



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

FACULTAD DE QUÍMICA

FLUJO DE LÍQUIDOS COMPLEJOS EN  
MEDIOS POROSOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA QUÍMICA-INGENIERÍA DE PROCESOS

PRESENTA:

MARCOS TURCIO CUEVAS

TUTORES:

DR. OCTAVIO MANERO BRITO

DR. CARLOS LIRA GALEANA



2011

## Jurado Asignado:

**Presidente** Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

**Vocal** Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

**Secretario** Dra. Eugenia Corvera Poiré

**1er. Suplente** Dr. Edgar Ramírez Jaramillo

**2do. Suplente** Dr. Octavio Manero Brito

Tesis desarrollada en el Instituto de Investigación en Materiales de la Universidad Nacional Autónoma de México y el Instituto Mexicano del Petróleo

## TUTORES:

DR. OCTAVIO MANERO BRITO

DR. CARLOS LIRA GALEANA

---

---

## Agradecimientos

Hay muchas personas de tras de este trabajo, sin ellos no habría podido enfrentar los retos que éste implicaba. A todos les estoy muy agradecido, en especial a:

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), en especial al Programa de Posgrado en Ingeniería, por darme la oportunidad de realizar este trabajo.

Al Instituto Mexicano del Petróleo (IMP), por brindarme apoyo económico y permitirme participar en el proyecto de investigación Y.00106.

Al CONACyT y a PEMEX por el apoyo brindado al proyecto Y.00106 del IMP.

A mis tutores, el Dr. Octavio Manero Brito de la UNAM y el Dr. Carlos Lira Galeana del IMP, por permitirme desarrollar este proyecto bajo su tutela y sus incontables consejos.

A mis padres, Jesus y Eloisa, por apoyarme incondicionalmente y alentarme para continuar mis estudios.

A mis hermanos Luis y Quetzalli y a Arturo y a Leo por que siempre han estado conmigo.

A mis profesores Luis Ángel López-Latorre, Ernest Zeller Espen, Enrique Ángel Chávez Castellanos por su paciencia, su amistad y por todo lo que me enseñaron.

A mis compañeros René Vargas, Dan Silva, David Reyes y Benjamín Espinoza, quienes han enfrentado conmigo los retos de este proyecto.

A mis amigos Luis y Kémish, que me han acompañado todos estos años, y a todos mis amigos de la generación del posgrado.

# Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo fractal para la permeabilidad efectiva de medios porosos usando el modelo Bautista-Manero-Puig (BMP) para describir las propiedades reológicas del fluido. En este análisis se supone que los medios porosos se pueden aproximar con arreglos de capilares tortuosos cuya distribución de radios y tortuosidad se pueden representar con escalamientos fractales. Se derivan expresiones para la velocidad promedio y la permeabilidad efectiva para el flujo de un fluido BMP en medios porosos. El modelo BMP puede describir comportamientos reológicos complejos (elasticidad y variación de la viscosidad debido a cambios en rapidez de deformación y en el tiempo) y todas las propiedades materiales presentes en él pueden ser estimadas a partir de mediciones reológicas independientes, esto es, no contiene parámetros libres. El modelo consta de la ecuación de Maxwell convectiva superior acoplada con una ecuación cinética que representa la modificación estructural que sufren los fluidos complejos al moverse a través de medios porosos fractales. Las predicciones obtenidas con este modelo fractal son comparadas con datos experimentales, con otros modelos y con correlaciones que pueden encontrarse en la literatura.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Medios Porosos . . . . .	2
1.2. Medios Fractales . . . . .	4
1.3. Flujo en Medios Porosos . . . . .	6
1.4. Objetivos . . . . .	8
<b>2. Modelo para la Permeabilidad</b>	<b>10</b>
2.1. Modelo BMP . . . . .	11
2.2. Escalamiento Fractal de los Medios Porosos . . . . .	14
2.3. Cálculo de la Permeabilidad . . . . .	16
2.4. Aproximación Analítica . . . . .	19
<b>3. Resultados y Discusión</b>	<b>21</b>
3.1. Procedimiento de Cálculo . . . . .	21
3.2. Resultados . . . . .	22
<b>4. Conclusiones</b>	<b>46</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
<b>A. Tablas de datos por figura</b>	<b>48</b>
<b>B. Modelo de Capilares</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El flujo de fluidos no newtonianos en medios porosos es un tema que ha cobrado gran interés en áreas como mecánica de suelos, filtración de soluciones poliméricas y de líquidos contaminantes debido a la implementación industrial de tales materiales en operaciones de campo (remediación de suelos y operación de estimulación de reservas de hidrocarburos, por mencionar algunas) [1, 2, 3, 5, 20, 26, 28].

Una gran cantidad de fluidos presentes en procesos industriales tienen comportamientos reológicos que no son descritos adecuadamente con el modelo newtoniano. Pueden presentar viscosidades que dependan de la rapidez de deformación en corte, del tiempo o incluso de la elasticidad [1, 3, 4, 5]. Además, pueden ser complejos químicamente e interactuar con las formaciones porosas (arcillas, arenas, rocas, etc.) a través de las cuales fluyen y con otros materiales con los que entren en contacto durante el flujo [1].

Debido a la complejidad estructural de los medios porosos resulta muy difícil,



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

si no imposible, obtener expresiones completamente analíticas para describir la distribución y geometría de los poros a través de los cuales tiene lugar el flujo [1, 2, 4] por lo que, por motivos prácticos, se describe con relaciones de naturaleza empírica como la ley de Darcy [1, 2, 5]:

$$v = \frac{k \Delta p}{\mu L}, \quad (1.1)$$

$v$  es la velocidad promedio,  $\mu$  es la viscosidad del fluido newtoniano,  $\frac{\Delta p}{L}$  es el gradiente de presión y  $k$  es la permeabilidad específica (en este trabajo se hará referencia a la permeabilidad específica simplemente como permeabilidad).

Se pueden obtener expresiones semejantes a la ecuación 1.1 a partir de las ecuaciones de conservación [5, 6]; en éstas se puede demostrar que la permeabilidad, aunque resulte sencilla de determinar experimentalmente, contiene todas las complejidades tanto de la distribución y tortuosidad de los poros en el medio como de las propiedades materiales del fluido (viscosidad, tiempo característico, etc.) [5, 6]. Por esta razón, se deben hacer varias suposiciones con el fin de obtener relaciones que permitan calcular la permeabilidad a partir de las propiedades del medio poroso (porosidad, compresibilidad, etc.) junto con las propiedades materiales.

## 1.1. Medios Porosos

Un medio poroso consta de una matriz sólida la cual contiene espacios vacíos conectados entre sí, los poros [1, 2, 3, 4, 5]; la estructura y distribución de éstos está fuertemente relacionada con las propiedades macroscópicas del medio, en par-

ticular la permeabilidad [1, 2, 3, 4, 5, 6].

De manera práctica, es necesario entender el comportamiento de la permeabilidad bajo distintas condiciones de flujo, por esta razón se realizan experimentos de flujo en núcleos de roca, en medios granulares, en medios porosos artificiales y simulaciones computacionales [1, 5, 6]. A partir de los resultados de las mediciones de caída de presión y velocidad promedio junto con la descripción de la estructura del medio poroso (arenas, rocas y fibras entre otros) y la reología del fluido, se puede evaluar el comportamiento de la permeabilidad ante diferentes condiciones de flujo [1, 5, 6].

En la teoría, se deben hacer varias suposiciones sobre la geometría del medio poroso para poder dar una descripción aproximada de éste y así poder definir la permeabilidad del medio [1, 2, 5].

Una suposición muy usada considera que el medio poroso es un arreglo de capilares paralelos, siendo el caso más sencillo el de capilares cilíndricos del mismo diámetro [1, 2, 5]; con esta consideración se puede demostrar que, en estado estacionario, la permeabilidad tendrá la siguiente funcionalidad [5] (ver apéndice B):

$$k = \frac{\phi}{8} R^2. \quad (1.2)$$

$k$  es la permeabilidad,  $\phi$  es la porosidad y  $R$  el radio de los capilares.

Es importante remarcar que esta ecuación predice que la permeabilidad es independiente de la viscosidad del fluido, lo cual es aceptable si se trata de fluidos newtonianos, y sólo puede usarse en algunos casos de flujo lento [1, 2]; además, aunque simple en forma, su aplicación no es tan sencilla puesto que requiere el conocimiento

del radio de los poros, el cual no resulta sencillo de medir [2].

Se han propuesto varias alternativas para subsanar las debilidades de tal modelo, entre las que destacan los modelos topológicos [2, 6], los determinísticos [1] y los fractales [2]; siendo este último caso el enfoque que se seguirá en este trabajo.

## 1.2. Medios Fractales

Geoméricamente hablando, el problema de la descripción de los medios porosos se debe a que tales medios son altamente irregulares en su conformación y autosimilares a varias escalas [2], esto ha motivado proponer modelos fractales para representar dichas propiedades (autosimilitud e irregularidad).

Es sabido que las geometrías fractales permiten describir fenómenos irregulares [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13], tales como la tortuosidad y la distribución de los radios de los poros [2], a través de un escalamiento donde se determinan las dimensiones (no enteras) tanto de los objetos como de los fenómenos que ocurren en estos [7, 8, 9, 10]; éstas son conocidas como dimensiones fractales [13] y su uso requiere extender algunos conceptos fundamentales del cálculo, como lo son el de derivada y el de integral, a espacios caracterizados por las dimensiones fraccionarias [7, 8, 9, 10, 11, 12].

Las dimensiones fractales pueden obtenerse extendiendo las nociones clásicas de dimensión para tratar con objetos geométricos a los que no se les puede asociar una dimensión entera (rectas, planos, etc.) [7, 8, 9, 10, 11, 12]. Para calcular la dimensión de tales objetos se pueden usar diversas definiciones, por ejemplo las dimensiones de Hausdorff-Besicovitch, las de Renyi y las de Minkowski-Bouligand (conteo de cajas)

[8, 13]; en general estas definiciones no son equivalentes y sus diferencias suelen ser provocadas por la estructura del fractal [13].

Una definición de dimensión muy usada en medios fractales es la dimensión de similitud, ésta requiere que el objeto sea definido matemáticamente e indica la manera en que éste se genera a partir de una unidad repetitiva en diferentes escalas [13]; la dimensión de similitud se define como:

$$D = -\frac{\ln(N)}{\ln(l)}, \quad (1.3)$$

$D$  es la dimensión del objeto analizado,  $N$  es el número de elementos necesarios para generar al objeto y  $l$  es la longitud de cada elemento.

Así, si se analiza una línea, la dimensión de similitud indica cual es la longitud real de la línea comparada con la longitud de la recta que se genera a partir de dicha línea [13], lo cual suele usarse en el escalamiento de la tortuosidad de los poros.

Por otra parte, la dimensión de conteo de cajas es una de las más usadas en la práctica y es conceptualmente semejante a la dimensión de similitud [2, 8, 13], ésta es una estimación basada en una imagen de la estructura del objeto sobre la que se traza una malla homogénea (formando así cajas). Se cuenta el número de cajas necesarias para cubrir el objeto y se observa cómo varía este número al hacer la malla más fina (cajas más pequeñas) [13].

La dimensión de conteo de cajas puede utilizarse para estimar la dimensión de porosidad de un objeto, cuyos poros son altamente irregulares en tamaño y distribución, observando cómo varía el número de cajas necesario para cubrir los poros del

objeto.

Debido a su sencillez conceptual como a su fácil implementación en algoritmos, las dimensiones de similitud y de conteo de cajas son ampliamente utilizadas [2, 8, 9, 10].

Se han propuesto modelos basados en la ley de Darcy (1.1) que contienen tales dimensiones; a partir de estos modelos se han derivado expresiones para la permeabilidad que dependen de la complejidad geométrica del medio poroso además de incluir efectos provocados por el comportamiento reológico de fluidos complejos [14, 15, 16, 17, 18, 19].

### 1.3. Flujo en Medios Porosos

Para el fluido, el caso más sencillo es suponer que el material en cuestión presenta comportamiento newtoniano donde la relación entre los esfuerzos y la rapidez de deformación es lineal (fluido newtoniano) [5, 22, 23]:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{D}}, \quad (1.4)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$  es el tensor de esfuerzos,  $\underline{\underline{D}}$  es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ( $\frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)$ ),  $\underline{\underline{L}}$  es el tensor gradiente de velocidad y  $\mu$  es la viscosidad (newtoniana) del fluido.

En estudios realizados utilizando esta clase de fluidos se ha encontrado que la permeabilidad es independiente tanto del gradiente de presión aplicado como de la viscosidad del fluido [2, 5], además de que la velocidad promedio varía linealmente con el gradiente de presión, este comportamiento es descrito por la ecuación de Darcy

(1.1).

