



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

DIAGRAMA DE FASE DEL MODELO  $\lambda\Phi^4$   
BIDIMENSIONAL NO-CONMUTATIVO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

HÉCTOR MIGUEL MEJÍA DÍAZ



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. WOLFGANG BIETENHOLZ  
2013



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

- Datos del alumno  
Mejía  
Díaz  
Héctor Miguel  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
303008224
- Datos del tutor  
Dr  
Wolfgang  
Bietenholz
- Datos del sinodal 1  
Dr  
Marcos  
Rosenbaum  
Pitluck
- Datos del sinodal 2  
Dra  
Gabriela  
Murguía  
Romero
- Datos del sinodal 3  
Dr  
José David  
Vergara  
Oliver
- Datos del sinodal 4  
Dr  
Erick Leonardo  
Patiño  
Jaidar
- Datos del trabajo escrito  
DIAGRAMA DE FASE DEL MODELO  $\lambda\phi^4$  BIDIMENSIONAL NO-CONMUTATIVO  
59 p  
2013

## Agradecimientos I

- Al Dr. Wolfgang Bietenholz, por darme la oportunidad de integrarme a su grupo de trabajo. Agradezco sus consejos y observaciones a lo largo del desarrollo del trabajo, y su paciencia siempre que fue necesaria. Asimismo, aprecio me incluyera en el proyecto CONACYT “Física de partículas por medio de simulaciones numéricas”, clave de registro 155905.
- Al Dr. Marco Panero, por tomarse el tiempo para verificar las simulaciones en etapa temprana. Además de contribuir con acertadas observaciones sobre la parte escrita del trabajo.
- A mis sinodales: Dr. Marcos Rosenbaum, Dra. Gabriela Murguía, Dr. Leonardo Patiño, Dr. David Vergara. Por los consejos y observaciones para llevar a buen término el trabajo presente.

## **Agradecimientos II**

- A mis padres, Martha Díaz y Miguel Mejía, por su apoyo incondicional, sin el cual la culminación del trabajo no habría sido posible. A mis hermanos, Giovana y Luis Fernando, por el tiempo que hemos compartido, gracias por estar siempre a mi lado.
- A Malinalli Wong, gracias por el apoyo que me has dado en las buenas y en las malas.
- A mis amigos: Gustavo García, Rosa Becerra, David Porta, Rafael Alapisco, Ricardo Cortés, Antonio Fragoso, Abraham García. Por las buenas experiencias que tuvimos a lo largo de la carrera.



## Resumen

En esta tesis, a través de simulaciones de Monte Carlo se obtiene el diagrama de fase del modelo  $\lambda\phi^4$  no-conmutativo en dos dimensiones. En particular, se considera el caso en que las coordenadas  $x_\mu$ ,  $\mu = 1, 2$ , se sustituyen por operadores hermitianos  $\hat{x}_\mu$  que satisfacen el conmutador

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\Theta_{\mu\nu},$$

para una matriz  $\Theta$  antisimétrica, real y constante de  $2 \times 2$ . En el diagrama, se distinguen una fase de desorden y un régimen ordenado. El régimen ordenado tiene la particularidad de que, a su vez, se divide en dos fases, una de orden uniforme y otra con orden en bandas.

Para obtener el diagrama de fase y otros resultados, se utiliza un mapeo de la teoría a un modelo matricial. Las simulaciones coinciden con estudios anteriores en la aparición de una fase de bandas en el modelo; es decir, en el rompimiento espontáneo de la simetría de traslación.

En este estudio numérico se responde a la cuestión controversial sobre si la fase de bandas es sólo un artefacto de mantener el volumen finito y trabajar en el espacio discretizado. La otra posibilidad, en aparente contradicción con el Teorema de Mermin-Wagner, es que la fase de bandas se mantiene cuando se realiza la extrapolación a los límites del continuo y del volumen infinito simultáneamente (*Límite de Escalamiento Doble o LED*), conservando constante el parámetro de no-conmutatividad de los operadores de coordenadas. En particular, haciendo uso de la forma de la función de correlación, se introduce un exponente crítico que confirma que la fase de bandas sobrevive en el LED.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Motivación . . . . .	4
1.2. No-conmutatividad del espacio-tiempo . . . . .	6
1.3. Modelo $\lambda\phi^4$ no-conmutativo y el Teorema de Mermin-Wagner . . . . .	9
<b>2. Formalismo de Weyl y producto estrella</b>	<b>12</b>
2.1. Formalismo de Weyl . . . . .	12
2.2. Producto estrella de Groenewold-Moyal . . . . .	15
2.3. Teoría de norma-estrella . . . . .	17
<b>3. Modelo <math>\lambda\phi^4</math> NC</b>	<b>20</b>
3.1. Acción escalar del modelo $\lambda\phi^4$ NC . . . . .	20
3.2. El toro no-conmutativo . . . . .	21
3.3. Formulación en el espacio discretizado . . . . .	23
3.4. Mezcla UV/IR . . . . .	25
<b>4. Formulación matricial del modelo <math>\lambda\phi^4</math> NC</b>	<b>28</b>
4.1. Representación matricial de la acción del modelo $\lambda\phi^4$ NC en $d = 2$ . . . . .	28
4.2. Construcción particular de los twist eaters . . . . .	29
4.3. Construcción general de los twist eaters . . . . .	31
<b>5. Resultados numéricos</b>	<b>34</b>
5.1. Diagrama de fase del modelo $\lambda\phi^4$ NC bidimensional . . . . .	34
5.1.1. El parámetro de orden . . . . .	34
5.1.2. Transiciones de fase . . . . .	36

5.2. Extrapolación al Límite de Escalamiento Doble . . . . .	41
5.2.1. Función de correlación . . . . .	41
5.2.2. La fase de bandas en el LED . . . . .	42
<b>6. Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>A. Simulaciones numéricas</b>	<b>48</b>
A.1. Simulaciones de Monte Carlo . . . . .	48
A.2. Algoritmo de Metrópolis . . . . .	49
<b>B. Evaluación óptima de la acción en la forma matricial</b>	<b>52</b>
B.1. Términos cinéticos de la acción . . . . .	53
B.2. Términos de masa y de cuarto orden . . . . .	54

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

La motivación inicial para estudiar teorías cuánticas de campos en espacios no-conmutativos era regularizar las divergencias ultravioletas [1]. Sin embargo, se ha demostrado que parte de estas divergencias persisten y, de hecho, exhiben una mezcla entre las escalas de alta energía (o ultravioleta, UV) y de baja energía (o infrarroja, IR).

A pesar de esto, hay varias razones por las cuales resulta de interés considerar un espacio no-conmutativo. Una de ellas es la creencia tradicional que en las teorías cuánticas, si se intenta incluir a la gravedad, el espacio-tiempo debe cambiar su naturaleza a escalas comparables con la longitud de Planck [2],

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6161 \times 10^{-35} \text{ m.} \quad (1.1.1)$$

Se piensa que la gravedad cuántica tiene un principio de incertidumbre que no permite medir la distancia euclidiana entre dos eventos con menor escala que la longitud de Planck [3]. Si se mide la coordenada espacio-temporal  $x_\mu$  con precisión  $\Delta x_\mu$ , se requiere agregar una energía proporcional a  $\hbar c / \Delta x_\mu$  al sistema, lo que a su vez implica la existencia de un campo gravitacional. Entonces, entre más pequeña sea  $\Delta x_\mu$ , el campo gravitacional generado por la medición será mayor. Cuando el campo es lo suficientemente grande como para evitar que la luz salga de la región en consideración, el evento será in-

visible. Las condiciones propuestas para que el evento sea detectable son<sup>1</sup> [4]

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta y + \Delta x \Delta z + \Delta y \Delta z &\geq l_P^2 \\ (\Delta x + \Delta y + \Delta z) \Delta t &\geq l_P^2,\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

de tal forma que la no-conmutatividad del espacio aparece de forma natural.

Una motivación relacionada es que hay razones para suponer que cualquier teoría de gravedad cuántica sería no-local [5]. Por ejemplo, la teoría de cuerdas es no-local y tiene más de un parámetro que caracteriza esta no-localidad: en general, está controlada por la longitud de Planck y la *longitud de cuerda*,  $l_s$  (el tamaño promedio de la cuerda) [6].

De la teoría de cuerdas surge un escenario concreto de la no-conmutatividad del espacio-tiempo. Como las cuerdas tienen una longitud  $l_s$ , las relaciones de incertidumbre de Heisenberg generalizadas se postulan como [6]

$$\Delta x \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p \right).\tag{1.1.3}$$

Al minimizar esta relación con respecto a  $\Delta p$ , se obtiene un límite inferior en la medición de longitudes en el espacio-tiempo,  $\Delta x_{\text{mín}} = l_s$ .

La teoría de campos en espacios no-conmutativos también aparece, como formalismo, en materia condensada. El ejemplo típico es el problema de Landau. Por lo tanto, estas ideas son relevantes para el efecto Hall cuántico [7].

Para una partícula no-relativista con carga eléctrica  $e$ , de masa  $m$ , moviéndose en el plano  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  en presencia de un campo magnético uniforme perpendicular, de magnitud  $B$ , el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A},\tag{1.1.4}$$

con  $A_\mu = -(B/2)\epsilon_{\mu\nu}x_\nu$ ,  $\mu, \nu = 1, 2$ . Clásicamente, se define el momentum conjugado

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} = m \dot{x}_\mu + (B/2)e \epsilon_{\mu\nu} x_\nu.\tag{1.1.5}$$

La no-conmutatividad espacial se observa de la manera más simple en el límite de campo magnético  $B$  muy grande. donde el término cinético de (1.1.4) es despreciable, por lo que

$$\mathcal{L} \simeq (B/2)e \epsilon_{\mu\nu} x_\mu \dot{x}_\nu\tag{1.1.6}$$

---

<sup>1</sup>En lo sucesivo, se consideran unidades naturales,  $\hbar = 1$  y  $c = 1$ .

y

$$\pi_\mu = (B/2)e\epsilon_{\mu\nu}x_\nu. \quad (1.1.7)$$

Al cuantizar los operadores de momentum y de posición ( $\pi_\mu \rightarrow \hat{\pi}_\mu$ ,  $x_\mu \rightarrow \hat{x}_\mu$ ), como  $[\hat{x}_\mu, \hat{\pi}_\nu] = i\delta_{\mu\nu}$ , se tiene que

$$[\hat{x}_\mu, \hat{\pi}_\mu] = \hat{x}_\mu(B/2)e\epsilon_{\mu\nu}\hat{x}_\nu - (B/2)e\epsilon_{\mu\nu}\hat{x}_\nu\hat{x}_\mu = (Be/2)\epsilon_{\mu\nu}[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu], \quad (1.1.8)$$

por lo tanto

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = \frac{2i}{Be}\epsilon_{\mu\nu}. \quad (1.1.9)$$

En este mismo ejemplo, retomando la expresión (1.1.5) y cuantizando, se tiene que los operadores de momentum  $\hat{\pi}_\mu$  y  $\hat{\pi}_\nu$  no conmutan,

$$[\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\nu] = \frac{B}{2}e\epsilon_{\nu\beta}[\hat{x}_\beta, \hat{p}_\mu] + \frac{B}{2}e\epsilon_{\mu\alpha}[\hat{p}_\nu, \hat{x}_\alpha] = \frac{iB}{2}e(2\epsilon_{\mu\nu}) = iBe\epsilon_{\mu\nu}. \quad (1.1.10)$$

En los 80's, Connes [8], Woronowicz [9] y Drinfel'd [10] generalizaron la noción de una estructura diferencial a grupos cuánticos y pseudo-grupos de matrices. Junto con la definición de una integración generalizada, esto condujo a una descripción algebraica del espacio-tiempo, que permite definir teorías de Yang-Mills en espacios no-conmutativos, para teorías de norma  $U(N)$  [11]. Dentro de la teoría de norma  $U(1)$ , a través del *Twisted Eguchi-Kawai Model*, se han llevado a cabo estudios numéricos en 2d y 4d con dos dimensiones no-conmutativas [12, 13].

## 1.2. No-conmutatividad del espacio-tiempo

El espacio-tiempo se hace no-conmutativo (NC) sustituyendo las coordenadas  $x_\mu$  por operadores hermitianos  $\hat{x}_\mu$ , con conmutador

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\Theta_{\mu\nu}. \quad (1.2.1)$$

$\Theta_{\mu\nu}$  es una matriz real, antisimétrica, que se supondrá constante, en el espacio-tiempo euclidiano  $d$ -dimensional. En lo sucesivo, se considerará solamente el caso  $d = 2$ . Entonces, explícitamente,

$$\Theta = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

siendo  $\theta$  el parámetro de no-conmutatividad, con dimensiones de longitud al cuadrado. En el caso abordado en este trabajo, las componentes del momentum,  $k_\mu$ , siguen siendo conmutativas. El factor imaginario  $i$  está presente en la relación (1.2.1) porque en el conmutador de operadores hermitianos es anti-hermitiano. Como los operadores de coordenadas no conmutan, se sigue que

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \geq \frac{1}{2} |\theta|. \quad (1.2.3)$$

De acuerdo con esta relación, la noción de puntos en el espacio-tiempo no-conmutativo pierde sentido. Un punto es sustituido por una *celda de Planck* del orden de la longitud de Planck al cuadrado (este fenómeno es el llamado *smearing* de las coordenadas espacio-temporales). El “smearing” de las coordenadas espacio-temporales encaja adecuadamente en las ideas detrás de las relaciones de incertidumbre y el concepto de longitud mínima en teoría de cuerdas. Esta correspondencia ha servido para proponer que la geometría no-conmutativa es un marco de trabajo natural para investigar aspectos no-perturbativos de la teoría de cuerdas.

