



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Método de ondas planas para placas delgadas: la
ecuación de Mindlin

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

Ismael Oviedo de Julián



DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Elsa Báez Juárez

2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

II

1. Datos del alumno

Oviedo
de Julián
Ismael
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Física
090123887

2. Datos del tutor

Dra.
Elsa
Báez
Juárez

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Guillermo
Monsivais
Galindo

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Rafael Alberto
Méndez
Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Ángel
Prieto
Ruiz

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Adrián
Vázquez
Márquez

7. Datos del trabajo escrito

Método de ondas planas para placas delgadas:
la ecuación de Mindlin
60 p.
2012



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

DR. ISIDRO ÁVILA MARTÍNEZ
Director General
Dirección General de Administración Escolar
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Método de ondas planas para placas delgadas: la ecuación de Mindlin

realizado por **Oviedo de Julián Ismael** con número de cuenta **0-9012388-7** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Física**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Guillermo Monsivais Galindo

Propietario Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez

Propietario Dra. Elsa Báez Juárez
Tutora

Suplente Dr. Ángel Prieto Ruiz

Suplente Dr. Adrián Vázquez Márquez

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D. F., a 18 de mayo de 2012
EL JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.
MAG/mdm

Dedicado a:
Mi Madre Lazara de Julián.
(q.e.p.d.)

Apolíneo ensueño, encrespado por el color de la sangre. Que en cada mínimo movimiento, da cuenta del rizo, herida insomne que se levanta.

Agradecimientos

Quiero agradecer primero que nada a mi mamá (q.e.p.d.) Lazara de Julián por darme la vida, y luego el ejemplo de sensibilidad, fortaleza y siempre levantarse y seguir adelante ante la adversidad. Me haces mucha falta. A mis hermanos Adolfo, Fabiola, Sofía, Armando y Nieves Susana por el solo hecho de serlo y por apoyarme todos, en diferentes momentos de mis estudios. En particular quiero agradecerle Susana porque en los momentos difíciles que nos ha tocado vivir, has estado brazo con brazo y hemos salido avante. A mi sobrinita Maria Fernanda por iluminar mi sendero.

Agradezco profundamente a la Universidad Nacional Autónoma de México mi alma mater. Porque me ha permitido conocer a gente excelente y de la cual he tomado aprendizaje invaluable a lo largo de mi formación dentro y fuera de sus muros.

A mi directora de tesis la Dra. Elsa Báez Juárez, por la paciencia y cuidadosa revisión de mi trabajo. A el Dr. Rafael Méndez Sánchez por su paciencia, virtud de maestro y por las discusiones y convivencias, que dieron cauce no solamente a mi tesis. Y por los tantos apoyos, gracias Rafael. A los Doctores. Guillermo Monsivais Galindo, Ángel Prieto Ruíz y Adrián Vázquez Márquez, por sus valiosas correcciones, que mejoraron y enriquecieron este trabajo. Nuevamente al Dr. Ángel Prieto Ruíz, por otorgarme su confianza y con eso una invaluable ayuda en momentos difíciles, he aprendido muchísimo con usted profesor. A la Dra. Gabriela Báez Juárez por su invaluable ayuda al abrirme las puertas de la UAM, en donde en todos los niveles he encontrado apoyo para la conclusión de este trabajo. Y por las tan importantes orientaciones. Al M en C. Carlos Vargas por echarle un ojo a mi tesis, dando observaciones para mejorar y por las conversaciones que han ayudado a ampliar mi perspectiva y direccionado. Al Dr. Enrique Camarillo García excelente maestro y persona que me ayudó grandemente cuando realicé mi servicio social con él. Al Dr. Gerardo Ruíz Chavarría por su importante ayuda

durante el período que estuve en su laboratorio.

A Francisco Martínez Farias por su generosa ayuda con el latex en las correcciones de este trabajo, a Fernando Tavira porque siempre con gran animo me ayudó también con el latex . A Jorge Hernández Tahuilán (q.e.p.d.) porque siempre me impulso para terminar este trabajo.

A mis compañeros de andanzas, en las cuales he obtenido invaluable enseñanzas: Moi Dominguez, Paco Martínez, Javieron Lara de Paz, Jurgen Tahuilán (solo te nos adelantaste amigo), José Lucio Corona, Angelo, Manolón, Pepe Abarca, Luisito, Héctor García, Rolas, Melendez, Mariana, Vero, Consuelo, Ale, Oliver, Adrián, Luis, Oscar, Geras Cleofas, Noguchi. A todos muchas gracias.

Finalmente agradezco a ECOES UNIVERSIA, Proyecto PAPIIT IN111311, y CONACYT Proyecto 79613 por los apoyos económicos para la realización de este trabajo.

Resumen

Siguiendo un trabajo previo, en esta tesis se aplicará una técnica numérica, conocida como el método de expansión de ondas planas, a la ecuación de Mindlin para obtener los modos normales de placas delgadas. Para aplicar este método de expansión es necesario que el sistema sea periódico, por lo cual consideraremos que la placa se repite en forma periódica en el plano. Asimismo, construimos un sistema compuesto, en el cual la placa está rodeada de un segundo material, y periódico. Posteriormente, se realiza la expansión en serie de Fourier correspondiente a los coeficientes de la ecuación de Mindlin, que también son periódicos, lo que transforma a esta en una ecuación de autovalores, cuyas soluciones corresponden a los modos normales del sistema en cuestión.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos teóricos y antecedentes	5
2.1. Introducción	5
2.2. Ecuación de movimiento de la teoría clásica de placas	5
2.3. Ondas planas para la teoría clásica de placas	11
2.4. Ecuación de Mindlin	13
2.4.1. Cinemática y relación tensión-deformación de la placa .	18
2.4.2. Ecuaciones de Mindlin para una placa delgada	20
3. Expansión en ondas planas para la ecuación de Mindlin	23
3.1. Representación matricial de la ecuación de valores propios . .	29
3.2. Modelo de Kirchhoff-Love a partir de la ecuación de Mindlin .	30
3.3. Resultados para una placa rayada en una dimensión	32
4. Conclusiones	35
A. Apéndices	37
A.1. Coeficientes de Fourier para un sistema bidimensional	37
A.2. Ondas planas para la placa rayada en una dimensión	41
A.3. Coeficientes de Fourier para una placa rayada en una dimensión	44

Capítulo 1

Introducción

Cuando se estudia la vibración en sistemas que tienen un número finito de grados de libertad, se indica que el movimiento más general alrededor de una posición de equilibrio, está compuesto por un número finito de modos de vibración llamados modos normales. En general el número de dichos modos es igual al número de grados de libertad del sistema. Por ejemplo, en el caso de dos osciladores acoplados, se obtienen dos modos de vibración. Cuando el sistema es un medio continuo, el número de grados de libertad es infinito y como consecuencia el número de modos normales también [1].

El estudio de los modos normales de las placas delgadas es de interés tanto en la física como en la ingeniería [2, 3]. La razón de esto es que las placas delgadas se usan en diversas aplicaciones como los paneles solares entre muchas otras. Sin embargo las placas delgadas en sus múltiples aplicaciones no son lisas sino tienen estructura. Un ejemplo de esto son las mesas ópticas en las que un patrón repetitivo aparece a lo largo y ancho de la placa. Es por ello que el problema de las vibraciones de placas delgadas con estructura es de gran interés, sin embargo, la solución analítica de este tipo de problemas es prácticamente imposible debido a la dificultad intrínseca de las ecuaciones de Navier de la elasticidad [4, 5]. Por esta razón los métodos numéricos son necesarios para aproximar la solución a este tipo de problemas. Las ecuaciones de Navier, por su parte, pueden llevarse a varios límites. Por ejemplo, en una dimensión se pueden obtener ecuaciones de onda para las oscilaciones torsionales, flexionales y compresionales en varillas [2, 6]. En dos dimensiones las ecuaciones obtenidas no son tan simples como la ecuación de onda. Por ejemplo, para vibraciones fuera del plano, se obtiene la ecuación de Kirchhoff-Love, también conocida como la teoría clásica de placas delgadas,

que tiene un operador biarmónico (Laplaciano al cuadrado) y una segunda derivada temporal [2, 4]. Esta ecuación no es separable para una simple placa rectangular ya que el operador biarmónico no es separable. La ecuación de Kirchhoff-Love, sin embargo, no es físicamente aceptable en altas frecuencias debido a que predice una velocidad no acotada de las ondas [2]. Una teoría más refinada, desarrollada por Mindlin, corrige ese problema [7]. Sin embargo la ecuación de Mindlin presenta un grado de dificultad mayor porque introduce una nueva variable física aparte del desplazamiento fuera del plano. Esta ecuación tampoco es separable para una placa rectangular. Siguiendo un trabajo previo [8], en esta tesis se aplicará una técnica numérica, conocida como el método de expansión de ondas planas [9, 8], a la ecuación de Mindlin para obtener los modos normales de placas delgadas. Para aplicar la expansión en ondas planas es necesario que el sistema sea periódico. Por esto se hará una repetición periódica de la placa en el plano, es decir se construirá un sistema compuesto en el cuál la placa esté rodeada de un segundo material y este patrón se repite, siendo entonces el sistema periódico. Se hará luego una expansión en serie de Fourier de los coeficientes de la ecuación de Mindlin que también son periódicos. Esta ecuación se convierte así en una ecuación de autovalores, cuyas soluciones corresponden a los modos normales del sistema en cuestión. Lo anterior, describe la forma en que aplicaremos el método de expansión de ondas planas a la ecuación de Mindlin. En particular, nos concentraremos en placas rayadas, es decir un sistema que consiste en un conjunto periódico de placas alargadas paralelas, de tal manera que la periodicidad, es únicamente en la dirección perpendicular al lado mayor de las placas.

