 El número e 37
1.8 Desigualdad de Bernoulli 43
1.9 Media potencial 47
1.10 Una desigualdad útil 53

Capítulo II
2.1 Funciones Convexas 55
2.2 Desigualdad de Jensen 56
2.3 Algunos criterios para decidir si una función es convexa 60
2.4 Interpretación geométrica de la convexidad y la concavidad 63
2.5 La desigualdad de Hölder 76
2.6 Log-convexidad 78
2.7 La función Gamma 81
2.8 La función Beta 83

Bibliografía 84

Introducción

Existen una gran cantidad de problemas geométricos, económicos, financieros, demográficos y de otras ramas cuyas soluciones no siempre es un valor exacto o encontrarlo resulta muy costoso desde el punto de vista tiempo. Estos casos, en ocasiones se pueden resolver usando un análisis que involucre los conceptos básicos de las desigualdades, con la finalidad de encontrar una aproximación aceptable del valor exacto.

En muchos casos la solución del problema se puede plantear como resultado de una desigualdad que incluya una relación entre los objetivos de un modelo matemática para obtener una aproximación del problema ya sea en términos algebraicos o geométricos, obteniendo un modelo manipulable y suficientemente eficiente.

En el capítulo I revisaremos antecedentes y algunas herramientas para motivar el tema de este trabajo: axiomas de orden, valor absoluto, etc., y veremos como ejemplos, la relación que guarda la media geométrica con respecto a la media aritmética.

En el capítulo II trabajaremos algunos teoremas y criterios relacionados con las funciones convexas y cóncavas, para posteriormente definir el concepto de log-convexidad.

Concluiremos presentando a las funciones Gamma y Beta como ejemplos de funciones log-convexas.

Capítulo I

1.1 Desigualdades numéricas.

1.1.1 Los números reales ($\Re$) tienen la importante propiedad de poseer un orden. Este orden nos permitirá comparar dos números. Las propiedades básicas para $a,b,c \in \Re$ son las siguientes:

- Propiedad reflexiva $a \leq a$.
- Propiedad tricotomía $a < b$, $a > b$ o $a = b$.
- Propiedad antisimétrica: $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$.
- Propiedad transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
- Propiedad de orden total: $a \leq b$ o $b \leq a$.
- Relación con la suma: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$
- Relación con el producto: $c \geq 0, a \leq b \Rightarrow ac \leq bc,$ en particular $c \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow cb \geq 0.$

Observación: Si $a < b$ entonces $0 < b - a$.

De las propiedades (1.1) pueden deducirse las siguientes desigualdades:

Ejercicio 1.1.2
Sean $a,b \in \Re$ y $a < 0, b < 0$ entonces $ab > 0$.

Solución.
Como $a < 0$ y $b < 0$ entonces $0 < -a$ y $0 < -b$.
Multiplicamos

$$\begin{aligned} &0 < (-a)(-b) \\ &0 < ab \end{aligned}.$$

Ejercicio 1.1.3
Sean $a,b \in \Re$ con $a < 0, b > 0$ entonces $ab < 0.$

Solución.
$a < 0$ entonces $0 < -a$ y sabemos que $b > 0$ entonces, multiplicamos

$$\begin{aligned} &0 < (-a)b \\ &0 < -ab \end{aligned}$$

De donde

$$ab < 0.$$

Ejercicio 1.1.4
Sean $a,b,c,d \in \Re$ tales que $a < b, c < d$ entonces $a + c < b + d$.

Solución.
Como $a < b, c < d$ entonces

$$0 < b - a \text{ y } 0 < d - c$$

Sumando

$$0 < b - a + d - c .$$

De donde

$$0 < b + d - (a + c).$$

Así

$$a + c < b + d .$$

Ejercicio 1.1.5

Sea $a \in \Re$, tal que $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0.$

Solución.

Supongamos $a > 0$ y $\frac{1}{a} < 0$ los multiplicamos $a \frac{1}{a}$ el producto sería no positivo pero $a \frac{1}{a} = 1$ contradicción, entonces $\frac{1}{a} > 0$

Ejercicio 1.1.6

Sea $a \in \Re$. Si $a < 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$.

Solución.

Como $a < 0$ entonces $0 < -a$ y por el ejercicio anterior se da la relación.

Ejercicio 1.1.7

Sean $a, b \in \Re$ Si $a > 0, b > 0$ entonces $\frac{a}{b} > 0$.

Solución.

Como $b > 0$ entonces $\frac{1}{b} > 0$.

Así $a > 0$ y $\frac{1}{b} > 0$ entonces como el producto de dos números positivos es positivo, tenemos que $\frac{a}{b} > 0.$

Ejercicio 1.1.8

Sean $a, b \in \Re$ tales que $0 < a < b,\ 0 < c < d$ entonces $ac < bd$.

Solución.

Como los números son mayores que cero, entonces al multiplicar una desigualdad por ellos, ésta no cambia de sentido.

Primero multiplicamos $a < b$ por c

$$ca < cb,$$

luego hay que multiplicar $c < d$ por b

$$bc < bd$$

y por transitividad tenemos

$$ca < bd.$$

Ejercicio 1.1.9

Sea $a \in \Re$ y $a > 1$ entonces $a^2 > a$.

Solución.

A la desigualdad $a > 1$ la multiplicamos por a toda la expresión nos queda

$$aa > a$$

$$a^2 > a$$

Ejercicio 1.1.10

Sea $a \in \Re$ y $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$.

Solución.

Como $a < 1$ entonces multiplicando la desigualdad por a entonces $a^2 < a$.

Ejercicio 1.1.11

Sean $a, b \in \Re$, tales que $a > 0, b > 0$ y $a^2 < b^2$, entonces $a < b$.

Solución.

Como $0 < b^2 - a^2$ y

$$b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$$

de donde

$$(b + a)(b - a) > 0$$

y como $b + a > 0$ entonces $b - a > 0$.

Así

$$a < b.$$

Ejercicio 1.1.12

Sean $a, b \in \Re$, $b > 0$ tenemos que $\frac{a}{b} > 1$ si y sólo si $a > b$.

Solución.

$\Rightarrow)$ $b > 0$, multiplicamos en ambos lados de la desigualdad $\frac{a}{b} > 1$ por b y nos queda

$$b\frac{a}{b} > 1\cdot b$$
$$a > b$$

$\Leftarrow)$ Sean $a > b$ y $b > 0$ entonces $\frac{1}{b} > 0$, de donde multiplicando $a > b$ por $\frac{1}{b}$ tenemos

$$\frac{a}{b} > \frac{b}{b} = 1, \text{ entonces } \frac{a}{b} > 1.$$

1.2 Valor absoluto.

El valor absoluto $|x|$ de $x \in \Re$ esta dado por

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

El $|x|$ es la distancia en la recta de un número x al origen. $|a-b|$ con $a,b \in \Re$ es la distancia de entre a y b en la recta real.

Ejemplo 1.2.1

Si $x \in \Re$ entonces $|x| \geq 0$, y es igual a cero solamente si $x = 0$.

Solución.

Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x \geq 0$.

Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y $|x| = -x > 0$.

Por lo tanto $|x| \geq 0$.

Por último si $x = 0$ entonces $|x| = |0| = 0$.

Ejemplo 1.2.2

Sea $x \in \Re$, entonces $|x|^2 = x^2$.

Solución.

Si $x \geq 0$ entonces

$$|x|^2 = |x||x| = xx = x^2$$

Si $x < 0$ entonces

$$|x|^2 = |x||x| = (-x)(-x) = (-1)^2 x^2 = x^2.$$

Observación:

Si $x \in \Re$ entonces $|x| = \sqrt{x^2}$.

Ejemplo 1.2.3
Sea $x \in \Re$, entonces $|-x| = |x|$.

Solución.

$$|-x| = \sqrt[2]{(-x)^2} = \sqrt[2]{x^2} = |x| \Rightarrow |-x| = |x|.$$

Ejemplo 1.2.4
Sean $a, b \in \Re$, entonces $|ab| = |a||b|$.

Solución.

$$|ab| = \sqrt[2]{(ab)^2} = \sqrt[2]{a^2}\sqrt[2]{b^2} = |a||b|.$$

Ejemplo 1.2.5
Sean $a, b \in \Re$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, si $b \neq 0$.

Solución.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt[2]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt[2]{a^2}}{\sqrt[2]{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}.$$

1.3 Desigualdad del triángulo.
Si $a, b \in \Re$ siempre se tiene

$$|a+b| \leq |a| + |b| \qquad (1.2)$$

además, la igualdad se da cuando $ab \geq 0$.

Demostración.
Como ambos lados de la desigualdad son números positivos entonces demostraremos que $|a+b|^2 = (|a| + |b|)^2$.

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

En las relaciones anteriores notamos que sólo hay una desigualdad y ésta es inmediata ya que $ab \leq |ab|$ y vemos que cuando $ab \geq 0$ se tiene $ab = |ab| = |a||b|$ y entonces se da la desigualdad.

Ejercicio 1.3.1
Sean $a,b,c\in\Re$ entonces $|a|+|b|+|c|-|a+b|-|b+c|-|c+a|+|a+b+c|\geq 0$.

Solución.
Si a,b o c son cero, tenemos la igualdad.

$$|0|+|b|+|c|-|0+b|-|b+c|-|c+0|+|0+b+c|=|b|+|c|-|b|-|b+c|-|c|+|b+c|=0 \quad .$$

Entonces supongamos $|a|\geq|b|\geq|c|>0$, ya que la desigualdad es simétrica en a,b y c.
Dividimos entre $|a|$, entonces la desigualdad es equivalente a

$$1+\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-\left|1+\frac{b}{a}\right|-\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|-\left|1+\frac{c}{a}\right|+\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|\geq 0$$

Demostraremos esta desigualdad.
Observación
$\left|\frac{b}{a}\right|\leq 1,\ \left|\frac{c}{a}\right|\leq 1$, entonces

$$-1\leq\frac{b}{a}\leq 1$$
$$0\leq 1+\frac{b}{a}\leq 2$$

De donde

$$\left|1+\frac{b}{a}\right|=1+\frac{b}{a} \text{ y } \left|1+\frac{c}{a}\right|=1+\frac{c}{a}$$

Por demostrar

$$\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|-\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|\geq 0 \ .$$

Como

$$\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|\leq\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|$$
$$0\leq\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|$$

y

$$\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\leq\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|$$
$$0\leq\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|-\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$

entonces

$$0 \le \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right|$$

de donde

$$0 \le \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| + 1 - 1$$

$$0 \le 1 + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left(1 + \frac{b}{a}\right) - \left(1 + \frac{c}{a}\right) + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right|$$

Ejercicio 1.3.2

Sean m y n enteros positivos. entonces

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n}$$

Solución.

Como

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = 2 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

entonces

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{m}{n} < \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

de donde

$$m\left(\sqrt{2}-1\right) < n\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$m\sqrt{2} - m < 2n - \sqrt{2}\cdot n$$

$$m\sqrt{2} + \sqrt{2}n < 2n + m$$

$$\sqrt{2}(m+n) < 2n + m$$

$$\sqrt{2} < \frac{2n+m}{(m+n)}.$$

Ejercicio 1.3.3

Si $a \ge b$ y $c \ge d$ entonces $ac + bd \ge ad + bc$.

Solución.

Por demostrar $(ac+bd) - (ad+bc) \ge 0$.

Por hipótesis tenemos

$$a \ge b \Rightarrow a - b \ge 0 \text{ y } c \ge d \Rightarrow c - d \ge 0$$

de donde

$$(a-b)(c-d) \ge 0$$

$$ac - bc - ad + bd \ge 0$$

$$ac + bd - (ad + bc) \ge 0.$$

Ejercicio 1.3.4

Si $x, y > 0$ entonces $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Solución.

Del ejercicio anterior hacemos $a = \sqrt{x^2}$, $b = \sqrt{y^2}$, $c = \frac{1}{\sqrt{y}}$ y $d = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Entonces

$$\sqrt{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$$

de donde

$$\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{\frac{x^2}{x}} + \sqrt{\frac{y^2}{y}} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Ejercicio 1.3.5

Sean $a, b, c, d \in \Re$ tal que $a + d = b + c$ mostrar que

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0 .$$

Solución.

Como $a + d = b + c$, entonces

$$a - b = c - d$$
$$a - c = b - d$$

Entonces

$$\begin{aligned}(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) &= 2ac - 2ad - 2bc + 2bd \\ &= 2(a-b)(c-d) \\ &= 2(a-b)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0$.

Ejercicio 1.3.6

Sea $f(a,b,c,d) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2$, si $a < b < c < d$ mostrar que

$$f(a,c,b,d) > f(a,b,c,d) > f(a,b,d,c).$$

Solución.

Probaremos que $f(a,c,b,d) - f(a,b,c,d) > 0$.

Calculamos $f(a,c,b,d) - f(a,b,c,d) =$

$$
\begin{aligned}
&= (a-c)^2 + (c-b)^2 + (b-d)^2 + (d-a)^2 - \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2\right] \\
&= (a-c)^2 - (a-b)^2 + (b-d)^2 - (c-d)^2 \\
&= a^2 - 2ac + c^2 - a^2 + 2ab - b^2 + b^2 - 2bd + d^2 - c^2 + 2cd - d^2 \\
&= -2ac + 2ab - 2bd + 2cd \\
&= 2ab - 2ac - 2bd + 2cd \\
&= 2[a(b-c) - d(b-c)] \\
&= 2(a-d)(b-c)
\end{aligned}
$$

y como $(a-d) < 0$ y $(b-c) < 0 \Rightarrow 2(a-d)(b-c) > 0$.
Así, $f(a,c,b,d) - f(a,b,c,d) > 0$.

Ahora demostraremos que $f(a,b,c,d) - f(a,b,d,c) > 0$.