La ec. (1.2.3) permite identificar al parámetro de no-conmutatividad  $\theta$  con la longitud de Planck (1.1.1),

$$|\theta| \propto l_P^2, \quad (1.2.4)$$

o con el campo magnético en el problema de Landau,

$$|\theta| \propto \frac{1}{B}. \quad (1.2.5)$$

Al restringir el espectro de  $\hat{x}_\mu$  a los eigenvalores  $na$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) en la recta en la dirección  $\hat{\mu}$ , con espaciamiento  $a$ , hay una correspondencia con el operador identidad

$$\exp\left(i\frac{2\pi}{a}\hat{x}_\mu\right) = \hat{\mathbb{1}}. \quad (1.2.6)$$

Además, como las componentes del momentum,  $k_\mu$ , son periódicas en la zona de Brillouin,  $k \in (-\pi/a, \pi/a]^d$ ,

$$\exp\left(i\left[k_\mu + \frac{2\pi}{a}\right]\hat{x}_\mu\right) = \exp(ik_\mu\hat{x}_\mu). \quad (1.2.7)$$

Al multiplicar ambos lados de la última expresión por  $\exp(-ik_\nu\hat{x}_\nu)$  por

la derecha, usando la ecuación de Baker-Campbell-Hausdorff<sup>2</sup>,

$$e^{\hat{X}+\hat{Y}} = e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{X},\hat{Y}]},$$

y siendo consistentes con la ec. (1.2.7), se llega a

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{a}\hat{x}_\mu\delta_{\mu\rho}\right)\exp\left(\Theta_{\mu\nu}k_\nu\frac{\pi i}{a}\delta_{\mu\rho}\right) = \hat{\mathbb{1}} \quad (1.2.8)$$

Por lo tanto

$$\frac{\theta}{2a}k_\mu \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.9)$$

con la implicación de que cualquier retícula no-conmutativa es automáticamente periódica, digamos sobre un volumen  $N \times N$ . Entonces, aparecen las componentes discretizadas del momentum  $k_{n_\mu} = \frac{2\pi}{aN}n_\mu$ , donde  $n_\mu \in \mathbb{Z}$ . El parámetro de no-conmutatividad (1.2.2) ahora se identifica como

$$\theta = \frac{1}{\pi}a^2N. \quad (1.2.10)$$

En la ec. (1.2.10) es evidente que los límites continuo,  $a \rightarrow 0$ , y termodinámico,  $N \rightarrow \infty$ , están entrelazados al requerir  $\theta = cte.$ , que es muestra de la mezcla UV/IR. Tomar los dos límites simultáneamente, manteniendo  $\theta$  constante es llamado el *Límite de Escalamiento Doble*, *LED* (o DSL, por sus siglas en inglés, Double Scaling Limit).

La mezcla UV/IR se puede entender en términos de las relaciones de incertidumbre inducidas en las coordenadas: si se mide una coordenada espacio-temporal con alta precisión, entonces las incertidumbres de las direcciones restantes se extienden por el smearing en las celdas del espacio-tiempo.

---

<sup>2</sup>La fórmula presentada es una simplificación válida en tanto que, en este caso, se cumple que  $[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = 0$  y  $[\hat{Y}, [\hat{Y}, \hat{X}]] = 0$ .

### 1.3. Modelo $\lambda\phi^4$ no-conmutativo y el Teorema de Mermin-Wagner

En este proyecto se considerará el modelo  $\lambda\phi^4$  en un plano NC, formulado en términos de matrices hermitianas. El caso 3d, en un plano NC más un tiempo euclidiano conmutativo, del modelo se ha estudiado con anterioridad [14, 15], dando como resultado un diagrama de fase dividido en secciones de desorden, orden uniforme y orden en bandas. Esta última fase es una particularidad del espacio NC para este modelo, que implica el rompimiento espontáneo de la simetría de Poincaré. Para  $d = 2$ , la fase de bandas en una retícula ha sido reportada con anterioridad en algunos trabajos [14–16]. Sin embargo, la cuestión sobre si la fase de bandas sobrevive en el límite continuo del caso 2d es aún controversial en la literatura.

Según el Teorema de Mermin-Wagner, *simetrías continuas globales no se pueden romper espontáneamente en 1 + 1 dimensiones* [17, 18]. Esto implica que las fluctuaciones de largo alcance aparecen a un bajo costo energético y, como aumentan la entropía, son favorecidas, destruyendo posibles configuraciones ordenadas macroscópicamente [19]. Si se considera el campo escalar libre  $\phi$ , de masa  $m$ , en dos dimensiones euclidianas, el propagador,  $G(x)$ , satisface

$$(\nabla^2 + m^2)G(x) = \delta(x). \quad (1.3.1)$$

En el límite  $m \rightarrow 0$ ,  $G(x)$  es una solución de la ecuación de Laplace para una fuente puntual,

$$\nabla^2 G(x) = \delta(x). \quad (1.3.2)$$

Entonces, al resolver la ecuación anterior en  $d = 2$  se tiene que

$$G(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad r = |x|. \quad (1.3.3)$$

Por lo tanto,  $G(r)$  diverge logarítmicamente en los límites  $r \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ . Es decir, en dichos límites las fluctuaciones del campo no oscilan alrededor de un promedio y se rompe el orden macroscópico.

Por otra parte, si se considera el campo angular  $\theta(x)$  y  $\psi = \sqrt{\rho}e^{i\theta(x)}$ , la función de correlación es [20]

$$\langle \theta(x)\theta(0) \rangle = \frac{\int D\theta e^{-\beta S[\theta]} \theta(x)\theta(0)}{\int D\theta e^{-\beta S[\theta]}} = \frac{1}{2\pi\beta\rho} \ln \frac{|x|}{a}, \quad (1.3.4)$$



donde  $S[\theta]$  es la acción euclidiana asociada a la configuración  $\theta(x)$ ,  $\beta$  es el inverso de la temperatura del sistema estadístico y  $a$  es el espaciamiento entre los espines. Entonces, la ec. (1.3.4) implica que, suficientemente lejos del origen,  $\theta(x) \bmod (2\pi)$  tomará valores aleatorios, por lo que el promedio de  $e^{i\theta(x)}$  será cero. Por lo tanto, en un sistema 2d,

$$\langle \psi \rangle = 0. \quad (1.3.5)$$

Las expresiones (1.3.3) y (1.3.5) son dos formas de observar el Teorema de Mermin-Wagner. Sin embargo, la dificultad en la aplicación del teorema en el modelo  $\lambda\phi^4$  NC es que las suposiciones en la demostración formal del teorema [21, 22] incluyen localidad, que no aplica en el caso a desarrollar.

Algunos autores [23], usando la aproximación de Hartree-Fock, concluyen que, en el espacio NC 4d, cuando el parámetro de no-conmutatividad  $\theta$  es pequeño hay una transición de fase tipo Ising que conduce a una fase ordenada uniforme. Mientras que para  $\theta$  lo suficientemente grande, hay una transición a una fase ordenada en la que la invarianza de traslación se rompe espontáneamente (fase de bandas). Sin embargo, al estudiar el caso 2d afirman que no puede haber orden de largo alcance; es decir, la fase de bandas es inestable debido a fluctuaciones IR. De hecho, según su sustentación, los argumentos del Teorema de Mermin-Wagner son más fuertes que en otros casos y no hay una fase de bandas.

Otros autores [24], empleando técnicas de grupo de renormalización al estudiar el modelo  $\lambda\phi^4$  NC, afirman que no hay bandas en 4d, pero sí en  $4 - \epsilon$  dimensiones. De acuerdo con su trabajo, en  $d = 4 - \epsilon$ , existe un *punto de Lifshitz* en el sistema; es decir un punto tri-crítico del diagrama de fase, donde el coeficiente del término de segundo orden de la acción se desvanece, y el de cuarto orden es positivo para mantener la estabilidad del sistema. Esto indica la presencia de dos fases ordenadas: uniforme, cuando  $\theta < \theta_c$ , y de bandas, cuando  $\theta > \theta_c$ , con  $\theta_c = 12/\sqrt{\epsilon}$ . De acuerdo con estos autores, la existencia de la fase de bandas se debe a fluctuaciones fuertes con no-conmutatividad grande; es decir, fluctuaciones cuánticas fuertes violan la fase ordenada y el sistema entra en una fase de bandas con longitud de onda finita para estabilizarse.

Un tercer grupo, mediante el formalismo de la acción efectiva, coincide en la predicción de la aparición de bandas en  $d = 4$  [25], indicando que es una transición de fase de primer orden. Para el plano bidimensional, indican que para un campo escalar, sin considerar un lagrangiano efectivo, sus

resultados en una red de retícula confirman que la invarianza traslacional se rompe espontáneamente debido a la dinámica no-conmutativa del modelo [26].

Este proyecto pretende responder a la pregunta sobre si la fase de bandas sobrevive al LED en el caso de un plano NC, mediante un estudio numérico. El estudio emplea simulaciones de Monte Carlo de las formulaciones de modelos matriciales, usando el algoritmo de Metrópolis.

Inicialmente, se presentará la estructura de fase del sistema regularizado hasta matrices de tamaño considerable. Para esto, se introduce una escala dimensional referida al valor esperado del ancho de una banda cerca de la transición entre las fases desordenada y de bandas. Esta longitud física se puede convertir en la diferencia entre el parámetro de masa al cuadrado usado con su valor crítico.

La meta final es la extrapolación al LED, que lleva a un plano continuo de extensión infinita, manteniendo constante el parámetro de no-conmutatividad. La cuestión a considerar es si la fase de bandas persiste en este límite; es decir, si permanece siempre o si sólo ocurre en el modelo en la red de retícula como consecuencia de mantener el volumen finito y el modelo discretizado.

# Capítulo 2

## Formalismo de Weyl y producto estrella

### 2.1. Formalismo de Weyl

Hermann Weyl introdujo una prescripción para asociar un operador cuántico a una función de variables en el espacio fase [27]. Esta técnica provee una manera sistemática para describir espacios no-conmutativos y para el estudio de teorías de campo ahí definidas.

Se considera el álgebra de funciones en un espacio euclidiano  $d$ -dimensional,  $\mathbb{R}^d$ . Además, se supone que todos los campos definidos en  $\mathbb{R}$  son funciones de Schwartz que decrecen rápidamente en el infinito,

$$\sup_x (1 + |x|^2)^{k+n_1+\dots+n_d} |\partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d} f(x)|^2 < \infty \quad (2.1.1)$$

para cualquier conjunto de enteros  $k, n_\mu \in \mathbb{Z}_+$  y con  $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$ .

La condición de tener funciones de Schwartz también implica que cualquier función  $f(x)$  se puede representar mediante su transformada de Fourier,

$$\tilde{f}(k) = \int d^d x e^{-ik_\mu x_\mu} f(x). \quad (2.1.2)$$

Se define el espacio no-conmutativo sustituyendo las variables  $x_\mu$  por operadores hermitianos  $\hat{x}_\mu$  que satisfacen la relación (1.2.1). Los operadores  $\hat{x}_\mu$  generan un álgebra no-conmutativa. La discretización de Weyl da una correspondencia uno-a-uno entre el álgebra de campos en  $\mathbb{R}^d$  y estos operadores.

Dada la función  $f(x)$  y sus coeficientes de Fourier, se define el *operador de Weyl* de  $f$  por

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{f}(k) e^{ik_\mu \hat{x}_\mu}. \quad (2.1.3)$$

El operador  $\hat{\mathcal{W}}[f]$  es hermitiano si  $f$  toma valores reales.

Usando la transformada de Fourier (2.1.2), el operador de Weyl se puede escribir en términos de un mapeo  $\Delta$  entre campos y operadores,

$$\hat{\mathcal{W}}[f] = \int d^d x f(x) \Delta(x), \quad (2.1.4)$$

con

$$\Delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik_\mu \hat{x}_\mu} e^{-ik_\nu x_\nu}. \quad (2.1.5)$$

El operador (2.1.5) es hermitiano,  $\Delta^\dagger(x) = \Delta(x)$ , y describe una base mixta para campos y operadores en el espacio-tiempo. El campo  $f(x)$  se puede interpretar como la representación en el espacio de coordenadas del operador  $\hat{\mathcal{W}}[f]$ .

En este espacio, se introducen derivadas de operadores a través del operador anti-hermitiano  $\hat{\partial}_\mu$ , definido mediante las relaciones de conmutación

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}_\nu] = \delta_{\mu\nu}, \quad [\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0. \quad (2.1.6)$$

A partir de estas definiciones se sigue que

$$\begin{aligned} [\hat{\partial}_\nu, \Delta(x)] &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik_\alpha x_\alpha} \left( ik_\mu [\hat{\partial}_\nu, \hat{x}_\mu] - \frac{k_\mu^2}{2} [\hat{\partial}_\nu, \hat{x}_\mu^2] - \frac{ik_\mu^3}{6} [\hat{\partial}_\nu, \hat{x}_\mu^3] + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(ik_\mu)^n}{n!} [\hat{\partial}_\nu, \hat{x}_\mu^n] + \dots \right) \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik_\alpha x_\alpha} \left( ik_\nu - k_\nu^2 \hat{x}_\nu - \frac{ik_\nu^3}{3} \hat{x}_\nu^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(ik_\nu)^n}{(n-1)!} \hat{x}_\nu^{n-1} + \dots \right) \\ &= -\partial_\nu \Delta(x). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Usando esta propiedad al integrar por partes (2.1.4), se demuestra que

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \int d^d x \partial_\mu f(x) \Delta(x) = \hat{\mathcal{W}}[\partial_\mu f]. \quad (2.1.8)$$

Los operadores de traslación se pueden representar por operadores unitarios  $e^{v_\mu \hat{\partial}_\mu}$ ,  $v \in \mathbb{R}^d$ , con

$$e^{v_\nu \hat{\partial}_\nu} \Delta(x) e^{-v_\mu \hat{\partial}_\mu} = \Delta(x + v). \quad (2.1.9)$$

La propiedad (2.1.9) implica que cualquier traza cíclica,  $\text{Tr}$ , definida en el álgebra de los operadores de Weyl, tiene la característica de que  $\text{Tr} \Delta(x)$  es independiente de  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Si se elige la normalización  $\text{Tr} \Delta(x) = 1$ , la ec. (2.1.4) implica que la traza está dada por una integración en el espacio-tiempo:

$$\text{Tr} \hat{\mathcal{W}} = \int d^d x f(x). \quad (2.1.10)$$

En este sentido, la operación  $\text{Tr}$  es equivalente a integrar sobre las coordenadas  $x_\mu$ .