La estructura de este trabajo es la siguiente: En el capítulo uno se da el contexto del estudio de las placas delgadas, y se describe en forma general el trabajo realizado en la presente tesis que es la aplicación del método de expansión de ondas planas a la ecuación de Mindlin. En el capítulo dos se presenta el desarrollo del modelo de Kirchhoff-Love (teoría de las placas delgadas) y se describe en forma detallada el método de expansión de ondas planas para este caso. El capítulo tres está dedicado a desarrollar el método de expansión de ondas planas en el modelo de Mindlin, a partir del cual obtenemos la ecuación polinomial de eigenvalores, y que con un cambio de variable convertimos en un problema generalizado de eigenvalores. Finalmente también en este capítulo se desarrolla el método en placas delgadas en una dimensión (placa rayada). Finalmente en el capítulo cuatro se presentan las conclusiones. Además se anexan tres apéndices, en el primero de los cuales

se muestran los cálculos de la expansión de la serie de Fourier para el caso general, el segundo describe en detalle el método de ondas planas para la placa rayada, y en el tercero se calculan los coeficientes de Fourier para la placa rayada en una dimensión.

Capítulo 2

Conceptos teóricos y antecedentes

2.1. Introducción

Para iniciar el estudio de vibraciones de placas delgadas, diremos que la placa es el análogo bidimensional de una viga [2] en la cual una dimensión, que es llamada el grosor, es mucho menor que las otras dos dimensiones. Se asume que la placa, en contraste con la membrana, tiene una rigidez flexional finita mayor que cero. De esta manera consideraremos el movimiento de un sistema elástico bidimensional, en donde momentos de flexión y fuerzas transversales de corte están presentes, como en la viga. La cinemática básica de la teoría clásica de placas delgadas es la misma que en el caso de las vigas. Teniendo en cuenta esto, deduciremos la ecuación de movimiento para la placa delgada en el caso de ondas flexionales. Un estudio más completo se encuentra en las Refs. [2, 8]. Después desarrollaremos los cálculos de la Ref. [8], donde se aplica el método de expansión de ondas planas a la teoría clásica de placas. Finalmente, mostraremos la obtención de la ecuación de Mindlin [2].

2.2. Ecuación de movimiento de la teoría clásica de placas

En el contexto de la teoría de placas, el grosor h de una placa es más pequeño que las otras dos dimensiones. Suponemos también que, las vibraciones

de la placa son suficientemente pequeñas, para ser descritas por ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales. Además, confinaremos el estudio a placas perfectamente elásticas homogéneas e isotrópicas. Para desarrollar la ecuación correspondiente, consideraremos una placa de altura h y extensión infinita, y con la superficie en el plano xy como se muestra en la Fig. 2.1. También tomaremos un elemento diferencial $hdx dy$ de la placa, donde fuerzas de corte, momento de flexión y de torsión y cargas externas actúan. Los momentos de flexión por unidad de longitud M_x , M_y , resultan de las distribuciones de las tensiones normales σ_x , σ_y , mientras que los momentos de torsión por unidad de longitud M_{xy} , M_{yx} , provienen de las tensiones de corte τ_{xy} , τ_{yx} . Las fuerzas de corte por unidad de longitud Q_x , Q_y , son derivadas de las tensiones de corte τ_{xz} , τ_{yz} . Tenemos que, despreciando los momentos de la inercia de rotación y contribuciones de los momentos debidos a la carga, podemos escribir las ecuaciones de movimiento, donde el desplazamiento flexional $w(x, y, t)$ mide la deflexión del plano medio de la placa. Estas ecuaciones de movimiento las escribimos a partir del equilibrio del sistema. En primer lugar, del equilibrio de las fuerzas actuando en la dirección de z , obtenemos la primera ecuación. Luego, del equilibrio para los momentos con respecto a los ejes x y y respectivamente, se obtienen la segunda y tercera ecuaciones :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (2.3)$$

Resolviendo las dos últimas ecuaciones para Q_x, Q_y y sustituyendo en la primera ecuación, se tiene que

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right] + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

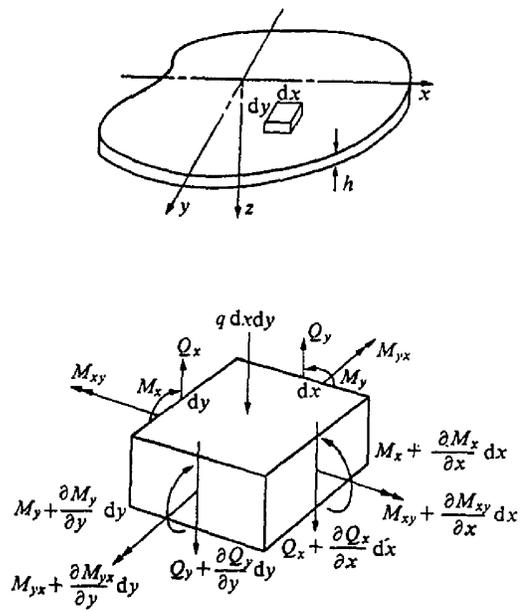


Figura 2.1: (a) Elemento de una placa delgada (b) fuerzas y momentos que actúan sobre este (Adaptada de la Referencia [2])

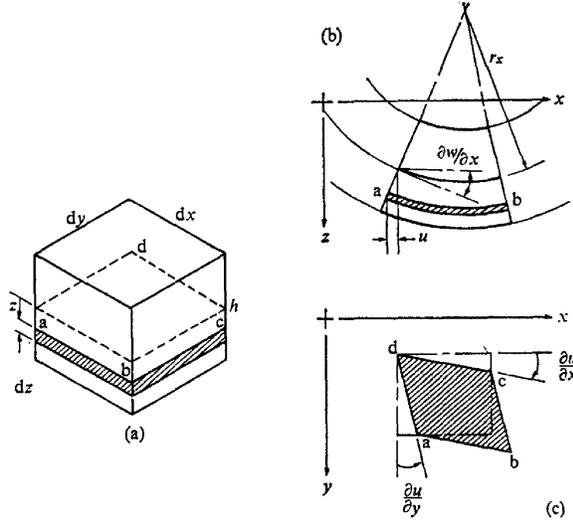


Figura 2.2: (a) Elemento diferencial de la placa (b) elemento de la placa durante la flexión (c) la placa vista desde arriba durante la deformación de corte. (Tomado de la Ref. [2]).

Obtenemos una sola ecuación en términos de los momentos de flexión y de torsión,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Ahora, desarrollaremos las relaciones entre los momentos y la deflexión. Tenemos que, una lámina $(abcd)$ de un elemento diferencial de la placa delgada, como se muestra en la Fig. 2.2(a), está situada a una distancia “ z ” abajo del plano medio de la placa. La deformación se puede ver en la Fig. 2.2(b), cuando el elemento $(abcd)$ está sujeto solamente a flexión. En esta teoría suponemos que secciones planas transversales permanecen planas y perpendiculares al plano medio (hipótesis de Bernoulli). Entonces, las deformaciones normales de los planos xz y yz en la lámina están dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_x}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{z}{r_y}, \quad (2.9)$$

donde r_x y r_y son los radios de curvatura en los planos xz y yz respectivamente. Si pequeñas deflexiones e inclinaciones son supuestas, la curvatura

puede darse como $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ y $-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Así que podemos escribir las ecuaciones de deformación-desplazamiento como

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2.11)$$

En la Fig. 2.2(c) la lámina muestra la cizalladura, donde las rotaciones de los lados de la lámina están dados por $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$, donde u y v son las componentes del desplazamiento en las direcciones x y y . Entonces la deformación de la lámina está dada por

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.12)$$

En la Fig. 2.2(b), podemos ver que la componente del desplazamiento u está dada por $u = -z \frac{\partial w}{\partial x}$ y similarmente $v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$. Así que γ_{xy} se transforma en

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.13)$$

Por otra parte las tensiones están dadas por la ley de Hooke general

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.14)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (2.15)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.16)$$

Estas ecuaciones definen la dependencia de las tensiones normales σ_x, σ_y y las tensiones de corte τ_{xy}, τ_{yx} sobre el desplazamiento w . Aquí E y G son el módulo de Young y de corte, respectivamente, y ν es el coeficiente de Poisson. Podemos deducir las expresiones para los momentos de flexión y torsión, considerando una cara del elemento de la Fig. 2.1(a) definido por hdy . El momento de flexión sobre esta cara debido a σ_x está dado por

$$M_x dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dy dz, \quad (2.17)$$

o bien

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz. \quad (2.18)$$

Sustituyendo la primera ecuación de la ley de Hooke en esta última ecuación y efectuando la integración tenemos

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.19)$$

donde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. De manera similar obtenemos

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.20)$$

Por último se calcula

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz. \quad (2.21)$$

El signo negativo en esta ecuación es para mostrar el momento de torsión resultante, causado por la tensión de corte positiva, de acuerdo con la Fig. 2.2. Entonces, luego de sustituir la tercera ecuación de la ley de Hooke (2.16) en la ecuación (2.21), usando $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, e integrando obtenemos

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2.22)$$

y además tenemos que

$$M_{xy} = -M_{yx}. \quad (2.23)$$

Desarrollando la ecuación de movimiento (2.7) en términos de los momentos, haciendo $q = 0$ (placa sin carga). Usando las ecuaciones (2.19), (2.20), (2.22) y (2.23) tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[-D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\ & - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left[D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

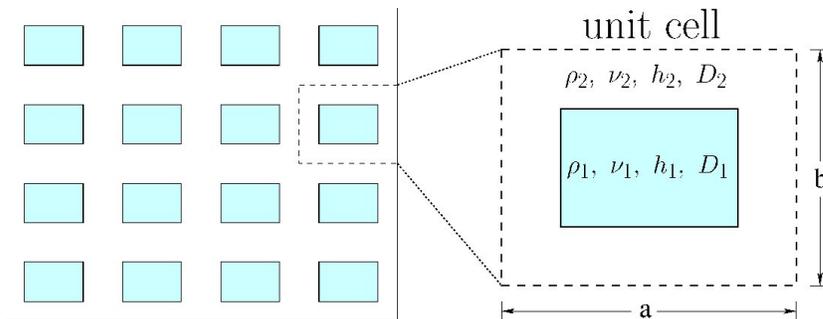


Figura 2.3: Repetición de la celda unitaria (Tomado de la Ref. [8])

o bien

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.25)$$

que es la ecuación para placas delgadas de Kirchhoff-Love. Con esta ecuación se describirá el método de expansión de ondas planas, en el siguiente apartado.