Calculamos $f(a,b,c,d) - f(a,b,d,c) =$

$$
\begin{aligned}
&= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 - \left[(a-b)^2 + (b-d)^2 + (d-c)^2 + (c-a)^2\right] \\
&= (b-c)^2 - (b-d)^2 + (d-a)^2 - (c-a)^2 \\
&= b^2 - 2bc + c^2 + d^2 - 2ad + a^2 - b^2 + 2bd - d^2 - c^2 + 2ac - a^2 \\
&= -2bc + 2bd - 2ad + 2ac \\
&= 2d(b-a) - 2c(b-a) \\
&= 2(d-c)(b-a).
\end{aligned}
$$

Como $d - c > 0$ y $(b-a) > 0$, entonces $2(d-c)(b-a) > 0$.
Por lo tanto, $f(a,b,c,d) - f(a,b,d,c) > 0.$

Ejercicio 1.3.7
Sean $a,b,c > 0$ tal que satisfacen $abc = 1$ mostrar que

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

Solución.
Analicemos el producto $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2)$.

$$
\begin{aligned}
(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a-b)(a+b) \\
&= (a-b)^2(a^2 + ab + b^2)(a+b) \geq 0
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) &= a^3(a^2 - b^2) - b^3(a^2 - b^2) \\
&= a^5 - a^3b^2 - b^3a^2 + b^5
\end{aligned}
$$

entonces

$$a^5 - a^3b^2 - b^3a^2 + b^5 \geq 0$$

de donde

$$a^5 + b^5 \geq a^2b^3 + b^2a^3$$

$$a^5 + b^5 + ab \geq a^2b^2(a+b) + ab$$

Entonces

$$\frac{1}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{1}{a^2b^2(a+b) + ab}$$

de manera que

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b) + ab} = \frac{abc^2}{a^2b^2c^2(a+b) + abc^2}$$

pero como $abc = 1$, entonces

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{c}{a+b+c}$$

Análogamente se prueba que

$$\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a+b+c}$$

y

$$\frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{b}{a+b+c}$$

Por lo que

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

1.4 Desigualdad triangular para un espacio n-dimensional.

Está dada por la expresión:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (1.3)$$

donde n es un número natural, x_i números reales.

Demostración.

Ahora vamos a demostrar que la expresión anterior es cierta para cualquier n natural utilizando el método de Inducción matemática.

Para $n = 1$

$$|x_1| \leq |x_1|$$

Ahora asumimos que se cumple para $n = k$, con k un número natural mayor que uno.

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

y probamos que la desigualdad también se cumple para $n = k+1$.

Partimos de la siguiente expresión

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right|$$

como $\sum_{i=1}^{k} x_i$ es un número y x_{k+1} es otro, podemos aplicar la desigualdad triangular

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| + |x_{k+1}|$$

Usando la hipótesis de inducción

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| + |x_{k+1}| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i| + |x_{k+1}|$$

escribiendo el término $k+1$ dentro de la sumatoria tenemos

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| + |x_{k+1}| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i| + |x_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |x_i|$$

de donde

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right| + |x_{k+1}| \leq \sum_{i=1}^{k+1} |x_i|$$

1.5 Función Cuadrática.

$$ax^2 + 2bx + c \qquad (1.4)$$

Una desigualdad muy útil de los números reales es $x^2 \geq 0$. La cuál es válida para cualquier número real x. De ésta se deducen muchas otras desigualdades, en particular la usaremos para maximizar o minimizar una función cuadrática $ax^2 + 2bx + c$. Estas funciones aparecen con frecuencia en problemas de optimización o desigualdades.

Si $a > 0$ la función $ax^2 + 2bx + c$ tendrá un mínimo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor del mínimo es $c - \frac{b^2}{a}$, en efecto:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}\right) + c - \frac{b^2}{a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a} \end{aligned}$$

Como $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ y como el valor mínimo de esta última expresión es cero cuando $x = -\frac{b}{a}$, tenemos que el valor mínimo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Si $a < 0$ la función $ax^2 + 2bx + c$ tendrá un máximo en $x = -\frac{b}{a}$ y su valor ahí es $c - \frac{b^2}{a}$, en efecto, como

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a^2}$$

y puesto que

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \leq 0$$

(ya que $a < 0$), el valor mayor de esta última expresión es cero, luego la función es menor o igual a $c - \frac{b^2}{a}$ y toma ese valor en $x = -\frac{b}{a}$.

Ejercicio 1.5.1
Si $x, y > 0$, con $x + y = 2a$, entonces el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Solución.
Si $x + y = 2a$, entonces

$$y = 2a - x.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} xy &= x(2a - x) \\ &= -x^2 + 2ax \\ &= -(x - a)^2 + a^2 \end{aligned}$$

es máximo cuando $x = a$ y entonces $x = y = a$.

Esto se puede interpretar geométricamente como “de los rectángulos de perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado”. Ya que si x, y son los lados de un rectángulo, el perímetro es $2(x+y)=4a$ y su área es xy, que es máxima cuando $x=y=a$.

Ejercicio 1.5.2

Para cualquier $x>0$, se tiene $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

Solución.

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

entonces

$$x-2+\frac{1}{x}\geq 0,$$

es decir,

$$x+\frac{1}{x}\geq 2.$$

Además, la igualdad se da si y sólo si $x=1$.

Ejercicio 1.5.3

Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2.$$

Solución.

Tenemos

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$$

por el ejercicio anterior, de donde

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2.$$

El signo de la igualdad tiene lugar sólo para $x=0$.

Ejercicio 1.5.4

Demostrar que para $a>1$ se tiene

$$\log a+\log_a 10\geq 2.$$

Solución.

Como $a>1$, entonces $\log a>0$, pero:

$$\lg a+\lg_a 10=\lg a+\frac{1}{\lg a}.$$

Entonces, por el ejercicio 1.5.2, se tiene que:

$$\lg a + \lg_a 10 = \lg a + \frac{1}{\lg a} \geq 2 .$$

Ejercicio 1.5.5
Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2} .$$

Solución.
Si $x=0$, la desigualdad se cumple.
Supongamos que $x \neq 0$, entonces dividimos el numerador y el denominador del primer miembro de la desigualdad entre x^2:

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2} .$$

Por el ejercicio 1.5.2, tenemos $\frac{1}{x^2}+x^2 \geq 2$, y, por consiguiente,

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2} \leq \frac{1}{2} .$$

Ejercicio 1.5.6
Si $a,b>0$, entonces $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ y la igualdad se da si y sólo si $a=b$.

Solución.
Por el ejercicio 1.5.2, sabemos que si $x>0$, $x+\frac{1}{x} \geq 2$ y haciendo $x=\frac{a}{b}$ tenemos

$$\frac{a}{b}+\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}+\frac{b}{a} .$$

Entonces:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 .$$

Por otra parte, si $a=b$ entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = \frac{a}{a}+\frac{b}{b} = 1+1 = 2$$

y la igualdad se cumple.
Análogamente, si la igualdad se cumple, entonces:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$$
$$\frac{a^2+b^2}{ab}=2$$
$$a^2-2ab+b^2=0$$
$$(a-b)^2=0$$
$$a=b.$$

Ejercicio 1.5.7

Si a, b, c son números positivos entonces no suceden simultáneamente las desigualdades, $a(1-b)>\frac{1}{4}$, $b(1-c)>\frac{1}{4}$, $c(1-a)>\frac{1}{4}$.

Solución.

Si $a(1-b)>\frac{1}{4}$, entonces
$$a(1-b)>0$$
y como $a>0$ entonces
$$1-b>0$$
$$1>b.$$
Si las tres desigualdades ocurren, debe de suceder que $a, b, c<1$ y $a(1-b)b(1-c)c(1-a)>\frac{1}{64}$.

Sea $f(x)=x-x^2$ entonces
$$f'(x)=1-2x.$$
Igualamos la derivada a cero
$$1-2x=0$$
$$1=2x$$
$$\frac{1}{2}=x$$
y como
$$f''(x)=-2,$$
entonces
$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=-2<0$$
Entonces en $x=\frac{1}{2}$ hay un máximo y $f(1/2)=1/4$.

De lo anterior tenemos que para $0\le x\le 1$ siempre sucede que $x(1-x)\le\frac{1}{4}$, entonces se tiene que

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a)=b(1-b)c(1-c)a(1-a)<\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}$$

Lo cual es una contradicción.

1.6 Una desigualdad fundamental media geométrica-media aritmética.

Una desigualad que se considera fundamental en los problemas de optimización es la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética de dos números no negativos a y b, que está dada por.

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2} \qquad (1.5)$$

Además la igualdad ocurre si y sólo si $a=b$.

Demostración.

Para demostrar la desigualdad basta con observar que,

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}&=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0\end{aligned}$$

La igualdad se da si y sólo si $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, es decir, cuando $a=b$.

Utilizando esta desigualdad, probaremos nuevamente algunos de los resultados anteriores.

Ejercicio 1.6.1

Si $x\ge 0$, entonces $1+x\ge 2\sqrt{x}$.

Solución.

Como

$$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$$

Tenemos

$$\frac{1+x}{2}\ge\sqrt{1x}$$

$$1+x\ge 2\sqrt{x}$$

Ejercicio 1.6.2

Si $x>0$ tenemos $x+\frac{1}{x}\ge 2$.

Solución.

Sean $a=x$ y $b=\frac{1}{x}$

Utilizamos $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ nos queda

$$\sqrt{(x)\left(\frac{1}{x}\right)} \leq \frac{x+\frac{1}{x}}{2}$$

$$1 \leq \frac{x+\frac{1}{x}}{2}$$

entonces

$$2 \leq x + \frac{1}{x}.$$

Ejercicio 1.6.3

Si $x, y \in \Re^{+}$ entonces $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Solución.

Hacemos $a = x^2$ y $b = y^2$

$$\sqrt{x^2 y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\sqrt{(xy)^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

Ejercicio 1.6.4

Si $x, y \in \Re^{+}$ entonces $2\left(x^2 + y^2\right) \geq (x+y)^2$.

Solución.

Sean

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$x^2 + y^2 \geq x^2 + y^2$$

las sumamos y obtenemos

$$2\left(x^2 + y^2\right) \geq x^2 + y^2 + 2xy$$

$$2\left(x^2 + y^2\right) \geq (x+y)^2.$$

Ejercicio 1.6.5

Si $x, y \in \Re^{+}$ entonces $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$.

Solución.

$$\frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$x^2 + y^2 \geq 4xy - 2xy$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$(x+y)^2 \geq 0$$

Ejercicio 1.6.6

Si $x, c, d \in \Re^+$ entonces $cx + \frac{d}{x} \geq 2\sqrt{cd}$.

Solución.

Hacemos $a = cx$ y $b = \frac{d}{x}$ en la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

entonces

$$\sqrt{cx\frac{d}{x}} \leq \frac{cx + \frac{d}{x}}{2},$$

de donde

$$2\sqrt{cd} \leq cx + \frac{d}{x}.$$

Ejercicio 1.6.7

Si $c, d > 0$, entonces $\frac{c}{d} + \frac{d}{c} \geq 2$.

Solución.

Hacemos $a = \frac{c}{d}$ y $b = \frac{d}{c}$, entonces

$$\sqrt{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}} \leq \frac{\frac{c}{d}+\frac{d}{c}}{2}$$

$$\sqrt{1} \leq \frac{\frac{c}{d}+\frac{d}{c}}{2}$$

$$2\sqrt{1} \leq \frac{c}{d}+\frac{d}{c}$$

$$2 \leq \frac{c}{d}+\frac{d}{c}.$$

Ejercicio 1.6.8

Sean a y b tal que $0<b\leq a$ entonces $\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b}$.

Solución.

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} &= \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}.\end{aligned}$$

Entonces, como:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 &= \left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2.\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^2}\frac{(a-b)^4}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4}.\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} &= \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} \\ &= \frac{(a-b)^2}{2\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)}\end{aligned}$$

y como $0<b\leq a$, se tiene que:

$$\frac{(a-b)^2}{2\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)} \geq \frac{(a-b)^2}{2(a+2a+a)} = \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a},$$

es decir,

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}.$$

Ahora de manera similar

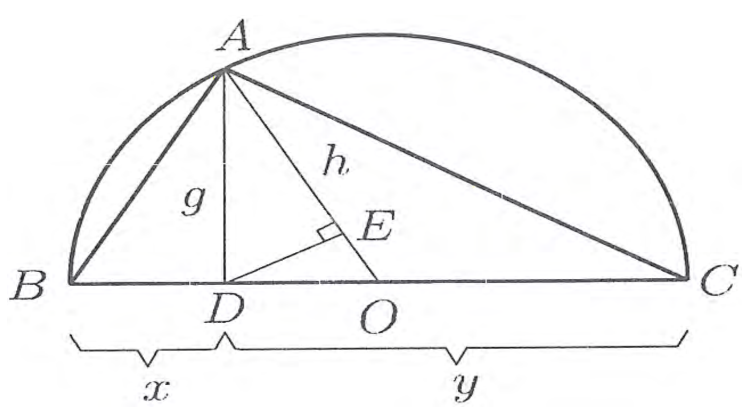
$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \\
&= \frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} \\
&= \frac{(a-b)^2}{2\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)} \\
&\leq \frac{(a-b)^2}{2(b+2b+b)} \\
&= \frac{(a-b)^2}{8b}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a-b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b} \quad .$$

Veamos ahora una demostración geométrica de la siguientes desigualdades, para $x, y > 0$

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \qquad (1.6)$$



Sean $x = BD$, $y = DC$ y construyamos una semicircunferencia de diámetro $BC = x + y$. Sea A el punto donde la perpendicular de BC por D intersecta a la semicircunferencia y sea E el pie de la perpendicular desde D al radio AO. Denotemos por $g = AD$, $h = AE$, por ser ΔABD y ΔCAD triángulos semejantes tenemos que

$$\frac{g}{y} = \frac{x}{g}$$
$$g^2 = xy$$
$$g = \sqrt{xy}$$

También, por ser ΔAOD y ΔADE triángulos semejantes tenemos:

$$\frac{h}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}},$$

luego

$$h = \frac{2xy}{x+y} = \left(\frac{\frac{2xy}{xy}}{\frac{x+y}{xy}} \right) = \frac{2}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)}.$$

Finalmente un cateto siempre es menor que la hipotenusa por lo que

$$h \le g \le \frac{x+y}{2}$$

que rescribiéndolo queda

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

El número $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ se conoce como la media armónica de x y y.

La desigualdad:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \le \sqrt{xy}$$

se conoce como la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica.

Algunas desigualdades se pueden demostrar a través de repetir la aplicación de una desigualdad sencilla, además del uso de una buena idea para dividir el problema, esto se puede ver resolviendo los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.6.9
Si $x, y, z \in \Re^+$ entonces $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz$.

Solución.

$$(x+y)\geq 2\sqrt{xy}$$
$$(y+z)\geq 2\sqrt{yz}$$
$$(z+x)\geq 2\sqrt{xz}$$

Los multiplicamos

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{xz}$$
$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8\sqrt{x^2y^2z^2}$$

Por lo tanto

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$$

Ejercicio 1.6.10

Sean $x, y, z \in \Re$ entonces $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.

Solución.

$$x^2+y^2\geq 2xy$$
$$y^2+z^2\geq 2yz$$
$$z^2+x^2\geq 2zx$$

Sumamos las tres expresiones

$$2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

ahora lo dividimos entre dos

$$\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{2}\geq \frac{2xy+2yz+2zx}{2}$$

y resulta

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

Ejercicio 1.6.11

Sean $x, y, z \in \Re^+$ entonces $xy+yz+zx \geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$.

