Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Topología y Orden

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JOSÉ ANDRÉS RODRÍGUEZ MIGUELES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERARDO ACOSTA GARCÍA

2012

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Rodríguez
Migueles
José Andrés
56 95 57 07
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
305638757

2. Datos del tutor
Dr.
Gerardo
Acosta
García

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Sergio
Macías
Álvarez

4. Datos del sinodal 2
Dra.
Patricia
Pellicer
Covarrubias

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Jorge Marcos
Martínez
Montejano

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

7. Datos de la tesis
Topología y Orden
149 p
2012

Índice general

Agradecimientos

A mis padres, María de la Luz Migueles y Jorge Rodríguez, por darme la vida y los valores que me han inculcado, cuyos frutos me han colmado de tranquilidad, seguridad y alegría. Por la libertad, el gran amor y las incontables bromas.

A mi hermano, Esteban Rodríguez, por tu gran pasión hacia la filosofía y literatura. Por las risas, las discusiones y los momentos de diversión. Gracias por alimentar mi imaginación con tu creatividad. Gracias extensivas a Viviana, por el amor que se tienen.

A Beleza, por la armonía que le das a mi vida. Por tu amor incondicional, confianza, libertad y felicidad. Por los sueños que hemos logrado juntos. Por tus buenos deseos, consejos y principalmente por tu amistad. Gracias, también a tu mamá Patricia Carvantes, tu papá Oscar Santillán, tus hermanos Neto y Oscar, por sus calidas sonrisas y amabilidad.

A Gerardo Acosta, por contribuir ampleamente en esta tesis. Gracias, por dedicar tu tiempo a escucharme, cuestionar mis afirmaciones, corregirla y la perspectiva hacia los resultados que obtuvimos y encontramos. Por brindarme espacios, donde pude platicar sobre esta investigación.

A Sergio Macías, por sus valiosas correccciones, lectura minuciosa, preguntas pertinentes y por uno de sus comentarios que termino en lo que ahora es la Seccion 3.7 de la tesis. En donde se da otra aplicación de la interrelación entre una topología y relación de orden.

A Patricia Pellicer, por sus correciones y observaciones a la tesis. Gracias por permitirme dar pláticas sobre los avances de mi tesis en el V y VI Taller estudiantil de teoría de continuos y sus hiperespacios. El agradecimiento, se hace extensivo a los participantes y a la organizadora Isabel Puga.

A todos los sinodales, por acceder revisar la tesis, sus valiosas correcciones y sugerencias.

A Mónica Clapp y Pepe Ríos, por gran dedicación a la docencia. Gracias, por su gran responsabilidad, claridad expositiva y por compartir su gusto por las matemáticas.

A Osvaldo Guzmán, por las divertidas clases de Teoría de Conjuntos y Lógica. Gracias por tu originalidad e imaginación que le das a tus mágicas clases.

A Judith Campos, por dedicar su tiempo a leerme con cuidado, por sus consejos, sugerencias y la dedicación que le diste a las ayudantías de Análisis.

A Ángel Colín, por los problemas de matemáticas y lógica que nos dejaba día con día en la secundiaria. Gracias por hacer de las matemáticas una actividad cotidiana en mi vida.

A Yaciel Pacheco, por tus comentarios e ideas que aportaste al último capítulo. Gracias también por exponer conmigo en el VI Taller estudiantil de teoría de continuos y sus hiperespacios.

A mis amigos Diego y Karla, por las discusiones, sus preguntas y por su apoyo. Gracias por las risas y sus consejos.

A Carlos Álvarez, por invitarme al Seminario de Fundamentos de la Geometría y por ofrecerme la oportunidad de ser su ayudante.

A todos los alumnos inquisidores, por sus preguntas, dudas y participación en clase. Gracias por aclarar mis ideas, enseñarme y por su asombro.

A Alejandro Illanes, por permitirme exponer parte de los dos primeros capítulos de mi tesis en su Seminario de Hiperspacios. Gracias, por sus preguntas.

A la Academía Mexicana de la Ciencias, por darme la oportunidad de realizar una estancia de verano con Gerardo Acosta, que dio inicio a esta tesis.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, por brindarme la hermosa experiencia de estudiar en sus aulas y también darme la oportunidad de estudiar en el extranjero. Gracias por permitirme hacer estancias de investigación con Eugenio Ley Koo, Sergio Zapata y Pablo Padilla, que me dieron la formación y el gusto por la investigación.

Prefacio

En este trabajo se interrelacionan dos estructuras matemáticas: la de espacio topológico y la de orden. Recordemos que una *relación* en un conjunto X, es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Existen varios tipos de relaciones y, en la Sección 1.2, estudiamos algunas de ellas, siendo la más general la relación de *casi orden* (ver Definición 1.1). Como se mostrará, al interrelacionar estas dos estructuras, podemos generalizar nociones topológicas como la cerradura de un conjunto (Subsección 1.3.3) y los axiomas de separación.

En la Sección 1.4 damos la definición de casi orden semicontinuo y de casi orden continuo (ver definiciones 1.28 y 1.29). Posteriormente indicamos que la semicontinuidad de un casi orden, generaliza el axioma de separación T_1, mientras que la continuidad de un casi orden, generariza el axioma de separación T_2. En la Sección 1.5 presentamos otras propiedades, impuestas en un casi orden, bajo las cuales se generalizan los axiomas de separación T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_4. Entre otras propiedades que mostramos, hacemos ver que se puede generalizar el Lema de Urysohn (ver Subsección 1.5.4).

Conviene indicar que en la Sección 1.5, se prueban los teoremas 1.59 y 1.60 los cuales son nuevos, hasta donde hemos podido investigar.

La teoría desarrollada nos permite estudiar, en la Subsección 1.5.5, la clase de los espacios topológicos compactos y T_2, que poseen un casi orden continuo. Aunque en la literatura dichos espacios ya han sido estudiados, hasta donde hemos podido investigar, no reciben un nombre especial. En este trabajo proponemos llamarlos *espacios compactos casi ordenados*, por estar relacionados con los espacios compactos ordenados estudiados por L. Nachbin en [15, pág. 52].

Conviene indicar que los teoremas 1.71, 1.72 y 1.73, que aparecen en la Subsección 1.5.5, son nuevos.

En el Capítulo 2, estudiamos dos clases de espacios topológicos con una estructura de orden. Por sus siglas en inglés, los llamamos $QOTS$ y $POTS$. Los primeros son espacios topológicos con un casi orden semicontinuo y, los segundos, son $QOTS$ con un orden parcial. Bajo ciertas condiciones, los $QOTS$ son espacios compactos casi ordenados. En la Sección 2.2, mostramos que los $POTS$ son espacios T_1 y que los $POTS$ con orden parcial continuo son T_2. Posteriormente, en la Sección 2.3, se considera la noción de *cadena*, la cual es importante en este trabajo. También se estudian las cadenas maximales y, entre otros resultados, se prueba que en un $QOTS$ toda cadena maximal es cerrada (Lema 2.10). Utilizando este resultado se muestra que los $QOTS$ compactos, admiten elementos maximales y minimales (ver Teorema 2.13).

Como una aplicación de los resultados obtenidos, en la Sección 2.3.2, vemos que todo continuo T_1 tiene al menos dos puntos que no son de corte. Al respecto damos dos demostraciones de este resultado. La primera (ver Teorema 2.20), sigue la idea básica que se estudia en los cursos de Teoría de Continuos, mientras que la segunda (Teorema 2.29) no es usual y, desde un principio, utiliza la interrelación entre un espacio topológico y una estructura de orden.

En la Sección 2.5, generalizamos las noción clásica de convexidad para subconjuntos de $\mathbb{R}$, a conjuntos con un casi orden. Entre otros resultados, mostramos en el Teorema 2.35, que los espacios compactos casi ordenados, satisfacen esta noción general de convexidad.

Es importante comentar que, cuando interrelacionamos una estructura topológica con una de casi orden, la topología no necesariamente está definida en términos del casi orden, como sucede con la topogía del orden, la cual estudiamos en el Capítulo 3, tanto para espacios que admiten un casi orden, como para aquellos que tienen un orden total. El resultado más importante del Capítulo 3, es el Teorema 3.19. La demostración que aquí presentamos, aunque larga pues hemos optado por escribirla a detalle, es más sencilla que la orginalmente presentada en [25]. En esencia en el Teorema 3.19 se dan condiciones bajo las cuales las cadenas maximales en un $QOTS$ son compactas. Más adelante, en la Sección 3.6, damos condiciones bajo las cuales las cadenas maximales en un $POTS$ son conexas.

En el último capítulo se presenta un resultado nuevo para la Teoría del Punto Fijo, en la Proposición 4.13. Usado para mostrar que en los espacios $QOTS$, T_2 con cadenas maximales compactas, las funciones continuas de dichos espacios en sí mismos que preservan orden, dejan un conjunto fijo (Teorema 4.15). Cuando el orden es parcial tenemos un teorema de punto fijo (Corolario 4.16). Después se introduce la noción de elemento terminal, estudiado por A. D. Wallace en [23], que resulta ser una generalización de la de punto final. Finalizamos mostrando que en la clase de los continuos T_2 y localmente conexos, los homeomorfismos de ellos en sí mismos que dejan fijo a un elemento terminal, también dejan fijo a un punto en el complemento de dicho elemento (Teorema 4.40).

Para entender el presente trabajo, se requieren conocimientos de Topología General. En particular, las nociones de compacidad, conexidad y puntos de corte. Hemos procurado que la tesis sea lo más autocontenida posible y, cuando enunciamos un resultado sin demostración, damos una referencia adecuada.

Capítulo 1

Órdenes Topológicos

1.1. Introducción

En este capítulo trabajaremos con estructuras de orden asociadas a un conjunto. Posteriormente veremos una forma no usual de relacionar el orden con la topología de un conjunto. En el proceso, obtendremos axiomas similares a los de separación. Incluso varios resultados clásicos de la Topología General, que involucran los axiomas de separación, serán consecuencia de los que estudiaremos. Uno en particular será el Lema de Urysohn, el cual generalizaremos en la Subsección 1.5.4.

Durante todo este trabajo, las letras $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ representarán a los conjuntos de los números naturales, de los números enteros y de los números reales, respectivamente. Si X es un conjunto, entonces $\mathbb{P}(X)$, representará al conjunto potencia de X. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces los símbolos $\mathrm{cl}_X(A)$, $\mathrm{int}_X(A)$ y $\mathrm{bd}_X(A)$ denotarán la cerradura, el interior y la frontera de A en X, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se denotará por por $|A|$.

1.2. Estructuras de Orden

En la presente sección definiremos varios tipos de orden y propiedades respecto a los antecesores y sucesores. Recordemos que una *relación* en un conjunto X, es un subconjunto $\leqq$ del producto cartesiano $X \times X$. Recordemos también que la pareja $(X, \leqq)$ indica que $\leqq$ es una relación en el conjunto X. Si

$(a, b) \in \leqq$, es común escribir $a \leqq b$ y decir que a es un *antecesor* o *predecesor* de b, y que b es un *sucesor* o *posterior* de a. Si $\leqq$ es una relación en X y $a, b \in X$, decimos que *a está relacionado con b* bajo $\leqq$, si $a \leqq b$. Si $a \nleqq b$, entonces decimos que *a no está relacionado con b*, bajo $\leqq$.

De acuerdo a las propiedades que cumplen los elementos que están relacionados, las relaciones se dividen en varios tipos. En esta sección estudiaremos cinco de ellas.

Definición 1.1. *$(X, \leqq)$ es un* ***conjunto casi ordenado*** *si se cumple que:*

1) *$a \leqq a$, para toda $a \in X$;*

2) *para cada $a, b, c \in X$, si $a \leqq b$ y $b \leqq c$, entonces $a \leqq c$.*

Si $(X, \leqq)$ es un conjunto casi ordenado, decimos que $\leqq$ es un ***casi orden*** *en X.*

Para simplificar, si $(X, \leqq)$ es un conjunto casi ordenado, diremos que el par $(X, \leqq)$, o bien que el conjunto X, es un *COCO*. Cuando una relación $\leqq$ en un conjunto X satisface la propiedad 1) de la Definición 1.1, decimos que es *reflexiva* y, cuando satisface la propiedad 2), decimos que es *transitiva*. Por tanto, un casi orden en X es una relación reflexiva y transitiva en X. La noción de casi orden, también llamada de *preorden*, fue dada en 1948 por G. Birkhoff en [2], aunque con el nombre de *conjunto ordenado*, fue considerado en 1937 por H. MacNeille en [9].

Definición 1.2. *$(X, \leqq)$ es un* ***conjunto dirigido*** *si se tiene que:*

1) *$(X, \leqq)$ es un COCO;*

2) *para cada $a, b \in X$, existe $c \in X$ tal que $a \leqq c$ y $b \leqq c$.*

Si $(X, \leqq)$ es un conjunto dirigido, decimos que $\leqq$ es una ***dirección*** *en X.*

Definición 1.3. *$(X, \leqq)$ es un* ***conjunto parcialmente ordenado*** *si:*

1) *$(X, \leqq)$ es un COCO;*

2) *para cada $a, b \in X$, si $a \leqq b$ y $b \leqq a$, entonces $a = b$.*

Si $(X, \leqq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que $\leqq$ es un ***orden parcial*** *en X.*

Si $(X, \leqq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, diremos que $(X, \leqq)$, o bien que el conjunto X, es un $COPO$. Cuando una relación $\leqq$ en un conjunto X, satisface la propiedad 2) de la Definición 1.3, decimos que es *antisimétrica*. En éstos términos un orden parcial es un casi orden antisimétrico.

Se considera que la noción de conjunto parcialmente ordenado tiene su origen en los trabajos que realizó G. Boole, en el siglo XIX, cuando trató de axiomatizar la lógica proposicional. G. Birkhoff menciona en [2, p. 1], que la noción de conjunto parcialmente ordenado, aparece en forma fragmentada en los trabajos que realizó G. Leibniz alrededor de 1690. También en [2, p. 1], G. Birkhoff da otras referencias en donde se utiliza esta noción y propone llamarlos *posets* (como es común ahora ver este nombre en los textos en inglés).

Definición 1.4. $(X, \leqq)$ *es un* ***conjunto casi totalmente ordenado*** *si pasa que:*

1) $(X, \leqq)$ *es un COCO;*

2) *para cada* $a, b \in X$*, se cumple que* $a \leqq b$ *o bien* $b \leqq a$.

Si $(X, \leqq)$ *es un conjunto casi totalmente ordenado, decimos que* $\leqq$ *es un* ***casi orden total*** *en* X.

Si $(X, \leqq)$ es un conjunto casi totalmente ordenado, diremos que el par $(X, \leqq)$, o bien que el conjunto X, es un $COCTO$. Si $\leqq$ es una relación en un conjunto X y $a, b \in X$, decimos que a y b son *comparables bajo* $\leqq$ si $a \leqq b$ o bien $b \leqq a$. En éstos términos, $(X, \leqq)$ es un $COCTO$ si es un $COCO$ en el que cualesquiera dos de sus elementos son comparables bajo $\leqq$.

Definición 1.5. $(X, \leqq)$ *es un* ***conjunto totalmente ordenado*** *si pasa que:*

1) $(X, \leqq)$ *es un COPO;*

2) *para cada* $a, b \in X$*, se cumple que* $a \leqq b$ *o bien* $b \leqq a$.

Si $(X, \leqq)$ *es un conjunto totalmente ordenado, decimos que* $\leqq$ *es un* ***orden total*** *en* X.

Si $(X, \leqq)$ es un conjunto totalmente ordenado, diremos que el par $(X, \leqq)$, o bien que el conjunto X, es un $COTO$. Tenemos así el siguiente diagrama, en donde las flechas se deben leer como "implica".

$$\begin{tikzcd} COTO \arrow[r] \arrow[d] & COPO \arrow[d] \\ COCTO \arrow[r] & COCO \end{tikzcd}$$

También todo conjunto dirigido es un $COCO$ y, como probaremos a continuación, todo $COCTO$ es un conjunto dirigido.

Teorema 1.6. *Todo $COCTO$ es un conjunto dirigido.*

Demostración. Como ambas estructuras son $COCO$ basta ver que se cumple la segunda propiedad de conjunto dirigido. Sean $(X, \leqq)$ un $COCTO$ y $a, b \in X$. Como X es un $COCTO$, $a \leqq b$ o bien $b \leqq a$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $a \leqq b$. Entonces $c = b$ es un elemento de X tal que $a \leqq c$ y $b \leqq c$. Esto nos indica que X es un conjunto dirigido. □

Vamos ahora a mostrar que los cuatro conceptos, indicados en el diagrama anterior, no son equivalentes.

Ejemplo 1.7. *Existe un $COCTO$ que no es un $COPO$.*

Demostración. Sea $X = \{-1, 1\}$. Definimos en X la relación $\leqq$ como sigue: si $a, b \in X$ entonces $a \leqq b$ si y sólo si $a|b$; es decir, si y sólo si a divide a b. Por tanto, $(X, \leqq)$ es un $COCTO$ ya que $a|b$ para todo $a, b \in X$, lo que implica que es reflexiva, transitiva y todos sus elementos están relacionados. Pero $1| - 1$, $-1|1$ y $-1 \neq 1$, es decir que X no es un $COPO$. □

Como todo $COCTO$ es un $COCO$, el ejemplo anterior es también un $COCO$ que no es un $COPO$. Como todo $COTO$ es un $COPO$, el ejemplo anterior es, a su vez, un $COCTO$ que no es un $COTO$ y un $COCO$ que no es un $COTO$.

Ejemplo 1.8. *Existe un $COPO$ que no es un $COCTO$. También existe un conjunto dirigido que no es un $COCTO$.*

Demostración. Sea X un conjunto con más de un elemento. Consideremos en $\mathbb{P}(X)$, el conjunto potencia de X, la relación $\leqq$ definida como sigue: si $A, B \in \mathbb{P}(X)$, entonces $A \leqq B$ si y sólo si $A \subset B$. Es claro que $(\mathbb{P}(X), \leqq)$ es un *COPO*. Si, además, $A, B \in \mathbb{P}(X)$, entonces $C = A \cup B$ es un elemento de $\mathbb{P}(X)$ tal que $A \leqq C$ y $B \leqq C$. Por tanto $(\mathbb{P}(X), \leqq)$ es un conjunto dirigido. Tomemos ahora $a, b \in X$ con $a \neq b$. Entonces $\{a\}, \{b\}$ son dos elementos de $\mathbb{P}(X)$ y no se cumple que $\{a\} \leqq \{b\}$ ni que $\{b\} \leqq \{a\}$. Por tanto $(\mathbb{P}(X), \leqq)$ no es un *COCTO*. $\square$

Como todo *COPO* es un *COCO*, el ejemplo anterior es también un *COCO* que no es un *COCTO*. Puesto que todo *COTO* es un *COCTO*, el ejemplo anterior es, a su vez, un conjunto dirigido que no es un *COTO*. Notemos que el par $(\mathbb{N}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual en $\mathbb{N}$, es un *COTO*.

Ejemplo 1.9. *Existe un COPO que no es un COTO.*

Demostración. Si $|$ es la relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$, entonces el par $(\mathbb{N}, |)$ es un *COPO* que no es un *COTO*. $\square$

Ejemplo 1.10. *Existe un conjunto dirigido que no es un COPO ni un COCTO.*

Demostración. En $\mathbb{Z}$ la relación $\leqq$ definida como $a \leqq b$ si y sólo si $a|b$, es decir si y sólo si a divide a b, es un conjunto dirigido ya que, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, tenemos que $ab \in \mathbb{Z}$ cumple que $a|ab$ y $b|ab$. Además, $(\mathbb{Z}, \leqq)$ es un *COCO*. Usando el mismo razonamiento que en el Ejemplo 1.7, tenemos que $(\mathbb{Z}, \leqq)$ no es *COPO*. Como $2, 3 \in \mathbb{Z}$, $3 \nmid 2$ y $2 \nmid 3$, $(\mathbb{Z}, \leqq)$ no es un *COCTO*. $\square$

Ejemplo 1.11. *Existe un COPO que no es un conjunto dirigido.*

Demostración. Sea $X = \{2, 3\}$, nuevamente con la relación de divisibilidad. Notemos que $a|b$ en X si y sólo si $a = b$, por lo que $(X, |)$ es un *COPO*. Pero para $2, 3 \in X$ no existe un elemento en X que sea múltiplo de ambos. Entonces $(X, |)$ no es un conjunto dirigido. $\square$

Como todo *COPO* es un *COCO*, el ejemplo anterior es también un *COCO* que no es un conjunto dirigido. Terminamos la presente sección, introduciendo un orden que usaremos en este trabajo con cierta frecuencia.

Definición 1.12. *Sean X un conjunto y $\leqq$ la relación en X definida, para $a, b \in X$, como sigue:*

$$a \leqq b \quad \text{si y sólo si} \quad a = b.$$

*Entonces $\leqq$ se llama el **orden discreto** en X.*

Si $\leqq$ es el orden discreto en X, entonces $(X, \leqq)$ es un *COPO*.

1.3. Predecesores y Sucesores

1.3.1. Definiciones

Vamos ahora a definir tres conjuntos que serán muy importantes.

Definición 1.13. *Si* $(X, \leqq)$ *es un COCO y* $A \subset X$, *entonces :*

$$P(A) = \{y \in X : y \leqq x \text{ para algún } x \in A\},$$

es el conjunto de los ***predecesores de*** A. *Además :*

$$S(A) = \{y \in X : x \leqq y \text{ para algún } x \in A\}$$

es el conjunto de los ***sucesores de*** A *y* $E(A) = P(A) \cap S(A)$ *es el conjunto de los* ***equivalentes de*** A.

Si $(X, \leqq)$ es un *COCO* y $A = \{a\}$, para alguna $a \in X$, entonces, por simplicidad, denotaremos a los conjuntos $P(A)$, $S(A)$ y $E(A)$, por $P(a)$, $S(a)$ y $E(a)$, respectivamente. Aunque es posible definir los conjuntos $P(A)$, $S(A)$ y $E(A)$ suponiendo tan solo que $\leqq$ es una relación en X, procederemos como lo hemos indicado en la definición anterior.

Si $(X, \leqq)$ es un *COCO* y $A \subset X$, es fácil notar que A es un subconjunto de $P(A)$, de $S(A)$ y de $E(A)$. Cuando se cumple la igualdad entre A y $P(A)$, o bien entre A y $S(A)$, el conjunto A recibe un nombre especial, según se indica en la siguiente definición.

Definición 1.14. *Supongamos que* $(X, \leqq)$ *es un COCO y que* $A \subset X$. *Si* $A = P(A)$, *entonces* A *se llama* ***decreciente***. *Si* $A = S(A)$, *entonces* A *es* ***creciente***. *Decimos que* A *es* ***monótono*** *si* A *es decreciente o bien creciente.*

En ocasiones, a los conjuntos crecientes se les llama *monótonos crecientes* o bien *conjuntos superiores*, mientras que a los decrecientes se les conoce como conjuntos *monótonos decrecientes* o bien *conjuntos inferiores*. Si $\leqq$ es el orden discreto en X y $A \subset X$, entonces $P(A) = A$ y $S(A) = A$. Es decir, con el orden discreto, todo subconjunto de X es tanto decreciente como creciente. Más adelante, en la Sección 2.5, estudiaremos la situación en la que $E(A) = A$ se cumple. Podemos, por el momento, indicar lo que sucede cuando $E(a) = \{a\}$, para cada $a \in A$.

Teorema 1.15. *Supongamos que* $(X, \leqq)$ *es un COCO. Entonces* $\leqq$ *es antisimétrica si y sólo si* $E(a) = \{a\}$, *para cada* $a \in X$.

Demostración. Supongamos primero que $\leqq$ es antisimétrica. Sean $a \in X$ y $b \in E(a)$. Entonces $b \leqq a$ y $a \leqq b$, de donde $a = b$. Por tanto $E(a) \subset \{a\}$. Como también $\{a\} \subset E(a)$, resulta que $E(a) = \{a\}$.

Supongamos ahora que $E(a) = \{a\}$, para cada $a \in X$. Sean $a, b \in X$ tales que $a \leqq b$ y $b \leqq a$. Entonces $b \in P(a) \cap S(a) = E(a) = \{a\}$, de donde $b = a$. Esto prueba que $\leqq$ es antisimétrica. □

El teorema anterior también dice que si X es un $COCO$, entonces X es un $COPO$ si y sólo si $E(a) = \{a\}$, para cada $a \in X$. Para la relación del Ejemplo 1.7, tenemos que $E(1) = \{-1, 1\}$.

1.3.2. Resultados Fundamentales

Mostraremos ahora una serie de resultados sobre los conjuntos crecientes, decrecientes y equivalentes. Supondremos, durante el resto de la presente sección, que $(X, \leqq)$ es un $COCO$.

Teorema 1.16. $A \subset X$ *es creciente (respectivamente, decreciente) si y sólo si* $X - A$ *es decreciente (respectivamente, creciente).*

Demostración. Primero supongamos que $A = S(A)$. Tomemos un elemento $y \in P(X - A)$. Entonces $y \leqq x$ para algún $x \in X - A$. Ahora si suponemos que $y \in A$ entonces, como $y \leqq x$ y $A = S(A)$, tenemos que $x \in S(A) = A$. Esto es una contradicción, así que $y \in X - A$. Luego $P(X - A) \subset X - A$. Como la otra contención es cierta, tenemos que $X - A = P(X - A)$. Por tanto, $X - A$ es decreciente. Una prueba similar hace ver que si $X - A$ es decreciente, entonces A es creciente. Por tanto A es creciente si y sólo si $X - A$ es decreciente. □

Por dualidad, A es decreciente si y sólo si $X - A$ es creciente. Ahora vamos a probar que la operación de tomar predecesor, preserva la contención y la unión.

Teorema 1.17. *Sean* $A \subset B \subset X$ *y* $\{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ *una familia de subconjuntos de* X. *Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $P(A) \subset P(B)$;

2) $P\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha)$;

3) $P\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha)$.

Demostración. Si $x \in P(A)$, entonces $x \leqq y$ para algún $y \in A$. Como $A \subset B$, y es un elemento de B tal que $x \leqq y$. Luego $x \in P(B)$ y, así, $P(A) \subset P(B)$. Esto muestra 1).

Para probar 2), tomemos primero $x \in P\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right)$. Entonces $x \leqq y$ para algún $y \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$. Luego existe $\alpha' \in \Gamma$ tal que $y \in U_{\alpha'}$ y, así:

$$x \in P(U_{\alpha'}) \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha).$$

Esto prueba que $P\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha)$. Notemos ahora que $U_\beta \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$, para cada $\beta \in \Gamma$. Entonces, por 1), $P(U_\beta) \subset P\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right)$, para toda $\beta \in \Gamma$. Luego $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha) \subset P\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right)$. Esto prueba 2).

Para ver 3) notemos primero que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha \subset U_\beta$, para cada $\beta \in \Gamma$. Luego, por 1), $P\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset P(U_\beta)$, para toda $\beta \in \Gamma$. Entonces $P\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha)$. Esto prueba 3). □

La otra contención del inciso 3) del Teorema 1.17, no siempre se cumple. Para ver esto, consideremos el par $(\mathbb{R}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual en $\mathbb{R}$. Es claro que $(\mathbb{R}, \leq)$ es un *COCO*. Sean $U_1 = \{0\}$ y $U_2 = \{1\}$. Entonces $P(U_1 \cap U_2) = P(\emptyset) = \emptyset$, pero $0 \in P(U_1) \cap P(U_2)$. Por tanto,

$$P(U_1) \cap P(U_2) \nsubseteq P(U_1 \cap U_2).$$

Corolario 1.18. *Si $\{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos decrecientes de X, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ y $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ son decrecientes.*

Demostración. Como $P(U_\alpha) = U_\alpha$, para cada $\alpha \in \Gamma$, usando las propiedades 2) y 3) del Teorema 1.17, tenemos que:

$$P\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$$

y que:

$$P\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha \subset P\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right).$$

Esto muestra que $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ y $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ son decrecientes. □

Para los sucesores tenemos los siguientes resultados, cuyas demostraciones son análogas al teorema y corolario anteriores.

Teorema 1.19. *Sean $A \subset B \subset X$ y $\{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $S(A) \subset S(B)$;

2) $S\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} S(U_\alpha)$;

3) $S\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} S(U_\alpha)$.

Corolario 1.20. *Si $\{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos crecientes de X, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ y $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ son crecientes.*

Los corolarios 1.18 y 1.20 se utilizarán con frecuencia a lo largo de este trabajo, en muchos casos sin hacer referencia a ellos.

Notemos ahora que si $A \subset B \subset X$, entonces

$$E(A) = P(A) \cap S(A) \subset P(B) \cap S(B) = E(B).$$

Por tanto, la propiedad 1) de los Teoremas 1.17 y 1.19, se satisface para el conjunto de los equivalentes. Como se enuncia en el siguiente resultado, la propiedad 3) de dichos teoremas también se satisface para el conjunto de los equivalentes, pero no así la propiedad 2).

Teorema 1.21. *Sean $A \subset X$, $B \subset X$ y $\{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces*

$$E\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} E(U_\alpha) \quad y \quad \bigcup_{\alpha\in\Gamma} E(U_\alpha) \subset E\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right).$$

Sin embargo, no siempre pasa que $E(A \cup B) \subset E(A) \cup E(B)$.

Demostración. Para ver la primera parte, basta notar que:

$$\begin{aligned} E\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) = P\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \cap S\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) &\subset \left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} P(U_\alpha)\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} S(U_\alpha)\right) \\ &= \bigcap_{\alpha\in\Gamma} \left(P(U_\alpha) \cap S(U_\alpha)\right) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} E(U_\alpha). \end{aligned}$$

Para mostrar la segunda parte, tomemos $x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} E(U_\alpha)$. Entonces existe $\alpha' \in \Gamma$ tal que $x \in E(U_{\alpha'})$. Luego $x \in P(U_{\alpha'}) \cap S(U_{\alpha'})$, por lo que existen $z, w \in U_{\alpha'}$ tales que $z \leqq x \leqq w$. Notemos que z y w son elementos de $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ tales que $z \leqq x \leqq w$. Por tanto,

$$x \in P\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \cap S\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) = E\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right).$$

Esto prueba que $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} E(U_\alpha) \subset E\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right)$. La contención $E\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma} E(U_\alpha)$ no es cierta en general. Para ver esto, consideremos el par $(\mathbb{N}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual en $\mathbb{N}$. Es claro que $(\mathbb{N}, \leq)$ es un *COCO*. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{3\}$. Entonces $2 \in E(\{1,3\}) = E(A \cup B)$, pero $2 \notin E(\{1\}) \cup E(\{3\}) = E(A) \cup E(B)$. Por tanto, $E(A \cup B) \nsubseteq E(A) \cup E(B)$. □

Ahora probaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.22. *Si $A \subset X$, entonces $P(A)$ es decreciente y $S(A)$ es creciente.*

Demostración. Sea $x \in P(P(A))$, entonces existe $y \in P(A)$ tal que $x \leqq y$. Como $y \in P(A)$, existe $a \in A$ tal que $y \leqq a$. Por transitividad concluimos que $x \leqq a$, es decir, $x \in P(A)$. Por lo tanto $P(P(A)) \subset P(A)$ y, como la otra contención siempre se cumple, tenemos que $P(A)$ es decreciente. Análogamente, resulta que $S(A)$ es creciente. □

1.3.3. El Operador Cerradura

Como hemos estado suponiendo, $(X, \leqq)$ es un *COCO*. Para cada $A \subset X$, consideremos los conjuntos

$$d(A) = \bigcap\{U \subset X : U \text{ es decreciente y } A \subset U\}$$

e

$$i(A) = \bigcap\{U \subset X : U \text{ es creciente y } A \subset U\}.$$

Teorema 1.23. *Si $A \subset X$, entonces*

1) *A es decreciente si y sólo si $A = d(A)$. Más aún, $d(A)$ es el menor subconjunto decreciente de X que contiene a A.*

2) *A es creciente si y sólo si $A = i(A)$. Más aún, $i(A)$ es el menor subconjunto creciente de X que contiene a A.*

Demostración. Para ver 1) notemos que, por la definición de $d(A)$ y el Corolario 1.18, $d(A)$ es un subconjunto decreciente de X tal que $A \subset d(A)$. Si $B \subset X$ es decreciente y $A \subset B$, entonces por la definición de $d(A)$, sucede que $d(A) \subset B$. Esto prueba que $d(A)$ es el menor subconjunto decreciente de X que contiene a A.

Supongamos ahora que A es un subconjunto decreciente de X que contiene a A. Entonces, por la definición, $d(A) \subset A$. Puesto que la otra contención también se cumple, tenemos que $A = d(A)$.

Supongamos ahora que $A = d(A)$. Entonces A es decreciente pues, como ya vimos, el conjunto $d(A)$ es decreciente. Esto termina la prueba de 1). La prueba de 2) es similar. $\square$

Si suponemos ahora que X es un espacio topológico con un casi orden entonces, para cada $A \subset X$, podemos considerar los siguientes conjuntos:

$$D(A) = \bigcap\{U \subset X \colon U \text{ es decreciente, cerrado en } X \text{ y } A \subset U\}$$

e

$$I(A) = \bigcap\{U \subset X \colon U \text{ es creciente, cerrado en } X \text{ y } A \subset U\}.$$

Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 1.24. *Si X es un espacio topológico con un casi orden y $A \subset X$, entonces*

1) *$D(A)$ es el menor subconjunto decreciente y cerrado de X, que contiene a A;*

2) *$I(A)$ es el menor subconjunto creciente y cerrado de X que contiene a A.*

Demostración. Por el Corolario 1.18 $D(A)$ es un subconjunto decreciente y cerrado de X tal que $A \subset D(A)$. Si $B \subset X$ es decreciente y cerrado en X tal que $A \subset B$ entonces, por la definición de $D(A)$, sucede que $D(A) \subset B$. Esto prueba 1). La prueba de 2) es similar. $\square$

Los conjuntos $D(A)$ e $I(A)$ fueron definidos por L. Nachbin en [15, p. 34]. En [24], L. E. Ward, Jr. denota $D(A)$ como $H_0(A)$ y a $I(A)$ por $H_1(A)$. Incluso define a $D(A)$ como el *casco cerrado decreciente* de A y a $I(A)$ como el *casco cerrado creciente* de A. Preferimos, sin embargo, los nombres dados en [6].

Definición 1.25. *Si X es un espacio topológico con un casi orden y $A \subset X$, entonces el conjunto $D(A)$ se llama la **cerradura decreciente** de A en X, mientras que el conjunto $I(A)$ se llama la **cerradura creciente** de A en X.*

Recordemos que $\mathrm{cl}_X(A)$ denota la cerradura de un subconjunto A del espacio topológico X. Si $\leqq$ es el orden discreto en X (ver Definición 1.12), entonces cualquier subconjunto de X es tanto creciente como decreciente. Por tanto $\mathrm{cl}_X(A) = D(A) = I(A)$. Esta es una de las razones por la que los conjuntos $D(A)$ e $I(A)$ generalizan la noción de cerradura en un espacio topológico. Otra razón es por que satisfacen las propiedades enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.26. *Los operadores cerradura decreciente y cerradura creciente, satisfacen las siguientes propiedades:*

1) $D(\emptyset) = \emptyset$ *e* $I(\emptyset) = \emptyset$;

2) $A \subset D(A)$ *y* $A \subset I(A)$;

3) $D(A \cup B) = D(A) \cup D(B)$ *e* $I(A \cup B) = I(A) \cup I(B)$;

4) $D(D(A)) = D(A)$ *e* $I(I(A)) = I(A)$.

Demostración. La parte 1) es trivial, ya que por definición el conjunto vacío es un cerrado decreciente y creciente. La parte 2) es consecuencia inmediata de las definiciones de $D(A)$ e $I(A)$. Para ver 3) notemos que $D(A \cup B)$ es un subconjunto decreciente y cerrado en X tal que $A \subset A \cup B \subset D(A \cup B)$. Luego, por la parte 1) del Teorema 1.24, $D(A) \subset D(A \cup B)$. De manera similar tenemos que $D(B) \subset D(A \cup B)$. Esto prueba que $D(A) \cup D(B) \subset D(A \cup B)$.

Como $D(A)$ y $D(B)$ son decrecientes, por el Corolario 1.18, $D(A) \cup D(B)$ es decreciente. Además $D(A) \cup D(B)$ es cerrado en X, por ser la unión de dos cerrados en X. Entonces $D(A) \cup D(B)$ es un subconjunto decreciente y cerrado en X que contiene a $A \cup B$. Por la parte 1) del Teorema 1.24, se tiene entonces que $D(A \cup B) \subset D(A) \cup D(B)$. Esto prueba la primera parte de 3). La demostración de la segunda parte es similar.

Para ver 4), notemos que $D(A)$ es un subconjunto decreciente y cerrado en X que contiene a $D(A)$. Entonces, por la parte 1) del Teorema 1.24, $D(D(A)) \subset D(A)$. Además por la parte 2), $D(A) \subset D(D(A))$. Esto prueba la primera parte de 4). La demostración de la segunda parte es similar. $\square$

Terminamos la presente sección con el siguiente resultado.

Teorema 1.27. *Si X es un espacio topológico con un casi orden y $A \subset X$, entonces*

1) *A es decreciente y cerrado en X si y sólo si $D(A) = A$;*

2) *A es creciente y cerrado en X si y sólo si $I(A) = A$.*

Demostración. Supongamos que A es decreciente y cerrado en X. Por la parte 1) del Teorema 1.24, $D(A) \subset A$. Como también $A \subset D(A)$, sucede que $D(A) = A$. Por otro lado, si $D(A) = A$, entonces como $D(A)$ es decreciente y cerrado, A también posee dichas propiedades. Esto prueba 1). La prueba de 2) es similar. $\square$

1.4. Semicontinuidad

1.4.1. Un Poco de Historia

En la presente sección consideraremos un espacio topológico con una relación de orden, ligada con la topología de X. La interrelación entre un espacio topológico con un casi orden, fue investigada por L. Nachbin. Sus resultados están recopilados en [15], publicado en 1950. Ya antes G. Birkhoff había investigado la interrelación mencionada, e incluso fue uno de los primeros en dar una descripción de topologías intrínsecas definidas en conjuntos parcialmente ordenados. Algunos de sus resultados fueron recopilados en [2], publicado en 1948.

En 1954 L. E. Ward, Jr. publicó los artículos [24] y [25], en el que se generalizan varios resultados tanto de L. Nachbin como de G. Birkhoff. En el presente trabajo vamos a escribir una buena parte del material publicado en [24] y [25]. En [8] se menciona que la combinación entre una topología y una estructura de orden, tiene aplicaciones en varias áreas de las Matemáticas como la Teoría del Dominio, en Computación Teórica y en la Economía Matemática (ver, por ejemplo, el artículo [6]). En el presente trabajo daremos algunas aplicaciones dentro de la Topología (mostrando generalizaciones de los axiomas de separación), especialmente de la Teoría de los Continuos y la Teoría del Punto Fijo.

1.4.2. Definiciones

Supongamos que X es un espacio topológico y que hay una relación $\leqq$ tal que $(X, \leqq)$ es un $COCO$. En las siguientes definiciones vemos una manera de ligar la estructura de casi orden en X con su estructura topológica. Recordemos que $a \leqq b$ indica que a está relacionado con b, bajo $\leqq$. Por tanto $a \nleqq b$, indica que a no está relacionado con b, bajo $\leqq$.

Definición 1.28. *Sean X un espacio topológico con un casi orden $\leqq$ en X. Decimos que $\leqq$ es **semicontinuo inferiormente** (respectivamente, **semicontinuo superiormente**), si para cada $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$ (respectivamente, $b \nleqq a$) existe un abierto U en X tal que $a \in U$ y, para todo $x \in U$, se tiene que $x \nleqq b$ (respectivamente, $b \nleqq x$). Decimos que $\leqq$ es **semicontinuo** si $\leqq$ es semicontinuo inferiormente y semicontinuo superiormente.*

Si el casi orden $\leqq$ en el espacio topológico X es semicontinuo, semicontinuo inferiormente, o bien semicontinuo superiormente, es común decir que el par $(X, \leqq)$ es semicontinuo, semicontinuo inferiormente, o bien semicontinuo superiormente, según sea el caso.

Notemos que el casi orden $\leqq$ es semicontinuo inferiormente si para cada $a, b \in X$ tales que a no es predecesor de b, existe un abierto U en X tal que $a \in U$, de modo que ningún elemento de U es predecesor de b. De manera similar, $\leqq$ es semicontinuo superiormente, si para cada $a, b \in X$ tales que b no es un sucesor de a, existe un abierto V en X tal que $b \in V$, de modo que ningún elemento de V es sucesor de a.