2.3. Ondas planas para la teoría clásica de placas

Con objeto de explicar y comprender el método de ondas planas, lo aplicaremos a la ecuación de Kirchhoff-Love, la cual es una generalización bidimensional a la ecuación de Bernoulli-Euler (unidimensional) que describe las vibraciones en vigas.

El método de ondas planas presenta la ventaja de que puede ser utilizado en sistemas bidimensionales localmente periódicos. En este método una celda unitaria rectangular de dimensiones $a \times b$ es repetida periódicamente en el plano.

Las soluciones para tal placa rectangular con extremos libres se obtiene, como se mencionó eligiendo una celda unitaria, compuesta por la placa de interés en el centro y rodeada por un material que simula el vacío. Como toda función periódica se puede expresar en términos de una expansión de

Fourier, usamos las siguientes expansiones para los parámetros D , $D\nu$ y ρh de la ecuación (2.25)

$$D = \sum_G \alpha(G) \exp(iG \cdot \vec{r}) \quad (2.26)$$

$$D\nu = \sum_G \beta(G) \exp(iG \cdot \vec{r}) \quad (2.27)$$

$$\rho h = \sum_G n(G) \exp(iG \cdot \vec{r}) \quad (2.28)$$

donde $\vec{r} = (x, y)$ y $G = (G_X, G_Y) = \left(\frac{2\pi}{a}p, \frac{2\pi}{b}q\right)$ es un vector recíproco donde p y q son enteros [12]. Estos vectores pertenecen a la red recíproca, se sabe de la física del estado sólido, en donde el análisis de Fourier esta a la orden del día que, toda estructura cristalina tiene dos redes asociadas, la red cristalina y la red recíproca. La red recíproca es una red en el espacio de Fourier asociado al cristal. Los vectores de onda se dibujan siempre en el espacio de Fourier, de modo que cada posición en este espacio, puede tener un significado como prescripción de una onda. Aquí $\alpha(G)$, $\beta(G)$ y $n(G)$ de las expresiones anteriores, son los coeficientes de las correspondientes expansiones de Fourier. Además se propone para el desplazamiento flexional w una expresión de la forma (2.29). Esta ecuación esta basada en el teorema de Bloch, el cual indica que, las eigenfunciones de la ecuación de onda para un potencial periódico, son el producto de una onda plana por una función que posea la perioricidad de la red cristalina. Esta ecuación puede descomponerse en una suma de ondas viajeras [12]:

$$w(\vec{r}, t) = \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_G w_G \exp(iG \cdot \vec{r}), \quad (2.29)$$

donde \vec{k} es el vector de onda y ω es la frecuencia angular. Insertando las expansiones que se muestran en las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.28) en la ecuación (2.25) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{G'} \left\{ \alpha_{G-G'} [(k_x + G'_x)(k_x + G_x) + (k_y + G'_y)(k_y + G_y)]^2 \right. \\ & \left. + \beta_{G-G'} [(k_x + G_x)(k_y + G'_y) - (k_x + G'_x)(k_y + G_y)] \right\} w_{G'} \\ & = \omega^2 \sum_{G'} n_{G-G'} w_{G'}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Esta ecuación la podemos escribir como una ecuación generalizada de valores propios

$$\mathbb{M}\mathbf{w} = \omega^2 \mathbb{N}\mathbf{w}, \quad (2.31)$$

donde \mathbf{w} es un vector con entradas $w_{G'}$ y \mathbb{M} , \mathbb{N} son matrices infinitas con entradas

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{G,G'} &= \alpha_{G-G'} \left[\left(\vec{k} + \vec{G} \right) \cdot \left(\vec{k} + \vec{G}' \right) \right]^2 \\ &+ \beta_{G-G'} \left[(k_x + G_x) (k_y + G'_y) - (k_x + G'_x) (k_y + G_y) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

y

$$\mathbb{N}_{G,G'} = n_{G-G'}, \quad (2.33)$$

respectivamente.

Resumiendo, las soluciones para la placa rectangular con extremos libres pueden ser obtenidas, como mencionamos antes, definiendo una celda unitaria en el centro, rodeada por un material que simula el vacío. Este material tiene definido un D_2 (de acuerdo a la Fig. 2.3 fijo y una densidad $\rho_2 \rightarrow 0$). Resolviendo la ecuación (2.31) de eigenvalores se obtienen las frecuencias naturales de vibración de la placa delgada con este modelo.

2.4. Ecuación de Mindlin

La ecuación de Mindlin es también una generalización de la teoría clásica de las placas delgadas, pero con la diferencia de que este modelo, si incorpora los efectos debidos a las fuerzas de corte y a la rotación, presentes en la placa delgada. A continuación desarrollaremos la ecuación de Mindlin. La característica esencial de este desarrollo es la integración de las ecuaciones exactas de la elasticidad a lo largo del grosor h de la placa, otras características son la restricción de la deformación a un número finito de grados de libertad y la introducción de coeficientes ajustados. Estas últimas son generalizaciones del método usado en el desarrollo de la teoría de vigas de Timoshenko. Seguiremos ahora el desarrollo de Graff [2] haciendo explícitos los cálculos. Consideremos un elemento diferencial de la placa delgada de grosor h , como se muestra en la Fig. 2.4 y sujeta a momentos de flexión y de torsión así como a fuerzas de corte. Las tensiones en la placa M_x, M_y, M_{xy}, Q_x y Q_y se

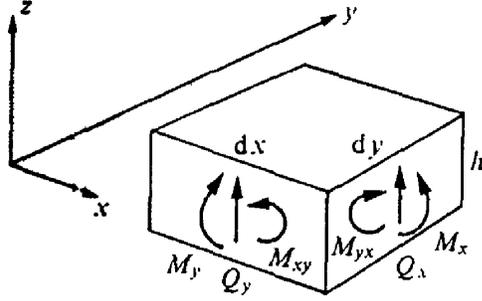


Figura 2.4: elemento de la placa sujeto a fuerzas y momentos. (Tomado de la Ref. [2])

definen de la siguiente manera

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}) z dz, \quad (2.34)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \quad (2.35)$$

Las cuales se describen igual que en la teoría clásica de placas. Las ecuaciones de tensión-deformación de la elasticidad, dadas por la ley de Hooke son

$$\tau_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.36)$$

donde Δ , es la traza del tensor ε_{ij} :

$$\Delta = \varepsilon_{kk} \quad (2.37)$$

mientras que λ y μ son propiedades del cuerpo elástico con el que se trabaja y que se conocen como coeficientes de Lamé.

Para un sistema isótropo los coeficientes de Lamé están relacionados con el módulo de Young E y la razón de Poisson ν de la siguiente manera:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad (2.38)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.39)$$

El procedimiento usual en elasticidad es usar las seis ecuaciones de tensión-deformación en conjunto con las relaciones de desplazamiento-deformación para reducir las tres ecuaciones de movimiento (en las seis componentes de la tensión) a ecuaciones en términos de las componentes del desplazamiento. En este desarrollo tendremos solamente cinco componentes de la tensión en la placa y estas serán definidas en términos de cinco componentes de la deformación de la placa. Los desplazamientos de la placa los daremos más adelante. Comenzaremos escribiendo la ecuación de la tensión-deformación para τ_{zz} de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + (\lambda + 2\mu)^{-1} \tau_{zz}. \quad (2.40)$$

Eliminando ε_{zz} de las ecuaciones de tensión-deformación (2.36) para ε_{xx} , ε_{yy} , dando como resultado las siguientes cinco ecuaciones

$$\tau_{xx} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{xx} + \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{yy} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \tau_{zz}, \quad (2.41)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{xx} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{yy} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \tau_{zz}, \quad (2.42)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad (2.43)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}, \quad (2.44)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx}. \quad (2.45)$$

Usando las relaciones entre las constantes elásticas (coeficientes de Lamé), dadas en las ecuaciones (2.38) y (2.39), podemos escribir las ecuaciones (2.41) - (2.45) anteriores como

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) + \frac{\nu}{1 - \nu} \tau_{zz}, \quad (2.46)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) + \frac{\nu}{1 - \nu} \tau_{zz}, \quad (2.47)$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}, \quad (2.48)$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz}, \quad (2.49)$$

$$\tau_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx}. \quad (2.50)$$

Las ecuaciones de la placa para la tensión-deformación se obtienen integrando las ecuaciones a lo largo del grosor. De esta manera tenemos que, usando las ecuaciones. (2.46) a (2.50),

$$M_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) z dz + \frac{\nu}{1 - \nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zz} z dz. \quad (2.51)$$

Definimos ahora las componentes de la deformación de la placa delgada como

$$(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{xy}) = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}) z dz, \quad (2.52)$$

$$(\Gamma_{xz}, \Gamma_{yz}) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}) dz. \quad (2.53)$$