Como se mencionó anteriormente, una gran cantidad de fluidos presentes en la industria presenta comportamientos reológicos complejos (viscoelasticidad, tixotropía y viscosidad dependiente de la rapidez de deformación) y no pueden ser tratados como newtonianos (1.4), por lo que ha sido necesario obtener relaciones semejantes a la ley de Darcy (1.1) a partir de ecuaciones constitutivas más elaboradas [5, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

En primera instancia, la extensión hacia el comportamiento no newtoniano se ha hecho considerando la ecuación del fluido newtoniano generalizado [5]. Ésta consiste en hacer que la viscosidad en la ecuación 1.4 dependa de la rapidez de deformación (por convención internacional la viscosidad no newtoniana se representa con la letra griega  $\eta$  [29]); ecuaciones como la de ley de potencia, Carreau-Yasuda, Ellis y Herschel-Bulkley han sido usadas para obtener versiones más generales de la ley de Darcy [5, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

Los comportamientos tixotrópicos y antitixotrópicos también pueden obtenerse a partir del fluido newtoniano generalizado al incluir relaciones que describan la dependencia en el tiempo de la viscosidad [24, 25]; por otro lado, ninguna de las alternativas anteriores es capaz de describir comportamientos viscoelásticos; cuando el flujo es visto a escala de poros, el campo de velocidad se ve severamente afectado por los esfuerzos generados en el fluido los cuales resaltan el comportamiento viscoelástico que provoca fenómenos como las diferencias de esfuerzos normales [3, 4, 5]. Para lidiar con tales fenómenos es necesario tomar en cuenta la historia de deformaciones del fluido, es decir, los efectos que representan la memoria del fluido [1, 5, 22, 23, 24];

las relaciones encontradas en la literatura se basan en la ecuación constitutiva de Maxwell [22, 23, 24]:

$$\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{G_0 \varphi_0} \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{dt} = \frac{2}{\varphi_0} \underline{\underline{D}}, \quad (1.5)$$

$G_0$  es el modulo de relajación y  $\varphi_0$  es la fluidez (inverso de la viscosidad  $\eta_0$ ).

Esta dependencia en la historia de deformaciones se ve reflejada en la ley de Darcy (1.1), puesto que todas las complejidades antes mencionadas se deben considerar al obtener ecuaciones que permitan relacionar la permeabilidad con la porosidad del medio y con las constantes materiales del fluido (por ejemplo, tiempos característicos) [3, 4, 5, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

## 1.4. Objetivos

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones constitutivas que se han utilizado en la predicción de la permeabilidad no tienen la capacidad de reproducir todos efectos reológicos que se pueden presentar durante el flujo; por esta razón, en este trabajo se empleará el modelo Bautista-Manero-Puig (BMP), que puede describir de manera adecuada una gran cantidad de efectos reológicos, para calcular la permeabilidad de medios porosos cuya tortuosidad y distribución de tamaños de poros siguen escalamientos fractales; el modelo resultante, a saber, no ha sido presentado antes.

Las predicciones obtenidas con este modelo serán comparadas con resultados experimentales tomados de la literatura para fluidos con comportamientos reológicos

diferentes.

Se presentará el análisis de sensibilidad del modelo para diferentes parámetros microestructurales del medio poroso (distribución de radios de poros, porosidad, tortuosidad), para diferentes funciones materiales del fluido (esfuerzo de cedencia,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_\infty$ ) y para diferentes condiciones de flujo (gradiente de presión)

Finalmente, se compararán las predicciones del modelo con relaciones utilizadas a nivel industrial.

## Capítulo 2

# Modelo para la Permeabilidad

En este trabajo se eligió usar el modelo BMP [24] para calcular la permeabilidad en medios porosos fractales. Las ecuaciones que conforman el modelo son la ecuación de Maxwell convectiva superior acoplada con una ecuación cinética que representa la modificación estructural de líquidos complejos [24] que fluyen a través de medios porosos fractales. Este nuevo modelo involucra arreglos de capilares cuya distribución de radios y tortuosidad pueden representarse a través de escalamientos fractales [19]. El modelo BMP fue elegido por su capacidad de predecir, en flujos cortantes simples, una primera zona de viscosidad constante a bajas rapidezces de deformación, una segunda zona de viscosidad constante a altas rapidezces de deformación, una zona de transición a rapidezces de deformación intermedias (Figura 2.1), esfuerzo de cedencia real (cuando la fluidez a bajas rapidezces de deformación es cero)(Figura 2.2) y comportamientos viscoelásticos, específicamente, una primera diferencia de esfuerzos normales que aumenta con la rapidez de deformación [24]. Además, en

ciclos no estacionarios, el modelo puede predecir comportamientos tixotrópicos y antitixotrópicos [3, 4, 5, 24].

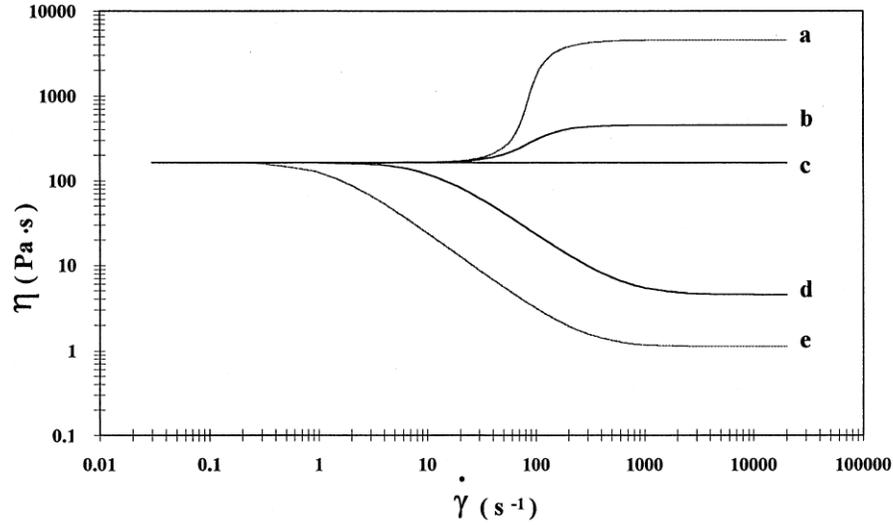


Figura 2.1: Viscosidad contra rapidez de deformación en corte calculada con el modelo BMP en estado estacionario a diferentes valores de  $\varphi_\infty$  en  $(Pa \cdot s)^{-1}$ : (a) 0.0002; (b) 0.002; (c) 0.052; (d) 0.2; (e) 1. Los parámetros usados fueron  $\varphi_0 = 0.052(Pa \cdot s)^{-1}$ ,  $k_0 = 3.9 \times 10^{-5} s - Pa^{-1}$  y  $\lambda = 0.14s$ . Figura modificada de [24].

## 2.1. Modelo BMP

El modelo BMP consta de las siguientes ecuaciones:

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \frac{1}{G_0 \varphi} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{2}{\varphi} \underline{\underline{\underline{D}}} \quad (2.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + k_0(\varphi_\infty - \varphi) \underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{D}}}. \quad (2.2)$$

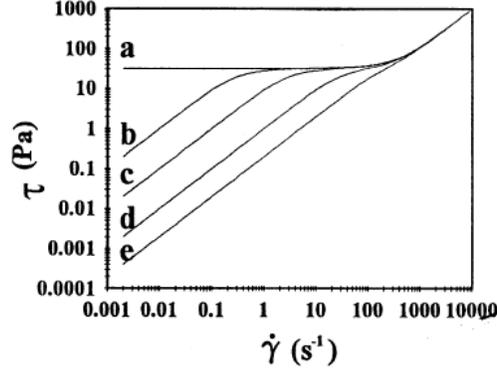


Figura 2.2: Esfuerzo en corte contra rapidez de deformación en corte calculado con el modelo BMP en estado estacionario a diferentes valores de  $\varphi_0$  en  $(Pa-s)^{-1}$ : (a) 0; (b) 0.0001; (c) 0.001; (d) 1; (e) 10.5. Los parámetros usados fueron  $\varphi_\infty = 10.5(Pa-s)^{-1}$ ,  $k_0 = 3.9 \times 10^{-5} s - Pa^{-1}$  y  $\lambda = 0.14s$ . Figura modificada de [24].

En las ecuaciones anteriores  $\frac{d}{dt}$  denota la derivada material,  $\underline{\underline{\sigma}}$  es el tensor de esfuerzos,  $\underline{\underline{D}}$  es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad ( $\underline{\underline{L}} = \nabla \underline{v}$ ),  $\varphi$  es la fluidez,  $\varphi_0$  y  $\varphi_\infty$  son las fluideces a bajas y a altas rapidezces de deformación respectivamente,  $G_0$  es el módulo de relajación en corte,  $\lambda$  es el tiempo característico estructural y  $k_0$  es una constante cinética asociada con la modificación estructural. La derivada convectiva superior del tensor de esfuerzos está dada por [22, 24]:

$$\underline{\underline{\overset{\nabla}{\sigma}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{L}}^T. \quad (2.3)$$

Las ecuaciones 2.1 y 2.2 se reducen al modelo de Maxwell convectivo superior cuando  $\varphi = \varphi_0$ . Estas ecuaciones acoplan la viscoelasticidad no lineal de la ecuación de Maxwell con una ecuación en términos de la fluidez, que es en sí una ecuación cinética con un tiempo característico asociado a la formación de la estructura ( $\lambda$ ) y un

término de destrucción relacionado a la modificación estructural con una constante cinética ( $k_0$ ) proporcional a la disipación.

En flujo cortante simple estas ecuaciones se reducen a:

$$\sigma + \frac{1}{G_0\varphi} \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\dot{\gamma}}{\varphi} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}(\varphi_0 - \varphi) + k_0(\varphi_\infty - \varphi)\sigma\dot{\gamma}, \quad (2.5)$$

por simplicidad, en las ecuaciones anteriores se escribe  $\sigma$  en lugar de  $\sigma_{rz}$ ,  $\dot{\gamma}$  es la rapidez de deformación en corte, los términos no lineales de las ecuaciones 2.1 y 2.2 no son considerados puesto que se estudia el caso cuando los esfuerzos normales generados en el flujo son despreciables. En estado estacionario las ecuaciones 2.4 y 2.5 se combinan para obtener:

$$(\varphi_0 - \varphi) + k_0\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma^2\varphi = 0. \quad (2.6)$$

Como se puede ver en la figura 2.1, la ecuación 2.6 predice adelgazamiento al corte cuando  $\varphi_\infty > \varphi_0$ , engrosamiento al corte cuando  $\varphi_\infty < \varphi_0$ , comportamiento newtoniano cuando  $\varphi_\infty = \varphi_0$ , dos zonas de viscosidad constante, una a bajas y otra a altas rapidezces de deformación con una zona de transición para rapidezces de deformación intermedias. Además, en la figura 2.2 se puede ver que el modelo presenta esfuerzo de cedencia real cuando  $\varphi_0 = 0$ . Éste implica que el fluido tenderá a comportarse como sólido cuando la rapidez de deformación tienda a cero, semejante

al modelo viscoplástico de Bingham. El modelo también predice esfuerzo de cedencia aparente para valores pequeños de  $\varphi_0$ . De esta manera, con un solo modelo se pueden predecir comportamientos como el de Bingham y ley de potencia.

Se puede calcular el esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) a partir de la ecuación 2.6 haciendo  $\varphi_0 = 0$ , obteniendo así:

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{k_0 \lambda \varphi_\infty}}. \quad (2.7)$$

La ecuación 2.6 se puede resolver para  $\varphi$  expresando el resultado en función de  $\sigma_y$  para obtener:

$$\frac{\varphi(\sigma)}{\varphi_\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma} \right)^2 \left( \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2 - 1 + \sqrt{\left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2 - 1 \right]^2 + 4 \left( \frac{\varphi_0}{\varphi_\infty} \right) \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^2} \right). \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8 requiere tres constantes materiales ( $\varphi_0$ ,  $\varphi_\infty$  y  $k_0 \lambda$ ) que pueden ser evaluadas a partir de datos reométricos de mediciones independientes; en este sentido, el modelo no contiene parámetros de ajuste.

## 2.2. Escalamiento Fractal de los Medios Porosos

Aquí se ha supuesto que se puede describir los medios porosos como un conjunto de capilares cuya distribución de poros y tortuosidad siguen escalamientos fractales. La relación para el número de poros/capilares ( $N$ ) de radio  $r$  en el medio está dada por [19]:

$$N(L \geq r) = \left( \frac{r_{max}}{r} \right)^{D_f}, \quad (2.9)$$

$L$  es la longitud característica del escalamiento,  $r_{max}$  es el radio máximo de los poros/capilares y  $D_f$  es la dimensión fractal de éstos ( $1 < D_f < 2$  para 2 dimensiones); entonces, el número de capilares con radios en el intervalo de  $r$  a  $r + dr$  está dado por:

$$-dN = D_f r_{max}^{D_f} r^{-(D_f+1)} dr, \quad (2.10)$$

el signo negativo implica que el número de capilares disminuye al aumentar el radio de éstos, y  $-dN > 0$ ; además,  $N \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ , que es una propiedad de los medios fractales. A partir de la ecuación 2.9 se puede obtener el número total de capilares, desde el radio mínimo ( $r_{min}$ ) hasta el máximo ( $r_{max}$ ):

$$N(L \geq r_{min}) = \left( \frac{r_{max}}{r_{min}} \right)^{D_f}; \quad (2.11)$$

la tortuosidad de los capilares también puede ser descrita por escalamientos fractales [19]:

$$L_t = L_0^{D_t} (2r)^{1-D_t} = 2^{1-D_t} L_0^{D_t} r^{1-D_t}, \quad (2.12)$$

$L_0$  es la longitud representativa del medio poroso y  $L_t$  es la longitud tortuosa del capilar en dirección del flujo,  $D_t$  es la dimensión fractal de tortuosidad ( $1 < D_t < 2$  para 2 dimensiones); ésta representa la convolución de los capilares para el flujo en medios poroso. Diferenciando la ecuación 2.12 con respecto a  $L_0$  se obtiene:

$$dL_t = 2^{1-D_t} L_0^{D_t-1} r^{1-D_t} D_t dL_0. \quad (2.13)$$

Las ecuaciones 2.9, 2.10, 2.12 y 2.13 serán usadas para derivar el modelo de flujo en medios porosos junto con el modelo BMP.