Si $\leqq$ es el orden discreto en X (ver Definición 1.12), entonces $\leqq$ es semicontinuo si y sólo si, para cada $a, b \in X$ con $a \neq b$, existen abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$, $b \notin U$ y $a \notin V$. Es decir $\leqq$ es semicontinuo si y sólo si X es T_1. En este sentido, al interrelacionar la topología con una estructura de orden, obtenemos que la semicontinuidad del casi orden es una manera de generalizar el axioma de separación T_1.

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 1.29. *Sean X un espacio topológico con un casi orden $\leqq$ en X. Decimos que $\leqq$ es **continuo** si para cada $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$, existen abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y, para todo $(x, y) \in U \times V$, se tiene que $x \nleqq y$.*

Si el casi orden $\leqq$ en el espacio topológico X es continuo, es común decir que el par $(X, \leqq)$ es continuo. Bajo dicha situación, los conjuntos U y V garantizados en la Definición 1.29, son ajenos, pues el casi orden $\leqq$ es reflexivo. Notemos que $\leqq$ es continuo si para cada $a, b \in X$ tales que a no es un predecesor de b, existen abiertos U y V en X con $a \in U$, $b \in V$, de modo que ningún elemento de U es predecesor de ningún elemento de V.

Otro punto que se puede observar es que la semicontinuidad (inferior y superior) y la continuidad, son propiedades hereditarias. Para probar esto, basta restringir el orden al subconjunto e intersectar los respectivos abiertos con el subespacio.

Si $\leqq$ es el orden discreto en X, entonces $\leqq$ es continuo si y sólo si para cada $a, b \in X$ con $a \neq b$, existen abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En otras palabras $\leqq$ es continuo si y sólo si X es T_2. En este sentido, al interrelacionar la topología con una estructura de orden, la continuidad del casi orden es una manera de generalizar el axioma de separación T_2. Más adelante, en este capítulo, veremos otras propiedades de un casi orden que generalizan los axiomas de regularidad, de regularidad completa y de normalidad.

1.4.3. Propiedades Fundamentales

A partir de este momento, en lo que resta de la sección, pensaremos que X es un espacio topológico y que $\leqq$ es un casi orden en X.

Teorema 1.30. *Si $\leqq$ es continuo, entonces $\leqq$ es semicontinuo.*

Demostración. Sean $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Como $\leqq$ es continuo, existen abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y, para todo $(x, y) \in U \times V$, se tiene que $x \nleqq y$. En particular $x \nleqq b$, para cada $x \in U$ y $a \nleqq y$, para toda $y \in V$. Por tanto $\leqq$ es semicontinuo. $\square$

Como caso particular del teorema anterior, tenemos que los espacios T_2 son T_1. Para esto basta considerar el orden discreto.

Vamos a ver ahora que las nociones de semicontinuidad inferior, semicontinuidad superior y continuidad, son distintas.

Ejemplo 1.31. *Existe un casi orden semicontinuo inferiormente, pero no semicontinuo superiormente.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología que tiene por base a la familia $\mathcal{S} = \{(a, \infty) \colon a \in \mathbb{R}\}$. Sea $\leq$ el orden usual en $\mathbb{R}$. Como ya indicamos $(\mathbb{R}, \leq)$ es un $COTO$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \nleq b$. Entonces $b < a$. Tomemos el abierto $U = (a - \epsilon, \infty)$ en $\mathbb{R}$ donde $0 < \epsilon \leq \frac{a-b}{2}$. Entonces $a \in U$ y, para todo $x \in U$, se tiene que $b < x$, es decir, $x \nleq b$. Esto muestra que $\leq$ es semicontinuo inferiormente.

Ahora bien, como $0 < 1$, resulta que $1 \nleq 0$. Sea U un abierto en $\mathbb{R}$ tal que $0 \in U$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \in (a, \infty) \subset U$. Esto implica que $a < 0$ y que $1 \in U$. Luego $1 \leq 1$ y, por tanto, $\leq$ no es semicontinuo superiormente. $\square$

Ejemplo 1.32. *Existe un casi orden semicontinuo superiormente, pero no semicontinuo inferiormente.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología que tiene por base a la familia $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) \colon a \in \mathbb{R}\}$. Sea $\leq$ el orden usual en $\mathbb{R}$. Una demostración análoga a la dada en el ejemplo anterior, hace ver que $\leq$ es semicontinuo superiormente, pero no semicontinuo inferiormente. $\square$

Ejemplo 1.33. *Existe un casi orden semicontinuo, pero no continuo.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio topológico T_1, pero no T_2 (por ejemplo, X puede ser un conjunto numerable con la topología de los complementos finitos). Como casi orden $\leqq$ en X, consideremos el orden discreto. Entonces $\leqq$ es semicontinuo pero no continuo. $\square$

Las nociones de casi orden semicontinuo inferiormente y casi orden semicontinuo superiormente, como están dadas en la Definición 1.28, son un tanto incómodas e inmanejables. Utilizando el conjunto de los predecesores y el de los sucesores, dados en la Definición 1.13, podemos caracterizar dichos casi órdenes de un modo que, como veremos a lo largo del presente trabajo, resultarán ser más manejables.

Proposición 1.34. $\leqq$ *es semicontinuo inferiormente si y sólo si* $P(b)$ *es cerrado en* X, *para cada* $b \in X$.

Demostración. Supongamos que $\leqq$ es semicontinuo inferiormente. Sean $b \in X$ y $a \in X - P(b)$. Entonces $a \nleqq b$ y, como $\leqq$ es semicontinuo inferiormente, existe un abierto U en X tal que $a \in U$ y, para cada $x \in U$, sucede que $x \nleqq b$. Luego $U \subset X - P(b)$ y, por tanto, $X - P(b)$ es abierto en X. Esto muestra que $P(b)$ es cerrado en X.

Ahora supongamos que $P(b)$ es cerrado en X, para cada $b \in X$. Tomemos $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Entonces $P(b)$ es cerrado en X, por lo que $U = X - P(b)$ es abierto en X. Además $a \in U$ y, para todo $x \in U$, se tiene que $x \nleqq b$. Esto prueba que $\leqq$ es semicontinuo inferiormente. □

Proposición 1.35. *$\leqq$ es semicontinuo superiormente si y sólo si $S(b)$ es cerrado en X, para cada $b \in X$.*

Demostración. Supongamos que $\leqq$ es semicontinuo superiormente. Sean $b \in X$ y $a \in X - S(b)$. Entonces $b \nleqq a$ y, como $\leqq$ es semicontinuo superiormente, existe un abierto U en X tal que $a \in U$ y, para cada $x \in U$, sucede que $b \nleqq x$. Luego $U \subset X - S(b)$ y, por tanto, $X - S(b)$ es abierto en X. Esto prueba que $S(b)$ es cerrado en X.

Ahora supongamos que $S(b)$ es cerrado en X, para cada $b \in X$. Sean $a, b \in X$ tales que $b \nleqq a$. Entonces $S(b)$ es cerrado en X, por lo que $U = X - S(b)$ es abierto en X. Además $a \in U$ y, para todo $x \in U$, se tiene que $b \nleqq x$. Entonces $\leqq$ es semicontinuo superiormente. □

Como consecuencia inmediata de las proposiciones anteriores, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.36. *$\leqq$ es semicontinuo si y sólo si $P(b)$ y $S(b)$ son cerrados en X, para cada $b \in X$.*

Corolario 1.37. *Si $\leqq$ es semicontinuo, entonces $E(b)$ es cerrado en X, para cada $b \in X$.*

Demostración. Si $\leqq$ es semicontinuo y $b \in X$ entonces, por la Proposición 1.36, $E(b) = P(b) \cap S(b)$ es la intersección de dos cerrados en X. Por tanto $E(b)$ es cerrado en X. □

Si $\leqq$ es el orden discreto en X, entonces $P(b) = \{b\}$ y $S(b) = \{b\}$, para cada $b \in X$. Entonces, como caso particular de la Proposición 1.36, tenemos que X es T_1 si y sólo si $\{b\}$ es cerrado en X, para cada $b \in X$.

En el siguiente resultado presentamos una afirmación sencilla pero muy útil, para el conjunto de los equivalentes.

Teorema 1.38. *Sean $a, b \in X$. Entonces $a \in E(b)$ si y sólo si $b \in E(a)$.*

Demostración. Si $a \in E(b)$, entonces a es predecesor y sucesor de b. Luego b es predecesor y sucesor de a, por lo que $b \in E(a)$. La prueba de que $b \in E(a)$ implica $a \in E(b)$ es similar. □

Hemos visto que todo casi orden continuo es semicontinuo (Teorema 1.30) y, además, que existen casi órdenes semicontinuos que no son continuos (Ejemplo 1.33). Por tanto, la continuidad y la semicontinuidad son nociones distintas. Sin embargo, como se indica en el siguiente resultado, si el casi orden es total (cosa que no sucede con el casi orden presentado en el Ejemplo 1.33), entonces la continuidad y la semicontinuidad son equivalentes.

Teorema 1.39. *Sean X un espacio topológico y $\leqq$ un casi orden total en X. Entonces $\leqq$ es continuo si y sólo si $\leqq$ es semicontinuo.*

Demostración. En vista del Teorema 1.30, basta ver que la semicontinuidad implica la continuidad. Supongamos, por tanto, que $\leqq$ es semicontinuo. Sean $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Como el casi orden $\leqq$ es total y $a \nleqq b$, sucede que $b \leqq a$ y $b \notin E(a)$. Vamos a considerar ahora dos casos. Supongamos primero que existe $c \in X$ tal que $b \leqq c \leqq a$ y $c \notin E(a) \cup E(b)$. Entonces $a \in S(c)$ y $b \in P(c)$. Hagamos

$$U = X - P(c) \quad \text{y} \quad V = X - S(c).$$

Por la Proposición 1.36, U y V son abiertos en X. Si $a \in P(c)$, entonces $a \in P(c) \cap S(c) = E(c)$. Luego $a \in E(c)$ y, por el Teorema 1.38, $c \in E(a)$. Como esto contradice el hecho de que, por suposición, $c \notin E(a)$, tenemos que $a \notin P(c)$. Luego $a \in U$. Ahora bien, si $b \in S(c)$, entonces $b \in S(c) \cap P(c) = E(c)$. Luego $b \in E(c)$ y, por el Teorema 1.38, $c \in E(b)$. Como esto es una contradicción, tenemos que $b \notin S(c)$. Luego $b \in V$.

Hemos probado que U y V son abiertos en X tales que $a \in U$ y $b \in V$. Tomemos ahora $x \in U$ y $y \in V$. Entonces $x \nleqq c$ y $c \nleqq y$. Esto implica, pues el casi orden es total, que $y \leqq c$ y $c \leqq x$. Luego $y \leqq x$, así que $x \nleqq y$. Esto muestra que $\leqq$ es continuo, en el caso de que exista $c \in X$ como indicamos.

Supongamos ahora que no existe $c \in X$ tal que $b \leqq c \leqq a$ y $c \notin E(a) \cup E(b)$. Hagamos

$$U = X - P(b) \quad \text{y} \quad V = X - S(a).$$

Por la Proposición 1.36, U y V son abiertos en X. Como $a \nleqq b$ tenemos además que $a \in U$ y $b \in V$. Tomemos ahora $x \in U$ y $y \in V$. Entonces $x \nleqq b$ y $a \nleqq y$, por lo que $b \leqq x$ y $y \leqq a$. Vamos a demostrar que $x \nleqq y$. Para esto, supongamos por el contrario, que $x \leqq y$. Sea $c = y$. Entonces $b \leqq x \leqq y \leqq a$. Esto significa que c es un elemento de X tal que $b \leqq c \leqq a$ así que, por hipótesis, $c \in E(a) \cup E(b)$. Si $c \in E(a)$, entonces $a \leqq c = y$, pero esto contradice el que $a \nleqq y$. Si $c \in E(b)$, entonces $c \leqq b$ por lo que $x \leqq y = c \leqq b$, es decir $x \leqq b$, contradiciendo el que $x \nleqq b$. Como en ambos casos hemos obtenido una contradicción, que proviene de haber supuesto que $x \leqq y$, deducimos que $x \nleqq y$. Con esto probamos que $\leqq$ es continuo. □

En el siguiente resultado se presentan dos caracterizaciones de los casi órdenes continuos. Recordemos que si $a \in X$, entonces una *vecindad de a en X* es un subconjunto A de X para el cual existe un abierto U en X tal que $a \in U \subset A$.

Proposición 1.40. *Sean X un espacio topológico y $\leqq$ un casi orden en X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$\leqq$ es continuo;*

2) *$D = \{(x, y) \in X \times X : x \leqq y\}$ es cerrado en $X \times X$;*

3) *si $a, b \in X$ son tales que $a \nleqq b$, entonces existen vecindades N y N' de a y b, respectivamente, tales que N es creciente, N' es decreciente y $N \cap N' = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que se cumple 1). Sea $(a, b) \in (X \times X) - D$. Entonces $a \nleqq b$ y, como $\leqq$ es continuo, existen abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $x \nleqq y$, para todo $(x, y) \in U \times V$. Notemos que $U \times V$ es un abierto en $X \times X$ tal que $(a, b) \in U \times V$. Además, de existir un elemento $(c, d) \in (U \times V) \cap D$, tendríamos que $c \nleqq d$ y $c \leqq d$, lo cual es es una contradicción. Por lo tanto, $(U \times V) \cap D = \emptyset$. Esto muestra que $(X \times X) - D$

es abierto en $X \times X$ o, lo que es lo mismo, que D es cerrado en $X \times X$. Esto prueba que 1) implica 2).

Ahora, supongamos que se cumple 2). Sean $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Entonces $(X \times X) - D$ es un abierto en $X \times X$ que tiene a (a, b). Por tanto, existe un abierto básico $U \times V$ en $X \times X$ tal que $(a, b) \in U \times V \subset X \times X - D$. Sean $N = S(U)$ y $N' = P(V)$. Como U y V son abiertos en X tales que $a \in U \subset N$ y $b \in V \subset N'$, tenemos que N es una vecindad de a, y N' es una vecindad de b. Además, por el Teorema 1.22, N es creciente y N' es decreciente. Supongamos que existe un elemento $x \in N \cap N' = S(U) \cap P(V)$. Entonces existen $c \in U$ y $d \in V$ tales que $c \leqq x$ y $x \leqq d$. Luego (c, d) es un elemento de $U \times V$ tal que $c \leqq d$, es decir, tal que $(c, d) \in D$. Por tanto $(U \times V) \cap D \neq \emptyset$. Esto contradice el hecho de que $U \times V \subset X \times X - D$. Luego $N \cap N' = \emptyset$, probando así que 2) implica 3).

Para probar que 3) implica 1). Sean $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Por hipótesis, existen vecindades N y N' de a y b, respectivamente, tales que N es creciente, N' es decreciente y $N \cap N' = \emptyset$. Sean U y V dos abiertos en X tales que $a \in U \subset N$ y $b \in V \subset N'$. Tomemos $x \in U$ y $y \in V$. Vamos a mostrar que $x \nleqq y$. Para esto supongamos, por el contrario, que $x \leqq y$. Como $x \in U \subset N$, $S(N) = N$ y $x \leqq y$, tenemos que $y \in N$. También $y \in V \subset N'$. Entonces $y \in N \cap N'$. En vista de que esto contradice el hecho de que los conjuntos N y N' son ajenos, deducimos que $x \nleqq y$. Esto prueba que $\leqq$ es continua. $\square$

El conjunto D que se define en la parte 2) del Teorema 1.40, se llama la *gráfica del casi orden* $\leqq$. En éstos términos, la equivalencia entre las partes 1) y 2) de dicho teorema, indica que un casi orden en X es continuo, si y sólo si su gráfica es un subconjunto cerrado de $X \times X$. Por esta razón a los casi órdenes continuos se les llama también *casi ordenes cerrados* ([15, p. 31]). En el caso particular en que $\leqq$ es el orden discreto en X, la equivalencia entre las partes 1) y 2), dice que un espacio X es T_2 si y sólo si el conjunto $\{(x, y) \in X \times X : x = y\}$, conocido como la diagonal de $X \times X$, es cerrado en $X \times X$.

De la prueba, en el Teorema 1.40, se sigue que $\leqq$ es continuo si y sólo si para cada $a, b \in X$ con $a \nleqq b$, existen vecindades ajenas N y N' de a y b, respectivamente, tales que N es creciente, N' es decreciente y para cada $(x, y) \in N \times N'$, sucede que $x \nleqq y$. Utilizaremos con frecuencia este hecho.

Recordemos ahora el siguiente resultado, conocido como el *Lema del Tubo*. Una demostración del mismo puede verse en [14, Lema 26.8, p. 191].

Lema 1.41. *Sean S y K dos espacios topológicos, con K compacto. Supongamos que $s_0 \in S$ y que U es un subconjunto abierto de $S \times K$ tal que $\{s_0\} \times K \subset U$. Entonces existe un subconjunto abierto V de S tal que*

$$\{s_0\} \times K \subset V \times K \subset U.$$

Corolario 1.42. *Sean S y K dos espacios topológicos, con K compacto. Supongamos que A es un subconjunto cerrado de S y que U es un subconjunto abierto de $S \times K$ tal que $A \times K \subset U$. Entonces existe un subconjunto abierto V de S tal que $A \times K \subset V \times K \subset U$.*

Demostración. Para cada $a \in A$, U es un abierto en $S \times K$ y, además, se tiene que $\{a\} \times K \subset A \times K \subset U$. Entonces, por el Lema 1.41, existe un abierto V_a de S tal que $\{a\} \times K \subset V_a \times K \subset U$. Sea $V = \bigcup_{a \in A} V_a$. Entonces V es un abierto en S tal que $A \times K \subset V \times K \subset U$. □

Cuando el casi orden $\leqq$ es continuo, tenemos el siguiente resultado, el cual generaliza la primera parte de la Proposición 1.36.

Proposición 1.43. *Sean X un espacio topológico y $\leqq$ un casi orden en X. Si $\leqq$ es continuo, entonces $P(A)$, $S(A)$ y $E(A)$ son cerrados en X, para cada subconjunto compacto A de X.*

Demostración. Supongamos que A es compacto. Para ver que $P(A)$ es cerrado en X, tomemos un elemento $b \in X - P(A)$. Hagamos

$$D = \{(x, y) \in X \times X : x \leqq y\} \quad \text{y} \quad U = (X \times X) - D.$$

Por la Proposición 1.40, D es cerrado en $X \times X$. Además $(\{b\} \times A) \cap D = \emptyset$, pues $b \notin P(A)$. Luego $\{b\} \times A \subset U$ y, como A es compacto, por el Lema 1.41, existe un abierto V en X tal que $\{b\} \times A \subset V \times A \subset U$. Notemos que V es un abierto en X con $b \in V \subset X - P(A)$. Luego $X - P(A)$ es abierto en X y, por tanto, $P(A)$ es cerrado en X. La prueba de que $S(A)$ es cerrado en X, es similar. Como $E(A) = P(A) \cap S(A)$ es una intersección de dos cerrados en X, $E(A)$ es cerrado en X. □

Si el orden $\leqq$ en X es el discreto, entonces la Propoisición 1.43 dice que si X es T_2 y $A \subset X$ es compacto, entonces A es cerrado en X.

En la Subsección 1.3.3, definimos los conjuntos $D(A)$ e $I(A)$, llamados la cerradura decreciente y la cerradura creciente de A en X, respectivamente. De las propiedades que probamos en dicha subsección y la Proposición 1.43, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.44. *Sean X un espacio topológico y $\leqq$ un casi orden en X. Si $\leqq$ es continuo, entonces $P(A) = D(A)$ y $S(A) = I(A)$, para cada subconjunto compacto A de X.*

Demostración. Supongamos que $A \subset X$ es compacto. Por la Proposición 1.43, $P(A)$ es decreciente y cerrado en X. Sea $B \subset X$ decreciente y cerrado en X tal que $A \subset B$. Si $x \in P(A)$, entonces $x \leqq a$, para algún $a \in A$. Como $A \subset B$, tenemos que $a \in B$. Entonces $x \in P(B) = B$, por lo que $P(A) \subset B$. De esta manera $P(A)$ es el menor subconjunto decreciente y cerrado de X que contiene a A. Como esta propiedad también la posee $D(A)$, por el Teorema 1.24, sucede que $P(A) = D(A)$. La prueba de que $S(A) = I(A)$ es similar. □

1.5. Axiomas de Separación

1.5.1. Definiciones

En la presente sección, la letra I denota el intervalo unitario $[0, 1]$ con su topología usual y su orden usual. Recordemos que un espacio topológico X es:

1) *regular* si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$;

2) *completamente regular* si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$, existe una función continua $f\colon X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$;

3) *normal* si para cada dos subconjuntos cerrados ajenos F_0 y F_1 de X, existen subconjuntos abiertos U_0 y U_1 de X tales que $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$ y $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.

Recordemos también que los espacios normales satisfacen el siguiente resultado, conocido como el *Lema de Urysohn*.

Teorema 1.45. *Un espacio topológico X es normal si y sólo si, para cada dos subconjuntos cerrados ajenos F_0 y F_1 de X, existe una función continua $f\colon X \to I$ tal que $f(F_0) \subset \{0\}$ y $f(F_1) \subset \{1\}$.*

Una prueba de lo anterior se encuentra en [4, Teorema 1.5.11, p. 41]. En la presente sección, basada en [24], presentamos axiomas de separación en un espacio topológico que admite una relación $\leqq$. Dichos axiomas son similares a los de regularidad, de regularidad completa y de normalidad que hemos presentado. Para describirlos, será importante considerar la siguiente familia de funciones.

Definición 1.46. *Supongamos que $\leqq$ y $\trianglelefteq$ son relaciones de orden en los conjuntos X y Y, respectivamente. Decimos que una función $f\colon X \to Y$* ***preserva el orden*** *si para cada $a, b \in X$ tales que $a \leqq b$, se sigue que $f(a) \trianglelefteq f(b)$.*

Si $\leqq$ y $\trianglelefteq$ son el orden discreto (ver Definición 1.12) en X y Y, respectivamente, entonces cualquier función $f\colon X \to Y$ preserva el orden.

Supongamos que X y Y son espacios topológicos con relaciones $\leqq$ y $\trianglelefteq$, respectivamente. Definimos

$$C(X,Y) = \{f\colon X \to Y : f \text{ es continua y preserva el orden}\}.$$

De nueva cuenta, si $\leqq$ y $\trianglelefteq$ son el orden discreto en X y Y, entonces $C(X,Y)$ es la familia de las funciones continuas de X en Y. Para los axiomas de separación que más nos van a interesar, será importante la familia $C(X,I)$. En la siguiente definición presentaremos los axiomas de separación correspondientes a las propiedades de regularidad y regularidad completa.

Definición 1.47. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Decimos que X es:*

1) ***monótono regular****, abreviado* ***MR****, si se cumplen las siguientes propiedades:*

   1.1) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y F es creciente, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es decreciente y V es creciente;*

1.2) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y F es decreciente, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es creciente y V es decreciente;*

2) ***MR′*** *si se cumplen las siguientes propiedades:*

2.1) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y F es creciente, existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$;*

2.2) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y F es decreciente, existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) \subset \{0\}$;*

3) ***fuertemente regular****, abreviado* ***SR****, si se cumplen las siguientes propiedades:*

3.1) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y $P(x) \cap F = \emptyset$, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es decreciente y V es creciente;*

3.2) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y $S(x) \cap F = \emptyset$, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $F \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es creciente y V es decreciente;*

4) ***SR′*** *si se cumplen las siguientes propiedades:*

4.1) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y $P(x) \cap F = \emptyset$, existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$;*

4.2) *para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$ y $S(x) \cap F = \emptyset$, existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) \subset \{0\}$;*

5) ***completamente $\leqq$-regular****, abreviado* ***CR****, si para cada $x \in X$ y cada subconjunto cerrado F de X tal que $x \notin F$, existen $f, g \in C(X, I)$ tales que $f(x) = 1$, $g(x) = 0$ y $f(F) \subset \{0\}$ o bien $g(F) \subset \{1\}$.*

La noción de espacio completamente $\leqq$-regular, se debe a L. Nachbin (ver [15]). Antes de indicar las relaciones entre las propiedades anteriores, presentaremos los axiomas de separación correspondientes a la normalidad.

Definición 1.48. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Decimos que X es:*

1) ***monótono normal***, *abreviado* ***MN***, *si para cada dos subconjuntos cerrados* F_0 *y* F_1 *de* X *tales que* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 *decreciente y* F_1 *creciente, existen subconjuntos abiertos* U_0 *y* U_1 *de* X *tales que* $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 *es decreciente y* U_1 *es creciente;*

2) ***MN'*** *si para cada dos subconjuntos cerrados* F_0 *y* F_1 *de* X *tales que* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 *decreciente y* F_1 *creciente, existe* $f \in C(X, I)$ *tal que* $f(F_0) \subset \{0\}$ *y* $f(F_1) \subset \{1\}$;

3) ***fuertemente normal***, *abreviado* ***SN*** *si para cada dos subconjuntos cerrados* F_0 *y* F_1 *de* X *tales que* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ *y* F_0 *es decreciente o bien* F_1 *es creciente, existen subconjuntos abiertos* U_0 *y* U_1 *de* X *tales que* $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 *es decreciente y* U_1 *es creciente;*

4) ***SN'*** *si para cada dos subconjuntos cerrados* F_0 *y* F_1 *de* X *tales que* $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ *y* F_0 *es decreciente o bien* F_1 *es creciente, existe* $f \in C(X, I)$ *tal que* $f(F_0) \subset \{0\}$ *y* $f(F_1) \subset \{1\}$.

A los espacios monótono normales, L. Nachbin los definió como espacios *normalmente ordenados* (ver [15, p. 33]).

Supongamos que X es un espacio topológico y que $\leqq$ es el orden discreto. Entonces cualquier subconjunto de X es tanto creciente como decreciente. Además, usando el Lema de Urysohn, se puede probar lo siguiente:

a) que las propiedades MN, MN', SN y SN' son equivalentes entre ellas y, más aún, equivalentes a la noción clásica de normalidad en X;

b) que las propiedades MR y SR son equivalentes y, más aún, equivalentes a la noción clásica de regularidad en X;

c) que las propiedades MR', SR' y CR son equivalentes entre ellas y, más aún, que son equivalentes a la noción clásica de regularidad completa en X.

En este sentido, al interrelacionar la topología con una estructura de orden, las propiedades dadas en las definiciones 1.47 y 1.48, extienden a las nociones clásicas de normalidad, regularidad y regularidad completa, a espacios topológicos con un casi orden definido.

Uno de los objetivos importantes de la presente sección será demostrar que las propiedades MN y MN' son equivalentes y, además, que las propiedades SN y SN' son equivalentes. Otro de los objetivos será estudiar los espacios compactos y T_2 con un casi orden continuo. Como veremos en el Teorema 1.70, dichos espacios satisfacen la propiedad presentada en la siguiente definición.

Definición 1.49. *Sea X un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Decimos que $\leqq$ es* ***fuertemente continuo*** *si para cualesquiera $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$, existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(b) = 0$ y $f(a) = 1$.*

La relación entre un casi orden fuertemente continuo y uno continuo, queda expresada en el siguiente resultado.

Teorema 1.50. *Todo casi orden fuertemente continuo es continuo.*

Demostración. Supongamos que el espacio topológico X posee un casi orden fuertemente continuo $\leqq$. Tomemos $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Como $\leqq$ es fuertemente continuo, existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(b) = 0$ y $f(a) = 1$. Hagamos

$$U = f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right]\right) \quad \text{y} \quad V = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right)\right).$$

Como f es continua U y V son abiertos en X. Además $a \in U$ y $b \in V$. Tomemos ahora $(x, y) \in U \times V$. Si $x \leqq y$ entonces, como f preserva el orden, $f(x) \leq f(y)$. Sin embargo, como $f(x) \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$ y $f(y) \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, resulta que $f(y) < f(x)$. De esta contradicción se deduce que, para cada $(x, y) \in U \times V$, se tiene que $x \nleqq y$. Por tanto $\leqq$ es continuo. $\square$

Si $\leqq$ es el orden discreto en X, entonces $\leqq$ es fuertemente continuo si y sólo si se cumple la siguiente condición:

($\star$) para cualesquiera $a, b \in X$ con $a \neq b$, existe una función continua $f\colon X \to I$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$.

El Teorema 1.50 dice además, que la condición ($\star$) implica el axioma T_2. A su vez, si X es $T_{3\frac{1}{2}}$, entonces X satisface ($\star$). Recordemos que un espacio topológico X es $T_{2\frac{1}{2}}$ si para cualesquiera $a, b \in X$ con $a \neq b$, existen abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $\mathrm{cl}_X(U) \cap \mathrm{cl}_X(V) = \emptyset$. Es claro que los espacios $T_{2\frac{1}{2}}$ son T_2. En [18, Ejemplo VII.5.2, p. 49] se muestra un espacio T_2 que no es $T_{2\frac{1}{2}}$. En [18, Proposición VII.6.7, p. 52], se prueba que los espacios

T_3 son $T_{2\frac{1}{2}}$ y, en [18, Ejemplo VII.6.8, p. 52], se da un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ que no es T_3. Entonces $T_{2\frac{1}{2}}$ es un axioma de separación entre los axiomas T_2 y T_3.

Usando el hecho de que una función $g\colon Y \to Z$ es continua si y sólo si $\mathrm{cl}_Y(g^{-1}(B)) \subset g^{-1}(\mathrm{cl}_Z(B))$, para cada $B \subset Z$, es fácil probar que si X satisface $(\star)$, entonces X es $T_{2\frac{1}{2}}$. En [18, Ejemplo VII.7.5, p. 62] se indica la construcción de J. Thomas de un espacio X que es T_3 pero no $T_{3\frac{1}{2}}$. En dicho espacio, existen dos puntos distintos a y b para los cuales toda función continua $f\colon X \to I$ es tal que $f(a) = f(b)$. Entonces X es un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ que no cumple $(\star)$. El espacio M que construyó A. Mysior y se presenta en [4, Ejemplo 1.5.9, p. 40], es también $T_{2\frac{1}{2}}$ y no cumple $(\star)$. Como se menciona en [4, p. 39], existen espacios X que son T_3 y tienen la propiedad de que cada función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ es constante. Dichos espacios son $T_{2\frac{1}{2}}$ y no cumple $(\star)$. También son espacios T_3 que no satisfacen $(\star)$.

El espacio mostrado en [18, Ejemplo VII.6.8, p. 52], que es $T_{2\frac{1}{2}}$ y no T_3, cumple $(\star)$. Esto muestra que existen espacios que cumplen $(\star)$ y no son T_3 ni $T_{3\frac{1}{2}}$.

De todo lo anterior, tenemos que la propiedad dada en $(\star)$ es, en cierta forma, un axioma de separación entre $T_{2\frac{1}{2}}$ y $T_{3\frac{1}{2}}$. En vista de esto, la noción de casi orden fuertemente continuo puede verse como una generalización del axioma de separación $T_{2\frac{1}{2}}$.

Terminamos la presente subsección con el siguiente resultado, que será útil más adelante.

Teorema 1.51. *Sean X un espacio topológico con un casi orden $\leqq$ y $f \in C(X, I)$. Entonces, para cualesquiera $r, s \in (0,1)$, si definimos:*

$$U = f^{-1}([0, r)) \quad y \quad V = f^{-1}((s, 1])$$

sucede que un U es abierto decreciente en X y V es un abierto creciente en X. Más aún, si $r \leq s$, entonces $U \cap V = \emptyset$.

Demostración. Tomemos $r, s \in (0,1)$. Como f es continua y los conjuntos $[0, r)$ y $(s, 1]$ son abiertos en I, entonces U y V son abiertos en X. Tomemos $x \in P(U)$. Entonces $x \leqq y$, para alguna $y \in U$. Como f preserva el orden,

$f(x) \leq f(y) < r$, así que $x \in U$. Esto prueba que U es decreciente. Supongamos ahora que $x \in S(V)$. Entonces $y \leqq x$, para alguna $y \in V$. Como f preserva el orden, $s < f(y) \leq f(x)$, así que $x \in V$. Esto prueba que V es creciente. Si tenemos que $r \leq s$, entonces $[0,r) \cap (s,1] = \emptyset$, por lo que:

$$U \cap V = f^{-1}([0,r)) \cap f^{-1}((s,1]) = f^{-1}([0,r) \cap (s,1]) = \emptyset.$$

□

1.5.2. Relaciones Fundamentales

En la presente subsección indicaremos las relaciones entre los axiomas de regularidad y los de normalidad presentados en las Definiciones 1.47 y 1.48.

Teorema 1.52. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces:*

1) *SN implica MN y SR implica MR;*
2) *SN′ implica MN′ y SR′ implica MR′;*
3) *SN′ implica SN y SR′ implica SR;*
4) *MN′ implica MN y MR′ implica MR.*

Demostración. Las pruebas de 1) y 2) son directas de las Definiciones 1.47 y 1.48. Mostremos 3). Supongamos primero que X es SN'. Consideremos dos subconjuntos cerrados F_0 y F_1 de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ y F_0 es decreciente o F_1 es creciente. Como X es SN', existe $f \in C(X,I)$ tal que $f(F_0) \subset \{0\}$ y $f(F_1) \subset \{1\}$. Hagamos

$$U_0 = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right)\right) \quad \text{y} \quad U_1 = f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, 1\right]\right).$$

Por el Teorema 1.51, U_0 es un abierto decreciente en X, U_1 es un abierto creciente en X y $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Además $F_0 \subset f^{-1}(\{0\}) \subset U_0$ y $F_1 \subset f^{-1}(\{1\}) \subset U_1$. Por tanto, X es SN. La prueba de que SR' implica SR utiliza las mismas ideas. Lo mismo sucede para la prueba de 4). □

Cuando el casi orden es semicontinuo, se tienen las relaciones indicadas en el siguiente resultado.

Teorema 1.53. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$ que es semicontinuo. Entonces:*

1) *SN implica SR y MN implica MR;*

2) *SN′ implica SR′ y MN′ implica MR′;*

3) *MR implica que $\leqq$ es continuo;*

4) *MR′ implica que $\leqq$ es fuertemente continuo.*

Demostración. Supongamos que X es SN. Sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$ y $P(x) \cap F = \emptyset$. Como $\leqq$ es semicontinuo, $P(x)$ es cerrado en X. Entonces $P(x)$ y F son cerrados ajenos en X y $P(x)$ es decreciente. Como X es SN, existen subconjuntos abiertos U_0 y U_1 de X tales que $P(x) \subset U_0$, $F \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente.

Supongamos ahora que $x \in X$ y que F es un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$ y $S(x) \cap F = \emptyset$. Como $\leqq$ es semicontinuo, $S(X)$ es cerrado en X. Entonces F y $S(x)$ son cerrados ajenos en X y $S(x)$ es creciente. Como X es SN, existen subconjuntos abiertos U_0 y U_1 de X tales que $F \subset U_0$, $S(x) \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Esto prueba que si X es SN, entonces X satisface las propiedades 3.1) y 3.2) de la Definición 1.47. Luego X es SR.

Supongamos ahora que X es MN. Sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tales que $x \notin F$ y F es creciente. Si existe $y \in P(x) \cap F$, entonces $y \leqq x$ y, como F es creciente, $x \in F$. Esto es una contradicción, así que $P(x) \cap F = \emptyset$. Por tanto, $P(x)$ y F son cerrados ajenos, con $P(x)$ decreciente y F creciente. Como X es MN, existen subconjuntos abiertos U_0 y U_1 de X tales que $P(x) \subset U_0$, $F \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente.

Supongamos ahora que $x \in X$ y que F es un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin F$ y F es decreciente. Si existe $y \in S(x) \cap F$, entonces $x \leqq y$ y, como F es decreciente, $x \in F$. Esto es una contradicción, así que $S(x) \cap F = \emptyset$. Por tanto, F y $S(x)$ son cerrados ajenos, con F decreciente y $S(x)$ creciente. Como X es MN, existen subconjuntos abiertos U_0 y U_1 de X tales que $F \subset U_0$, $S(x) \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Esto prueba que si X es MN, entonces X satisface las propiedades 1.1) y 1.2) de la Definición 1.47. Luego X es MR. Esto termina la prueba de 1).

Para probar 2) supongamos que X es SN'. Sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tales que $x \notin F$ y $P(x) \cap F = \emptyset$. Entonces $P(x)$ y F son cerrados ajenos con $P(x)$ decreciente. Como X es SN', existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(P(x)) \subset \{0\}$ y $f(F) \subset \{1\}$. En particular $f(x) = 0$, pues $x \in P(x)$.

Tomemos ahora $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tales que $x \notin F$ y $S(x) \cap F = \emptyset$. Entonces F y $S(x)$ son cerrados ajenos con $S(x)$ creciente. Como X es SN', existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(S(x)) \subset \{1\}$. En particular, $f(x) = 1$, pues $x \in S(x)$. Esto prueba que si X es SN', entonces X satisface las propiedades 4.1) y 4.2) de la Definición 1.47. Luego X es SR'.

Supongamos ahora que X es MN'. Sean $x \in X$ y F un subconjunto cerrado de X tales que $x \notin F$ y F es creciente. Entonces $P(x) \cap F = \emptyset$, por lo que $P(x)$ y F son dos cerrados ajenos, con $P(x)$ decreciente y F creciente. Como X es MN', existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(P(x)) \subset \{0\}$ y $f(F) \subset \{1\}$. Si, en su lugar, suponemos que F es decreciente, entonces $S(x) \cap F = \emptyset$. Luego F y $S(x)$ son dos cerrados ajenos, con F decreciente y $S(x)$ creciente. Entonces existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(F) \subset \{0\}$ y $f(S(x)) \subset \{1\}$. Esto implica que X satisface las propiedades 2.1) y 2.2) de la Definición 1.47. Luego X es MR'. Esto termina la prueba de 2).

Para probar 3), supongamos que X es MR. Sean $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Entonces a es un elemento de X y $P(b)$ es un subconjunto cerrado de X tales que $a \notin P(b)$ y $P(b)$ es decreciente. Como X es MR, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $a \in U$, $P(b) \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es creciente y V es decreciente. Tomemos ahora $(x, y) \in U \times V$. Si $x \leqq y$ entonces, como $y \in V$ y V es decreciente, sucede que $x \in V$. Luego $U \cap V \neq \emptyset$. En vista de que esto es una contradicción, resulta que $x \nleqq y$. Esto prueba que $\leqq$ es continuo y, así, 3) se cumple.

Supongamos, por último, que X es MR'. Sean $a, b \in X$ tales que $a \nleqq b$. Entonces $a \in X$ y $P(b)$ es un subconjunto cerrado de X tales que $a \notin P(b)$ y $P(b)$ es decreciente. Como X es MR', existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(a) = 1$ y $f(P(b)) \subset \{0\}$. En particular, $f(b) = 0$, pues $b \in P(b)$. Esto prueba que $\leqq$ es fuertemente continuo y, así, 4) se cumple. $\square$

Si $\leqq$ es el orden discreto en X, entonces la propiedad 1) del Teorema 1.53, dice que los espacios T_4 son T_3, la propiedad 2) dice que los espacios T_4 son $T_{3\frac{1}{2}}$, la propiedad 3) dice que los espacios T_3 son T_2 y, finalmente, la propiedad 4) dice que los espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ satisfacen la propiedad ($\star$) que dimos en la página 26.

Otras propiedades que se satisfacen son las que se mencionan en el siguiente resultado.

Teorema 1.54. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *si X es SR y MN, entonces X es SN;*

2) *si $\leqq$ es semicontinuo y X es SN, entonces X es SR y MN;*

3) *si X es SR' y MN', entonces X es SN';*

4) *si $\leqq$ es semicontinuo y X es SN', entonces X es SR' y MN'.*

Demostración. Supongamos que X es SR y MN. Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Consideremos que F_0 es decreciente. Entonces $x \notin F_1$ y $P(x) \cap F_1 = \emptyset$, para cada $x \in F_0$. Como X es SR, existen abiertos U_x y V_x en X tales que $x \in U_x$, $F_1 \subset V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$, U_x es decreciente y V_x es creciente. Como $\{x\} \subset U_x$, tenemos que

$$x \in P(x) \subset P(U_x) = U_x \subset X - V_x \subset X - F_1.$$

Hagamos $U = \bigcup_{x \in F_0} U_x$. Entonces U es abierto en X y, además, es una unión de conjuntos decrecientes, por lo que U es decreciente. Luego $X - U$ es cerrado y creciente. Además, como para cada $x \in F_0$ tenemos que $x \in U_x \subset X - F_1$, al tomar la unión sobre todos los elementos de F_0, resulta que $F_0 \subset U \subset X - F_1$. De lo anterior tenemos que F_0 y $X - U$ son dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap (X - U) = \emptyset$, F_0 es decreciente y $X - U$ es creciente. Como X es MN, existen abiertos U_0 y U_1 en X tales que $F_0 \subset U_0$, $X - U \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Notemos que $F_1 \subset X - U \subset U_1$.