Ahora, como la tensión normal τ_{zz} no tiene efecto en el momento de flexión M_x ya que este es derivado de la tensión τ_{xx} . También, como se describirá en el apartado siguiente, se asume que el desplazamiento w es independiente de z . Por ello se considera despreciable su contribución, tenemos entonces que.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) z dz \\ &= D (\Gamma_x + \nu\Gamma_y), \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde D es la rigidez flexional de la placa dada, como antes, por

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2.55)$$

Trabajando de una manera similar M_y y M_{xy} tenemos que

$$M_y = D (\Gamma_y + \nu\Gamma_x) \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= 2\mu \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{xy} z dz = \frac{E}{1 - \nu} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{xy} z dz, \\ &= D (1 - \nu) \Gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

En la teoría de Mindlin el efecto de corte se introduce como lo hace Timoshenko. Para esto, escribimos

$$Q_x = 2\mu' \int \varepsilon_{xz} dz, \quad (2.58)$$

donde

$$\mu' = \mu\kappa^2, \quad (2.59)$$

es decir,

$$Q_x = \mu'h\Gamma_{xz}. \quad (2.60)$$

La motivación para introducir este módulo de corte modificado μ' , es similar a como se hace en la teoría de vigas.¹ De esta manera, si denotamos a $\bar{\varepsilon}_{xz}$ como la deformación de corte “exacta”, entonces la fuerza de corte exacta \bar{Q}_x es

$$\bar{Q}_x = 2\mu \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varepsilon}_{xz} dz. \quad (2.61)$$

Sin embargo, una consecuencia de despreciar ciertas tensiones y de las suposiciones cinemáticas que se harán, tendremos una deformación ε_{xz} inexacta que esta determinada por una fuerza inexacta, donde $Q_x \neq \bar{Q}_x$.

Ahora introduciremos el coeficiente κ^2 que conduce a un módulo de corte modificado μ' tal que Q_x , y \bar{Q}_x concuerden; κ se conoce como el coeficiente de corte de Timoshenko. Teniendo todo esto en cuenta, las relaciones tensión-deformación son:

$$M_x = D(\Gamma_x + \nu\Gamma_y), \quad (2.62)$$

$$M_y = D(\Gamma_y + \nu\Gamma_x), \quad (2.63)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu)\Gamma_{xy}, \quad (2.64)$$

$$Q_x = \mu'h\Gamma_{xz}, \quad (2.65)$$

$$Q_y = \mu'h\Gamma_{xy}. \quad (2.66)$$

¹Esto es, la fuerza de corte en la sección transversal está dada en términos de la tensión de corte τ o por la deformación de corte γ respectivamente como

$$V = \int_A \tau dA = G \int_A \gamma dA$$

ahora si γ_0 es la deformación de corte en el eje centroidal, entonces $G\gamma_0 A$ dará la fuerza de corte. Sin embargo, esto no será igual al valor que se obtiene al integrar las variables de la tensión distribuida a lo largo de dicha sección. Luego, para llevar este valor a un balance, un coeficiente ajustado κ es introducido tal que

$$V = (G\gamma A) \kappa.$$

El valor de κ depende de la forma de la sección transversal y usualmente se determina a partir del análisis de tensiones, para cada sección transversal. Este parámetro es llamado coeficiente de corte de Timoshenko.

2.4.1. Cinemática y relación tensión-deformación de la placa

Las ecuaciones de la elasticidad, que relacionan la deformación y el desplazamiento, están dadas en general por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.67)$$

donde i, j son las coordenadas espaciales y la coma en los subíndices indica la derivada parcial. Dado este tensor y usando las definiciones de $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_{xy}$ y Γ_{xz}, Γ_{yz} , se integran a lo largo del grosor de la placa las expresiones:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}) z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) z dz, \quad (2.68)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz, \quad (2.69)$$

donde u, v y w , representan el campo de desplazamientos en las coordenadas x, y y z , para los cuales haremos las siguientes suposiciones que generalizan a dos dimensiones la teoría de vigas de Timoshenko:

$$u(x, y, z, t) = z\psi_x(x, y, t), \quad (2.70)$$

$$v(x, y, z, t) = z\psi_y(x, y, t), \quad (2.71)$$

$$w(x, y, z, t) = \bar{w}(x, y, t). \quad (2.72)$$

Nótese que el desplazamiento w es independiente de z , a fin de que los “modos del espesor” (estiramiento y corte) posibles en la teoría exacta, son despreciados en esta aproximación. Cuando las deformaciones de corte sean despreciadas, como en la teoría de vigas de Bernoulli-Euler o teoría clásica de placas, tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\psi_x, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\psi_y, \quad (2.74)$$

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.75)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.76)$$

Insertando las expresiones anteriores en el lado derecho de las integrales de la deformación-desplazamiento obtenemos

$$\Gamma_x = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} z dz = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}. \quad (2.77)$$

Realizando un procedimiento similar para Γ_y y Γ_{xy} , Γ_{xz} y Γ_{yz} obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\Gamma_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad (2.78)$$

$$\Gamma_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad (2.79)$$

$$\Gamma_{xy} = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y}, \quad (2.80)$$

$$\Gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \quad (2.81)$$

$$\Gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}. \quad (2.82)$$

Así podemos escribir las relaciones de tensión-desplazamiento para la placa delgada, en la teoría de Mindlin, como

$$M_x = D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \quad (2.83)$$

$$M_y = D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \quad (2.84)$$

$$M_{xy} = \frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right), \quad (2.85)$$

$$Q_x = \kappa^2 G h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \psi_x \right), \quad (2.86)$$

$$Q_y = \kappa^2 G h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \psi_y \right). \quad (2.87)$$

De estas últimas expresiones observamos que, la teoría clásica de placas (Kirchhoff-Love) se recupera haciendo, $\psi_x = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$ y $\psi_y = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$. Esta situación resulta de despreciar las deformaciones de corte, pero conservando las correspondientes fuerzas de corte en las ecuaciones de equilibrio.

2.4.2. Ecuaciones de Mindlin para una placa delgada

Para escribir la ecuación de Mindlin, consideramos las ecuaciones de movimiento en terminos de la tensión de la teoría de la elasticidad en tres dimensiones:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \ddot{v}, \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{w}. \quad (2.90)$$

Para reducir estas ecuaciones a una sola, procedemos a multiplicar por z e integramos a lo largo del grosor de la placa. Para la primera ecuación tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xx} z dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dz = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{u} z dz. \quad (2.91)$$

Como puede observarse, las dos primeras integrales corresponden a M_x y M_{xy} , respectivamente. La tercera expresión la integramos por partes

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} z dz = [z \tau_{xz}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = -Q_z \quad (2.92)$$

donde tenemos que $z \tau_{xz}$ es cero en $\pm \frac{h}{2}$ por lo que entonces τ_{xz} desaparece en los bordes de la placa. Realizando la integral del lado derecho de la ecuación (2.91) es

$$\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{u} z dz = \rho \ddot{\psi}_x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{\rho h^3 \ddot{\psi}_x}{12}. \quad (2.93)$$

La segunda ecuación se calcula de una manera similar mientras que la tercera ecuación de movimiento se integra directamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zy} dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} dz = \rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{w} dz. \quad (2.94)$$

Las dos primeras integrales de la ecuación (2.94) dan Q_x y Q_y , respectivamente. De la tercera se obtiene que

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} dz = [z\tau]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = -q_1 - (-q_2) = q_2 - q_1 = q. \quad (2.95)$$

El lado derecho de esta ecuación representa una carga externa sobre la placa. Finalmente, las ecuaciones de movimiento en términos de las tensiones están dadas por

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2}. \quad (2.98)$$

Sustituyendo las relaciones de tensión-desplazamiento, ecuaciones. (2.83) a (2.87), de la placa en las ecuaciones previas, obtenemos las ecuaciones de Mindlin:

$$\frac{D}{2} \left\{ (1 - \nu) \nabla^2 \psi_x + (1 + \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} - \kappa^2 \mu h \left(\psi_x + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (2.99)$$

$$\frac{D}{2} \left\{ (1 - \nu) \nabla^2 \psi_y + (1 + \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} - \kappa^2 \mu h \left(\psi_y + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad (2.100)$$

$$\kappa^2 \mu h (\nabla^2 \bar{w} + \Phi) + q = \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2}, \quad (2.101)$$

donde

$$\Phi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}. \quad (2.102)$$

Capítulo 3

Expansión en ondas planas para la ecuación de Mindlin

En este capítulo, que da el resultado principal de esta tesis: aplicaremos el método de expansión de ondas planas para obtener una ecuación polinomial de autovalores, que llevaremos a una ecuación generalizada de autovalores, mediante un cambio de variable. Verificaremos también que en el límite de bajas frecuencias se obtienen los resultados del modelo de Kirchhoff-Love. Como un sistema más simple de medir y de programar, se obtienen resultados para una placa en la cual uno de sus lados se hace tender a infinito.