## 2.3. Cálculo de la Permeabilidad

El esfuerzo en la pared provocado por el flujo en capilares tortuosos está dado por:

$$\sigma_w = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dL_t}, \quad (2.14)$$

$\sigma_w$  es el esfuerzo en la pared y  $\frac{dp}{dL_t}$  es el gradiente de presión; el signo señala que las direcciones de éstos son opuestas.

Desarrollando la derivada por regla de la cadena y sustituyendo la ecuación 2.13 se obtiene:

$$\sigma_w = -\frac{r^{D_t}}{2^{2-D_t}} \frac{1}{D_t L_0^{D_t-1}} \frac{dp}{dL_0}; \quad (2.15)$$

ahora, el esfuerzo total en la pared ( $\sigma$ ) dada una celda unitaria (ver B.1) se puede expresar como:

$$\sigma = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} \sigma_w dN(r) = - \frac{dp}{dL_0} \left( \frac{2^{D_t-2} D_f L_0^{1-D_t} r_{max}^{D_t}}{D_t (D_t - D_f)} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{D_t - D_f} \right]. \quad (2.16)$$

El flujo volumétrico ( $q$ ) en capilares tortuosos de radio  $r$  se puede expresar como:

$$q(r) = - \frac{dp}{dL_0} \left( \frac{2^{D_t-1} \pi}{D_t L_0^{D_t-1}} r^{D_t-1} \right) [I\varphi](r), \quad (2.17)$$

$\varphi(r)$  es la integral de la fluidez, ésta se expresa como:

$$[I\varphi](r) = \int_0^r \left( \int_0^{r^*} r \varphi(r) dr \right) r^* dr^*. \quad (2.18)$$

La ecuación 2.17 indica que el flujo volumétrico decrece debido a la tortuosidad de los capilares. En el caso particular de capilares rectos ( $D_t = 1$ ) y fluido newtoniano ( $\varphi(\xi) = \varphi_0$ ) las ecuaciones 2.17 y 2.18 se reducen a la ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$q(r) = - \frac{dp}{dL_0} \frac{\pi r^4}{8} \varphi_0; \quad (2.19)$$

el flujo volumétrico total a través de la celda unitaria se puede calcular como la suma del flujo en cada capilar:

$$Q = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} q(r) dN(r) = - \frac{dp}{dL_0} \left( \frac{2^{D_t-1} \pi D_f r_{max}^{D_f}}{D_t L_0^{D_t-1}} \right) \int_{r_{min}}^{r_{max}} [I\varphi](r) r^{D_t-D_f-2} dr; \quad (2.20)$$

en el desarrollo anterior se supuso que  $\left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{D_f} \approx 0$ , ésto ocurre porque  $r_{min}$  suele ser varios ordenes de magnitud menor que  $r_{max}$  [19] y  $D_f$  es un número entre 1 y 2 lo cual hace al cociente tienda a cero. Para calcular la velocidad promedio en medios porosos, el flujo total se divide entre el área transversal total

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{V_t}{L_0}} = \frac{Q}{\frac{V_p}{\phi L_0}}, \quad (2.21)$$

$V_t$  es el volumen total de la celda,  $V_p$  es el volumen total de poros y  $\phi = \frac{V_p}{V_t}$  es la porosidad. El volumen total de poros es entonces:

$$V_p = - \int_{r_{min}}^{r_{max}} \pi r^2 L_t dN = \pi D_f r_{max}^{3-D_t} \frac{2^{1-D_t} L_0^{D_t}}{3-D_t-D_f} \left[ 1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{3-D_t-D_f} \right]; \quad (2.22)$$

por lo tanto, la velocidad promedio queda expresada como:

$$v = \frac{dp}{dL_0} \frac{2^{2D_t-2} (3-D_t-D_f) \phi}{D_t L_0^{2D_t-2} r_{max}^{3-D_t-D_f}} \left[ 1 - \left(\frac{r_{min}}{r_{max}}\right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [I\varphi](r) r^{D_t-D_f-2} dr. \quad (2.23)$$

Al comparar esta expresión con la ecuación de Darcy (ecuación 1.1) se obtiene la siguiente expresión para la permeabilidad:

$$k = \frac{2^{2D_t-2}(3 - D_t - D_f)\phi}{D_t L_0^{2D_t-2} r_{max}^{3-D_t-D_f}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \int_{r_{min}}^{r_{max}} [I\varphi](r) r^{D_t-D_f-2} dr. \quad (2.24)$$

La permeabilidad newtoniana se obtiene sustituyendo  $[I\varphi](r) = \frac{\varphi_0 r^4}{8}$  y  $\varphi(\sigma) = \varphi_0$  en la ecuación 2.24:

$$k = \frac{2^{2D_t-2}(3 - D_t - D_f)\phi}{8D_t L_0^{2D_t-2}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^{2D_t}}{D_t - D_f + 3}, \quad (2.25)$$

además, para capilares rectos ( $D_t = 1$ ):

$$k = \frac{(2 - D_f)\phi}{8} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{2-D_f} \right]^{-1} \frac{r_{max}^2}{4 - D_f}, \quad (2.26)$$

esta ecuación es la que se encuentra en la literatura para fluidos newtonianos en capilares rectos.

## 2.4. Aproximación Analítica

Se pueden obtener resultados analíticos a partir de la ecuación 2.24 si se evalúa la integral en la ecuación 2.18, ésto se puede lograr si se supone una expresión para

$\varphi(\xi)$  con significado físico. Varias expresiones se pueden proponer basándose en que la fluidez en el capilar es mínima en el centro y máxima en las paredes, este comportamiento se debe a la respuesta del fluido a los esfuerzos generados en la geometría (máximos en las paredes y decrecen al alejarse de éstas). La expresión analítica no lineal más simple que cumple con estos límites es que la fluidez es una función cuadrática del radio del capilar. Ésto es:

$$\varphi(r) = \varphi_0 + (\varphi(\sigma) - \varphi_0)r^2. \quad (2.27)$$

La ecuación 2.27 predice un mínimo en la fluidez en el centro del capilar con valor  $\varphi_0$ ; de manera semejante, la fluidez presenta un máximo en la pared del capilar con valor de  $\varphi(\sigma)$ . Para calcular la fluidez en la pared es necesario calcular el esfuerzo en la pared con la ecuación 2.15.

Al sustituir la ecuación 2.27 en la ecuación 2.18 se obtiene  $\varphi(r)$ , este resultado se sustituye en la ecuación 2.24 para obtener:

$$k = \frac{2^{2D_t-2}(3-D_t-D_f)\phi}{D_t L_0^{2D_t-2}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{3-D_t-D_f} \right]^{-1} \frac{1}{\varphi(\sigma)} \left( \frac{\varphi_0}{8} \frac{r_{max}^{2D_t}}{D_t - D_f + 3} + \frac{\varphi(\sigma) - \varphi_0}{24} \frac{r_{max}^{2D_t+2}}{D_t - D_f + 5} \right). \quad (2.28)$$

Cuando  $\varphi(\sigma) \rightarrow \varphi_0$ , cerca del centro del capilar, la permeabilidad tiende a una constante, dada por la ecuación 2.25, y disminuye asintóticamente hasta otro valor constante cerca de la pared en función del máximo de la fluidez ( $\varphi(\sigma) \rightarrow \varphi_\infty$ ).

# Capítulo 3

## Resultados y Discusión

### 3.1. Procedimiento de Cálculo

Para calcular la permeabilidad utilizando la ecuación 2.28 es necesario conocer la porosidad y el radio promedio de los poros, con estos valores es posible calcular los parámetros estructurales ( $r_{max}$ ,  $r_{min}$  y  $L_0$ ), a partir de expresiones conocidas para los medios porosos ([19]), y estimar las dimensiones fractales ( $D_t$  y  $D_f$ ). Las tres funciones materiales del modelo BMP ( $\varphi_0$ ,  $\varphi_\infty$  y  $k_0\lambda$ ) se pueden obtener de curvas reométricas (gráficas de viscosidad contra rapidez de deformación en corte generadas en reómetros comerciales).

Dado un gradiente de presión, se evalúa el esfuerzo con la ecuación 2.16 y la fluidez usando la ecuación 2.8, entonces se puede calcular la permeabilidad con la ecuación 2.28; estas predicciones serán comparadas con datos experimentales disponibles en la literatura y con predicciones de otros modelos. Los valores de las propiedades

reométricas del fluido y de la microestructura del medio poroso se presentan, para cada caso, en el apéndice A

## 3.2. Resultados

La influencia del esfuerzo de cedencia sobre la velocidad promedio se ilustra en las figuras 3.1-3.3. En la figura 3.1 se comparan mediciones experimentales de una solución de poliacrilamida al 0.5 % en peso ([26]) con las predicciones del modelo BMP. Esta solución no presenta esfuerzo de cedencia, se puede ver que la curva de flujo correspondiente (puntos) presenta una transición muy suave entre la zona de bajos esfuerzos (donde la solución presenta una primera zona de viscosidad constante) y la zona de altos esfuerzos (donde la solución presente una segunda zona de viscosidad constante), ambas caracterizadas por pendientes constantes; tal transición ocurre en un intervalo amplio de esfuerzos. Los datos experimentales han sido representados adecuadamente usando el modelo de Ellis ([19]).

Por otra parte, el modelo BMP presenta una curva de flujo donde la transición entre las dos zonas de viscosidad constante ocurre de manera abrupta, se podría decir que la transición ocurre en un valor específico de esfuerzo (el esfuerzo de cedencia); pero, como se ve en el inserto presentado en la figura 3.1, el modelo BMP predice que, cuando se aplican esfuerzos menores al valor de cedencia, el material fluye muy lentamente con viscosidad constante (pendiente constante) y su comportamiento es muy parecido al del fluido newtoniano; además, la transición entre las dos zonas de viscosidad constante también es suave pero, en este caso, ocurre en un intervalo muy

pequeño de esfuerzos (esfuerzo de cedencia aparente).

En esta comparación se puede ver la diferencia en el comportamiento de un material que presenta cedencia (transición de la viscosidad en un intervalo pequeño de esfuerzos) y uno que no la presenta (transición de la viscosidad en un intervalo amplio de esfuerzos); se puede ver que hay concordancia en las regiones de bajos y altos gradientes de presión, donde se predicen valores constantes para la viscosidad, mas no para valores intermedios de éste.

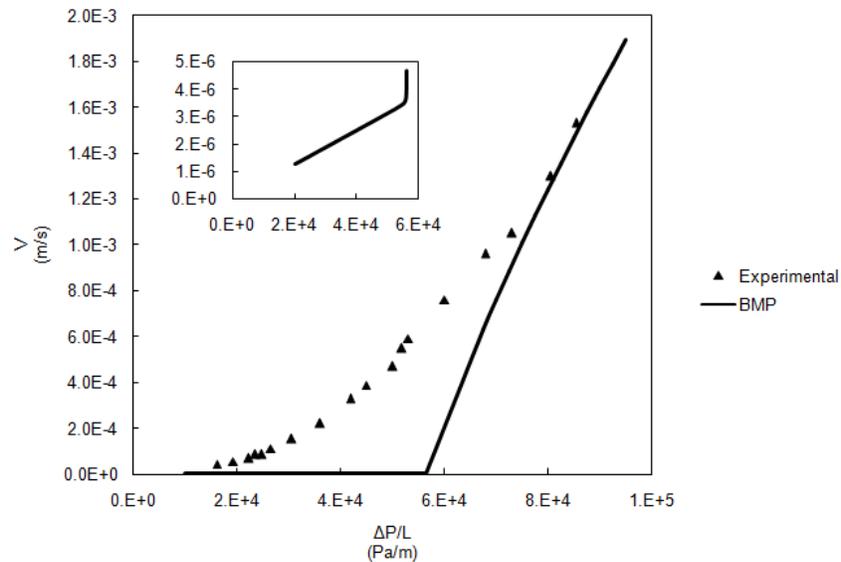


Figura 3.1: Velocidad promedio en función del gradiente de presión característico. Comparación entre datos experimentales tomados de Park ([26]), correspondientes a una solución de poliacrilamida y las predicciones del modelo BMP (Los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 3.2 se comparan las predicciones del modelo BMP con las predicciones del modelo presentado por Orgéas et al. ([6]) para un fluido newtoniano generalizado

en un medio poroso ortotrópico (transversalmente isotrópico). La permeabilidad en este modelo es una cantidad tensorial y se considera transversalmente isotrópica, se emplea la ecuación de Carreau-Yasuda para la viscosidad y un medio poroso de sección transversal elíptica. La anisotropía del medio provoca que la relación entre la estructura de los poros y la reología del fluido sea compleja, lo cual se refleja en las predicciones de este modelo.