Si F_1 es creciente entonces, aplicando argumentos duales, podemos encontrar abiertos U_0 y U_1 en X tales que $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Entonces X es SN. Esto prueba 1).

Para ver 3) supongamos que X es SR' y MN'. Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Consideremos que F_0 es decreciente. Entonces $x \notin F_1$ y $P(x) \cap F_1 = \emptyset$, para cada $x \in F_0$. Como X es SR', existe $f_x \in C(X, I)$ tal que $f_x(x) = 0$ y $f_x(F_1) \subset \{1\}$. Hagamos

$$U_x = f_x^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{3}\right)\right), \quad \text{para cada } x \in F_0$$

y $U = \bigcup_{x \in F_0} U_x$. Por el Teorema 1.51, U_x es abierto en X y decreciente. Entonces U es abierto y decreciente, por lo que $X - U$ es cerrado y creciente. Además, $x \in U_x \subset X - F_1$, para cada $x \in F_0$ por lo que al tomar la unión sobre todos los elementos de F_0, tenemos que $F_0 \subset U \subset X - F_1$. De esta manera, F_0 y $X - U$ son dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap (X - U) = \emptyset$, F_0 es decreciente y $X - U$ es creciente. Como X es MN', existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(F_0) \subset \{0\}$ y $f(X - U) \subset \{1\}$. Puesto que $F_1 \subset X - U$, sucede que $f(F_1) \subset \{1\}$.

Si suponemos que F_1 es creciente, aplicando argumentos duales, podemos encontrar $f \in C(X, I)$ tal que $f(F_0) \subset \{0\}$ y $f(F_1) \subset \{1\}$. Entonces X es SN'. Esto prueba 3).

Supongamos ahora que $\leqq$ es semicontinuo. Si X es SN entonces, por la parte 1) del Teorema 1.52, X es MN y, por la parte 1) del Teorema 1.53, X es SR. Entonces X es SR y MN. Esto prueba 2). Si X es SN' entonces, por la parte 2) del Teorema 1.52, X es MN' y, por la parte 2) del Teorema 1.53, X es SR'. Luego X es SR' y MN'. Esto prueba 4). □

Corolario 1.55. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden semicontinuo $\leqq$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *X es SN si y sólo si X es SR y MN;*

2) *X es SN' si y sólo si X es SR' y MN'.*

1.5.3. Formas Alternativas y Otros Resultados

En el siguiente resultado vemos una forma alternativa de considerar la propiedad SN.

Teorema 1.56. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X es SN;*

2) *si F_0 y F_1 son subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ y F_0 es decreciente o bien F_1 es creciente, existen subconjuntos cerrados F'_0 y F'_1 de X tales que F'_0 es decreciente, F'_1 es creciente, $X = F'_0 \cup F'_1$, $F_1 \cap F'_0 = \emptyset$ y $F_0 \cap F'_1 = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X es SN. Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 es decreciente o bien F_1 es creciente. Entonces existen abiertos U_0 y U_1 en X tales que $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Sean $F'_0 = X - U_1$ y $F'_1 = X - U_0$. Entonces F'_0 y F'_1 son cerrados en X tales que F'_0 es decreciente, F'_1 es creciente, $X = (X - U_0) \cup (X - U_1) = F'_0 \cup F'_1$, $F_1 \cap F'_0 = \emptyset$ y $F_0 \cap F'_1 = \emptyset$. Esto prueba que 1) implica 2).

Supongamos que se cumple 2). Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 es decreciente o bien F_1 es creciente. Entonces existen subconjuntos cerrados F'_0 y F'_1 de X tales que F'_0 es decreciente, F'_1 es creciente, $X = F'_0 \cup F'_1$, $F_1 \cap F'_0 = \emptyset$ y $F_0 \cap F'_1 = \emptyset$. Sean $U_0 = X - F'_1$ y $U_1 = X - F'_0$. Entonces U_0 y U_1 son abiertos en X tales que U_0 es decreciente, U_1 es creciente, $F_0 \subset X - F'_1 = U_0$, $F_1 \subset X - F'_0 = U_1$ y $\emptyset = (X - F'_1) \cap (X - F'_0) = U_0 \cap U_1$. Esto prueba que 2) implica 1). □

Usando las mismas ideas que en el teorema anterior, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 1.57. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X es MN;*

2) *si F_0 y F_1 son subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 es decreciente y F_1 es creciente, existen subconjuntos cerrados F'_0 y F'_1 de X tales que F'_0 es decreciente, F'_1 es creciente, $X = F'_0 \cup F'_1$, $F_1 \cap F'_0 = \emptyset$ y $F_0 \cap F'_1 = \emptyset$.*

En la prueba del siguiente resultado utilizamos la cerradura decreciente $D(A)$ y la cerradura creciente $I(A)$, de un conjunto A, como las definimos en la Subsección 1.3.3.

Teorema 1.58. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X es MN;*

2) *si F y V son subconjuntos de X tales que F es cerrado y decreciente en X, V es abierto y decreciente en X y $F \subset V$, entonces existe un subconjunto W de X, abierto y decreciente en X, tal que $F \subset W \subset D(W) \subset V$;*

3) *si F y V son subconjuntos de X tales que F es cerrado y creciente en X, V es abierto y creciente en X y $F \subset V$, entonces existe un subconjunto W de X, abierto y creciente en X, tal que $F \subset W \subset I(W) \subset V$.*

Demostración. Supongamos que X es MN. Sean $F, V \subset X$ tales que F es cerrado y decreciente en X, V es abierto y decreciente en X y $F \subset V$. Entonces F y $X - V$ son subconjuntos cerrados de X tales que $F \cap (X - V) = \emptyset$, F es decreciente y $X - V$ es creciente. Esto implica, pues X es MN, que existen subconjuntos abiertos W y U en X tales que $F \subset W$, $X - V \subset U$, $W \cap U = \emptyset$, W es decreciente y V es creciente. Luego $W \subset X - U \subset V$. Esto implica que $X - U$ es un subconjunto cerrado y decreciente de X que contiene a W. Luego $D(W) \subset X - U$. De esta manera $F \subset W \subset D(W) \subset X - U \subset V$. Esto muestra que 1) implica 2).

Supongamos ahora que se cumple 2). Sean $F, V \subset X$ tales que F es cerrado creciente en X, V es abierto creciente en X y $F \subset V$. Entonces $X - V$ y $X - F$ son subconjuntos de X tales que $X - V$ es cerrado decreciente, $X - F$ es abierto creciente y $X - V \subset X - F$. Esto implica, por 2), que existe un subconjunto U de X, abierto y decreciente en X, tal que $X - V \subset U \subset D(U) \subset X - F$. Entonces $F \subset X - D(U) \subset X - U \subset V$. Hagamos $W = X - D(U)$. Como $D(U)$ es cerrado y decreciente en X, entonces W es abierto y creciente en X. Además, puesto que $X - U$ es cerrado y creciente en X tal que $W \subset X - U$, tenemos que $I(W) \subset X - U$. Esto muestra que $F \subset W \subset I(W) \subset X - U \subset V$. Por tanto 2) implica 3).

Ahora supongamos que se cumple 3). Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 es decreciente y F_1 es creciente. Entonces $F_1 \subset X - F_0$, F_1 es cerrado creciente en X y $X - F_0$ es abierto creciente en X. Por 3), existe un subconjunto W de X, abierto y creciente en X, tal que $F_1 \subset W \subset I(W) \subset X - F_0$. Sean $U_0 = X - I(W)$ y $U_1 = W$. Entonces U_0 y U_1 son abiertos en X, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Luego X es MN. Esto prueba que 3) implica 1). $\square$

Si $\leqq$ es el orden discreto en X entonces el Teorema 1.58 dice que un espacio X es normal si y sólo si, para cada subconjunto cerrado F de X y cada subconjunto abierto V de X tal que $F \subset V$, existe un subconjunto abierto W de X tal que $F \subset W \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset V$.

Utilizando las mismas ideas que las dadas en la prueba del Teorema 1.58 tenemos el siguiente resultado, el cual hasta donde hemos podido investigar, aparece por primera vez en la literatura.

Teorema 1.59. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *si F_0 y F_1 son dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ y F_0 es decreciente, entonces existen subconjuntos abiertos U_0 y U_1 de X tales que $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente;*

2) *si F y V son subconjuntos de X tales que F es cerrado y decreciente en X, V es abierto en X y $F \subset V$, entonces existe un subconjunto W de X, abierto y decreciente en X, tal que $F \subset W \subset D(W) \subset V$;*

3) *si F y V son subconjuntos de X tales que F es cerrado en X, V es abierto y creciente en X y $F \subset V$, entonces existe un subconjunto W de X, abierto y creciente en X, tal que $F \subset W \subset I(W) \subset V$.*

Demostración. Supongamos que se cumple 1). Sean $F, V \subset X$ tales que F es cerrado y decreciente en X, V es abierto en X y $F \subset V$. Entonces F y $X - V$ son cerrados en X tales que $F \cap (X - V) = \emptyset$ y F es decreciente. Por 1), existen abiertos U_0 y U_1 en X tales que $F \subset U_0$, $X - V \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Hagamos $W = U_0$. Entonces $W \subset X - U_1 \subset V$. Esto implica que $X - U_1$ es un subconjunto cerrado y decreciente de X que contiene a W. Luego $D(W) \subset X - U_1$. De esta manera $F \subset W \subset D(W) \subset X - U_1 \subset V$. Esto muestra que 1) implica 2).

Supongamos que se cumple 2). Sean $F, V \subset X$ tales que F es cerrado en X, V es abierto y creciente en X y $F \subset V$. Entonces $X - V \subset X - F$,

$X - V$ es cerrado y decreciente en X y $X - F$ es abierto en X. Por 2) existe un subconjunto U de X, abierto y decreciente en X, tal que $X - V \subset U \subset D(U) \subset X - F$. Entonces $F \subset X - D(U) \subset X - U \subset V$. Hagamos $W = X - D(U)$. Como $D(U)$ es cerrado y decreciente en X, W es abierto y creciente en X. Además, puesto que $X - U$ es cerrado y creciente en X tal que $W \subset X - U$, tenemos que $I(W) \subset X - U$. Esto muestra que $F \subset W \subset I(W) \subset X - U \subset V$. Por tanto, 2) implica 3).

Supongamos que se cumple 3). Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ y F_0 es decreciente. Entonces $F_1 \subset X - F_0$, F_1 es cerrado en X y $X - F_0$ es abierto y creciente en X. Luego, por 3), existe $W \subset X$, abierto creciente en X tal que $F_1 \subset W \subset I(W) \subset X - F_0$. Luego, $F_0 \subset X - I(W)$, $F_1 \subset W$, $X - I(W)$ y W son abiertos en X, $(X - I(W)) \cap W = \emptyset$, $X - I(W)$ es decreciente y W es creciente. Haciendo $U_0 = X - I(W)$ y $U_1 = W$, deducimos que 3) implica 1). □

De manera similar, también tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.60. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *si F_0 y F_1 son dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ y F_1 es creciente, entonces existen subconjuntos abiertos U_0 y U_1 de X tales que $F_0 \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente;*

2) *si F y V son subconjuntos de X tales que F es cerrado en X, V es abierto y decreciente en X y $F \subset V$, entonces existe un subconjunto W de X, abierto y decreciente en X, tal que $F \subset W \subset D(W) \subset V$;*

3) *si F y V son subconjuntos de X tales que F es cerrado y creciente en X, V es abierto en X y $F \subset V$, entonces existe un subconjunto W de X, abierto y creciente en X, tal que $F \subset W \subset I(W) \subset V$.*

Supongamos que X es SN. Tomemos dos subconjuntos cerrados F_0 y F_1 de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Si F_0 es decreciente, se cumple la propiedad 1) del Teorema 1.59. Por tanto, también se cumplen las propiedades 2) y 3) del Teorema 1.59. Si en lugar de suponer que F_0 es decreciente, resulta que F_1 es creciente, entonces se cumple la propiedad 1) del Teorema 1.60. Luego también se cumplen las propiedades 2) y 3) de dicho teorema.

Terminamos la presente subsección con dos resultados, uno válido en los espacios MR y el otro en los espacios MR'.

Teorema 1.61. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Si X es MR, entonces para cualesquiera par de subconjuntos cerrados A y B de X tales que $A \cap B = \emptyset$, A es compacto y B es creciente, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es decreciente y V es creciente. Si B es decreciente, entonces U es creciente y V decreciente.*

Demostración. Supongamos que X es MR y que B es creciente. Si existe $a \in A$ tal que $P(a) \cap B \neq \emptyset$, entonces $b \leqq a$, para algún $b \in B$. Como B es creciente, esto implica que $a \in B$. Luego $A \cap B \neq \emptyset$. Puesto que eso es una contradicción, resulta que $P(a) \cap B = \emptyset$, para cada $a \in A$.

Notemos que para cada $a \in A$ se tiene que $a \notin B$. Esto implica, pues X es MR, que existen abiertos U_a y V_a en X tales que $a \in U_a$, $B \subset V_a$, $U_a \cap V_a = \emptyset$, U_a es decreciente y V_a es creciente. Por tanto, $\{U_a \colon a \in A\}$ es una familia de abiertos cuya unión contiene al compacto A. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}$. Sean:

$$U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n} \quad \text{y} \quad V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \cdots \cap V_{a_n}. \tag{1.5.1}$$

Entonces U es una unión de abiertos decrecientes, por lo que U es abierto y decreciente. Como V es una intersección finita de abiertos crecientes, V es abierto y creciente. Además $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Esto termina la prueba, si B es creciente.

Supongamos ahora que B es decreciente. Entonces $S(a) \cap B = \emptyset$, para cada $a \in A$. También sucede que $a \notin B$, para niguna $a \in A$, por lo que existen abiertos U_a y V_a en X tales que $a \in U_a$, $B \subset V_a$, $U_a \cap V_a = \emptyset$, U_a es creciente y V_a es decreciente. Siguiendo la prueba del caso anterior, y definiendo U y V como en (1.5.1), tenemos que U y V son abiertos en X tales que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es creciente y V es decreciente. Esto termina la demostración. □

Teorema 1.62. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Si X es MR' entonces, para cualesquiera par de subconjuntos cerrados A y B de X tales que $A \cap B = \emptyset$, A es compacto y B es creciente, existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$. Si B es decreciente, entonces existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(A) \subset \{1\}$ y $f(B) \subset \{0\}$.*

Demostración. Supongamos que B es creciente. Como para cada $a \in A$, tenemos que $a \notin B$, existe $f_a \in C(X, I)$ tal que $f_a(a) = 0$ y $f_a(B) \subset \{1\}$. Como f_a es continua y $f_a(a) = 0$, existe un abierto U_a en X tal que $a \in U_a$ y $f_a(U_a) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Entonces $\{U_a \colon a \in A\}$ es una familia de abiertos en X, cuya unión contiene al compacto A. Por tanto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que si $U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}$, entonces $A \subset U$.

Consideremos la función $g \colon X \to I$ definida como:

$$g(x) = \text{mín}\left\{f_{a_1}(x), f_{a_2}(x), \ldots, f_{a_n}(x)\right\}.$$

Como las funciones $f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_n}$ son continuas, g es una función continua. Además, si $x \in B$, entonces $f_{a_i}(x) = 1$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo que $g(x) = 1$. Tomemos ahora $x \in A$. Entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ tal que $x \in U_{a_i}$, por lo que $f_{a_i}(x) < \frac{1}{2}$. Esto implica que $g(x) < \frac{1}{2}$, siempre que $x \in A$.

Definimos ahora $f \colon X \to I$ como:

$$f(x) = 2\,\text{máx}\left\{0, g(x) - \frac{1}{2}\right\}.$$

Entonces f es una función continua tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$. Tomemos ahora $x, y \in X$ tales que $x \leqq y$. Sean $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $g(x) = f_{a_i}(x)$ y $g(y) = f_{a_j}(y)$. Como f_{a_j} preserva el orden, tenemos que:

$$g(x) = f_{a_i}(x) \leq f_{a_j}(x) \leq f_{a_j}(y) = g(y).$$

Luego $g(x) \leq g(y)$, por lo que $g(x) - \frac{1}{2} \leq g(y) - \frac{1}{2}$ y también $2g(x) - 1 \leq 2g(y) - 1$. Supongamos ahora que $g(x) - \frac{1}{2} > 0$. Entonces $g(y) - \frac{1}{2} > 0$, por lo que $f(x) = 2g(x) - 1$ y $f(y) = 2g(y) - 1$. Luego $f(x) \leq f(y)$. Supongamos ahora que $g(x) - \frac{1}{2} \leq 0$. Entonces $f(x) = 0$ y, además, $f(x) \leq f(y)$. Esto muestra que f preserva el orden. Luego $f \in C(X, I)$.

Si B es decreciente, siguiendo una demostración similar, podemos obtener una función $f \in C(X, I)$ tal que $f(A) \subset \{1\}$ y $f(B) \subset \{0\}$. $\square$

1.5.4. El Lema de Urysohn Generalizado

Estamos en condiciones para probar que, en un espacio topológico X con un casi orden, las propiedades MN y MN' son equivalentes. Esto implica que el Lema de Urysohn es válido en un contexto más general. En la prueba del siguiente resultado, utilizaremos la notación $D(A)$ para representar a la cerradura creciente de un subconjunto A de X (ver Subsección 1.3.3).

Teorema 1.63. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces X es MN si y sólo si X es MN'.*

Demostración. Notemos que, por la parte 4) del Teorema 1.52, MN' implica MN. Falta probar que MN implica MN'. Supongamos, por tanto, que X es MN. Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 es decreciente y F_1 es creciente. Definamos $V(0) = \emptyset$ y $V(1) = X - F_1$. Notemos que $D(V(0)) = D(\emptyset) = \emptyset$, así que $V(0)$ y $V(1)$ satisfacen las siguientes propiedades:

i) $V(0)$ y $V(1)$ son subconjuntos abiertos y decrecientes de X;

ii) $D(V(0)) \subset V(1)$;

iii) $F_0 \subset V(1)$;

iv) $V(0) = \emptyset$ y $V(1) = X - F_1$.

Supongamos que para un número natural n y cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$ tenemos construido un subconjunto $V\left(\frac{k}{2^n}\right)$ de X de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $V\left(\frac{k}{2^n}\right)$ es abierto y decreciente en X, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$;

b) $D\left(V\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \subset V\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$;

c) $F_0 \subset V\left(\frac{k}{2^n}\right)$, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$;

d) $V(0) = \emptyset$ y $V(1) = X - F_1$.

Por las propiedades i)-iv) los conjuntos $V(0)$ y $V(1)$ satisfacen los enunciados a) a d) con $n = 1$. Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\}$ vamos ahora a construir un subconjunto $V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ de X de manera que se cumplen las siguientes propiedades:

a') $V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ es abierto y decreciente en X, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\}$;

b') $D\left(V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) \subset V\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$;

c′) $F_0 \subset V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}$;

d′) $V(0) = \emptyset$ y $V(1) = X - F_1$.

Tomemos entonces $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\}$. Supongamos primero que k es par. Entonces $k = 2p$, para algún $p \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$. En este caso definimos:

$$V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{p}{2^n}\right).$$

En particular $V(0) = \emptyset$ y $V(1) = X - F_1$. Supongamos ahora que $k \neq 1$ y que k es impar. Entonces $k = 2p + 1$, para algún $p \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$. Por la propiedad *b*) tenemos que $D\left(V\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \subset V\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$. Además $D\left(V\left(\frac{p}{2^n}\right)\right)$ es cerrado decreciente en X y, por a), $V\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$ es abierto decreciente en X. Entonces como X es MN, por el Teorema 1.58 existe un subconjunto W_p de X, abierto decreciente en X, tal que:

$$D\left(V\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \subset W_p \subset D(W_p) \subset V\left(\frac{p+1}{2^n}\right). \tag{1.5.2}$$

En este caso definimos:

$$V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = W_p.$$

Ahora supongamos que $k = 1$. Por c), $F_0 \subset V\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Además F_0 es cerrado decreciente en X y, por a), $V\left(\frac{1}{2^n}\right)$ es abierto decreciente en X. Como X es MN, utilizando de nuevo el Teorema 1.58, deducimos que existe un subconjunto W_0 de X, abierto decreciente en X, tal que:

$$F_0 \subset W_0 \subset D(W_0) \subset V\left(\frac{1}{2^n}\right). \tag{1.5.3}$$

En este caso definimos:

$$V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = W_0.$$

Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\}$, hemos así construido un subconjunto $V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)$ de X. Es claro que las propiedades *a′*) y *d′*) se cumplen. Para ver que se cumple *c′*) notemos que $F_0 \subset W_0 = V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Tomemos ahora $k \in$

$\{2, 3, \ldots, 2^{n+1}\}$. Si k es par, entonces $k = 2p$, para algún $p \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Luego, por c),

$$F_0 \subset V\left(\frac{p}{2^n}\right) = V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).$$

Si k es impar, entonces $k = 2p + 1$, para algún $p \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$. Luego, por c) y (1.5.2),

$$F_0 \subset V\left(\frac{p}{2^n}\right) \subset D\left(V\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \subset W_p = V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right).$$

Entonces la propiedad c') se cumple. Es claro que la propiedad b') se cumple para $k = 0$. También se cumple para $k = 1$ pues, por (1.5.3),

$$D\left(V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = D(W_0) \subset V\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Tomemos ahora $k \in \{2, 3, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$. Si k es par, entonces $k = 2p$, para algún $p \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$. Luego $k + 1$ es impar diferente de 1 y, además, $k + 1 = 2p + 1$, por lo que

$$V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{p}{2^n}\right) \quad \text{y} \quad V\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) = W_p.$$

Luego, por (1.5.2),

$$D\left(V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) = D\left(V\left(\frac{p}{2^n}\right)\right) \subset W_p = V\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right).$$

Ahora supongamos que k es impar. Entonces $k = 2p + 1$, para algún $p \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$. Luego $k + 1$ es par y, además, $k + 1 = 2(p + 1)$. Entonces

$$V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = W_p \quad \text{y} \quad V\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{p+1}{2^n}\right).$$

Luego, por (1.5.2),

$$D\left(V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)\right) = D(W_p) \subset V\left(\frac{p+1}{2^n}\right) = V\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right).$$

Entonces la propiedad b') se cumple. Con esto probamos que la familia

$$\left\{V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) : k \in \{0, 1, \ldots, 2^{n+1}\}\right\}$$

satisface las propiedades $a')$-$d')$. Consideremos ahora el conjunto de los racionales diádicos en $[0,1]$

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n} \colon n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\} \right\}.$$

De acuerdo a lo que hemos realizado se deduce, por inducción, que para cada $d \in D$, existe un subconjunto $V(d)$ de X de modo que la familia $\{V(d) \colon d \in D\}$ satisface las siguientes propiedades:

$a^\star)$ $V(d)$ es abierto y decreciente en X, para cada $d \in D$;

$b^\star)$ $D(V(d)) \subset V(d')$, para cada $d, d' \in D$ con $d < d'$;

$c^\star)$ $F_0 \subset V(d)$, para cada $d \in D - \{0\}$;

$d^\star)$ $V(0) = \emptyset$ y $V(1) = X - F_1$.

Consideremos ahora la función $f \colon X \to I$ definida, para $x \in X$, como:

$$f(x) = \sup\{d \in D \colon x \in X - V(d)\}.$$

Para ver que f es en realidad una función, tomemos $x \in X$. Como $V(0) = \emptyset$, sucede que $x \in X - V(0)$. Luego $0 \in \{d \in D \colon x \in X - V(d)\}$ y entonces, $\{d \in D \colon x \in X - V(d)\}$ es un subconjunto del intervalo $[0,1]$ acotado superiormente por 1. Tiene, por tanto, sentido considerar el supremo de dicho conjunto. Luego $f(x)$ está bien definido y es un elemento del intervalo $[0,1]$. Esto muestra que f, es en efecto, una función de X en $[0,1]$.

Supongamos que $x \in F_0$. Por $c^\star)$, $x \in V(d)$ para cada $d \in D - \{0\}$. Luego $\{d \in D \colon x \in X - V(d)\} = \{0\}$, así que $f(x) = 0$. Ahora supongamos que $x \in F_1$. Como $V(1) = X - F_1$, tenemos que $x \in X - V(1)$. Luego $1 \in \{d \in D \colon x \in X - V(d)\}$. Por tanto $f(x) = 1$. Esto muestra que $f(F_0) \subset \{0\}$ y $f(F_1) \subset \{1\}$.

Consideremos ahora $x, y \in X$ tales que $x \leqq y$. Tomemos $d \in D$ tal que $x \in X - V(d)$. Si $y \in V(d)$ entonces, como $V(d)$ es decreciente y $x \leqq y$, resulta que $x \in V(d)$. Esto es una contradicción, así que $y \in X - V(d)$. Con esto tenemos que:

$$\{d \in D \colon x \in X - V(d)\} \subset \{d \in D \colon y \in X - V(d)\}.$$

Al tomar el supremo, sucede que $f(x) \leq f(y)$. Esto muestra que f preserva el orden.

Ahora vamos a probar que f es continua. Para esto, tomemos $a \in (0,1)$. Si $x \in f^{-1}((a,1])$, entonces $f(x) > a$. Luego existe $d_0 \in D$ tal que $d_0 > a$ y $x \in X - V(d_0)$. Como D es denso en I, existe $d_1 \in D \cap (a, d_0)$. Ahora bien, puesto que $D(V(d_1))$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a $V(d_1)$, sucede que $\mathrm{cl}_X(V(d_1)) \subset D(V(d_1))$. Luego, por $b^\star$):

$$\mathrm{cl}_X(V(d_1)) \subset D(V(d_1)) \subset V(d_0)$$

y, como $x \in X - V(d_0)$, deducimos que $x \in X - \mathrm{cl}_X(V(d_1))$. Esto prueba que:

$$f^{-1}((a,1]) \subset \bigcup \{X - \mathrm{cl}_X(V(d)) : d \in D \text{ y } d > a\}\,.$$

Consideremos ahora que $x \in \bigcup \{X - \mathrm{cl}_X(V(d)) : d \in D \text{ y } d > a\}$. Entonces existe $d \in D - \{1\}$ tal que $d > a$ y $x \in X - \mathrm{cl}_X(V(d))$. Como D es denso en I, existe $d' \in D \cap (a, d)$. Luego $a < d' < d$ y, usando $b^\star$), sucede que $V(d') \subset D(V(d')) \subset V(d) \subset \mathrm{cl}_X(V(d))$. Luego $X - \mathrm{cl}_X(V(d)) \subset X - V(d')$, por lo que $x \in X - V(d')$. Esto implica que $f(x) \geq d' > a$, de donde

$$\bigcup \{X - \mathrm{cl}_X(V(d)) : d \in D \text{ y } d > a\} \subset f^{-1}((a,1]).$$

De todo esto se tiene que

$$f^{-1}((a,1]) = \bigcup \{X - \mathrm{cl}_X(V(d)) : d \in D \text{ y } d > a\}\,.$$

Por consiguiente, $f^{-1}((a,1])$ es abierto en X. Ahora vamos a probar que el conjunto $f^{-1}([0,a))$ es abierto en X, haciendo ver que:

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup \{V(d) \colon d \in D \text{ y } d < a\}\,.$$

Tomemos, por tanto $x \in f^{-1}([0,a))$. Entonces $f(x) < a$ y, como D es denso en I, existe $d \in D \cap (f(x), a)$. Luego $f(x) < d$, por lo que $x \in V(d)$ (en efecto, si $x \in X - V(d)$, entonces, por la definición de $f(x)$ resulta que $f(x) \geq d$, contradiciendo el hecho de que $f(x) < d$). Esto prueba que:

$$f^{-1}([0,a)) \subset \bigcup \{V(d) \colon d \in D \text{ y } d < a\}\,.$$

Tomemos ahora $x \in \bigcup \{V(d) \colon d \in D \text{ y } d < a\}$. Entonces $x \in V(d_0)$ para algún $d_0 \in D$ tal que $d_0 < a$. Si $d' \in D$ y $d_0 < d'$, por $b^\star$), se sigue que:

$$x \in V(d_0) \subset D(V(d_0)) \subset V(d')$$

por lo que $\{d \in D \colon x \in X - V(d)\} \subset [0, d_0)$. Al tomar el supremo, deducimos que $f(x) \leq d_0 < a$. Esto muestra que

$$\{V(d) \colon d \in D \text{ y } d < a\} \subset f^{-1}([0, a)).$$

Por tanto $f^{-1}([0, a)) = \{V(d) \colon d \in D \text{ y } d < a\}$, de donde $f^{-1}([0, a))$ es abierto en X.

Hemos probado que, para cada $a \in (0, 1)$, los conjuntos $f^{-1}([0, a))$ y $f^{-1}((a, 1])$ son abiertos en X. Esto implica que f es una función continua. Entonces $f \in C(X, I)$ y, como $f(F_0) \subset \{0\}$ y $f(F_1) \subset \{1\}$, concluimos que X es MN'. □

El Teorema 1.63 se debe a L. Nachbin y aparece en [15, Teorema 1, p. 36]. Notemos que si $\leqq$ es el orden discreto, entonces el Teorema 1.63 es justo el Teorema 1.45 que, como indicamos, es el Lema de Urysohn. También es claro que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces, utilizando un homeomorfismo entre los intervalos $[0, 1]$ y $[a, b]$ y el Teorema 1.63, podemos probar que X es MN si y sólo si para cada par de cerrados ajenos $F_0, F_1 \subset X$, con F_0 decreciente y F_1 creciente, existe $f \in C(X, [a, b])$ tal que $f(F_0) \subset \{a\}$ y $f(F_1) \subset \{b\}$.

El siguiente resultado fue probado originalmente por L. E. Ward, Jr. en [24, Teorema 9, p. 363]. La prueba que presentamos aquí es un poco distinta a la dada por L. E. Ward, Jr.

Teorema 1.64. *Supongamos que X es un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Entonces X es SN si y sólo si X es SN'.*

Demostración. Notemos que, por la parte 3) del Teorema 1.52, SN' implica SN. Falta probar que SN implica SN'. Supongamos, por tanto, que X es SN. Consideremos el conjunto:

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n} \colon n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\} \right\}.$$

Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ y F_0 es decreciente. Definamos $V(0) = \emptyset$ y $V(1) = X - F_1$. Utilizando la equivalencia entre las afirmaciones 1) y 2) del Teorema 1.59, podemos seguir la demostración del Teorema 1.63 (en donde usamos la equivalencia entre las afirmaciones 1) y 2) del Teorema 1.58), y así mostrar que para cada $d \in D$ existe un subconjunto abierto $V(d)$ de X de modo que la familia $\{V(d) \colon d \in D\}$ satisface las propiedades $b^\star$)-$d^\star$) de dicha demostración y, además, $V(d)$ es decreciente para cada $d \in D - \{1\}$. Consideremos ahora la función $f \colon X \to I$ definida, para $x \in X$, como:

$$f(x) = \sup\{d \in D \colon x \in X - V(d)\}.$$

De la misma manera en que hicimos ver en la prueba del Teorema 1.63, resulta que f está bien definida, $f(F_0) \subset \{0\}$, $f(F_1) \subset \{1\}$ y f es continua. Para probar que f preserva el orden, tomamos $x, y \in X$ tales que $x \leqq y$. Vamos a probar que

$$\{d \in D \colon x \in X - V(d)\} \subset \{d \in D \colon y \in X - V(d)\}.$$

Como ahora el conjunto $V(1)$ no necesariamente es decreciente, la demostración cambia un poco. A saber, podemos proceder como sigue: si $d \in D - \{1\}$ y $x \in X - V(d)$ entonces, de la misma manera en como hicimos ver antes, se sigue que $y \in X - V(d)$ (pues $V(d)$ es decreciente). Si $x \in X - V(1)$, entonces $f(x) = 1$. Supongamos que $f(y) = d \lneqq 1$, entonces existe d' tal que $d \lneqq d' \lneqq 1$. Luego, $y \notin X - V(d')$, es decir, $y \in V(d')$. Como $V(d')$ es decreciente, entonces $x \in V(d')$. Por lo tanto, $x \notin X - V(d')$, es decir, $f(x) \lneqq d' \lneqq 1$, lo cual contradice que $f(x) = 1$. Luego $f(x) = f(y) = 1$ y, de esta manera, siempre sucede que $f(x) \leq f(y)$. Esto prueba que $f \in C(X, I)$.

Si en lugar de suponer que F_0 es decreciente tenemos que F_1 es creciente, entonces podemos aplicar una demostración similar, para deducir que existe $f \in C(X, I)$ tal que $f(F_0) \subset \{0\}$ y $f(F_1) \subset \{1\}$. Esto prueba que X es SN'. $\square$

1.5.5. Espacios Compactos Casi Ordenados

En [15, p. 52], L. Nachbin considera importante la clase de espacios descritos a continuación.

Definición 1.65. *Sea X un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Si X es compacto y $\leqq$ es un orden parcial continuo, decimos que la pareja $(X, \leqq)$ es un **espacio compacto ordenado**.*

Como consecuencia de la Proposición 1.40, los espacios compactos ordenados son T_2 (ver Corolario 2.5).

En la presente subsección, vamos a estudiar espacios topológicos compactos y T_2, que poseen un casi orden continuo. Hasta donde hemos podido investigar a tales espacios no se les da nombre en la literatura, aunque podemos darles el que proponemos en la siguiente definición.

Definición 1.66. *Un **espacio compacto casi ordenado** es un espacio topológico compacto y T_2, que posee un casi orden continuo.*

Con esta notación, los espacios compactos ordenados son también espacios compactos casi ordenados.

A partir de este momento, en la presente subsección, supondremos que $\leqq$ es un casi orden en X. Como una aplicación de la Proposición 1.43 y del Teorema 1.57, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.67. *Sea X un espacio compacto casi ordenado. Entonces X es MN.*

Demostración. Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, F_0 es decreciente y F_1 es creciente. Como los espacios compactos y T_2 son normales, tenemos que X es normal. Luego existen abiertos U y V en X tales que $F_0 \subset U$, $F_1 \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Hagamos $F_0' = P(X - V)$ y $F_1' = S(X - U)$. Entonces F_0' es decreciente y F_1' es creciente. Como $X - U$ y $X - V$ son subconjuntos cerrados del compacto X, $X - U$ y $X - V$ son compactos. Entonces, por la Proposición 1.43, F_0' y F_1' son cerrados en X. Además, como $V \cap U = \emptyset$, tenemos que

$$X = (X - V) \cup (X - U) \subset P(X - V) \cup S(X - U) = F_0' \cup F_1',$$

por lo que $F_0' \cup F_1' = X$. Supongamos ahora que existe $x \in F_1 \cap F_0'$. Entonces $x \in P(X - V)$, por lo que $x \leqq y$ para algún $y \in X - V$. Como F_1 es creciente y $x \in F_1$, sucede que $y \in F_1$. Luego $y \in V$, pues $F_1 \subset V$. Esto implica que $y \in V$ y, a la vez, $y \in X - V$. Como esto es una contradicción, tenemos que $F_1 \cap F_0' = \emptyset$. De manera similar se tiene que $F_0 \cap F_1' = \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.57, X es MN. $\square$

Como caso particular del teorema anterior, los espacios compactos ordenados son MN. El Teorema 1.67 aparece primero probado en [15, Teorema 4, p. 57] (para espacios compactos ordenados) y, posteriormente, en [24, Lema 3, p. 361] para espacios compactos casi ordenados.

Recordemos que los espacios SN son MN. Por esta razón, el siguiente resultado, probado originalmente en [24, Teorema 4, p. 361], es una versión más fuerte que el Teorema 1.67.

Teorema 1.68. *Sea X un espacio compacto casi ordenado. Entonces X es SN.*

Demostración. Sean F_0 y F_1 dos subconjuntos cerrados de X tales que $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Consideremos el caso en que F_0 es decreciente. Supongamos que existe $x \in F_0 \cap S(F_1)$. Entonces $y \leqq x$, para alguna $y \in F_1$ y, como F_0 es decreciente, resulta que $y \in F_0$. Luego $y \in F_0 \cap F_1$. Esto es una contradicción, así que $F_0 \cap S(F_1) = \emptyset$. Notemos ahora que $S(F_1)$ es creciente. Además, como F_1 es cerrado en el compacto X, F_1 es compacto. Luego por la Proposición 1.43, $S(F_1)$ es cerrado en X. Como X es MN (Teorema 1.67), existen dos subconjuntos abiertos U_0 y U_1 en X tales que $F_0 \subset U_0$, $S(F_1) \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente.

Supongamos ahora que F_1 es creciente. Entonces $P(F_0) \cap F_1 = \emptyset$. Además $P(F_0)$ es cerrado y decreciente y, como F_1 es creciente y X es MN, existen dos abiertos U_0 y U_1 en X tales que $P(F_0) \subset U_0$, $F_1 \subset U_1$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, U_0 es decreciente y U_1 es creciente. Esto prueba que X es SN. □

Corolario 1.69. *Sea X un espacio compacto casi ordenado. Entonces X es SR.*

Demostración. Por el Teorema 1.68, X es SN. Luego, por la parte 1) del Teorema 1.53, X es SR. □

Como caso particular del Teorema 1.68, los espacios compactos ordenados son SN (y también SR).

Supongamos que X es un espacio compacto casi ordenado. Entonces, por definición, el casi orden de X es continuo. Como veremos en el siguiente resultado, el casi orden de X es, en realidad, fuertemente continuo.

Teorema 1.70. *Sea X un espacio compacto casi ordenado, con un casi orden $\leqq$. Entonces $\leqq$ es fuertemente continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.68, X es SN. Entonces, por el Teorema 1.64, X es SN'. Aplicando la parte 2) del Teorema 1.52, tenemos que X es MN'. Aplicando ahora la parte 2) del Teorema 1.53, resulta que X es MR'. Por último, aplicando la parte 4) del Teorema 1.53, tenemos que $\leqq$ es fuertemente continuo. $\square$

Una prueba alternativa del Teorema 1.70 es la siguiente: por el Teorema 1.67, X es MN. Entonces, por el Teorema 1.63, X es MN'. Luego aplicamos las partes 2) y 4) del Teorema 1.53 como hicimos antes. Terminamos la presente subsección indicando que el Teorema 1.70 aparece probado originalmente en [24, Corolario 9.1], aunque ya antes había sido probado por L. Nachbin para espacios compactos ordenados (ver [15, Capítulo II]). Como caso particular del Teorema 1.70, tenemos que en un espacio compacto ordenado el orden parcial es fuertemente continuo.

Terminamos la presente subsección probando tres resultados que, hasta donde hemos podido investigar, aparecen por primera vez en la literatura.

Teorema 1.71. *Supongamos que X es un espacio compacto casi ordenado, con un casi orden $\leqq$. Sean $x \in X$ y A un subconjunto cerrado de X tales que $x \nleqq a$, para ninguna $a \in A$. Entonces existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$ y $A \subset V$, U es creciente, V es decreciente y, para ningún $(z, y) \in U \times V$, se tiene que $z \nleqq y$.*

Demostración. Por hipótesis $x \in X$ y $A \subset X$ es cerrado en X. Si $x \in A$, entonces $x \nleqq x$, lo cual contradice la reflexividad de $\leqq$. Luego $x \notin A$. Si existe $a \in S(x) \cap A$, entonces $x \leqq a$ para el elemento a de A. Esto contradice el hecho de que $x \nleqq a$, para ninguna $a \in A$. Luego $S(x) \cap A = \emptyset$. Como X es SR (Corolario 1.69), existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es creciente y V es decreciente. Si $(z, y) \in U \times V$ y $z \leqq y$ entonces, como V es decreciente, $z \in V$. Luego $z \in U \cap V$. Como esto contradice el hecho de que U y V son ajenos, deducimos que $z \nleqq y$. $\square$

Teorema 1.72. *Supongamos que X es un espacio compacto casi ordenado, con un casi orden $\leqq$. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X tales que, para ninguna $(a, b) \in A \times B$, se tiene que $a \nleqq b$. Entonces existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$, U es creciente, V es decreciente y, para ningún $(z, y) \in U \times V$, se tiene que $z \nleqq y$.*

Demostración. Como A es cerrado en el espacio compacto X, resulta que A es compacto. Luego, por la Proposición 1.43, $S(A)$ es cerrado en X. Si existe $b \in B \cap S(A)$, entonces $a \leqq b$, para algún elemento $a \in A$. Esto es una contradicción, así que $B \cap S(A) = \emptyset$. Tenemos así que B y $S(A)$ son subconjuntos cerrados y ajenos de X y, además, $S(A)$ es creciente. Como X es SN (Teorema 1.68), existen abiertos U y V en X tales que $S(A) \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$, U es creciente y V es decreciente. Si $(z, y) \in U \times V$ y $z \leqq y$ entonces, como V es decreciente, $z \in V$. Luego $z \in U \cap V$. □

Teorema 1.73. *Supongamos que X es un espacio compacto casi ordenado. Entonces, para cada cerrado A en X y cada abierto decreciente B en X tales que $A \subset B$, existe un subconjunto abierto decreciente V en X tal que $A \subset V \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset B$.*

Demostración. Por el Teorema 1.67, X es MN. Luego, por el Teorema 1.58, existe un abierto decreciente V en X tal que $A \subset V \subset D(V) \subset B$. Como $D(V)$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a V, sucede que $\mathrm{cl}_X(V) \subset D(V)$. De esta manera $A \subset V \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset B$. □

1.5.6. Otros Aspectos

Como hemos visto la interrelación de una topología con una estructura de orden nos ha permitido generalizar los axiomas de separación y, en particular el Lema de Urysohn. En [24, Sección 7] se muestra que también se puede generalizar el Teorema de Extensión de Tietze. En la Sección 8 del mismo artículo, se muestra una generalización del Teorema del Encaje en cubos de Tychonoff (la cual está dada en espacios CR). En [24, Sección 9], se generalizan resultados sobre retractos. Enunciar en este trabajo dichos teoremas, involucra definir nuevos conceptos e incluso introducir cierta notación. Preferimos no alargar este trabajo, tratar otros aspectos y remitir al lector a [24], para una mayor información.