Si al calcular el producto de los operadores  $\Delta(x)\Delta(y)$ , se usa la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^{ik_\mu \hat{x}_\mu} e^{ik'_\nu \hat{x}_\nu} = e^{-(i/2)\Theta_{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k+k')_\nu \hat{x}_\nu},$$

y se usa

$$\Delta(z) = \int \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{i(k+k')_\mu \hat{z}_\mu} e^{-i(k+k')_\nu \hat{z}_\nu},$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta(x)\Delta(y) &= \int \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}_\mu} e^{-(i/2)\Theta_{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{-ik_\nu x_\nu - ik'_\mu y_\mu} \\ &= \int \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} \int d^d z e^{i(k+k')_\mu z_\mu} \Delta(z) e^{-(i/2)\Theta_{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} \\ &\times e^{-ik_\nu x_\nu - ik'_\mu y_\mu}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Si  $\Theta$  es una matriz invertible (lo que requiere que la dimensión  $d$  sea par), al realizar las integrales sobre  $k$  y  $k'$  se obtiene [28]

$$\Delta(x)\Delta(y) = \frac{1}{\pi^d |\det(\Theta)|} \int d^d z \Delta(z) e^{-2i(\Theta^{-1})_{\mu\nu} (x-z)_\mu (y-z)_\nu}. \quad (2.1.12)$$

Usando la normalización de la traza y la antisimetría de  $\Theta$ , se concluye que los operadores  $\Delta(x)$  para  $x \in \mathbb{R}^d$  forman un conjunto ortonormal,

$$\text{Tr} (\Delta(x)\Delta(y)) = \delta^d(x - y). \quad (2.1.13)$$

Este último resultado implica que la inversa de la transformación  $f(x) \rightarrow \hat{\mathcal{W}}[f]$  es

$$f(x) = \text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]\Delta(x)). \quad (2.1.14)$$

## 2.2. Producto estrella de Groenewold-Moyal

Considérese el producto de dos operadores de Weyl  $\hat{\mathcal{W}}[f(y)]$  y  $\hat{\mathcal{W}}[g(z)]$ . Usando el mapeo inverso (2.1.14) es posible obtener la representación en coordenadas de dicho producto,

$$h(x) = \text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]\Delta(x)). \quad (2.2.1)$$

En términos del operador (2.1.5) y usando la ec. (2.1.12), el producto de los operadores de Weyl es

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] &= \int \int d^d y d^d z f(y)g(z)\Delta(y)\Delta(z) \\ &= \frac{1}{\pi^d |\det(\Theta)|} \int \int \int d^d y d^d z d^d u f(y)g(z)\Delta(u) \\ &\times e^{-2i(\Theta^{-1})_{\mu\nu}(y-u)_\mu(z-u)_\nu}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por  $\Delta(x)$  y tomando la traza:

$$\begin{aligned} h(x) &= \text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g]\Delta(x)) \\ &= \frac{1}{\pi^d |\det(\Theta)|} \int \int d^d y d^d z f(y)g(z) e^{-2i(\Theta^{-1})_{\mu\nu}(y-x)_\mu(z-x)_\nu} \\ &= f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta_{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) := f(x) \star g(x), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

donde se usó la relación (2.1.13). Este es el llamado *producto estrella de Groenewold-Moyal*. Usando este producto, se llega a

$$\hat{\mathcal{W}}[f]\hat{\mathcal{W}}[g] = \hat{\mathcal{W}}[f \star g], \quad (2.2.4)$$

es decir, el producto de dos operadores de Weyl es igual al operador de Weyl del producto estrella de las funciones en el espacio de coordenadas.

El producto estrella es asociativo, pero no es conmutativo. Debido a la ciclicidad de la traza (2.1.10), la integral

$$\text{Tr}(\hat{\mathcal{W}}[f_1]\hat{\mathcal{W}}[f_2] \cdots \hat{\mathcal{W}}[f_n]) = \int d^d x f_1(x) \star f_2(x) \star \cdots \star f_n(x) \quad (2.2.5)$$

es invariante bajo permutaciones cíclicas de las funciones  $f_n(x)$ . En particular, como  $\Theta$  es antisimétrico:

$$\begin{aligned}
\int d^d x f(x) \star g(x) &= \int d^d x f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta_{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) \\
&= \int d^d x f(x) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n (\overleftarrow{\partial}_\mu \Theta_{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu)^n\right] g(x) \\
&= \int d^d x f(x) g(x). \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

Usando la definición (2.2.3), el conmutador-estrella de dos funciones se puede representar como

$$[f(x), g(x)]_\star = f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x) = 2i f(x) \sin\left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta_{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x); \tag{2.2.7}$$

mientras que el anticonmutador-estrella es

$$f(x) \star g(x) + g(x) \star f(x) = 2f(x) \cos\left(\frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \Theta_{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x). \tag{2.2.8}$$

El conmutador-estrella de la función  $f(x)$  con las coordenadas  $x_\mu$  es útil para generar derivadas,

$$[x_\mu, f(x)]_\star = x_\mu \star f(x) - f(x) \star x_\mu = i\Theta_{\mu\nu} \partial_\nu f(x). \tag{2.2.9}$$

Además, con la definición (2.2.7), es posible reescribir la relación de conmutación (1.2.1) en términos de las coordenadas espacio-temporales:

$$[x_\mu, x_\nu]_\star = x_\mu \star x_\nu - x_\nu \star x_\mu = i\Theta_{\mu\nu}. \tag{2.2.10}$$

Por lo tanto, el espacio-tiempo no-conmutativo se puede trabajar mediante el uso de productos ordinarios en el álgebra no-conmutativa de operadores de Weyl, o a través de la deformación del producto ordinario del álgebra conmutativa de funciones en  $\mathbb{R}^d$  al producto estrella no-conmutativo.

donde  $G(x)$  es un campo matricial estrella-unitario,

$$G(x) \star G(x)^\dagger = G(x)^\dagger \star G(x) = \mathbb{1}_N. \quad (2.3.8)$$

Es importante notar que las expresiones en la teoría de norma no-conmutativa incluyen el álgebra del grupo de Lie correspondiente. Por la propiedad

$$(g \star h)^\dagger = h^\dagger \star g^\dagger, \quad (2.3.9)$$

el producto estrella de dos campos matriciales unitarios,  $g$  y  $h$ , siempre es unitario, y el grupo  $U(N)$  es cerrado bajo el producto estrella. Sin embargo, el grupo especial unitario,  $SU(N)$ , no da ningún grupo de norma en el espacio no-conmutativo euclidiano pues, en general,

$$\det(g \star h) \neq \det(g) \star \det(h). \quad (2.3.10)$$

Para construir observables invariantes de norma-estrella, considérese un contorno suave arbitrariamente orientado,  $C_v$ , en el espacio-tiempo que conecta a los puntos  $x$  y  $x+v$ . La holonomía del campo de norma sobre el contorno es descrita por el transportador paralelo no-conmutativo

$$\mathcal{U}(x; C_v) = \text{P exp}_\star \left( i \int_{C_v} d\xi_\mu A_\mu(x + \xi) \right), \quad (2.3.11)$$

P indica el orden de la trayectoria y  $\xi$  parametriza al contorno. El subíndice  $\star$  en la ec. (2.3.11) establece que en la expansión de la exponencial se debe usar el producto estrella (2.2.3).

El transportador paralelo (2.3.11) es un campo matricial estrella-unitario de  $N \times N$  y transforma bajo la ec. (2.3.7) como

$$\mathcal{U}(x; C_v) \rightarrow G(x) \star \mathcal{U}(x; C_v) \star G^\dagger(x+v). \quad (2.3.12)$$

En la teoría de campos en espacios NC, las traslaciones espaciales se pueden hacer mediante el producto estrella de ondas planas,

$$G(x+v) = e^{ik_\mu x_\mu} \star G(x) \star e^{-ik_\rho x_\rho} \quad \text{con} \quad k_\mu = (\Theta^{-1})_{\mu\nu} v_\nu. \quad (2.3.13)$$

La propiedad (2.3.13) se puede demostrar usando la transformada de Fourier para ondas planas arbitrarias  $e^{ip_\mu x_\mu}$  y la ecuación de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^{ik_\mu x_\mu} \star e^{ip_\nu x_\nu} \star e^{-ik_\alpha x_\alpha} = e^{ik_\mu x_\mu} \star e^{-ik_\alpha x_\alpha} \star e^{ip_\nu x_\nu} e^{ip_\mu \Theta_{\mu\beta} k_\beta} = e^{ip_\mu (x_\mu + \Theta_{\mu\nu} k_\nu)}. \quad (2.3.14)$$



Con la definición (2.3.11) y la ec. (2.3.13), se asocia un observable norma-estrella invariante con una curva arbitraria  $C_v$  como

$$\mathcal{O}(C_v) = \int d^d x \operatorname{tr}_N (\mathcal{U}(x); C_v) \star e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (2.3.15)$$

La invarianza sigue de la ec. (2.3.13) y la ciclicidad de la traza sobre el producto estrella.

# Capítulo 3

## Modelo $\lambda\phi^4$ NC

### 3.1. Acción escalar del modelo $\lambda\phi^4$ NC

En el modelo  $\lambda\phi^4$  conmutativo; es decir, en un espacio conmutativo, la acción euclidiana es

$$S[\phi] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi^2(x) + \frac{\lambda}{4} \phi^4(x) \right), \quad (3.1.1)$$

donde  $\phi$  es un campo escalar real y  $d$  la dimensión espacio-temporal.

Para pasar a una teoría no-conmutativa, se puede usar la discretización de Weyl, a través de los operadores de Weyl  $\hat{\phi}$ , o se puede usar el producto estrella (2.2.3). En términos de los operadores de Weyl,  $\hat{\phi}$ , correspondientes al campo  $\phi(x)$ , la acción es

$$S[\hat{\phi}] = \text{Tr} \left( \frac{1}{2} [\hat{\partial}_\mu, \hat{\phi}]^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4} \hat{\phi}^4 \right). \quad (3.1.2)$$

Aplicando la transformación inversa (2.1.14) a la acción (3.1.2) y con ayuda de la ec. (2.2.4), la representación en el espacio de coordenadas de la acción es

$$S[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4} \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right]. \quad (3.1.3)$$

Por la propiedad (2.2.6), los términos cinético y de masa, en (3.1.3) no contienen el producto estrella. Como consecuencia de esa misma propiedad, las

## 2.3. Teoría de norma-estrella

Nota: a partir de este punto, se adoptará la notación  $\hat{f} := \hat{\mathcal{W}}[f]$ .

Para definir una teoría de Yang-Mills en un plano NC se debe generalizar el mapeo (2.1.5) al álgebra de matrices  $N \times N$ . Sea  $A_\mu(x)$  un campo hermitiano de norma en  $\mathbb{R}^d$ , que pertenece al álgebra de  $U(N)$ . Se introduce el operador de Weyl de  $A_\mu$  al tomar la traza del producto tensorial de  $\Delta(x)$  y el campo de norma

$$\hat{A}_\mu = \int d^d x \Delta(x) \otimes A_\mu(x), \quad A_\mu \in \{\text{álgebra de } U(N)\}. \quad (2.3.1)$$

Usando la propiedad (2.1.8), se define una versión NC de la acción de Yang-Mills

$$S[\hat{A}] = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr} \text{tr}_N ([\hat{\partial}_\mu, \hat{A}_\nu] - [\hat{\partial}_\nu, \hat{A}_\mu] - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu])^2, \quad (2.3.2)$$

donde  $\text{tr}_N$  es la traza matricial ordinaria. Esta acción es invariante bajo transformaciones de la forma

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{G} \hat{A}_\mu \hat{G}^\dagger - i\hat{G} [\hat{\partial}_\mu, \hat{G}], \quad (2.3.3)$$

siendo  $\hat{G}$  un elemento unitario arbitrario,

$$\hat{G} \hat{G}^\dagger = \hat{G}^\dagger \hat{G} = \hat{\mathbb{1}} \otimes \mathbb{1}_N. \quad (2.3.4)$$

El símbolo  $\hat{\mathbb{1}}$  es la identidad del álgebra de Weyl, mientras que  $\mathbb{1}_N$  es una matriz unitaria de  $N \times N$ .

Al usar el mapeo inverso (2.1.14), para pasar de operadores de Weyl al espacio de coordenadas, la acción de Yang-Mills se lee como

$$S[A] = -\frac{1}{4g^2} \int d^d x \text{tr}_N (F_{\mu\nu}(x) \star F_{\mu\nu}(x)). \quad (2.3.5)$$

El tensor no-conmutativo de esfuerzo es

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i[A_\mu(x), A_\nu(x)]_\star. \quad (2.3.6)$$

La invarianza bajo transformaciones unitarias en el espacio de operadores se traduce en invarianza de la acción bajo transformaciones de norma-estrella, dadas por

$$A_\mu(x) \rightarrow G(x) \star A_\mu(x) \star G(x)^\dagger - iG(x) \star \partial_\mu G(x)^\dagger, \quad (2.3.7)$$

teorías de campo no-conmutativa y conmutativa son idénticas para campos libres. La diferencia entre las versiones ordinaria y NC de la teoría viene del término de interacción, que se puede escribir como [14, 28]

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\phi}^4) &= \int d^d x \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \\ &= \prod_{a=1}^4 \int \frac{d^d k_a}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_a) (\pi)^d \delta^d \left( \sum_{a=1}^4 k_a \right) V(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

donde

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = \prod_{a < b} e^{-(i/2)k_a \wedge k_b} \quad (3.1.5)$$

y

$$k_a \wedge k_b = k_{a\mu} \Theta_{\mu\nu} k_{b\nu} = -k_b \wedge k_a. \quad (3.1.6)$$

Como el vértice de interacción (3.1.5) contiene un factor de fase dependiente del momentum, la acción es no-local. Cuando  $\theta = 0$ , se recupera la teoría de campo ordinaria, de aquí se podría pensar que la no-localidad es despreciable para energías de escala mucho menor que  $1/\sqrt{\theta}$ , en unidades naturales. Esto no es así. De hecho, los efectos de la no-localidad se pueden observar directamente de la representación de “kernel” integral de Fourier del producto de dos campos,  $f$  y  $g$ . Si los campos están definidos en una región de tamaño  $\delta \ll \sqrt{\theta}$ , el producto estrella  $f \star g$  es no-cero para una región de tamaño  $\theta/\delta$ . Por ejemplo, si  $f(x) = g(x) = \delta(x)$  y teniendo en cuenta el desarrollo para llegar a (2.2.3),

$$\delta^d(x) \star \delta^d(x) = \frac{1}{\pi^d |\det(\Theta)|}; \quad (3.1.7)$$

es decir, el producto estrella de dos fuentes puntuales se hace infinitamente no-local, aunque, al menos, está definido. Además, en este ejemplo, la regularización UV NC funciona adecuadamente.