En el apartado anterior obtuvimos las ecuaciones de movimiento para la placa delgada de la teoría de Mindlin. Estas ecuaciones, (2.99), (2.100) y (2.101), se pueden reducir a una sola ecuación de movimiento para el desplazamiento vertical \bar{w} . La ecuación de movimiento para una placa delgada sin carga es entonces [2]:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\rho}{\mu'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(D \nabla^2 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{w} + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

donde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$, ρ la densidad de la placa, D la rigidez flexional, h el grosor de la placa, \bar{w} el desplazamiento flexional y $\mu' = \kappa^2 \mu$ el coeficiente de corte modificado con κ el coeficiente de corte de Timoshenko que depende de la geometría de la sección transversal. Desarrollando la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \frac{\partial \bar{w}}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right] - \frac{\rho}{\mu'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] - \frac{\rho}{\mu'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right] \\
& + \frac{\rho}{\mu'} \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Aplicamos ahora las expansiones en ondas planas:

$$D(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}''} d(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}), \tag{3.3}$$

$$\rho h(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}''} n(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}), \tag{3.4}$$

$$\frac{\rho h^3}{12}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}''} k(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}), \tag{3.5}$$

$$D \frac{\rho}{\mu'}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}''} l(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}), \tag{3.6}$$

$$\frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}''} j(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}), \tag{3.7}$$

$$\bar{w}(\vec{r}, t) = \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{\vec{G}'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}). \tag{3.8}$$

Los coeficientes de Fourier de las expansiones de los diversos parámetros físicos de las ecuaciones anteriores se dan en el apéndice A.1 para el sistema de la Fig. 2.3. Posteriormente, sustituyendo las expresiones. (3.3) a (3.8) a cada término correspondiente de la ecuación (3.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{\vec{G}''} d(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{\vec{G}'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{\vec{G}''} d(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{\vec{G}'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\sum_{\vec{G}''} d(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{\vec{G}'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\sum_{\vec{G}''} d(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{\vec{G}'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right] \\
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{\vec{G}''} k(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{\vec{G}'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\sum_{G''} k(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right] \\
& - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{G''} l(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right] \\
& - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{G''} l(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right\} \right] \\
& + \sum_{G''} j(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left[\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right] \\
& + \sum_{G''} n(\vec{G}'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i\vec{G}' \cdot \vec{r}) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Desarrollando las primeras derivadas de la ecuación anterior llegamos a

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_x + G'_x)^2 \right] \\
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_y + G'_y)^2 \right] \\
& - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_x + G'_x)^2 \right] \\
& - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_y + G'_y)^2 \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} k(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-\omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} k(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} l(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_x + G'_x)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[- \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} l(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_y + G'_y)^2 \right] \\
& + \omega^4 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} j(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) \\
& - \omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} n(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) = 0. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Desarrollando las últimas derivadas de la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
& \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_x + G'_x)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\
& + \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_y + G'_y)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\
& + \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_x + G'_x)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\
& + \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} d(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_y + G'_y)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\
& - \omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} k(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\
& - \omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} k(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\
& - \omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} l(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_x + G'_x)^2 \\
& - \omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} l(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) (k_y + G'_y)^2 \\
& + \omega^4 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} j(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) \\
& - \omega^2 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} n(\vec{G}'') \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) = 0. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Escribimos entonces la ecuación anterior como

$$\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) \sum_{G'G''} \left[\begin{array}{l} +d(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G}'') (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G}'') (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 \\ +\omega^4 j(\vec{G}'') \\ -\omega^2 n(\vec{G}'') \end{array} \right] \bar{w}_{\vec{G}'} \exp(i(\vec{G}' + \vec{G}'') \cdot \vec{r}) = 0. \quad (3.12)$$

Nótese que la expresión del paréntesis es una suma y no un vector. Eliminando $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$; y multiplicando por $\exp(-i\vec{G}' \cdot \vec{r})$ e integrando sobre la celda unitaria llegamos a

$$\sum_{G'G''} \left[\begin{array}{l} +d(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G}'') (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G}'') (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 \\ +\omega^4 j(\vec{G}'') \\ -\omega^2 n(\vec{G}'') \end{array} \right] \bar{w}_{\vec{G}'} = 0, \quad (3.13)$$

es decir,

$$\sum_{\vec{G}'\vec{G}''} \left[\begin{array}{l} +d(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ +d(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G}'') (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G}'') (k_y + G'_y + G''_y)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G}'') (k_x + G'_x)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G}'') (k_y + G'_y)^2 \\ +\omega^4 j(\vec{G}'') \\ -\omega^2 n(\vec{G}'') \end{array} \right] \delta(\vec{G}'' + \vec{G}' - \vec{G}) = 0, \quad (3.14)$$

donde

$$\delta(\vec{G}'' + \vec{G}' - \vec{G}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{G}'' = \vec{G} - \vec{G}' \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Finalmente obtenemos

$$\sum_{\vec{G}'} \left[\begin{array}{l} +d(\vec{G} - \vec{G}') (k_x + G'_x)^2 (k_x + G_x)^2 \\ +d(\vec{G} - \vec{G}') (k_y + G'_y)^2 (k_x + G_x)^2 \\ +d(\vec{G} - \vec{G}') (k_x + G'_x)^2 (k_y + G_y)^2 \\ +d(\vec{G} - \vec{G}') (k_y + G'_y)^2 (k_y + G_y)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G} - \vec{G}') (k_x + G_x)^2 \\ -\omega^2 k(\vec{G} - \vec{G}') (k_y + G_y)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G} - \vec{G}') (k_x + G'_x)^2 \\ -\omega^2 l(\vec{G} - \vec{G}') (k_y + G'_y)^2 \\ +\omega^4 j(\vec{G} - \vec{G}') \\ -\omega^2 n(\vec{G} - \vec{G}') \end{array} \right] \bar{w}_{\vec{G}'} = 0 \quad (3.16)$$

que, como veremos en la siguiente sección, es una ecuación polinomial de autovalores.

3.1. Representación matricial de la ecuación de valores propios

Para resolver la ecuación polinomial la escribimos como una ecuación matricial de la forma:

$$(\mathbb{M} - \omega^2 \mathbb{A}) \bar{\mathbf{w}} = \omega^2 (\mathbb{N} - \omega^2 \mathbb{B}) \bar{\mathbf{w}}. \quad (3.17)$$

Esta ecuación es una ecuación polinomial de eigenvalores donde los elementos de las matrices \mathbb{M} , \mathbb{A} , \mathbb{N} y \mathbb{B} son:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{G,G'} &= d_{G-G'} [(k_x + G'_x)^2 (k_x + G_x)^2 + (k_y + G'_y)^2 (k_x + G_x)^2 \\ &\quad + (k_x + G'_x)^2 (k_y + G_y)^2 + (k_y + G'_y)^2 (k_y + G_y)^2] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{G,G'} &= k_{G-G'} [(k_x + G_x)^2 + (k_y + G_y)^2] \\ &\quad + l_{G-G'} [(k_x + G'_x)^2 + (k_y + G'_y)^2], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\mathbb{N}_{G,G'} = n_{G-G'}, \quad (3.20)$$

$$\mathbb{B}_{G,G'} = j_{G-G'}. \quad (3.21)$$

Definiendo

$$X = \bar{\mathbf{w}} \quad (3.22)$$

$$\lambda = -\omega^2 \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

podemos reescribir la ecuación matricial (3.17) como:

$$\mathbb{M}X + \lambda (\mathbb{A} + \mathbb{N}) X + \lambda^2 \mathbb{B}X = 0 \quad (3.25)$$

que muestra explícitamente que es una ecuación polinomial de autovalores, la cual puede a su vez, reescribirse como [11]:

$$\mathbb{P}z = \lambda \mathbb{Q}z, \quad (3.26)$$

donde

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{M} \\ -\mathbb{M} & -(\mathbb{A} + \mathbb{N}) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & \mathbb{B} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$z = \begin{bmatrix} X \\ \lambda X \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

En efecto, insertando las ecuaciones anteriores en la Ec. (3.26) obtenemos

$$\begin{bmatrix} \lambda X \\ -\mathbb{M}X - \lambda(\mathbb{A} + \mathbb{B})X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda X \\ \lambda^2 \mathbb{B}X \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Diagonalizando numéricamente la ecuación (3.26) obtenemos los eigenvalores, y los eigenvectores, que permite encontrar las frecuencias propias de vibración $\pm i\sqrt{\lambda} = \omega$ y las amplitudes de vibración de modo normal de la placa delgada para la ecuación de Mindlin. Es importante señalar que, dados los parámetros de la placa se obtiene una matriz diferente en (3.26), una para cada pareja de valores de k_x y k_y . En el apéndice A.1 se dan los coeficientes para un sistema bidimensional.

3.2. Modelo de Kirchhoff-Love a partir de la ecuación de Mindlin

El modelo de Kirchhoff-Love descrito en el capítulo 2, que nos da los modos normales de vibración para placas delgadas a bajas frecuencias, debería estar contenido en el modelo de Mindlin ya que este último es más general. Entonces la ecuación de Mindlin debe poder reducirse al modelo de Kirchhoff-Love en un cierto límite. Para mostrar esto último, se procede como sigue.

Empezaremos por recordar la ecuación de Kirchhoff-Love

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

en el caso en que D y ν son constantes,

$$D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.32)$$

Utilizando las siguientes relaciones, que nos conducen a la relación de dispersión,

$$\nabla^2 \rightarrow -k^2, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2; \quad (3.34)$$

podemos obtener la correspondiente relación de dispersión del modelo de Kirchhoff-Love como

$$(Dk^4 - \rho h \omega^2) \bar{w} = 0, \quad (3.35)$$

es decir,

$$k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}. \quad (3.36)$$

Aplicaremos ahora el mismo procedimiento a la ecuación de Mindlin

$$\left(\nabla^2 - \frac{\rho}{\mu'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(D \nabla^2 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{w} + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.37)$$

Usando la solución de onda plana

$$\bar{w} = \exp(i(k \cdot \vec{r} - \omega t)) \quad (3.38)$$

tenemos que

$$\nabla^2 \bar{w} = - (k_x^2 + k_y^2) \bar{w} \quad (3.39)$$

y

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = -\omega^2 \bar{w}. \quad (3.40)$$

Usando de nuevo las correspondencias (3.33) y (3.34), en estas dos últimas expresiones podemos obtener la relación de dispersión para la ecuación de Mindlin

$$\left(-k^2 + \frac{\rho}{\mu'} \omega^2 \right) \left(-Dk^2 + \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \right) \bar{w} - \rho h \omega^2 \bar{w} = 0, \quad (3.41)$$

con

$$k^2 = (k_x^2 + k_y^2). \quad (3.42)$$

De aquí podemos ver que los segundos términos de cada paréntesis tienen que ver con la deformación de corte y la rotación, respectivamente. Cuando

$$\frac{\rho}{\mu'} \omega^2 \ll k^2, \quad (3.43)$$

y

$$\frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \ll Dk^2, \quad (3.44)$$

de esta manera la relación de dispersión de la ecuación de Mindlin se reduce

$$(Dk^4 - \rho h \omega^2) \bar{w} = 0, \quad (3.45)$$

que corresponde al modelo de Kirchhoff-Love.