Tanto el tema de los axiomas de separación en espacios topológicos con una propiedad de orden, como el de la extensión, aparece en otros artículos de investigación. Para el lector interesado, mencionamos [1], [3], [6] y [11]. En [8, Sección 2.3], se muestran otros resultados para los espacios compactos ordenados.

Capítulo 2

$QOTS$ y $POTS$

2.1. Introducción

En el presente capítulo vamos a trabajar con dos nuevas clases de espacios topológicos, que poseen una estructura de orden. Los llamaremos $POTS$ y $QOTS$. Bajo ciertas condiciones, veremos que dichos espacios coinciden con los espacios compactos casi ordenados y con los espacios compactos ordenados, que estudiamos en la Subsección 1.5.5. Luego de presentar, en la Sección 2.3, una serie de resultados relacionados con los subconjuntos de un $QOTS$ que, informalmente hablando, están totalmente ordenados y "son los más grandes" con dicha propiedad, mostraremos como una aplicación a la Teoría de los Continuos, una prueba de que un continuo T_1 tiene al menos dos puntos que no son de corte (ver definiciones 2.15 y 2.19). Hasta cierto punto, la demostración que aquí presentamos, es similar a la que se estudia en los cursos de Teoría de los Continuos, pero puesta en el lenguaje de los espacios topológicos con una estructura de orden.

En la Sección 2.4, vamos a definir un orden especial $\leqq_e$ en un espacio conexo y T_1. También definiremos una nueva clase de espacios topológicos con una estructura de orden, llamados $POTS$ *débiles*. Como consecuencia del estudio del orden $\leqq_e$ y de las propiedades de los $POTS$ débiles, daremos una prueba alternativa, y que no se parece a la que se estudia en los cursos de Teoría de los Continuos, del hecho de que los continuos T_1 tienen al menos dos puntos que no son de corte. Esta demostración resalta, en buena medida, la interrelación entre un espacio topológico y una estructura de orden.

Al final del capítulo, en la Sección 2.5, generalizamos la noción de convexidad en $\mathbb{R}$, a espacios topológicos con una estructura de orden. Luego daremos dos pruebas del hecho de que los espacios compactos casi ordenados poseen esta propiedad general de convexidad. La primera demostración, utilizará el Lema de Urysohn Generalizado y, la segunda, usará el hecho de que los espacios compactos casi ordenados son SN.

2.2. Propiedades Fundamentales

En la siguiente definición, vamos a considerar dos clases de espacios topológicos, con estructura de orden, que serán de importancia durante el presente trabajo.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico con un casi orden $\leqq$. Decimos que X es un:*

1) ***espacio topológico casi ordenado**, si $\leq$ es semicontinuo;*

2) ***espacio topológico parcialmente ordenado** si X es un espacio topológico casi ordenado y $\leqq$ es un orden parcial en X.*

Si X es un espacio topológico casi ordenado entonces, para simplificar, decimos que X es un $QOTS$. De manera similar, si X es un espacio topológico parcialmente ordenado, decimos que X es un $POTS$. Utilizamos la nomenclatura anterior, más por fuerza de la costumbre, que por tener un equivalente castellanizado. En inglés, a un espacio topológico casi ordenado, se le llama "quasi ordered topological space", mientras que a un espacio topológico parcialmente ordenado, se le llama "partially ordered topological space". Además referirse a dichos espacios como $ETCO$ y $ETPO$, nos parece muy extraño, luego de utilizar constantemente $QOTS$ y $POTS$.

Las nociones presentadas en la Definición 2.1 aparecen originalmente en [25, p. 145]. En esta sección vamos a probar una serie de propiedades de los $POTS$.

Proposición 2.2. *Todo $POTS$ es T_1.*

Demostración. Supongamos que X es un $POTS$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Si $x \leqq y$ y $y \leqq x$ entonces, como el orden $\leqq$ es parcial, sucede que

$x = y$. En vista de que esto es una contradicción, tenemos que $x \nleqq y$ o bien $y \nleqq x$. Consideremos primero el caso $x \nleqq y$. Por la Proposición 1.36, $X - P(y)$ y $X - S(x)$ son abiertos en X. Además $x \in X - P(y)$, $y \in X - S(x)$ $y \notin X - P(y)$ y $x \notin X - S(x)$. Esto prueba que X es T_1, cuando $x \nleqq y$. Supongamos ahora que $y \nleqq x$. Entonces $X - P(x)$ y $X - S(y)$ son abiertos en X tales que $y \in X - P(x)$, $x \in X - S(y)$, $x \notin X - P(x)$ y $y \notin X - S(y)$. Esto prueba que X es T_1. □

Cuando el orden parcial definido en X, el cual es un $POTS$, es continuo, resulta que X es T_2, según se prueba en el siguiente resultado. En su demostración utilizaremos el hecho de que un espacio topológico es T_2 si y sólo si cada par de puntos distintos se encuentran en vecindades ajenas.

Proposición 2.3. *Si X es un $POTS$ cuyo orden parcial es continuo, entonces X es T_2.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces $x \nleqq y$ o bien $y \nleqq x$. En cualquier situación, por la Proposición 1.40, existen vecindades ajenas de x y y, respectivamente. Esto prueba que X es T_2. □

Corolario 2.4. *Si X es un $POTS$ cuyo orden parcial es total, entonces X es T_2.*

Demostración. El resultado se sigue del Teorema 1.39 y la Proposición 2.3. □

Corolario 2.5. *Si X es un espacio compacto ordenado, entonces X es T_2.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio compacto ordenado. Entonces X es un $POTS$ cuyo orden parcial es continuo. Luego, por la Proposición 2.3, X es T_2. □

En la Sección 1.5 utilizamos la estructura de un espacio topológico X con un casi orden $\leqq$ que es semicontinuo. Por ejemplo, el Teorema 1.53, puede enunciarse diciendo "Si X es un $QOTS$, entonces". El Corolario 1.55 dice que, en un $QOTS$, ser SN es equivalente a ser SR y MN. También dice que en un $QOTS$ ser SN' es equivalente a ser SR' y MN'.

En este trabajo entendemos que un *$POTS$ compacto* es un espacio topológico compacto que, a su vez, es un $POTS$. De manera similar, un $QOTS$

compacto es un espacio topológico compacto que también es un $QOTS$. En estos términos, el Teorema 1.68 dice que si X es un $QOTS$ compacto y T_2 cuyo casi orden es continuo, entonces X es SN. De este resultado y la Proposición 2.3, resulta que todo $POTS$ compacto cuyo orden parcial es continuo es SN. Este enunciado equivale a decir que los espacios compactos ordenados son SN pues, los $POTS$ compactos cuyo orden parcial es continuo, son precisamente los espacios compactos ordenados.

2.3. Cadenas Maximales y Puntos de Corte

En la presente sección veremos las nociones de cadena y de cadena maximal en un $COCO$. También consideraremos las nociones de elemento maximal y de elemento minimal en un $COCO$. Nuestro primer objetivo es lograr caracterizar las cadenas maximales en un $QOTS$ y ver condiciones, bajo las cuales, podemos garantizar la existencia de elementos minimales y de elementos maximales. Nuestro segundo objetivo es utilizar la teoría desarrollada de los espacios topológicos parcialmente ordenados, para probar un resultado clásico en la Teoría de los Continuos, a saber que todo continuo tiene al menos dos puntos que no son de corte.

2.3.1. Cadenas Maximales

Si $(X, \leqq)$ es un $COCO$ y $C \subset X$, entonces el símbolo $\leqq_{|C}$ representa el casi orden de X, restringido a C.

Definición 2.6. *Si $(X, \leqq)$ es un $COCO$, entonces $x \in X$ es un* ***elemento minimal*** *en X si para cada $y \in X$, de $y \leqq x$ se sigue que $x \leqq y$. Decimos que $z \in X$ es un* ***elemento maximal*** *en X si para cada $y \in X$, de $z \leqq y$ se sigue que $y \leqq z$.*

Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $COCO$. En términos del conjunto de los predecesores, sucesores y equivalentes (Definición 1.13), tenemos que x es un elemento minimal de X si y sólo si $P(x) \subset S(x)$. En forma equivalente, x es minimal en X si y sólo si $E(x) = P(x)$. De manera similar x es maximal en X si y sólo si $S(x) \subset P(x)$ lo cual, a su vez, es equivalente a que $E(x) = S(x)$.

Definición 2.7. *Si $(X, \leqq)$ es un $COCO$, entonces una* ***cadena en*** *X es un subconjunto C de X tal que $\left(C, \leqq_{|C}\right)$ es un $COCTO$. Una* ***cadena maximal***

***en** X es una cadena en X que no está contenida propiamente en otra cadena en X.*

Como consecuencia del Lema de Zorn tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Si $(X, \leqq)$ es un COCO, entonces existe una cadena maximal en X.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos de X tales que, para cada $\alpha \in \Gamma$, U_α es una cadena en X y, para cada $\alpha, \beta \in \Gamma$, se tiene que $U_\alpha \subset U_\beta$ o bien $U_\beta \subset U_\alpha$. Notemos que si consideramos la familia $\mathcal{C}$ de todas las cadenas en X, con el orden de la inclusión, entonces $\mathcal{U}$ es una cadena en $\mathcal{C}$. Vamos a mostrar, por tanto, que $\mathcal{U}$ posee una cota superior en $\mathcal{C}$.

Para lograr lo indicado en el párrafo anterior, sea $U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$. Es claro que $(U, \leqq_{|U})$ es un *COCO*. Tomemos ahora $a, b \in U$. Entonces existen $\alpha, \beta \in \Gamma$ tales que $a \in U_\alpha$ y $b \in U_\beta$. Como $U_\alpha \subset U_\beta$ o bien $U_\beta \subset U_\alpha$, existe $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ tal que $a, b \in U_\delta$. En vista de que U_δ es una cadena en X, tenemos que $a \leqq b$ o bien $b \leqq a$. Esto muestra que $(U, \leqq_{|C})$ es un *COCTO* o, lo que es lo mismo, que U es una cadena en X. Como $U_\alpha \subset U$ para cada $\alpha \in \Gamma$, tenemos que U es una cota superior de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}$. Esto implica, por el Lema de Zorn, que $\mathcal{C}$ posee un elemento maximal. Dicho elemento es, por tanto, una cadena maximal en X. □

Corolario 2.9. *Si $(X, \leqq)$ es un COCO y C es una cadena en X, entonces existe una cadena maximal en X que contiene a C.*

Demostración. La prueba es una modificación de la demostración del teorema anterior. Sea $\mathcal{C}$ la familia de todas las cadenas en X que contienen a C y, además, supongamos que $\mathcal{C}$ tiene el orden de la inclusión. Consideremos ahora una familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha \in \mathcal{C} : \alpha \in \Gamma\}$ tal que, para cada $\alpha, \beta \in \Gamma$, se tiene que $U_\alpha \subset U_\beta$ o bien $U_\beta \subset U_\alpha$. Siguiendo la demostración del teorema anterior, podemos ver que $\mathcal{U}$ posee una cota superior en $\mathcal{C}$. Luego, por el Lema de Zorn, $\mathcal{C}$ posee un elemento maximal. Dicho elemento es, por tanto, una cadena maximal en X que contiene a C. □

Ahora probaremos que, en un *QOTS*, toda cadena maximal es cerrada. Dicho resultado fue probado originalmente por A. D. Wallace en [21, p. 415].

Lema 2.10. *Toda cadena maximal en un QOTS es cerrada.*

Demostración. Sean X un $QOTS$ y C una cadena maximal en X. Notemos primero que, por el Corolario 1.36, $P(x)$ y $S(x)$ son cerrados en X, para cada $x \in C$. Entonces $\bigcap_{x\in C}(P(x) \cup S(x))$ es cerrado en X. Tomemos ahora $c \in C$. Como C es una cadena en X, para todo $x \in C$ tenemos que $c \leqq x$ o $x \leqq c$. Por tanto $c \in P(x) \cup S(x)$, para cada $x \in C$. Luego $c \in \bigcap_{x\in C}(P(x) \cup S(x))$. Esto prueba que $C \subset \bigcap_{x\in C}(P(x) \cup S(x))$.

Tomemos ahora $y \in \bigcap_{x\in C}(P(x) \cup S(x))$ y hagamos $D = C \cup \{y\}$. Como C es una cadena en X, cada dos elementos de C son comparables, es decir $a \leqq b$ o bien $b \leqq a$, para cada $a, b \in C$. Además si $x \in C$, resulta que $y \in P(x) \cup S(x)$, por lo que $y \leqq x$ o bien $x \leqq y$. Esto muestra que cada dos elementos de D son comparables o, en otras palabras, que D es una cadena en X. Como $C \subset D$ y C es una cadena maximal en X, se tiene que $C = D$. Luego $y \in C$. Esto muestra que $\bigcap_{x\in C}(P(x) \cup S(x)) \subset C$. Por tanto:

$$C = \bigcap_{x\in C}(P(x) \cup S(x)).$$

Como $\bigcap_{x\in C}(P(x)\cup S(x))$ es cerrado en X, resulta que C es cerrado en X. $\square$

Teorema 2.11. *Supongamos que X es un espacio topológico compacto y no vacío. Si $\leq$ es un casi orden semicontinuo inferiormente en X, entonces X posee un elemento minimal.*

Demostración. Por el Teorema 2.9, existe M una cadena maximal. Consideremos el conjunto $\mathcal{L} = \{P(x) \colon x \in M\}$. Mostraremos ahora que:

$$\bigcap\{P(x) \colon P(x) \in \mathcal{M}\} \neq \emptyset.$$

Como $\leq$ es semicontinuo inferiormente, cada conjunto $P(x)$ es cerrado en X. Supongamos que $\{P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\}$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{L}$. Como M es una cadena, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que, $x_j \leqq x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\emptyset \neq P(x_j) = P(x_1) \cap P(x_2) \cap \cdots \cap P(x_n).$$

Tenemos así que $\mathcal{L}$ es una familia con la propiedad de la intersección finita, de subconjuntos cerrados en X. Como X es compacto, por [4, Teorema 3.1.1, p. 123], existe $x_0 \in \bigcap_{x\in M} P(x)$. Supongamos ahora que $y \in X$ es tal que $y \leq x_0$. Como M es una cadena maximal, sucede que $y \in M$ Luego $x_0 \in P(y)$, de donde $x_0 \leq y$. Esto muestra que x_0 es un elemento minimal en X. $\square$

De manera similar se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.12. *Supongamos que X es un espacio topológico compacto y no vacío. Si $\leq$ es un casi orden semicontinuo superiormente en X, entonces X posee un elemento maximal.*

Si combinamos los teoremas 2.11 y 2.12, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *Supongamos que X es un espacio topológico compacto y no vacío. Si $\leq$ es un casi orden semicontinuo en X, entonces X posee un elemento minimal y un elemento maximal.*

El Teorema 2.12 aparece originalmente en [21, p. 415]. Posteriormente aparece en [25, Teorema 1, p. 146], enunciado junto con el Teorema 2.11. Conviene comparar el Teorema 2.11 con el resultado mostrado en [2, Teorema 16, p. 63], válido en espacios parcialmente ordenados.

Vamos a probar ahora que, en un $QOTS$, la cerradura de una cadena es también una cadena.

Teorema 2.14. *Si $(X, \leqq)$ es un QOTS y C es una cadena en X, entonces $\mathrm{cl}_X(C)$ es una cadena en X.*

Demostración. Vamos a probar primero que

1) para cada $x \in \mathrm{cl}_X(C)$ y para toda $c \in C$, tenemos que $x \leqq c$ o bien $c \leqq x$.

Para ver 1), sean $x \in \mathrm{cl}_X(C)$ y $c \in C$. Supongamos que $x \nleqq c$ y $c \nleqq x$. Entonces:

$$x \in (X - P(c)) \cap (X - S(c)).$$

Como $\leqq$ es semicontinuo, por la Proposición 1.36, $X - P(c)$ y $X - S(c)$ son abiertos en X. Entonces $(X - P(c)) \cap (X - S(c))$ es un abierto en X que tiene al punto x, que se encuentra en la cerradura de C. Entonces existe $y \in C \cap (X - P(c)) \cap (X - S(c))$. Esto implica que c y y son elementos de C no comparables, lo cual contradice el hecho de que C es una cadena y prueba 1).

Tomemos ahora $x, y \in \mathrm{cl}_X(C)$. Si x y y no son comparables, entonces x es un elemento del abierto $(X - P(y)) \cap (X - S(y))$ de X. Como $x \in \mathrm{cl}_X(C)$, existe $c \in C \cap (X - P(y)) \cap (X - S(y))$. Esto implica que y es un elemento en la cerradura de C, que no se compara con un elemento de C (a saber, con c), contradiciendo 1). Por tanto x y y son comparables y, así, $\mathrm{cl}_X(C)$ es una cadena en X. □

Usando el Teorema 2.14, podemos dar una prueba alternativa del Lema 2.10. Para esto supongamos que M es una cadena maximal en X. Como, por el Teorema 2.14, $\mathrm{cl}_X(M)$ es una cadena en X que contiene a M, por la maximalidad de M, tenemos que $\mathrm{cl}_X(M) = M$. Luego M es cerrado en X. En el siguiente capítulo será importante obtener condiciones, bajo las cuales las cadenas maximales son compactas.

2.3.2. Puntos de Corte

En la presente subsección, veremos una utilidad que tienen los resultados y la relaciones definidas anteriormente. Conviene establecer cierta notación y recordar algunos resultados de la Topología General.

Definición 2.15. *Sean X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Decimos que p es un* ***punto de corte*** *de X si $X - \{p\}$ no es conexo.*

Si X es un espacio topológico, entonces la notación $X = P|Q$ indica que P y Q son subconjuntos no vacíos de X tales que:

$$X = P \cup Q, \quad \mathrm{cl}_X(P) \cap Q = \emptyset \quad \text{y} \quad P \cap \mathrm{cl}_X(Q) = \emptyset.$$

Supongamos que X es un espacio topológico y que $A \subset X$ es tal que $A = B|C$. Es fácil probar que si A es abierto en X, entonces B y C son abiertos y ajenos en X. De manera similar, si A es cerrado en X, entonces B y C son cerrados y ajenos en X.

El siguiente resultado se conoce como el *Lema de las Orejas*. Las partes 1) y 2) son sencillas de probar. Y la parte 3), está probado en [16, Proposición 6.3, p. 88].

Lema 2.16. *Sean X un espacio topológico y C un subconjunto de X tales que $X - C = A|B$. Entonces*

1) *si C es abierto en X, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son abiertos en X;*

2) *si C es cerrado en X, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son cerrados en X;*

3) *si X y C son conexos, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos.*

Utilizaremos el Lema 2.16 en la prueba del siguiente resultado.

Lema 2.17. *Sea X un espacio conexo y T_1. Supongamos que $x \in X$ es tal que $X - \{x\} = K|L$. Entonces $\mathrm{cl}_X(K) = K \cup \{x\}$ y $\mathrm{cl}_X(L) = L \cup \{x\}$.*

Demostración. Como X es T_1, el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X. Luego, por la parte 2) del Lema 2.16, $K \cup \{x\}$ es cerrado en X. Como $K \subset K \cup \{x\}$, resulta que $\mathrm{cl}_X(K) \subset K \cup \{x\}$. Ahora bien, como $X - \{x\}$ es abierto en X, los conjuntos K y L son abiertos y ajenos en X. Además $K \neq X$, pues L es no vacío y $K \cap L = \emptyset$. Entonces K no es cerrado en X pues, en tal caso, K es un subconjunto propio y no vacío del espacio conexo X, que es tanto abierto como cerrado en X. En vista de que esto contradice la conexidad de X, deducimos que K no es cerrado en X. Entonces $\mathrm{cl}_X(K) - K \neq \emptyset$ y, como todos los puntos de la cerradura de K se encuentran en $K \cup \{x\}$, necesariamente $\mathrm{cl}_X(K) = K \cup \{x\}$. De manera similar se prueba que $\mathrm{cl}_X(L) = L \cup \{x\}$. □

El siguiente resultado se utilizará con cierta frecuencia a lo largo de este trabajo.

Lema 2.18. *Sea X un espacio conexo. Supongamos que $x, y \in X$ son tales que:*

$$X - \{x\} = K|L \quad y \quad X - \{y\} = M|N.$$

Si $x \in M$ y $y \in K$ entonces $N \cup \{y\} \subset K$.

Demostración. Notemos que $x \neq y$, pues $x \in M \subset X - \{y\}$. Ahora bien, por el Lema de las Orejas, $N \cup \{y\}$ es conexo. Como $x \in M$, resulta que $x \notin N \cup \{y\}$. Por tanto $N \cup \{y\}$ es un subconjunto conexo de $X - \{x\}$ y, como intersecta a K, pues $y \in K$, tenemos que $N \cup \{y\} \subset K$. □

Recordemos que un conjunto X es *degenerado* si posee solamente un elemento. Si X tiene al menos dos elementos, decimos que X es *no degenerado.* Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 2.19. *Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado. Un **continuo** T_1 es un espacio T_1, compacto, conexo y no degenerado. Finalmente, un **continuo** T_2 es un espacio T_2, compacto, conexo y no degenerado.*

Recordemos que los espacios compactos y T_2 son T_4 y, en particular, son $T_{3\frac{1}{2}}$. Además, si X es un conjunto conexo y $T_{3\frac{1}{2}}$, entonces $X = \emptyset$, X es degenerado o bien X es no numerable (ver [19, Proposición XII.1.25, p. 18]). Como, por definición, un continuo T_2 es no degenerado, de lo anterior se sigue que los continuos T_2 son no numerables. También los continuos son no numerables.

No debemos confundir la noción de continuo que se da en la Definición 2.19, con la que aparece en la Definición 1.29. Mientras que la primera involucra solamente a un espacio topológico, la segunda se refiere a un casi orden definido en un espacio topológico. En particular, tiene sentido considerar un casi orden continuo $\leqq$ en un continuo X. Un espacio compacto casi ordenado, conexo y no degenerado es, por ejemplo, un continuo T_2 en el que el orden parcial es continuo.

Estamos listos para enunciar el resultado principal de esta subsección. En inglés al siguiente teorema se le llama el "non-cut point existence theorem", lo cual podemos traducir como "el teorema de la existencia de puntos que no son de corte". Independientemente de su nombre, el resultado es muy importante en la Teoría de los Continuos y, como veremos, la técnica de definir un casi orden semicontinuo inferiormente en un espacio topológico, resultará clave. Recordemos que la cardinalidad de un conjunto A se denota por $|A|$.

Teorema 2.20. *Un continuo T_1 tiene al menos dos puntos que no son de corte.*

Demostración. Sea X un continuo T_1 no degenerado. Hagamos:

$$N = \{p \in X : p \text{ no es un punto de corte de } X\}$$

y supongamos que $|N| \leq 1$. Como $|X| \geq 2$ existe $x_0 \in X - N$. Luego x_0 es un punto de corte de X y, por tanto, $X - \{x_0\} = A|B$. Como N posee a lo más un elemento, podemos suponer, sin perder generalidad, que $N \subset B$. Entonces, para cada $x \in A$, tenemos que x es un punto de corte de X. Luego, para toda $x \in A$, sucede que:

$$X - \{x\} = A(x)|B(x) \quad \text{con} \quad x_0 \in B(x).$$

Lo anterior significa que, para cada $x \in A$, podemos escoger a $B(x)$ de modo que tenga a x_0. Por el Lema 2.18, $A(x) \cup \{x\} \subset A$, para toda $x \in A$. Por tanto,

$A(x) \subset A$, para cada $x \in A$. Además, por el Lema 2.17, $\mathrm{cl}_X(A) = A \cup \{x_0\}$ y $\mathrm{cl}_X(A(x)) = A(x) \cup \{x\}$, para cada $x \in A$. También tenemos que, para toda $x \in A$, los conjuntos $A(x)$ y $B(x)$ son ajenos, no vacíos y abiertos en X. Los conjuntos A y B también son ajenos, no vacíos y abiertos en X.

Hagamos $A(x_0) = A$ $B(x_0) = B$. Notemos que:

$$A(x) \neq \emptyset, \quad \text{para cada } x \in \mathrm{cl}_X(A)\,. \tag{2.3.1}$$

Consideramos ahora la siguiente relación $\leqq$ en $\mathrm{cl}_X(A)$:

$$\text{si } x, y \in \mathrm{cl}_X(A)\,, \text{ entonces } x \leqq y \text{ si y sólo si } A(x) \subset A(y).$$

Notemos que $x \leqq x_0$, para cada $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Afirmamos que:

1) $\leqq$ es un orden parcial en $\mathrm{cl}_X(A)$.

Para probar 1), notemos primero que $A(x) \subset A(x)$, para cada $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Luego $x \leqq x$, para cada $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Tomemos ahora $x, y, z \in \mathrm{cl}_X(A)$ de modo que $x \leqq y$ y $y \leqq z$. Entonces $A(x) \subset A(y)$ y $A(y) \subset A(z)$, por lo que $A(x) \subset A(z)$. Esto muestra que $x \leqq z$, por lo que $(\mathrm{cl}_X(A)\,, \leqq)$ es un *COCO*. Tomemos ahora $x, y \in \mathrm{cl}_X(A)$ de modo que $x \leqq y$ y $y \leqq x$. Entonces $A(x) \subset A(y)$ y $A(y) \subset A(x)$. Luego $A(x) = A(y)$. Esto implica que

$$X - \{x\} = A(x)|B(x), \quad \text{y} \quad X - \{y\} = A(x)|B(y).$$

Supongamos que $x \neq y$. Como $A(x) \subset X - \{x\}$ y $A(x) = A(y) \subset X - \{y\}$, resulta que $x \notin A(x)$ y $y \notin A(x)$. Luego $x \in B(y)$ y $y \in B(x)$. Aplicando el Lema 2.18, sucede entonces que $A(x) \cup \{y\} \subset B(x)$, de donde $A(x) \subset B(x)$. Como esto contradice el hecho de que $A(x)$ y $B(x)$ son ajenos. Por lo tanto, $x = y$. Esto prueba que $(\mathrm{cl}_X(A)\,, \leqq)$ es un *COPO* y, así, 1) se cumple.

Como $(\mathrm{cl}_X(A)\,, \leqq)$ es un *COPO*, para cada $x \in \mathrm{cl}_X(A)$ podemos considerar el conjunto $P(x)$ de los predecesores de x, que dimos en la Definición 1.13. Afirmamos ahora que:

2) $P(x) = \mathrm{cl}_X(A(x))$, para cada $x \in \mathrm{cl}_X(A)$.

Para ver 2), tomemos $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Recordemos que $z \leqq x_0$, para cada $z \in \mathrm{cl}_X(A)$. Luego:

$$P(x_0) = \{z \in \mathrm{cl}_X(A) : z \leqq x_0\} = \mathrm{cl}_X(A)\,.$$

Esto prueba que 2) se cumple si $x = x_0$. Ahora, si $x \neq x_0$. Entonces $x \in A$. Sea $y \in P(x)$. Entonces $y \leqq x$, por lo que $A(y) \subset A(x)$. Al tomar cerraduras obtenemos que

$$A(y) \cup \{y\} = \mathrm{cl}_X(A(y)) \subset \mathrm{cl}_X(A(x)) .$$

Luego $y \in \mathrm{cl}_X(A(x))$. Esto prueba que $P(x) \subset \mathrm{cl}_X(A(x))$.

Para mostrar la otra contención, tomemos $z \in \mathrm{cl}_X(A(x)) = A(x) \cup \{x\}$. Como $x \in A$, $\mathrm{cl}_X(A(x)) \subset A$. Luego $z \in A$. Si $z = x$, entonces $z \leqq x$, por lo que $z \in P(x)$. Si no, $z \in A(x)$. Luego $z \neq x$, por lo que $x \in X - \{z\} = A(z) \cup B(z)$. Recordemos que:

$$X - \{z\} = A(z)|B(z), \quad X - \{x\} = A(x)|B(x) \quad \text{y} \quad x_0 \in B(z) \cap B(x).$$

Si $x \in A(z)$ entonces, por el Lema 2.18, $B(z) \cup \{z\} \subset A(x)$. Luego $x_0 \in B(z) \subset A(x)$, por lo que $x_0 \in A(x) \cap B(x)$. En vista de que esto contradice el hecho de que $A(x)$ y $B(x)$ son ajenos, deducimos que $x \notin A(z)$. Luego $x \in B(z)$ y, por el Lema 2.18, $A(z) \cup \{z\} \subset A(x)$. En particular $A(z) \subset A(x)$, por lo que $z \leqq x$. Luego $z \in P(x)$. Esto prueba que $\mathrm{cl}_X(A(x)) \subset P(x)$ y, como la otra contención también es cierta, 2) se cumple.

De 2) y la Proposición 1.34, se sigue que $\leqq$ es semicontinuo inferiormente. Tenemos, con todo esto, que $\mathrm{cl}_X(A)$ es un espacio topológico compacto y no vacío y que $\leq$ es un orden parcial en $\mathrm{cl}_X(A)$ que es semicontinuo inferiormente. Entonces, por el Teorema 2.11, $\mathrm{cl}_X(A)$ posee un elemento minimal p. Luego p es un elemento de $\mathrm{cl}_X(A)$ tal que, por 2) y el hecho de ser minimal, se tiene que:

$$A(p) \cup \{p\} = \mathrm{cl}_X(A(p)) = P(p) = \{p\}.$$

Por tanto $A(p) = \emptyset$. Esto contradice (2.3.1) y, como dicha contradicción proviene de haber supuesto que $|N| \leq 1$, deducimos que $|N| \geq 2$. En otras palabras, X tiene al menos dos puntos que no son de corte. $\square$

2.4. El Orden del Punto de Corte

En la presente sección, vamos a definir un orden parcial especial en un espacio conexo y T_1. Nuestro objetivo es dar una prueba alternativa del

Teorema 2.20. Los resultados de esta sección aparecieron originalmente en el artículo [26].

Consideremos primero la siguiente noción.

Definición 2.21. *Sea X un espacio conexo y T_1. Sean $x, c, d \in X$. Decimos que x* ***separa a** c **y** d **en** X *si existen $C, D \subset X - \{x\}$ tales que $X - \{x\} = C|D$, $c \in C$ y $d \in D$.*

Con respecto a la noción dada en la definición anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.22. *Sea X un espacio conexo y T_1. Supongamos que $x, c, d \in X$ son tales que x separa a c y d en X. Entonces c no separa a x y d en X y, además, d no separa a x y c en X.*

Demostración. Como x separa a c y a d en X, tenemos que $X - \{x\} = C|D$, con $c \in C$ y $d \in D$. Si c separara a x y d en X, entonces $X - \{c\} = A|B$, con $x \in A$ y $d \in B$. Por el Lema 2.18, $B \cup \{c\} \subset C$. Luego $d \in C$. Esto implica que $d \in C \cap D$. Como esto contradice el hecho de que C y D son ajenos, deducimos que c no separa a x y d. De manera similar se puede probar que d no separa a x y c. $\square$

Vamos ahora a definir una relación de orden en un espacio conexo y T_1 que admite un punto de corte.

Definición 2.23. *Supongamos que X es un espacio conexo y T_1, y que e es un punto de corte de X. Consideremos la relación $\leqq_e$ en X definida como sigue: si $x, y \in X$ entonces $x \leqq_e y$ si y sólo si $x = e$, $x = y$ o bien x separa a e y a y. A $\leqq_e$ se le llama el* ***orden del punto de corte en** X.

Por definición $e \leqq_e x$, para cada $x \in X$ y, además $x \leqq_e x$, para toda $x \in X$. Es claro también que $x \leqq_e e$ si y sólo si $x = e$. En el siguiente resultado, mostramos otras propiedades de la relación $\leqq_e$.

Teorema 2.24. *Sean X un espacio conexo y T_1 y e un punto de corte de X. Entonces:*

1) *$\leqq_e$ es un orden parcial en X;*

2) *e es el único elemento minimal de X, con respecto al orden $\leqq_e$;*

3) $\leqq_e$ *no es un orden total en* X;

4) *los puntos de* X *que no son de corte son los elementos maximales de* X, *con respecto al orden* $\leqq_e$;

5) *si* $x \in X$, *entonces* $P(x)$ *es un conjunto totalmente ordenado.*

Demostración. Como notamos en el párrafo anterior $\leqq_e$ es reflexiva. Tomemos $x, y \in X$ tales que $x \leqq_e y$ y $y \leqq_e x$. Supongamos que $x \neq y$. Si $x = e$, entonces $y \leqq_e e$, así que $y = e = x$. Si $y = e$, de manera similar deducimos que $x = e = y$. Como estamos suponiendo que $x \neq y$, resulta que $x \neq e$ y $y \neq e$. Entonces x separa a e y y y, además, y separa a e y x. Luego:

$$X - \{x\} = A|B, \quad X - \{y\} = C|D, \quad e \in A \cap C, \quad y \in B \quad \text{y} \quad x \in D.$$

Por el Lema 2.18, $C \cup \{y\} \subset B$. Como $e \in C$, tenemos entonces que $e \in B$. Luego $e \in A \cap B$. Esto contradice el hecho de que A y B son ajenos. Como dicha contradicción proviene de suponer que $x \neq y$, deducimos que $x = y$. Esto prueba que $\leqq_e$ es antisimétrica.

Para ver que $\leqq_e$ es transitiva, sean $x, y, z \in X$ tales que $x \leqq_e y$ y $y \leqq_e z$. Si $e = x$ o $x = y$ o $x = z$ o bien $y = z$, entonces $x \leqq_e z$. Supongamos, por tanto, que $e \neq x$, $x \neq y$, $x \neq z$ y $y \neq z$. Entonces x separa a e y y y, además, y separa a e y z. Luego:

$$X - \{x\} = A|B, \quad X - \{y\} = C|D, \quad e \in A \cap C, y \in B \text{ y } z \in D.$$

Si $x \in D$ entonces, por el Lema 2.18, $C \cup \{y\} \subset B$. Luego, como $e \in C$, resulta que $e \in B$. Por tanto $e \in A \cap B$. En vista de que esto contradice el hecho de que A y B son ajenos, deducimos que $x \notin D$. Luego $x \in C$ y, aplicando de nuevo el Lema 2.18, tenemos que $D \cup \{y\} \subset B$. Como $z \in D$, resulta que $z \in B$. Esto implica que $X - \{x\} = A|B$, con $e \in A$ y $z \in B$, es decir, x separa a e y z. Luego $x \leqq_e z$. De esta manera probamos que $\leqq_e$ es transitiva.

De todo lo anterior tenemos que $\leqq_e$ es un orden parcial en X. Esto prueba 1). Para probar 2), sea $x \in X$ tal que $x \leqq_e e$. Entonces $x = e$, por lo que e es minimal en X. Si $y \in X$ también es minimal en X entonces, como $e \leqq_e y$, por la minimalidad de y se sigue que $y = e$. Así, 2) se cumple.

Para probar 3), veremos que en X existen dos elementos que no son comparables, con respecto a $\leqq_e$. En efecto, como e es un punto de corte de X, $X-\{e\} = C|D$. Tomemos $x \in C$ y $y \in D$. Entonces $x \neq y$, $x \neq e$ y $y \neq e$. Además e separa a x y y. Luego, por el Teorema 2.22, x no separa a e y y y, tampoco, y no separa a e y x. Por tanto, $x \nleqq_e y$ y $y \nleqq_e x$. Esto prueba 3).

Para mostrar 4) supongamos primero que $x \in X$ no es un punto de corte de X. Para ver que x es maximal en X, con respecto a $\leqq_e$, sea $y \in X$ tal que $x \leqq_e y$. Como $\leqq_e$ es un orden parcial en X, para ver que x es maximal en X, debemos verificar que $x = y$. Supongamos, por tanto, que $x \neq y$. Como e es un punto de corte de X y x no es un punto de corte de X, sucede que $x \neq e$. Entonces, al tener que $x \leqq_e y$, resulta que x separa a e y y. Luego $X - \{x\}$ no es conexo. En vista de que esto contradice el hecho de que x no es un punto de corte de X, deducimos que $x = y$. Luego x es maximal en X.

Ahora supongamos que $x \in X$ es maximal en X. Si $x = e$, entonces e es maximal en X. Como $e \leqq_e y$ para cada $y \in Y$, tenemos así que $X = \{e\}$. Esto contradice el hecho de que e es un punto de corte de X. Por tanto $x \neq e$. Ahora bien, si x es un punto de corte de X, entonces $X - \{x\} = A|B$. Como $x \neq e$, podemos elegir A de modo que $e \in A$. En vista de que $B \neq \emptyset$, podemos tomar un punto $y \in B$. Entonces $x \neq y$ y, además, x separa a e y a y. Luego $x \leqq_e y$. Pero al ser x un elemento maximal de X, resulta que $x = y$. Tenemos una contradicción y, por tanto, concluimos que x no es un punto de corte de X. Esto prueba 4).

Para probar 5), tomemos $x \in X$. Como $(X, \leqq_e)$ es un conjunto parcialmente ordenado, al restringir el orden parcial $\leqq_e$ a $P(x)$, tenemos que $P(x)$ es también un conjunto parcialmente ordenado. Vamos a mostrar ahora que cualesquiera dos elementos de $P(x)$ son comparables. Por la definición de $\leqq_e$, tenemos que $e, x \in P(x)$ y $e \leqq_e x$. Entonces los elementos e y x de $P(x)$ son comparables. También cualquier elemento de $P(x)$ es comparable con e y, a su vez, comparable con x. Resta probar que los elementos de $P(x) - \{e, x\}$ son comparables. Tomemos, por tanto, $p, q \in P(x) - \{e, x\}$ y supongamos que $p \nleqq_e q$. Como $p \leqq_e x$, $q \leqq_e x$ y $p, q \notin \{e, x\}$, sucede que p y q separan a e y x. Además, como $p \nleqq_e q$, resulta que p no separa a e y q. Luego $X - \{p\} = G|H$, $X - \{q\} = I|J$, $e \in G \cap I$, $x \in H \cap J$ y $q \in G$. Si $p \in I$ entonces, por el Lema 2.18, $J \cup \{q\} \subset G$. Como $x \in J$, esto implica que

$x \in G$. Luego $x \in G \cap H$. En vista de que esto contradice el hecho de que G y H son ajenos, deducimos que $p \notin I$. Luego $p \in J$ y, como $X - \{q\} = I|J$ con $e \in I$ y $p \in J$, sucede que q separa a e y p. Luego $q \leqq_e p$. Esto muestra que p y q son comparables. Así, 5) se cumple. □

En la Sección 4.4.3, generalizaremos el orden del punto de corte a espacios localmente conexos.

2.4.1. $POTS$ Débiles

En la presente subsección vamos a introducir un nuevo tipo de espacio topológico con una estructura de orden.

Definición 2.25. *Sea X un espacio topológico con un orden parcial $\leqq$. Decimos que X es un* ***espacio topológico parcialmente ordenado débil*** *si $\leqq$ satisface la siguiente propiedad:*

($\star$) *para cada $x \in X$ tal que x no es maximal en X, existe un subconjunto cerrado K_x de X tal que $K_x \subset S(x)$ y $K_x - \{x\}$ es no vacío y creciente.*

Decimos, además, que el orden parcial $\leqq$ es ***débilmente continuo*** *si satisface la propiedad ($\star$).*

Para simplificar si X es un espacio topológico parcialmente ordenado débil, diremos que X, o bien que el par $(X, \leqq)$ es un $POTS$ débil. En el siguiente resultado mostramos que las relaciones semicontinuas superiormente son débilmente continuas.