## 3.2. El toro no-conmutativo

En esta sección se sustituirá el espacio euclidiando  $\mathbb{R}^d$  por el toro  $d$ -dimensional  $\mathbb{T}^d$ , donde el álgebra define funciones automáticamente periódicas. Sea  $\Sigma_{\mu\alpha}$  la matriz de periodo,  $d \times d$ , del toro. Las matrices  $\Sigma_{\mu\alpha}$  definen

periodos de las direcciones,  $\alpha$ , de  $\mathbb{T}^d$ ,

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + \Sigma_{\mu\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, d. \quad (3.2.1)$$

Como las funciones deben ser inyectivas en el toro, los momentos  $\vec{k}$  se discretizan según

$$k_\mu = 2\pi(\Sigma^{-1})_{\mu\alpha}m_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.2)$$

Entonces, para describir la deformación del álgebra es necesario restringirse a la sub-álgebra del espacio  $\mathbb{R}^d$  NC generada por la *base de operadores unitarios de Weyl*,

$$\hat{Z}_\alpha = e^{2\pi i(\Sigma^{-1})_{\mu\alpha}\hat{x}_\mu}. \quad (3.2.3)$$

A partir de la ec. (3.2.3), se sigue que

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i\tilde{\Theta}_{\alpha\beta}}\hat{Z}_\beta\hat{Z}_\alpha &= e^{-2\pi i\tilde{\Theta}_{\alpha\beta}}e^{2\pi i((\Sigma^{-1})_{\nu\beta}\hat{x}_\nu+(\Sigma^{-1})_{\mu\alpha}\hat{x}_\mu)} \\ &\times e^{2\pi^2 i\Theta_{\mu\nu}(\Sigma^{-1})_{\mu\alpha}(\Sigma^{-1})_{\nu\beta}} = \hat{Z}_\alpha\hat{Z}_\beta, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

con

$$\tilde{\Theta}_{\alpha\beta} = 2\pi(\Sigma^{-1})_{\mu\alpha}\Theta_{\mu\nu}(\Sigma^{-1})_{\nu\beta}. \quad (3.2.5)$$

Las relaciones de conmutación (3.2.4) definen el álgebra de funciones del toro NC.

Cualquier función  $f(x)$  en  $\mathbb{T}^d$  se puede representar por su transformada de Fourier,

$$f(x) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} f_{\vec{m}} e^{2\pi i(\Sigma^{-1})_{\mu\alpha}m_\alpha x_\mu}. \quad (3.2.6)$$

El álgebra de Weyl correspondiente es generada por los operadores (3.2.3) y la discretización de Weyl es ahora

$$\hat{f} = \int d^d x f(x) \Delta(x), \quad (3.2.7)$$

donde se integra sobre  $\mathbb{T}^d$  y

$$\Delta(x) = \frac{1}{|\det(\Sigma)|} \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^d} \prod_{\alpha=1}^d (\hat{Z}_\alpha)^{m_\alpha} \prod_{\alpha < \beta} e^{-\pi i m_\alpha \tilde{\Theta}_{\alpha\beta} m_\beta} e^{-2\pi i(\Sigma^{-1})_{\mu\alpha}m_\alpha x_\mu} \quad (3.2.8)$$

es un operador periódico,

$$\Delta(x + \Sigma_{\mu\alpha}\hat{\mu}) = \Delta(x), \quad \alpha = 1, \dots, d, \quad (3.2.9)$$

siendo  $\hat{\mu}$  el vector unitario en la dirección  $\mu$ .

En forma análoga a  $\mathbb{R}^d$ , en  $\mathbb{T}^d$  se pueden introducir operadores anti-hermitianos de derivada,  $\hat{\partial}$ , que se definen por su efecto sobre la base de Weyl (3.2.3),

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{Z}_\alpha] = 2\pi i (\Sigma^{-1})_{\mu\alpha} \hat{Z}_\alpha. \quad (3.2.10)$$

La acción de este operador de derivada aplicado a la base mixta (3.2.8) tiene la propiedad de que

$$[\hat{\partial}_\mu, \Delta(x)] = -\partial_\mu \Delta(x). \quad (3.2.11)$$

### 3.3. Formulación en el espacio discretizado

Supóngase una retícula con puntos  $x_\mu$  restringidos a los valores discretos  $x_\mu \in a\mathbb{Z}$ , donde  $a$  es el espaciamiento de la retícula. En este espacio, las componentes del momentum  $k_\mu$  se identifican bajo

$$k_\mu \rightarrow k_\mu + \frac{2\pi}{a} \delta_{\mu\nu}, \quad \nu = 1, \dots, d, \quad (3.3.1)$$

para cada dirección  $\nu$ . Nuevamente, la no-conmutatividad aparece al sustituir las coordenadas  $x_\mu$  por operadores hermitianos  $\hat{x}_\mu$  que satisfacen el conmutador (1.2.1). El momentum se discretiza como

$$k_\mu = 2\pi (\Sigma^{-1})_{\nu\mu} m_\nu, \quad m_\nu \in \mathbb{Z}, \quad (3.3.2)$$

que surge de la condición

$$\Theta_{\mu\nu} k_\nu = 2an, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.3.3)$$

Los periodos  $\Sigma_{\mu\nu}$  son múltiplos enteros del espaciamiento  $a$ . La periodicidad (3.3.1) se puede representar a través de los enteros  $m_\nu$  como

$$m_\nu \rightarrow m_\nu + \frac{1}{a} \Sigma_{\mu\nu}. \quad (3.3.4)$$

De la ec. (3.3.3) se observa que el límite continuo,  $a \rightarrow 0$ , no conmuta con el límite conmutativo,  $\theta \rightarrow 0$ . Si primero se toma el límite  $a \rightarrow 0$ , se obtiene nuevamente en el espacio infinito  $\mathbb{R}^d$ . Al tomar primero el límite  $\theta \rightarrow 0$ , el espacio-tiempo se convierte en un solo punto.

En el espacio discretizado, las coordenadas  $x_\mu$  están restringidas a una red periódica

$$x_\mu \rightarrow x_\mu + \Sigma_{\mu\nu}, \quad (3.3.5)$$

en cada calor posible de  $\nu$ . Por lo tanto, la regularización en la retícula obliga a tener un espacio-tiempo compacto (ver Sección 1.2).

A causa de la discretización del momentum, es necesario emplear los operadores de coordenadas (3.2.3), que generan el álgebra de funciones (3.2.4) en el toro NC. Como ahora se trata de una versión discretizada de  $\mathbb{T}^d$ , en lugar del operador de derivada definido en la ec. (3.2.10), se usa el operador *shift*,  $\hat{D}_\mu$ , dado, en un espacio continuo, por

$$\hat{D}_\mu = e^{a\hat{\partial}_\mu}. \quad (3.3.6)$$

En el espacio discreto, este operador realiza traslaciones en unidades del espaciamento  $a$  de la retícula

$$\hat{D}_\mu \hat{Z}_\nu \hat{D}_\mu^\dagger = e^{2\pi i a (\Sigma^{-1})_{\nu\mu}} \hat{Z}_\nu. \quad (3.3.7)$$

Con ayuda del operador (3.2.8), el mapeo entre el campo  $f(x)$  y su operador de Weyl,  $\hat{f}$ , es

$$\hat{f} = \sum_x f(x) \Delta(x) \quad (3.3.8)$$

$$f(x) = \text{Tr}(\hat{f} \Delta(x)), \quad (3.3.9)$$

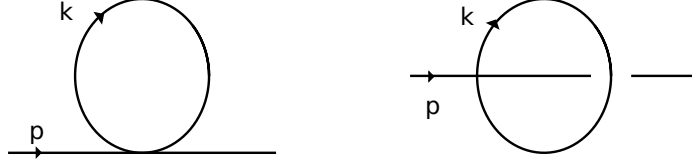
donde  $x$  es un punto en la retícula. La operación  $\text{Tr}$  está dada de forma única por

$$\text{Tr} \hat{f} = \sum_x f(x), \quad \text{con} \quad \text{Tr} \Delta(x) = 1 \quad \forall x \in (a\mathbb{Z})^d. \quad (3.3.10)$$

La versión discretizada del producto estrella (2.2.3) se encuentra al aplicar el mapeo inverso (3.3.9) al producto de los operadores de Weyl  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$ ,

$$f(x) \star g(x) := \text{Tr}(\hat{f} \hat{g} \Delta(x)) = \frac{1}{|\det(\Sigma)|} \sum_{y,z} e^{-2i(\Theta^{-1})_{\mu\nu} y_\mu z_\nu} f(x+y) g(x+z). \quad (3.3.11)$$

Una vez más, hay dos descripciones del espacio-tiempo NC, se pueden usar operadores de Weyl o funciones en  $(a\mathbb{Z})^d$  con un producto deformado.



**Figura 3.1:** Contribuciones planar (izquierda) y no-planar (derecha), a un lazo, de la función de dos puntos (3.4.1). Por conservación de momentum, el vértice (3.1.5) es invariante únicamente bajo permutaciones cíclicas de las componentes de momentum  $k_a$ , de ahí la diferencia entre los diagramas planar (las líneas del diagrama de Feynman no se cruzan) y no-planar (hay un cruzamiento en las líneas del diagrama).

### 3.4. Mezcla UV/IR

Considérese la renormalización de la masa en la teoría de campo  $\lambda\phi^4$ . Para esto, se evalúa la función de dos-puntos irreducible para una partícula,

$$\Pi(p) = \langle \tilde{\phi}(p)\tilde{\phi}(-p) \rangle_{1PI} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Pi^{(n)}(p). \quad (3.4.1)$$

En el orden más bajo, la función de dos-puntos es  $\Pi^{(0)}(p) = p^2 + m^2$ . La contribución a un lazo se divide en dos partes, un diagrama planar  $\Pi_p^{(1)}$ , y uno no-planar  $\Pi_{np}^{(1)}$  que conducen a las integrales de Feynman [29]

$$\Pi_p^{(1)} = \frac{1}{3} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (3.4.2)$$

$$\Pi_{np}^{(1)}(p) = \frac{1}{6} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \wedge p}}{k^2 + m^2}. \quad (3.4.3)$$

Se espera que la contribución no-planar sea, en general, convergente a altas energías, debido a las oscilaciones rápidas del factor de fase  $e^{ik \wedge p}$ . Sin embargo, cuando  $p_\mu \Theta_{\mu\nu} = 0$ ,  $k \wedge p = 0$ , en ese caso, las divergencias UV de la parte planar reaparecen a través de la relación

$$\Pi_p^{(1)} = 2\Pi_{np}^{(1)}(0). \quad (3.4.4)$$



Por lo tanto, el diagrama no-planar es singular para  $p_\mu \Theta_{\mu\nu}$  pequeño y el corte efectivo para una gráfica a un lazo en el espacio de momentum es  $1/\sqrt{|p \bullet p|}$ , donde

$$p \bullet p = \theta^2 p^2. \quad (3.4.5)$$

Para momentum pequeño, el factor de fase NC es irrelevante y el diagrama no-planar hereda las singularidades UV usuales, pero en forma de una divergencia de larga distancia. Considerar el parámetro de no-conmutatividad,  $\theta$ , sustituye la divergencia estándar UV con un comportamiento IR singular. Este comportamiento en las escalas UV e IR en teoría de campo NC es la llamada mezcla UV/IR. La Figura 3.1 muestra gráficamente la diferencia entre los diagramas planar y no-planar.



# Capítulo 4

## Formulación matricial del modelo $\lambda\phi^4$ NC

### 4.1. Representación matricial de la acción del modelo $\lambda\phi^4$ NC en $d = 2$

Este proyecto emplea simulaciones de Monte Carlo para verificar la existencia de la fase de bandas en el modelo  $\lambda\phi^4$  en un plano NC y su extrapolación al LED. En la sección anterior, se presentó una formulación discretizada para realizar el estudio; sin embargo, la implementación del producto estrella hace impráctica tal formulación para los fines del estudio numérico. La manera de reducir esta complicación es mapear el modelo discretizado en uno matricial.

Considérese el campo escalar  $\phi_x$  en una retícula de  $N \times N$  sitios, el mapeo a la forma matricial conduce a la acción [30]

$$S[\hat{\phi}] = N \text{tr} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^2 \left( \hat{\Gamma}_{\mu} \hat{\phi} \hat{\Gamma}_{\mu}^{\dagger} - \hat{\phi} \right)^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4} \hat{\phi}^4 \right], \quad (4.1.1)$$

donde  $\hat{\phi}$  es una matriz hermitiana  $N \times N$  y  $\hat{\Gamma}_{\mu}$ ,  $\mu = 1, 2$ , son los *twist eaters*, que hacen las veces de la derivada en el término cinético de la ec. (4.1.1). El término cuártico de la formulación matricial de la acción es responsable del gasto de tiempo dominante en las simulaciones.

La función de los twist eaters es la traslación, en una unidad  $a$ , de la

retícula. La condición sobre estas matrices es que deben satisfacer el álgebra de 't Hooft-Weyl [28, 30, 31],

$$\hat{\Gamma}_\mu \hat{\Gamma}_\nu = \mathcal{Z}_{\nu\mu} \hat{\Gamma}_\nu \hat{\Gamma}_\mu, \quad (4.1.2)$$

donde  $\mathcal{Z}_{\mu\nu} = \mathcal{Z}_{\nu\mu}^*$  es el factor de torsión, cuya forma general es  $\mathcal{Z}_{12} = e^{2\pi ik/N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . En el caso tratado, la forma particular del factor de torsión es [14, 15]

$$\mathcal{Z}_{12} = \exp\left(i \frac{N+1}{N} \pi\right), \quad (4.1.3)$$

por lo que  $N$  debe ser impar.

## 4.2. Construcción particular de los twist eaters

La siguiente construcción está inspirada en las referencias [14, 15]. Para esto es necesario regresar a la formulación en la retícula, en el toro NC.

En el espacio 2d NC, se define la matriz de periodo como

$$\Sigma_{\mu\nu} = Na\delta_{\mu\nu}, \quad (4.2.1)$$

donde  $a$  es el espaciamiento de la retícula y  $N$  el número de celdas en cada dirección del plano. Como se trabaja en un toro NC y dada la elección de la matriz de periodo (4.2.1), en lugar de los operadores  $\hat{x}_\mu$ ,  $\mu = 1, 2$ , se usan los operadores de coordenadas (3.2.3) bajo la forma

$$\hat{Z}_\mu = e^{2\pi i \hat{x}_\mu / (aN)}. \quad (4.2.2)$$

Estos operadores de coordenadas satisfacen la relación de conmutación

$$\hat{Z}_\mu \hat{Z}_\nu = \exp\left(-\frac{4\pi^2}{N^2 a^2} i \Theta_{\mu\nu}\right) \hat{Z}_\nu \hat{Z}_\mu = \exp\left(-\frac{4\pi}{N} i \epsilon_{\mu\nu}\right) \hat{Z}_\nu \hat{Z}_\mu, \quad (4.2.3)$$

donde se hace uso del conmutador (1.2.1) y de que

$$\Theta_{\mu\nu} = \theta \epsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} N a^2 \epsilon_{\mu\nu},$$

según la ec. (1.2.10).