Recordando que al aplicar el método de expansión de ondas planas, al modelo de Kirchhoff-Love se obtuvo

$$\mathbb{M}X + \lambda \mathbb{N}X = 0. \quad (3.46)$$

mientras que, el mismo método aplicado a la ecuación de Mindlin dio por resultado

$$\mathbb{M}X + \lambda \mathbb{N}X + \lambda [\mathbb{A}X + \lambda \mathbb{B}X] = 0. \quad (3.47)$$

De esta ecuación observamos que los dos primeros términos corresponden a la aportación del modelo de Kirchhoff-Love. El último sumando, que involucra las matrices \mathbb{A} y \mathbb{B} , corresponden a términos que aparecen en el modelo de Mindlin y que, como ya se mencionó, son las aportaciones de la deformación debido a los efectos de corte y de la rotación. Como conclusión, cuando \mathbb{A} y \mathbb{B} tienden a cero (bajas frecuencias) se obtiene la correspondiente ecuación matricial, asociada a la ecuación de Kirchhoff-Love a partir de la ecuación de Mindlin.

3.3. Resultados para una placa rayada en una dimensión

La placa rayada es un sistema que resulta de extender una de las dimensiones de la placa delgada, es decir considerar $x \ll y$. Sin pérdida de generalidad tomaremos la dirección de propagación en el eje x . Esto se traduce en que

$$D(x, y) \rightarrow D(x), \quad (3.48)$$

$$\rho h(x, y) \rightarrow \rho h(x), \quad (3.49)$$

$$\frac{\rho h^3}{12}(x, y) \rightarrow \frac{\rho h^3}{12}(x), \quad (3.50)$$

$$D \frac{\rho}{\mu'}(x, y) \rightarrow D \frac{\rho}{\mu'}(x), \quad (3.51)$$

$$\frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12}(x, y) \rightarrow \frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12}(x), \quad (3.52)$$

$$\bar{w}(x, y, t) \rightarrow \bar{w}(y, t). \quad (3.53)$$

Por lo tanto todas las derivadas con respecto a y son cero, y por consiguiente la ecuación de Mindlin, dada por la ecuación (3.2), se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right] - \frac{\rho}{\mu'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[D \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right] \\ + \frac{\rho}{\mu'} \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

De manera equivalente, las correspondientes expansiones de ondas planas en una dimensión están dadas por:

$$D(x) = \sum_{G''} d(G''_x) \exp(iG''_x \cdot x) \quad (3.55)$$

$$\rho h(x) = \sum_{G''} n(G''_x) \exp(iG''_x \cdot x), \quad (3.56)$$

$$\frac{\rho h^3}{12}(x) = \sum_{G''} k(G''_x) \exp(iG''_x \cdot x), \quad (3.57)$$

$$D \frac{\rho}{\mu'}(x) = \sum_{G''} l(G''_x) \exp(iG''_x \cdot x), \quad (3.58)$$

$$\frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12}(x) = \sum_{G''} j(G''_x) \exp(iG''_x \cdot x), \quad (3.59)$$

$$\bar{w}(x, t) = \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{G'_x} \exp(iG'_x \cdot x). \quad (3.60)$$

Como se muestra en el apéndice A.2, la ecuación de eigenvalores en el caso unidimensional es, al igual que antes

$$(\mathbb{M} - \omega^2 \mathbb{A}) \bar{w} = \omega^2 (\mathbb{N} - \omega^2 \mathbb{B}) \bar{w}. \quad (3.61)$$

Sin embargo, las componentes de las matrices \mathbb{M} , \mathbb{A} , \mathbb{N} y \mathbb{B} están dadas por

$$\mathbb{M} = d_{G-G'} \left[(k_x + G'_x)^2 (k_x + G_x)^2 \right], \quad (3.62)$$

$$\mathbb{A} = k_{G-G'} (k_x + G_x)^2 + l_{G-G'} (k_x + G'_x)^2, \quad (3.63)$$

$$\mathbb{N} = n_{G-G'}, \quad (3.64)$$

$$\mathbb{B} = j_{G-G'}. \quad (3.65)$$

Como se mencionó anteriormente, la ecuación polinomial de autovalores se puede reescribir como una ecuación de autovalores generalizada la cual puede

ser resuelta con rutinas numéricas estándar. Los coeficientes de Fourier en el caso 1D para un sistema periódico se dan en el apéndice A.3.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se desarrolló el método de expansión en ondas planas para la ecuación de Mindlin. Esta ecuación es una generalización de la ecuación de Kirchhoff-Love para las vibraciones fuera del plano de una placa delgada. A diferencia de la ecuación de Kirchhoff-Love, también conocida como la teoría clásica de las placas delgadas, la ecuación de Mindlin recoge las aportaciones de los esfuerzos de rotación y la deformación de corte. El desarrollo en ondas planas se hizo de la siguiente manera: después de desarrollar en el capítulo dos el método de ondas planas para la teoría clásica de placas delgadas. En el capítulo tres se procedió, a aplicar el mismo método a la ecuación de Mindlin. Este proceso condujo a una ecuación polinomial de eigenvalores, la cual se llevó a otra ecuación generalizada de eigenvalores mediante una transformación descrita, en el capítulo tres. Además, en este mismo capítulo, verificamos que los resultados correspondientes al modelo de Kirchhoff-Love, para bajas frecuencias, se pueden recuperar tomando ciertas consideraciones, a partir del modelo de Mindlin. Finalmente en este capítulo tres, también se obtuvieron resultados para un caso especial, que corresponde a una placa rayada, los cuales se compararon con los obtenidos previamente para la teoría clásica de las placas delgadas. Además se anexaron tres apéndices: en el primero se muestran los cálculos de la expansión de la serie de Fourier para el caso general, en el segundo se describe en detalle el método de ondas planas para la placa rayada, y en el tercero se calculan los coeficientes de Fourier para la placa rayada en una dimensión.

Entre las perspectivas del presente trabajo, se encuentran realizar experimentos, así como el desarrollo de programas computacionales que confirmen las predicciones teóricas.

Apéndice A

Apéndices

A.1. Coeficientes de Fourier para un sistema bidimensional

En este apartado procederemos a desarrollar los coeficientes $d(G'')$, $n(G'')$, $k(G'')$, $l(G'')$ y $j(G'')$ que aparecen en las expansiones de ondas planas, (3.3) a (3.8), involucradas en la ecuación de Mindlin y donde se tratarán los distintos casos para las componentes de G'' . Éstas se utilizan para dar las componentes de las matrices de la ecuación de eigenvalores.

Para la rigidez flexional se tiene $D = \sum_{G''} d(G'') \exp(i\vec{G}'' \cdot \vec{r})$, cuyos coeficientes de Fourier están dados por

$$d(\vec{G}'') = \frac{1}{A} \int D(\vec{r}) \exp(-i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) dr. \quad (\text{A.1})$$

Para la placa de la Fig. 2.3

$$D(\vec{r}) = D_b + (D_a - D_b) \Theta\left(\frac{b_x}{2} - |x|\right) \Theta\left(\frac{b_x}{2} - |y|\right). \quad (\text{A.2})$$

Aquí Θ es la función Heaviside, y $G'' = (G''_x, G''_y)$. Cuando $G''_x = G''_y = 0$ obtenemos

$$d(\vec{0}) = D(\vec{0}) = D_b + (D_a - D_b) f, \quad (\text{A.3})$$

donde se define la fracción de llenado como:

$$f = \frac{b_x b_y}{a_x a_y}. \quad (\text{A.4})$$

Por otra parte, cuando $G''_x = 0$ y $G''_y \neq 0$ se tiene que

$$D(0, G''_y) = f(D_a - D_b) \frac{\sin\left(G''_y \frac{b_y}{2}\right)}{G''_y \frac{b_y}{2}}. \quad (\text{A.5})$$

En el caso de que $G''_x \neq 0$ y $G''_y = 0$ llegamos a

$$D(G''_x, 0) = f(D_a - D_b) \frac{\sin\left(G''_x \frac{b_x}{2}\right)}{G''_x \frac{b_x}{2}}. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente para $G''_x \neq 0$ y $G''_y \neq 0$ obtenemos

$$D(G''_x, G''_y) = f(D_a - D_b) \frac{\sin\left(G''_x \frac{b_x}{2}\right)}{\left(G''_x \frac{b_x}{2}\right)} \frac{\sin\left(G''_y \frac{b_y}{2}\right)}{\left(G''_y \frac{b_y}{2}\right)}. \quad (\text{A.7})$$

Consideremos ahora el desarrollo de ρh :

$$\rho h(\vec{r}) = \sum_{G''} n(\vec{G}'') \exp\left(-i\vec{G}'' \cdot \vec{r}\right), \quad (\text{A.8})$$

donde

$$n(\vec{G}'') = \frac{1}{A} \int \rho h(\vec{r}) \exp\left(-i\vec{G}'' \cdot \vec{r}\right) dr. \quad (\text{A.9})$$

Para la placa de la Fig. 2.3 se tiene que

$$\rho h(\vec{r}) = \rho h_b + (\rho h_a - \rho h_b) \Theta\left(\frac{b_x}{2} - |x|\right) \Theta\left(\frac{b_y}{2} - |y|\right). \quad (\text{A.10})$$