Teorema 2.26. *Sea X un espacio topológico con un orden parcial $\leqq$. Si $\leqq$ es semicontinuo superiormente, entonces $\leqq$ es débilmente continuo.*

Demostración. Sea $x \in X$ tal que x no es maximal en X. Entonces existe $y \in X$ tal que $x \leqq y$ y $x \neq y$. Hagamos $K_x = S(x)$. Por la Proposición 1.35, K_x es cerrado en X. Además $K_x \subset S(x)$ y $y \in K_x - \{x\}$. Supongamos que $z \in S(K_x - \{x\})$. Entonces $w \leqq z$, para algún $w \in K_x - \{x\}$. Luego $x \leqq w$ y, por transitividad, $x \leqq z$ Esto implica que $z \in S(x) = K_x$. Si $z = x$, entonces de $w \leqq z$ se sigue que $w \leqq x$. Como también $x \leqq w$ y $\leqq$ es antisimétrica, tenemos que $w = x$. Esto es una contradicción, así que $z \neq x$. Luego $z \in K_x - \{x\}$, probando que $K_x - \{x\}$ es creciente. Por tanto, $\leqq$ es débilmente continuo. □

Ahora mostraremos que el orden del punto de corte que indicamos en la Definición 2.23, es débilmente continuo.

Teorema 2.27. *Sean X un espacio conexo y T_1 y e un punto de corte de X. Entonces $\leqq_e$ es débilmente continuo. Por tanto, $(X, \leqq_e)$ es un POTS débil.*

Demostración. En la demostración de la parte 4) del Teorema 2.24, vimos que e no es un elemento maximal en X. Además, como $e \leqq_e x$ para cada $x \in X$, resulta que $S(e) = X$. Hagamos $K_e = X$. Entonces K_e es cerrado en X, $K_e \subset S(e)$ y $K_e - \{e\} = X - \{e\} \neq \emptyset$. Tomemos $x \in S(K_e - \{e\})$. Entonces $y \leqq_e x$, para algún $y \in K_e - \{e\}$. Luego, $y \in S(e)$, por lo que $e \leqq_e y$. Por transitividad $e \leqq_e x$. Si $x = e$ entonces, de $y \leqq_e x$, se sigue que $y \leqq_e e$, así que $y = e$. Esto es un absurdo, por lo que $x \neq e$. Luego $x \in X - \{e\} = K_e - \{e\}$ y, así, $K_e - \{e\}$ es creciente.

Ahora supongamos que $x \in X - \{e\}$ no es maximal en X. Entonces existe $y \in X$ tal que $x \leqq_e y$ y $x \neq y$. Por tanto, x separa a e y y, de donde $X - \{x\} = E|F$, con $e \in E$ y $y \in F$. Hagamos $K_x = F \cup \{x\}$. Por el Lema 2.17, $K_x = \mathrm{cl}_X(F)$, así que K_x es cerrado en X. Además, $K_x - \{x\} = F \neq \emptyset$. Vamos a probar ahora que $K_x \subset S(x)$. Notemos primero que $x \leqq_e x$. Además, para cada $z \in F$, de la igualdad $X - \{x\} = E|F$ y el hecho de que $e \in E$, se sigue que x separa a e y z. Luego $x \leqq_e z$, de donde $z \in S(x)$. Esto muestra que $K_x \subset S(x)$.

Por último, veamos que $K_x - \{x\} = F$ es creciente. Tomemos $z \in S(F)$. Entonces $w \leqq_e z$, para algún $w \in F$. Como $F \subset X - \{x\}$, resulta que $w \neq x$. Si $w = z$, entonces $z \in F$. Si $w \neq z$ entonces, como $w \leqq_e z$, sucede que w separa a e y z. Luego $X - \{w\} = A|B$, con $e \in A$ y $z \in B$. Ahora bien, de $x \neq w$, sucede que $x \in A$ o bien $x \in B$. Si $x \in B$, por el Lema 2.18, $A \cup \{w\} \subset F$. Luego $e \in F$, pues $e \in A$. Esto implica que $e \in E \cap F$, lo cual es una contradicción, así que $x \in A$. Aplicando de nuevo el Lema 2.18, tenemos que $B \cup \{w\} \subset F$. Luego $z \in F$ pues $z \in B$. Con esto hemos probado que $S(F) \subset F$, de donde F es creciente. Como consecuencia de esto, el orden parcial $\leqq_e$ es débilmente continuo. Por tanto $(X, \leqq_e)$ es un $POTS$ débil. $\square$

Más adelante, en la Sección 4.4.3, mostraremos que cuando X es localmente conexo $(X, \leqq_e)$ es un $POTS$.

A partir de este momento, en la presente sección, supondremos que un

POTS débil compacto es un *POTS* débil que, además, es un espacio compacto. Los *POTS* débiles compactos satisfacen las dos propiedades que se enuncian en el siguiente resultado.

Teorema 2.28. *Supongamos que X es un POTS débil compacto. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *X posee un elemento maximal;*

2) *si X no está totalmente ordenado y, para cada $x \in X$, $P(x)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces X tiene al menos dos elementos maximales.*

Demostración. La prueba de 1) es similar a la prueba del Teorema 2.11. Considerando $\mathcal{L} = \{K_x : x \in M\}$, donde M es una cadena maximal en X y K_x satisface la propiedad $(\star)$ de la Definición 2.25.

Para probar 2) supongamos X no está totalmente ordenado. Entonces existen dos elementos distintos $x, y \in X$ que no son comparables. Supongamos que existe $z \in S(x) \cap S(y)$. Entonces $x, y \in P(z)$ y, como $P(z)$ está totalmente ordenado, x y y son comparables. Como esto es una contradición, tenemos que $S(x) \cap S(y) = \emptyset$.

Supongamos que x y y no son maximales en X. Como X es un *POTS* débil, existen subconjuntos cerrados K_x y K_y de X tales que $K_x \subset S(x)$, $K_y \subset S(y)$ y los conjuntos $K_x - \{x\}$ y $K_y - \{y\}$ son no vacíos y crecientes. Como $S(x) \cap S(y) = \emptyset$, tenemos que $K_x \cap K_y = \emptyset$. No es difícil probar que K_x y K_y son *POTS* débiles compactos. Entonces, por 1), existen $x_0 \in K_x$ y $y_0 \in K_y$ de modo que x_0 es maximal en K_x y y_0 es maximal en K_y. Como los conjuntos $K_x - \{x\}$ y $K_y - \{y\}$, que están contenidos en $S(x)$ y $S(y)$ respectivamente, son crecientes en X, x_0 y y_0 son elementos maximales de X. Ahora bien, como K_x y K_y son ajenos, $x_0 \neq y_0$. Esto prueba que X tiene al menos dos elementos maximales. □

Estamos en condiciones de presentar una prueba alternativa del Teorema 2.20. Originalmente el resultado siguiente aparece probado en [26, Sección 4, p. 215] para continuos T_2. Sin embargo, como indicamos, es también válido para continuos T_1. Notemos que, mientras que en la prueba del Teorema 2.20, fue importante definir un orden parcial semicontinuo inferiormente, ahora será importante definir un orden parcial débilmente continuo (noción que, por el Teorema 2.26, es más débil que la semicontinuidad superior).

Teorema 2.29. *Un continuo T_1 tiene al menos dos puntos que no son de corte.*

Demostración. Sea X un continuo T_1 y no degenerado. Si X no posee puntos de corte entonces, como X es no degenerado, X tiene al menos dos puntos que no son de corte de X. Supongamos ahora que X tiene un punto de corte e. Consideremos el orden del punto de corte $\leqq_e$ en X. Por la parte 1) del Teorema 2.24, $\leqq_e$ es un orden parcial en X. Además, por el Teorema 2.27, $\leqq_e$ es débilmente continuo. Entonces $(X, \leqq_e)$ es un $POTS$ débil compacto. Por las propiedades 2) y 4) del Teorema 2.24, X no está totalmente ordenado y, para cada $x \in X$, $P(x)$ es un conjunto totalmente ordenado. Entonces, por la parte 2) del Teorema 2.28, X tiene al menos dos elementos maximales p y q. Por la parte 3) del Teorema 2.24, p y q no son de corte en X. $\square$

2.5. Espacios Casi Localmente Convexos

En la presente sección veremos que la noción usual de convexidad en $\mathbb{R}$ se puede adaptar a espacios topológicos casi ordenados. Utilizando dicha noción, presentaremos los llamados espacios casi localmente convexos y, por último, probaremos que los espacios compactos casi ordenados son casi localmente convexos (ver Definición 1.66).

Si $(X, \leqq)$ es un $COCO$ y $a, b \in X$ son tales que $a \leqq b$, definimos:

$$[a, b] = \{x \in X : a \leqq x \leqq b\}.$$

Recordemos la Definición 1.13, en la que si $(X, \leqq)$ es un $COCO$ y $A \subset X$, definimos:

$$P(A) = \{y \in X : y \leqq x \text{ para algún } x \in A\},$$

como el conjunto de los predecesores de A. Además:

$$S(A) = \{y \in X : x \leqq y \text{ para algún } x \in A\}$$

es el conjunto de los sucesores de A y $E(A) = P(A) \cap S(A)$ es el conjunto de los equivalentes de A. Recordemos que $A \subset E(A)$ y, si $A \subset B \subset X$, entonces $E(A) \subset E(B)$.

Definición 2.30. *Supongamos que X es un COCO y que $A \subset X$. Decimos que A es **convexo** si $A = E(A)$.*

Es inmediato de la definición que si $(X, \leqq)$ es un *COCO* y $A \subset X$, entonces A es convexo si y sólo si $E(A) \subset A$. También, que A es convexo si y sólo si para cualesquiera $a, b \in A$ y $x \in X$ si $a \leqq x \leqq b$, entonces $x \in A$. En otras palabras A es convexo si y sólo si para cualesquiera $a, b \in A$ con $a \leqq b$, se tiene que $[a, b] \subset A$. Como caso particular, X es convexo.

Vamos a presentar en el siguiente resultado algunas propiedades fundamentales de los conjuntos convexos.

Teorema 2.31. *Supongamos que X es un COCO y que $A, B \subset X$. Entonces*

1) *si A es creciente o bien decreciente, entonces A es convexo;*

2) *si A y B son convexos, entonces $A \cap B$ es convexo, pero no necesariamente $A \cup B$ es convexo;*

3) *los conjuntos $P(A)$, $S(A)$ y $E(A)$ son convexos;*

4) *si $x \in A$ y A es convexo, entonces $E(x) \subset A$.*

Demostración. Supongamos que A es decreciente. Entonces $E(A) = P(A) \cap S(A) = A \cap S(A) \subset A$. Luego A es convexo. De manera similar se prueba que A es convexo, cuando A es creciente. Así, 1) se cumple.

Supongamos ahora que A y B son convexos. Por el Teorema 1.21, $E(A \cap B) \subset E(A) \cap E(B) = A \cap B$. Luego $A \cap B$ es convexo. Consideremos ahora el par $(\mathbb{N}, \leq)$, donde $\leq$ es el orden usual en $\mathbb{N}$. Es claro que $(\mathbb{N}, \leq)$ es un *COCO*. Sean $A = \{1\}$ y $B = \{3\}$. Entonces A y B son convexos, $2 \in E(\{1, 3\}) = E(A \cup B)$, pero $2 \notin E(\{1\}) \cup E(\{3\}) = E(A) \cup E(B)$. Por tanto $E(A \cup B) \nsubseteq E(A) \cup E(B)$, de donde $A \cup B$ no es convexo. Esto prueba 2).

Por el Teorema 1.22, $P(A)$ es decreciente y $S(A)$ es creciente. Entonces, por 1), $P(A)$ y $S(A)$ son convexos. Luego, por 2), $E(A) = P(A) \cap S(A)$ es convexo. Esto prueba 3). Para ver 4) notemos que si $x \in A$ y A es convexo, entonces $E(x) = E(\{x\}) \subset E(A) = A$. Esto prueba 4). $\square$

Supongamos que X es un *COCO* y que $\{U_\alpha \colon \alpha \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos convexos de X. Entonces, por el Teorema 1.21,

$$E\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} E(U_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha.$$

Esto implica que $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ es convexo. En otras palabras, cualquier intersección de subconjuntos convexos de X, es convexa. Entonces, al igual que hicimos en la Subsección 1.3.3, en donde para cada $A \subset X$, consideremos los conjuntos

$$d(A) = \bigcap\{U \subset X \colon U \text{ es decreciente y } A \subset U\}$$

e

$$i(A) = \bigcap\{U \subset X \colon U \text{ es creciente y } A \subset U\},$$

podemos ahora considerar el conjunto

$$c(A) = \bigcap\{U \subset X \colon U \text{ es convexo y } A \subset U\}.$$

Por lo que indicamos anteriormente, $c(A)$ es convexo. Además, la versión equivalente al Teorema 1.23, para convexidad, es la que se enuncia a continuación. Su demostración es similar a la del Teorema 1.23.

Teorema 2.32. *Si X es un COCO y $A \subset X$, entonces A es convexo si y sólo si $A = c(A)$. Más aún, $c(A)$ es el menor subconjunto convexo de X que contiene a A.*

Tenemos también el siguiente resultado.

Teorema 2.33. *Si X es un COCO y $A \subset X$, entonces A es convexo si y sólo si $i(A) \cap d(A) = A$.*

Demostración. Notemos primero que $A \subset i(A) \cap d(A)$ y que, por la parte 1) del Teorema 2.31:

$$\{U \subset X \colon U \text{ es decreciente y } A \subset U\} \subset \{U \subset X \colon U \text{ es convexo y } A \subset U\}$$

y

$$\{U \subset X \colon U \text{ es creciente y } A \subset U\} \subset \{U \subset X \colon U \text{ es convexo y } A \subset U\}.$$

Al tomar la intersección, resulta que $i(A) \subset c(A)$ y $d(A) \subset c(A)$. Luego $A \subset i(A) \cap d(A) \subset c(A)$. De aquí se sigue que si A es convexo, entonces $i(A) \cap d(A) = A$. Ahora supongamos que $i(A) \cap d(A) = A$. Como $i(A)$ es creciente y $d(A)$ es decreciente, por la parte 1) del Teorema 2.31, $i(A)$ y $d(A)$ son convexos. Luego, por la parte 2) del Teorema 2.31, $i(A) \cap d(A)$ es convexo. Esto implica que A es convexo. $\square$

Consideremos ahora las siguientes nociones.

Definición 2.34. *Supongamos que X es un COCO. Decimos que X es:*

1) ***casi localmente convexo*** *si para cada $x \in X$ y cada abierto U en X tal que $E(x) \subset U$, existe un abierto y convexo V en X tal que $E(x) \subset V \subset U$;*

2) ***localmente convexo*** *si para cada $x \in X$ y cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un abierto y convexo V en X tal que $x \in V \subset U$.*

Para simplificar, si X es casi localmente convexo, diremos que X es clc. Por la parte 4) del Teorema 2.31, si X es localmente convexo entonces X es clc. Además, si X es un *COPO*, entonces $E(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$ (Teorema 1.15). Esto implica que si X es un *COPO* entonces X es clc si y sólo si X es localmente convexo.

En la Definición 1.66 aparece la noción de espacio compacto casi ordenado. Como una aplicación del Teorema 1.70, tenemos el siguiente resultado, en donde $\leqq$ representa el casi orden del espacio.

Teorema 2.35. *Si X es un espacio compacto casi ordenado, entonces X es* clc*.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tales que $E(x) \subset U$. Si $U = X$, entonces $V = X$ es un abierto y convexo en X tal que $E(x) \subset V \subset U$. Supongamos, por tanto, que $U \neq X$. Afirmamos que:

1) para cada $t \in X - U$, existe un abierto U_t en X tal que $x \in U_t$, $t \notin \mathrm{cl}_X(U_t)$ y U_t es decreciente o bien creciente.

Para probar 1), sea $t \in X - U$. Como $E(x) \subset U$, resulta que $t \notin E(x) = P(x) \cap S(x)$. Entonces $t \notin P(x)$ o bien $t \notin S(x)$. Luego $t \nleqq x$ o bien $x \nleqq t$.

Supongamos primero que $t \nleq x$. Por el Teorema 1.70, existe $f_t \in C(X, I)$ tal que $f_t(x) = 0$ y $f_t(t) = 1$. Sean:

$$U_t = f_t^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{y} \quad V_t = f_t^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Es claro que $x \in U_t$ y $t \in V_t$. Por el Teorema 1.51, U_t es abierto decreciente en X, V_t es abierto creciente en X y $U_t \cap V_t = \emptyset$. Entonces V_t es un abierto en X que tiene a t y no intersecta a U_t. Luego $t \notin \mathrm{cl}_X(U_t)$. También se cumple que $x \notin \mathrm{cl}_X(V_t)$.

Supongamos ahora que $x \nleq t$. Por el Teorema 1.70, existe $g_t \in C(X, I)$ tal que $g_t(t) = 0$ y $g_t(x) = 1$. Sean:

$$U_t = g_t^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) \quad \text{y} \quad V_t = g_t^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Es claro que $x \in U_t$ y $t \in V_t$. Por el Teorema 1.51, U_t es abierto creciente en X, V_t es abierto decreciente en X y $U_t \cap V_t = \emptyset$. Entonces V_t es un abierto en X que tiene a t y no intersecta a U_t. Luego $t \notin \mathrm{cl}_X(U_t)$. También se cumple que $x \notin \mathrm{cl}_X(V_t)$. De esta manera 1) se cumple.

Para cada $t \in X - U$, tomemos un abierto U_t de X como se indica en 1). Entonces $x \in U_t$, para toda $t \in X - U$. Como $X - U$ es cerrado en el espacio compacto X, tenemos que $X - U$ es compacto. Además, por 1), $\{X - \mathrm{cl}_X(U_t) : t \in X - U\}$ es una familia de abiertos en X tales que:

$$X - U \subset \bigcup_{t \in X - U} (X - \mathrm{cl}_X(U_t)).$$

Por la compacidad de $X - U$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in X - U$ de modo que:

$$X - U \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X - \mathrm{cl}_X(U_{t_i})).$$

Hagamos $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{t_i}$. Como $\bigcup_{i=1}^{n} (X - \mathrm{cl}_X(U_{t_i})) = X - \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_X(U_{t_i})$, tenemos que:

$$x \in V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{t_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_X(U_{t_i}) \subset U.$$

Es decir $x \in V \subset U$. Ahora bien, por 1), cada conjunto $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}$ es abierto. Luego V es abierto. También por 1), para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, U_{t_i} es decreciente o bien creciente. Esto implica, por la parte 1) del Teorema 2.31, que U_{t_i} es convexo. Luego V es una intersección de conjuntos convexos y, por tanto, V es convexo. Como $x \in V$, por la parte 4) del Teorema 2.31, $E(x) \subset V$. Con esto hemos probado que V es un abierto y convexo en X tal que $E(x) \subset V \subset U$. Por tanto, X es clc. □

Corolario 2.36. *Si X es un espacio compacto ordenado, entonces X es localmente convexo.*

Demostración. Como X es un espacio compacto ordenado, X es un espacio compacto casi ordenado. Luego, por el Teorema 2.35, X es clc. Esto implica, como X es un $COPO$, que X es localmente convexo. □

Notemos que X es un espacio compacto y casi ordenado si y sólo si X es un $QOTS$ compacto y T_2, cuyo casi orden es continuo. En estos términos es como aparece enunciado originalmente el Teorema 2.35 en [25, Teorema 2, p. 147]. Además, como se menciona en dicho artículo, el Corolario 2.36 fue probado por L. Nachbin (ver [15, Capítulo III]).

En [24, Corolario 10.1, p. 364], L. E. Ward, Jr. prueba el Teorema 2.35 sin utilizar el hecho de que, en un espacio compacto casi ordenado, el casi orden es fuertemente continuo (Teorema 1.70). En su lugar utiliza dos resultados. Uno de ellos es el hecho de que los espacios compactos casi ordenados son SN (Teorema 1.68) y el otro es el siguiente teorema.

Teorema 2.37. *Supongamos que X es SN y que satisface la siguiente propiedad:*

($\star$) *si $A, B \subset X$ son cerrados en X y W es un abierto en X tal que $A \cap B \subset W$, entonces existen abiertos U y V en X de modo que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = W$.*

Entonces para cada cerrado decreciente A en X, cada cerrado creciente B en X y cada abierto W en X tal que $A \cap B \subset W$, existe un subconjunto abierto y convexo C de X tal que $A \cap B \subset C \subset W$.

Demostración. Sea A un cerrado decreciente en X, B un cerrado creciente en X y W un abierto en X, de modo que $A \cap B \subset W$. Por ($\star$), existen abiertos U y V en X de modo que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = W$. Entonces A y $X - U$

son cerrados en X tales que $A \cap (X - U) = \emptyset$ y A es decreciente. Como X es SN, existen abiertos P_1 y Q_1 en X tales que $A \subset P_1$, $X - U \subset Q_1$, $P_1 \cap Q_1 = \emptyset$, P_1 es decreciente y Q_1 es creciente. Como $X - V$ y B son cerrados en X tales que $(X - V) \cap B = \emptyset$ y B es creciente, por ser X un espacio SN, existen abiertos P_2 y Q_2 en X tales que $X - V \subset P_2$, $B \subset Q_2$, $P_2 \cap Q_2 = \emptyset$, P_2 es decreciente y Q_2 es creciente. Sea $C = P_1 \cap Q_2$. Entonces

$$A \cap B \subset P_1 \cap Q_2 \subset (X - Q_1) \cap (X - P_2) \subset U \cap V = W.$$

Por tanto, $A \cap B \subset C \subset W$. Además C es abierto en X, por ser la intersección de dos abiertos en X. Como P_1 es decreciente y Q_2 es creciente, por la parte 1) del Teorema 2.31, P_1 y Q_2 son convexos. Luego, por la parte 2) del Teorema 2.31, C es convexo. $\square$

En estos términos, la demostración alternativa del Teorema 2.35 queda como sigue: primero X es SN, pues X es un espacio compacto casi ordenado. Como X es compacto y T_2, entonces X es normal. Lo que ahora se indica es que los espacios normales satisfacen la propiedad ($\star$) del Teorema 2.37. Tomemos ahora $x \in X$ y un abierto U en X tales que $E(x) \subset U$. Como $E(x) = P(x) \cap S(x)$, $P(x)$ es cerrado decreciente, $S(x)$ es cerrado creciente y $P(x) \cap S(x) \subset U$, por el Teorema 2.37, existe un subconjunto abierto y convexo C de X tal que $P(x) \cap S(x) \subset C \subset W$. Por tanto, X es clc.

Como se puede observar, la diferencia entre las dos demostraciones del Teorema 2.35 está en que la primera utiliza el Lema de Urysohn Generalizado, mientras que la segunda no.

Capítulo 3

Cadenas Compactas y Cadenas Conexas

3.1. Introducción

Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $COCO$. En la Definición 2.7 indicamos lo que es una cadena en X y, a su vez, lo que entendemos por cadena maximal en X. Luego, en el Teorema 2.8, probamos que X siempre posee una cadena maximal. Si pedimos, en su lugar, que X sea un $QOTS$, entonces como vimos en el Lema 2.10, toda cadena maximal en X es cerrada en X. Si X es un $QOTS$ compacto, tenemos por tanto, que toda cadena maximal en X es compacta. En otras palabras la compacidad de un $QOTS$ es una condición suficiente para que toda cadena maximal sea compacta. En el presente capítulo, veremos que dicha condición no es necesaria. Vamos a dar tres condiciones que resultarán ser equivalentes al hecho de que toda cadena maximal sea compacta (ver Teorema 3.19).

En el presente capítulo también daremos una relación de compacidad y completez cuando el espacio es una cadena con la topología del intervalo. Al final daremos condiciones, bajo las cuales, las cadenas maximales en un $POTS$ son conexas. Como consecuencia de este resultado, se sigue que el hiperespacio de los subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo T_2 es conexo por arcos.

3.2. Conjuntos Simplemente Ordenados

En la presente sección vamos a tratar con una estructura de orden, ligada a la que definimos como *COTO*.

Definición 3.1. $(X, \lneqq)$ *es un* ***conjunto simplemente ordenado*** *si se tiene que:*

1) *para cada $a \in A$, no se cumple que $a \lneqq a$;*

2) *para cada $a, b, c \in X$ si $a \lneqq b$ y $b \lneqq c$, entonces $a \lneqq c$;*

3) *para cada $a, b \in X$ con $a \neq b$, tenemos que $a \lneqq b$ o bien $b \lneqq a$.*

Si $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado, decimos que $\lneqq$ es un ***orden simple*** *en X.*

Cuando una relación satisface la propiedad 1) de la Definición 3.1, decimos que es *antirreflexiva*. En éstos términos un orden simple es una relación antireflexiva y transitiva, en la que cada dos elementos distintos son comparables bajo $\lneqq$. Como hicimos en el Capítulo 1, si $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado, es común decir que X es *simplemente ordenado*. En tal situación, si $a, b \in X$ y $a \neq b$, entonces no puede suceder que $a \lneqq b$ y $b \lneqq a$ pues, de ser este el caso, por transitividad, $a \lneqq a$, lo cual contradice la antirreflexividad de $\lneqq$. Notemos también que si $a, b, c \in X$ son tales que $a \lneqq b$ y $b \lneqq c$, entonces $a \neq c$ pues, por transitividad, sucede que $a \lneqq c$ así que, por antireflexividad, $a \neq c$.

Supongamos que $(X, \leqq)$ es un *COTO*. Entonces X es un *COCTO* en el que se cumple la propiedad de antisimetría. Por la Definición 2.7, tenemos que X es una cadena en la que se cumple la antisimetría. Podemos decir entonces que un *COTO* es una *cadena antisimétrica*. Notemos que el orden total $\leqq$ induce una relación $\lneqq$ en X como sigue:

$$\text{para } a, b \in X, \quad a \lneqq b \text{ si y sólo si } a \leqq b \text{ y } a \neq b. \tag{3.2.1}$$

Entonces $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado. Al orden simple $\lneqq$, dado en (3.2.1), se le llama el *orden estricto* de $\leqq$. A la inversa, si $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado, entonces $\lneqq$ induce una relación $\leqq$ en X como sigue:

$$\text{para } a, b \in X, \quad a \leqq b \text{ si y sólo si } a = b \text{ o bien } a \lneqq b. \tag{3.2.2}$$

Entonces $(X, \leqq)$ es un *COTO*. De esta manera, un conjunto simplemente ordenado $(X, \lneqq)$ puede llevarse a un *COTO* $(X, \leqq)$, definiendo el orden $\leqq$ como en (3.2.2). También un *COTO* $(X, \leqq)$ puede llevarse a un conjunto simplemente ordenado $(X, \lneqq)$, definiendo el orden $\lneqq$ como en (3.2.1). En este sentido podemos intercambiar un orden simple y un orden total, cuando nos convenga.

3.3. Cotas en un *COCO*

3.3.1. Elementos Maximales y Minimales

Supongamos que $(X, \leqq)$ es un *COCO* y que $A \subset X$. Como A, con el casi orden restringido $\leqq_{|A}$ es un *COCO*, podemos considerar las nociones de elemento minimal y elemento maximal en A, como fueron dadas en la Definición 2.6. Entonces:

1) $a \in X$ es un *elemento minimal de* A si $a \in A$ y, para cada $x \in A$, de $x \leqq a$ se sigue que $a \leqq x$;

2) $b \in X$ es un *elemento maximal de* A si $b \in A$ y, para cada $x \in A$, de $b \leqq x$ se sigue que $x \leqq b$.

Definimos ahora

$$\min(A) = \{a \in X \colon a \text{ es un elemento minimal de } A\}$$

y

$$\max(A) = \{b \in X \colon b \text{ es un elemento maximal de } A\}.$$

Vamos ahora a presentar una serie de propiedades de los minimales y los maximales de un conjunto. Comenzamos con el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea $(C, \leqq)$ una cadena. Si T y R son subconjuntos no vacíos de C tales que $T \subset R$, entonces*

1) *para todo $x \in \max(T)$ y $y \in \max(R)$, se tiene que $x \leqq y$;*

2) *para cada $w \in \min(T)$ y $z \in \min(R)$, tenemos que $z \leqq w$.*

Demostración. Sean $x \in \max(T)$ y $y \in \max(R)$. Como $T \subset R \subset C$, sucede que x y y son elementos de la cadena C. Luego $x \leqq y$ o bien $y \leqq x$. En vista de que $x \in R$ y de que $y \in \max(R)$ siempre sucede que $x \leqq y$. Esto prueba 1). La demostración de 2) es similar. □

Ahora indicamos cómo calcular $\min(A)$ y $\max(A)$, cuando A es una cadena.

Teorema 3.3. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un COCO y que $A \subset X$ es una cadena. Entonces:*

1) *si* $\min(A) \neq \emptyset$, *sucede que* $\min(A) = E(x_0) \cap A$, *para cada* $x_0 \in \min(A)$;

2) *si* $\max(A) \neq \emptyset$, *entonces* $\max(A) = E(x_1) \cap A$, *para toda* $x_1 \in \max(A)$.

En particular, si $\leqq$ es semicontinuo y A es cerrado en X, $\min(A)$ *y* $\max(A)$ *son cerrados en X.*

Demostración. Tomemos $x_0 \in \min(A)$. Si $x \in \min(A)$ entonces, como A es una cadena y $x_0, x \in A$, $x \leqq x_0$ o bien $x_0 \leqq x$. En cualquier caso, por la minimalidad de x_0 y de x, tenemos que $x \in E(x_0)$. Luego $\min(A) \subset E(x_0) \cap A$. Tomemos ahora $y \in E(x_0) \cap A$. Para ver que y es un elemento minimal de A, sea $z \in A$ tal que $z \leqq y$. Como $z \leqq y$ y $y \leqq x_0$, por transitividad, $z \leqq x_0$. Esto implica, pues $x_0 \in \min(A)$, que $x_0 \leqq z$. Luego $y \leqq x_0$ y $x_0 \leqq z$, de donde $y \leqq z$. Esto muestra que $y \in \min(A)$. Por tanto, $E(x_0) \cap A \subset \min(A)$. Con esto probamos que $\min(A) = E(x_0) \cap A$. De manera similar se prueba que $\max(A) = E(x_1) \cap A$, para cada $x_1 \in \max(A)$. Si $\leqq$ es semicontinuo y A es cerrado en X, entonces, usando 1), 2) y el Corolario 1.36, resulta que $\min(A)$ y $\max(A)$ son cerrados en X. □

En la Proposición 1.43, probamos que si X es un espacio topológico y $\leqq$ es un casi orden continuo en X, entonces $P(A)$ y $S(A)$ son cerrados en X, para cada subconjunto compacto A de X. Si, en su lugar, el casi orden $\leqq$ es semicontinuo y $A \subset X$, entonces en el siguiente teorema mostramos otras condiciones, bajo las cuales, $P(A)$ y $S(A)$ son cerrados en X.

Teorema 3.4. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un QOTS y que $A \subset X$ es una cadena. Entonces:*

1) *Si* $\min(A) \neq \emptyset$, *resulta que $S(A) = S(a)$, para cada $a \in$* $\min(A)$. *En particular, $S(A)$ es cerrado en X.*

2) *Si* $\max(A) \neq \emptyset$, *sucede que* $P(A) = P(a)$, *para cada* $a \in \max(A)$. *En particular,* $P(A)$ *es cerrado en* X.

Demostración. Para ver 1), tomemos $a \in \min(A)$. Entonces $a \in A$ y, por la parte 1) del Teorema 1.19, $S(a) \subset S(A)$. Tomemos $z \in S(A)$. Entonces $x \leqq z$, para alguna $x \in A$. Como A es una cadena en X, $a \leqq x$ o bien $x \leqq a$. En cualquier situación, en vista de que a es un elemento minimal de A, se tiene que $a \leqq x$. Luego, por transitividad, $a \leqq z$ así que $z \in S(a)$. Esto prueba que $S(A) \subset S(a)$. Como la otra contención también es cierta, $S(A) = S(a)$. Ahora bien, por la Proposición 1.36, $S(a)$ es cerrado en X. Luego $S(A)$ es cerrado en X. Esto prueba 1). La prueba de 2) es similar. $\square$

Corolario 3.5. *Supongamos que* $(X, \leqq)$ *es un* $QOTS$ *y que* $A \subset X$ *es una cadena en* X. *Si* $\min(A) \neq \emptyset$ *y* $\max(A) \neq \emptyset$, *entonces* $E(A)$ *es cerrado en* X.

Demostración. Como $\min(A) \neq \emptyset$ y $\max(A) \neq \emptyset$, por el Teorema 3.4, $P(A)$ y $S(A)$ son cerrados en X. Luego $E(A) = P(A) \cap S(A)$, es cerrado en X. $\square$

Bajo las condiciones del corolario anterior, tenemos que $E(A) = P(a) \cap S(b)$, para cada $(a, b) \in \min(A) \times \max(A)$.

Si $(X, \leqq)$ es un $QOTS$ y $A \subset X$ es compacto y no vacío entonces, por el Teorema 2.13, $\min(A) \neq \emptyset$ y $\max(A) \neq \emptyset$. Sin embargo, no podemos concluir de aquí que $P(A)$ y $S(A)$ son cerrados en X, a menos que $\leqq$ sea continuo o que A sea una cadena.

3.3.2. Elementos Máximos y Mínimos

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 3.6. *Supongamos que* $(X, \leqq)$ *es un COCO, que* $A \subset X$ *y que* $a, b \in X$. *Decimos que:*

1) *a es un* ***elemento mínimo*** *de A si $a \in A$ y $a \leqq x$, para cada $x \in A$;*

2) *b es un* ***elemento máximo*** *de A si $b \in A$ y $x \leqq b$, para cada $x \in A$.*

Si $(X, \leqq)$ es un *COCO* y $A \subset X$ tiene un elemento mínimo a, entonces $a \in A$ y, como $a \leqq x$ para cada $x \in A$, si $x \leqq a$ entonces $a \leqq x$. Esto muestra que todo elemento mínimo de A es un elemento minimal de A. Similarmente, todo elemento máximo de A es un elemento maximal de A.

Si $(X, \leqq)$ es un *COPO* y $A \subset X$ tiene un elemento mínimo a, entonces a es único. En efecto, si y es un elemento mínimo de A, entonces $y \leqq a$, pues $a \in A$. De manera similar $a \leqq y$. Luego, por la antisimetría, $a = y$. De forma análoga se prueba que si A tiene un elemento máximo, éste es único. En particular, si X es un *COTO* y $A \subset X$ tiene un elemento mínimo (respectivamente, máximo), éste es único. Como todo elemento mínimo es minimal, si X es un *COPO* y $A \subset X$ tiene un elemento mínimo, entonces dicho elemento es el único elemento mínimo y, a su vez, el único elemento minimal de A. Lo mismo se deduce si A tiene un elemento máximo.

Si $(X, \leqq)$ es un *COCTO* (es decir, si X es una cadena) y $A \subset X$ tiene un elemento minimal a, entonces a es un elemento mínimo de A. Para ver esto tomemos $x \in A$. Entonces $a \leqq x$ o bien $x \leqq a$. En el segundo caso, como a es un elemento minimal de a, resulta que $a \leqq x$. Por tanto $a \leqq x$, para cada $x \in A$. Esto prueba que a es un elemento mínimo de A. Con esto probamos que los elementos minimales de A son elementos mínimos de A. Como también los elementos mínimos de A son elementos minimales de A deducimos que, en un *COCTO*, la noción de elemento mínimo es la misma que la de elemento minimal. De manera similar se deduce que, en un *COCTO*, la noción de elemento máximo es la misma que la de elemento maximal.

Si $(X, \leqq)$ es un *COTO* entonces, como X es un *COPO* y también un *COCTO*, las nociones de elemento minimal y elemento mínimo coinciden y, cuando uno de ellos existe, entonces es único. De manera similar, las nociones de elemento maximal y elemento máximo coinciden y cuando uno de ellos existe, entonces es único.

3.3.3. Supremo e Ínfimo en un *COCO*

Aunque ya en el Capítulo 1 utilizamos la noción de cota superior para un orden parcial, en donde el orden es la contención, vamos ahora a dar la definición general de cota superior y de cota inferior.

Definición 3.7. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un COCO y que $A \subset X$. Decimos que:*

1) *A está* ***acotado superiormente*** *en X, si existe $b \in X$ tal que $a \leqq b$, para cada $a \in A$. A b se le llama una* ***cota superior*** *de A en X.*

2) *A está **acotado inferiormente** en X, si existe $x \in X$ tal que $x \leqq a$, para cada $a \in A$. El elemento a se llama una **cota inferior** de A en X.*

*Decimos que $p \in X$ es un **supremo** de A en X, si p es un elemento minimal del conjunto de las cotas superiores de A. Decimos también que $q \in X$ es un **ínfimo** de A en X, si q es un elemento maximal del conjunto de las cotas inferiores de A.*

Si p es un supremo de A, tenemos que p es una cota superior de A y, si x es una cota superior de A tal que $x \leqq p$, entonces $p \leqq x$. De manera similar, si q es un ínfimo de A, entonces q es una cota inferior de A y, si x es una cota inferior de A tal que $q \leqq x$, entonces $x \leqq q$.

Si X es un *COCO* y $A \subset X$, definimos

$$\text{ínf}(A) = \{q \in X : q \text{ es un ínfimo de } A\}$$

y

$$\sup(A) = \{p \in X : p \text{ es un supremo de } A\}.$$

Si $(X, \leqq)$ es un *COTO* y $A \subset X$ admite un supremo p en X entonces, por lo que hemos comentado, $\sup A = \{p\}$ y, además, p es el único elemento mínimo del conjunto de las cotas superiores de A. De manera similar, si A tiene un ínfimo q en X, entonces $\text{ínf}(A) = \{q\}$ y q es el único elemento máximo del conjunto de las cotas inferiores de A.

Si $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado entonces, como ya indicamos, al considerar el casi orden $\leqq$ definido como en (3.2.2), resulta que $(X, \leqq)$ es un *COTO* y, en particular, es un *COCO*. Si $A \subset X$, podemos entonces considerar las nociones de elemento minimal, elemento maximal, elemento mínimo, elemento máximo, cota inferior, cota superior, ínfimo y supremo de A en $(X, \lneqq)$, pensando que dichas nociones se aplican en $(X, \leqq)$.

3.4. La Topología del Orden

3.4.1. La Topología del Orden en un *COTO*

En la presente subsección, supondremos que $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado y no degenerado. También supondremos que $\leqq$ es la relación definida en (3.2.2). Entonces $(X, \leqq)$ es un *COTO* o, lo que es lo mismo, es una cadena antisimétrica y no degenerada. Vamos a definir una topología τ_o en X y, posteriormente, consideraremos el espacio topológico (X, τ_o) con el orden total $\leqq$. Para esto, dados $a, b \in X$, definimos los siguientes conjuntos:

1) $[a, b] = \{x \in X \colon a \leqq x \leqq b\}$;

2) $(a, b) = \{x \in X \colon a \lneqq x \lneqq b\}$;

3) $(a, b] = \{x \in X \colon a \lneqq x \leqq b\}$;

4) $[a, b) = \{x \in X \colon a \leqq x \lneqq b\}$.

Nos referiremos a dichos conjuntos como los *intervalos* en X determinados por a y b. A los del tipo 1) los llamaremos *intervalos cerrados* en X, a los del tipo 2), *intervalos abiertos* en X y, a los del tipo 3) y 4), *intervalos semiabiertos* en X. Si $a, b \in X$, es usual considerar también los siguientes subconjuntos de X :

$$[a, +\infty) = \{x \in X \colon a \leqq x\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in X \colon a \lneqq x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in X \colon x \leqq b\} \quad \text{y} \quad (-\infty, b) = \{x \in X \colon x \lneqq b\}.$$

Todos los conjuntos de la forma anterior se llaman *rayos* en X. Los del tipo $(a, +\infty)$ y $(-\infty, b)$ se llaman *rayos abiertos* en X, mientras que los del tipo $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ se conocen como *rayos cerrados* en X.

Notemos que en $(X, \leqq)$, para cada $a, b \in X$, tenemos que

$$P(b) = (-\infty, b] \quad \text{y} \quad S(a) = [a, +\infty).$$

Para $a, b \in X$, puede suceder que $(a, b) = \emptyset$. Dicha situación especial se considera en la siguiente definición.

Definición 3.8. *Si $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado y no degenerado y $a, b \in X$ son tales que $a \lneqq b$ y $(a, b) = \emptyset$, entonces b es un **sucesor inmediato** de a. También decimos que a es un **predecesor inmediato** de b.*

Consideremos ahora la colección $\mathcal{B}$ de los subconjuntos de X de los siguientes tipos:

a) todos los intervalos abiertos (a, b) en X;

b) todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el elemento mínimo de X, si es que dicho elemento existe;

c) todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, donde b_0 es el elemento máximo de X, si es que dicho elemento existe.