Para realizar las traslaciones, el operador (3.3.6) debe satisfacer la relación

$$\hat{D}_\mu \hat{Z}_\nu \hat{D}_\mu^\dagger = e^{2\pi i \delta_{\mu\nu}/N} \hat{Z}_\nu. \quad (4.2.4)$$

El siguiente paso para llegar a una formulación matricial consiste en sustituir los operadores  $\hat{Z}_\mu$  y  $\hat{D}_\mu$  por matrices  $N \times N$  que cumplan las ecs. (4.2.3) y (4.2.4). En dos dimensiones, esto se consigue al hacer

$$\begin{aligned} \hat{D}_\mu &= \hat{\Gamma}_\mu, \quad \mu = 1, 2, \\ \hat{Z}_1 &= \hat{\Gamma}_2^{(N+1)/2}, \\ \hat{Z}_2 &= \hat{\Gamma}_1^{\dagger (N+1)/2}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

$\hat{\Gamma}_1$  y  $\hat{\Gamma}_2$  son las matrices *shift* y *clock*, respectivamente, definidas como

$$\hat{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathcal{Z}_{21}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mathcal{Z}_{21}^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{pmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Con estas definiciones, el operador  $\Delta(x)$  se convierte en una matriz  $N \times N$  dada por

$$\hat{\Delta}(x) = \sum_{m_1, m_2=1}^N \hat{Z}_1^{m_1} \hat{Z}_2^{m_2} \exp(-2\pi i m_1 m_2 / N) \exp(-\pi i m_\mu x_\mu / N). \quad (4.2.8)$$

Con esta forma de  $\hat{\Delta}$ , el mapeo entre el campo  $\phi(x)$  y la matriz  $N \times N$ ,  $\hat{\phi}$  es ahora

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \frac{1}{N^2} \sum_x \phi(x) \hat{\Delta}(x) \\ \phi(x) &= \frac{1}{N} \text{tr}(\hat{\phi} \hat{\Delta}(x)), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

donde  $\text{tr}$  es la traza de las matrices  $N \times N$ .

Haciendo uso de estos resultados, se pueden realizar de manera natural las simulaciones de Monte Carlo. Sin embargo, no se debe perder de vista que la forma de la acción (4.1.1) hace que las simulaciones requieran un tiempo de cómputo elevado. En el Apéndice B se muestra una forma de calcular la acción sin hacer explícitamente todas las multiplicaciones matriciales.

### 4.3. Construcción general de los twist eaters

Los twist eaters  $\Gamma_\mu$ ,  $\mu = 1, 2$  satisfacen la relación de conmutación

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu = e^{2\pi i Q_{\mu\nu}} \Gamma_\nu \Gamma_\mu. \quad (4.3.1)$$

La representación de los twist eaters, con rango  $p$ , matriz de flujo  $Q$  y dimensión par,  $d$ , se puede construir de la siguiente manera [28, 30]:

La matriz de flujo  $Q$  se puede rotar para tomar la forma

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ q_1 & 0 & -q_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -q_d \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & q_d & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

Dados los  $d$  flujos independientes  $q_j \in \mathbb{Z}$ , se introducen dos conjuntos de  $d$  enteros co-primos

$$\begin{aligned} N_j &= \frac{N}{\text{MCD}(N, q_j)} \\ q'_j &= \frac{q_j}{\text{MCD}(N, q_j)}, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

donde MCD es el máximo común divisor. Supóngase que existe un entero  $N_0 \in \mathbb{Z}_+$  que divide el rango del grupo de norma y el producto de  $d$  enteros  $N_j$  de (4.3.3),

$$N = N_0 \prod_{j=1}^d N_j. \quad (4.3.4)$$

La ec. (4.3.4) es una condición necesaria y suficiente para la existencia de  $d$  soluciones independientes  $\Gamma_j$ .

Entonces, las matrices  $\Gamma_j$  se pueden definir como

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{2j-1} &= \mathbb{1}_{N_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{N_{j-1}} \otimes \hat{\Gamma}_{1N_j} \otimes \mathbb{1}_{N_{j+1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{N_d} \otimes \mathbb{1}_{N_0} \\
 \Gamma_{2j} &= \mathbb{1}_{N_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{N_{j-1}} \otimes \hat{\Gamma}_{2N_j} \otimes \mathbb{1}_{N_{j+1}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{N_d} \otimes \mathbb{1}_{N_0}.
 \end{aligned}
 \tag{4.3.5}$$





# Capítulo 5

## Resultados numéricos

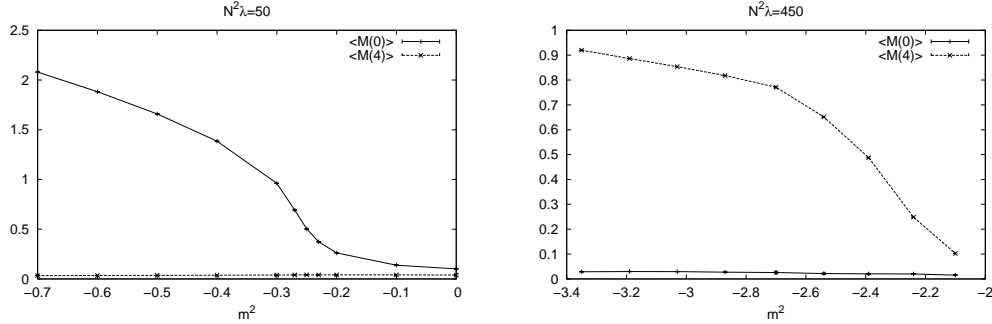
### 5.1. Diagrama de fase del modelo $\lambda\phi^4$ NC bidimensional

#### 5.1.1. El parámetro de orden

Para construir un diagrama de fase, es necesario contar con un parámetro capaz de mostrar transiciones de fase. El calor específico,  $(\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2)/N^2$ , normalmente adecuado para detectar transiciones de fase de segundo orden, podría parecer un buen parámetro de orden en este caso; sin embargo, esto presenta dos problemas. Por una parte, la estadística necesaria para observar transiciones de fase de segundo orden es muy alta. Además, el parámetro de orden empleado debe permitir distinguir cuándo se rompen dos simetrías, la discreta  $\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ , y la de traslación – que indica la aparición de la fase de bandas. Para esto, un buen candidato a mostrar transiciones de fase debe satisfacer que

$$\text{Parámetro de orden} \begin{cases} \approx 0 & \text{si la fase es desordenada,} \\ \neq 0 & \text{si hay una fase ordenada.} \end{cases}$$

Aunque estrictamente hablando las transiciones de fase sólo ocurren cuando hay una infinidad de grados de libertad, es posible explorar las transiciones numéricamente. Con el objetivo de registrar las dos posibles transiciones de fase (desordenada  $\leftrightarrow$  ordenada uniformemente y desordenada  $\leftrightarrow$  fase de ban-



**Figura 5.1:** Ejemplos del parámetro de orden (5.1.3) contra  $m^2$ , para  $N = 19$ . A la izquierda,  $N^2\lambda = 50$ , por lo que hay una transición de fase tipo Ising, donde se condensa el modo  $\langle M(0) \rangle$ , para  $m^2$  lo suficientemente negativo. A la derecha,  $N^2\lambda = 450$ , entonces la transición de fase va de desorden a orden en bandas y el modo que se condensa es  $\langle M(4) \rangle$ .

das) es útil definir la cantidad [14, 15]

$$\bar{M}(p) = \frac{1}{N} |\tilde{\phi}(p)|, \quad (5.1.1)$$

donde  $\tilde{\phi}(p)$  es la transformada de Fourier del campo  $\phi(x)$ , que depende del momentum  $p = (p_1, p_2)$ . Cuando el sistema está en la fase de desorden, el valor esperado de la cantidad (5.1.1) es cercano a cero. Mientras que cuando ocurre una transición de desorden a fase uniforme el valor esperado de  $\bar{M}(0)$  es significativamente distinto de cero,

$$\langle \bar{M}(0) \rangle = \frac{1}{N} \langle |\tilde{\phi}(0)| \rangle. \quad (5.1.2)$$

Finalmente, si  $\langle \bar{M}(p) \rangle \neq 0$  para  $p \neq (0, 0)$ , la conclusión es que existe un rompimiento de la simetría de traslación; es decir, hay una fase de bandas. En la Figura 5.1 se muestran ejemplos de la condensación de los modos para las fases uniforme y de bandas.

Ahora, al elegir el parámetro de orden, se debe tener en cuenta que en la fase de bandas pueden aparecer configuraciones con patrones rotados. Si, por ejemplo, hubiera bandas paralelas al eje  $x_1$  en una configuración y en otra bandas paralelas al eje  $x_2$ , se inducirían dos parámetros de orden diferentes de cero. Para evitar que tales rotaciones afecten las mediciones, se elige como

parámetro de orden la cantidad

$$\langle M(k) \rangle = \langle \max_{|p|=k} \bar{M}(p) \rangle, \quad (5.1.3)$$

que depende del valor absoluto del momentum.

### 5.1.2. Transiciones de fase

Usando el algoritmo de Metrópolis (ver el Apéndice A.2), se generaron configuraciones para distintos valores de  $N$ ,  $\lambda$  y  $m^2$ , para medir el parámetro de orden (5.1.3). De esta manera se generó el diagrama de fase mostrado en la Figura 5.2.

Para localizar transiciones de fase, se seleccionó un valor fijo de  $N$  y uno de  $\lambda$ , se tomó un  $m^2$  en la zona de desorden y se varió hacia la región donde se espera la transición de fase, midiendo el parámetro de orden (5.1.3) en varios puntos. A fin de distinguir con mayor claridad las transiciones de fase, se usó el correlador conectado,

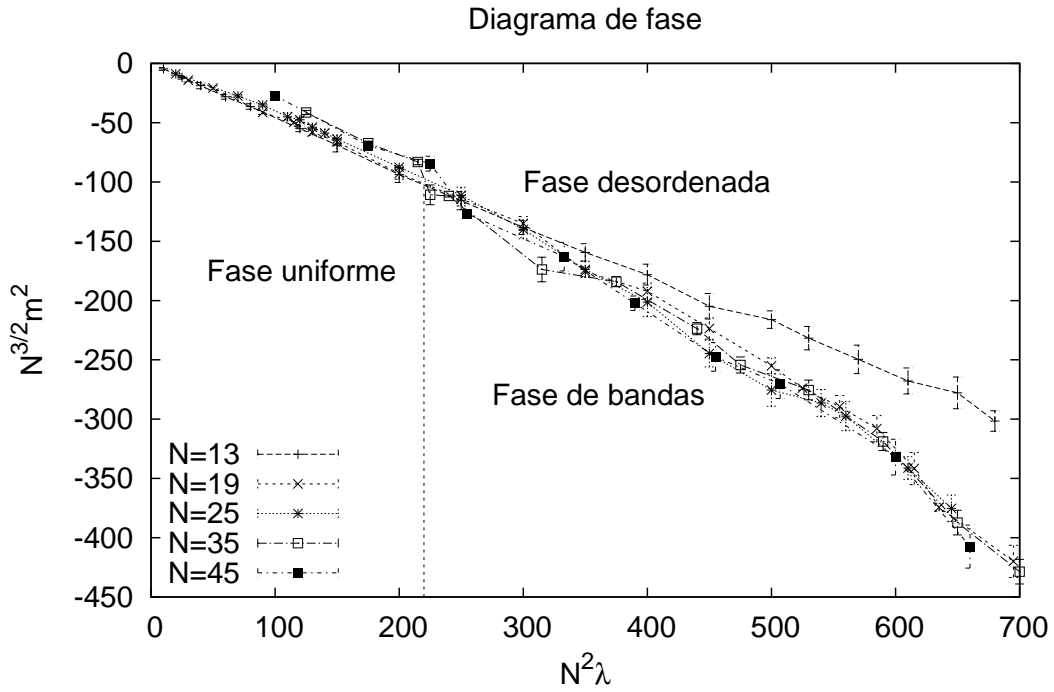
$$\langle M(k)^2 \rangle_c = \langle M(k)^2 \rangle - \langle M(k) \rangle^2, \quad (5.1.4)$$

que muestra un pico que exhibe la transición de fase del sistema.

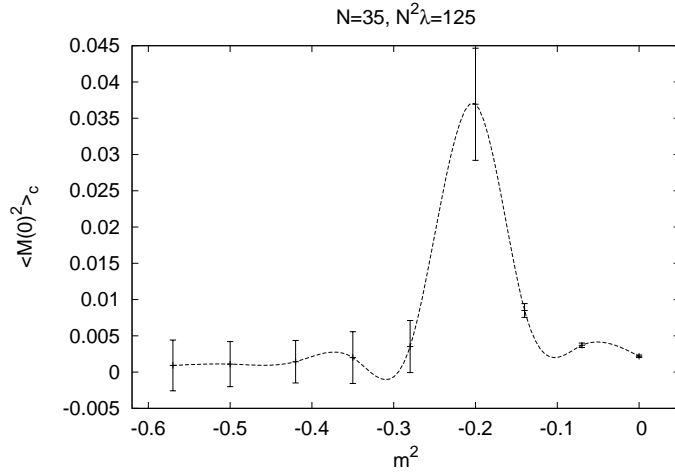
Como se observa en la Figura 5.2, el diagrama de fase se compone de una fase desordenada y un régimen ordenado, este último a su vez se divide en orden uniforme y orden en bandas. *La transición entre las fases uniforme y de bandas aún no está establecida en su totalidad. Lo que es un hecho es que conforme  $N^2\lambda$  crece aparecen las bandas, lo que implica el rompimiento espontáneo de la simetría de traslación cuando  $N \rightarrow \infty$ .*

Cuando ocurre una transición de fase tipo Ising (desorden  $\leftrightarrow$  orden uniforme) hay un pico en el parámetro de orden conectado (5.1.4) al considerar  $k = 0$ . En la Figura 5.3 se muestra un ejemplo de una transición de fase tipo Ising. La Figura 5.4 exhibe gráficamente la división de las fases desordenada y ordenada uniformemente.