Solución.

Usando $\sqrt{xy}\leq \dfrac{x+y}{2}$ tenemos

$$z\sqrt{xy}\leq \frac{zx+zy}{2}$$
$$x\sqrt{yz}\leq \frac{xy+xz}{2}$$
$$y\sqrt{xz}\leq \frac{yx+yz}{2}$$

Sumando obtenemos

$$xy+yz+zx\geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}$$

Ejemplo: 1.6.12

Sean $0 < a < b$ entonces $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

Solución.

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b,$$

entonces

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Por otro lado tenemos

$$aa = a^2 < ab$$

entonces

$$a < \sqrt{ab}$$

y como $(a-b)^2 > 0$ entonces

$$a^2 + b^2 > 2ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$$
$$(a+b)^2 > 4ab.$$

Sacando raíz cuadrada tenemos

$$a + b > 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Ejercicio 1.6.13

Sean $x, y \in \Re$ entonces $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Solución.

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$
$$y^2 + 1^2 \geq 2y$$
$$x^2 + 1^2 \geq 2x.$$

Sumamos las tres expresiones

$$2x^2 + 2y^2 + 2(1)^2 \geq 2xy + 2y + 2x$$

dividimos entre dos

$$\frac{2x^2 + 2y^2 + 2(1)^2}{2} \geq \frac{2xy + 2y + 2x}{2}.$$

Simplificando, tenemos

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + y + x.$$

Ejercicio 1.6.14

Sean $x, y, z \in \Re^+$ entonces $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$.

Solución.

Observación $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Dividiendo entre xy tenemos $\frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Entonces

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}}$$
$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{zx}}$$

Sumamos las desigualdades

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{2}{\sqrt{yz}}+\frac{2}{\sqrt{zx}}.$$

Dividimos entre dos

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Ejercicio 1.6.15

Si $x, y, z \in \Re^+$ entonces $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq x+y+z$.

Solución.

Usamos $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Entonces

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} = 2y$$
$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq 2\sqrt{\left(\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} = 2z$$
$$\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y} \geq 2\sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} = 2x.$$

Sumamos y resulta

$$2\frac{xy}{z}+2\frac{yz}{x}+2\frac{zx}{y}\geq 2x+2y+2z$$

y dividiendo entre dos queda

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z\,.$$

Ejercicio 1.6.16

Si $x,y,z\in\Re^{+}$ entonces $x^2+y^2+z^2\geq x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}$.

Solución.

Como $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ entonces

$$\frac{x^2+\left(y^2+z^2\right)}{2}\geq\sqrt{x^2\left(y^2+z^2\right)}=x\sqrt{y^2+z^2}$$

$$\frac{y^2+\left(x^2+z^2\right)}{2}\geq\sqrt{y^2\left(x^2+z^2\right)}=y\sqrt{x^2+z^2}\,.$$

Sumamos estas dos expresiones

$$\frac{x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2}{2}\geq x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}$$

$$\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{2}\geq x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}$$

$$\frac{2}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}$$

$$x^2+y^2+z^2\geq x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}.$$

La desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética puede extenderse para más números. Por ejemplo podemos ver la siguiente desigualdad para cuatro números no negativos a,b,c,d que afirma que $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$ de la siguiente manera:

Escribimos

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)&\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)\\&\geq\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}\\&=\sqrt[4]{abcd}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}\ .$$

Ejercicio 1.6.17

Si $x, y, z \in \Re^+$ entonces $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

Solución.

Como

$$x^4 + y^4 + 8 = x^4 + y^4 + 4 + 4$$

y

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 + y^4 + 4 + 4}{4} &\geq \sqrt[4]{x^4 y^4 4 \cdot 4} \\
x^4 + y^4 + 4 + 4 &\geq 4\sqrt[4]{x^4 y^4 4 \cdot 4} \\
x^4 + y^4 + 4 + 4 &\geq 4\sqrt[4]{x^4 y^4 16} \\
x^4 + y^4 + 4 + 4 &\geq 2 \cdot 4\sqrt[4]{x^4 y^4} \\
&= 8\sqrt[4]{(xy)^4} \\
&= 8xy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy.$$

Ejercicio 1.6.18

Si $a, b, c, d \in \Re^+$ entonces $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16$.

Solución.

Como

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}\right)}\ .$$

Multiplicamos

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16\sqrt[4]{\left(\frac{a}{a}\right)\left(\frac{b}{b}\right)\left(\frac{c}{c}\right)\left(\frac{d}{d}\right)}$$
$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16\sqrt[4]{1}$$
$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16.$$

Ejercicio 1.6.19

Si $a,b,c,d \in \Re^{+}$ entonces $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4$.

Solución.

Como $a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$ tenemos

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{d}{a}\right)}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{abcd}{bcda}\right)}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4\sqrt[4]{1}=4.$$

Es decir, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4$.

Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son números positivos, los números

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ ,\ g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

se denominan, respectivamente, media aritmética y media geométrica de los números $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Para estos dos números Augustin Cauchy, matemático francés, demostró a principios del siglo XIX la desigualdad

$$g \leq a \qquad (1.7)$$

que se aplica frecuentemente en la solución de problemas. Demostraremos esta desigualdad exponiendo previamente una proposición auxiliar.

Teorema 1.6.1

Si el producto de n números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ es igual a 1, la suma de los mismos es mayor o igual que n, es decir

$$\text{Si } x_1x_2\ldots x_n=1 \text{ entonces } x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n.$$

Demostración.

Emplearemos el método de inducción matemática. Comprobaremos primero que el teorema es válido para $n = 2$, o sea, demostraremos que:

Si $x_1 x_2 = 1$ entonces $x_1 + x_2 \geq 2$

Con este fin, consideraremos dos casos:

Caso 1

$x_1 = x_2 = 1$

Entonces $x_1 + x_2 = 2$ y el teorema queda demostrado.

Caso 2

Puesto que $x_1 x_2 = 1$, cada uno de los números es el recíproco del otro, es decir $x_1 = \frac{1}{x_2}$, entonces si

$x_1 > 1$, se tiene que $x_1 = \frac{1}{x_2} > 1$, y por lo tanto $x_2 < 1$. De igual manera, si $x_1 < 1$, tenemos que $x_2 > 1$.

Supongamos que $0 < x_1 < 1 < x_2$

De la igualdad

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 1$$

se deduce que

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

Teniendo en cuenta ahora que $x_1 x_2 = 1$, obtenemos

$$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1).$$

Finalmente, puesto que $x_1 < 1 < x_2$, el último número resulta positivo y por eso $x_1 + x_2 > 2$.

Supongamos ahora que el teorema es válido para $n = k$, es decir, si $x_1 x_2 \ldots x_k = 1$, entonces:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k.$$

Demostraremos para $n = k + 1$, o sea, que si $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = 1$ entonces:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1,$$

donde $x_i > 0$.

Se pueden presentar dos casos:

Caso 1

Todos los factores $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k, x_{k+1}$ son iguales, o sea:

$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_k = x_{k+1} = 1$ entonces la suma de los mismos es $k + 1$, o sea,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k+1$$

Caso 2

No todos los factores son iguales.

Entre todos los factores del producto $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k x_{k+1}$, habrá números mayores y menores que uno (si todos los factores fueran menores que uno, el producto también sería menor que uno).

Supongamos, por ejemplo que $x_1 < 1$ y $x_{k+1} > 1$. Tenemos

$$(x_1 x_{k+1}) x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 1.$$

Escribimos $y_1 = x_1 x_{k+1}$, entonces

$$y_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 1.$$

Puesto que éste es el producto de k números positivos y es igual a la unidad, por hipótesis de inducción tenemos que:

$$y_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k\ .$$

Pero

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + x_3 \cdots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\ &\geq k + x_{k+1} - y_1 + x_1 \\ &= (k+1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1 \\ &= (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+11} + x_1 - 1 \\ &= (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1). \end{aligned}$$

Puesto que $x_1 < 1$ y $x_{k+1} > 1$, tenemos $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$ y, por consiguiente,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k+1.$$

Con esto queda demostrado el teorema**.**

Ejercicio 1.6.20

Demostrar que si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son números positivos, se tiene

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n\ ,$$

con la particularidad de que igualdad se da si y sólo si $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

Solución.

Puesto que:

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1$$

la desigualdad se deduce del teorema 1.6.1.

Como todos los factores son positivos, la igualdad se cumple sólo si

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1$$

es decir,

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$$

Ejercicio 1.6.21

Sean $x_i>0, i=1,2,\ldots,n$ entonces

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2.$$

Solución.

Como

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n\geq n\cdot\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}$$

y

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\geq n\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{x_n}\right)}$$

multiplicando tenemos

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2\cdot\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\left(\frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{x_n}\right)}$$

de donde:

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{x_1}{x_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{x_2}\right)\cdot\left(\frac{x_3}{x_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x_n}{x_n}\right)}$$

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2\cdot\sqrt[n]{1}$$

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$$

Ejercicio 1.6.22

Si $a,b,c>0$ y $(1+a)(1+b)(1+c)=8$ entonces $abc\leq 1$.

Solución.

Como $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, entonces:

$$\frac{1+a}{2} \geq \sqrt{a}$$
$$\frac{1+b}{2} \geq \sqrt{b}$$
$$\frac{1+c}{2} \geq \sqrt{c}.$$

Multiplicando:

$$\left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{1+b}{2}\right)\left(\frac{1+c}{2}\right) \geq \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$
$$\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{8} \geq \sqrt{abc}.$$

Como $(1+a)(1+b)(1+c)=8$, entonces

$$\left(\frac{8}{8}\right) \geq \sqrt{abc}$$
$$1 \geq \sqrt{abc}$$

y elevando al cuadrado, tenemos

$$1 \geq abc.$$

Ejercicio 1.6.23

Si $a,b,c>0$ entonces $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq ab+bc+ca.$

Solución.

Como $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ entonces $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$.

De donde

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{c}\cdot bc} = 3ab$$
$$\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ca \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c}\cdot\frac{c^3}{a}\cdot ca} = 3bc$$
$$\frac{c^3}{a}+\frac{a^3}{b}+ab \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a}\cdot\frac{a^3}{b}\cdot ab} = 3ca\,.$$

Sumando tenemos

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+bc+ca+ab\geq 3(ab+bc+ac)$$

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)\geq 3(ab+bc+ac)-bc-ca-ab$$

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)\geq 2(ab+bc+ac).$$

Entonces dividiendo entre dos y tenemos

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ac\ .$$

Ejercicio 1.6.24

Si $a,b,c>0$ entonces $(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geq 9a^2b^2c^2$.

Solución.

Como

$$a^2b+b^2c+c^2a\geq 3\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a}=3\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3}=3abc$$

y

$$ab^2+bc^2+ca^2\geq 3\sqrt[3]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2}=3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc\ .$$

Ahora multiplicamos

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geq 9a^2b^2c^2\ .$$

Ejercicio 1.6.25

Si $a,b,c>0$ tal que $abc=1$ entonces

$$\left(\frac{1+ab}{1+a}\right)+\left(\frac{1+bc}{1+b}\right)+\left(\frac{1+ac}{1+c}\right)\geq 3\,.$$

Solución.

Como $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$ entonces $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$. De donde

$$\frac{1+ab}{1+a}=\frac{abc+ab}{1+a}=ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right)$$

$$\frac{1+bc}{1+b}=\frac{abc+bc}{1+b}=bc\left(\frac{1+a}{1+b}\right)$$

$$\frac{1+ac}{1+c}=\frac{abc+ac}{1+c}=ac\left(\frac{1+b}{1+c}\right).$$

Sumamos

$$ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right)+bc\left(\frac{1+a}{1+b}\right)+ac\left(\frac{1+b}{1+c}\right)\geq 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ac\left(\frac{1+c}{1+c}\right)\left(\frac{1+a}{1+a}\right)\left(\frac{1+b}{1+b}\right)}$$
$$ab\left(\frac{1+c}{1+a}\right)+bc\left(\frac{1+a}{1+b}\right)+ac\left(\frac{1+b}{1+c}\right)\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

pero $abc=1$, entonces

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3\sqrt[3]{1}=3.$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{1+ab}{1+a}\right)+\left(\frac{1+bc}{1+b}\right)+\left(\frac{1+ac}{1+c}\right)\geq 3.$$

Teorema 1.6.2
La media geométrica de números positivos es menor o igual que la media aritmética de estos mismos números. Si los números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ no son todos iguales, la media geométrica de estos números es menor que su media aritmética.

Demostración.

De la igualdad $g=\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$ se deduce que $1=\sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\cdot\frac{x_2}{g}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{g}}$, o sea, $\frac{x_1}{g}\cdot\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g}=1$.

Debido a que el producto de estos n números positivos es igual a 1, resulta (por el teorema 1.6.1) que la suma de los mismos es mayor o igual que n, es decir,

$$\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\ldots+\frac{x_n}{g}\geq n.$$

Multiplicando por g y dividiendo entre n ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos

$$a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq g.$$

Notemos que la igualdad se cumple sólo cuando

$$\frac{x_1}{g}=\frac{x_2}{g}=\ldots=\frac{x_n}{g}=1,$$

o sea, $x_1=x_2=\ldots=x_n=g$.

Por el contrario, si los números $x_1, x_2, \cdots, x_n$ no son todos iguales, se tiene

$$a>g.$$

Ejercicio 1.6.26
Encontrar las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo, si la suma de cualesquiera tres de sus aristas perpendiculares entre sí, es fija.

Solución.
Sea $m = a + b + c$ la suma de las aristas y sea $V = abc$ el volumen del paralelepípedo. Puesto que

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3}$$

tenemos $V \leq \frac{m^3}{27}$. La igualdad tiene lugar sólo si $a = b = c = \frac{m}{3}$, o sea, si el paralelepípedo es un cubo.

Ejercicio 1.6.27
Demostrar la desigualdad

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad (1.8)$$

con $n \geq 2$.

Solución.
Tenemos

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2},$$

de donde

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

Elevando a la n-ésima potencia ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos la desigualdad (1.8).

Definición.
El número

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

se denomina media potencial de grado α de los números $a_1, a_2, \cdots, a_n$. En particular el número

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

se denomina media cuadrática, y el número

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_4}},$$

se denomina media armónica de los números $a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n$.

Ejercicio 1.6.28
Demostrar que si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números positivos y si $\alpha < 0 < \beta$, se tiene

$$c_\alpha \le g \le c_\beta . \quad (1.9)$$

Donde g es la media geométrica.