Notemos que si $x \in X$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$. Para ver esto, supongamos primero que X tiene un elemento mínimo a_0. Entonces a_0 es único. Si además $x = a_0$, x se encuentra en un elemento de $\mathcal{B}$ de la forma b). Si ahora suponemos que X tiene un elemento máximo b_0 y que $x = b_0$, entonces x se encuentra en un elemento de $\mathcal{B}$ de la forma c). Supongamos ahora que, $x \neq a_0$ y que, $x \neq b_0$. Entonces x se encuentra en un elemento de $\mathcal{B}$ de la forma a). Esto muestra que siempre existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

No es difícil probar que si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Entonces la familia $\mathcal{B}$ es una base para una topología τ_o en X.

Definición 3.9. *Supongamos que $(X, \lneqq)$ es un conjunto simplemente ordenado y no degenerado. La topología τ_o en X que tiene por base a la familia $\mathcal{B}$ antes descrita, se llama la **topología del orden** en X.*

A la topología del orden que acabamos de describir, también se le llama la *topología del intervalo*. Vamos a estudiar ahora el espacio topológico (X, τ_0), con el orden total $\leqq$. Como consecuencia de lo que probamos en el siguiente teorema, los rayos abiertos en X son abiertos en (X, τ_0).

Teorema 3.10. *En el espacio topológico (X, τ_o) con el orden total $\leqq$, se tiene que, para cada $x \in X$, los conjuntos $P(x)$ y $S(x)$ son cerrados en X. Luego $(X, \leqq)$, con la topología τ_o, es un POTS.*

Demostración. Dada $x \in X$, si $y \in X - P(x)$, entonces $y \neq x$ y $y \not\leqq x$. Si $y \lneqq x$, entonces por la definición de $\leqq$, resulta que $y \leqq x$. En vista de que esto es absurdo y de que $\lneqq$ es un orden simple, tenemos que $x \lneqq y$. Supongamos ahora que $y \in X$ es tal que $x \lneqq y$. Entonces $x \neq y$ y, como $\lneqq$ es un orden simple, no sucede que $y \lneqq x$. Luego $y \in X - P(x)$. Esto prueba que:

$$X - P(x) = \{y \in X : x \lneqq y\} = (x, +\infty).$$

De manera similar se prueba que:

$$X - S(x) = \{y \in X : y \lneqq x\} = (-\infty, x).$$

Ahora vamos a probar que el conjunto $(x, +\infty)$ es abierto en X. Tomemos entonces $z \in (x, +\infty)$. Supongamos que X admite un elemento máximo b_0. Entonces $(x, b_0]$ es un abierto en X tal que $z \in (x, b_0] \subset (x, +\infty)$. Supongamos ahora que X no admite un elemento máximo. Entonces existe $w \in X$ tal que $z \lneqq w$. Luego (x, w) es un abierto en X tal que $z \in (x, w) \subset (x, +\infty)$. Esto prueba que $(x, +\infty)$ es abierto en X. Luego $X - P(x)$ es abierto en X y, de esta manera, $P(x)$ es cerrado en X.

Utilizando argumentos similares a los dados en el párrafo anterior, se prueba que el conjunto $(-\infty, x)$ es abierto en X. Luego $S(x)$ es cerrado en X. Por tanto $(X, \leqq)$ es un $POTS$. $\square$

Como mostramos en el teorema anterior, los rayos abiertos en X, son abiertos en (X, τ_o). Notemos ahora que cada elemento de $\mathcal{B}$ se puede escribir como una intersección finita de rayos abiertos en X. En efecto, si existe el elemento mínimo a_0 de X, entonces $[a_0, b) = (-\infty, b)$; si existe el elemento máximo b_0 de X, entonces $(a, b_0] = (a, +\infty)$. Además $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$. Esto prueba que la colección de los rayos abiertos en X es una subbase de la topología τ_o.

Ahora mostramos otra propiedad del espacio (X, τ_o) con el orden $\leqq$.

Teorema 3.11. *En el espacio topológico (X, τ_o) con el orden total $\leqq$, se tiene que $\leqq$ es continuo. Más aún, τ_o es la topología más gruesa que se le puede dar a X, de modo que $\leqq$ es continuo.*

Demostración. Por el Teorema 3.10 y la Proposición 1.36, $\leqq$ es semicontinuo. Como $\leqq$ es un casi orden total, por el Teorema 1.39, $\leqq$ es continuo.

Supongamos ahora que τ es una topología en X tal que, si consideramos el espacio topológico (X, τ) con el orden total $\leqq$, resulta que $\leqq$ es continuo. Vamos a probar que $\tau_o \subset \tau$. Como $\mathcal{B}$ es una base de la topología τ_o, basta con verificar que $\mathcal{B} \subset \tau$. Tomemos entonces $B \in \mathcal{B}$. Supongamos que B es del tipo descrito en a). Entonces $B = (a, b)$, para $a, b \in X$ tales que $a \lneqq b$. Sea $x \in B$. Notemos que $a \lneqq x$ y $x \lneqq b$. Esto implica, pues $\lneqq$ es un orden simple, que $x \nleqq a$ y $b \nleqq x$. Como el casi orden total $\leqq$ es continuo en el espacio topológico (X, τ), existen $U_1, V_1, U_2, V_2 \in \tau$ tales que $x \in U_1 \cap V_2$, $a \in V_1$, $b \in U_2$ y, además:

i) para todo $y \in U_1$, se tiene que $y \nleqq a$;

ii) para todo $y \in V_2$, se tiene que $b \nleqq y$.

Notemos que $U_1 \cap V_2$ es un elemento de τ tal que $x \in U_1 \cap V_2$. Además si $y \in U_1 \cap V_2$, por i) y ii), $y \nleqq a$ y $b \nleqq y$. Luego $a \lneqq y \lneqq b$, de donde $y \in (a, b) = B$. Por tanto, $U_1 \cap V_2 \subset B$. Esto prueba que $B \in \tau$.

Supongamos ahora que B es del tipo descrito en b). Entonces $B = [a_0, b)$, donde a_0 es el elemento mínimo de X y $b \in X$ es tal que $a_0 \lneqq b$. Sea $x \in B$. Notemos que $a_0 \leqq x$ y $x \lneqq b$. Luego $b \nleqq x$ y, como $\leqq$ es continuo en (X, τ), existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $b \in V$ y, para cada $y \in U$, se tiene que $b \nleqq y$. Entonces U es un elemento de τ tal que $x \in U \subset [a_0, b) = B$. Esto prueba que $B \in \tau$. Si, por último, suponemos que B es del tipo descrito en c) entonces, por una prueba similar a b), se tiene que $B \in \tau$. Tenemos así que $\mathcal{B} \subset \tau$ y, como ya indicamos, sucede que $\tau_o \subset \tau$. □

Corolario 3.12. *El espacio topológico (X, τ_o), con el orden total $\leqq$, es T_2.*

Demostración. Como $(X, \leqq)$ es un *COTO*, entonces el espacio topológico (X, τ_o) con el orden total $\leqq$ es un *POTS*. Como, por el Teorema 3.11, $\leqq$ es continuo, por la Proposición 2.3, (X, τ_o) es un espacio T_2. □

Consideremos ahora la siguiente propiedad en un *COCO*.

Definición 3.13. *Supongamos que Y es un COCO. Decimos que Y es* ***completo*** *si, para cada cadena no vacía C en Y, se tiene que* $\text{ínf}(C) \neq \emptyset$ *y* $\sup(C) \neq \emptyset$.

En el siguiente teorema, mostramos que la compacidad de (X, τ_o) caracteriza la completez de $(X, \leqq)$. Como se puede observar, la prueba de la compacidad de X, a partir de su completez, es bastante similar a la demostración de que el intervalo cerrado $[0, 1]$, como subespacio de $\mathbb{R}$ con su topología usual, es compacto.

Como los conjuntos totalmente ordenados son cadenas antisimétricas, el teorema dice que una cadena antisimétrica es completa si y sólo si, con la topología del orden, la cadena es compacta.

Teorema 3.14. *El conjunto totalmente ordenado* $(X, \leqq)$ *es completo si y sólo si el espacio topológico* (X, τ_o) *es compacto.*

Demostración. Supongamos primero que (X, τ_o) es compacto. Sea T una cadena en X. Queremos demostrar que $\text{ínf}(T) \neq \emptyset$ y $\sup(T) \neq \emptyset$. Hagamos $C = \text{cl}_X(T)$. Como X es compacto, C es compacto. Además, como $(X, \leqq)$ es un *COTO* y $\leqq$ es continuo (Teorema 3.11), $(C, \leqq_{|C})$ es un *COTO* y $\leqq_{|C}$ es continuo (el Teorema 2.14). Ahora bien, por el Teorema 2.13, C posee un elemento minimal q y un elemento maximal p. Como X es un *COTO*, q es el elemento mínimo de C y p el elemento máximo de C. De aquí se sigue que $\text{ínf}(T) = \{q\}$ y $\sup(T) = \{p\}$. Esto prueba que $(X, \leqq)$ es completo.

Supongamos ahora que $(X, \leqq)$ es completo. Como X es una cadena, se tiene que $\text{ínf}(X) \neq \emptyset$ y $\sup(X) \neq \emptyset$. Además, $\text{ínf}(X) = \{a_0\}$, $\sup(X) = \{b_0\}$, a_0 es el mínimo de X y b_0 es el máximo de X. Entonces $X = [a_0, b_0]$. Para ver que (X, τ_o) es compacto, sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Afirmamos que:

1) para cada $x \in X - \{b_0\}$, existe $y \in X$ tal que $x \lneqq y$ y bastan dos elementos de $\mathcal{A}$ para cubrir el intervalo $[x, y]$.

Para probar 1), tomemos $x \in X - \{b_0\}$. Si x tiene un sucesor inmediato, entonces existe $y \in X$ tal que $x \lneqq y$ y $(x, y) = \emptyset$. Por tanto el intervalo $[x, y] = \{x, y\}$ está cubierto por, a lo más, dos elementos de $\mathcal{A}$, uno que tiene a x y otro que tiene a y. Ahora supongamos que x no tiene un sucesor inmediato. Tomemos $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $x \neq b_0$ y A es abierto en X, existe $c \in X$ tal que $x \lneqq c$ y $[x, c) \subset A$. Debido a que x no tiene un sucesor inmediato, existe $y \in (x, c)$. Entonces $[x, y] \subset A$, así que el intervalo $[x, y]$ está cubierto por un sólo elemento de $\mathcal{A}$. Esto prueba 1).

Consideremos ahora el conjunto S de todos los elementos $y \in X - \{a_0\}$ tales que, el intervalo $[a_0, y]$, puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Como X es no degenerado, $a_0 \in X - \{b_0\}$. Luego, por 1), existe $y_0 \in X$ tal que $a_0 \lneqq y_0$ y el intervalo $[a_0, y_0]$ está cubierto por, a lo más, dos elementos de $\mathcal{A}$. Esto implica que $y_0 \in S$. Luego $S \neq \emptyset$. Como X es una cadena, S es una cadena. Entonces, puesto que $(X, \leqq)$ es completo, $\sup(S) \neq \emptyset$. Además existe $c \in X$ tal que $\sup(S) = \{c\}$. Notemos que $a_0 \lneqq y_0 \leqq c \leqq b_0$. Afirmamos que:

2) $c \in S$.

Para probar 2), recordemos primero que $a_0 \lneqq c$, así que $c \in X - \{a_0\}$. Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $c \in A$. Como la familia $\mathcal{B}$ es una base de τ_o, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $c \in B \subset A$. Si B es del tipo 2), es decir si $[a_0, c] \subset B$, entonces el intervalo $[a_0, c]$ puede ser cubierto por un elemento de $\mathcal{A}$ (a saber, por A). En este caso, $c \in S$. Supongamos ahora que A es del tipo 3). Entonces existe $a \in X$ tal que $c \in (a, b_0] \subset A$. Como $\sup(S) = \{c\}$ y $a \lneqq c$, a no es una cota superior de S. Por tanto, existe $d \in S \cap (a, c]$, así que el intervalo $[a_0, d]$ puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Como $[d, c] \subset (a, b_0] \subset A$, el intervalo $[d, c]$ puede ser cubierto por un elemento de $\mathcal{A}$. Luego el intervalo $[a_0, c] = [a_0, d] \cup [d, c]$, puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Esto implica que $c \in S$ (incluso implica que X es compacto). Supongamos, por último, que B es del tipo 1). Entonces existe $a \in X$ tal que $(a, c] \subset A$. Procediendo como en el caso anterior, existe $d \in S \cap (a, c]$, así que el intervalo $[a_0, d]$ puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Como el intervalo $[d, c]$ se cubre con un elemento de $\mathcal{A}$, deducimos que el intervalo $[a_0, d]$ se puede cubrir con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Esto prueba que $c \in S$ y, así, 2) se cumple.

Notemos que si $c = b_0$ entonces, por 2) y la definición de S, X es compacto. Supongamos, por tanto, que $c \lneqq b_0$. Entonces, por la definición de c, para cada $z \in X$ con $c \lneqq z$, el intervalo $[a_0, z]$ no puede ser cubierto con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Sin embargo, como $c \in X - \{b_0\}$, por 1), existe $y \in X$ tal que $c \lneqq y$ y el intervalo $[c, y]$ se puede cubrir con, a lo más, dos elementos de $\mathcal{A}$. Por 2) el intervalo $[a_0, c]$ se puede cubrir con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Por tanto, el intervalo $[a_0, y]$ se puede cubrir utilizando un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. De esta contradicción se tiene que $c = b_0$ y, como ya indicamos, X es compacto. $\square$

3.4.2. La Topología del Orden en un *COCO*

Es posible definir una cierta "topología del intervalo" o "topología del orden" en un *COCO*. Para esto acudimos al Teorema 3.10 en donde probamos que, si $(X, \leqq)$ es un *COTO*, entonces los conjuntos $P(x)$ y $S(x)$ son cerrados en (X, τ_o), para cada $x \in X$. Dichos conjuntos son los complementos de los rayos abiertos en X, los cuales son abiertos subbásicos en (X, τ_o). Entonces los conjuntos $P(x)$ y $S(x)$ son cerrados subbásicos en (X, τ_o). Este hecho es justo el que determina una topología de orden en un *COCO*.

Definición 3.15. *Supongamos que* $(X, \leqq)$ *es un COCO. Entonces la* ***topología del orden*** *en* X, *es la topología* τ_O *que tiene a la familia:*

$$\mathcal{S} = \{P(x) \colon x \in X\} \cup \{S(x) \colon x \in S\} \tag{3.4.1}$$

como subbase de los subconjuntos cerrados de X.

Recordemos que una *subbase para los subconjuntos cerrados* de un espacio topológico Y, es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos cerrados en Y, tal que cualquier cerrado de Y es una intersección arbitraria de uniones de subfamilias finitas de $\mathcal{T}$.

De nueva cuenta, a la topología del orden en X, también le llamaremos la *topología del intervalo* en X. Por definición, los conjuntos de la forma $X - P(x)$ y $X - S(x)$ con $x \in X$, son abiertos subbásicos en (X, τ_O). En lo que resta de la presente subsección, supondremos que $(X, \leqq)$ es un *COCO* y consideraremos el espacio topológico (X, τ_O) con el casi orden $\leqq$. Como, por definición, $P(x)$ y $S(x)$ son cerrados en X, para cada $x \in X$, por la Proposición 1.36, $\leqq$ es semicontinuo. Entonces $(X, \leqq)$, con la topología τ_O, es un *QOTS* (por el Teorema 3.10, $(X, \leqq)$, con la topología τ_o, es un *POTS*, cuando $\leqq$ es un orden total).

La versión correspondiente ahora del Teorema 3.11, es la que se enuncia a continuación.

Teorema 3.16. *En el espacio topológico* (X, τ_O) *con el casi orden* $\leqq$, *se tiene que* τ_O *es la topología más gruesa que se le puede dar a* X, *de modo que* $\leqq$ *es semicontinuo.*

Demostración. Supongamos que τ es una topología en X tal que, si consideramos el espacio topológico (X, τ) con el casi orden $\leqq$, resulta que $\leqq$ es semicontinuo. Vamos a probar que $\tau_O \subset \tau$. Tomemos $x \in X$. Por la Proposición 1.36, los conjuntos $P(x)$ y $S(x)$ son cerrados en (X, τ). Esto implica que los conjuntos $X - P(x)$ y $X - S(x)$, los cuales son abiertos subbásicos en (X, τ_O), son elementos de la topología τ. Entonces las intersecciones finitas de conjuntos de la forma anterior, es decir los abiertos básicos de (X, τ_O), son elementos de τ. Finalmente, las uniones de los conjuntos antes descritos, o sea, los abiertos de (X, τ_O), se encuentran en τ. De esta manera $\tau_O \subset \tau$. $\square$

Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $COCO$. Sea τ una topología en X tal que, si consideramos el espacio topológico (X, τ) con el casi orden $\leqq$, resulta que $\leqq$ es semicontinuo. Entonces, por la Definición 2.1, X es un $QOTS$ y, por el Teorema 3.16, $\tau_O \subset \tau$. Esto significa que, cuando consideramos que X es un $QOTS$, la topología τ de X, la cual no tiene por qué estar definida utilizando el casi orden de X (cosa que se hace con la topología τ_O), es menos gruesa que τ_O, es decir, es tal que $\tau_O \subset \tau$. Si, en su lugar X es un $COTO$ que también es un $POTS$, entonces la topología τ de X es menos gruesa que τ_o, es decir, $\tau_o \subset \tau$.

Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $COCTO$, con la topología del orden. Entonces X es una cadena. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ así como elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$. Como X es una cadena podemos suponer, sin perder generalidad, que $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$. Luego:

$$P(a_1) \cup P(a_2) \cup \cdots \cup P(a_n) = P(a_n) \tag{3.4.2}$$

y

$$S(a_1) \cup S(a_2) \cup \cdots \cup S(a_n) = S(a_1). \tag{3.4.3}$$

Esto significa que, cuando X es una cadena con la topología del orden, los subconjuntos de X de la forma $P(a_1) \cup P(a_2) \cup \cdots \cup P(a_n)$ y los de la forma $S(a_1) \cup S(a_2) \cup \cdots \cup S(a_n)$, que por definición son básicos cerrados de X, son en realidad subbásicos cerrados de X. El resto de los subbásicos cerrados de X tienen la forma:

$$P(a_1) \cup P(a_2) \cup \cdots \cup P(a_n) \cup S(b_1) \cup S(b_2) \cup \cdots \cup S(b_m)$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$ y, sin perder generalidad (pues X es una cadena):

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \quad \text{y} \quad b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_m.$$

Usando (3.4.2) y (3.4.3), tenemos que:

$$P(a_1) \cup P(a_2) \cup \cdots \cup P(a_n) \cup S(b_1) \cup S(b_2) \cup \cdots \cup S(b_m) = P(a_n) \cup S(b_1).$$

De todo esto se infiere que, en una cadena X con la topología del orden, los básicos cerrados de X son de la forma $P(a)$, $S(b)$, o bien $P(a) \cup S(b)$, donde $a, b \in X$. Más aún, como $P(a) \cup S(b) = X$ cuando $b \leqq a$, resulta que los básicos cerrados de X son de la forma $P(a)$ (con $a \in X$), $S(b)$ (con $b \in X$), X o bien $P(a) \cup S(b)$ con $a \leqq b$. Usaremos este resultado en la siguiente sección.

3.5. Compacidad para Cadenas Maximales

Supongamos que $(X, \leqq)$ es un *COCO*. Como vimos en la subsección anterior, si a X le damos la topología del orden τ_O, se cumplen resultados similares a los teoremas 3.10 y 3.11. Bajo ciertas condiciones, se puede dar un resultado similar al Teorema 3.14, en donde se caracteriza la compacidad en espacios casi ordenados. Esto es justo lo que hacemos en el Teorema 3.19, resultado principal de esta sección.

En el enunciado original del Teorema 3.19, que se encuentra en [25, Teorema 3, p. 149], se indica que las afirmaciones 1) y 3) son equivalentes. La prueba que aquí presentamos de que 3) implica 1), es una variante más simple que la originalmente presentada. En su demostración ocuparemos los siguientes lemas. Para el primero, recordemos que si I es un conjunto bien ordenado, cuya relación de orden es $\prec$, entonces una familia $\{C_i\}_{i\in I}$ está *anidada* si para cada $i, j \in I$, de $i \prec j$ resulta que $C_i \subset C_j$.

Lema 3.17. *Sea X un espacio topológico tal que para toda familia anidada de cerrados no vacíos de X, su intersección es no vacía. Entonces X es compacto.*

Demostración. Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia, con la propiedad de la intersección finita, de subconjuntos cerrados X. Por [4, Teorema 3.1.1, pág. 123], para que X sea compacto, basta con verificar que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$. Por el Teorema del Buen Orden de Zermelo, enunciado en [7, Teorema 5.1, pág. 48], podemos suponer que I es un conjunto bien ordenado, cuya relación de orden es $\prec$ y cuyo primer elemento es i_0. Definimos ahora los siguientes conjuntos:

$$F_i = \bigcap_{j \prec i} C_i \quad \text{para toda} \quad i \in I \quad \text{con} \quad i \neq i_0.$$

Notemos que $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia anidada de cerrados de X. Además:

$$\bigcap_{i\in I} C_i = \bigcap_{i\in I} F_i.$$

Si probamos que cada F_i es no vacío entonces, por la hipótesis, $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ y, de esta manera, $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$. Supongamos, por tanto, que existe $i^\star \in I$ tal que $F_{i^\star} = \emptyset$. Como I está bien ordenado, podemos pedir que $i^\star$ es el primer elemento de I con esta propiedad. Entonces $\{F_i\}_{i\prec i^\star}$ es una familia anidada de cerrados no vacíos de X cuya intersección, la cual es $F_{i^\star}$, es vacía. Esto contradice nuestra hipótesis, así que $F_i \neq \emptyset$ para toda $i \in I$ y, como ya indicamos, se sigue que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. □

Lema 3.18. *Sea C una cadena. Si T y R son subconjuntos no vacíos de C, comparables, y tales que $E(R) \cap C \subset E(T) \cap C$, entonces $R \subset T$ o bien $E(R) \cap C = E(T) \cap C$*

Demostración. Como T y R son comparables $R \subset T$ o bien $T \subset R$. En el primer caso terminamos y, en el segundo, tenemos que $E(T) \subset E(R)$. Luego $E(T) \cap C \subset E(R) \cap C$ y, como la otra contención también es cierta, $E(R) \cap C = E(T) \cap C$. □

Otro comentario con respecto al siguiente teorema es que, en su enunciado original, la afirmación 4) aparece como sigue: $E(x)$ es compacto, para toda $x \in X$, y todo subconjunto cerrado de X tiene un elemento minimal y un elemento maximal.

Teorema 3.19. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $QOTS$. Entonces las siguientes cuatro afirmaciones son equivalentes:*

1) *si C es una cadena cerrada en X, entonces C es compacto;*

2) *si C es una cadena maximal en X, entonces C es compacto;*

3) *si C es una cadena cerrada y no vacía en X, entonces $\min(C)$ y $\max(C)$ son compactos y no vacíos;*

4) *$E(x)$ es compacto, para toda $x \in X$, y toda cadena cerrada y no vacía en X, tiene un elemento minimal y un elemento maximal.*

Más aún, las afirmaciones 1)–4) implican que:

5) *X es completo y $E(x)$ es compacto, para cada $x \in X$.*

Si X es una cadena con la topología del intervalo, entonces 5) implica las afirmaciones 1)–4).

Demostración. Supongamos que se cumple 1). Sea C una cadena maximal en X. Como X es un $QOTS$, por el Lema 2.10, C es cerrada en X. Entonces C es una cadena cerrada en X y, por 1), C es compacto. Esto prueba que 1) implica 2).

Ahora supongamos que se cumple 2). Sea C una cadena cerrada en X. Por el Corolario 2.9, existe una cadena maximal M en X tal que $C \subset M$. Por 2) M es compacto y, como C es cerrado en M, resulta que C es compacto. Esto prueba que 2) implica 1). Por tanto las afirmaciones 1) y 2) son equivalentes.

Afirmamos ahora que

($\star$) para cada $x \in X$, $E(x)$ es una cadena cerrada y no vacía en X.

Para ver esto, sea $x \in X$. Es claro que $x \in E(x)$ así que $E(x) \neq \emptyset$. Como $\leqq$ es semicontinuo, por el Corolario 1.4.3, $E(x)$ es cerrado en X. Si $y, z \in E(x)$ entonces $y \leqq x$ y $x \leqq z$, por lo que $y \leqq z$ (también se cumple que $z \leqq y$). Esto muestra que cada dos elementos de $E(x)$ son comparables. Por tanto, $E(x)$ es una cadena cerrada y no vacía en X y, así, ($\star$) se cumple.

Vamos a probar ahora que las afirmaciones 3) y 4) son equivalentes. Supongamos primero que se cumple 3). Sea $x \in X$. Por ($\star$) y 3), $\min(E(x))$ es compacto y no vacío. Utilizando el hecho de que $E(x)$ es una cadena y de que $\min(E(x)) \neq \emptyset$, resulta que $\min(E(x)) = E(x)$. Esto muestra que $E(x)$ es compacto. Notemos ahora que, por 3), toda cadena cerrada y no vacía en X, tiene un elemento minimal y un elemento maximal. Por tanto, 3) implica 4).

Supongamos que se cumple 4). Sea C una cadena cerrada y no vacía en X. Por 4), $\min(C) \neq \emptyset$ y $\max(C) \neq \emptyset$. Podemos entonces tomar $x_0 \in \min(C)$ y $x_1 \in \max(C)$. Por el Teorema 3.3, $\min(C)$ y $\max(C)$ son cerrados en X, $\min(C) = E(x_0) \cap C$ y $\max(C) = E(x_1) \cap C$. Entonces, como por 4) $E(x_0)$ y $E(x_1)$ son compactos, $\min(C)$ y $\max(C)$ son subconjuntos cerrados de espacios compactos, así que son compactos. Esto muestra que 4) implica 3). Por tanto, las afirmaciones 3) y 4) son equivalentes.

Vamos a probar ahora que las afirmaciones 1) y 3) son equivalentes. Supongamos primero que se cumple 1). Sea C una cadena cerrada y no vacía en X. Por 1), C es compacto. Entonces, por el Teorema 2.13, $\min(C) \neq \emptyset$ y $\max(C) \neq \emptyset$. Tomemos $x_0 \in \min(C)$ y $x_1 \in \max(C)$. Por el Teorema 3.3:

$$\min(C) = E(x_0) \cap C \quad \text{y} \quad \max(C) = E(x_1) \cap C.$$

Como $\leqq$ es semicontinuo, $E(x_0)$ y $E(x_1)$ son cerrados en X. Luego $\min(C)$ y $\max(C)$ son subconjuntos cerrados del compacto C. Así que dichos conjuntos son compactos. Esto prueba que 1) implica 3).

Supongamos ahora que se cumple 3). Sea C una cadena cerrada y no vacía en X. Para ver que C es compacto, usaremos el Lema 3.17. Tomemos, por tanto, una familia anidada $\mathcal{I}$, de subconjuntos cerrados y no vacíos de C. Entonces cualesquiera dos elementos de $\mathcal{I}$ son comparables y, como C es cerrado en X, cada elemento de $\mathcal{I}$ es cerrado en X. Probaremos que $\bigcap \mathcal{I} \neq \emptyset$, haciendo ver que:

($\star\star$) existe $m_0 \in X$ tal que $E(m_0) \cap T \neq \emptyset$, para cada $T \in \mathcal{I}$.

Antes de proseguir, veamos que de ($\star\star$) se sigue que $\bigcap \mathcal{I} \neq \emptyset$. Supongamos, por tanto, que ($\star\star$) es cierto. Como $\leqq$ es semicontinuo, $E(m_0)$ es cerrado en X. Además, puesto que 3) implica 4), $E(m_0)$ es compacto. Entonces, por ($\star\star$):

$$\mathcal{E} = \{E(m_0) \cap T \colon T \in \mathcal{I}\}$$

es una familia de cerrados no vacíos del espacio compacto $E(m_0)$. En vista de que cada dos elementos de $\mathcal{I}$ son comparables, resulta que cada dos elementos de $\mathcal{E}$ son comparables. Luego la familia $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de la intersección finita. De esta manera, por la equivalencia de compacidad con la intersección no vacía de familias con la propiedad de la intersección finita, enunciada en [4, Teorema 3.1.1, p. 123], tenemos que:

$$\emptyset \neq \bigcap \{E(m_0) \cap T \colon T \in \mathcal{I}\} \subset \bigcap \mathcal{I}.$$

Por tanto $\bigcap \mathcal{I} \neq \emptyset$.

Ahora bien, para probar ($\star\star$), consideremos la familia

$$\mathcal{S} = \{E(T) \cap C \colon T \in \mathcal{I}\}.$$

Notemos que cualesquiera dos elementos de $\mathcal{S}$ son comparables. Para ver esto, tomemos $S, S' \in \mathcal{S}$. Entonces existen $T, T' \in \mathcal{I}$ tales que $S = E(T) \cap C$ y $S' = E(T') \cap C$. Como cada dos elementos de $\mathcal{I}$ son comparables, $T \subset T'$ o bien $T' \subset T$. En el primer caso, $S = E(T) \cap C \subset E(T') \cap C = S'$ y, en el segundo caso, $S' \subset S$. Esto muestra que cada dos elementos de $\mathcal{S}$ son comparables.

Tomemos ahora $T \in \mathcal{I}$. Como C es una cadena y $T \subset C$, el conjunto T es una cadena. Además T es no vacío y cerrado en X. Entonces, por 3), $\min(T) \neq \emptyset$ y $\max(T) \neq \emptyset$. Luego, por el Corolario 3.5, $E(T)$ es cerrado en X. Como también C es cerrado en X, $E(T) \cap C$ es cerrado en X. Además $\emptyset \neq T \subset E(T) \cap C$. Esto muestra que cada elemento de $\mathcal{S}$ es un subconjunto no vacío de la cadena C, que además es cerrado en X. Luego cada elemento de $\mathcal{S}$ es una cadena cerrada y no vacía. Por 3), resulta que cada elemento de $\mathcal{S}$ posee un elemento minimal y un elemento maximal. Esto nos permite considerar los conjuntos

$$M = \bigcup\{\min(S) \colon S \in \mathcal{S}\} \quad \text{y} \quad U = \bigcup\{\max(S) \colon S \in \mathcal{S}\}.$$

Por lo que acabamos de indicar, M y U son subconjuntos no vacíos de C. Luego $\mathrm{cl}_X(M)$ y $\mathrm{cl}_X(U)$ son subconjuntos cerrados y no vacíos de la cadena C, así que $\mathrm{cl}_X(M)$ y $\mathrm{cl}_X(U)$ son cadenas cerradas no vacías en X. Luego, por 3), existe $m_0 \in \max\left(\mathrm{cl}_X(M)\right)$. Notemos que $m_0 \in C$. Para ver que m_0 satisface lo que se indica en $(\star\star)$, vamos a probar primero algunas propiedades. Empezamos con la siguiente:

a) $m_0 \leqq u$, para cada $u \in U$.

Para ver a), supongamos que, por el contrario, existe $u \in U$ tal que $m_0 \nleqq u$. Como $\leqq$ es semicontinuo, existe un abierto A de X tal que $m_0 \in A$ y, para cada $x \in A$, tenemos que $x \nleqq u$. Como $m_0 \in \mathrm{cl}_X(M)$ y A es un abierto en X que tiene a m_0, existe $w \in A \cap M$. De las definiciones de M y U, existen $S, S' \in \mathcal{S}$ tales que $w \in \min(S)$ y $u \in \max(S')$. Como cada dos elementos de $\mathcal{S}$ son comparables, $S \subset S'$ o bien $S' \subset S$. En el primer caso, $w, u \in S'$ y, en el segundo caso, $w, u \in S$. Ahora bien, si $w, u \in S'$ entonces, por el hecho de que w y u son elementos de la cadena C y de que u es un elemento maximal de S', se tiene que $w \leqq u$. Si $w, u \in S$ entonces, como w y u están en la cadena C y w es un elemento minimal de S, también se sigue que $w \leqq u$. Sin embargo, como $w \in A$, tenemos que $w \nleqq u$. De esta contradicción se deduce que a) es cierto.

Afirmamos ahora que:

b) $m_0 \in S_1$, para cada $S_1 \in \mathcal{S}$.

Para probar b), supongamos, por el contrario, que existe $S_1 \in \mathcal{S}$ tal que $m_0 \notin S_1$. Recordemos que:

$$\min(S_1) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \max(S_1) \neq \emptyset.$$

Tomemos $T_1 \in \mathcal{I}$ tal que $S_1 = E(T_1) \cap C$. Como $m_0 \in C - S_1$ sucede que $m_0 \notin E(T_1)$. Ahora bien, si $m_0 \in E(S_1)$ entonces existen $x, y \in S_1$ tales que $m_0 \leqq x$ y $y \leqq m_0$. Puesto que $x, y \in E(T_1)$, existen $x', y' \in T_1$ tales que $x \leqq x'$ y $y' \leqq y$. Por transitividad, $m_0 \leqq x'$ y $y' \leqq m_0$. Por tanto, $m_0 \in E(T_1)$. Como esto es absurdo, tenemos que

$$m_0 \in C - E(S_1). \tag{3.5.1}$$

Sea $K = S_1 \cap P(m_0)$. Vamos a probar ahora que $\min(S) \subset P(K)$, para cada $S \in \mathcal{S}$. Tomemos, por tanto, $S \in \mathcal{S}$. Como cualesquiera dos elementos de $\mathcal{S}$ son comparables, $S \subset S_1$ o bien $S_1 \subset S$. Supongamos que $S_1 \subset S$. Entonces $\max(K) \subset K \subset S_1 \subset S$. Sean $z \in \min(S)$ y $x \in K$. Entonces $x \in S_1 \subset S$ y, por la minimalidad de z en S, $z \leqq x$. Luego $z \in P(K)$, así que $\min(S) \subset P(K)$. Ahora, supongamos que $S \subset S_1$. Entonces, por la definición de M:

$$\min(S) \subset S \cap M \subset S_1 \cap M \subset M \subset \mathrm{cl}_X(M)\,.$$

Como m_0 es un elemento maximal de la cadena $\mathrm{cl}_X(M)$, $\min(S) \subset P(m_0)$. Luego $\min(S) \subset S_1 \cap P(m_0) = K \subset P(K)$. Con esto probamos que $\min(S) \subset P(K)$, para cada $S \in \mathcal{S}$. Al tomar la unión sobre todos los elementos de $\mathcal{S}$, sucede que $M \subset P(K)$. Tomando cerraduras en X y recordando que $P(K)$ es cerrado en X, sucede que $\mathrm{cl}_X(M) \subset P(K)$. En particular $m_0 \in P(K)$ pues m_0 es un elemento de $\mathrm{cl}_X(M)$. Luego existe $z \in K$ tal que $m_0 \leqq z$. Como $K = S_1 \cap P(m_0)$, z es un elemento de S_1 tal que $m_0 \leqq z$ y $z \leqq m_0$. Luego $m_0 \in E(S_1)$. Esto contradice (3.5.1) y, de esta manera, b) se cumple.

Afirmamos ahora que:

c) $\max(T \cap P(m_0)) \neq \emptyset$, para cada $T \in \mathcal{I}$.

Para probar esto, sea $T \in \mathcal{I}$. Hagamos $S = E(T) \cap C$. Notemos que $S \in \mathcal{S}$ y que, por b), $m_0 \in S$. Entonces existe $t_1 \in T$ tal que $t_1 \leqq m_0$. Esto muestra que $T \cap P(m_0) \neq \emptyset$. Como, además, $T \cap P(m_0)$ es una cadena cerrada en X, por 3), $\max(T \cap P(m_0)) \neq \emptyset$. Esto prueba c).

Ahora vamos a probar que:

d) para cada $T \in \mathcal{I}$ y cada $t \in \max(T \cap P(m_0))$, si $S = E(T) \cap C$, entonces $\min(S) \subset P(t)$.

Tomemos $T \in \mathcal{I}$, $t \in \max(T \cap P(m_0))$, $S = E(T) \cap C$ y $x \in \min(S)$. Como $t \in T \subset E(T) \cap C = S$, por la minimalidad de x en S, $x \leqq t$. Entonces $x \in P(t)$. De esta manera $\min(S) \subset P(t)$.

El siguiente enunciado generaliza d).

e) para cada $T \in \mathcal{I}$ y cada $t \in \max(T \cap P(m_0))$, se tiene que $\min(S_1) \subset P(t)$, para cualquier $S_1 \in \mathcal{S}$.

Tomemos $T \in \mathcal{I}$, $t \in \max(T \cap P(m_0))$ y $S_1 \in \mathcal{S}$. Hagamos $S = E(T) \cap C$ y sea $T_1 \in \mathcal{I}$ tal que $S_1 = E(T_1) \cap C$. Si $S_1 = S$, entonces e) es justo el enunciado d). Supongamos, por tanto, que $S_1 \neq S$ y tomemos $x \in \min(S_1)$. Como cualesquiera dos elementos de $\mathcal{S}$ son comparables, $S_1 \subset S$ o bien $S \subset S_1$. Supongamos que $S_1 \subset S$. Como T y T_1 son comparables, por el Lema 3.18, $T_1 \subset T$. Luego $T_1 \cap P(m_0) \subset T \cap P(m_0)$. Sea $t_1 \in \max(T_1 \cap P(m_0))$. Por la parte 1) del Teorema 3.2, $t_1 \leqq t$ y, por d) (cambiando T, t y S por T_1, t_1 y S_1, respectivamente), $\min(S_1) \subset P(t_1)$. Luego $x \leqq t_1$ y, como también $t_1 \leqq t$, se sigue que $x \leqq t$. De esta manera, $x \in P(t)$, cuando $S_1 \subset S$. Supongamos ahora que $S \subset S_1$. Sea $y \in \min(S)$. Por d), $y \leqq t$ y, por la parte 2) del Teorema 3.2, $x \leqq y$. Luego $x \leqq t$ y, así, $x \in P(t)$. Esto prueba e).

Vamos a probar ahora que:

f) para cada $T \in \mathcal{I}$ y cada $t \in \max(T \cap P(m_0))$, se tiene que $\mathrm{cl}_X(M) \subset P(t)$.

Tomemos $T \in \mathcal{I}$ y $t \in \max(T \cap P(m_0))$. Por e), $\min(S_1) \subset P(t)$, para cualquier $S_1 \in \mathcal{S}$. Tomando la unión sobre todos los elementos de $\mathcal{S}$ resulta, por la definición de M, que $M \subset P(t)$. Tomando ahora cerraduras, y recordando que $P(t)$ es cerrado en X, sucede que $\mathrm{cl}_X(M) \subset P(t)$. Esto prueba f).

Estamos en condiciones de probar que m_0 satisface $(\star\star)$. Tomemos $T \in \mathcal{I}$. Por c), existe $t \in \max(T \cap P(m_0))$. Entonces $t \in P(m_0)$, por lo que $t \leqq m_0$. Además, por f), $m_0 \in \mathrm{cl}_X(M) \subset P(t)$, así que $m_0 \leqq t$. De esta manera,

$t \in E(m_0) \cap T$ y $(\star\star)$ se cumple. Como ya indicamos de este hecho se sigue que C es compacto. Por tanto 3) implica 1).

De todo lo anterior tenemos que las afirmaciones 1)-4) son equivalentes.

Vamos a probar ahora que 1) implica 5). Por $(\star)$ y 1), tenemos que $E(x)$ es compacto, para cada $x \in X$. Para ver que X es completo, sea C una cadena no vacía en X. Por el Teorema 2.14, $\mathrm{cl}_X(C)$ es una cadena. Esto implica, por 1), que $\mathrm{cl}_X(C)$ es compacto. Además, por el Teorema 2.13, $\mathrm{cl}_X(C)$ tiene un elemento maximal x_1 y un elemento minimal x_0. Claramente x_1 es cota superior de C. Supongamos que x_1 no es un supremo de C. Entonces existe una cota superior $s \in X$ de C tal que $s \leqq x_1$ y $x_1 \nleqq s$. Por semicontinuidad, existe un abierto U en X que tiene a x_1 y, para cada $a \in U$, sucede que $a \nleqq s$. Como $x_1 \in \mathrm{cl}_X(C)$, podemos tomar $c \in U \cap C$, luego $c \nleqq s$, lo cual es una contradicción ya que s es una cota superior de C. Por tanto, x_1 es un supremo para C. De forma similar se prueba que x_0 es un ínfimo de C. Luego X es completo. Esto muestra que 1) implica 5).