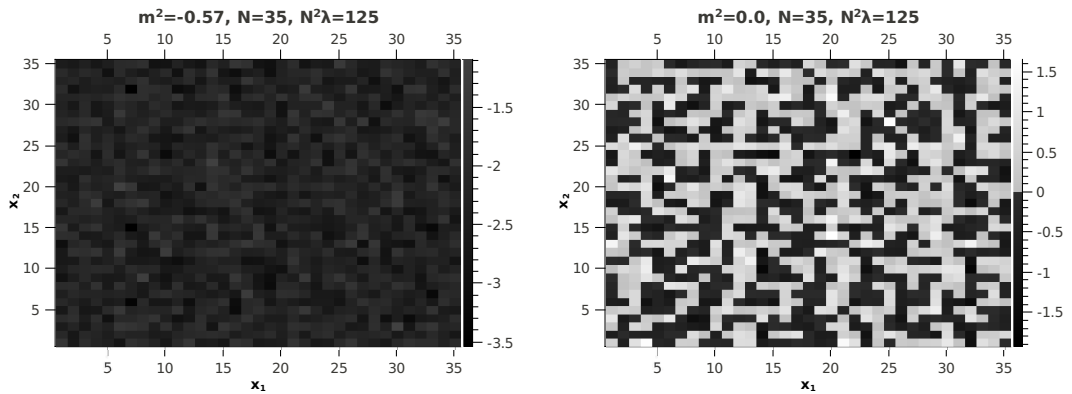
Por otra parte, cuando  $\lambda$  va tomando valores mayores, se observa un pico en el parámetro de orden conectado con  $k \neq 0$ , esto es, aparece la transición hacia la fase de bandas. En las simulaciones llevadas a cabo, el resultado de calcular el parámetro de orden conectado siempre llevaba a la misma conclusión, en la fase de bandas el valor de momentum que se manifestaba efectivamente en el sistema era  $k = 4$ . En la Figura 5.5 se



**Figura 5.2:** Diagrama de fase del modelo  $\lambda\phi^4$  NC en dos dimensiones. El régimen ordenado se divide a la vez en dos fases, una de orden uniforme y otra de bandas. La línea punteada vertical es sólo un estimado alrededor de donde ocurre la separación entre las fases ordenadas uniformemente y en bandas; sin embargo, este estudio numérico se concentra en la transición fase desordenada  $\leftrightarrow$  fase de bandas. Se observa que la línea de transición fase desordenada  $\leftrightarrow$  régimen ordenado se estabiliza para  $N \geq 19$ .



**Figura 5.3:** Parámetro de orden conectado, ec. (5.1.4), para  $k = 0$  contra  $m^2$  con  $N = 35$  y  $N^2\lambda = 125$ .



**Figura 5.4:** Ejemplos de configuraciones típicas de  $\phi(x)$  en equilibrio para  $N = 35$  y  $N^2\lambda = 125$ . A la izquierda se muestra una configuración ordenada uniformemente, para  $m^2 = -0,57$ . En la derecha está una configuración desordenada,  $m^2 = 0$ . Este es un ejemplo de una transición de fase tipo Ising. Las regiones oscuras de las figuras indican que  $\phi(x) < 0$ , mientras que las regiones claras corresponden a  $\phi(x) \geq 0$ .

observa el pico que indica la transición de la fase desordenada a la fase de bandas. Cualitativamente, la aparición de bandas en el caso 2d del modelo  $\lambda\phi^4$  NC concuerda con observaciones previas [14–16]; sin embargo, difiere de los resultados de [14, 15] en tanto que en esos trabajos el término relevante para esta fase ocurre en  $k = 1$ . De forma gráfica, el hecho de que el parámetro de orden exhiba un pico para  $k \neq 0$  se muestra en la Figura 5.6, donde en la parte ordenada hay 8 bandas.

La existencia de la fase de bandas en el modelo estudiado también coincide con modelos en la *esfera difusa* (“fuzzy sphere”, en inglés) [32–37]; esta es una esfera de radio  $R$  centrada en el origen, denotada como  $\mathbb{S}_F^2$ . Este espacio no-conmutativo se define en términos los operadores matriciales ( $N \times N$ )  $\{\hat{x}_\mu\}_{\mu=1,2,3}$ , sujetos a

$$\sum_{\mu=1}^3 \hat{x}_\mu^2 = R^2 \hat{\mathbb{1}}, \quad (5.1.5)$$

y con conmutador

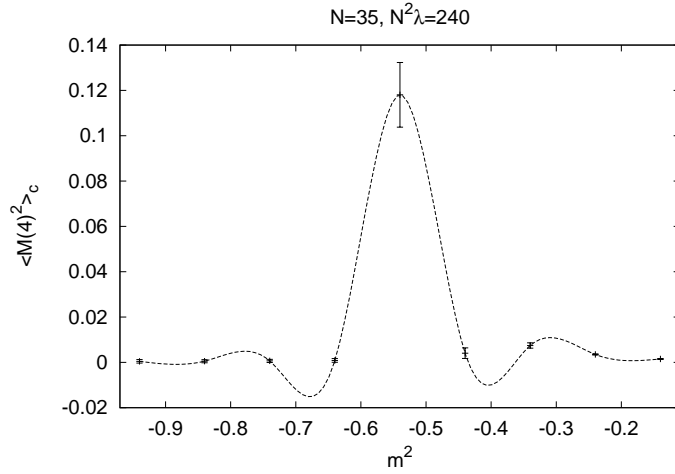
$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{2R}{\sqrt{N^2 - 1}} \hat{x}_\rho = i\epsilon_{\mu\nu\rho} \vartheta \frac{\hat{x}_\rho}{R}, \quad (5.1.6)$$

siendo  $\vartheta = 2R^2/\sqrt{N^2 - 1}$  y  $\epsilon_{\mu\nu\rho}$  el tensor antisimétrico. En la esfera difusa, los operadores  $\hat{x}_\mu$  se relacionan con los operadores de momento angular  $\hat{L}_\mu$  a través de la ecuación

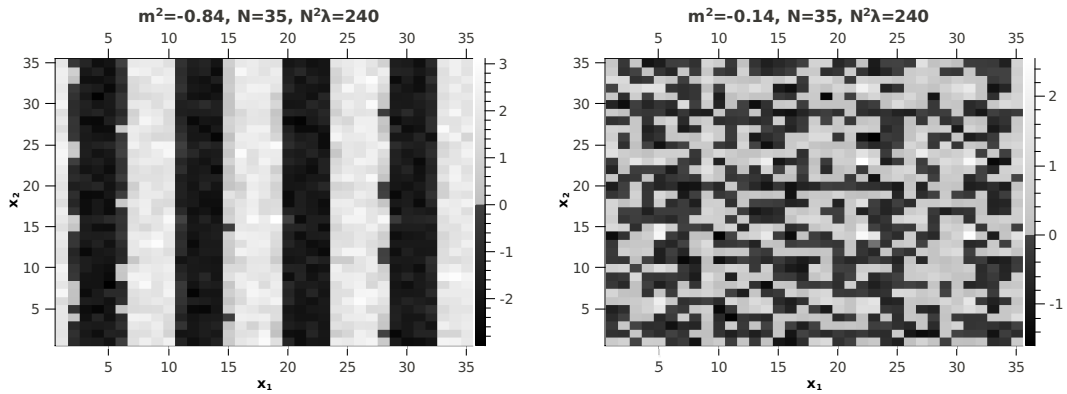
$$\hat{x}_\mu = \frac{\vartheta}{R} \hat{L}_\mu. \quad (5.1.7)$$

La relación entre el tamaño de las matrices,  $N$ , y el valor máximo de momento angular,  $l_{\text{máx}}$ , es  $N = l_{\text{máx}} + 1$ .

El diagrama de fase de la esfera difusa en dos y tres dimensiones [33–37] es cualitativamente igual al encontrado en la presente tesis, observándose también la existencia de las fases desordenada, ordenada uniformemente y ordenada no-uniformemente. De acuerdo con los trabajos en  $\mathbb{S}_F^2$ , los resultados son compatibles con el hecho de que el efecto túnel entre los mínimos del potencial puede ser mediado por configuraciones que corresponden a distribuciones no-esféricamente simétricas. En el caso 3d de la esfera difusa, con un tiempo euclidiano discretizado y la parte espacial en  $\mathbb{S}_F^2$ , aunque se observan las mismas fases, no se espera que el modelo se reduzca a su contraparte bidimensional [37].



**Figura 5.5:** Parámetro de orden conectado para  $k = 4$  contra  $m^2$  con  $N = 35$  y  $N^2\lambda = 240$ . Esta transición va de la fase desordenada a otra ordenada en bandas.



**Figura 5.6:** Ejemplos típicos de  $\phi(x)$  en equilibrio para  $N = 35$  y  $N^2\lambda = 125$  con  $k = 4$ . A la izquierda se muestra una configuración ordenada en bandas, para  $m^2 = -0,84$ . En la derecha está una configuración desordenada,  $m^2 = -0,14$ . Estas configuraciones ejemplifican una transición desorden  $\leftrightarrow$  orden en bandas. Las regiones oscuras indican  $\phi(x) < 0$ , las regiones claras muestran cuando  $\phi(x) \geq 0$ . Entre más oscura (clara) es la imagen, más negativo (positivo) es el valor de  $\phi(x)$ .

## 5.2. Extrapolación al Límite de Escalamiento Doble

### 5.2.1. Función de correlación

Una vez construido el diagrama de fase, es necesario estudiar la transición que lleva la fase desordenada a otra ordenada uniformemente u ordenada en bandas. Para esto, se considera el decaimiento del correlador espacial

$$C(x) = \langle \phi(x+y)\phi(y) \rangle. \quad (5.2.1)$$

Esta función de correlación se mide fijando un valor de  $\lambda$ , en diversos valores de  $m^2$  cercanos al valor crítico,  $m_c^2$ , tales que  $m^2 > m_c^2$ , pues si  $m^2 < m_c^2$ , el modo de bandas se condensa, lo que implica efectos del volumen finito muy fuertes. Al fijar el valor de  $\lambda$  (y no de  $N^2\lambda$ , por ejemplo), se consigue hacer  $\lambda\theta$  y  $m^2\theta$  adimensionales, manteniendo el parámetro de no-conmutatividad constante. Como se espera [14], cerca de la fase de bandas, el correlador (5.2.1) oscila, como se muestra en la Figura 5.7.

Con este correlador, la siguiente tarea es traducir la diferencia  $m^2 - m_c^2$  en una escala dimensional del espaciamiento de la retícula. Esto se hace en la fase desordenada, porque en esa región los efectos de mantener el volumen finito no son tan fuertes, como si se trabajara en la región ordenada.

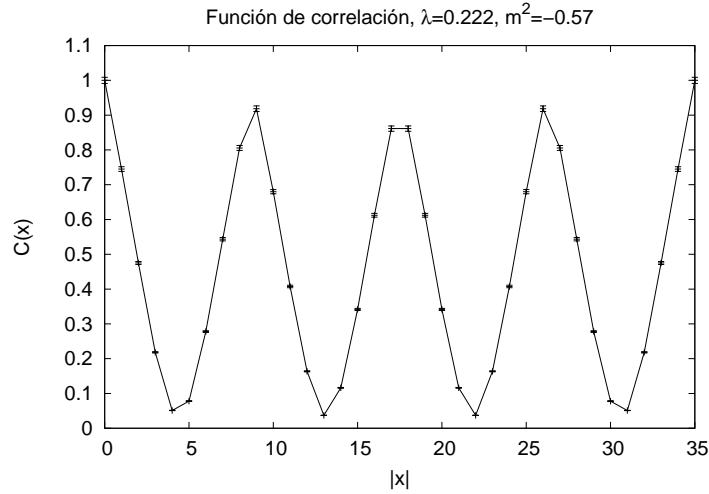
En el caso  $d = 3$  [14,15], se encuentra un regimen lineal de dispersión para  $p^2 = p_1^2 + p_2^2$  suficientemente grande y la energía  $E$  se toma del decaimiento exponencial del correlador en la dirección temporal conmutativa. Esto se consigue al analizar la relación de dispersión

$$E^2(p^2) = p^2 + M_{\text{eff}}^2, \quad (5.2.2)$$

donde  $M_{\text{eff}}^2$  es la masa efectiva. Al extrapolar el comportamiento lineal de la ec. (5.2.2) para  $p^2 = 0$ ,  $M_{\text{eff}}^2$  fija la escala dimensional de la retícula. Cabe destacar que, para  $p$  pequeño,  $E^2$  crece y se desvía del comportamiento lineal que define a  $M_{\text{eff}}^2$ .

El método anterior, sin embargo, no es viable para el caso  $d = 2$ . Como la función de correlación (5.2.1) no tiene un decaimiento exponencial, sino oscilatorio, la energía,  $E$ , no se puede definir de una manera obvia. En la siguiente sección se describe el método elegido para extraer una escala de la retícula para el modelo  $\lambda\phi^4$  NC en dos dimensiones.





**Figura 5.7:** Ejemplo del correlador (5.2.1) para  $N = 35$ , cerca de la transición fase desordenada  $\leftrightarrow$  fase de bandas. El comportamiento de esta función indica que la fase ordenada no-uniformemente corresponde a configuraciones con 8 bandas. La función de correlación se normalizó tal que  $C(0) = 1$ . (La línea que une los puntos es una guía visual.)