Solución.
Debido a que la media geométrica de números positivos es menor o igual que la media aritmética, tenemos

$$g = \sqrt[n]{a_1^\alpha \cdot a_2^\alpha \cdot a_3^\alpha \cdot \ldots \cdot a_n^\alpha} \le \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} .$$

Elevando ambos miembros de la última desigualdad a la potencia $\frac{1}{\alpha}$ y tomando en consideración que $\frac{1}{\alpha} < 0$, obtenemos

$$g^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\sqrt[n]{a_1^\alpha \cdot a_2^\alpha \cdot a_3^\alpha \cdot \ldots \cdot a_n^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \ge \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_\alpha .$$

Con esto queda demostrada la primera de las desigualdades (6); la segunda se demuestra análogamente.
De la desigualdad (1.9) se deduce, en particular, que la media armónica c_{-1} es menor o igual que la media aritmética c_1.

Ejercicio 1.6.29
Demostrar que si $a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n$ son números positivos, se tiene

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) \ge n^2 .$$

Solución.
Puesto que $c_{-1} \le g \le c_1$, tenemos

$$c_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = c_1 .$$

De esta desigualdad se deduce que

$$n^2 \le (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Ejercicio 1.6.30
Demostrar la desigualdad

$$na_1 a_2 a_3 \ldots a_n \le a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n, \quad (1.10)$$

donde $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \cdots, a_n > 0$.

Solución.
Puesto que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética, tenemos

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = \sqrt[n]{a_1^n \cdot a_2^n \cdot a_3^n \cdot \ldots \cdot a^n} \le \frac{a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n}{n}.$$

Multiplicando por n ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos la afirmación.
En particular tenemos:

$$2a_1 a_2 \le a_1^2 + a_2^2$$
$$3a_1 a_2 a_3 \le a_1^3 + a_2^3 + a_3^3$$
$$4a_1 a_2 a_3 a_4 \le a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4.$$

1.7 El número *e*.

El número ***e*** desempeña un papel importante en las matemáticas. Daremos su definición después de resolver una serie de problemas en los que se aplica solamente que la media geométrica de números positivos es menor o igual que la media aritmética de estos mismos números.

Ejercicio 1.7.1
Demostrar que para cualesquiera números positivos a y b con $(a \ne b)$, es válida la desigualdad

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \le \frac{a + nb}{n+1}.$$

Solución.
Tenemos

$$\sqrt[n+1]{ab^n} = \sqrt[n+1]{a \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n-veces}} \le \frac{a + \overbrace{b + b + \cdots + b}^{n-veces}}{n+1} = \frac{a + nb}{n+1},$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejercicio 1.7.2
Demostrar que las sucesiones

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \text{ y } \{z_n\} = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

son crecientes, es decir, que

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1} \qquad \text{y} \qquad z_n < z_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Solución.

Tomando $a = 1$ y $b = 1+\frac{1}{n}$ en la desigualdad del ejercicio anterior, encontramos

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} &< \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \\ &= 1+\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Elevando ambos miembros de esta desigualdad a la potencia $(n+1)$ tenemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

o sea, $x_n < x_{n+1}$.

La segunda desigualdad se demuestra análogamente.

Ejercicio 1.7.3

Demostrar que $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ decrece a medida que aumenta n, o sea,

$$y_n > y_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Solución.

Tenemos

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}.$$

(Usamos la notación de la desigualdad anterior). Como z_n aumenta a medida que aumenta n, resulta que y_n decrece.

Hemos visto que

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots,$$

$$y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = 3.375 > y_3 > \ldots > y_n > \ldots$$

Por otra parte,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4.$$

Luego, la sucesión $\{x_n\}$ satisface dos condiciones:

1. Crece monótonamente a medida que aumenta n;
2. Es acotada $(2 < x_n < 4)$.

Entonces tiene límite, el cual tiene como valor al número e, o sea,

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Como $\{x_n\}$ es creciente, entonces

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e. \qquad (1.11)$$

Utilizando el ejemplo anterior veremos que $e < 3$. En efecto, para cualquier $n > 5$, tenemos

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 2.985984.$$

Por lo tanto, también $e = \lim_{n\to\infty} x_n \le 2.985984 < 3$.

El número e, al igual que el número π, desempeña un papel importante en matemáticas. Se emplea, por ejemplo, como base de los logaritmos denominados logaritmos naturales. El logaritmo del número N respecto a la base e se representa simbólicamente por $\ln N$.

Se sabe que los números e y π son irracionales. Cada uno ha sido ya calculado con un número muy grande de decimales; y se tiene que

$$e = 2.7182818285490\ldots$$

Demostraremos ahora que el límite de la sucesión $\{y_n\}$ es también igual a e. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= e1\\ &= e.\end{aligned}$$

Puesto que $\{y_n\}$ decrece a medida que se aproxima a $e,$ resulta que para cualquier n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e. \quad (1.12)$$

Ejercicio 1.7.4 Demostrar la desigualdad

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^{n}. \quad (1.13)$$

Solución.
Demostraremos la desigualdad aplicando el método de inducción matemática. Es fácil comprobarla para $1.$ En efecto,

$$1! = 1 > \left(\frac{1}{e}\right)^{1}.$$

Supongamos ahora que la desigualdad (1.13) se cumple para $n = k$, o sea,

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^{k}.$$

Consideramos $(k+1)!$, de donde

$$(k+1)! = (k+1)k!$$

Por hipótesis de inducción tenemos

$$
\begin{aligned}
(k+1)k! &> \left(\frac{k}{e}\right)^k (k+1) \\
&= \frac{k^k}{e^k}(k+1) \\
&= \frac{k^k e}{e^{k+1}}\left(\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)^k}\right) \\
&= \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{ek^k}{(k+1)^k} \\
&= \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{\frac{(k+1)^k}{k^k}} \\
&= \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}.
\end{aligned}
$$

Pero, según la desigualdad (1.11), tenemos

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$$

y, por eso,

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{e} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1},$$

es decir, hemos demostrado la desigualdad (1.13) para $n = k+1$.

Puesto que $e < 3$, de la desigualdad (1.13) se deduce que

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Empleando la última desigualdad es fácil demostrar que

$$300! > 100^{300}.$$

En efecto, tomando $n = 300$, obtenemos

$$300! > \left(\frac{300}{3}\right)^{300} = 100^{300}.$$

Ejercicio 1.7.5 Demostrar la desigualdad

$$n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Solución.

Demostraremos la desigualdad aplicando el método de inducción matemática. Es fácil comprobarla para 1. En efecto,

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ &< e\left(\frac{1+1}{e}\right)^2 \\ &= \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que la desigualdad se cumple para $n = k$, o sea,

$$k! < e\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}.$$

Consideramos $(k+1)!$, de donde

$$(k+1)! = (k+1)k!$$

Por hipótesis de inducción tenemos

$$\begin{aligned} (k+1)k! &< e\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}(k+1) \\ &= e\frac{(k+1)^{k+1}}{e^{k+1}e}\frac{e(k+2)^{k+2}}{(k+2)^{k+2}}(k+1) \\ &= e\frac{(k+2)^{k+2}}{e^{k+2}}e\frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+2}} \\ &= e\frac{(k+2)^{k+2}}{e^{k+2}}e\frac{1}{\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+2}} \\ &= e\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+2}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad (1.12)

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+2} > e.$$

De donde

$$(k+1)k! < e\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+2}.$$

Por lo tanto, la desigualdad queda demostrada.

1.8 Desigualdad de Bernoulli.

En esta sección demostraremos, apoyándonos en la desigualdad 1.7, la desigualdad de Bernoulli, que tiene interés por sí sola y se aplica frecuentemente en la solución de problemas.

Teorema 1.8

Si $x \geq -1$ y $0 < \alpha < 1$, entonces

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x . \qquad (1.14)$$

En cambio, si $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, se tiene

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x . \qquad (1.15)$$

La igualdad en (1.14) y (1.15) se cumple sólo para $x = 0$.

Demostración.

Supongamos que α es un número racional con la particularidad de que $0 < \alpha < 1$. Sea $\alpha = \frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros positivos y $1 \leq m < n$. Debido a que $1+x \geq 0$ por hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= (1+x)^{\frac{m}{n}} \\
&= \sqrt[n]{(1+x)^m 1^{n-m}} \\
&= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\ldots(1+x)}_{m-veces}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{n-m\ veces}} \\
&\leq \frac{(1+x)+(1+x)+(1+x)+\ldots+(1+x)+1+1+\ldots+1}{n} \\
&= \frac{m(1+x)+n-m}{n} \\
&= \frac{n+mx}{n} \\
&= 1+\frac{m}{n}x \\
&= 1+\alpha x.
\end{aligned}$$

La igualdad tiene lugar sólo si todos los factores que figuran debajo del radical son iguales, o sea si $1+x=1$, $x=0$.

En cambio, si $x \neq 0$, tenemos

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x .$$

Es decir, se ha demostrado la primera parte del teorema para el caso en que α es un número racional.

Supongamos ahora que $0<\alpha<1$, es un número irracional. Sea $r_1, r_2, \ldots, r_n$, una sucesión de números racionales que tiene α como límite con la particularidad de que $0<r_n<1$. De las desigualdades

$$(1+x)^{r_n} \le 1+r_n x, \quad x \ge -1,\ n=1,2,3,\ldots$$

demostradas ya para el caso en que el exponente es un número racional, se deduce que

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{r_n\to\alpha}(1+x)^{r_n} \le \lim_{r_n\to\alpha}(1+r_n x) = 1+\alpha x .$$

Con esto la desigualdad (1.14) queda demostrada también para los valores irracionales de α. Resta demostrar que para valores irracionales de α, siendo $0<\alpha<1$, y $x\ne 0$, se tiene

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x,$$

o sea, que el signo de igualdad no tiene lugar en (1.14) si $x\ne 0$. Con este fin tomemos un número racional r tal que $\alpha<r<1$. Es evidente que

$$(1+x)^{\alpha} = \left((1+x)^{\frac{\alpha}{r}}\right)^{r}.$$

Puesto que $0<\dfrac{\alpha}{r}<1$, resulta, según hemos demostrado, que

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \le 1+\frac{\alpha}{r}x .$$

Por consiguiente

$$(1+x)^{\alpha} \le \left(1+\frac{\alpha}{r}x\right)^{r}.$$

Si $x\ne 0$, tenemos

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}x\right)^{r} < 1+r\frac{\alpha}{r}x = 1+\alpha x,$$

o sea,

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x .$$

Con esto queda completada la demostración de la primera parte del teorema.

Pasamos a la demostración de la segunda parte del teorema, la desigualdad (1.15).

Si $1+\alpha x<0$, la desigualdad (1.15) es evidente, pues su primer miembro es no negativo, mientras que el segundo es negativo.

Si $1+\alpha x\geq 0$, o sea $\alpha x\geq -1$, consideraremos por separado cada uno de los casos.

Sea $\alpha>1$, entonces según la primera parte del teorema, ya demostrada, tenemos

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}\leq 1+\frac{1}{\alpha}\alpha x=1+x$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar sólo si $x=0$. Elevando a la potencia α ambos miembros de la desigualdad, obtenemos

$$(1+\alpha x)\leq (1+x)^{\alpha}.$$

Sea ahora $\alpha<0$.

Si $1+\alpha x<0$, la desigualdad (1.15) se hace evidente.

Si $1+\alpha x\geq 0$, tomemos un número entero positivo n de modo que se cumpla la desigualdad

$$0<-\frac{\alpha}{n}<1.$$

En virtud de la primera parte del teorema, tenemos

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}}\leq 1-\frac{\alpha}{n}x,$$

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}}\geq \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x}\geq 1+\frac{\alpha}{n}x,$$

esta desigualdad es válida porque

$$1\geq 1-\frac{\alpha^2}{n^2}x^2.$$

Como $1+\alpha x\geq 0$ entonces

$$x \le -\frac{1}{\alpha}$$
$$\frac{x}{n} \le -\frac{1}{n\alpha}$$
$$\frac{\alpha x}{n} \ge -\frac{1}{n} \ge -1.$$

De donde, considerando

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \ge 1+\frac{\alpha}{n}x\,.$$

Elevando a la n-ésima potencia ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos, por 1.14 que

$$(1+x)^{\alpha} \ge \left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n} \ge 1+n\frac{\alpha}{n}x = 1+\alpha x\,.$$

Notemos que la igualdad puede darse sólo en el caso $x=0$. Con esto queda demostrado completamente el teorema.

Ejercicio 1.8.1
Demostrar que para $0>\alpha>-1$, con $n\in N$ se tiene

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,. \qquad (1.15)$$

Solución.
Puesto que $0<\alpha+1<1$, tenemos en virtud de la desigualdad (1.14)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1+\frac{\alpha+1}{n}.$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1-\frac{\alpha+1}{n}.$$

Multiplicando estas desigualdades por $n^{\alpha+1}$, obtenemos

$$(n+1)^{\alpha+1} < \left(1+\frac{\alpha+1}{n}\right)n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}+(\alpha+1)n^{\alpha}$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < \left(1-\frac{\alpha+1}{n}\right)n^{\alpha+1} = n^{\alpha+1}-(\alpha+1)n^{\alpha}\,,$$

así

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}<n^{\alpha}$$

y

$$n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

De donde se deducen las desigualdades

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}<n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Ejercicio 1.8.2

Demostrar que para $-1<\alpha<0$, con $n>m$ se tiene

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}<m^{\alpha}+(m+1)^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \qquad (1.16)$$

Solución.

Tomando en las desigualdades (1.15) $m, m+1, \ldots, n$ obtenemos

$$\frac{(m+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}<m^{\alpha}<\frac{m^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\frac{(m+2)^{\alpha+1}-(m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}<(m+1)^{\alpha}<\frac{(m+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$\frac{(m+3)^{\alpha+1}-(m+2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}<(m+2)^{\alpha}<\frac{(m+2)^{\alpha+1}-(m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$\vdots,$

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1}<n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1}<m^{\alpha}+(m+1)^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha}<\frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

1.9 Media potencial.

La función

$$c_{\alpha}=\left(\frac{a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}+a_3^{\alpha}+\ldots+a_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

se denomina media potencial de grado α de los números positivos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$.

Ahora demostraremos que la desigualdad

$$c_\alpha \le c_\beta$$

es válida siempre que $\alpha < \beta$. En otras palabras, la media potencial de grado α crece monótonamente a medida que aumenta α.

Teorema 1.9
Si $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, son números positivos y $\alpha < \beta$, se tiene $c_\alpha \le c_\beta$ con la particularidad de que $c_\alpha = c_\beta$ sólo si $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Demostración.
El teorema ha sido ya demostrado para el caso en que los números α y β tienen signos opuestos, ahora lo probaremos si α y β son del mismo signo.