Cuando $G''_x = G''_y = 0$ se obtiene

$$n(\vec{0}) = \rho h_b + (\rho h_a - \rho h_b) f. \quad (\text{A.11})$$

Por otra parte, cuando $G''_x = 0$ y $G''_y \neq 0$ obtenemos:

$$n(0, G''_y) = f(\rho h_a - \rho h_b) \frac{\sin\left(G''_y \frac{b_y}{2}\right)}{G''_y \frac{b_y}{2}}. \quad (\text{A.12})$$

En el caso de que $G_x'' \neq 0$ y $G_y'' = 0$ llegamos a la siguiente expresión:

$$n \left(\vec{G}_x'', 0 \right) = f(\rho h_a - \rho h_b) \frac{\sin \left(G_x'' \frac{b_x}{2} \right)}{G_x'' \frac{b_x}{2}}. \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, para $G_x'' \neq 0$ y $G_y'' \neq 0$ obtenemos

$$n \left(G_x'', G_y'' \right) = f(\rho h_a - \rho h_b) \frac{\sin \left(G_x'' \frac{b_x}{2} \right)}{\left(G_x'' \frac{b_x}{2} \right)} \frac{\sin \left(G_y'' \frac{b_y}{2} \right)}{\left(G_y'' \frac{b_y}{2} \right)}. \quad (\text{A.14})$$

Para el término $\frac{\rho h^3}{12}$ tenemos que

$$\frac{\rho h^3}{12} (\vec{r}) = \sum_{G''} k \left(\vec{G}'' \right) \exp \left(-i \vec{G}'' \cdot \vec{r} \right) \quad (\text{A.15})$$

donde

$$k \left(\vec{G}'' \right) = \frac{1}{A} \int \frac{\rho h^3}{12} (\vec{r}) \exp \left(-i \vec{G}'' \cdot \vec{r} \right) dr. \quad (\text{A.16})$$

Para la placa de la Fig. 2.3 se tiene que

$$\frac{\rho h^3}{12} (\vec{r}) = \frac{\rho h^3}{12} b + \left(\frac{\rho h^3}{12} a - \frac{\rho h^3}{12} b \right) \Theta \left(\frac{b_x}{2} - |x| \right) \Theta \left(\frac{b_y}{2} - |y| \right). \quad (\text{A.17})$$

Los resultados para $G_x'' = G_y'' = 0$; $G_x'' = 0$ y $G_y'' \neq 0$; $G_x'' \neq 0$ y $G_y'' = 0$; y $G_x'' \neq 0$ y $G_y'' \neq 0$ son

$$k(\bar{0}) = \frac{\rho h^3}{12} b + \left(\frac{\rho h^3}{12} a - \frac{\rho h^3}{12} b \right) f, \quad (\text{A.18})$$

$$k(0, G_y'') = f \left(\frac{\rho h^3}{12} a - \frac{\rho h^3}{12} b \right) \frac{\sin \left(G_y'' \frac{b_y}{2} \right)}{G_y'' \frac{b_y}{2}}, \quad (\text{A.19})$$

$$k \left(\vec{G}_x'', 0 \right) = f \left(\frac{\rho h^3}{12} a - \frac{\rho h^3}{12} b \right) \frac{\sin \left(G_x'' \frac{b_x}{2} \right)}{G_x'' \frac{b_x}{2}}, \quad (\text{A.20})$$

$$k \left(G_x'', G_y'' \right) = f \left(\frac{\rho h^3}{12} a - \frac{\rho h^3}{12} b \right) \frac{\sin \left(G_x'' \frac{b_x}{2} \right)}{\left(G_x'' \frac{b_x}{2} \right)} \frac{\sin \left(G_y'' \frac{b_y}{2} \right)}{\left(G_y'' \frac{b_y}{2} \right)}, \quad (\text{A.21})$$

respectivamente. Para el término $\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}}$ se tiene la expansión

$$\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}}(\vec{r}) = \sum_{G''} j(\vec{G}'') \exp(-i\vec{G}'' \cdot \vec{r}), \quad (\text{A.22})$$

donde los coeficientes de Fourier están dados por

$$j(\vec{G}'') = \frac{1}{A} \int \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}}(\vec{r}) \exp(-i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) dr, \quad (\text{A.23})$$

De nuevo, para la placa de la Fig. 2.3 se tiene

$$\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}}(\vec{r}) = \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} b + \left(\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} a - \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} b \right) \Theta\left(\frac{b_x}{2} - |x|\right) \Theta\left(\frac{b_y}{2} - |y|\right). \quad (\text{A.24})$$

Los resultados para: $G''_x = G''_y = 0$, $G''_x = 0$ y $G''_y \neq 0$; $G''_x \neq 0$; y $G''_y = 0$, y $G''_x \neq 0$ y $G''_y \neq 0$ son

$$j(\vec{0}) = \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} b + \left(\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} a - \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} b \right) f, \quad (\text{A.25})$$

$$j(0, G''_y) = f \left(\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} a - \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} b \right) \frac{\sin\left(G''_y \frac{b_y}{2}\right)}{G''_y \frac{b_y}{2}}, \quad (\text{A.26})$$

$$j(\vec{G}''_x, 0) = f \left(\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} a - \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} b \right) \frac{\sin\left(G''_x \frac{b_x}{2}\right)}{G''_x \frac{b_x}{2}}, \quad (\text{A.27})$$

$$j(G''_x, G''_y) = f \left(\frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} a - \frac{\rho^2 h^3}{\mu'_{12}} b \right) \frac{\sin\left(G''_x \frac{b_x}{2}\right) \sin\left(G''_y \frac{b_y}{2}\right)}{\left(G''_x \frac{b_x}{2}\right) \left(G''_y \frac{b_y}{2}\right)}, \quad (\text{A.28})$$

respectivamente.

Finalmente para

$$\frac{D\rho}{\mu'}(\vec{r}) = \sum_{G''} l(\vec{G}'') \exp(-i\vec{G}'' \cdot \vec{r}), \quad (\text{A.29})$$

se tiene que los coeficientes de Fourier están dados por

$$l(\vec{G}'') = \frac{1}{A} \int \frac{D\rho}{\mu'}(\vec{r}) \exp(-i\vec{G}'' \cdot \vec{r}) dr. \quad (\text{A.30})$$

Para la placa de la *Fig,2,2* se tiene que

$$\frac{D\rho}{\mu'}(\vec{r}) = \frac{D\rho}{\mu'}b + \left(\frac{D\rho}{\mu'}a - \frac{D\rho}{\mu'}b \right) \Theta\left(\frac{b_x}{2} - |x|\right) \Theta\left(\frac{b_y}{2} - |y|\right). \quad (\text{A.31})$$

Al igual que antes, los resultados para $G_x'' = G_y'' = 0$, $G_x'' = 0$; y $G_y'' \neq 0$; $G_x'' \neq 0$ y $G_y'' = 0$; y $G_x'' \neq 0$ y $G_y'' \neq 0$ son

$$l(\bar{0}) = \frac{D\rho}{\mu'}b + \left(\frac{D\rho}{\mu'}a - \frac{D\rho}{\mu'}b \right) f, \quad (\text{A.32})$$

$$l(0, G_y'') = f\left(\frac{D\rho}{\mu'}a - \frac{D\rho}{\mu'}b\right) \frac{\sin\left(G_y'' \frac{b_y}{2}\right)}{G_y'' \frac{b_y}{2}}, \quad (\text{A.33})$$

$$l(\vec{G}_x'', 0) = f\left(\frac{D\rho}{\mu'}a - \frac{D\rho}{\mu'}b\right) \frac{\sin\left(G_x'' \frac{b_x}{2}\right)}{G_x'' \frac{b_x}{2}}, \quad (\text{A.34})$$

$$l(G_x'', G_y'') = f\left(\frac{D\rho}{\mu'}a - \frac{D\rho}{\mu'}b\right) \frac{\sin\left(G_x'' \frac{b_x}{2}\right) \sin\left(G_y'' \frac{b_y}{2}\right)}{\left(G_x'' \frac{b_x}{2}\right) \left(G_y'' \frac{b_y}{2}\right)}, \quad (\text{A.35})$$

respectivamente.

A.2. Ondas planas para la placa rayada en una dimensión

En este apéndice se aplica el método de ondas planas para una placa rayada en 1D. Aplicando las expansiones (3.55) a (3.60) a la Ec. (3.54) obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{G_x''} d(G_x'') \exp(iG_x'' \cdot x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{G'_x} \exp(iG'_x \cdot x) \right\} \right] \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{G_x''} k(G_x'') \exp(iG_x'' \cdot x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{G'_x} \exp(iG'_x \cdot x) \right\} \right] \\ & - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\sum_{G_x''} l(G_x'') \exp(iG_x'' \cdot x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{G'_x} \exp(iG'_x \cdot x) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{G''_x} j(G''_x) \exp(iG''_x \cdot x) \frac{\partial^4}{\partial t^4} \left[\exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{G'_x} \exp(iG'_x \cdot x) \right] \\
& + \sum_{G''_x} n(G''_x) \exp(iG''_x \cdot x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'} \bar{w}_{G'_x} \exp(iG'_x \cdot x) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Evaluando las primeras derivadas obtenemos