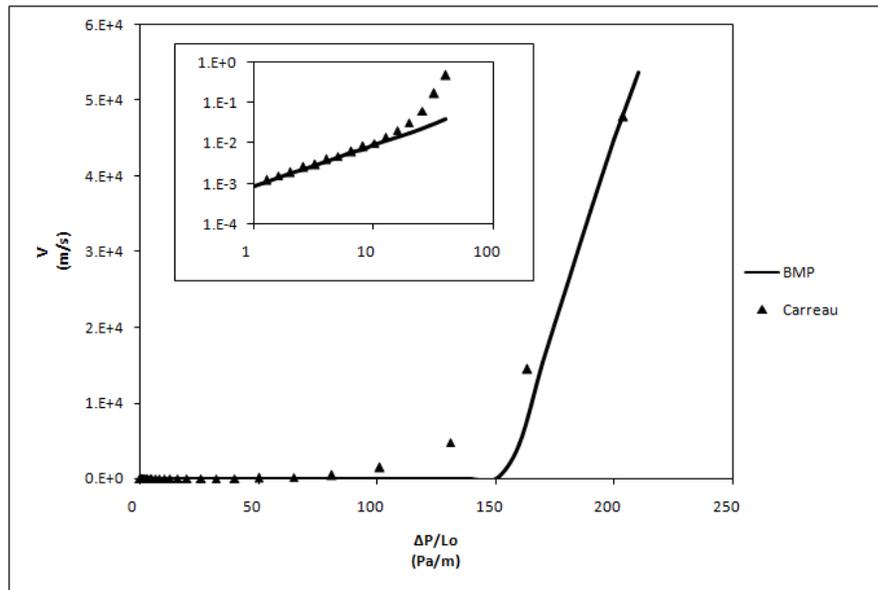


Figura 3.2: Velocidad promedio en función del gradiente de presión característico. Comparación entre las predicciones del modelo presentado por Orgéas ([6]) usando la ecuación de Carreau-Yasuda para la viscosidad y predicciones usando el modelo BMP (Los datos usados están en el apéndice A).

Se puede ver en el inserto en la figura 3.2 que la curva de flujo correspondiente al modelo de Orgéas et al. (puntos) presenta, a esfuerzos pequeños, flujo muy lento con viscosidad constante y, a esfuerzos intermedios (figura principal), una transición

brusca entre las dos zonas de viscosidad constante (pendientes constantes), este efecto es semejante al que se presenta cuando el material tiene esfuerzo de cedencia, como se puede ver en la curva correspondiente al modelo BMP. Se presentan diferencias entre las predicciones hechas con el modelo BMP y las presentadas por Orgéas et al. ([6]), dichas diferencias se deben a que la ecuación de Carreau-Yasuda no presenta esfuerzo de cedencia, esto es, la transición de la viscosidad no es tan abrupta como en el modelo BMP.

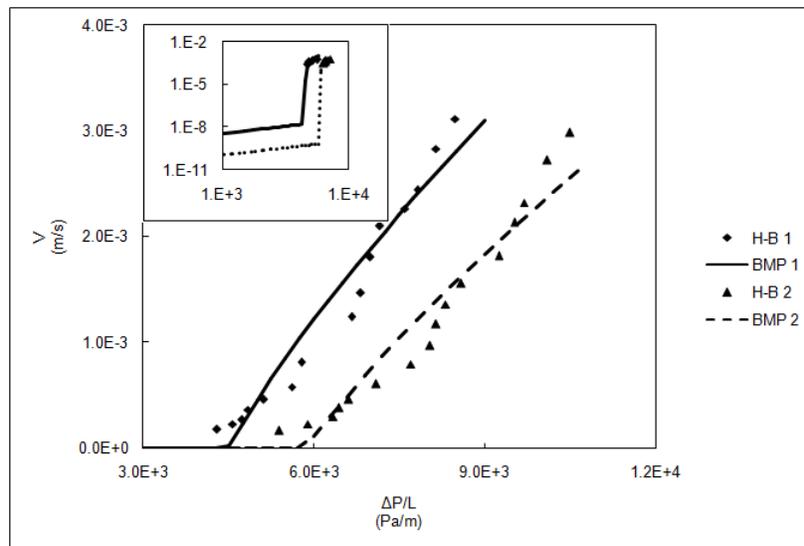


Figura 3.3: Velocidad promedio en función del gradiente de presión característico. Comparación de series de datos experimentales de dos soluciones de polimetilcelulosa tomados de Park ([26]) y predicciones usando el modelo BMP (Los datos usados están en el apéndice A).

Se hizo una última comparación de las predicciones del modelo BMP para la velocidad promedio en función del gradiente de presión (figura 3.3), esta vez contra datos experimentales de dos soluciones de polimetilcelulosa con masa molecular

denotada como PMC-25 ([26]) y concentraciones del 0.3% (H-B 1) y 0.5% (H-B 2) en peso. Park ([26]) utilizó la ecuación de Herschel-Bulkley, la cual presenta esfuerzo de cedencia real (no hay flujo para esfuerzos menores a éste), para representar la reología de las soluciones. Como se puede ver en el inserto en la figura 3.3, en todas las curvas correspondientes al modelo BMP la velocidad promedio es cercana a cero para gradientes de presión menores al esfuerzo de cedencia y, cuando éste es superado (figura principal), la velocidad se incrementa linealmente; en este caso las predicciones del modelo BMP están de acuerdo con los datos experimentales. El punto de cedencia no pudo ser descrito de manera adecuada por Sochi ([5]), por lo que sus simulaciones no son incluidas aquí.

En la figura 3.4 se presentan las predicciones de velocidad promedio usando el modelo BMP para varios valores del esfuerzo de cedencia. Se puede ver que la velocidad promedio es muy baja a gradientes de presión menores al esfuerzo de cedencia (primera zona de viscosidad constante) y crece de manera casi lineal cuando dicho esfuerzo es superado (segunda zona de viscosidad constante), éste efecto ocurre porque la viscosidad del material a bajos esfuerzos es muy alta, lo cual hace que el material presente alta resistencia al flujo; mientras que, para esfuerzos altos, la viscosidad del material es considerablemente menor, permitiendo así que éste fluya más fácilmente.

Cuando la transición entre las dos zonas de viscosidad constante ocurre en un intervalo de esfuerzo muy pequeño se dice que el material presenta esfuerzo de cedencia, mientras mayor sea el valor de éste, mayor será el esfuerzo necesario para alcanzar la zona de transición. Este comportamiento se puede ver en la figura 3.4, cuando el esfuerzo de cedencia es pequeño la curva de flujo presenta cambio de pendiente a

gradientes de presión pequeños y al aumentar el esfuerzo de cedencia aumenta también el gradiente de presión correspondiente a la transición. Como es de esperarse, la velocidad promedio presenta un crecimiento mayor a menor esfuerzo de cedencia.

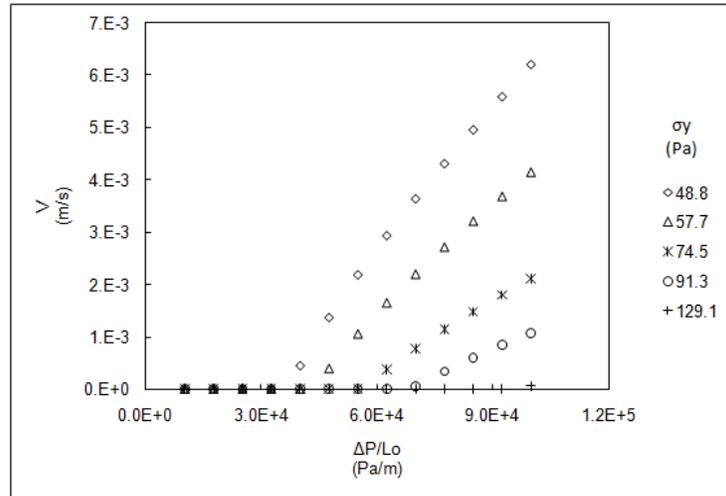


Figura 3.4: Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra gradiente de presión característico para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

Como se presentó en la figura 2.2, el modelo BMP predice esfuerzo de cedencia real ( $\varphi_0 = 0$ ) y aparente (valores pequeños de  $\varphi_0$ ). El esfuerzo de cedencia real implica que el material tendrá un comportamiento parecido al de un sólido cuando la rapidez de deformación en corte sea cero, semejante al comportamiento en el modelo viscoplastico de Bingham. En la figura 3.5, se presenta la gráfica de velocidad promedio contra gradiente de presión para varios valores de  $\varphi_0$ ; se puede ver que cuando  $\varphi_0 \rightarrow 0$  el modelo predice esfuerzos de cedencia aparentes, valores del esfuerzo donde la curva de flujo tiene un cambio abrupto de pendiente, que se hacen presentes

en la zona donde las velocidades tienen valores cercanos a cero. Esto corresponde a la región de muy bajas velocidades en el modelo de Orgéas et al. ([6]) y a la zona donde no hay datos experimentales de la velocidad en la figura 3.3. El efecto del esfuerzo de cedencia es menor cuando  $\varphi_0$  crece, generando curvas donde, aún cuando existe el cambio de pendiente, éste ya no es tan drástico puesto que la diferencia entre los valores de la viscosidad en las dos zonas donde ésta es constante es pequeño comparado con el caso cuando  $\varphi_0 \rightarrow 0$ .

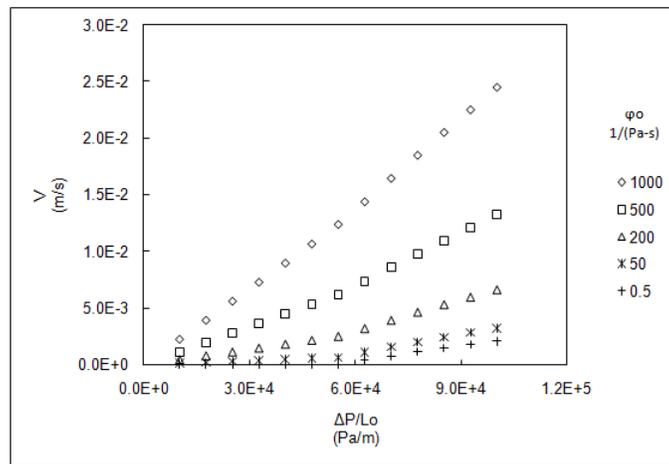


Figura 3.5: Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra gradiente de presión característico para varios valores de la fluidez a bajas rapidezces de deformación ( $\varphi_0$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 3.6 se presenta la gráfica de velocidad contra gradiente de presión para varios valores de porosidad, el modelo predice un efecto semejante al presentado en la figura 3.5 donde se varió el esfuerzo de cedencia; a bajas porosidades el medio tiene menor espacio disponible para que el material fluya, lo cual disminuye la velocidad promedio. Este efecto puede compararse con el caso de esfuerzos de ce-

dencia altos en la figura 3.5 donde la velocidad promedio es muy baja. Por otro lado, a altas porosidades el fluido encuentra mayor espacio en el medio para desplazarse lo que produce que la velocidad promedio crezca rápidamente con el gradiente de presión. Comparando la figura 3.6 con la figura 3.5, este efecto equivale a la velocidad promedio que se presenta a bajos esfuerzos de cedencia. Hay que resaltar que el comportamiento que se presenta en la figura 3.6 incluye la presencia del esfuerzo de cedencia ( $74.5 Pa$ ), éste se puede notar en el cambio de pendiente que presentan todas las curvas. En el inserto incluido en la figura 3.6 se puede notar que, a esfuerzos menores al valor de cedencia donde todas las curvas presentan velocidades muy bajas, la tendencia de flujo antes señalada se mantiene, se presentan velocidades bajas cuando la porosidad es baja y, al aumentar ésta última, también lo hace la velocidad.

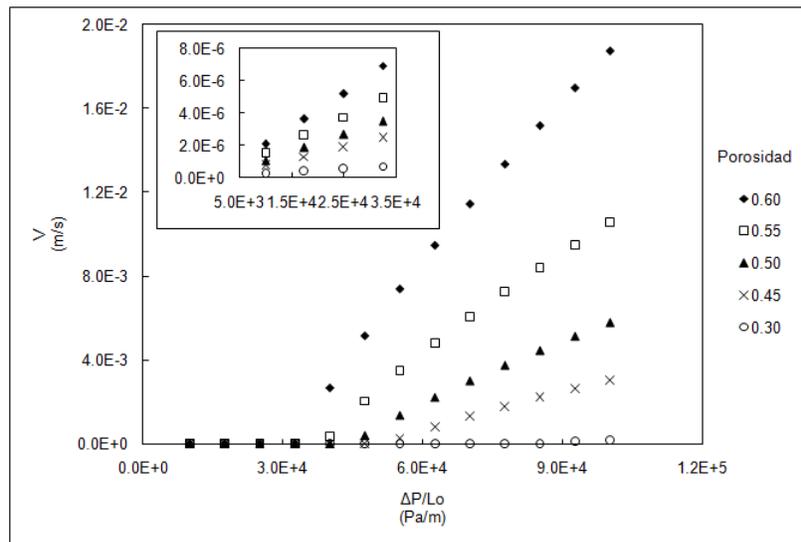


Figura 3.6: Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra gradiente de presión característico para varios valores de la porosidad ( $\phi$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

La dependencia de la velocidad promedio con los parámetros microestructurales y las dimensiones fractales se presenta en las figuras 3.7-3.9. El modelo predice un resultado interesante al variar la relación de radios de los poros (figura 3.7); según la ecuación 2.11, cuando la distribución de radios de los poros es cerrada, el número de poros en el medio disminuye, lo cual provoca que el esfuerzo total en la pared (ecuación 2.16) disminuya. Esto afecta de forma notable el comportamiento del flujo. Para gradientes de presión bajos las relaciones de radios más pequeñas generan menor esfuerzo en la pared, lo cual permite que el fluido se mueva más fácilmente (porque hay menor fricción). Ésta tendencia puede verse en el inserto en la figura 3.7 donde las relaciones de radios más pequeñas tienen velocidades mayores.