Supongamos que $0 < \alpha < \beta$ y pongamos

$$k = c_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + a_3^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dividiendo c_β entre k, encontramos

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta + \left(\frac{a_3}{k}\right)^\beta + \ldots + \left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Tomando ahora

$$d_1 = \left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha,\ d_2 = \left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha,\ d_3 = \left(\frac{a_3}{k}\right)^\alpha, \ldots, d_n = \left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha.$$

Obtenemos

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_3^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \qquad (1.17)$$

Puesto que

$$\left(\frac{d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a_2}{k}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a_3}{k}\right)^{\alpha}+\ldots+\left(\frac{a_n}{k}\right)^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{a_1^{\ \alpha}+a_2^{\ \alpha}+a_3^{\ \alpha}+\ldots+a_n^{\ \alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\frac{1}{k}c_\alpha$$

$$=\frac{1}{c_\alpha}c_\alpha$$

$$=1,$$

entonces tenemos que

$$\frac{d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n}{n}=1\ ,$$

o sea,

$$d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n=n\,.$$

Pongamos

$$d_1=1+x_1,\ d_2=1+x_2,\ d_3=1+x_3,\ldots,d_n=1+x_n\,.$$

De la igualdad

$$d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n=n\,,$$

se deduce que

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=0.$$

En virtud del teorema 1.8 y de que $\frac{\beta}{\alpha}>1$ tenemos

$$*\begin{cases} d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq 1+\frac{\beta}{\alpha}x_1 \\ d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq 1+\frac{\beta}{\alpha}x_2 \\ d_3^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_3)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq 1+\frac{\beta}{\alpha}x_3 \\ \ldots \\ d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}=(1+x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}\geq 1+\frac{\beta}{\alpha}x_n. \end{cases}$$

Sumamos estas desigualdades, obtenemos

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_3^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geq n + \frac{\beta}{\alpha}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n\right) = n \ . \qquad (1.18)$$

De (1.17) y (1.18) se deduce que

$$\frac{c_\beta}{k} \geq \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1, \text{ o sea, } c_\beta \geq k = c_\alpha .$$

Notemos que $c_\beta = k = c_\alpha$ sólo si en todas las desigualdades (*) tiene lugar el signo de igualdad, es decir, si $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ (teorema 1.8). En este caso, se tiene $d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n = 1$ y, por consiguiente, $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = k$. En cambio, si los números $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ no son iguales, se tiene

$$c_\beta > c_\alpha .$$

Con esto, el teorema queda demostrado para el caso en que $0 < \alpha < \beta$.

Si $\alpha < \beta < 0$, tenemos $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$. Repitiendo los razonamientos anteriores, obtendremos en (*) y (1.18) signos de desigualdad opuestos. Pero como $\beta < 0$, de la desigualdad

$$\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_3^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leq 1,$$

se deduce que

$$\frac{c_\beta}{k} = \left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_3^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq 1^{\frac{1}{\beta}} = 1,$$

es decir,

$$c_\beta \geq k = c_\alpha .$$

Con esto el teorema queda demostrado.

En lo que sigue la media geométrica será denominada media potencial de grado cero, o sea, se tomará $g = c_0$.

Notemos que el teorema 1.9 también es válido en este caso, ya que, $c_\alpha \leq g = c_0$ si $\alpha < 0$, y $c_\beta \geq g = c_0$ si $\beta > 0$.

Del teorema demostrado se deduce, en particular, que

$$c_{-1} \leq c_0 \leq c_1 \leq c_2 .$$

Es decir, la media armónica menor o igual que la media geométrica, la media geométrica menor o igual que la media aritmética, y la media aritmética no supera a la media cuadrática de números positivos. Por ejemplo, si $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ y $a_3 = 4$, se tiene

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1}}{3} \right)^{-1} = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7} \approx 1.7$$

$$c_0 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = 2$$

$$c_1 = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.3...$$

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1+4+16}{3}} = \sqrt[2]{7} \approx 2.6$$

y, por consiguiente,

$$c_{-1} = 1.7... < 2 = c_0 < 2.3... = c_1 < 2.6 = c_2 .$$

Ejercicio 1.9.1

Demostrar que si $x, y, z \geq 0$ entonces $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ con $x + y + z = 6$.

Solución.

Puesto que la media aritmética es menor o igual a la media cuadrática, tenemos

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

es decir,

$$\left(\frac{x+y+z}{3} \right)^2 \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{6^2}{3} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$12 \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

El signo de igualdad tiene lugar sólo si $x = y = z = 2$.

Ejercicio 1.9.2

Demostrar que siendo x, y y z números positivos y $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, se tiene que $x^3 + y^3 + z^3 \geq 16\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Solución.
Debido a que $c_2 \le c_3$, tenemos

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En nuestro caso resulta

$$\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \ge \sqrt{\frac{8}{3}},$$

es decir,

$$x^3+y^3+z^3 \ge 3\left(\frac{8}{3}\right)\sqrt{\frac{8}{3}} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ejercicio 1.9.3
Demostrar que para los números positivos $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, se cumplen las desigualdades

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^\alpha \le n^{\alpha-1}\left(a_1^\alpha+a_2^\alpha+a_3^\alpha+\cdots+a_n^\alpha\right),\ \alpha \ge 1 \quad (1.19)$$

y

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^\alpha \ge n^{\alpha-1}\left(a_1^\alpha+a_2^\alpha+a_3^\alpha+\cdots+a_n^\alpha\right),\ 0<\alpha \le 1. \quad (1.20)$$

Solución.
Si $\alpha > 1$, tenemos

$$c_1 = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \le \left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+a_3^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_\alpha.$$

De donde

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\right)^\alpha \le \frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+a_3^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}$$

$$\frac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^\alpha}{n^\alpha} \le \frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+a_3^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}$$

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^\alpha \le n^{\alpha-1}\left(a_1^\alpha+a_2^\alpha+a_3^\alpha+\ldots+a_n^\alpha\right).$$

De la misma forma se demuestra la desigualdad (1.20).
En particular, de las desigualdades (1.19) y (1.20) resulta que

$$(x+y)^\alpha \le 2^{\alpha-1}\left(x^\alpha+y^\alpha\right),\ \alpha \ge 1 \quad x>0 \quad y>0.$$

$$(x+y)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}(x^{\alpha}+y^{\alpha}),\ 0<\alpha<1 \quad x>0 \quad y>0.$$

Ejercicio 1.9.4

Demostrar que si $x^3+y^3+z^3=81,\ \ x>0,\ \ y>0,\ \ z>0$, se tiene

$$x+y+z \leq 9.$$

Solución.

Puesto que

$$(x+y+z)^3 \leq 3^2(x^3+y^3+z^3)=9\cdot 81=729,$$

de donde

$$x+y+z \leq \sqrt[3]{729}=9.$$

1.10 Una desigualdad útil.

Revisemos dos identidades algebraicas muy útiles que se pueden deducir al considerar un factor especial de $a^3+b^3+c^3-3abc$.

Sea P el polinomio con raíces a, b y c, es decir,

$$P(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Como a, b, c satisfacen la ecuación $P(x)=0,$ se obtiene

$$\begin{aligned} a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0 \\ b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0 \\ c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0. \end{aligned}$$

Sumando estas tres igualdades se tiene que

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)-3abc=0,$$

de donde

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

La identidad anterior implica el siguiente resultado si $a+b+c=0$, entonces $a^3+b^3+c^3=3abc$.

También tenemos que la expresión

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$$

Puede ser escrita

$$. a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

De esta forma, obtenemos otra versión para

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

que es

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right].$$

Esta presentación de la identidad implica una demostración más corta de la desigualdad Media Geométrica - Media Aritmética para tres variables. De la igualdad anterior, es claro que si a, b, c son números positivos, entonces $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Ahora si x, y, z son números positivos tomamos

$$a = \sqrt[3]{x}\ ,\ b = \sqrt[3]{y}\ \text{ y }\ c = \sqrt[3]{z}\ .$$

Podemos deducir que

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}\ .$$

Y se da la igualdad si y sólo si $x = y = z$.

Capítulo II

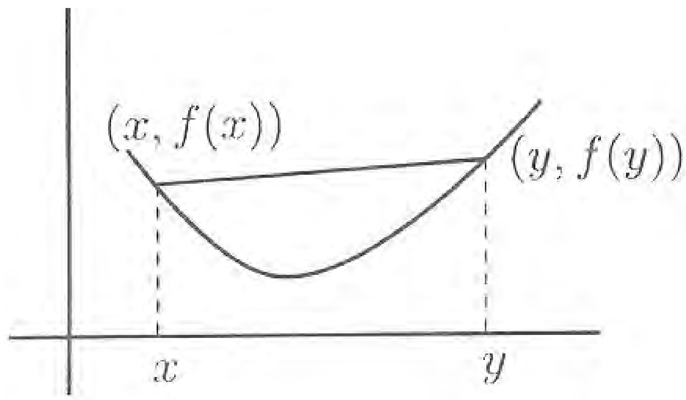
2.1 Funciones Convexas.

Definición 2.1.1

Una función $f:[a,b]\to\Re$ es convexa en el intervalo $I=[a,b]$, si para cada $t\in[0,1]$ y para cualesquiera $x,y\in[a,b]$ tal que $a\le x<y\le b$ se tiene la desigualdad

$$f(ty+(1-t)x)\le tf(y)+(1-t)f(x). \qquad (2.1)$$

Geométricamente, la desigualdad anterior se interpreta diciendo que la gráfica de f entre x, y queda por debajo del segmento que une a los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.



En efecto, la ecuación de la recta que pasa por $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ es

$$L(s)= f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(s-x).$$

Por lo tanto evaluando en $s=ty+(1-t)x$, con $x\neq y$ se tiene:

$$\begin{aligned}
L(ty+(1-t)x) &= f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(ty+(1-t)x-x)\\
&= f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(ty+x-tx-x)\\
&= f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(ty-tx)\\
&= f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}t(y-x)\\
&= f(x)+(f(y)-f(x))\\
&= tf(y)+(1-t)f(x).
\end{aligned}$$

Así:

$$f(ty+(1-t)x)\le tf(y)+(1-\lambda)t(x) \ = L(ty+(1-t)x).$$

Proposición 2.1.1
Si f es convexa en el intervalo $[a,b]$ entonces es convexa en cualquier subintervalo $[x,y]\subset[a,b]$.

Demostración.
Es inmediata de la definición.

Proposición 2.1.2
Si f es convexa en el intervalo $[a,b]$, entonces para cualesquiera $x,y\in[a,b]$ se tiene que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right) \qquad (2.2)$$

Demostración.
Basta tomar $t=\frac{1}{2}$ en (2.1) para que

$$f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)\leq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right).$$

Así:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right).$$

2.2 Desigualdad de Jensen.
Proposición 2.1.3
(Desigualdad de Jensen) Si f es convexa en el intervalo $[a,b]$, entonces para cualesquiera $t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$ y $x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$, se tiene que:

$$f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\leq t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n).$$

Demostración.
Por inducción sobre n:

Que el resultado es válido para $n=2$, se sigue inmediatamente de la definición de convexidad.

Supongamos que es cierto para $n=k$, es decir:

$$f(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)\leq t_1f(x_1)+\cdots+t_kf(x_k).$$

Probaremos que se cumple para $n=k+1$:

$$
\begin{aligned}
f\left(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_{k+1}x_{k+1}\right) &= f\left(\left(1-t_{k+1}\right)\left[\frac{t_1}{1-t_{k+1}}x_1+\frac{t_2}{1-t_{k+1}}x_2+\cdots+\frac{t_k}{1-t_{k+1}}x_k\right]+t_{k+1}x_{k+1}\right)\\
&\leq \left(1-t_{k+1}\right)f\left(\frac{t_1}{1-t_{k+1}}x_1+\frac{t_2}{1-t_{k+1}}x_2+\cdots+\frac{t_k}{1-t_{k+1}}x_k\right)+t_{k+1}f\left(x_{k+1}\right)\\
&\leq \left(1-t_{k+1}\right)\left(\frac{t_1}{1-t_{k+1}}f\left(x_1\right)+\frac{t_2}{1-t_{k+1}}f\left(x_2\right)+\cdots+\frac{t_k}{1-t_{k+1}}f\left(x_{n-1}\right)\right)+t_{k+1}f\left(x_{k+1}\right)\\
&= t_1f\left(x_1\right)+\cdots+t_nf\left(x_n\right)
\end{aligned}
$$

Proposición 2.1.4
Bajo las hipótesis del teorema anterior, en particular, para $x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$ se tiene:

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\left(f\left(x_1\right)+\cdots+f\left(x_n\right)\right).$$

Demostración.

Basta aplicar la proposición 2.1.3 con $t_1,\cdots,t_n=\frac{1}{n}$.

Observaciones 2.1.1
$i)$ Podemos ver que para $x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\left(f\left(x_1\right)+\cdots+f\left(x_n\right)\right)$$

es válida bajo la única suposición de que f satisfaga $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$, para cualesquiera $a,b\in[a,b]$.

Demostración.
Haremos la prueba por inducción.
Llamemos P_n a la afirmación

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}\left(f\left(x_1\right)+\cdots+f\left(x_n\right)\right) \text{ para } x_1,\ldots,x_n\in[a,b].$$

Es claro que son válidas las afirmaciones P_1 y P_2.
Para demostrar que $P_n\Rightarrow P_{n+1}$, probaremos que $P_n\Rightarrow P_{n-1}$ y $P_n\Rightarrow P_{2n}$.
Para la primera
Sean $x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$ y $y=\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$, entonces por ser cierto P_n tenemos:

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y}{n}\right)\leq\frac{1}{n}f\left(x_1\right)+\cdots+\frac{1}{n}f\left(x_{n-1}\right)+\frac{1}{n}f(y).$$

Pero el lado izquierdo de la desigualdad es:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y}{n}\right) &= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+\dfrac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)\\
&= f\left(\frac{\dfrac{(n-1)(x_1+\cdots+x_{n-1})+x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)\\
&= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)\\
&= f(y).
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$f(y)\leq \frac{1}{n}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+f(y)\right),$$

de donde:

$$
\begin{aligned}
nf(y) &\leq f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+f(y)\\
(n-1)f(y) &\leq f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\\
f(y) &\leq \frac{1}{(n-1)}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\right)
\end{aligned}
$$

y P_{n-1} se cumple.

Finalmente veremos que $P_n \Rightarrow P_{2n}$:

Sea

$$D = f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

donde

$$u=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \quad \text{y} \quad v=\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}.$$

Como

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)\leq \frac{1}{2}\left(f(u)+f(v)\right),$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
D &\leq \frac{1}{2}\left(f(u)+f(v)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{2n}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2n})\right),$$

para la última desigualdad hemos usado dos veces la afirmación P_n.

ii) Para cualesquiera $t_1,\ldots,t_n$ números racionales en $[0,1]$, con $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ y para $x_1,\ldots,x_n \in [a,b]$ se tiene $f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n) \leq t_1 f(x_1)+\cdots+t_n f(x_n)$, bajo la única suposición de que f satisfaga $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, para cualesquiera $x, y \in [a,b]$.