### 5.2.2. La fase de bandas en el LED

El método empleado para encontrar una escala dimensional del espaciamiento de la retícula hace uso del decaimiento del correlador (5.2.1) para  $|x|$  pequeño. Para esto, se fija un valor de  $\lambda$ , tal que para cualquier  $N$  exista una transición fase desordenada  $\leftrightarrow$  fase de bandas, y se mide la función de correlación para algún  $m^2 > m_c^2$  y  $N = 35$ . La elección  $N = 35$  es arbitraria, tomada para tener un valor de referencia igual para cada valor de  $N$ , según la ec. (5.2.3). Por definición, se hace  $a = 1$  unidades de retícula. Posteriormente, para la misma  $\lambda^1$ , se mide el correlador para otros valores de  $N (= 25, 45, 55)$  y se busca que el primer decaimiento del correlador coincida para los diversos valores de  $N$ , al ser graficado contra la longitud física,

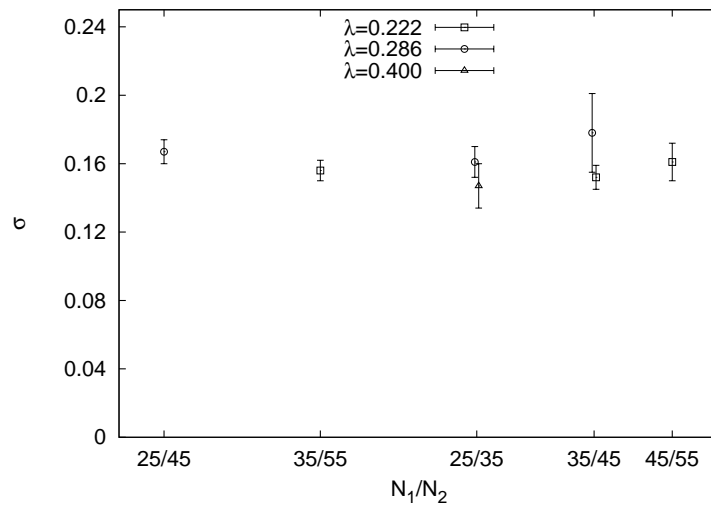
$$|x|a = |x|\sqrt{\frac{35}{N}}. \quad (5.2.3)$$

En la Figura 5.9 se muestran las gráficas que exhiben la coincidencia en el primer decaimiento del correlador (5.2.1).

<sup>1</sup>Recordando que así se hacen adimensionales las cantidades  $\lambda\theta$  y  $m^2\theta$ , con  $\theta$  constante.

$\lambda$	$N_1$	$N_2$	$\sigma$
0,222	35	45	$0,152 \pm 0,007$
0,222	45	55	$0,161 \pm 0,011$
0,222	35	55	$0,156 \pm 0,006$
0,286	25	35	$0,161 \pm 0,009$
0,286	35	45	$0,178 \pm 0,023$
0,286	25	45	$0,167 \pm 0,007$
0,400	25	35	$0,147 \pm 0,013$

**Cuadro 5.1:** Resultados para el exponente crítico,  $\sigma$  definido en la ec. (5.2.4), en el LED. Se observa una estabilización alrededor de 0,16.



**Figura 5.8:** Representación gráfica de los valores obtenidos para el exponente crítico,  $\sigma$ . Se observa que las mediciones reportadas en el Cuadro 5.1 oscilan alrededor de 0,16. En el eje horizontal se representa el cociente de los dos valores de  $N$  necesarios para calcular  $\sigma$  en cada medición, para  $\lambda = 0,222, 0,286, 0,40$ .

Una vez conocidos los valores de  $m^2$  que hacen iguales los decaimientos, usando la definición

$$Na^2 = N \frac{(\Delta m^2)^\sigma}{(m_c^2)^{1-\sigma}}, \quad (5.2.4)$$

donde  $\Delta m^2 = m^2 - m_c^2$ , se obtiene el exponente crítico

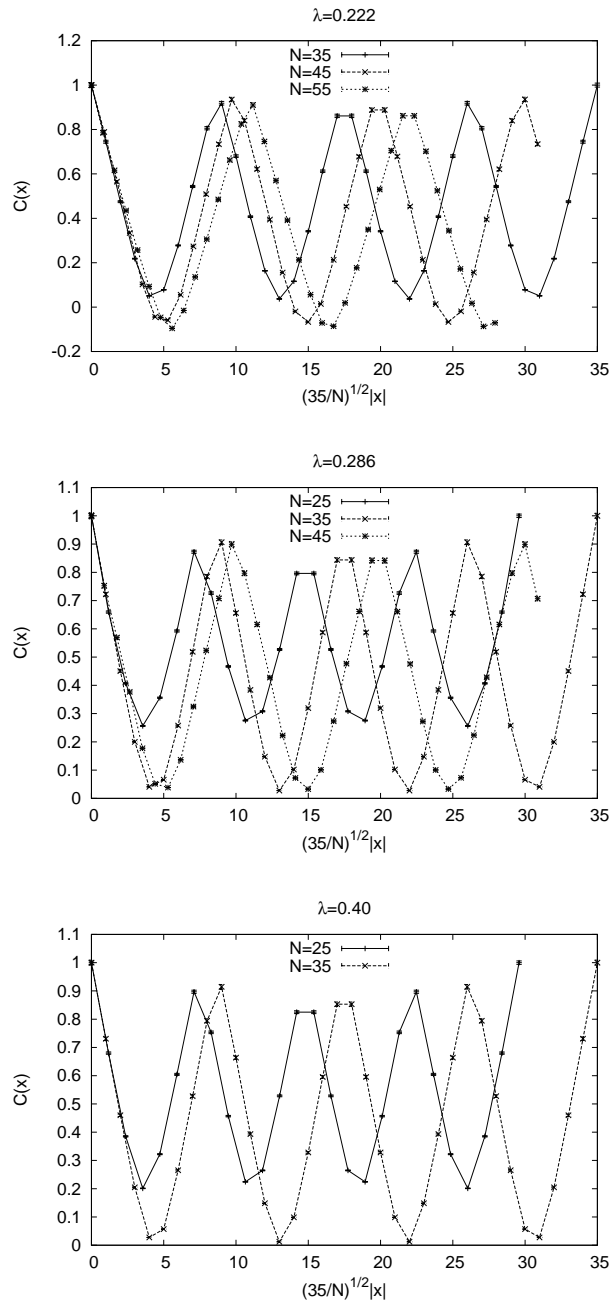
$$\sigma = \frac{\ln(m_{1c}^2/m_{2c}^2)}{\ln(\Delta m_1^2/\Delta m_2^2) + \ln(m_{1c}^2/m_{2c}^2)}, \quad (5.2.5)$$

siendo  $m_j^2, j = 1, 2$  el valor de  $m^2$  que, para dos valores de  $N$ , hace que el correlador sea igual para  $|x|$  pequeño.

Al repetir el procedimiento con diferentes combinaciones de  $N$ ,  $\lambda$  y  $m^2$  el exponente crítico se estabiliza, dando como resultado

$$\sigma = 0,16(1). \quad (5.2.6)$$

En el Cuadro 5.1 se muestran las combinaciones usadas para obtener este exponente crítico. Entonces, al mantener  $Na^2$  constante, mientras que  $N \rightarrow \infty$  y  $a \rightarrow 0$  simultáneamente, se consigue un exponente estable en la transición de las fases desordenada a ordenada en bandas. Es decir, como  $\sigma$  es finito, la fase de bandas persiste en el LED, para el modelo  $\lambda\phi^4$  NC en  $d = 2$ . Por lo tanto, sí existe un rompimiento espontáneo de la simetría de traslación, a pesar de tratar el caso en dos dimensiones.



**Figura 5.9:** Gráficas del correlador (5.2.1), para  $\lambda = 0,222, 0,286, 0,40$  y  $N = 25, 35, 45, 55$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo, se presentó un estudio numérico, usando simulaciones de Monte Carlo, del modelo  $\lambda\phi^4$  no-conmutativo en dos dimensiones, considerando un tensor de no-conmutatividad constante y componentes del momentum conmutativas. Para llevar a cabo las simulaciones, el sistema se llevó a una formulación matricial, que simplifica los cálculos relacionados con la aparición del producto estrella.

A partir de la definición de un parámetro de orden conveniente, se exploró el diagrama de fase en el plano  $\lambda - m^2$ , para  $N = 13, 19, 25, 35, 45$ . En este diagrama se observan tres regiones, una fase desordenada y un régimen de orden que se divide en dos fases, una ordenada uniformemente y otra de orden en bandas. Desafortunadamente, no fue posible localizar con precisión el valor de  $N^2\lambda$  que separa las fases ordenadas uniformemente y en bandas.

La formación de bandas en el modelo  $\lambda\phi^4$  NC en dos dimensiones implica el rompimiento espontáneo de las simetrías de rotación y traslación. El Teorema de Mermin-Wagner parecería imposibilitar el rompimiento espontáneo de las simetrías mencionadas; sin embargo, como la acción con que se trabajó es no-local, los argumentos en la demostración formal del teorema no son válidos.

El siguiente paso fue extrapolar los resultados a los límites simultáneos del continuo y de volumen infinito, manteniendo constante el parámetro de no-conmutatividad; es decir, extrapolar al Límite de Escalamiento Doble. Con este fin, se estudió el comportamiento de la función de correlación para diferentes valores de  $\lambda$ ,  $m^2$  y  $N$ . A partir de esto, se obtuvo un exponente crítico que confirma la existencia de la fase de bandas para el modelo  $\lambda\phi^4$  NC bidimensional en el LED.



# Apéndice A

## Simulaciones numéricas

### A.1. Simulaciones de Monte Carlo

En las simulaciones de Monte Carlo, se integran de forma aproximada las integrales de trayectoria que aparecen en la teoría de campo a través de métodos estadísticos.

Un conjunto de valores de un campo, para cada punto en una retícula,  $[U]$ , es una *configuración*. El valor esperado del observable  $\mathcal{O}[U]$ , en el formalismo de integral de trayectoria corresponde a (una vez más, considerando  $\hbar = 1$ )

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{O}[U] e^{-S[U]}, \quad (\text{A.1.1})$$

donde  $S$  es la acción euclidiana y  $Z$  la función de partición,

$$Z = \int \mathcal{D}U e^{-S[U]}. \quad (\text{A.1.2})$$

En las simulaciones de Monte Carlo, se generan tantas configuraciones como sea necesario cumpliendo el *muestreo de importancia*. Este muestreo implica que las configuraciones se generan con probabilidad

$$\mathcal{Q}[U] = \frac{1}{Z} e^{-S[U]}. \quad (\text{A.1.3})$$

Una simulación, donde el sistema pasa de una configuración dada a otra generada por algún algoritmo, debe satisfacer las condiciones de *ergodicidad* y *balance detallado*. La condición de ergodicidad se cumple, si para dos configuraciones cualesquiera la probabilidad de transición de una configuración

a otra, en un número finito de actualizaciones (*updates*, en inglés) no es cero. El balance detallado requiere que

$$\frac{P(U_i \longrightarrow U_j)}{P(U_j \longrightarrow U_i)} = \frac{P[U_j]}{P[U_i]}, \quad (\text{A.1.4})$$

donde  $P(U_i \longrightarrow U_j)$  es la probabilidad de pasar de la configuración  $[U_i]$  a  $[U_j]$ .

De forma general, una simulación de Monte Carlo se realiza de la siguiente manera:

- Se elige una configuración inicial, esta puede ser aleatoria (*hot start*) o con las matrices tomando valores constantes (*cold start*).
- El sistema se termaliza. Se llevan a cabo actualizaciones en las configuraciones del sistema antes de hacer mediciones, para que el sistema alcance el equilibrio.
- Se hacen updates en el equilibrio; se deben alcanzar configuraciones independientes de la inicial. Cuando se alcanza el equilibrio, se realizan las mediciones de interés, descorrelacionándolas entre sí.

En cada configuración termalizada y bien separada de la medición anterior, dada por la simulación, se mide el observable  $\mathcal{O}[U]$ . Una aproximación del valor esperado de este observable, después de  $n$  mediciones, es

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx \bar{\mathcal{O}}, \quad (\text{A.1.5})$$

donde  $\bar{\mathcal{O}}$  es el promedio de las  $n$  mediciones del observable.

## A.2. Algoritmo de Metrópolis

Para simular el modelo  $\lambda\phi^4$  se usó el algoritmo de Metrópolis: si el sistema se encuentra en la configuración  $\phi$  con una acción  $S[\phi]$ , se propone una nueva configuración  $\phi'$  con acción  $S[\phi']$ . La probabilidad de aceptación es

$$P(\hat{\phi} \longrightarrow \hat{\phi}') = \begin{cases} 1 & \text{si } S[\hat{\phi}'] \leq S[\hat{\phi}] \\ e^{S[\hat{\phi}] - S[\hat{\phi}']} & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

que es una forma de implementar el balance detallado (A.1.4).



En el modelo  $\lambda\phi^4$  no-conmutativo, en términos de los *twist eaters* (ver Capítulo 4) la acción se define como (ec. (4.1.1))

$$S[\hat{\phi}] = N \text{tr} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mu} (\hat{\Gamma}_{\mu} \hat{\phi} \hat{\Gamma}_{\mu}^{\dagger} - \hat{\phi})^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4} \hat{\phi}^4 \right]. \quad (\text{A.2.2})$$

En la configuración inicial de las simulaciones, la parte real e imaginaria de los elementos de  $\hat{\phi}$  tomó valores aleatorios entre  $-0,5$  y  $0,5$ . Para proponer nuevas configuraciones, un elemento de la matriz hermitiana (con elementos complejos)  $\hat{\phi}$  se cambió por otro según

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ij} &\rightarrow \hat{\phi}'_{ij} = \hat{\phi}_{ij} + \epsilon\eta, \\ \hat{\phi}_{ji} &\rightarrow \hat{\phi}'_{ji} = \hat{\phi}_{ji} + \epsilon\eta^*, \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

donde  $\eta \in \mathbb{C}$  y  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ .

La parte real e imaginaria de  $\eta$  se eligió en el intervalo  $[-0,5, 0,5]$ . El parámetro  $\epsilon$  se elige de tal forma que la tasa de aceptación de los cambios sea razonable, en este caso, encontrándose entre  $0,4$  y  $0,7$ . El valor de  $\epsilon$  se tomó como  $N^{-1/4}$  [14].



# Apéndice B

## Evaluación óptima de la acción en la forma matricial

Dada la forma matricial de la acción euclidiana del modelo  $\lambda\phi^4$  NC, el tiempo de cómputo necesario para realizar las simulaciones puede ser muy largo. A fin de evitar hacer de forma explícita las multiplicaciones matriciales de la ec. (4.1.1), en esta sección se presenta una forma más eficiente de calcular la acción antes y después de una actualización. Para esto, se adoptará la siguiente notación,

$$S[\hat{\phi}] = N \left[ \frac{1}{2}(s_{k1} + s_{k2}) + \frac{m^2}{2}s_m + \frac{\lambda}{4}s_\lambda \right], \quad (\text{B.0.1})$$

donde se usan las definiciones la notación de la Sección 4, en particular, la ec. (4.1.1).