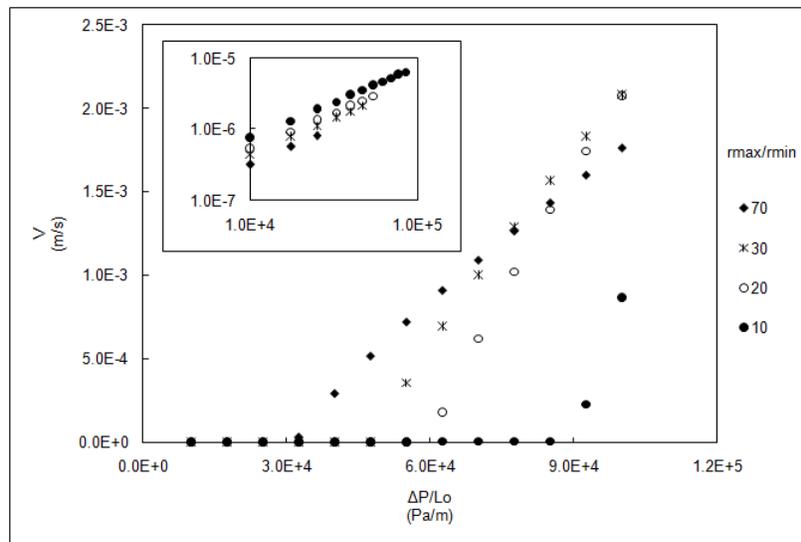


Figura 3.7: Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra el gradiente de presión característico para varios valores de la relación de radios ( $r_{max}/r_{min}$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

El hecho de que los esfuerzos dependan de la relación de radios afecta el pun-

to de cedencia (el valor del gradiente de presión en el que se presenta un cambio abrupto en la pendiente de la curva de flujo). Puesto que las relaciones de radios más cerradas generan menores esfuerzos, éstas requerirán gradientes de presión mayores para presentar cedencia pero, una vez que ésta se presenta, el gradiente de presión es lo suficientemente grande como para provocar un cambio de pendiente mucho más marcado en la curva de flujo. Este efecto se comprueba en la figura 3.7 donde se puede ver que las relaciones de radios más grandes ceden a gradientes de presión más pequeños pero, una vez que se presenta la cedencia, las relaciones de radios más pequeñas presentan cambios de pendiente más drásticos.

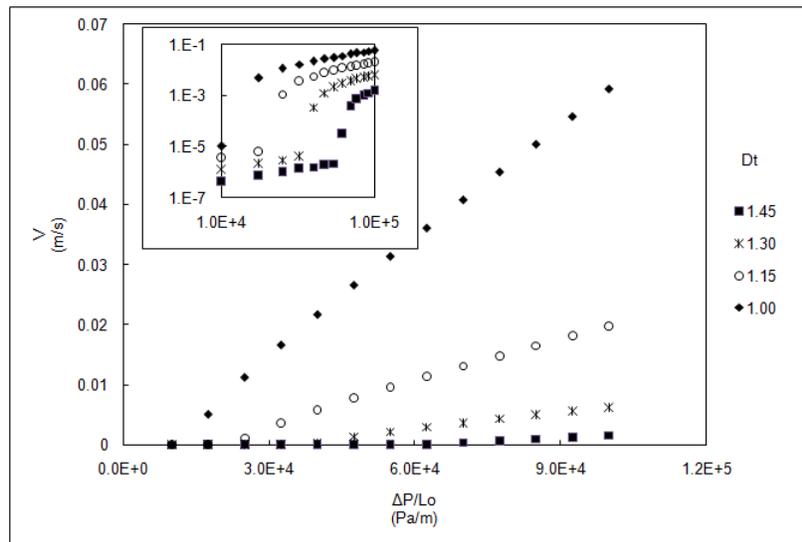


Figura 3.8: Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra el gradiente de presión característico para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 3.8 se presenta la influencia de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ); el límite donde  $D_t = 1$  corresponde a capilares rectos; cuando la dimensión

de tortuosidad disminuye, la velocidad promedio aumenta y el efecto de la cedencia se ve abatido (inserto en la figura 3.8), demostrando la relación entre el esfuerzo de cedencia y la tortuosidad. Cuando el capilar es recto ( $D_t = 1$ ), el fluido puede moverse con mayor facilidad que cuando hay tortuosidad, ésta impide el movimiento del fluido en el medio poroso provocando velocidades menores como se puede ver en la figura 3.8.

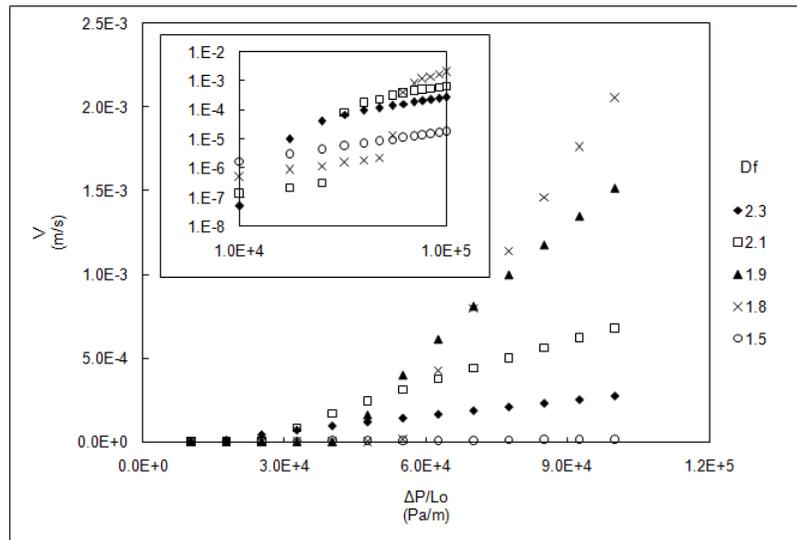


Figura 3.9: Predicciones del modelo BMP. Velocidad promedio contra el gradiente de presión característico para varios valores de la dimensión fractal de porosidad ( $D_f$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

Por otra parte, en la figura 3.9 se puede ver que la relación para la velocidad y la dimensión fractal de porosidad ( $D_f$ ) es semejante a la relación mostrada en la figura 3.7; cuando  $D_f$  crece también lo hacen los esfuerzos, esto provoca que a bajos gradientes de presión (ampliación en la figura 3.9) la curva correspondiente a la menor dimensión de porosidad presente mayor velocidad (en ésta se genera menor

fricción); por otra parte, las curvas con mayor  $D_f$  generan mayores esfuerzos, por lo que presentan cedencia a gradientes de presión menores, pero la cedencia de las curvas con menor  $D_f$  es más drástica como se puede ver en la figura 3.9.

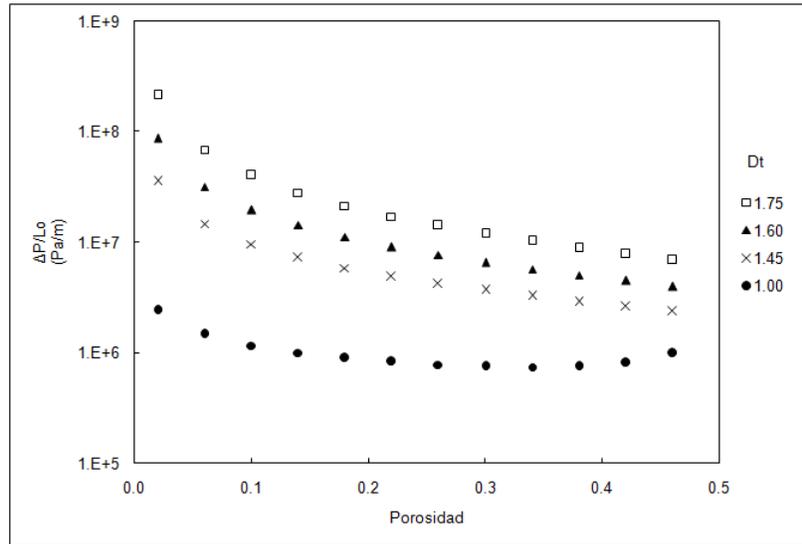


Figura 3.10: Gradiente de presión inicial en función de la porosidad para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ). Predicciones de modelo BMP (Los datos usados están en el apéndice A).

Las predicciones obtenidas para el gradiente de presión en función de la porosidad y del esfuerzo de cedencia se muestran en las figuras 3.10 y 3.11. En la figura 3.10 se puede ver que el gradiente de presión necesario para iniciar el flujo disminuye asintóticamente al aumentar la porosidad del medio para varios valores de  $D_t$ ; al variar  $D_f$  se obtienen resultados semejantes por lo que no se discutirán aquí. Cuando  $D_t \rightarrow 1$ , el gradiente de presión necesario para el flujo es muy pequeño y tiende al valor límite para porosidades altas. En la zona de baja porosidad, se puede ver que el gradiente de presión crece rápidamente para valores altos de  $D_t$ . Estos resultados

son semejantes a los que presentan Yun et al. ([18]) para un fluido de Bingham. Esta discusión complementa y corrobora las afirmaciones hechas para la figura 3.8 (la tortuosidad dificulta el flujo).

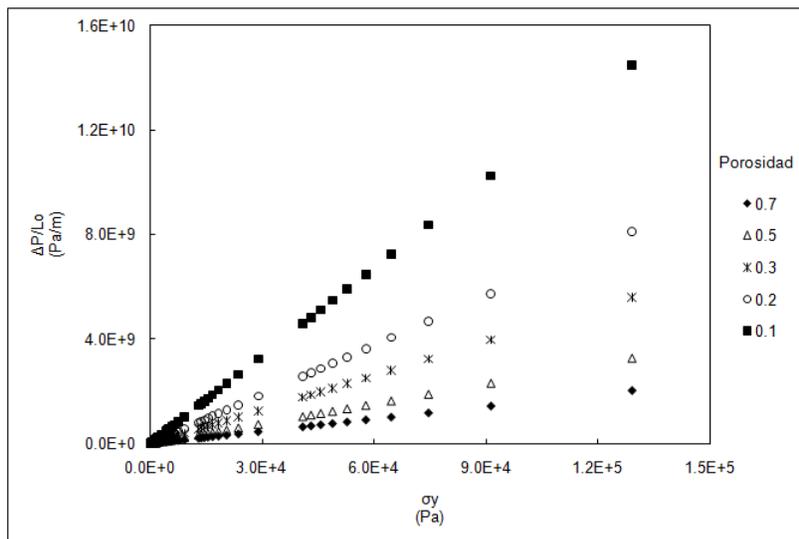


Figura 3.11: Predicciones del modelo BMP para el gradiente de presión en función del esfuerzo de cedencia para varios valores de la porosidad ( $\phi$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

La figura 3.11 revela una relación lineal entre el gradiente de presión y el esfuerzo de cedencia para varios valores de la porosidad. Se puede ver que al aumentar la porosidad, el gradiente de presión necesario para iniciar el flujo disminuye para cada valor del esfuerzo de cedencia. Esta relación también ha sido presentada para fluidos de Bingham ([18]) y concuerda con la expresión teórica desarrollada por Zhang et al. ([17]) para crudo pesado en medios porosos:

$$\frac{\Delta p}{L_0} = 2\sigma_y \sqrt{\frac{\phi}{8k}}. \quad (3.1)$$

En la región donde  $k$  es constante (independiente de la viscosidad del fluido), la gráfica del gradiente de presión contra esfuerzo de cedencia debe tener una pendiente mayor al aumentar la porosidad. Sin embargo, si se tiene permeabilidad variable (función de la viscosidad del fluido), la pendiente disminuye para porosidades mayores, esto puede verse en la figura 3.11.

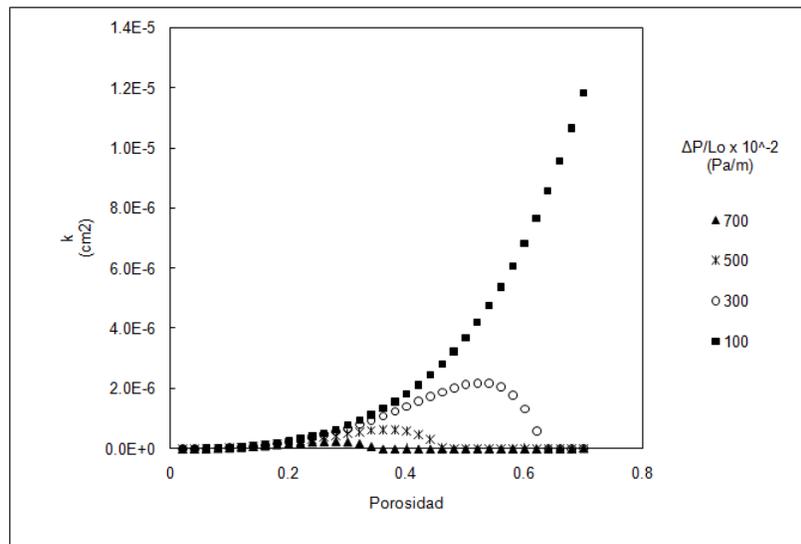


Figura 3.12: Permeabilidad contra porosidad para varios valores del gradiente de presión aplicado ( $\frac{\Delta p}{L_0}$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

Se presentan las predicciones del modelo BMP para la permeabilidad en función de la porosidad, para distintos valores del gradiente de presión (figura 3.12), de la dimensión fractal de tortuosidad (figura 3.13) y del esfuerzo de cedencia (figura 3.14). En la figura 3.12 se ve que, para gradientes de presión pequeños, la permeabilidad aumenta monótonamente al aumentar la porosidad, cuando el gradiente de presión es pequeño (menor que el esfuerzo de cedencia) el fluido se encuentra en la primer

zona de viscosidad constante y no presenta cedencia (la permeabilidad no presenta máximos) y, al aumentar la porosidad, el fluido se moverá más fácilmente a través del medio; pero, para gradientes de presión grandes, la permeabilidad presenta un máximo debido a que el fluido presenta cedencia seguida de una zona donde su fluidez es mayor (ver ecuación 2.28); después la permeabilidad disminuye asintóticamente al aumentar la porosidad como efecto del aumento en la fluidez del material.