Demostración.

De la observación anterior tenemos:

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right) \text{ para } x_1,\ldots,x_n \in [a,b] \text{ y } n \in N.$$

Sean:

$$t_1 = \frac{r_1}{s_1}, \ldots, t_n = \frac{r_n}{s_n},$$

números racionales en $[0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Si m es el mínimo común múltiplo de los s_i, entonces $t_i = \frac{p_i}{m}$ con $p_i \in N$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = m$, luego:

$$\begin{aligned}
f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n) &= f\left(\frac{p_1}{m}x_1+\cdots+\frac{p_n}{m}x_n\right) \\
&= f\left(\frac{1}{m}\left[\underbrace{(x_1+\cdots+x_1)}_{P_1-\text{términos}}+\cdots+\underbrace{(x_n+\cdots+x_n)}_{P_n-\text{términos}}\right]\right) \\
&\leq \frac{1}{m}\left(\underbrace{(f(x_1)+\cdots+f(x_1))}_{P_1-\text{términos}}+\cdots+\underbrace{f(x_n)+\cdots+f(x_n)}_{P_n-\text{términos}}\right) \\
&= \frac{p_1}{m}f(x_1)+\cdots+\frac{p_n}{m}f(x_n) \\
&= t_1 f(x_1)+\cdots+t_n f(x_n).
\end{aligned}$$

Proposición 2.1.5

Si f es una función continua en $[a,b]$ y cumple $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$, entonces f es convexa.

Demostración.

Por la observación ii) anterior, tenemos que

$$f\left(qx+(1-q)y\right)\leq qf(x)+(1-q)f(y)$$

para cualesquiera $x,y\in[a,b]$ y $q\in[0,1]$ racional. Como cualquier real t se puede aproximar por una sucesión de racionales, tomamos $\{q_n\}$, la sucesión de números racionales en $[0,1]$ que aproxima a q, entonces

$$f\left(q_n x+(1-q_n)y\right)\leq q_n f(x)+(1-q_n)f(y)$$

Ahora, la continuidad de f nos garantiza, al tomar el límite, que

$$f\left(qx+(1-q)y\right)\leq qf(x)+(1-q)f(y)$$

Definición 2.1.2

Decimos $f:[a,b]\to\Re$ es cóncava en $[a,b]$ si $-f$ es convexa en $[a,b]$.

Observación 2.1.2

Una función f es cóncava en $[a,b]$ si y solo si $f\left(ty+(1-t)x\right)\geq tf(y)+(1-t)f(x)$, para $t\in[0,1]$ y $a\leq x<y\leq b.$

2.3 Algunos criterios para decidir si una función es convexa.

Definición 2.2.1 Un subconjunto C del plano es convexo si para cada par de puntos A,B en C se tiene que el segmento de recta que éstos determinan está contenido en C. Es decir, si $t\in[0,1]$ $tB+(1-t)A\in C.$

Teorema 2.2.1

Una función $f:[a,b]\to\Re$ es convexa si y sólo si el conjunto $\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ f(x)\leq y\}$ es convexo.

Demostración.

$\Rightarrow)$ Supongamos que f es convexa y sean $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$ dos puntos del conjunto

$$U=\{(x,y)/\,x[a,b],\ f(x)\leq y\}.$$

Por demostrar que:

$$tB+(1-t)A=t(x_2,y_2)+(1-t)(x_1,y_1)=\left(tx_2+(1-t)x_1,ty_2+(1-t)y_1\right)\in U.$$

Es decir,

$$a\leq tx_2+(1-t)x_1\leq b \text{ y } f\left(tx_2+(1-t)x_1\right)\leq ty_2+(1-t)y_1.$$

La primera condición es inmediata ya que x_1 y x_2 son elementos de $[a,b]$. Para la segunda, como f es convexa se tiene que:

$$f\left(tx_2+(1-t)x_1\right)\leq tf(x_2)+(1-t)f(x_1),$$

pero como $f(x_2)\leq y_2$ y $f(x_1)\leq y_1$ tenemos

$$f\left(tx_2+(1-t)x_1\right)\leq ty_2+(1-t)y_1$$

$\Leftarrow)$

Si U es convexo entonces f es convexa.

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ y $A = (x_1,\ f(x_1)) \in U$, $B = (x_2,\ f(y_2)) \in U$.

Como U convexo entonces $tB + (1-t)A \in U$ para todo $t \in [0,1]$, esto es :

$$(tx_2, tf(x_2)) + ((1-t)x_1, (1-t)f(x_1)) = (tx_2 + (1-t)x_1, tf(x_2) + (1-t)f(x_1)) \in U$$

y por la definición de U ,

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1).$$

Es decir, f es una función convexa en $[a,b]$.

Teorema 2.2.2

Una función $f : [a,b] \to \Re$ es convexa si y sólo si para cada punto $x_0 \in [a,b]$ se cumple que la función $P(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ es no-decreciente para $x \neq x_0$.

Demostración.

Supongamos que f es convexa, por demostrar que $P(x)$ es no-decreciente.

Tomemos $x < y$ demostraremos que $P(x) \leq P(y)$.

Podemos tener tres situaciones $x_0 < x < y$, $x < x_0 < y$ ó $x < y < x_0$.

Veamos la primera situación, las otras dos se demuestran de manera similar.

$P(x) \leq P(y)$ si y sólo si

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

$$(f(x) - f(x_0))(y - x_0) \leq (f(y) - f(x_0))(x - x_0)$$

$$(f(x))(y - x_0) \leq f(y)(x - x_0) - f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)(y - x_0)$$

$$f(x)(y - x_0) \leq f(y)(x - x_0) + f(x_0)(y - x)$$

$$f(x) \leq f(y)\frac{x - x_0}{y - x_0} + f(x_0)\frac{y - x}{y - x_0}.$$

Lo cual puede escribirse como:

$$f\left(\frac{x - x_0}{y - x_0}y + \frac{y - x}{y - x_0}x_0\right) \leq f(y)\frac{(x - x_0)}{(y - x_0)} + f(x_0)\frac{(y - x)}{(y - x_0)}.$$

Tomemos $\lambda = \dfrac{(x - x_0)}{(y - x_0)}$, entonces $(1 - \lambda) = \dfrac{(y - x)}{(y - x_0)}$.

Así, la última desigualdad se escribe:

$$f(\lambda y + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x_0),$$

La cual se cumple por ser f convexa.

Teorema 2.2.3

Sea $f:[a,b]\to\Re$ dos veces derivable con derivada no decreciente, entonces f es convexa. En particular, si $f''(x)\geq 0$ entonces la función es convexa.

Demostración.
$f''(x)\geq 0$, para $x\in[a,b]$, garantiza que $f'(x)$ es no decreciente.
Veremos que si $f'(x)$ es no decreciente entonces la función es convexa.

Para eso, recordamos el siguiente:

// Teorema del valor medio. Sea $f:[a,b]\to\Re$ una función continua en $[a,b]$, es derivable en (a,b). Existe un número $x\in(a,b)$ tal que $f'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ //

Sea $x=tb+(1-t)a$, un punto en $[a,b]$. Por el teorema del valor medio existen $c\in(a,x)$ y $d\in(x,b)$ tales que

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{y} \quad f'(d)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x},$$

Es decir,

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(c) \quad \text{y} \quad f(b)-f(x)=(b-x)f'(d) \ .$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} x &= tb+(1-t)a \\ &= tb+a-ta \\ x-a &= t(b-a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x &= tb+(1-t)a \\ x &= tb+a-ta \\ -x &= -tb-a+ta \\ b-x &= b-tb-a+ta \\ &= b-a-t(b-a) \\ &= (1-t)(b-a) \end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos:

$$f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)=t(b-a)f'(c) \quad \text{y}$$
$$f(b)-f(x)=(b-x)f'(d)=(1-t)(b-a)f'(d).$$

y como $f'(x)$ es no decreciente tenemos:

$$(1-t)(f(x)-f(a))=t(1-t)(b-a)f'(c)\leq t(1-t)(b-a)f'(d)=t(f(b)-f(x)).$$

Es decir:

$$(1-t)(f(x)-f(a))\leq t(f(b)-f(x))$$

y reacomodando se tiene:

$$f(x) \leq tf(b) + (1-t)f(a).$$

Por último, sustituyendo x, se tiene que:

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + (1-t)f(a)$$

y f es convexa.

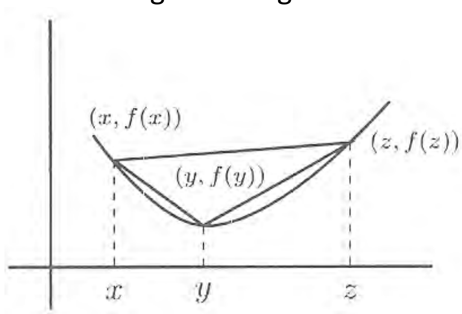
2.4 Interpretación geométrica de la convexidad y la concavidad.

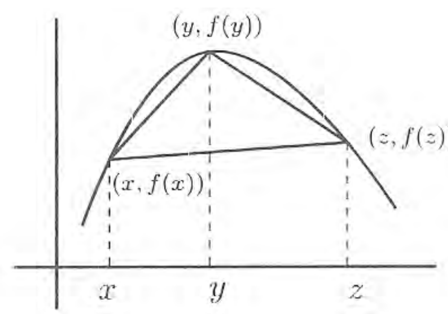
Sean $x, y, z \in [a,b]$ con $x < y < z$. Si los vértices de un triángulo ABC tienen coordenadas $A = (x, f(x))$, $B = (y, f(y))$ y $C = (z, f(z))$, entonces el área del triángulo es el valor absoluto del determinante:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix}$$

El valor de Δ dependerá de el orden en el que elegimos los vértices del triángulo ABC. Es decir, si se recorre en sentido positivo (contrario al movimiento de las manecillas del reloj) o en sentido negativo.

Si la función es convexa tendremos $\Delta > 0$ y para una función cóncava $\Delta < 0$. Consideremos las gráficas siguientes.





En efecto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y)-f(x) \\ 0 & z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix}$$

Entonces $\Delta > 0$ si y sólo si el último determinante es cero, pero:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & y-x & f(y)-f(x) \\ 0 & z-x & f(z)-f(x) \end{vmatrix} = (y-x)(f(z)-f(x)) - (z-x)(f(y)-f(x)),$$

es decir, $\Delta > 0$ si y sólo si

$$
\begin{aligned}
(y-x)(f(z)-f(x))-(z-x)(f(y)-f(x)) &> 0\\
yf(z)-xf(z)-yf(x)+xf(x)-zf(y)+xf(y)+zf(x)-xf(x) &> 0\\
(z-y)f(x)+(y-x)f(z)+(x-z)f(y) &> 0\\
\frac{z-y}{z-x}f(x)+\frac{y-x}{z-x}f(z) &> f(y).
\end{aligned}
$$

Si tomamos $t=\dfrac{y-x}{z-x}$ tenemos que:

$$0<t<1 \quad \text{y} \quad 1-t=\frac{z-y}{z-x}$$

Además, $y=tz+(1-t)x$ y entonces:

$$f(y)=f(tz+(1-t)x)\le tf(z)+(1-t)f(x).$$

Ejemplo 2.3.1

La función $f(x)=x^2$ es convexa.

Solución.

En efecto:

Para que la función sea convexa, debe cumplirse:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),\ \forall\lambda\in[0,1] \text{ y } \forall\ x_1,x_2\in\Re.$$

Probaremos que:

$$0\le \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

Es decir:

$$\lambda x_1{}^2+(1-\lambda)x_2{}^2-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)^2\ge 0$$

Pero la desigualdad se cumple si y sólo si:

$$
\begin{aligned}
\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2-\lambda^2x_1^2-(1-\lambda)^2x_2^2-2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 &\ge 0\\
x_1^2\left[\lambda-\lambda^2\right]+x_2^2\left[(1-\lambda)-(1-\lambda)^2\right]-2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 &\ge 0\\
\lambda(1-\lambda)x_1^2+(1-\lambda)\lambda x_2^2-2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 &\ge 0\\
\lambda(1-\lambda)\left[x_1{}^2-2x_1x_2+x_2{}^2\right] &\ge 0\\
\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Por supuesto, la última desigualdad es cierta.

Teorema 2.3.1

$f:I\to\Re$ convexa y sean $x,y,z\in I$, tal que $x<z<y$ entonces

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Demostración.
Escribimos

$$z = \left(\frac{y-z}{y-x}\right)x + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)y.$$

Puesto que $x < z < y$, se sigue que:

$$0 < \frac{y-z}{y-x} < 1 \quad \text{y} \quad 0 < \frac{z-x}{y-x} < 1.$$

Llamamos $\lambda = \dfrac{y-z}{y-x}$ entonces $1-\lambda = \dfrac{z-x}{y-x}$.

Entonces $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

Como f convexa tenemos:

$$f(z) = f\left(\left(\frac{y-z}{y-x}\right)x + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)y\right) \leq \left(\frac{y-z}{y-x}\right)f(x) + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)f(y).$$

De donde:

$$f(z) \leq \lambda f(x) + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)f(y)$$

$$f(z) - f(x) \leq -f(x) + \lambda f(x) + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)f(y)$$

$$f(z) - f(x) \leq -f(x)(1-\lambda) + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)f(y)$$

$$f(z) - f(x) \leq -\left(\frac{z-x}{y-x}\right)f(x) + \left(\frac{z-x}{y-x}\right)f(y)$$

$$f(z) - f(x) \leq \left(\frac{z-x}{y-x}\right)(f(y) - f(x)).$$

Entonces:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

La otra parte desigualdad se demuestra de manera análoga.

Teorema 2.3.2.
Sea $f : I \to \Re$, convexa entonces f posee derivada izquierda y derivada derecha en cada punto cada punto interior $c \in I$.

Demostración.

Sean $x, y \in I$ tales que $x < c < y$.

Por el teorema 2.2.2 tenemos que $g(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ es creciente y

$$g(x) \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c}$$

Entonces

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existe y

$$f_-^{'}(c) \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c},$$

Ahora, haciendo tender y a c tenemos que $f_+^{'}(c)$ existe y $f_-^{'}(c) \leq f_+^{'}(c)$.

Teorema 2.3.3

Supongamos que $f : I \to \Re$ es una función derivable, entonces f es convexa si y sólo si f' es creciente.