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'G''} d(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp\{i(G'_x + G''_x) \cdot x\} (k_x + G'_x)^2 \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\omega^2 \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} k(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp(i(G'_x + G''_x) \cdot x) \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-\exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} l(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp\{i(G'_x + G''_x) \cdot x\} (k_x + G'_x)^2 \right] \\
& + \omega^2 \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} j(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp(i(G'_x + G''_x) \cdot x) \\
& - \omega^2 \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} n(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp(i(G'_x + G''_x) \cdot x) = 0.
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Calculando las derivadas restantes obtenemos

$$\begin{aligned}
& \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} d(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp\{i(G'_x + G''_x) \cdot x\} (k_x + G'_x)^2 (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\
& - \omega^2 \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} k(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp\{i(G'_x + G''_x) \cdot x\} (k_x + G'_x + G''_x)^2 \\
& - \omega^2 \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} l(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp\{i(G'_x + G''_x) \cdot x\} (k_x + G'_x)^2 \\
& + \omega^4 \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} j(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp\{i(G'_x + G''_x) \cdot x\} \\
& - \omega^2 \exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'_x G''_x} n(G''_x) \bar{w}_{G'_x} \exp\{i(G'_x + G''_x) \cdot x\} = 0,
\end{aligned} \tag{A.38}$$

que se puede reescribir como

$$\exp(i(k \cdot x - \omega t)) \sum_{G'G''} \left[\begin{array}{c} +d(G''_x)(k_x + G'_x)^2(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 k(G''_x)(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 l(G''_x)(k_x + G'_x)^2 \\ +\omega^4 j(G''_x) \\ -\omega^2 n(G''_x) \end{array} \right] \bar{w}_{G'_x} \exp(i(G'_x + G''_x) \cdot x) = 0. \quad (\text{A.39})$$

Nótese que el término en el paréntesis es una suma. Eliminando $\exp(i(k \cdot x - \omega t))$, multiplicando por $\exp(-i(G'_x + G''_x) \cdot x)$ e integrando sobre la celda unitaria llegamos a

$$\sum_{G'G''} \left[\begin{array}{c} +d(G''_x)(k_x + G'_x)^2(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 k(G''_x)(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 l(G''_x)(k_x + G'_x)^2 \\ +\omega^4 j(G''_x) \\ -\omega^2 n(G''_x) \end{array} \right] \bar{w}_{G'_x} = 0, \quad (\text{A.40})$$

es decir,

$$\sum_{G'G''} \left[\begin{array}{c} +d(G''_x)(k_x + G'_x)^2(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 k(G''_x)(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 l(G''_x)(k_x + G'_x)^2 \\ +\omega^4 j(G''_x) \\ -\omega^2 n(G''_x) \end{array} \right] \delta(G''_x + G'_x - G_x) = 0. \quad (\text{A.41})$$

Aquí se definió

$$\delta(G''_x + G'_x - G_x) = \begin{cases} 1 & \text{si } G''_x = G_x - G'_x \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Finalmente

$$\sum_{G'} \left[\begin{array}{c} +d(G_x - G'_x)(k_x + G'_x)^2(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 k(G_x - G'_x)(k_x + G'_x + G''_x)^2 \\ -\omega^2 l(G_x - G'_x)(k_x + G'_x)^2 \\ +\omega^4 j(G_x - G'_x) \\ -\omega^2 n(G_x - G'_x) \end{array} \right] \bar{w}_{G'_x} = 0. \quad (\text{A.43})$$

A.3. Coeficientes de Fourier para una placa rayada en una dimensión

En este apéndice se desarrollan los coeficientes de la expansión para la placa rayada. De manera similar a como se hizo para el caso en 2D obtenemos estos coeficientes en 1D por lo cual $d(G_x'')$, $n(G_x'')$, $k(G_x'')$, $l(G_x'')$ y $j(G_x'')$ serán desarrolladas en series de Fourier. A partir de estos, se obtienen las componentes de las matrices de la ecuación de eigenvalores. Iniciando con el coeficiente asociado a la rigidez flexional:

$$d(G_x'') = \frac{1}{b} \int D(x) \exp(-iG_x x) dx \quad (\text{A.44})$$

donde b es la longitud de la celda unitaria y $D(x)$ puede expresarse en el intervalo $-\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}$ como

$$D(x) = D_b + (D_a - D_b) \Theta\left(\frac{b_x}{2} - |x|\right) \quad (\text{A.45})$$

con Θ la función Heaviside:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

Para calcular los coeficientes primero planteamos el caso en que $G_x'' = 0$

$$d(0) = D(0) = D_b + (D_a - D_b) f, \quad (\text{A.47})$$

donde f define la fracción de llenado, y esta dada por

$$f = \frac{a}{b}. \quad (\text{A.48})$$

En el caso en que $G_x'' \neq 0$ el coeficiente de la expansión para $d(G_x'')$ es

$$d(G_x'') = f(D_a - D_b) \frac{\sin\left(G_x'' \frac{a}{2}\right)}{G_x'' \frac{a}{2}}. \quad (\text{A.49})$$

Siguiendo el mismo procedimiento tenemos para

$$\rho h(x) = \sum_{G''} n(G_x'') \exp(-iG_x'' x) \quad (\text{A.50})$$

donde

$$n(G''_x) = \frac{1}{b} \int \rho h(x) \exp(-iG''_x) dx. \quad (\text{A.51})$$

En el caso de que $G''_x = 0$,

$$n(0) = \rho h_b + (\rho h_a - \rho h_b) f. \quad (\text{A.52})$$

Para cuando $G''_x \neq 0$, el coeficiente es

$$n(G''_x) = f(\rho h_a - \rho h_b) \frac{\sin\left(G''_x \frac{a}{2}\right)}{G''_x \frac{a}{2}}. \quad (\text{A.53})$$

para el termino $\frac{\rho h^3}{12}$ tenemos que

$$\frac{\rho h^3}{12}(x) = \sum_{G''} k(G''_x) \exp(-iG''_x x), \quad (\text{A.54})$$

donde

$$k(G''_x) = \frac{1}{b} \int \frac{\rho h^3}{12}(x) \exp(-iG''_x) dx. \quad (\text{A.55})$$

Los resultados para $G''_x = 0$ y $G''_x \neq 0$ son

$$k(0) = \frac{\rho h_b^3}{12} + \left(\frac{\rho h_a^3}{12} - \frac{\rho h_b^3}{12} \right) f. \quad (\text{A.56})$$

y

$$k(G''_x) = f \left(\frac{\rho h_a^3}{12} - \frac{\rho h_b^3}{12} \right) \frac{\sin\left(G''_x \frac{a}{2}\right)}{G''_x \frac{a}{2}}. \quad (\text{A.57})$$

Para $D \frac{\rho}{\mu'}$ tenemos que

$$D \frac{\rho}{\mu'}(x) = \sum_{G''} l(G''_x) \exp(-iG''_x x), \quad (\text{A.58})$$

donde

$$l(G''_x) = \frac{1}{b} \int D \frac{\rho}{\mu'}(x) \exp(-iG''_x) dx. \quad (\text{A.59})$$

Los resultados para $G''_x = 0$ y $G''_x \neq 0$ son

$$l(0) = D \frac{\rho_b}{\mu'} + \left(D \frac{\rho_a}{\mu'} - D \frac{\rho_b}{\mu'} \right) f. \quad (\text{A.60})$$

y

$$k(G''_x) = f \left(D \frac{\rho a}{\mu'} - D \frac{\rho b}{\mu'} \right) \frac{\sin(G''_x \frac{a}{2})}{G''_x \frac{a}{2}}. \quad (\text{A.61})$$

respectivamente. Y para $\frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12}$ se tiene

$$\frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12}(x) = \sum_{G''} j(G''_x) \exp(-iG''_x x), \quad (\text{A.62})$$

donde

$$j(G''_x) = \frac{1}{b} \int \frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12}(x) \exp(-iG''_x x) dx. \quad (\text{A.63})$$

Y finalmente los resultados para $G''_x = 0$ y $G \neq 0$ son

$$j(0) = \frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12} b + \left(\frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12} a - \frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12} b \right) f. \quad (\text{A.64})$$

y

$$j(G''_x) = f \left(\frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12} a - \frac{\rho^2 h^3}{\mu' 12} b \right) \frac{\sin(G''_x \frac{a}{2})}{G''_x \frac{a}{2}}. \quad (\text{A.65})$$

respectivamente.

Bibliografía

- [1] R. M. Velasco-Belmont, “Introducción a la elasticidad”, Colección CBI, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, 2009.
- [2] K. F. Graff, “Wave Motion in Elastic Solids”, Dover, 1991.
- [3] W. C. Elmore and M. A. “Heald, Physics of Waves”, Dover, New York, 1969.
- [4] W. Bogusz, Z. Dzygadto, D. Rogula, K. Sobczyk, “Vibrations and Waves”, Part A: Vibrations Polish Scientific Publishers, Warsaw, (1992).
- [5] A. E. H. Love, “A treatise on the mathematical theory of elasticity, Introduction to the theory of Elasticity”, 4th ed, Dover, New York, 1944.
- [6] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, “Teoría de la elasticidad”, Vol. 7 del curso de Física teórica, Reverté, 1969
- [7] R. D. Mindlin, “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”, *J. Appl. Mech.* **18**, 31 (1951).
- [8] Manzanares-Martínez, B., Flores, J., Gutierrez L., Méndez-Sánchez, R. A., Monsivais G., Morales, A., and Ramos-Mendieta F., “Flexural vibrations of a rectangular plate for the lower normal modes”, *Journal of Sound and Vibration* **329** 5105-5115, (2010).
- [9] R. Archuleta y B. Manzanares-Martínez, y J. Manzanares-Martínez, “El método de expansión en ondas planas”, *Revista Bolivariana de Física* **13**, 79-85 (2007).
- [10] S. P. Timoshenko, “On the correction of shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars”, *Philos. Mag.* **41**, 744-746.

- [11] Z. Bai, G. Sleijpen, and H. van der Vorst, *Quadratic Eigenvalue Problems*, in Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, and H. van der Vorst, editors, “Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide”, pages 281-289, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [12] C. Kittel, “Introducción a la Física del Estado Solido”, 3th ed, Editorial Reverté, 1995