Este comportamiento no ha sido descrito antes; de hecho, las predicciones presentadas por Zhang et al. ([17]) usando la ecuación de la ley de la potencia para la viscosidad describen crecimiento monótonico de la permeabilidad para todos los exponentes de la ley de la potencia, además el crecimiento es mayor al aumentar el exponente. Las predicciones hechas por Zhang et al. no incluyen la variación de la permeabilidad para varios gradientes de presión.

En la figura 3.13 se puede ver que al variar la dimensión fractal de tortuosidad se obtiene un resultado cualitativamente semejante al presentado en la figura 3.12. La permeabilidad presenta máximos cuando la dimensión de tortuosidad tiende a uno (límite de capilares rectos); y, para dimensiones de tortuosidad mayores, se presenta crecimiento monótonico de la permeabilidad con la porosidad. Este comportamiento se debe a que, como se mencionó antes, la tortuosidad impide el flujo, por lo que a bajas  $D_t$  el material cede más rápidamente y la permeabilidad tiene un máximo; pero cuando la tortuosidad es alta, el material no puede generar el esfuerzo necesario para ceder, por lo que la permeabilidad no presentará máximos. Es necesario remarcar que, bajo estas condiciones, la permeabilidad disminuye al aumentar la tortuosidad de los capilares.

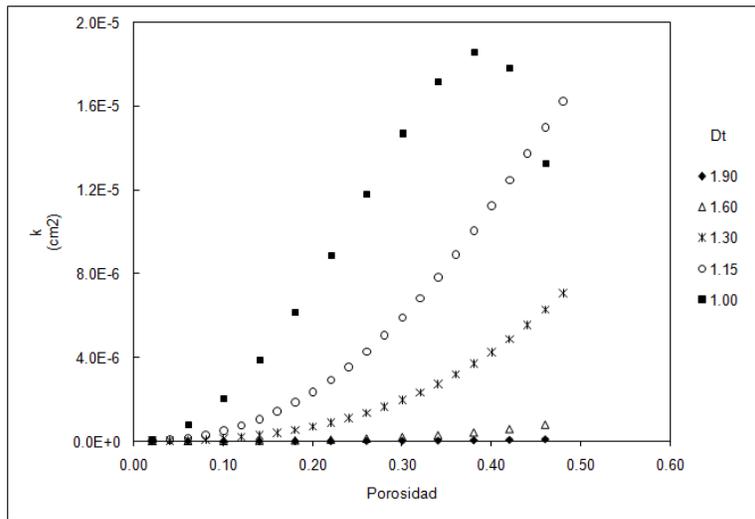


Figura 3.13: Permeabilidad en función de la porosidad para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

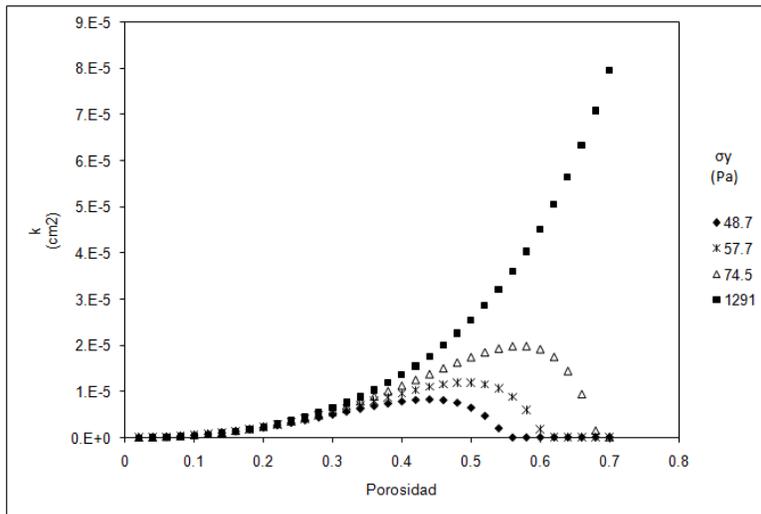


Figura 3.14: Permeabilidad en función de la porosidad para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

En la figura 3.14 se ve que el esfuerzo de cedencia afecta de manera drástica el comportamiento de la permeabilidad en la zona de alta porosidad. Para valores altos del esfuerzo de cedencia la permeabilidad crece monótonamente y se presentan máximos conforme el esfuerzo de cedencia disminuye. Este resultado contrasta con la tendencia mostrada en la figura 3.12, al aumentar el gradiente de presión.

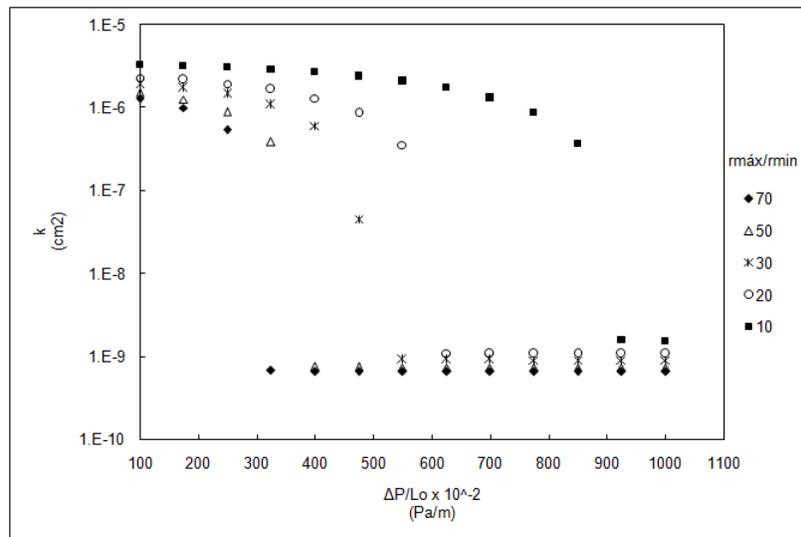


Figura 3.15: Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para varios valores de la razón de radios ( $\frac{r_{máx}}{r_{min}}$ ). (Los datos usados están en el apéndice A).

Ahora, para ilustrar la dependencia de permeabilidad con el gradiente de presión aplicado, se presentan las figuras 3.15-3.18. En la figura 3.15, la permeabilidad disminuye al aumentar el gradiente de presión aplicado de un valor alto (correspondiente al valor constante de la viscosidad a bajas rapidezces de deformación) hacia un valor asintótico menor (correspondiente al valor constante de la viscosidad a altas rapidezces de deformación), también se puede ver que la transición entre ambas zonas

ocurre en intervalos de esfuerzo muy pequeños (se presenta cedencia). Se predice una mayor permeabilidad para distribuciones de radios más cerradas ( $\frac{r_{max}}{r_{min}} \rightarrow 1$ ). Este comportamiento se debe a que las distribuciones más cerradas generan menores esfuerzos, por lo tanto, el medio presenta una menor resistencia al flujo. Este comportamiento es semejante al obtenido cuando se varía la dimensión fractal de porosidad, por esta razón éste último no es mostrado aquí. La variación de la permeabilidad con el gradiente de presión también depende de la tortuosidad del medio poroso; esta dependencia se muestra en la figura 3.16. Como se puede ver, para capilares rectos ( $D_t = 1$ ), la pendiente del decremento de la permeabilidad es más pronunciada (el fluido cede más libremente) y disminuye al aumentar la tortuosidad. Es evidente que, en general, se predicen permeabilidades menores al aumentar la tortuosidad del medio, lo cual corrobora que la tortuosidad se opone al flujo.

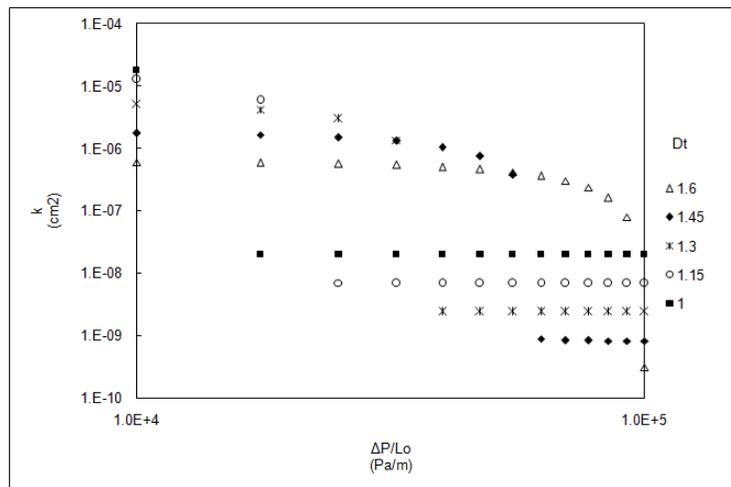


Figura 3.16: Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

La microestructura del medio poroso se refleja macroscópicamente en la porosidad; para ilustrar esta dependencia en la figura 3.17 se presenta la variación de la permeabilidad con el gradiente de presión para distintos valores de la porosidad. De manera general, el comportamiento es semejante al que se presenta en la figura 3.16, es decir, al aumentar la porosidad se obtienen predicciones semejantes a las que se presentan al disminuir la tortuosidad. Las regiones presentes incluyen una zona de permeabilidad constante para gradientes de presión pequeños seguido de un decremento súbito de la permeabilidad para gradientes de presión intermedios y una región asintótica de baja permeabilidad para gradientes de presión altos. La pendiente del decremento de la permeabilidad es más pronunciada al aumentar la porosidad. Estos resultados concuerdan con el comportamiento predicho para un fluido de Ellis ([19]) para varios exponentes de la zona de ley de potencia.

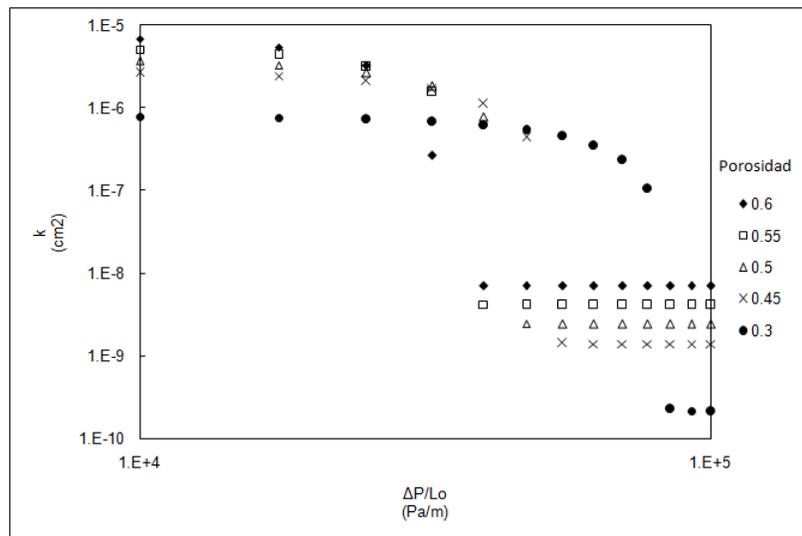


Figura 3.17: Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para diferentes valores de la porosidad ( $\phi$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

De manera semejante, en la figura 3.18 se puede ver que el modelo predice un decremento mayor en la permeabilidad con el gradiente de presión mayor para valores menores del esfuerzo de cedencia.

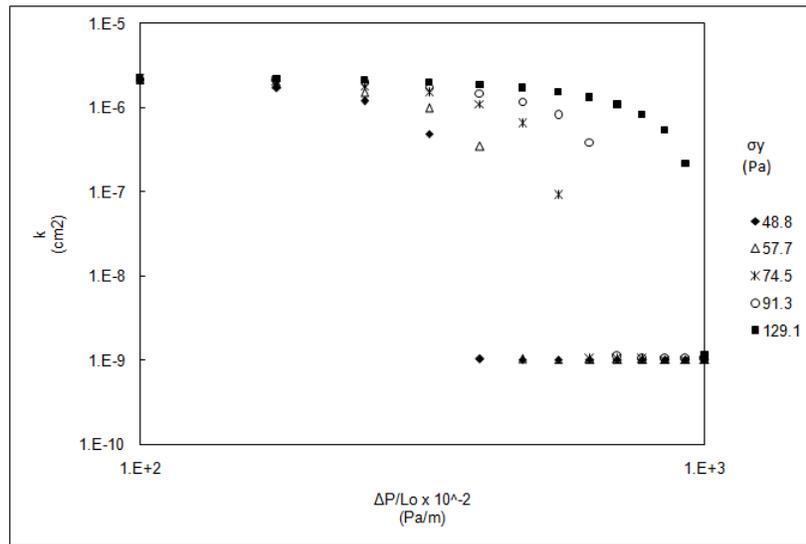


Figura 3.18: Gráfica de permeabilidad contra gradiente de presión aplicado para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

En la referencia [27] se presenta una descripción teórica, basada en simulaciones tridimensionales de materiales no newtonianos a través de un medio poroso desordenado, usando como modelo reológico la ecuación de Herschel-Bulkley. Los resultados que se presentan en esta referencia muestran un máximo en las curvas de permeabilidad contra número de Reynolds para varios esfuerzos de cedencia, y el máximo se desplaza a Reynolds mayores al aumentar el esfuerzo de cedencia. Estos resultados también se predicen utilizando el modelo BMP (aquí se grafica permeabilidad contra velocidad) en las figuras 3.19 y 3.20. En la figura 3.19 se usaron capilares

rectos ( $D_t = 1$ ); para esfuerzos de cedencia pequeños se presenta el desplazamiento del máximo de la permeabilidad, tal y como se presenta en [27], y para esfuerzos mayores se predice que la permeabilidad aumenta monótonamente. Al aumentar la tortuosidad de los capilares se obtienen resultados similares como se muestra en la figura 3.20 ( $D_t = 1.15$ ); se presenta el desplazamiento del máximo en la permeabilidad para valores bajos del esfuerzo de cedencia y, a valores altos de éste, se predice crecimiento monótono de la permeabilidad.