Demostración.

$\Rightarrow)$

Sean $a, b \in I$ y $a < b$

Puesto que f es derivable y convexa, entonces:

$$\begin{aligned} f´(a) &= \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &\leq \lim_{x \to b_-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \\ &= f´(b), \end{aligned}$$

de donde:

$$f´(a) \leq f´(b)$$

y $f´$ es creciente.

$\Leftarrow)$

Supongamos que $f´$ es creciente y sean $a, b \in I$ tales que $a < b$ y $\lambda, \mu > 0, \lambda + \mu = 1$. Puesto que $I = [a, b]$ y la función f es derivable en I, entonces por el teorema del Valor medio a f en los intervalos $[a, \lambda a + \mu b]$ y $[\lambda a + \mu b, b]$, existen c, d tales que

$$a < c < \lambda a + \mu b < d < b$$

y

$$\frac{f(\lambda a+\mu b)-f(a)}{\lambda a+\mu b-a}=f'(c),\ f'(d)=\frac{f(b)-f(\lambda a+\mu b)}{b-\lambda a+\mu b},$$

pero como por hipótesis f' es creciente, se tiene:

$$\frac{f(\lambda a+\mu b)-f(a)}{\lambda a+\mu b-a}=f'(c)\leq f'(d)=\frac{f(b)-f(\lambda a+\mu b)}{b-(\lambda a+\mu b)},$$

entonces,

$$\frac{f(\lambda a+\mu b)-f(a)}{-a(1-\lambda)+\mu b}\leq\frac{f(b)-f(\lambda a+\mu b)}{-b(1-\mu)-\lambda a}.$$

Puesto que $\lambda+\mu=1$, tenemos:

$$\frac{f(\lambda a+\mu b)-f(a)}{\mu(b-a)}\leq\frac{f(b)-f(\lambda a+\mu b)}{\lambda(b-a)}.$$

De aquí que:

$$\lambda(f(\lambda a+\mu b)-f(a))\leq\mu(f(b)-f(\lambda a+\mu b))$$
$$\lambda f(\lambda a+\mu b)-\lambda f(a)\leq\mu f(b)-\mu f(\lambda a+\mu b)$$
$$(\lambda+\mu)f(\lambda a+\mu b)\leq\lambda f(a)+\mu f(b),$$

Luego:

$$f(\lambda a+\mu b)\leq\lambda f(a)+\mu f(b)$$

y f es convexa.

Corolario 2.3.1

$f:I\to\Re$ es dos veces diferenciable entonces f es convexa $\Leftrightarrow$ $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in I$.

Ejemplos 2.3.2:

$a)$ La funciones convexa sobre $\Re$.

Solución.

Calculamos la primera y segunda derivadas de f:

$$f'(x)=e^x$$
$$f''(x)=e^x.$$

Puesto que:

$$f''(x)=e^x\geq 0.$$

La función es convexa en cualquier intervalo.

$b)$ La función $f(x)=-\log x$ es convexa en $(0,\infty)$.

Solución.

Calculamos la primera y segunda derivadas de f:

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$
$$f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Puesto que:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$

Entonces la función es convexa en $(0,\infty)$.

$c)$ La función $f(x) = x\log x$ es convexa en $(0,\infty)$.

Solución.
Calculamos la primera y segunda derivadas de f:

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + \log x = 1 + \log x$$
$$f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Puesto que si $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

Entonces la función es convexa en $(0,\infty)$.

$d)$ La función $f(x) = x^p$, $p \geq 1$ es convexa en $(0,\infty)$.

Solución.
Calculamos la primera y segunda derivadas de f:

$$f'(x) = px^{p-1}$$
$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2}.$$

Puesto que si $x > 0$ y $p \geq 1$:

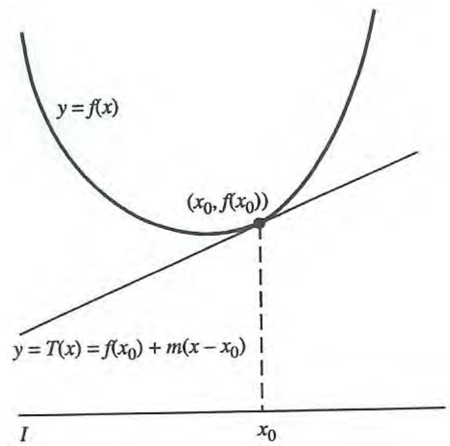
$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0.$$

Entonces la función es convexa en $(0,\infty)$.

Definición 2.3.1
Sea $f : I \to \Re$, $x_0 \in I$, decimos que f tiene un soporte en x_0, si existe una función $T : \Re \to \Re$ de la forma $T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ que satisface que $T(x) \leq f(x)$ $\forall x \in I$. En este caso decimos que T es soporte de f en x_0.

Observación 2.3.1:
Si T es soporte de f en x_0, entonces $T(x_0) = f(x_0)$.

En la figura siguiente se muestra una función y su soporte en el punto x_0.



Teorema 2.3.4

Si f tiene un soporte en x_0, entonces la recta, gráfica de T, está debajo de la gráfica de f.

Demostración.

Se sigue inmediatamente de la definición.

Teorema 2.3.5

Si $f : I \to \Re$ tiene un soporte T en x_0, $x, y \in I$, $\lambda, \mu > 0$ con $\lambda + \mu = 1$, entonces $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$.

Demostración.

Puesto que T es un soporte en x_0, entonces es de la forma:

$$T(x) = f(x_0) + m(x - x_0).$$

Entonces:

$$T(\lambda x + \mu y) = f(x_0) + m(\lambda x + \mu y - x_0).$$

Como $\lambda + \mu = 1$, escribimos:

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= (\lambda + \mu) f(x_0) + m(\lambda x + \mu y - (\lambda + \mu) x_0) \\ &= \lambda f(x_0) + \mu f(x_0) + m(\lambda x - \lambda x_0) + m(\mu x - \mu x_0) \\ &= \lambda T(x) + \mu T(y). \end{aligned}$$

Teorema 2.3.6

Sea f definida en un intervalo abierto I, entonces f es convexa si y sólo si, tiene un soporte en cada punto de I.

Demostración.

$\Leftarrow)$

Sean $x, y \in I$, $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$ y consideremos el punto $\lambda x + \mu y$.
Sea T un soporte de f en $\lambda x + \mu y$, entonces aplicando el teorema anterior tenemos:

$$f(\lambda x + \mu y) = T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

y f es convexa.

$\Rightarrow)$

Sea f convexa, sea $x_0 \in I$. Por el Teorema 2.3.2, existen las derivadas izquierda y derecha de f en x_0. Sean $m \in \Re$ tal que $f_-^{\prime}(x_0) \leq m \leq f_+^{\prime}(x_0)$ y $T : \Re \to \Re$ tal que $T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$. Demostraremos que T es un soporte de f en x_0.
Sean $y, z \in I$ tales que $y < x_0 < z$ entonces por teorema 2.3.1 tenemos:

$$\frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0},$$

es decir,

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}.$$

Entonces, por el teorema 2.2.2 tenemos:

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq f_-^{\prime}(x_0) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Y

$$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f_+^{\prime}(x_0) \leq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}.$$

De las dos desigualdades anteriores tenemos que:

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq f_-^{\prime}(x_0) \leq m \leq f_+^{\prime}(x_0) \leq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}$$

Considerando la desigualdad izquierda:

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq m$$

$$f(y) - f(x_0) \geq m(y - x_0) \quad \text{ya que } y < x_0$$

$$f(y) \geq f(x_0) + m(y - x_0)$$

$$f(y) \geq T(y).$$

De la misma manera, considerando la desigualdad derecha:

$$m \leq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}$$

$$m(z - x_0) \leq f(z) - f(x_0)$$

$$f(x_0) + m(z - x_0) \leq f(z)$$

$$T(z) \leq f(z)$$

$$f_+'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f_-'(b).$$

Entonces, para cualesquiera $y, z \in I$ tales que $y < x_0 < z$ tenemos que:

$$T(y) \leq f(y) \text{ y } T(z) \leq f(z) .$$

Concluimos que $T(x) \leq f(x)$ para cualquier $x \in I$.

Por lo tanto T es soporte de f en x_0.

Teorema 2.3.7

Sea $f : I \to \Re$ función convexa entonces f es derivable en $x_0 \in I \Leftrightarrow f$ tiene soporte único en x_0.

Demostración.

$\Rightarrow)$

Supongamos que f es derivable en x_0 y $T : \Re \to \Re$ soporte de f en x_0 es decir, $T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ donde $m \in \Re$

Sean $x, y \in I$ tal que $y < x_0 < z$ entonces por teorema 2.3.1 tenemos:

$$\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(x_0)}{z - x_0},$$

es decir,

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(x_0)}{z - x_0}.$$

Pero:

$$T(y) \leq f(y)$$
$$T(y) - f(x_0) \leq f(y) - f(x_0)$$
$$\frac{T(y)-T(x_0)}{y - x_0} \geq \frac{f(y)-f(x_0)}{y - x_0}$$

y

$$\frac{T(y)-T(x_0)}{y - x_0} = \frac{f(x_0)+m(y-x_0)-f(x_0)}{y - x_0} = m.$$

De igual manera:

$$\frac{T(z)-T(x_0)}{z - x_0} = \frac{f(x_0)+m(z-x_0)-f(x_0)}{z - x_0} = m$$

y

$$T(z) \le f(z)$$
$$T(z) - f(x_0) \le f(z) - f(x_0)$$
$$\frac{T(z) - T(x_0)}{z - x_0} \le \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0},$$

Entonces:
$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \le \frac{T(y) - T(x_0)}{y - x_0} = m = \frac{T(z) - T(x_0)}{z - x_0} \le \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0},$$

de donde:
$$\lim_{y \to x_0^-} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \le m \le \lim_{z \to x_0^+} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}.$$

Pero:
$$f'(x_0) = \lim_{y \to x_0^-} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = \lim_{z \to x_0^+} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}.$$

Entonces $m = f'(x_0)$ y f tiene soporte único en x_0.

$\Leftarrow)$

Supongamos que f tiene soporte único en x_0 y sea $m \in \Re$ tal que $f'_-(x_0) \le m \le f'_+(x_0)$ entonces, si consideramos $T(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$, considerando la desigualdad anterior, en particular tenemos que $m \le f'_+(x_0)$ de donde:
$$m \le \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Luego:
$$m(x - x_0) \le f(x) - f(x_0)$$
$$f(x_0) + m(x - x_0) \le f(x)$$
$$T(x) \le f(x).$$

Es decir, T es soporte en x_0.

Como f tiene un único soporte en x_0, entonces, m es única, por lo tanto $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ y f es derivable en x_0.

Teorema 2.3.8

Si $f : (0, \infty) \to \Re$, entonces la función $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ es convexa sobre $(0, \infty)$ si y sólo si f es convexa en $(0, \infty)$.

Demostración.

Sea $x_0 > 0$. Entonces:

$$S_g(x)=\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{xf\left(\frac{1}{x}\right)-x_0 f\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}$$

Sumando y restando $xf\left(\frac{1}{x_0}\right)$, tenemos:

$$S_g(x)==\frac{xf\left(\frac{1}{x}\right)-xf\left(\frac{1}{x_0}\right)+xf\left(\frac{1}{x_0}\right)-x_0 f\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}$$

$$=\frac{(x-x_0)f\left(\frac{1}{x_0}\right)+x\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right)}{x-x_0}$$

$$=f\left(\frac{1}{x_0}\right)+x\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}$$

$$=f\left(\frac{1}{x_0}\right)-\left(\frac{xx_0}{-x_0}\right)\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}$$

$$=f\left(\frac{1}{x_0}\right)+\left(\frac{1}{-x_0}\right)\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x_0}\right)}{\frac{xx_0-x}{xx_0}}$$

$$=f\left(\frac{1}{x_0}\right)+\left(\frac{1}{-x_0}\right)\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x_0}\right)}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}$$

$$=f\left(\frac{1}{x_0}\right)-\left(\frac{1}{x_0}\right)S_f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ahora bien, a medida que x crece, $\frac{1}{x}$ decrece.

Entonces:

$S_f\left(\frac{1}{x}\right)$ decreciente y en consecuencia $S_g(x)$ es creciente, por lo tanto, g es convexa.

Recíprocamente, si g es convexa, puesto que $xg\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ es posible probar que f es convexa intercambiando g y f en la demostración anterior.

Teorema 2.3.9
Una función f derivable en un intervalo es convexa si y sólo si $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$ para cualesquiera $x, y \in domf$.

Demostración.
Como f es convexa y $x, y \in dom.f$, entonces para todo $t \in (0,1]$:

$$f(x + t(y-x)) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Si dividimos entre t ambos lados, tenemos:

$$f(y) + \frac{(1-t)}{t} f(x) \geq \frac{f(x+t(y-x))}{t}$$

$$f(y) \geq \frac{f(x+t(y-x))}{t} - \frac{(1-t)}{t} f(x)$$

$$f(y) \geq \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} + f(x)$$

$$f(y) \geq (y-x)\frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t(y-x)} + f(x),$$

tomando el límite cuando $t \to 0$ tenemos:

$$f(y) \geq (y-x)\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t(y-x)} + f(x).$$

Haciendo el cambio de variable $h = t(y-x)$, tenemos:

$$f(y) \geq (y-x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x),$$

de donde:

$$f(y) \geq (y-x)f'(x) + f(x).$$

Recíprocamente, sean $x \neq y$, $t \in [0,1]$ y $z = tx + (1-t)y$.
Entonces:

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z)$$

y

$$f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z).$$

A la primera la multiplicamos por t y a la segunda por $(1-t)$ y sumamos:

$$
\begin{aligned}
tf(x)+(1-t)f(y) &\geq tf(z)+tf'(z)(x-z)+(1-t)f(z)+(1-t)f'(z)(y-z)\\
&\geq f(z)+tf'(z)(x-z-y+z)+f'(z)(y-z)\\
&= f(z)+tf'(z)(x-y)+f'(z)(y-z)\\
&= f(z)+f'(z)(t(x-y)+y-z)\\
&= f(z)+f'(z)(tx+y(1-t)-z)\\
&= f(z)+f'(z)(z-z)\\
&= f(z)\\
&= f(tx+(1-t)y)
\end{aligned}
$$

y f es convexa.

Ejemplos 2.3.3

$a)$ La función $f(x)=e^{ax}$ es convexa en $\Re$ para cualquier $a\in\Re$.

Solución.
Calculamos la primera y segunda derivadas de la función.

$$f'(x)=ae^{ax}$$
$$f''(x)=a^2e^{ax}.$$

Puesto que:

$$f''(x)=a^2e^{ax}>0,$$

entonces f es convexa en $\Re$.