Como las afirmaciones 1), 2), 3) y 4) son equivalentes, deducimos que las afirmaciones 1)–4) implican 5).

Supongamos ahora que X es una cadena con la topología del intervalo. Para ver que 5) implica 4), es suficiente probar que toda cadena cerrada y no vacía en X, tiene un elemento maximal y un elemento minimal. Sea C una cadena cerrada y no vacía en X. Como X es completo, C tiene un supremo x_1 y un ínfimo x_0. En particular, x_1 es una cota superior de C y x_0 es una cota inferior de C. Si $x_1 \notin C$ entonces, puesto que C es cerrado en X y X es una cadena con la topología del intervalo, existe un básico cerrado B en X tal que $C \subset B \subset X - \{x_1\}$. Afirmamos que:

(✠) existe $a \in X$ tal que $C \subset P(a)$ y $x_1 \notin P(a)$.

Para probar esto notemos que, por lo que comentamos al final de la Sección 3.4.2, existen $a, b \in X$ tales que $B = P(a)$, $B = S(a)$ o bien $B = P(a) \cup S(b)$ y $a \leqq b$. Si $B = P(a)$, se cumple (✠). Supongamos ahora que $B = S(a)$. Entonces $C \subset S(a)$ y $x_1 \notin S(a)$. Tomemos $c \in C$. Como $c \in S(a)$ y x_1 es una cota superior de C, tenemos que $a \leqq c$ y $c \leqq x_1$. Luego $a \leqq x_1$, por lo que $x_1 \in S(a)$. Como esto es absurdo, $B = P(a) \cup S(b)$ y $a \leqq b$. Si existe $c \in C \cap S(b)$, entonces $b \leqq c$ y $c \leqq x_1$, por lo que $b \leqq x_1$. Luego $x_1 \in S(b) \subset B$, lo cual también es absurdo. Por tanto $C \subset P(a)$ y $x_1 \notin P(a)$. Esto prueba (✠).

De (✠) se sigue que a es una cota superior de C tal que $a \leqq x_1$. Como x_1 es un elemento minimal del conjunto de las cotas superiores de C, resulta que $x_1 \leqq a$. Luego $x_1 \in P(a)$. De este absurdo se deduce que $x_1 \in C$ y, por tanto, x_1 es un elemento maximal de C. De forma similar se prueba que $x_0 \in C$, así que, x_0 es un elemento minimal de C. Esto prueba que 5) implica 4). Como las afirmaciones 1)–4) son equivalentes, tenemos entonces que 5) implica las afirmaciones 1)–4). □

Corolario 3.20. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $QOTS$. Si X es compacto, entonces X es completo y $E(x)$ es compacto, para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea C una cadena cerrada en X. Como X es compacto, C es compacto. Entonces X cumple la propiedad 1) del Teorema 3.19. Luego, por el mismo teorema, X cumple la propiedad 5). □

Corolario 3.21. *Si X es una cadena con la topología del intervalo, entonces X es compacto si y sólo si X es completo y $E(x)$ es compacto, para cada $x \in X$.*

Demostración. Si X es una cadena con la topología del intervalo, entonces X es un $QOTS$. Si X es compacto entonces, por el Corolario 3.20, X es completo y cada conjunto $E(x)$ es compacto. Si ahora suponemos que X es completo y que $E(x)$ es compacto, para cada $x \in X$, entonces la afirmación 5) del Teorema 3.19 se cumple. Por el mismo teorema resulta que la afirmación 1) se cumple. Ahora bien, dicha afirmación aplicada a X, que es una cadena cerrada en X, indica que X es compacto. □

El Corolario 3.21 es una generalización del Teorema 3.14.

Notemos ahora que, en el Teorema 3.19, en la prueba de que 5) implica 3), es importante el hecho de que X es una cadena. Vamos a ver que existe un conjunto parcialmente ordenado, con la topología del intervalo, en el que 5) no implica 3). Consideremos en $\mathbb{R}$, con el orden usual $\leq$, el subconjunto $X = B \cup C$, donde

$$B = \{2, 3\} \quad y \quad C = \{t \in \mathbb{R} \colon 0 \leq t < 1\} = [0, 1).$$

Definimos un orden $\leqq$ en X como sigue, para $a, b \in X$, $a \leqq b$ si y sólo si $a = b$ o bien $a, b \in C$ y $a \leq b$, o bien $a \in C$ y $b \in B$. Luego $2 \nleqq 3$, $3 \nleqq 2$, $a \leqq 2$ y $a \leqq 3$, para cada $a \in C$ y, si $a, b \in C$, entonces $a \leqq b$ si y sólo si $a \leq b$. No es difícil probar que $(X, \leqq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Además, $\sup(C) = B$. Como los elementos 2 y 3 no son comparables, X no es una cadena. Consideremos que X tiene la topología del intervalo. Entonces X es un $POTS$. No es difícil probar que X es completo y que $E(x)$ es compacto, para cada $x \in X$. Entonces X satisface la afirmación 5) del Teorema 3.19. Como $C = P(2) \cap P(3)$ y los conjuntos $P(2)$ y $P(3)$ son cerrados en X, C es una cadena cerrada y no vacía en X. Como $B \cap C = \emptyset$, C no tiene elementos maximales. Entonces X no satisface 3).

3.6. Conexidad en $POTS$ y de Cadenas Maximales

En lo que resta del presente capítulo veremos condiciones, bajo las cuales, un $POTS$ resulta conexo y bajo las que una cadena maximal resulta ser conexa. Necesitaremos la siguiente definición en donde, usamos la notación dada en (3.2.1), que podemos definir en un $COCO$:

$$x \lneqq y \quad \text{significa que} \quad x \leqq y \quad \text{y} \quad x \neq y.$$

Definición 3.22. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $COCO$. Decimos que X es **denso en el sentido del orden**, o bien que $\leqq$ es **orden denso**, si cuando a y b son elementos de X tales que $a \lneqq b$, existe $z \in X$ tal que $a \lneqq z \lneqq b$.*

En el siguiente resultado, probamos que la propiedad de ser denso en el sentido del orden es hereditaria con respecto a cadenas maximales.

Teorema 3.23. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $COCO$. Si X es denso en el sentido del orden, entonces toda cadena maximal en X es densa en el sentido del orden.*

Demostración. Sea C una cadena maximal en X. Supongamos que C no es densa en el sentido del orden. Entonces existen $a, b \in C$ tales que $a \lneqq b$ y, para ninguna $z \in C$, sucede que $a \lneqq z \lneqq b$. Como X es denso en el sentido del orden, existe $x \in X$ tal que $a \lneqq x \lneqq b$. Luego $x \notin C$, por lo que $D = C \cup \{x\}$ es un subconjunto de X que contiene propiamente a C. Además D es una cadena en X. Para ver esto notemos primero que cada dos elementos de C son comparables, pues C es una cadena en X. Tomemos ahora $y \in C - \{a, b\}$. Como $a, y \in C$, sucede que $a \leqq y$ o bien $y \leqq a$. En el segundo caso, como $y \leqq a$ y $a \leqq x$, resulta que $y \leqq x$. Consideremos entonces que $a \leqq y$. Comparando y con b, tenemos que $b \leqq y$ o bien $y \leqq b$. En el primer caso, resulta que $x \leqq b$ y $b \leqq y$, así que $x \leqq y$. En el segundo caso, tenemos que y es un elemento de C tal que $a \lneqq y \lneqq b$. Como esto es una contradicción, hemos probado que cada elemento de $C - \{a, b\}$ se compara con x. Como a y b también se comparan con x, resulta así que D es una cadena en X. En vista de que esto contradice la maximalidad de C, deducimos que C es densa en el sentido del orden. □

Ahora mostramos que la propiedad 2) del Teorema 3.19 (la cual es equivalente a la propiedad 1) de dicho teorema), implica que las cadenas maximales en un $POTS$, son densas en el sentido del orden.

Teorema 3.24. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un POTS. Entonces toda cadena conexa en X es densa en el sentido del orden. Más aún, si las cadenas maximales en X son compactas, entonces cualquier cadena maximal y densa en el sentido del orden es conexa.*

Demostración. Supongamos que C es una cadena conexa en X. Si C no es densa en el sentido del orden, entonces existen $x, y \in C$ tales que $x \lneqq y$ y ninguna $z \in C$ es tal que $x \lneqq z \lneqq y$. Esto implica, como C es una cadena, que cada elemento de C es un predecesor de x o bien un sucesor de y. Luego $C \subset P(x) \cup S(y)$. Como $\leqq$ es semicontinuo, $P(x)$ y $S(y)$ son subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Además:

$$P(x) \cap S(y) \cap C = \{z \in C \colon z \leqq x \text{ y } y \leqq z\}.$$

Si el conjunto $P(x) \cap S(y) \cap C$ es no vacío, entonces $y \leqq x$ y, como también $x \leqq y$, tenemos que $x = y$. Esto contradice el hecho de que $x \lneqq y$. Por tanto, $P(x) \cap S(y) \cap C = \emptyset$ y, así, $C = (P(x) \cap C) \cup (S(y) \cap C)$ es la unión de dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de C. Luego C no es conexo. Como esto es una contradicción, C es densa en el sentido del orden. Con esto probamos que las cadenas conexas en X son densas en el sentido del orden. En particular, las cadenas conexas y maximales en X, son densas en el sentido del orden.

Ahora, supongamos que todas las cadenas maximales en X son compactas. Sea C una cadena maximal en X, que es densa en el sentido del orden. Entonces C es compacto y, por Lema 2.10, C es cerrado en X. Supongamos que C no es conexo. Entonces $C = P \cup Q$, donde P y Q son cerrados ajenos y no vacíos en X. De la compacidad de C, se sigue que P y Q son compactos. También de la compacidad de C y el Teorema 2.13, se sigue que C tiene un elemento maximal u. Supongamos, sin perder generalidad, que $u \in Q$. Como P es compacto, aplicando de nuevo el Teorema 2.13, se tiene que P tiene un elemento maximal p. Como P y Q son ajenos, $p \neq u$. Además como u es maximal en la cadena C, se tiene que $p \leqq u$. Luego $p \lneqq u$. Hagamos:

$$P_0 = P(p) \cap C \quad \text{y} \quad Q_0 = C - P_0.$$

Es claro que $P_0 \cap Q_0 = \emptyset$, $C = P_0 \cup Q_0$, $p \in P_0$ y $u \in Q_0$. A continuación enlistamos otras propiedades de P_0 y Q_0.

1) $P \subset P_0$ y $Q_0 \subset Q$;

2) $Q_0 = Q - P(p) \subset S(p)$;

3) P_0 y Q_0 son cerrados en X.

Como cualesquiera dos elementos de P son comparables y p es maximal en P, tenemos que $P \subset P_0$. Luego $Q_0 = C - P_0 \subset C - P \subset Q$. Esto prueba 1). Para ver 2), tomemos $y \in Q_0$. Por 1), $y \in Q \subset C$ y, como $P_0 \cap Q_0 = \emptyset$, resulta que $y \notin P(p)$. Luego $Q_0 \subset Q - P(p)$. Por otro lado $Q - P(p) \subset C - P(p) \subset C - P_0$. De esto $Q_0 = Q - P(p)$. Por tanto, ningún punto de Q_0 es un predecesor de p. Esto implica, pues C es una cadena, que todos los elementos de Q_0 son posteriores de p. De esta manera $Q_0 \subset S(p)$. Esto prueba 2).

Para probar 3), notemos que, como $\leqq$ es semicontinuo inferior, $P(p)$ es cerrado en X. Como también C es cerrado en X, $P_0 = P(p) \cap C$ es cerrado en X. Puesto que $\leqq$ es semicontinuo superior, $S(p)$ es cerrado en X, así que, por 2), $\mathrm{cl}_X(Q_0) \subset S(p)$. Tomemos ahora $x \in \mathrm{cl}_X(Q_0)$. Entonces $x \in S(p)$, por lo que $p \leqq x$. Como C y Q son cerrados en X y $Q_0 \subset Q \subset C$, tenemos también que $\mathrm{cl}_X(Q_0) \subset Q \subset C$. Luego $x \in C = P_0 \cup Q_0$. Si $x \in P_0$, entonces $x \in P(p)$, por lo que, $x \leqq p$. De esta manera, $x \leqq p$ y $p \leqq x$. Esto implica, pues $\leqq$ es antisimétrica, que $x = p$. Luego $p = x \in P \cap Q$. En vista de que esto contradice el hecho de que $P \cap Q = \emptyset$, no es cierto que $x \in P_0$, así que, $x \in Q_0$. Esto prueba que $\mathrm{cl}_X(Q_0) \subset Q_0$, por lo que Q_0 es cerrado en X. Esto prueba 3).

De 3), tenemos que Q_0 es un subconjunto cerrado del compacto C. Luego Q_0 es compacto. Aplicando el Teorema 2.13, Q_0 tiene un elemento minimal q. Como $p \in P_0$, $q \in Q_0$ y $P_0 \cap Q_0 = \emptyset$, sucede que $p \neq q$. Por 2), tenemos que, $p \leqq q$, así que $p \lneqq q$. En vista de que C es densa en el sentido del orden y de que $p, q \in C$, existe $z \in C$ tal que $p \lneqq z \lneqq q$. Esto significa que $p \leqq z \leqq q$, $p \neq z$ y $q \neq z$. Ahora bien, como $C = P_0 \cup Q_0$, tenemos que $z \in P_0$ o bien $z \in Q_0$. Si $z \in P_0$, entonces $z \leqq p$. Luego $z \leqq p$ y $p \leqq z$, por lo que, $p = z$ (por la antisimetría de $\leqq$). De esta contradicción resulta que $z \in Q_0$ y, por la minimalidad de q en Q_0, sucede que $q \leqq z$. Como también $z \leqq q$, por antisimetría, $q = z$. Esta contradicción que hemos obtenido, proviene de suponer que C no es conexo. En consecuencia, C es conexo. $\square$

En el siguiente teorema mostramos condiciones, bajo las cuales, un $POTS$ resulta ser conexo.

Teorema 3.25. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $POTS$ denso en el sentido del orden y tal que toda cadena maximal en X es compacta. Si el conjunto de los elementos maximales de X, o bien el de los elementos minimales de X es conexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo. Entonces $X = P \cup Q$, donde P y Q son dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X. Sin perder generalidad, consideremos que $\max(X)$, el conjunto de los elementos maximales de X, es conexo. Como P y Q están separados, podemos también suponer que $\max(X) \subset Q$. Si $p \in P$, entonces $\{p\}$ es una cadena en X. Luego, por el Corolario 2.9, existe una cadena maximal C en X tal que $\{p\} \subset C$. Notemos que $C \cap P \neq \emptyset$ y que, por hipótesis, C es compacto. Luego, por el Teorema 2.13, C tiene un elemento maximal z. Afirmamos que

1) z es un elemento maximal de X.

Para probar 1), sea $x \in X$ tal que $z \leqq x$. Si $x \notin C$, entonces $D = C \cup \{x\}$ es un subconjunto de X que contiene propiamente a C. Si $y \in C$ entonces, por la maximalidad de z en C, $y \leqq z$. Luego, por transitividad, $y \leqq x$. Esto implica que D es una cadena. Como esto contradice la maximalidad de

C, necesariamente $x \in C$. Aplicando de nuevo la maximalidad de z en C, tenemos que $x \leqq z$. Esto prueba 1).

De 1) y el hecho de que $\max(X) \subset Q$, se tiene que $z \in C \cap Q$. Entonces C es un subconjunto de X que intersecta a los conjuntos separados P y Q. Luego, C no es conexo. Ahora bien, como C es una cadena maximal en X, por el Teorema 3.23, C es denso con respecto al orden. Entonces, por la segunda parte del Teorema 3.24, C es conexo. Tenemos una contradicción que proviene de suponer que X no es conexo. Luego X es conexo. $\square$

Damos ahora una condición necesaria y suficiente para que las cadenas maximales en un $POTS$ sean conexas.

Teorema 3.26. *Sea $(X, \leqq)$ un $POTS$ con cadenas maximales compactas. Entonces cada cadena maximal es conexa si y sólo si $P(x) \cap S(y)$ es conexo, para cada $x, y \in X$.*

Demostración. Supongamos que toda cadena maximal en X es conexa. Sean $x, y \in X$. Si $y \nleqq x$ entonces $P(x) \cap S(y)$ es vacío, ya que si tuviera un elemento z, por transitividad tendríamos que $y \leqq x$. Por lo tanto, el caso interesante es cuando $y \leqq x$. Consideremos la familia $\{C_i\}_{i \in I}$ de las cadenas maximales en X que tienen a y y a x. Por hipótesis, cada cadena C_i es conexa y, por el Teorema 3.24, cada C_i es densa en el sentido del orden.

Afirmamos ahora que $P(x) \cap S(y)$ también es denso en el sentido del orden. Para ver esto, tomemos dos elementos a y b en $P(x) \cap S(y)$ tales que $a \lneqq b$. Entonces hay una cadena maximal C_j de la familia $\{C_i\}_{i \in I}$ tal que tiene a los elementos a, b, x, y, es decir, tiene la secuencia $y \leqq a \lneqq b \leqq x$. Como C_j es densa en el sentido del orden, existe $z \in C_j$ tal que:

$$y \leqq a \lneqq z \lneqq b \leqq x.$$

Luego $z \in P(x) \cap S(y)$. Por lo tanto, $P(x) \cap S(y)$ es denso en el sentido del orden.

Además, se puede observar que las cadenas maximales de $P(x) \cap S(y)$ son:

$$\{(P(x) \cap S(y)) \cap C_i\}_{i \in I}$$

Notemos ahora que, los elementos de la familia anterior, son cerrados dentro de cadenas maximales compactas. Por lo tanto, resultan ser compactos en $P(x) \cap S(y)$.

Sabemos que $(P(x) \cap S(y), \leqq_{|P(x)\cap S(y)})$ es un $POTS$ denso en el sentido del orden con cadenas maximales compactas y, además, $\min(P(x) \cap S(y)) = \{y\}$ y $\max(P(x) \cap S(y)) = \{x\}$ son conexos. Luego, por el Teorema 3.25, tenemos que $P(x) \cap S(y)$ es conexo.

Para probar el regreso, supongamos que X tiene una cadena maximal disconexa C. Por el Teorema 3.24, obtenemos $p, q \in C$ tales que $S(p) \cap P(q) = \{p, q\}$, contradiciendo la condición de que $S(p) \cap P(q)$ es conexo. $\square$

En estos términos, observamos que en la clase de los espacios $POTS$ con cadenas maximales compactas, una condición necesaria y suficiente para que dichas cadenas sean continuos T_2, es que la intersección de los sucesores de un punto con los predecesores de otro, sea conexo.

3.7. Una Aplicación a Hiperespacios

Recordemos que si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\mathrm{bd}_X(A)$ denota la frontera de A en X. En la Definición 2.19, indicamos que un continuo T_2 es un espacio T_2, compacto, conexo y no degenerado. Si X es un continuo T_2, entonces un *subcontinuo* de X es un subconjunto no vacío de X que es cerrado y conexo. Los continuos T_2 satisfacen la siguiente propiedad, conocida como el *Teorema de los Golpes en la Frontera*.

Teorema 3.27. *Sean X un continuo T_2 y U un subconjunto propio, abierto y no vacío de X. Si C es una componente de $\mathrm{cl}_X(U)$, entonces $C \cap \mathrm{bd}_X(U) \neq \emptyset$.*

Una prueba detallada del teorema anterior, puede verse en [10, Teorema 1.31, p. 12]. En [10, Corolario 1.32, p. 13] se prueba el siguiente resultado, el cual es un corolario del Teorema 3.27.

Teorema 3.28. *Sea X un continuo T_2. Supongamos que R y T son subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $R \subsetneq T$ y cada componente de T intersecta a R. Entonces existe un subconjunto cerrado y no vacío S de X tal que $R \subsetneq S \subsetneq T$ y toda componente de S intersecta a R.*

En la presente sección, interpretaremos el teorema anterior, en el lenguaje de espacios topológicos con una relación de orden. Para esto necesitamos primero introducir algunos conceptos y establecer una notación adecuada. Dado un espacio X, compacto y T_2, consideremos las familias

$$2^X = \{A \subset X \colon A \text{ es cerrado y no vacío en } X\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X \colon A \text{ es conexo}\}.$$

Si X es un continuo T_2, entonces $C(X)$ es la familia de los subcontinuos de X. Ahora vamos a darle una topología a 2^X. Para esto, si $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos de X, definimos el conjunto $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ como sigue:

$$\left\{ A \in 2^X \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Consideremos la familia

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \colon n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, U_2, \ldots, U_n \text{ son abiertos en } X\}.$$

En [10, Teorema 1.43, p. 22] se prueba que $\mathcal{B}$ es una base para una topología τ_V en 2^X. A τ_V se le conoce como la *topología de Vietoris* de 2^X. En algunos artículos, τ_V se define como la *topología finita* de 2^X. Como $C(X) \subset 2^X$, podemos considerar en $C(X)$ la topología relativa de 2^X, que denotaremos también por τ_V, en lugar de $(\tau_V)_{|C(X)}$. Incluso, si $\mathcal{A} \subset 2^X$, denotaremos por τ_V a la topología relativa de 2^X en $\mathcal{A}$.

De lo anterior, si X es un continuo T_2, entonces podemos considerar los espacios topológicos $(2^X, \tau_V)$ y $(C(X), \tau_V)$. En [10, Teorema 1.58, p. 29] y [10, Teorema 1.64, p. 31] se prueba que $(2^X, \tau_V)$ es compacto y T_2, y que $(C(X), \tau_V)$ es compacto (y también es T_2, por ser un subespacio de 2^X). A $(2^X, \tau_V)$ y $(C(X), \tau_V)$ se les conoce como *hiperespacios* de X. En la presente sección vamos a utilizar el Teorema 3.28 para mostrar que $(2^X, \tau_V)$ y $(C(X), \tau_V)$ son conexos por arcos.

Consideremos ahora la siguiente noción, dada por A. K. Misra en [12]

Definición 3.29. *Sea X un continuo T_2. Supongamos que A y B son subconjuntos no vacíos de X tales que $B \subset A$. Decimos que B es un **c-subconjunto** de A, o bien que A es un **c-superconjunto** de B, si cada componente de A intersecta a B.*

Para simplificar, cuando A sea un c-superconjunto de B, escribiremos $B \Subset A$ o bien $A \Supset B$. Consideremos ahora la relación $\leqq$ en 2^X definida como sigue:

$$\text{si } A, B \in 2^X \text{ entonces } A \leqq B \text{ si y sólo si } A \Supset B. \tag{3.7.1}$$

Es fácil probar que $\leqq$ es un orden parcial en 2^X. En [10, Lema 2.27, p. 47] se prueba que el orden $\leqq$ es continuo. Entonces $(2^X, \tau_V)$, con el orden $\leqq$, es un $POTS$ cuyo orden parcial es continuo. Esto implica, por el Lema 2.10, que toda cadena maximal en $(2^X, \tau_V)$ es cerrada. Como $(2^X, \tau_V)$ es compacto, en realidad toda cadena maximal en $(2^X, \tau_V)$ es compacta. Tenemos además el siguiente resultado.

Teorema 3.30. *En el espacio topológico $(2^X, \tau_V)$, con el orden parcial $\leqq$ definido en* (3.7.1)*, toda cadena maximal es densa en el sentido del orden y, además, conexa.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una cadena maximal en 2^X. Tomemos $A, B \in 2^X$ tales que $A \lneqq B$. Entonces $B \subsetneq A$ y, además, A es un c-superconjunto de B. Por el Teorema 3.28, existe $C \in 2^X$ tal que $B \subsetneq C \subsetneq A$ y toda componente de C intersecta a B. Luego $C \lneqq B$. Como $A \Supset B$ y $B \subset C$, toda componente de A intersecta a C. Luego $A \lneqq C$. En consecuencia $A \lneqq C \lneqq B$. Ahora bien, como $\mathcal{C}$ es una cadena maximal en 2^X, necesariamente $C \in \mathcal{C}$. Esto prueba que $\mathcal{C}$ es denso en el sentido del orden. Luego, por el Teorema 3.24, $\mathcal{C}$ es conexo. □

Para probar ahora que $(2^X, \tau_V)$ es conexo por arcos, consideremos la siguiente definición.

Definición 3.31. *Un **arco** es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Un **arco generalizado** es un continuo T_2 cuya topología es la del intervalo, con respecto a un orden total.*

Si el espacio topológico (X, τ) es un arco generalizado, entonces X es un continuo T_2 y, además, existe un orden total $\leqq$ en X de manera que la topología del intervalo τ_o en X, que dimos en la Definición 3.9, es justo τ.

Supongamos que X es un continuo T_2. Es conocido que X es un arco generalizado si y sólo si X tiene exactamente dos puntos que no son de corte (recordemos que, por el Teorema 2.20, todo continuo T_2 tiene al menos dos puntos que no son de corte). Una prueba detallada de esto, puede verse en [10, Corolario 2.16]. A los únicos puntos del arco generalizado X que no son de corte, se les llama los *extremos* de X.

Definición 3.32. *Un espacio topológico X es* ***conexo por arcos*** *si para cada $p, q \in X$, existe un arco generalizado A, contenido en X y con extremos p y q.*

El siguiente teorema aparece probado en [10, Teorema 2.24, p. 45].

Teorema 3.33. *Sea X un espacio compacto y T_2. Supongamos que A y B son arcos generalizados contenidos en X, de modo que A tiene como extremos a p y r, mientras que B tiene como extremos a r y q, donde $p \neq q$. Entonces existe un arco generalizado C, contenido en $A \cup B$, que tiene como extremos a p y q.*

El siguiente resultado aparece probado en [10, Teorema 1.16, p. 4].

Teorema 3.34. *Sea (X, τ) un espacio compacto y T_2.*

1) *si τ_+ es una topología en X tal que $\tau \subsetneq \tau_+$, entonces (X, τ_+) no es compacto.*

2) *si τ_- es una topología en X tal que $\tau_- \subsetneq \tau$, entonces (X, τ_-) no es T_2.*

Como consecuencia del Teorema 3.34, tenemos el siguiente resultado, el cual generaliza el Teorema 3.30.

Teorema 3.35. *Sea X un continuo T_2. Entonces en el espacio topológico $(2^X, \tau_V)$, con el orden parcial $\leqq$ definido en* (3.7.1)*, toda cadena maximal no degenerada, es un arco generalizado y denso en el sentido del orden.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cadena maximal no degenerada en 2^X. Vamos a denotar la topología de Vietoris de 2^X, restringida a $\mathcal{C}$, por τ_V. Como 2^X es T_2, el espacio $(\mathcal{C}, \tau_V)$ es T_2. Además $(\mathcal{C}, \tau_V)$ es compacto, como ya indicamos. Por el Teorema 3.30, $(\mathcal{C}, \tau_V)$ es denso en el sentido del orden y, además, conexo. Entonces $(\mathcal{C}, \tau_V)$ es un continuo T_2. Notemos que el orden parcial $\leqq$, definido en (3.7.1), es un orden total cuando se restringe a $\mathcal{C}$. Entonces podemos considerar la topología del intervalo τ_o en $\mathcal{C}$, con respecto a $\leqq_{|\mathcal{C}}$. Por el Corolario 3.12, $(\mathcal{C}, \tau_o)$ es T_2.

Como ya indicamos, el orden $\leqq$ es continuo. Entonces τ_V es una topología en $\mathcal{C}$ tal que, si consideramos el espacio topológico $(\mathcal{C}, \tau_V)$ con el orden total $\leqq_{|\mathcal{C}}$, resulta que $\leqq_{|\mathcal{C}}$ es continuo. Luego, por el Teorema 3.11, $\tau_o \subset \tau_V$. Como $(\mathcal{C}, \tau_V)$ es T_2, por la parte 2) del Teorema 3.34, $\tau_0 = \tau_V$. Esto prueba que $\mathcal{C}$ es un arco generalizado. $\square$

Sea X un continuo T_2. Por el teorema anterior, el hiperespacio 2^X contiene arcos generalizados que son densos en el sentido del orden. Como veremos, dichos arcos son los que se describen a continuación.

Definición 3.36. *Supongamos que X es un continuo T_2. Un* ***arco ordenado*** *en 2^X es un arco generalizado $\mathcal{A}$, contenido en 2^X, de manera que el orden total de $\mathcal{A}$ es la inclusión $\subset$, o bien la inclusión inversa $\supset$. Si $A, B \in \mathcal{A}$ son los extremos de $\mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{A}$ es un* ***arco ordenado de*** *A* ***a*** *B* ***en*** *2^X.*

En [10, Teorema 2.22, p. 44] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.37. *Sea X un espacio compacto y T_2. Tomemos $A, B \in 2^X$ de modo que $A \subset B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X, si y sólo si existe un subconjunto $\mathcal{C}$ de 2^X, totalmente ordenado, compacto T_2 y denso en el sentido del orden, de modo que $A, B \in \mathcal{C}$.*

Si $A \Subset B$, entonces existe una cadena maximal $\mathcal{C}$ en 2^X tal que $A, B \in \mathcal{C}$. Si además $A \neq B$, resulta que $\mathcal{C}$ es no degenerada. Luego, por el Teorema 3.35, $\mathcal{C}$ es un arco generalizado y denso en el sentido del orden. En particular $\mathcal{C}$ es un subconjunto de 2^X, totalmente ordenado, compacto T_2 y denso en el sentido del orden, de modo que $A, B \in \mathcal{C}$. Luego, por el Teorema 3.37, existe un arco ordenado de A a B en 2^X. Con esto tenemos probada la mitad del resultado siguiente. El teorema completo aparece demostrado en [10, Corolario 2.29, p. 48].

Teorema 3.38. *Sea X un continuo T_2. Tomemos $A, B \in 2^X$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si $A \Subset B$.*

Si $A, B \in C(X)$ y $A \subset B$, entonces $A \Subset B$ y, por el teorema anterior, existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ de A a B en 2^X. No es difícil probar que $\mathcal{A} \subset C(X)$, por lo que en realidad existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.

Estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 3.39. *Si X es un continuo T_2, entonces 2^X es conexo por arcos.*

Demostración. Tomemos $A, B \in 2^X$, de modo que $A \neq B$. Si $B = X$, entonces $A \subset X$ y, como X es conexo, $A \Subset B$. Luego existe un arco ordenado de A a B en 2^X. En particular existe un arco generalizado contenido en 2^X que tiene tanto a A como a B. Esto termina la prueba en el caso en que $B = X$. Si $A = X$, procediendo como en el caso anterior, encontramos un arco ordenado de B a A en 2^X. Supongamos ahora que $A \neq X$ y $B \neq X$. Entonces $A \Subset X$ y $B \Subset X$, por lo que existen un arco ordenado $\mathcal{A}_1$ de A a X en 2^X, y un arco ordenado $\mathcal{A}_2$ en 2^X de B a X. Notemos que $\mathcal{A}_1$ es un arco generalizado en 2^X con extremos A y X, mientras que $\mathcal{A}_2$ es un arco generalizado en 2^X con extremos X y B. Luego, por el Teorema 3.33, la unión $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ contiene un arco generalizado $\mathcal{A}$, con extremos A y B. Esto prueba que 2^X es conexo por arcos. $\square$

Si X es un continuo T_2 y $A, B \in C(X)$, siguiendo la misma demostración que acabamos de dar, se tiene que $C(X)$ también es conexo por arcos. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$$

entonces, considerando en cada $C_n(X)$ la topología de Vietoris, también resulta que cada $C_n(X)$ es un espacio compacto, T_2 y conexo por arcos. Entonces todos los hiperespacios de X que hemos visto, a saber 2^X y cada $C_n(X)$ (notemos que $C_1(X) = C(X)$) son continuos T_2 que, además son conexos por arcos, independientemente de si X es conexo por arcos.

Conviene indicar que, en la Teoría de Hiperespacios, la existencia de arcos ordenados, no solo es útil para probar que los hiperespacios son conexos por arcos. En realidad, los arcos ordenados constituyen en sí, una buena herramienta para probar diversos aspectos que involucran a un continuo o a sus hiperespacios. El lector interesado en la Teoría de Hiperespacios, puede consultar el texto [17].

Terminamos el presente capítulo indicando que, una buena parte de los resultados mostrados en la presente sección, en cuya referencia hemos recurrido a la Tesis de Licenciatura [10], aparecen probados originalmente en [12] y [13].

Capítulo 4

Puntos Fijos y Elementos Terminales

4.1. Introducción

En este último capítulo daremos aplicaciones en la Teoría del Punto Fijo para $QOTS$ y $POTS$, haciendo uso de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, principalmente del Teorema 3.19. Cabe destacar que originalmente la idea de esta aplicación es debida a A. D. Wallace en [21]. Primero, estudiaremos una generalización del concepto de sucesión en espacios topológicos con redes. Luego, dentro de la clase de los conjuntos $QOTS$ y T_2 con cadenas maximales compactas, veremos bajo qué condiciones, dada una función continua que preserva el orden de dicho espacio en sí mismo, tiene un subconjunto compacto fijo.

En la Sección 4.4 se introducirá el concepto de elemento terminal que resulta ser una generalización del punto final. También veremos funciones no alternantes y monótonas, que tendrán propiedades importantes, en el sentido de preservar la separación.

Finalmente, en la Subsección 4.4.2, se ve la aplicación de la definición de los elementos terminales y las funciones monótonas, al definir un orden que generaliza al de la Sección 2.4. El objetivo del estudio de los objetos antes mencionados, es mostrar que en la clase de los continuos T_2 y localmente conexos, los homeomorfismos de ellos en sí mismos que dejan fijo a un elemento terminal propio, tienen un punto fijo en el complemento del elemento terminal.

4.2. Redes

En la presente sección usaremos la generalización de la noción usual de sucesión. Utilizando dicha noción nos permitira relacionar la idea de ordenar una colección de puntos de un espacio topológico X, por medio de una función de un conjunto dirigido a X. Recordemos que en la Definición 1.2, aparece el concepto de conjunto dirigido.

Definición 4.1. *Si X es un conjunto, entonces una* ***red en*** *X es una función $\chi\colon \Lambda \to X$, donde $(\Lambda, \leqq)$ es un conjunto dirigido.*

Si $\chi\colon \Lambda \to X$ es una red en X y $\lambda \in \Lambda$, es común denotar a $\chi(\lambda)$ por x_λ y, a toda la red, por $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, con el orden usual, es un conjunto dirigido. Entonces las redes en X, cuyo dominio es dicho conjunto dirigido, son las sucesiones en X. La idea principal es sustituir el orden total de $\mathbb{N}$, por un casi orden con una orientación creciente.

Si X es un *COCO* y $\chi\colon \Lambda \to X$ es una red en X entonces, tanto X como Λ poseen una relación de orden. Denotaremos con el mismo símbolo dichas relaciones de orden.

Definición 4.2. *La red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es* ***monótona creciente*** *si cada vez que $\lambda \leqq \mu$ en Λ tenemos que $x_\lambda \leqq x_\mu$ en X.*

A continuación generalizamos el concepto de acumulación y convergencia para redes.

Definición 4.3. *La red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se* ***acumula*** *en $x_0 \in X$ si para todo abierto U de X tal que $x_0 \in U$ y para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu \in \Lambda$ tal que $\mu \geqq \lambda$ y $x_\mu \in U$.*

Definición 4.4. *La red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$* ***converge*** *a $x_0 \in X$ si para cualquier abierto U de X tal que $x_0 \in U$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_\mu \in U$ para toda $\mu \geqq \lambda$.*

Notemos que, una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a x_0 en X, se acumula en x_0. Si $(X, \leqq)$ es un *COCO*, una condición suficiente para que el recíproco pase, es que X sea localmente convexo y la red sea monótona creciente, como veremos a continuación. Recordemos que en la Definición 2.34, aparece la noción de localmente convexo.

Proposición 4.5. *Si X es un COCO localmente convexo, entonces cualquier red monótona creciente $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ que se acumula en $x_0 \in X$, converge a $x_0 \in X$.*

Demostración. Sean x_0 un punto de acumulación de la red monótona creciente $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ y U un abierto que contiene a dicho punto. Como X localmente convexo, tenemos que existe V abierto convexo, tal que $x_0 \in V \subset U$.

Como x_0 es un punto de acumulación, sabemos que existe $\mu \in \Lambda$ tal que $x_\mu \in V$, y al tomar cualquier $\lambda \geqq \mu$, existe $\mu' \geqq \lambda$ tal que $x_{\mu'} \in V$. Usando la convexidad de V y la monotonía de la red , tenemos que $x_\lambda \in [x_\mu, x_{\mu'}] \subset V$.

Por lo tanto, existe $\mu \in \Lambda$ tal que para cada $\lambda \geqq \mu$ se tiene que $x_\lambda \in U$, es decir la red converge a x_0. $\square$

Más adelante, veremos como sustituir la condición de localmente convexo por la de compacidad, cuando el orden sea parcial.

En los cursos de Topología General, se prueba que la compacidad implica que toda sucesión tiene un punto de acumulación [14, Teorema 28.1, pág. 179]. En el siguiente teorema observamos que dicho resultado se generaliza a redes.

Teorema 4.6. *Si X es compacto entonces toda red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X tiene un punto de acumulción.*

Demostración. Sean X compacto y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red de X. Consideremos también la familia de cerrados $\{\mathrm{cl}_X(C_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ donde C_λ está definida como:

$$C_\lambda = \{x_{\lambda'} \colon \lambda' \geqq \lambda\}.$$

Por un lado, si $\lambda \geqq \lambda'$ y $x_\mu \in C_\lambda$, entonces $\mu \geqq \lambda$. Luego, $\mu \geqq \lambda'$, es decir, $x_\mu \in C_{\lambda'}$. Entonces $C_\lambda \subset C_{\lambda'}$.

Si tomamos $\{\mathrm{cl}_X(C_{\lambda_i})\}_{i=1\ldots n}$ entonces, por ser Λ conjunto dirigido, existe un λ_0 mayor a todos los λ_i. Por la propiedad vista en el párrafo anterior:

$$\emptyset \neq C_{\lambda_0} = C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} \cap \cdots \cap C_{\lambda_n}.$$

o bien:

$$\emptyset \neq \mathrm{cl}_X(C_{\lambda_1}) \cap \mathrm{cl}_X(C_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}_X(C_{\lambda_n})\,.$$

Es decir, dicha familia tiene la propiedad de la intersección finita.

Como X es compacto, existe $x_* \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{cl}_X(C_\lambda) = C$. Afirmamos que, x_* es un punto de acumulación de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Para ello, sean U un abierto que tiene a x_* y $\lambda \in \Lambda$. Como $x_* \in \mathrm{cl}_X(C_\lambda)$, luego $\emptyset \neq U \cap C_\lambda$, es decir, existe $\mu \geqq \lambda$ tal que $x_\mu \in U$. Por lo tanto, x_* es punto de acumulación de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. $\square$

Ahora, notemos que dado X espacio topológico y $x \in X$, siempre podemos considerar a Λ_x una base local de x en X. Para definir la relación de orden a Λ_x, decimos que $B_1 \leqq B_2$ si y sólo si $B_2 \subset B_1$. La definición de base local permite darle a Λ_x una estructura de conjunto dirigido.

A continuación presentaremos otros resultados para redes, aplicando la observación anterior, que nos permite tener una caracterización de la cerradura de subconjuntos de un espacio topológico y de la continuidad de una función $f\colon X \to Y$.

Teorema 4.7. *Si $E \subset X$, entonces $x \in \mathrm{cl}_X(E)$ si y sólo si existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en E tal que converge a x.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{cl}_X(E)$, entonces para cualquier $B \in \Lambda_x$, definida en el párrafo anterior, existe $x_B \in B \cap E$, por la definición de cerradura. Así, obtenemos la red $\{x_B\}_{B\in\Lambda_x}$. Afirmamos, que dicha red converge a x.

Sea un abierto U que tiene a x, por definición de base local existe B_0 básico local de x tal que $x \in B_0 \subset U$. Notemos que para cualquier $B \geqq B_0$ con $B \in \Lambda_x$ tenemos que $x \in B \subset U$, es decir, $x_B \in B \subset U$. Por lo tanto, $\{x_B\}_{B\in\Lambda_x}$ converge a x.

La otra implicación se sigue directo de la definición de cerradura. $\square$

Teorema 4.8. *Sea $f\colon X \to Y$. Entonces f es continua si y sólo si cada vez que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converga a x_0 en X, entonces $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $f(x_0)$ en Y.*

Demostración. Supongamos que f es continua en x_0 y $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x_0. Entonces, dado un abierto V de X que contenga a $f(x_0)$, tenemos que, $f^{-1}(V)$ es un abierto que tiene a x_0. Por lo tanto, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_\mu \in f^{-1}(V)$ para toda $\mu \geqq \lambda$. Esto prueba que, $f(x_\mu) \in V$ para toda $\mu \geqq \lambda$, es decir, que $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ converga a $f(x_0)$.