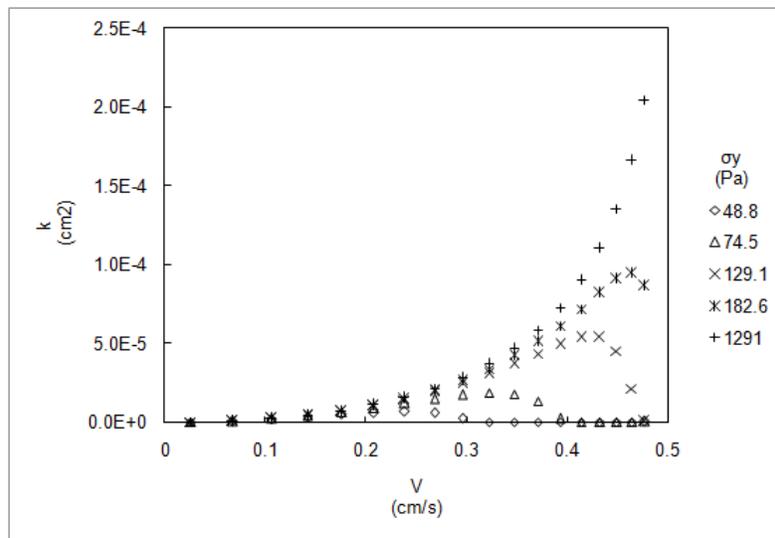


Figura 3.19: Permeabilidad en función de la velocidad para varios valores del esfuerzo de cedencia. Se usaron capilares rectos ( $D_t = 1$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

Se ha encontrado que, para formaciones con permeabilidad alta, se puede relacionar la variación de la permeabilidad con la variación de la porosidad de acuerdo a una ley de potencia ( $k \propto \phi^n$ ). La ecuación 3.2 es una correlación sugerida por Lambird ([28]) basada en los valores iniciales de la porosidad y la permeabilidad ( $\phi_i$

y  $k_i$ ) para estimar los correspondientes valores después de un tratamiento ácido.

$$\frac{k}{k_i} = \left( \frac{\phi}{\phi_i} \right)^3 \quad (3.2)$$

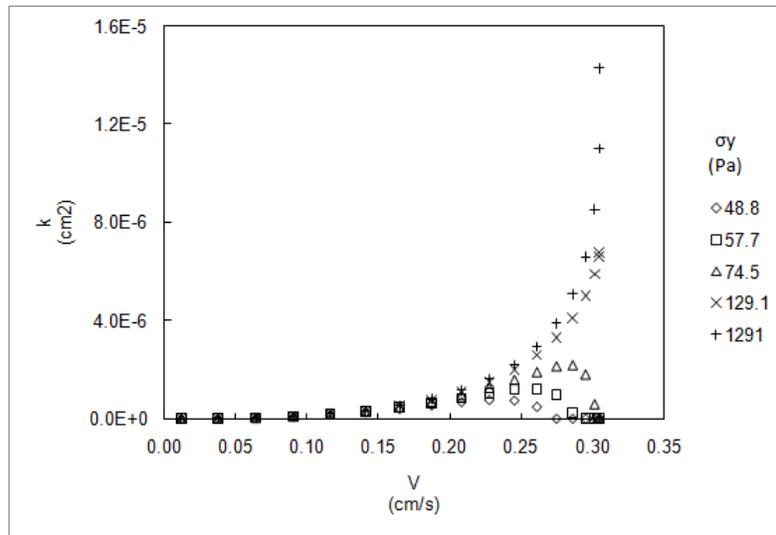


Figura 3.20: Permeabilidad en función de la velocidad para varios valores del esfuerzo de cedencia. Se usaron capilares tortuosos ( $D_t = 1.15$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

En las figuras 3.21-3.23 se comparan las predicciones del modelo BMP (líneas) con la correlación de Lambird para varias condiciones iniciales. En la figura 3.21 se puede ver que la concordancia en las predicciones llega hasta porosidades altas para valores de  $D_f$  altos (desde 1.5 hasta 1.9), para valores de  $D_f$  menores el modelo BMP predice un máximo en la permeabilidad; la figura 3.21 muestra que la relación cúbica concuerda con las curvas del modelo BMP para valores altos de la dimensión fractal de porosidad (donde no se produce cedencia).

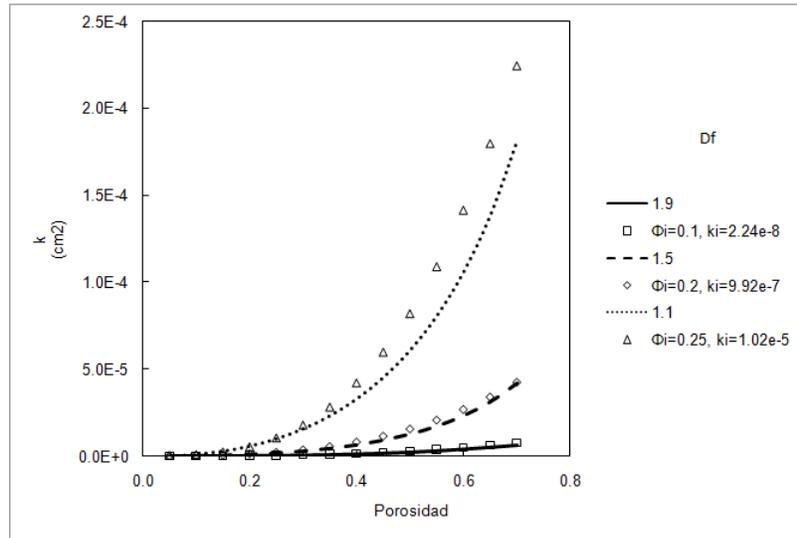


Figura 3.21: Comparación de las predicciones del modelo BMP con la correlación de Lambird con diferentes condiciones iniciales para varios valores de la dimensión fractal de porosidad ( $D_f$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

De manera análoga, en la figura 3.22 se ve la concordancia de las predicciones para valores altos de la dimensión de fractal tortuosidad, siendo el máximo en la permeabilidad, debido a la cedencia que predice el modelo BMP, la razón de las discrepancias. Finalmente, la figura 3.23 muestra que, para varios valores del esfuerzo de cedencia, hay equivalencia entre ambas predicciones para valores altos de porosidad, lo cual muestra la relación existente entre las condiciones iniciales para esfuerzos de cedencia bajos hasta el punto de cedencia.

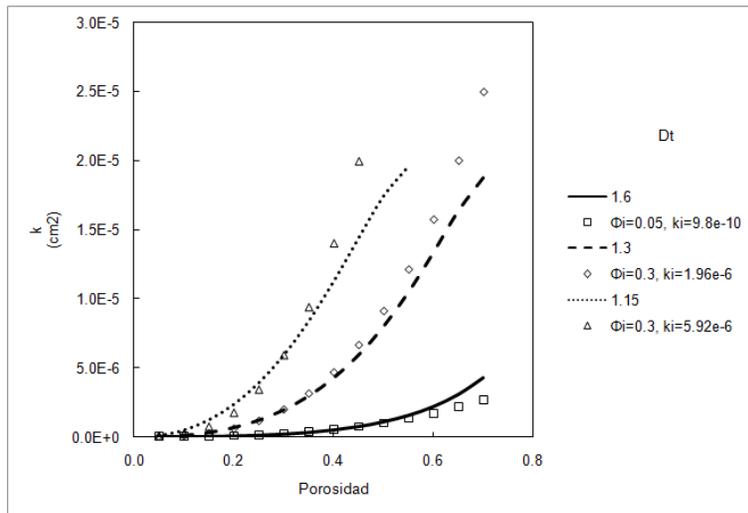


Figura 3.22: Comparación de la predicciones del modelo BMP con la correlación de Lambird con diferentes condiciones iniciales para varios valores de la dimensión fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

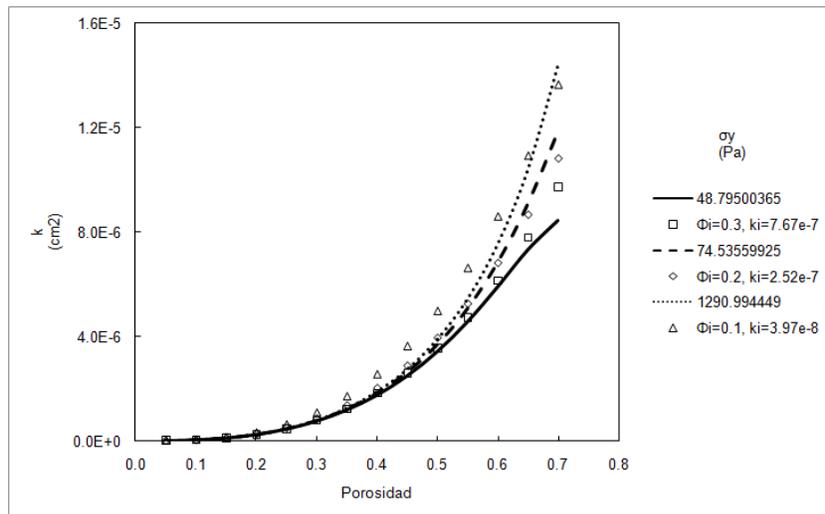


Figura 3.23: Comparación de la predicciones del modelo BMP con la correlación de Lambird con diferentes condiciones iniciales para varios valores del esfuerzo de cedencia ( $\sigma_y$ ) (Los datos usados están en el apéndice A).

# Capítulo 4

## Conclusiones

En este trabajo se usó el modelo BMP para desarrollar un modelo fractal de la permeabilidad de medios porosos. En estado estacionario, el comportamiento reológico predicho por el modelo BMP incluye dos zonas de viscosidad constante, una a bajas rapidezces de deformación y otra a altas, una región de transición a rapidezces de deformación intermedias y esfuerzos de cedencia (reales y aparentes). Las predicciones de la permeabilidad en función de los parámetros microestructurales del medio poroso (la distribución de tamaño de poros y las dimensiones fractales de porosidad y tortuosidad), de las propiedades macroscópicas del medio poroso (porosidad), las funciones materiales del fluido (esfuerzo de cedencia) y el gradiente de presión aplicado concuerdan con datos experimentales presentados en la literatura para fluidos con cedencia, con descripciones previas para fluidos newtonianos generalizados (Ley de potencia, Carreau-Yasuda, Ellis, Bingham y Herschel-Bulkley) y con correlaciones usadas a nivel industrial (Lambird).

Los resultados muestran una fuerte influencia del esfuerzo de cedencia del fluido sobre el comportamiento de la permeabilidad; por esta razón la expresión obtenida para la permeabilidad resulta de utilidad en cálculos relacionados con procedimientos de fracturamiento de roca (en éstos se utilizan materiales como espumas, surfactantes y geles) y en el análisis de curvas de presión puesto que el dato necesario es el gradiente de presión aplicado además de la descripción reológica del fluido y las características del medio poroso.

# Apéndice A

## Tablas de datos por figura

En todas la tablas, los parámetros del modelo BMP fueron ajustados a los parámetros de otros modelos.

Tabla A.1: Datos usados en la figura 3.1. Los parámetros del modelo de Ellis y del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.1					
Modelo	BMP	Modelo	Ellis	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278Pa^{-1}s^{-1}$	$\sigma_{\frac{1}{2}}$	$0.719Pa$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$	$\mu_0$	$4.35Pa - s$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4}m$
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$\alpha$	2.47	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5}m$
$\sigma_y$	$74.5Pa$			$D_f$	1.79
				$D_t$	1.42

Tabla A.2: Datos usados en la figura 3.2. Los parámetros del modelo de Carreau-Yasuda y la porosidad fueron tomados de [6], el resto de los parámetros del medio poroso se estimaron con el método presentado en [19]

Datos de la figura 3.2					
Modelo	BMP	Carreau	Yasuda	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.7Pa^{-1}s^{-1}$	$\eta_0$	$1Pa - s$	$\phi$	0.4
$\varphi_\infty$	$1.4 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$	$\eta_\infty$	$0Pa - s$	$r_{max}$	$2.89 \times 10^{-1}m$
$k_0\lambda$	$9 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$\dot{\gamma}_0$	$1s^{-1}$	$r_{min}$	$1.3 \times 10^{-2}m$
$\sigma_y$	$89.1Pa$	$n$	0.2	$D_f$	1.30
		$a_c$	2	$D_t$	1.10

Tabla A.3: Datos usados en la figura 3.3. Los parámetros del modelo de Herschel-Bulkley y la porosidad fueron tomados de [5] y los parámetros del medio poroso se estimaron con el método presentado en [19]

Datos de la figura 3.3 curvas H-B 1 y BMP 1					
Modelo	BMP	Herschel	Bulkley	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$10Pa^{-1}s^{-1}$	$C$	$0.009Pa - s^n$	$\phi$	0.42
$\varphi_\infty$	$4.5 \times 10^{18} Pa^{-1}s^{-1}$	$n$	0.66	$r_{max}$	$1.2 \times 10^{-6}m$
$k_0\lambda$	$5.56 \times 10^{-16}s - Pa^{-1}$	$\sigma_y$	$0.018Pa$	$r_{min}$	$5.4 \times 10^{-8}m$
$\sigma_y$	$0.02Pa$	$n$	0.2	$D_f$	1.57
				$D_t$	1.16