$b)$ La función $f(x)=x^a$ es convexa en $\Re^+$ cuando $a\geq 1$ o $a\leq 0$ y cóncava para $0\leq a\leq 1$.

Solución.
Calculamos la primera y segunda derivadas de la función.

$$f'(x)=ax^{a-1}$$
$$f''(x)=a(a-1)x^{a-2}.$$

Ahora, si $a\geq 1$ o $a\leq 0$:

$$f''(x)=a(a-1)x^{a-2}\geq 0,$$

en ese caso, f es convexa en $\Re$.
Por otra parte, si $0\leq a\leq 1$:

$$f''(x)=a(a-1)x^{a-2}\leq 0,$$

Por lo que en ese caso, f es cóncava en $\Re$.

$c)$ La función $f(x)=\log x$ es cóncava en $\Re^+$.

Solución.
Calculamos la primera y segunda derivadas de la función.

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

Puesto que:

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

entonces f es cóncava en $\Re^+$.

La desigualdad de Jensen, que mencionamos en la Proposición 2.1.3, es útil para demostrar muchas desigualdades. Como ejemplos consideraremos algunas de las desigualdades que ya hemos probado de alguna otra forma:

Ejemplos 2.3.4

$1)$ La desigualdad media geométrica-aritmética. Si $a,b\geq 0$, entonces:

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}.$$

Solución.

Sean $a,b\geq 0$.

Puesto que la función $-\log x$, es convexa

$$\begin{aligned}-\log\left(\frac{a+b}{2}\right)&=-\log\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\\&\leq\frac{1}{2}(-\log a-\log b)\\&=-\frac{1}{2}(\log a+\log b)\\&=-\frac{1}{2}\log(ab)\\&=-\log(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}\\&=-\log\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Multiplicando por -1:

$$\log\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\log\sqrt{ab}.$$

Aplicando la exponencial en ambos lados tenemos $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$.

2.5 La desigualdad de Hölder.

Si $p>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ y $x_i,y_i\in\Re,\ i,\ j=1,\ldots,n,$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Solución.

Puesto que la función $-\log x$ es convexa, si $a, b > 0$ y $\theta \in [0,1]$, tenemos:

$$\begin{aligned}
-\log(\theta a + (1-\theta)) &\le -(\theta \log a + (1-\theta)\log b) \\
&= -\left(\log a^{\theta} + \log b^{(1-\theta)}\right) \\
&= -\log\left(a^{\theta} b^{(1-\theta)}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando por -1:

$$\log(\theta a + (1-\theta)) \ge \log\left(a^{\theta} b^{(1-\theta)}\right).$$

Aplicando la exponencial en ambos lados tenemos:

$$a^{\theta} b^{(1-\theta)} \le \theta a + (1-\theta) \qquad (2.3).$$

Sean $a = \dfrac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}$, $b = \dfrac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}$ y $\theta = 1/p.$

Entonces, aplicando (2.3) tenemos:

$$\left(\frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}\right)^{1/p} \left(\frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}\right)^{1/q} \le \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}\right),$$

Es decir:

$$\left(\frac{|x_i|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)\left(\frac{|y_i|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right) \le \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}\right),$$

para cualquier $i = 1,\dots,n.$ Sumando sobre i:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i||y_i|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right) &\le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}\right)\right) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De donde:

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j||y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Teorema 2.3.10
Sean $x_1, x_2, \cdots, x_m$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m > 0$, tal que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1$ entonces

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m .$$

Demostración.
Puesto que la función $-\log x$ es función convexa en $(0,\infty)$ entonces:

$$\begin{aligned} -\log(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m) &\leq -(\alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 + \cdots + \alpha_m \log x_m) \\ &= -\left(\log x_1^{\alpha_1} + \log x_2^{\alpha_2} + \cdots + \log x_m^{\alpha_m}\right) \quad , \\ &= -\log\left(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}\right). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\log\left(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}\right) \leq \log(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m).$$

Puesto que la función $\log x$ es estrictamente creciente, tenemos:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m .$$

Corolario 2.3.3
Sean $x_1, x_2, \cdots, x_m > 0$ entonces $(x_1 x_2 \cdots x_m)^{1/m} \leq \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$.

Demostración.
Se sigue inmediatamente del teorema anterior considerando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \frac{1}{m}$.

2.6 Log-convexidad.

Definición 2.4.1
Consideremos una función $f : I \to \Re$ que satisface que $f(x) > 0$, para todo $x \in domf$. Decimos que f es logarítmicamente convexa o brevemente $\log-convexa$, si $\log f$ es convexa.

Definición 2.4.2
Una función $f : I \to \Re$ que satisface que $f(x) > 0$, para todo $x \in domf$. Decimos que es logarítmicamente cóncava o $\log-cóncava$ si $\log f$ es cóncava.

Proposición 2.4.1

Una función $f: I \to \Re$ es $\log - convexa$ si y sólo si para cualesquiera $\lambda, \mu \geq 0$, tales que, $\lambda + \mu = 1$ se tiene $f(\lambda x + \mu y) \leq f^{\lambda}(x) f^{\mu}(y)$.

Demostración.
Si f es $\log - convexa$, tenemos:

$$\log f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda \log f(x) + \mu \log f(y)$$

Utilizando las propiedades del logaritmo tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda \log f(x) + \mu \log f(y) &= \log f^{\lambda}(x) + \log f^{\mu}(y) \\ &= \log\left(f^{\lambda}(x) f^{\mu}(y)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f(\lambda x + \mu y) \leq f^{\lambda}(x) f^{\mu}(y).$$

Observamos que si la última desigualdad es cierta podemos obtener hacia atrás las desigualdades una a una, luego, la función es $\log - convexa$.

Una consecuencia inmediata de las definiciones anteriores y las propiedades de la función logaritmo es la siguiente:

Proposición 2.4.2
f es $\log - convexa$, si y sólo si $\dfrac{1}{f}$ es $\log - cóncava$.

Demostración.
Se sigue inmediatamente de la definición.

Proposición 2.4.3
Sea $f: I \to \Re$, positiva. Si f es $\log - convexa$ entonces f es convexa.

Demostración.
Sean $x, y \in I$, $\lambda, \mu \geq 0$, tales que, $\lambda + \mu = 1$.
Puesto que f es $\log - convexa$, tenemos:

$$f(\lambda x + \mu y) \leq f^{\lambda}(x) f^{\mu}(y)$$

y aplicando la igualdad (2.3) tenemos

$$f^{\lambda}(x) f^{\mu}(y) \leq \lambda f(x) + \mu(y).$$

Por lo tanto la función f es convexa.

Teorema 2.4.1
Sean $g: I \to \Re$ $f: I \to \Re$, $\log - convexas$, entonces $f + g$ es $\log - convexa$.

Demostración.
Sean $x, y \in I$, $\lambda, \mu \geq 0$, tales que, $\lambda + \mu = 1$.

Entonces:

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x+\mu y) &= f(\lambda x+\mu y)+g(\lambda x+\mu y)\\ &\leq f^{\lambda}(x)+f^{\mu}(y)+g^{\lambda}(x)+g^{\mu}(y)\\ &\leq (f(x)+g(x))^{\lambda}(f(y)+g(y))^{\mu}\\ &= (f+g)^{\lambda}(x)(f+g)^{\mu}(y).\end{aligned}$$

De donde $(f+g)$ es $\log-convexa$ también.

Teorema 2.4.2

Sean $g: I\rightarrow\Re \quad f: I\rightarrow\Re$, $\log-convexas$, entonces $f\cdot g$ es $\log-convexa.$

Demostración.

Sean $x,y\in I$, $\lambda,\mu\geq 0$, tales que, $\lambda+\mu=1$

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(\lambda x+\mu y) &= f(\lambda x+\mu y)\cdot g(\lambda x+\mu y)\\ &\leq f^{\lambda}(x)\cdot f^{\mu}(y)\cdot g^{\lambda}(x)\cdot g^{\mu}(y)\\ &= ((f\cdot g)^{\lambda}(x))(f\cdot g)^{\mu}(y).\end{aligned}$$

De donde $f\cdot g$ es $\log-convexa$.

Teorema 2.4.3

Sean $f,g: I\rightarrow\Re$ continuas, tales que $f(t)$ y $g(t)$ son positivas.

Sean $\lambda,\mu\geq 0$, tales que, $\lambda+\mu=1$. Entonces $\int_I f^{\lambda}(t)g^{\mu}(t)dt\leq\left(\int_I f^{\lambda}(t)dt\right)^{\lambda}\left(\int_I g^{\mu}(t)dt\right)^{\mu}$.

Demostración.

Aplicando la igualdad (2.3) con $a=\dfrac{f(t)}{\int_I f(t)dt}$ y $b=\dfrac{g(t)}{\int_I g(t)dt}$ tenemos:

$$\left(\frac{f(t)}{\int_I f(t)dt}\right)^{\lambda}\left(\frac{g(t)}{\int_I g(t)dt}\right)^{\mu}\leq\lambda\left(\frac{f(t)}{\int_I f(t)dt}\right)+\mu\left(\frac{g(t)}{\int_I g(t)dt}\right)$$ para cualquier $t\in I$,

pero:

$$\frac{f(t)}{\int_I f(t)dt}\leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{g(t)}{\int_I g(t)dt}\leq 1,$$

de donde:

$$\frac{\int f(t)^{\lambda} g(t)^{\mu}}{\left(\int_I f(t)dt\right)^{\lambda}\left(\int_I g(t)dt\right)^{\mu}} \leq \lambda+\mu=1.$$

Por lo tanto:

$$\int_I f^{\lambda}(t) g^{\mu}(t)dt \leq \left(\int_I f(t)dt\right)^{\lambda}\left(\int_I g(t)dt\right)^{\mu}.$$

2.7 La función Gamma.

Definición 2.5.1

La función gamma $\Gamma:(0,\infty)\to\Re$ está definida como $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$

La función Gamma tiene las siguientes:

Propiedades 2.5.1

$a)$ $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ para todo $x>0.$

Solución.

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} t^{x}e^{-t}dt$$

Integramos por partes, sean:

$$u=t^{x} \qquad dv=e^{-t}dt$$
$$du=xt^{x-1}dt \qquad v=-e^{-t}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\int_0^{\infty} t^{x}e^{-t}dt\\ &=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\int_a^{b} t^{x}e^{-t}dt\\ &=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}} -t^{x}e^{-t}\Big|_a^b+\lim_{b\to\infty} x\int_a^{b} t^{x-1}e^{-t}dt\\ &=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to 0}}\left(-b^{x}e^{-b}+-a^{x}e^{-a}\right)+x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\\ &=x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\\ &=x\Gamma(x).\end{aligned}$$

$b)$ $\Gamma(1)=1.$

Solución.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} te^{-t}dt$$
$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} \int_0^{b} te^{-t}dt$$

Integramos por partes, sean:

$$u = t \qquad dv = e^{-t}dt$$
$$du = dt \qquad v = -e^{-t}$$

entonces:

$$\Gamma(1) = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} \int_0^{b} te^{-t}dt$$
$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} -te^{-t}\Big|_a^b + \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} \int_a^{b} e^{-t}dt$$
$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} \left(-be^{-b} + ae^{-a}\right) + \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} \int_a^{b} e^{-t}dt$$
$$= 0 + \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} -e^{-t}\Big|_a^b$$
$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to 0}} -e^{-b} + e^{-a}$$
$$= 1.$$

$c)$ Γ es $\log -convexa$.

Solución.

Sean $\lambda, \mu \geq 0$, tales que, $\lambda + \mu = 1$.

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) = \int_0^{\infty} t^{\lambda x + \mu y - 1} e^{-t} dt$$
$$= \int_0^{\infty} t^{\lambda x + \mu y - (\lambda + \mu)} e^{-t(\lambda+\mu)} dt$$
$$= \int_0^{\infty} \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\lambda} \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\mu} dt.$$

Por el teorema 2.4.3:

$$\int_0^{\infty} \left(t^{x-1}e^{-t}\right)^{\lambda} \left(t^{y-1}e^{-t}\right)^{\mu} dt \leq \left(\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\lambda} \left(\int_0^{\infty} t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{\mu}.$$

Entonces:

$$\Gamma(\lambda x + \mu y) \leq \left(\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\right)^{\lambda} \left(\int_0^{\infty} t^{y-1}e^{-t}dt\right)^{\mu}$$
$$= \Gamma^{\lambda}(x)\Gamma^{\mu}(y)$$

Por lo tanto la función Gamma es $\log -convexa$.

2.8 La función Beta

Definición 2.6.1

Definimos la función Beta mediante la regla $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ con $x,y>0$.

Proposición 2.6.1

Para cada $y>0$ fija, la función $B(x,y)$ es $\log-convexa$.

Demostración.

Sean $a,b,y>0,\lambda,\mu\geq 0$, tales que, $\lambda+\mu=1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
B(\lambda a+\mu b,y) &= \int_0^1 t^{\lambda a+\mu b-1}(1-t)^{y-1}dt \\
&= \int_0^1 t^{\lambda a+\mu b-(\lambda+\mu)}(1-t)^{(y-1)(\lambda+\mu)}dt \\
&= \int_0^1 t^{\lambda a-\lambda}t^{\mu b-\mu}(1-t)^{(y-1)(\lambda+\mu)}dt \\
&= \int_0^1 \left(t^{a-1}(1-t)^{(y-1)}\right)^{\lambda}\left(t^{b-1}(1-t)^{(y-1)}\right)^{\mu}dt.
\end{aligned}$$

Por el teorema 2.4.3, tenemos:

$$\int_0^1 \left(t^{a-1}(1-t)^{(y-1)}\right)^{\lambda}\left(t^{b-1}(1-t)^{(y-1)}\right)^{\mu}dt \leq \left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{(y-1)}dt\right)^{\lambda}\left(\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{(y-1)}dt\right)^{\mu}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
B(\lambda a+\mu b,y) &\leq \left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{(y-1)}dt\right)^{\lambda}\left(\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{(y-1)}dt\right)^{\mu} \\
&= B^{\lambda}(a,y)B^{\mu}(b,y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función Beta es $\log-convexa$.

Bibliografía

Korovkin, P. P., “Desigualdades”, 1976, Moscú, Mir.

Michael J. Cloud, Byron C. Drachman, “Inequalities: with applications to engineering”, 1998, New York, Springer Verlag.

Niculescu Constantin P., Persson Lars-Erik, “Convex functions and their applications, a contemporary Approach”, 2006, Springe.

Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, “Convex optimization”, 2004, Cambridge, United Kingdom, Cambridge University Press.

Webster, Roger, “Convexity”, 1994, Oxford, Oxford University Press.