A lo largo de este apéndice, será útil la siguiente ecuación, para una matriz hermitiana  $H$ ,  $N \times N$

$$\text{tr } H^2 = \sum_{ij}^N |H_{ij}|^2 = \sum_i^N H_{ii}^2 + 2 \sum_{i>j}^N |H_{ij}|^2, \quad (\text{B.0.2})$$

y la siguiente notación para índices,

$$\bar{i} = i \quad \text{mód } N. \quad (\text{B.0.3})$$

## B.1. Términos cinéticos de la acción

Considérese una matriz  $M$  de  $N \times N$ , entonces, con la definición de la matriz shift, (4.2.6), se cumple que

$$(\hat{\Gamma}_1 M \hat{\Gamma}_1^\dagger)_{ij} = M_{\overline{i+1}, \overline{j+1}}, \quad (\text{B.1.1})$$

es decir, la multiplicación se obtiene simplemente al renombrar índices.

Por otra parte, como la matriz  $\hat{\phi}$  es hermitiana, entonces la matriz  $\hat{\Gamma}_1 \hat{\phi} \hat{\Gamma}_1^\dagger - \hat{\phi}$  también es hermitiana. Por lo que, usando la ec. (B.0.2) se llega a

$$s_{k1} = \text{tr}(\hat{\Gamma}_1 \hat{\phi} \hat{\Gamma}_1^\dagger - \hat{\phi})^2 = \sum_i^N (\hat{\phi}_{\overline{i+1}, \overline{i+1}} - \hat{\phi}_{ii})^2 + 2 \sum_{i>j}^N |\hat{\phi}_{\overline{i+1}, \overline{j+1}} - \hat{\phi}_{ij}|^2. \quad (\text{B.1.2})$$

Ahora, como el twist eater clock, (4.2.7), es diagonal, para cualquier matriz  $M$ , se tiene que

$$(\hat{\Gamma}_2 M \hat{\Gamma}_2^\dagger)_{ij} = M_{ij} \mathcal{Z}_{21}^{i-j}, \quad (\text{B.1.3})$$

siendo  $\mathcal{Z}_{21}$  el factor de torsión (4.1.3). Si en la ecuación anterior se sustituye  $M$  por  $\hat{\phi}$ , la matriz  $\hat{\Gamma}_2 \hat{\phi} \hat{\Gamma}_2^\dagger - \hat{\phi}$  es hermitiana, de donde

$$\begin{aligned} s_{k2} &= \text{tr}(\hat{\Gamma}_2 \hat{\phi} \hat{\Gamma}_2^\dagger - \hat{\phi})^2 = 4 \sum_{ij}^N |\hat{\phi}_{ij} (\mathcal{Z}_{21}^{i-j} - 1)|^2 \\ &= \sum_{i>j}^N |\hat{\phi}_{ij}|^2 \left( 1 - (-1)^{i-j} \cos \frac{\pi(i-j)}{N} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

Con ayuda de las ecuaciones (B.1.2) y (B.1.4), la diferencia de la acción antes y después de modificar la matriz  $\hat{\phi}$  según el algoritmo de Metrópolis,

$$\hat{\phi}_{ij} \rightarrow \hat{\phi}'_{ij}, \quad \hat{\phi}_{ji} \rightarrow \hat{\phi}'_{ij}^*, \quad (\text{B.1.5})$$

se puede escribir como

$$\Delta s_k = s_{k1}[\hat{\phi}'] + s_{k2}[\hat{\phi}'] - s_{k1}[\hat{\phi}] - s_{k2}[\hat{\phi}]. \quad (\text{B.1.6})$$

Si el elemento modificado está en la diagonal de  $\hat{\phi}$ , entonces la diferencia anterior se convierte en

$$\Delta s_k(\hat{\phi}_{ii} \rightarrow \hat{\phi}'_{ii}) = 2[\hat{\phi}'_{ii}{}^2 - \hat{\phi}_{ii}^2 + (\hat{\phi}_{ii} - \hat{\phi}'_{ii})(\hat{\phi}_{\overline{i+1}, \overline{i+1}} + \hat{\phi}_{\overline{i-1}, \overline{i-1}})]. \quad (\text{B.1.7})$$

Mientras que si el elemento modificado está fuera de la diagonal,

$$\begin{aligned} \Delta s_k(\hat{\phi}_{ij} \rightarrow \hat{\phi}'_{ij}) &= 4 \left[ (|\hat{\phi}'_{ij}|^2 - |\hat{\phi}_{ij}|^2) \left( 2 - \cos \frac{(N+1)\pi(i-j)}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re}((\hat{\phi}_{ij} - \hat{\phi}'_{ij})(\hat{\phi}_{i+1,j+1} + \hat{\phi}_{i-1,j-1})) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1.8})$$

Por lo tanto, las ecuaciones (B.1.7) y (B.1.8) proporcionan una forma de calcular directamente el cambio en la parte cinética de la acción sin hacer las multiplicaciones matriciales. Además, para ahorrar tiempo en las simulaciones, es importante calcular sólo una vez los cosenos de las ecuaciones (B.1.4) y (B.1.8) y tener los valores guardados para los  $N - 1$  argumentos.

## B.2. Términos de masa y de cuarto orden

El término de masa se puede evaluar de forma muy sencilla, dado que  $\hat{\phi}$  es hermitiana, por lo que, usando la ec. (B.0.2),

$$s_m = \operatorname{tr} \hat{\phi}^2 = \sum_i \hat{\phi}_{ii}^2 + 2 \sum_{i>j} |\hat{\phi}_{ij}|^2. \quad (\text{B.2.1})$$

Lo que conduce a la siguiente forma de la diferencia de la acción antes y después de actualizar la matriz  $\hat{\phi}$ ,

$$\Delta s_m(\hat{\phi}_{ii} \rightarrow \hat{\phi}'_{ii}) = \hat{\phi}'_{ii}{}^2 - \hat{\phi}_{ii}^2, \quad (\text{B.2.2})$$

si el elemento está en la diagonal y,

$$\Delta s_m(\hat{\phi}_{ij} \rightarrow \hat{\phi}'_{ij}) = 2(|\hat{\phi}'_{ij}|^2 - |\hat{\phi}_{ij}|^2), \quad (\text{B.2.3})$$

si el elemento está fuera de la diagonal.

Finalmente, considérese el término cuártico de la acción,  $s_\lambda$ . En este caso, resulta necesario calcular la matriz  $\hat{\phi}^2$  cada vez que se hace una medición, pero como ésta es también una matriz hermitiana, es suficiente calcular los elementos  $(\hat{\phi}^2)_{ij}$  para  $i \geq j$ . Con esto, se obtiene

$$s_\lambda = \operatorname{tr} \hat{\phi}^4 = \sum_r (\hat{\phi}^2)_{rr}^2 + 2 \sum_{r>s} |(\hat{\phi}^2)_{rs}|^2. \quad (\text{B.2.4})$$

Ahora, si se cambia el elemento  $\hat{\phi}_{ij}$ , se puede elegir  $i \geq j$ , lo que afecta a los siguientes elementos de  $\hat{\phi}^2$ , que aparecen en la ec. (B.2.4),

$$(\hat{\phi}^2)_{is} \quad \text{para } s = i, \dots, N, \quad (\hat{\phi}^2)_{rj} \quad \text{para } r = 1, \dots, j. \quad (\text{B.2.5})$$

Por lo tanto, estos elementos se deben calcular de forma explícita para las matrices  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\phi}'$ . Los elementos de (B.2.5) con los mismos índices  $r, s$  se pueden obtener sin hacer la suma completa dos veces, pues la mayoría de las contribuciones son iguales,

$$\begin{aligned} (\hat{\phi}^2)_{rs} &= \sum_k \hat{\phi}_{rk} \hat{\phi}_{ks} \\ (\hat{\phi}'^2)_{rs} &= (\hat{\phi}^2)_{rs} + \begin{cases} |\hat{\phi}'_{ij}|^2 - |\hat{\phi}_{ij}|^2 & \text{si } r = s \\ (\hat{\phi}'_{ij} - \hat{\phi}_{ij}) \hat{\phi}_{js} & \text{si } i = r \neq s \\ \hat{\phi}_{ri} (\hat{\phi}'_{ij} - \hat{\phi}_{ij}) & \text{si } j = s \neq r. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

Finalmente, es útil notar que la norma (al cuadrado) de un número complejo,  $c = x + iy$  se puede calcular como  $|c|^2 = x^2 + y^2$ . Esto es más eficiente que hacer la multiplicación compleja  $c^* \cdot c$ , que requiere de cuatro multiplicaciones de números reales.

De forma semejante, la parte real de la multiplicación de los complejos  $c_1 = x_1 + iy_1$  y  $c_2 = x_2 + iy_2$  es  $\text{Re}(c_1 c_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2$ . Donde nuevamente no es necesario hacer la multiplicación completa de  $c_1 \cdot c_2$ . Esta relación es útil para calcular el último miembro de la ec. (B.1.8).

# Bibliografía

- [1] H.S. Snyder, “Quantized space-time”, *Phys. Rev.* **71** (1947) 38.
- [2] G. Landi, F. Lizzi y R.J. Szabo, “String geometry and the Noncommutative Torus”, *Commun. Math. Phys.* **206** (1999) 603.
- [3] S. Doplicher, “The principle of locality: Effectiveness, fate, and challenges”, *J. Math. Phys.* **51** (2010) 015218.
- [4] S. Doplicher, K. Fredenhagen y J.E. Roberts, “Spacetime quantization induced by classical gravity”, *Phys. Lett. B* **331** (1994) 39.
- [5] A.H. Chamseddine, G. Felder y J. Fröhlich, “Gravitiy in noncommutative geometry”, *Commun. Math. Phys.* **155** (1993) 205.
- [6] G. Veneziano, “A stringy nature needs just two constants”, *Europhys. Lett.* **2** (1986) 199.
- [7] S. Hellerman y M. Van Raamsdonk, “Quantum Hall physics equals non-commutative field theory”, *JHEP* **10** (2001) 039.
- [8] A. Connes, “Noncommutative geometry”, Academic Press: New York, 1994.
- [9] S.L. Woronowicz, “Compact Matrix Pseudogroups”, *Commun. Math. Phys.* **111** (1987) 613.
- [10] V.G. Drinfel’d, “Quantum groups”, *Proc. Int. Congr. Math.* (1987) 820.
- [11] A. Connes y M.A. Rieffel, “Yang-Mills for non-commutative two-tori”, *Contemp. Math.* **62** (1987) 237.

- [12] W. Bietenholz, F. Hofheinz y J. Nishimura, “The Renormalizability of 2-D Yang-Mills theory on a noncommutative geometry”, *JHEP* **0209** (2002) 009.
- [13] W. Bietenholz, J. Nishimura, Y. Susaki y J. Volkholz, “A Non-perturbative study of 4-D U(1) non-commutative gauge theory: The Fate of one-loop instability”, *JHEP* **0610** (2006) 042.
- [14] F. Hofheinz, “Field Theory on a Non-commutative Plane: a Non-perturbative Study”, *Fortsch. Phys.* **52** (2004) 445.
- [15] W. Bietenholz, F. Hofheinz y J. Nishimura, “Phase diagram and dispersion relation of the non-commutative  $\lambda\phi^4$  model in  $d = 3$ ”, *JHEP* **0406** (2004) 042.
- [16] J. Ambjørn y S. Catterall, “Stripes from (noncommutative) stars”, *Phys. Lett.* **B 549** (2002) 253.
- [17] N.D. Mermin y H. Wagner, “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-dimensional or two-dimensional isotropic Heisenberg models”, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 1133.
- [18] P.C. Hohenberg, “Existence of long-range order in one and two dimensions”, *Phys. Rev.* **158** (1967) 383.
- [19] K. Huang, “Statistical Mechanics”, Wiley: New York, 1987.
- [20] K. Huang, “Quantum Field Theory: From Operators to Path Integrals”, Wiley: New York, 2010.
- [21] S. Coleman, “There are no Goldstone Bosons in Two Dimensions”, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 259.
- [22] R.L. Dobrushin y S.B. Shlosman, “Absence of breakdown of continuous symmetry in two-dimensional models of statistical physics”, *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 31.
- [23] S.S. Gubser y S.L. Sondhi, “Phase structure of non-commutative scalar field theories”, *Nucl. Phys.* **B 605** (2001) 395.



- [24] G.H. Chen y Y.S. Wu, “Renormalization group equations and the Lifshitz point in noncommutative Landau-Ginsburg theory”, *Nucl. Phys. B* **622** (2002) 189.
- [25] P. Castorina y D. Zappalà, “Nonuniform symmetry breaking in noncommutative  $\lambda\Phi^4$  theory”, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 065008.
- [26] P. Castorina y D. Zappalà, “Spontaneous breaking of translational invariance in noncommutative  $\lambda\Phi^4$  theory in two dimensions”, *Phys. Rev. D* **77** (2007) 027703.
- [27] H. Weyl, “The theory of groups and quantum mechanics”, Dover: New York, 1950.
- [28] R.J. Szabo, “Quantum field theory on noncommutative spaces”, *Phys. Rept.* **378** (2003) 299.
- [29] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk y N. Seiberg, “Noncommutative Perturbative Dynamics”, *JHEP* **02** (2000) 020.
- [30] J. Ambjørn, Y.M. Makeenko, J. Nishimura y R.J. Szabo, “Lattice Gauge Fields and Discrete Non-commutative Yang-Mills Theory”, *JHEP* **05** (2000) 023.
- [31] J. Ambjørn, Y.M. Makeenko, J. Nishimura y R.J. Szabo, “Finite  $N$  Matrix Models of Non-commutative Gauge Theory”, *JHEP* **11** (1999) 029.
- [32] J. Madore, “The Fuzzy sphere”, *Class. Quant. Grav.* **9** (1992) 69.
- [33] M. Panero, “Quantum Field Theory in a Non-Commutative Space: Theoretical Predictions and Numerical Results on the Fuzzy Sphere”, *SIGMA* **2** (2006) 081.
- [34] M. Panero, “Numerical simulations of a non-commutative theory: the scalar model on the fuzzy sphere”, *JHEP* **0705** (2007) 082.
- [35] F. García Flores, X. Martin y D. O’Connor, “Simulation of a scalar field on a fuzzy sphere”, *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 3917.
- [36] J. Medina García, “Teorías de Campo Escalares Difusas: Investigaciones Analíticas y Numéricas”, Tesis de Doctorado, CINVESTAV, 2008.

- [37] J. Medina, W. Bietenholz y D. O'Connor, "Probing the fuzzy sphere regularisation in simulations of the 3d  $\lambda\phi^4$  model", *JHEP* **04** (2008) 041.