Tabla A.4: Datos usados en la figura 3.3. Los parámetros del modelo de Herschel-Bulkley y la porosidad fueron tomados de [5] y los parámetros del medio poroso se estimaron con el método presentado en [19]

Datos de la figura 3.3 curvas H-B 2 y BMP 2					
Modelo	BMP	Herschel	Bulkley	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$10Pa^{-1}s^{-1}$	$C$	$0.021Pa - s^n$	$\phi$	0.42
$\varphi_\infty$	$6.5 \times 10^{19} Pa^{-1}s^{-1}$	$n$	0.63	$r_{max}$	$1.6 \times 10^{-6}m$
$k_0\lambda$	$2.73 \times 10^{-18}s - Pa^{-1}$	$\sigma_y$	$0.072Pa$	$r_{min}$	$7.3 \times 10^{-8}m$
$\sigma_y$	$0.075Pa$	$n$	0.2	$D_f$	1.85
				$D_t$	1.16

Tabla A.5: Datos usados en la figura 3.4. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.4			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
		$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
		$D_f$	1.79
		$D_t$	1.42

Tabla A.6: Datos usados en la figura 3.5. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.5			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
		$D_f$	1.79
		$D_t$	1.42

Tabla A.7: Datos usados en la figura 3.6. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.6			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_t$	1.42
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$		
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.8: Datos usados en la figura 3.7. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.7			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_f$	1.79
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_t$	1.42

Tabla A.9: Datos usados en la figura 3.8. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.8			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_f$	1.79

Tabla A.10: Datos usados en la figura 3.9. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.9			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278 Pa^{-1} s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4} m$
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5} m$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$	$D_t$	1.42

Tabla A.11: Datos usados en la figura 3.10. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.10			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227Pa^{-1}s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$		
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5Pa$		

Tabla A.12: Datos usados en la figura 3.11. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.11			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227Pa^{-1}s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.42
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.13: Datos usados en la figura 3.12. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.12			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227Pa^{-1}s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$	$D_t$	1.42
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$		
$\sigma_y$	$74.5Pa$		

Tabla A.14: Datos usados en la figura 3.13. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.13			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227Pa^{-1}s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$		
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5Pa$		

Tabla A.15: Datos usados en la figura 3.14. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.14			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227Pa^{-1}s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.15
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.16: Datos usados en la figura 3.15. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.15			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277Pa^{-1}s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4}m$
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$D_f$	1.79
$\sigma_y$	$74.5Pa$	$D_t$	1.42

Tabla A.17: Datos usados en la figura 3.16. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.16			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278Pa^{-1}s^{-1}$	$\phi$	0.423
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4}m$
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5}m$
$\sigma_y$	$74.5Pa$	$D_f$	1.79

Tabla A.18: Datos usados en la figura 3.17. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.17			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.277Pa^{-1}s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1}s^{-1}$	$D_t$	1.42
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$		
$\sigma_y$	$74.5Pa$		

Tabla A.19: Datos usados en la figura 3.18. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.18			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.278Pa^{-1}s^{-1}$	$\phi$	0.423
$k_0\lambda$	$6 \times 10^{-10}s - Pa^{-1}$	$r_{max}$	$4.9 \times 10^{-4}m$
		$r_{min}$	$2.2 \times 10^{-5}m$
		$D_f$	1.79
		$D_t$	1.42

Tabla A.20: Datos usados en la figura 3.19. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.19			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.00
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.21: Datos usados en la figura 3.20. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.20			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.15
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

Tabla A.22: Datos usados en la figura 3.21. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.21			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_t$	1.42
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$		
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.23: Datos usados en la figura 3.22. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.22			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$\varphi_\infty$	$3 \times 10^5 Pa^{-1} s^{-1}$		
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$
$\sigma_y$	$74.5 Pa$		

Tabla A.24: Datos usados en la figura 3.23. Los parámetros del medio poroso fueron tomados de [19]

Datos de la figura 3.23			
Modelo	BMP	Medio	Poroso
$\varphi_0$	$0.227 Pa^{-1} s^{-1}$	$D_f$	1.79
$k_0 \lambda$	$6 \times 10^{-10} s - Pa^{-1}$	$D_t$	1.42
		$\frac{\Delta p}{L_0}$	$1 \times 10^4 \frac{Pa}{m}$

# Apéndice B

## Modelo de Capilares

Como se mencionó en el capítulo 1 es posible obtener una expresión sencilla que permita calcular la permeabilidad si se considera al medio poroso como un arreglo de capilares rectos del mismo radio y que el fluido es newtoniano (ecuación 1.4).

Primero hay que considerar el caso de una celda con un solo capilar como se muestra en la figura B.1a.

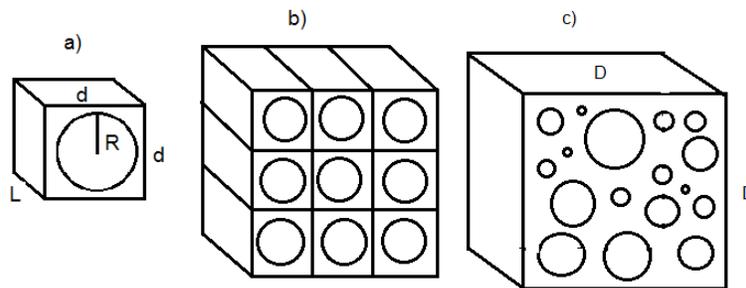


Figura B.1: Modelo de capilares cilíndricos para un medio poroso, a)Celda unitaria con un solo capilar, b)Celdas formada por un conjunto de capilares del mismo radio y c)Celda formada por un conjunto de capilares de radios diferentes

En este caso el flujo a través del capilar cilíndrico de radio  $R$  se puede calcular con la ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$q = \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu}, \quad (\text{B.1})$$

al dividir el flujo entre el área transversal de la celda ( $d^2$ ) se obtiene la velocidad promedio, ésta es igualada a la ecuación de Darcy (1.1) para obtener la relación para la permeabilidad de este sistema:

$$\frac{\Delta p k}{L \mu} = \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu d^2}$$

$$k = \frac{\pi R^4}{8d^2}. \quad (\text{B.2})$$

Ahora se define la porosidad como el volumen del capilar ( $V_c$ ) entre el volumen total de la celda ( $V_T$ ):

$$\phi = \frac{V_c}{V_T} = \frac{\pi R^2 L}{d^2 L} = \frac{\pi R^2}{d^2}, \quad (\text{B.3})$$

sustituyendo este resultado en la ecuación B.2 se recupera la ecuación 1.2:

$$k = \frac{\phi}{8} R^2. \quad (\text{B.4})$$

El procedimiento es análogo para calcular la permeabilidad de una celda formada

por un conjunto de capilares del mismo radio (figura B.1b). Primero se calcula el flujo a través de la celda ( $Q$ ) sumando la contribución de cada capilar; si se tienen  $n$  capilares el flujo se puede obtener a partir de la ecuación B.1 de la siguiente manera:

$$Q = nq = n \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu}, \quad (\text{B.5})$$

para obtener la velocidad promedio se divide el flujo total entre el área transversal total de la celda ( $nd^2$ ); finalmente, se compara este resultado con la ecuación de Darcy para obtener la permeabilidad de la celda (la porosidad se define de manera análoga al caso de un capilar obteniendo el mismo resultado).

$$\frac{\Delta p k}{L \mu} = \frac{\Delta p n\pi R^4}{L nd^2 8\mu} = \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8\mu d^2}$$

$$k = \frac{\pi R^4}{8d^2} = \frac{\phi}{8} R^2, \quad (\text{B.6})$$

esta relación para la permeabilidad es igual a la que se obtuvo para un solo capilar (B.2). Así, si se considera que el medio poroso está formado por capilares rectos de un mismo diámetro la permeabilidad es independiente del número de capilares.

Finalmente, para calcular la permeabilidad de una celda formada por varios capilares de radios diferentes (B.1c) se debe calcular el flujo a través de la celda ( $Q$ ) sumando el flujo de cada capilar ( $q_i$ ) en toda la distribución de radios ( $dN_i$ ):

$$Q = \int_{R_{min}}^{R_{max}} q_i dN_i = \frac{\Delta p \pi}{L 8\mu} \int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^4 dN_i, \quad (\text{B.7})$$

la velocidad promedio se obtiene dividiendo el flujo total entre el área transversal de la celda ( $D^2$ ) y, al comparar con la ecuación de Darcy, se obtiene la siguiente expresión para la permeabilidad:

$$k = \frac{\pi}{8D^2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^4 dN_i; \quad (\text{B.8})$$

la porosidad se define como el volumen de los capilares entre en volumen de la celda, en este caso:

$$\phi = \frac{V_c}{V_T} = \frac{\int_{R_{min}}^{R_{max}} \pi L R_i^2 dN_i}{D^2 L} = \frac{\pi}{D^2} \int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^2 dN_i, \quad (\text{B.9})$$

sustituyendo este resultado en la ecuación B.8 se obtiene:

$$k = \frac{\phi}{8} \frac{\int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^4 dN_i}{\int_{R_{min}}^{R_{max}} R_i^2 dN_i}. \quad (\text{B.10})$$

Estas relaciones son equivalentes a las ecuaciones presentadas por Denys ([1]) para la permeabilidad usando modelos capilares.

# Bibliografía

- [1] K. F. J. Denys, “Flow of polymer solutions through porous media”, Tesis doctoral, Delft University Press, Países Bajos, 2003.
- [2] P. M. Adler, “Porous media: Geometry and transports”, Butterworth-Heinemann, Estados Unidos de América, 1992.
- [3] T. Sochi, “Flow of non-Newtonian fluids in porous media”, *J. of Polymer Science*, 48 (2010) 2437-2466.
- [4] T. Sochi, “Modeling the flow of Bautista-Manero fluid in porous media”, *Int. J. Of Heat and Fluid Flow*, 30 (2009) 1202-1217.
- [5] T. Sochi, “Pore-scale modeling of non-Newtonian fluids in porous media”, Tesis doctoral, Imperial College, Inglaterra, 2007.
- [6] L. Orgéas, C. Geindreau, J. -L. Auriault, J. -F. Bloch, “Upscaling the flow of generalised Newtonian fluids through anisotropic porous media”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 145 (2007) 15-29.

- [7] F. Mainardi, “Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity”, Imperial College Press, Inglaterra, 2010.
- [8] V. E. Tarasov, “Fractional dynamics”, Springer, Alemania, 2010.
- [9] B. J. West, M. Bologna, P. Grigolini, “Physics of fractal operators”, Springer, Estados Unidos de América, 2003.
- [10] R. Hilfer, “Applications of fractional calculus in physics”, World Scientific, Inglaterra, 2000.
- [11] K. B. Oldham, J. Spanier, “The fractional calculus”, Academic Press, Estados Unidos de América, 1974.
- [12] I. Podlubny, “Fractional differential equations”, Academic Press, Estados Unidos de América, 1999.
- [13] M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen “Fractal geometry, complex dimension and zeta functions”, Springer, Estados Unidos de América, 2006.
- [14] J. S. Wu, B. M. Yu, “A fractal resistance model for flow through porous media”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50 (2007) 3925-3932.
- [15] B. M. Yu, “Fractal character for tortuous streamtubes in porous media”, *Chin. Phys. Lett.*, 22 (2005) 158-160.
- [16] B. M. Yu, P. Cheng, “A fractal model for permeability of bi-dispersed porous media”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45 (2002) 2983-2993.

- [17] B. Zhang, B. Yu, H. Wang, M. Yun, "A fractal analysis of permeability for power-law fluids in porous media", *Fractals*, 14 (2006) 171-177.
- [18] M. Yun, B. Yu, J. Cai, "A fractal model for the starting pressure gradient for Bingham fluids in porous media", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 51 (2008) 1402-1408.
- [19] Y. Li, B. Yu, J. Chen, C. Wang, "Analysis of Permeability for Ellis Fluid Flow in Fractal Porous Media", *Chem. Eng. Comm.*, 195 (2008) 1240-1256.
- [20] A. J. Katz, A. H. Thompson, "Fractal sandstones pores: implications for conductivity and pore formation". *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 1325-1328.
- [21] G. Astarita, G. Marrucci, "Principles of non-newtonian fluid mechanics", McGraw-Hill, Inglaterra, 1974.
- [22] R. G. Larson, "Constitutive equations for polymer melts and solutions", Butterworth, Estados Unidos de América, 1988.
- [23] C. W. Macosko, "Rheology: Principles, measurements and applications", Wiley-VCH, Estados Unidos de América, 1994.
- [24] F. Bautista, J.M. Santos, J.E. Puig, O. Manero, "Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model", *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 80 (1999) 93-113.
- [25] A. G. Fredrickson, "A model for thixotropy of suspensions", *AIChE Journal*, 16 (1970) 436-441.

- [26] H. C. Park, “The flow of non-Newtonian fluids through porous media”, Tesis doctoral, Michigan State University, Estados Unidos de América, 1972.
- [27] A. F. Morais, H. Seybold, H. J. Herrmann, J. S. Andrade, “Non-Newtonian fluid flow through three-dimensional disordered porous Media” *Phys. Rev. Lett.*, 103 (2009) 194502.
- [28] J. C. Labrid, “Thermodynamic and kinetic aspects of argillaceous sandstone acidizing”, *SPE Journal*, Paper SPE 5165 (1975) 117-128.
- [29] J. M. Dealy, “Official nomenclature for material functions describing the response of a viscoelastic fluid to various shearing and extensional deformations” *J. Rheol.*, 39 (1995) 253-265.