Por otro lado, para ver que f es continua, veremos que $f(\mathrm{cl}_X(E)) \subset \mathrm{cl}_X(f(E))$. Tomemos $x \in f(\mathrm{cl}_X(E))$, entonces $x = f(x_0)$ con $x_0 \in \mathrm{cl}_X(E)$. Por el Teorema 4.7 tenemos que existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en E tal que converge a x_0. Por lo tanto, $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \subset f(E)$ converge a $f(x_0) = x$ en Y. Esto prueba, por el Teorema 4.7, que $x \in \mathrm{cl}_X(f(E))$.

□

A continuación aplicaremos nuestros resultados de redes en los espacios compactos ordenados. El siguiente resultado, nos indica dónde se encuentra el conjunto de los puntos de acumulación del Teorema 4.6 cuando X es un espacio compacto casi ordenado.

Proposición 4.9. *Sea X es un espacio compacto casi ordenado. Entonces toda red monótona creciente $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X tiene un punto de acumulación, y el conjunto de los puntos de acumulación de $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ están en $E(x_0)$ para algún $x_0 \in X$.*

Demostración. Por el Teorema 4.6, tenemos que la red monótona creciente $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X tiene un punto de acumulación x_0.

Sea U un abierto tal que $E(x_0) \subset U$, por el Teorema 2.35, X es clc. Entonces existe un abierto convexo V, de tal forma que $E(x_0) \subset V \subset U$. Como $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se acumula en x_0 y V es abierto que lo contiene existe $\mu \in \Lambda$ tal que $x_\mu \in V$.

Análogamente al Teorema 4.5, podemos notar que para cualquier $\lambda \geqq \mu$, entonces existe $\mu' \geqq \lambda$ tal que $x_\lambda \in [x_\mu, x_{\mu'}] \subset V$. Por lo tanto, tenemos que $x_\lambda \in V$ para cada $\lambda \geqq \mu$.

Supongamos que existe un punto de acumulación x_0' de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $x_0' \notin E(x_0)$. Dado que, X es compacto y T_2, entonces X es T_3. Por lo tanto, tenemos que existen dos abiertos ajenos B y U de X tales que $x_0' \in B$

y $E(x_0) \subset U$. Por lo dicho anteriormente, existe μ tal que para toda $\lambda \geqq \mu$, tenemos que $x_\lambda \in V$.

Luego, para el abierto B y $\mu \in \Lambda$ no existiría alguien mayor que se quede en el abierto B, es decir, x_0' no es punto de acumulación. Luego, todos los puntos de acumulación están en $E(x_0)$. □

Recordemos que la noción de clc y localmente convexo, son equivalentes cuando el orden es parcial. Por lo tanto podríamos enunciar una versión para espacios compactos ordenados del Teorema 4.9.

Corolario 4.10. *Sea X es un espacio compacto ordenado. Entonces toda red monótona creciente en X converge.*

Demostración. Por el Corolario 2.36, X es localmente convexo. Usando la Proposición 4.5 tenemos que la red converge a x_0. □

Sea $f\colon X \to X$ una función continua. A continuación, observaremos el comportamiento de los puntos de acumulación de la red $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para facilitar la notación de dicha red definiremos el siguiente concepto.

Definición 4.11. *Dados $x \in X$ y $f\colon X \to X$, definimos la* ***órbita*** *de x bajo f como $orb(x, f) = \{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposición 4.12. *Sean X un espacio topológico y una función continua $f\colon X \to X$. Para cualquier $x \in X$, tal que $orb(x, f)$ se acumula en $x_0 \in X$, se tiene que $orb(x, f)$ se acumula a $f(x_0)$.*

Demostración. Sean un abierto U que contiene a $f(x_0)$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces x_0 está en $f^{-1}(U)$, el cual es abierto por la continuidad de f. Como $orb(x, f)$ se acumula en $x_0 \in X$, entonces existe $k \geqq n$ tal que, satisface que $f^k(x) \in f^{-1}(U)$, es decir, $f^{k+1}(x) \in U$.

Luego, existe $k+1 \geqq n$ tal que, $f^{k+1}(x) \in U$. Esto prueba que $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ se acumula en $f(x_0)$. □

Una consecuencia de la Proposición 4.12, es que la $orb(x, f)$ se acumula en la $orb(x_0, f)$.

4.3. Teoremas de Compactos Fijos en $QOTS$ y Puntos Fijos en $POTS$

Comenzamos esta sección enunciando un resultado que es consecuencia de que la intersección de compactos anidados no vacíos es un compacto no vacío, cuya demostración se puede ver en [4, Corolario 3.1.5, p. 124].

Proposición 4.13. *Sean X un espacio compacto y T_2 y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, para cada subconjunto cerrado y no vacío P de X tal que $f(P) \subset P$, el conjunto:*

$$K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^i(P)$$

es compacto, no vacío y $f(K) = K$.

Demostración. En primer lugar, notemos que, $\{f^i(P)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cadena anidada de compactos no vacíos. Entonces K es un compacto no vacío.

Por otro lado se tiene que:

$$f(K) = f\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^i(P)\right) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^{i+1}(P) = K.$$

Afirmamos ahora que, $K \subset f(K)$. Sea $x \in K$, entonces:

$$x = f^i(y_i) \text{ con } y_i \in P \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Como P es compacto, $\{f^{i-1}(y_i)\}_{i\in\mathbb{N}-\{1\}}$ se acumula en un punto $y_0 \in P$, por la Proposición 4.6.

Dado que, f es continua, por el Teorema 4.8 tenemos que, $\{f^i(y_i)\}_{i\in\mathbb{N}} = \{x\}$ se acumula en $f(y_0)$. Por lo tanto, $f(y_0) = x$.

Si $y_0 \notin K$, como X es compacto y T_2, entonces es T_3. Es decir, existe un abierto U tal que $K \subset U$ y $y_0 \notin \mathrm{cl}_X(U)$. Además, sabemos por [4, Corolario 3.1.5, p. 124], que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $f^m(P) \subset U$ para toda $m \gneq N$, es decir, $f^{m-1}(y_m) \in U$ para cualquier $m \gneq N+1$. Esto prueba que $y_0 \in U$. En vista de la contradicción, $y_0 \in K$.

$\square$

De la Proposición 4.13, se obtiene el siguiente resultado en la Teoría de los Continuos.

Corolario 4.14. *Sean X un continuo y T_2 y $f\colon X \to X$ una función continua. Entonces, para cada subconjunto cerrado y no vacío P de X tal que $f(P) \subset P$, el conjunto:*

$$K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^i(P)$$

es un continuo T_2, no vacío y $f(K) = K$.

Ahora nos dedicaremos a ver condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de un subconjunto compacto fijo bajo una función continua $f\colon X \to X$ en un $QOTS$ con cadenas maximales compactas.

Teorema 4.15. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un $QOTS$, T_2 y con cadenas maximales compactas. Sea $f\colon X \to X$ una función continua que preserva el orden. Entonces existe un subconjunto compacto no vacío K de X tal que $K \subset E(x_0)$ para algún $x_0 \in X$, y $f(K) = K$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que x y $f(x)$ son comparables en el sentido del orden.*

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto compacto no vacío K de X tal que $K \subset E(x_0)$ para algún $x_0 \in X$ y $f(K) = K$.

Como es no vacío, tomemos $x \in K \subset E(x_0)$. Entonces:

$$f(x) \in f(K) \subset K \subset E(x_0).$$

Por tanto $x \leqq x_0 \leqq f(x)$, es decir, x y $f(x)$ son comparables.

Por otro lado, si existe $x \in X$ tal que es comparable con $f(x)$. Entonces $orb(x, f)$ es cadena porque f preserva el orden.

Además, por el Corolario 2.9, $orb(x, f)$ está contenida en una cadena maximal M, que es compacta por hipótesis. En estos términos como M tiene un casi orden total, por el Teorema 1.39, la noción de orden semicontinuo y continuo son la mismo. Entonces M es un espacio compacto casi ordenado.

Por la Proposición 4.9 aplicado a M, tenemos que $orb(x, f)$ se acumula en algún $x_0 \in M$. Además, los puntos de acumulación de dicha sucesión están en $E(x_0)$. Por la Proposición 4.12, tenemos que, $f(x_0) \in E(x_0)$. Y para cualquier elemento $f(x) \in f(E(x_0))$, sabemos que, $x_0 \leqq x \leqq x_0$. Como f preserva el orden, observamos que:

$$x_0 \leqq f(x_0) \leqq f(x) \leqq f(x_0) \leqq x_0,$$

es decir, $f(x) \in E(x_0)$. Por lo tanto, $f(E(x_0)) \subset E(x_0)$.

Definimos el siguiente conjunto:

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(E(x_0)) :$$

Como $E(x_0)$ es compacto por Teorema 3.19, y considerando la continuidad de la función f, notemos que la siguiente familia:

$$\{f^n(E(x_0))\}_{n\in\mathbb{N}},$$

es de compactos anidados no vacíos que cumplen las hipótesis de la Proposición 4.13. Por tanto, existe un subconjunto compacto no vacío K de X tal que $K \subset E(x_0)$ y $f(K) = K$. $\square$

Corolario 4.16. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un POTS, T_2 y con cadenas maximales compactas. Sea $f\colon X \to X$ una función continua que preserva el orden. Entonces, f tiene un punto fijo si y sólo si existe $x \in X$ tal que x es comparable con $f(x)$.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 4.15 y de que $E(x_0) = \{x_0\}$ por la antisimetría. $\square$

En lo que resta de la sección probaremos resultados que nos permitan encontrar subconjuntos compactos fijos bajo f, contenidos en el complemento de un elemento mínimo de X.

Definición 4.17. *Si $(X, \leqq)$ es un COCO con un elemento $e \in X$ tal que $e \leqq x$ para cada $x \in X$, y $A \subset X$. Entonces decimos que, A está* ***acotado fuera de*** *e si existe $y \in X - E(e)$ tal que $A \subset S(y)$.*

Teorema 4.18. *Supongamos que $(X, \leqq)$ es un QOTS, T_2 y con cadenas maximales compactas. Además existe $e \in X$ tal que $e \leqq x$ para cualquier $x \in X$. Sea $f\colon X \to X$ una función continua que preserva orden y satisface:*

1) *Existe $x \in X - E(e)$ tal que x y $f(x)$ son comparables,*

2) *$orb(x, f)$ es acotada fuera de e.*

Entonces existen $x_0 \in X - E(e)$ y un subconjunto compacto no vacío K de X tal que $K \subset E(x_0)$ y $f(K) = K$.

Demostración. Sea x que satisface 1). Si $orb(x, f)$ es acotada fuera de e, obtenemos un punto de acumulación x_0 como en el Teorema 4.15. Por lo tanto, $x_0 \in \mathrm{cl}_X(orb(x, f))$, por el Teorema 4.7.

Sabemos que existe $y \in X - E(e)$ tal que $orb(x, f) \subset S(y)$. Éste es cerrado por el Proposición 1.36. Además, $x_0 \in \mathrm{cl}_X(orb(x, f)) \subset S(y)$, es decir, $y \leqq x_0$ y $e \nleqq y$. Por tanto, $x_0 \in X - E(e)$. De la misma manera que hicimos en el Teorema 4.15 construimos K entonces, K es un subconjunto compacto y no vacío de X tal que $K \subset E(x_0)$ y $f(K) = K$.

$\square$

Si además, le agregamos al Teorem 4.18 como hipótesis que X sea un $POTS$, entonces f tiene un punto fijo distinto de e, por el Teorema 4.18 y el Corolario 4.16.

La condición 2) del Teorema 4.18 no puede ser omitida de la hipótesis del Teorema 4.18, aún cuando X es compacto y f sobreyectiva.

Ejemplo 4.19. *Existe un $POTS$, T_2 y con cadenas maximales compacta. Un elemento mínimo e de X y $x \in X - E(e)$, tal que x y $f(x)$ son comparables pero el único punto fijo es e.*

Demostración. Sea $X = A \cup B \subset \mathbb{R}^2$ el espacio con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ definido en coordenadas polares por:

$$A = \{(\rho, \theta) \colon \rho = 1\}$$
$$B = \left\{(\rho, \theta) \colon \rho = \frac{\theta}{1+\theta}\right\}$$

Sea $e = (0, 0)$ y fijamos $x_0 = \left(\frac{\pi}{1+\pi}, \pi\right) \in B - e$. Con el siguiente orden:

$$(\rho_1, \theta_1) \leqq (\rho_2, \theta_2)$$

si y sólo si:

$$\rho_1 = \rho_2 \ \text{ y } \ \theta_1 = \theta_2 \ \text{ o } \ \rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \frac{\pi}{1+\pi}$$

.

Notemos que, B es una espiral con origen en e que tiende a A. Los elementos que tienen ρ más grande que $\frac{\pi}{1+\pi}$ sólo están relacionados con sí mismos. Y el arco de espiral que va de e a x_0 sigue el mismo orden lineal de θ. Por tanto, X está parcialmente ordenado.

Para todos los elementos con ρ más grande que $\frac{\pi}{1+\pi}$, $S(x) = \{x\} = P(x)$ es cerrado y para los demás puntos:

$$S((\rho_1, \theta_1)) = \left\{(\rho, \theta) \in X : \theta \in \left[\theta_1, \frac{\pi}{1+\pi}\right]\right\}$$

$$P((\rho_1, \theta_1)) = \{(\rho, \theta) \in X : \theta \in [0, \theta_1]\}$$

son cerrados.

Por lo tanto, X es un $POTS$. Además como X es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces es compacto. Definimos $f : X \to X$ por:

$$f(1, \theta) = \left(1, \theta - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{\theta}{1+\theta}, \theta\right) = \left(max\left\{0, \frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{1 + \theta - \frac{\pi}{2}}\right\}, max\left\{0, \theta - \frac{\pi}{2}\right\}\right)$$

Lo que hace la función es girar $\frac{\pi}{2}$ en sentido de las manecillas del reloj, con centro en e, a los elementos de A. Los elementos de B son girados $\frac{\pi}{2}$ en sentido de las manecillas del reloj, por la espiral, siempre y cuando $\theta - \frac{\pi}{2}$ sea positivo, en otro caso los manda a e.

Como f gira en el sentido del orden, para los elementos distintos que son comparables, al girar caen en el arco de la espiral entre e y x_0, por tanto, preserva el orden. En particular x_0 y $f(x_0)$ son comparables.

La continuidad de f definida en A claramente se cumple. Y para los puntos de B tenemos que al componer con cada proyección tenemos una función continua, entonces f es una función continua.

Finalmente f es una función continua que preserva el orden, con x_0 y $f(x_0)$ comparables. Pero la rotación sólo fija a e.

$\square$

4.4. Elementos Terminales

A continuación estudiaremos los elementos terminales, que resultan ser una generalización de los puntos finales que se encuentran en [16, pág. 99]. La definición de ambos se verá a continuación.

Definición 4.20. *Decimos que e es* ***punto final*** *si para cada abierto U de X que tenga a e, existe un abierto V de X tal que:*

$$e \in V \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset U$$

y $\mathrm{cl}_X(V) - V = \mathrm{bd}_X(V)$ tiene un sólo punto.

Definición 4.21. *Dados los subconjuntos P y Q de un conexo X, decimos que están* ***separados por*** *$K \subset X$ si:*

$$X - K = A|B,$$

$$P \subset A \text{ y } Q \subset B.$$

Si p y q no están separados por ningún punto, escribiremos $p \sim q$.

Definición 4.22. *Una* ***cadena prima*** *es un continuo T_2 que es punto final, punto de corte o un conjunto no degenerado E, representado como:*

$$E = \{x \colon a \sim x \text{ y } x \sim b\},$$

con elementos distintos $a, b \in X$ tales que $a \sim b$.

Para darnos una idea de las cadenas primas no degeneradas, tenemos por ejemplo las curvas cerradas simples.

Definición 4.23. *Una cadena prima E es un* ***elemento terminal*** *si tiene la propiedad de que cada abierto U de X que contenga a E, existe un abierto V de X tal que:*

$$E \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset U$$

y $\mathrm{cl}_X(V) - V = \mathrm{bd}_X(V)$ tiene un sólo punto.

Si X es un continuo T_2 con un punto de corte, entonces se demuestra en [23, Teorema 1, p. 141] que X contiene un elemento terminal.

Comparando las definiciones de punto final con elemento terminal. Podemos notar que este último no necesariamente está dentro del abierto V. El ejemplo de dos circunferencias tangentes muestra que $\mathrm{cl}_X(V)$ no puede ser remplazado por V en la definición de elemento terminal. Ya que si el abierto tuviera al punto de tangencia, entonces la frontera tendría dos puntos.

En el siguiente resultado observaremos cuál es la naturaleza del punto frontera $\mathrm{bd}_X(V)$ en las definiciones de punto final y elemento terminal.

Lema 4.24. *Sean X conexo y V un abierto no vacío de X tal que $\mathrm{bd}_X(V) = \{p\}$ y $X - \mathrm{cl}_X(V) \neq \emptyset$, entonces:*

$$X - \mathrm{bd}_X(V) = V|(X - \mathrm{cl}_X(V)).$$

Demostración. Por un lado, observemos que:

$$\mathrm{cl}_X(V) \cap (X - \mathrm{cl}_X(V)) = \emptyset.$$

Sabemos que:

$$X - \mathrm{cl}_X(V) \subsetneq X - V,$$

ya que si fuesen iguales como el de la izquierda es abierto y el de la derecha cerrado. Entonces tendríamos que X no es conexo. Además, por propiedades de la cerradura de un conjunto tenemos que:

$$X - \mathrm{cl}_X(V) \subset \mathrm{cl}_X(X - \mathrm{cl}_X(V)) \subset X - V,$$

por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(X - \mathrm{cl}_X(V)) = X - V$ y con ello se observa que

$$V \cap \mathrm{cl}_X(X - \mathrm{cl}_X(V)) = V \cap X - V = \emptyset.$$

□

Una consecuencia importante del resultado anterior, es que si X es T_1 y tiene E un elemento terminal propio, entonces X tiene un punto de corte. Para probarlo, tomemos $z \in X - E$, entonces $E \in X - \{z\}$. Por definición de elemento terminal existe un abierto V tal que $E \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset X - \{z\}$ y $\mathrm{bd}_X(V)$ tiene un sólo punto. Luego, $X - \mathrm{cl}_X(V)$ no es vacío. Esto prueba, por el Lema 4.24, que $\mathrm{bd}_X(V)$ es un punto de corte.

Ahora nos preguntamos sobre la cantidad de puntos de corte de X que puede tener un elemento terminal E, aún cuando ya que sabemos, por la definición de E, que éste no tiene puntos de corte de sí mismo.

Proposición 4.25. *Supongamos que X es un espacio topológico conexo, localmente conexo y T_2. Si E es un elemento terminal propio de X, entonces E tiene a lo más un punto de corte en X.*

Demostración. Supongamos que E tiene dos puntos de corte, x_0 y x_1 de X. Entonces para $i = 0, 1$ tenemos que:

$$X - \{x_i\} = A_i | B_i \text{ y } E - \{x_i\} \subset A_i.$$

Si la última condición no fuera cierta existirían $z, w \in E - \{x_i\}$ con $z \in A_i$ y $w \in B_i$. Luego, $z \nsim w$ ya que x_i los separaría, lo cual es falso.

Por el Lema 2.18, tenemos que si $i \neq j$ entonces $B_j \cup \{x_j\} \subset A_i$. De donde $B_i \cap B_j \subset A_i \cap B_j = \emptyset$, es decir $B_i \cap B_j = \emptyset$. Tomemos $y_i \in B_i$ y sea C_i la componente conexa en $X - \{x_i\}$ tal que $y_i \in C_i$. Observamos que, $C_i \cap C_j \subset B_i \cap B_j = \emptyset$. Por tanto, C_i y C_j son ajenos.

Consideremos el abierto $U = X - \{y_0, y_1\}$. Notemos que, U toca tanto a C_0 como a C_1 y no contiene a ninguno de las dos componentes. Como E es un elemento terminal y $E \subset U$, ya que $\{y_0, y_1\} \subset B_i \cup B_j$, entonces existe un abierto V de X tal que $E \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset U$ y $\mathrm{bd}_X(V)$ tiene un sólo punto. Luego, $x_1 \in V$ o $x_0 \in V$, ya que si no tuviera a ninguno, como $E \subset \mathrm{cl}_X(V)$, entonces $\mathrm{bd}_X(V)$ tendría más de un elemento.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_0 \in V$ y $\mathrm{bd}_X(V) = \{p\}$. Entonces $x_0 \neq p$. Por el Lema 4.24, tenemos que:

$$X - \{p\} = V | (X - \mathrm{cl}_X(V)).$$

Si $p \notin C_0$, como $y_0 \in C_0$, entonces $C_0 \subset X - \mathrm{cl}_X(V)$, por ser C_0 conexo.

Además, por el Lema 2.17, tenemos que $\mathrm{cl}_X(C_0) = C_0 \cup \{x_0\}$ y es conexo de $X - \{p\}$ que toca a V. Por tanto, $C_0 \subset \mathrm{cl}_X(C_0) \subset V$, lo cual es a una contradicción. Esto prueba que $p \in C_0$. Por otro lado, $x_1 \in V$. Ya que si $x_1 \notin V$ entonces $x_1 = p$ pero $p \in C_0$ y $x_1 \notin C_0$ porque $x_1 \notin B_0$. De forma anláoga se ve que $p \in C_1$.

Lo anterior nos dice que $\mathrm{bd}_X(V)$ intersecta tanto a C_0 como a C_1. Esta contradicción viene de haber supuesto que había dos puntos de corte. $\square$

De existir un punto de corte en un elemento terminal veremos que éste determina una separación particular de X, que más adelante motivará nuestra definición del orden de un elemento terminal en la Subsección 4.4.2.

Proposición 4.26. *Sea X es un espacio topológico conexo, localmente conexo y T_2. Con un elemento terminal propio E que tiene un punto de corte x de X, entonces $E - \{x\}$ y $X - E$ son conjuntos separados.*

Demostración. Como ningún par de elementos de $E - \{x\}$ son separados por definición de E, entonces tenemos que si C_0 es una componente de $X - \{x\}$, que intersecta a $E - \{x\}$. Entonces C_0 contiene a $E - \{x\}$ y, además, tenemos la siguiente separación:

$$X - \{x\} = C_0 | X - (C_0 \cup \{x\}).$$

Luego, bastará mostrar que $C_0 = E - \{x\}$, para tener la separación:

$$X - \{x\} = (E - \{x\}) | (X - E),$$

ya que $X - (C_0 \cup \{x\}) = X - E$.

Supongamos que existe $y \in C_0 - E$. Sea C una componente en $X - \{x\}$ distinta de C_0. Tomemos $z \in C$, por la conexidad local, entre x y el abierto $X - \{z, y\}$ existe un subconjunto conexo abierto P de X tal que, $x \in P$ y $y \notin P$, es decir, $C - P \neq \emptyset$.

Consideremos el subconjutno abierto $(C_0 \cup P) - \{y\}$. Notemos que, $(C_0 \cup P) - \{y\}$ contiene a E. Dado que, E es elemento terminal, entonces existe un abierto conexo V tal que $E \subset \mathrm{cl}_X(V) \subset (C_0 \cup P) - \{y\}$, donde $\mathrm{bd}_X(x) = \{p\}$. Por el Lema 4.24 tenemos que:

$$X - \{p\} = V | (X - \mathrm{cl}_X(V)).$$

Si $p \notin C_0$ y, como $y \notin \mathrm{cl}_X(V)$ y $y \in C_0$. Usando la conexidad de C_0, tendríamos que $C_0 \subset X - \mathrm{cl}_X(V)$, es decir, $E \cap C_0 = \emptyset$, lo cual es falso. Por lo tanto, $p \in C_0$ y, además, dado que, $x \notin C_0$, entonces $x \neq p$. Por otro lado, $x \in E \subset \mathrm{cl}_X(V) = V \cup \{p\}$, entonces $x \in V$.

Si $p \notin C$, entonces como $C - P \neq \emptyset$ tendríamos que, $C - \mathrm{cl}_X(V) \neq \emptyset$, es decir, el conexo C está contenido en el separando $X - \mathrm{cl}_X(V)$. Además, $C \subset \mathrm{cl}_X(C) = \{x\} \cup C \subset V$, ya que p no está en $\mathrm{cl}_X(C)$ y $x \in \mathrm{cl}_X(C) \cap V$, lo cual es contradictorio. Esto prueba que, $p \in C$.

Finalmente, p está en dos C y C_0 componentes de $X - \{x\}$, lo cual es falso. La contradicción vino de suponer que no se cumplía que $C_0 = E - \{x\}$. □

4.4.1. Funciones No Alternantes

A continuación, estudiaremos las funciones no alternantes y monótonas, las cuales tienen la propiedad de respetar separación.

Definición 4.27. *Sea X y Y dos espacios T_2 con $f\colon X \to Y$ continua y sobreyectiva. Decimos que f es **no alternante** si para cada descomposición:*

$$X - f^{-1}(y_0) = M|N \text{ con } y_0 \in Y$$

*entonces ningún conjunto $f^{-1}(y)$ toca a ambos M y N. Por otro lado, f es **monótona** si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.*

En el siguiente ejemplo vemos que la monotonía y la no alternancia no son conceptos equivalentes.

Ejemplo 4.28. *Existe una función no alternante que no es monótona.*

Demostración. Nos fijamos en la proyección del círculo unitario sobre el intervalo $[-1, 1]$ del eje x. No es monótona por que la imagen inversa del 0 es $\{-1, 1\}$ que no es conexo.

Además, cualquier descomposición tiene sólo dos componentes conexas y la imagen inversa de todo punto se queda contenido en una y sólo una componente. □

Por otro lado, toda función monótona es no alternante.

Ahora, veremos varias equivalencias de no alternancia que serán más fáciles de manejar.

Lema 4.29. *Sean X y Y dos espacios topológicos compactos y T_2. Las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que una función continua $f\colon X \to Y$ sea no alternante. Dada la descomposición:*

$$X - f^{-1}(y_0) = M|N \text{ con } y_0 \in Y$$

1) $M = f^{-1}(f(M))$ *y* $N = f^{-1}(f(N))$,

2) $Y - \{y_0\} = f(M)|f(N)$,

3) $f(M) \cap f(N) = \emptyset$,

4) $f^{-1}(f(M)) \cap f^{-1}(f(N)) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que f es no alternante. Para la primera condición, sea $x \in M$. Entonces $f^{-1}(f(x))$ intersecta a M, por la no alternancia. Luego, $f^{-1}(f(M)) \subset M$. La otra contención siempre se cumple, por tanto $M = f^{-1}(f(M))$. De forma análogamente se ve que $N = f^{-1}(f(N))$.

Supongamos 1), por la equivalencia de continuidad mencionada en [22, (3.1) pág. 496] que dice que, dos conjuntos están separados en Y si sólo si sus preimágenes también lo están en X. Por la descomposición tenemos que como $M = f^{-1}(f(M))$ y $N = f^{-1}(f(N))$ están separados, entonces $f(M)$ y $f(N)$ también lo están. Esto prueba 2).

Suponiendo 2), es directo la separación de $f(M)$ y $f(N)$, que prueba 3).

Ahora, supongamos 3) Si:

$$f(M) \cap f(N) = \emptyset,$$

entonces:

$$f^{-1}(f(M)) \cap f^{-1}(f(N)) = f^{-1}(f(M) \cap f(N)) = f(\emptyset) = \emptyset.$$

Finalmente si $f^{-1}(y)$ intrsecta a M y N y como $Z \subset f^{-1}(f(Z))$. Deducimos entonces que $f^{-1}(y)$ toca tanto a $f^{-1}(f(M))$ como a $f^{-1}(f(M))$. $\square$

Como habíamos mencionado al principio en el siguiente resultado se observa la importancia de las funciones no alternantes para este capítulo.

Lema 4.30. *Sean X y Y dos espacios topológicos compactos y T_2. Sea $f\colon X \to Y$ una función cerrada y no alternante. Además, $f^{-1}(y)$ con $y \in Y$, separa a dos subconjuntos P y Q de X . Entonces y separa a $f(P)$ y $f(Q)$ en Y.*

Demostración. Supongamos que, los subconjuntos P y Q de X que están separados por $f^{-1}(y) \subset X$. Entonces:

$$X - (f^{-1}(y)) = A|B,$$

donde $P \subset A$ y $Q \subset B$.

Notemos que:

$$f(X - (f^{-1}(y))) = Y - \{y\} = f(A) \cup f(B)\ ,\ f(P) \subset f(A) \text{ y } f(Q) \subset f(B).$$

Por el Lema 4.29, tenemos que:

$$X - \{y\} = f(A)|f(B),$$

es decir, y separa $f(P)$ y $f(Q)$ en Y. □

Sin necesidad de que f^{-1} sea continua, la monotonía de f cumple que la imagen inversa de conexos es conexa. Enunciaremos a continuación dicho lema, cuya demostración la podemos encontrar en [4, Teorema 6.1.29, p. 358].

Lema 4.31. *Si $f\colon X \to Y$ es una función monótona y cerrada entonces para cualquier subconjunto conexo C de Y, $f^{-1}(C)$ es conexo en X.*

4.4.2. El Orden del Elemento Terminal

De ahora en adelante supondremos que X es un continuo T_2 localmente conexo y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva.

Definición 4.32. *Sea E un elemento terminal propio de X. Consideramos la relación $\leqq_E$ definida en X como sigue: si $x, y \in X$ entonces $x \leqq_E y$ si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones:*

1) $x \in E$;

2) $x = y$;

3) *x separa a E y y en X.*

A $\leqq_E$ le llamaremos el ***orden del elemento terminal en*** *X.*

Por definición, si $x \in X$ y $e \in E$ entonces $e \leqq_E x$ y, además, $x \leqq_E x$. Es claro también que si $x \leqq_E e$, entonces $x \in E$, es decir, $E(e) = E$. En el siguiente resultado, mostraremos otras propiedades de la relación $\leqq_E$.

Teorema 4.33. *Sea E un elemento terminal propio de X. Entonces:*

1) *Para los elementos en el complemento de E, $\leqq_E$ es antisimétrica;*

2) *Los elementos E son los únicos elementos minimales de X, con respecto al orden $\leqq_E$;*

3) *Dada una cadena C con $\min(C) \subset X - E$, se tiene que $C \subset X - E$;*

4) *Para cualquier $x \in X$, $P(x)$ es cerrado.*

5) *$(X, \leqq_E)$ es un QOTS. Si E es un solo punto, entonces $(X, \leqq_E)$ es un POTS.*

Demostración. Supongamos que, $x_1, x_2 \in X - E$, tales que $x_1 \leqq_E x_2$ y $x_2 \leqq_E x_1$. De la definición de $\leqq_E$ notamos que no podemos usar la primera condición del orden $\leqq_E$ y si pasa el segundo ya habríamos terminado. La posibilidad que falta analizar es cuando $x_1 \neq x_2$ y:

$$X - \{x_i\} = A_i|B_i \text{ con } E \subset A_i \text{ y } x_j \in B_i \text{ para } i \neq j.$$

Entonces, por el Lema 2.18 sucede que $E \subset A_i \cup \{x_i\} \subset B_j$, por que $x_i \in B_j$ y $x_j \notin A_i$, pero $E \subset A_j$. En vista de esta contradicción, este caso no es posible. Por lo tanto, sólo tenemos el caso $x_1 = x_2$. Esto prueba 1).

Para probar 2), sea $x \in X$ tal que $x \leqq_E e$ para algún $e \in E$. Entonces $e \leqq_E x$, por la condición 1) de la definición del orden $\leqq_E$, es decir, todo elemento de E es minimal. Supongamos que existe $y \in X$ fuese minimal. Tomemos $e \in E$ entonces sabemos que $e \leqq_E y$, por la minimalidad de y tendríamos también que $y \leqq_E e$, o bien, $y \in E(e) = E$. Por lo tanto, los elementos minimales sólo están en E.

En vista de lo anterior, si tenemos una cadena cuyos elementos minimales están en el complemento de E, implica que la cadena está también fuera de E. De esta manera probamos 3).

Para probar 4), notemos que, $P(x) - (E \cup \{x\})$ es conjunto de los puntos que separa a x y E, por la definición del orden $\leqq_E$. Sea p un punto en la cerradura de $P(x) - (E \cup \{x\})$, que no esté en E ni sea x. Si $p \notin P(x) - (E \cup \{x\})$ entonces la componente C de $X - \{p\}$ que tenga a E, entonces necesariamente tendrá a x, ya que de no ser cierto:

$$X - \{p\} = C|(X - (\{x\} \cup C))$$

sería una separación de E y x.

Pero C puede ser cubierto por abiertos cuya cerradura se quede contenida en C, usando el *Lema de la Cadena* enunciado en [27, 3.1, p. 30]. Así, obtenemos una cadena finita conexa G en C tal que une a E con x, como la cerradura de cada eslabón se queda en C entonces $p \notin \mathrm{cl}_X(G)$.

Afirmamos que, $P(x) - (E \cup \{x\}) \subset G$, de lo contrario, existiría $z \in (P(x) - (E \cup \{x\})) - G$, tal que tendríamos siguiente separación:

$$X - \{z\} = A_z|B_z \ , \ E \subset A_z \ , \ x \in B_z.$$

Además, $G \subset X - \{z\}$. Por lo tanto, G se queda en uno sólo de los separandos, por ser conexo, pero toca a ambos, lo cual es contradición. Esto prueba que $P(x) - (E \cup \{x\}) \subset G$.

Finalmente, $\mathrm{cl}_X(P(x) - (E \cup \{x\})) \subset \mathrm{cl}_X(G) \subset X - \{p\}$, contradiciendo la elección de p. Luego $P(x) - (E \cup \{x\})$ es cerrado. Por lo tanto, $P(x) - (E \cup \{x\}) \cup E \cup \{x\} = P(x)$ es cerrado también.

Como ya vimos $\leqq_E$ es reflexiva. Para probar la transitividad de $\leqq_E$, tomemos $x \leqq_E y$ y $y \leqq_E z$. Claramente para el caso en donde $x \in E$, tenemos que, $x \leqq z$. Análogamente para la condición 2) del orden $\leqq_E$.

Por tanto, sólo basta ver el caso cuando se cumple que x separa a E y y, junto con y separa a E y z.

Tenemos que:

$$X - \{x\} = A_x | B_x \text{ con } E \subset A_x \text{ y } y \in B_x;$$
$$X - \{y\} = A_y | B_y \text{ con } E \subset A_y \text{ y } z \in B_y.$$

Afirmamos que:

$$X - \{x\} = A_x | B_x \text{ con } E \subset A_x \text{ y } z \in B_x.$$

Si $z \in A_x$ entonces, por el Lema 2.18 sabemos que $A_x \cup \{x\}$ es conexo y, además, es un subconjunto de $X - \{y\}$ ya que $y \in B_x$. Por otro lado, $E \subset A_y \cap A_x$, esto nos dice que $A_x \cup \{x\} \subset A_y$. Luego, $z \in A_y$ y $z \in B_y$, lo cual es falso. Por lo que la afirmación es cierta.

Para probar que es $\leqq_E$ es semicontinuo, basta notar que $P(x)$ y $S(x)$ son cerrados para cada $x \in X$.

Si $x \in E$ entonces $S(x) = X$. Por otro lado, si $x \notin E$, entonces:

$$S(x) = \{x\} \cup \{y \colon x \text{ separa a } E \text{ y } y \text{ en } X\}.$$

Ahora, si tomamos la componente C de $X - \{x\}$ que contiene a E. Entonces x separa a C de las demás componentes por lo que $S(x) = X - C$. Como X es localmente conexo, las componentes de abiertos son abiertas, dicho resultado se encuentra en [28, Teorema 27.9, pág. 200]. Luego, $S(x)$ es cerrado.

Por otro lado, $P(x)$ es cerrado por 4). Por lo tanto, $\leqq_E$ es un $QOTS$.

En el caso donde E es un punto, tenemos que X es un $POTS$ por el Teorema 2.24. □

A continuación daremos condiciones necesarias para que una separación por un punto x se preserve al quitar $f^{-1}(f(x))$.

Lema 4.34. *Si tenemos que:*

$$X - \{x\} = A | B$$

tal que:

$$A - f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset \neq B - f^{-1}(f(x))$$

entonces:

$$X - f^{-1}(f(x)) = (A - f^{-1}(f(x)))|(B - f^{-1}(f(x))).$$

Demostración. Como $x \in f^{-1}(f(x))$, entonces $X - f^{-1}(f(x)) \subset X - \{x\}$. Luego:

$$X - f^{-1}(f(x)) = A - f^{-1}(f(x)) \cup B - f^{-1}(f(x)).$$

Además, por hipótesis:

$$A - f^{-1}(f(x)) \neq \emptyset \neq B - f^{-1}(f(x)).$$

Notemos que:

$$\mathrm{cl}_X\big(A - f^{-1}(f(x))\big) \cap (B - f^{-1}(f(x))) \subset \mathrm{cl}_X(A) \cap B = \emptyset.$$

Análogamente se observa que:

$$\mathrm{cl}_X\big(B - f^{-1}(f(x))\big) \cap (A - f^{-1}(f(x))) = \emptyset.$$

Por lo tanto:

$$X - f^{-1}(f(x)) = (A - f^{-1}(f(x)))|(B - f^{-1}(f(x))).$$

□

En el siguiente resultado confluyen los resultados de la Subsección 4.4.1 y el orden $\leqq_E$.

Lema 4.35. *Si f es no alternante y $f(E) \subset E$, entonces f preserva el orden.*

Demostración. Supongamos que, $x \leqq_E y$ en X. Entonces tenemos los siguientes casos:

1) Si $x \in E$ entonces $f(x) \in E$ $f(x) \leqq_E f(y)$, por la definición de $\leqq_E$.

2) Si $x = y$ entonces $f(x) = f(y)$. Por lo tanto, $f(x) \leqq_E f(y)$.

3) Supongamos que $x \notin E$ y, además, $x \neq y$. Entonces por la tercera condición de $\leqq_E$, tenemos que x separa a E y y en X :

$$X - \{x\} = M|N \text{ con } E \subset M \text{ y } y \in N.$$

Además, como $f(E) \subset E$ y $f(x) \in X-E$, entonces $f^{-1}(f(x)) \subset X-E$. Por otro lado, $y \notin f^{-1}(f(x))$, ya que, $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto:

$$E \subset M - f^{-1}(f(x)) \text{ y } y \in N - f^{-1}(f(x)).$$

Por el Lema 4.34, tenemos que:

$$X - f^{-1}(f(x)) = (M - f^{-1}(f(x)))|(N - f^{-1}(f(x))).$$

Notando que f es cerrada, por ser X compacto y T_2. Se sigue del Lema 4.30 que, $f(x)$ separa a $f(E)$ y $f(y)$. Además, $f(E) \subset E$ con E conexo, entonces se queda en el separando que contiene a $f(E)$, es decir, $f(x) \leqq_E f(y)$.

□

4.4.3. Teoremas de Subcontinuos y Puntos Fijos en Localmente Conexos

Sean X es continuo T_2 localmente conexo y $f\colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva. El objetivo se centra ahora en encontrar subcontinuos y puntos fijos acotados fuera de algún elemento terminal E propio de X.

Lema 4.36. *Si $f\colon X \to X$ es no alternante con $f(E) \subset E$. Entonces existe un punto de corte x de X tal que x y $f(x)$ son comparables. Además x puede ser tomado de tal forma que para alguna $y \in X$ se cumple que $x \lneqq_E y$ y $x \lneqq_E f(y)$.*

Demostración. Sea $f\colon X \to X$ una función no alternante con $f(E) \subset E$. Analizaremos los siguientes casos:

1) Si E tiene un punto de corte x entonces $x \leqq_E f(x)$, es decir. x y $f(x)$ son comparables.

   Por la sobreyectividad de f y la Proposición 4.26, existe $y \in X - E$ tal que $f(y) \in X - E$. Luego, $x \lneqq_E y$ y $x \lneqq_E f(y)$.

2) Si E no tiene puntos de corte, nuevamente, podemos tomar $y \in X - E$ tal que $f(y) \in X - E$, por la sobreyectividad y el hecho que que $f(E) \subset E$. Como E es elemento terminal, entonces existe un subconjunto abierto A de X tal que:

$$E \subset \mathrm{cl}_X(A) \subset X - \{y, f(y)\}$$

y $\mathrm{cl}_X(A) - A = \{x\}$. Por el Lema 4.24, tenemos que:

$$X - \{x\} = A|(X - \mathrm{cl}_X(A)).$$

Notemos que, $x \lneqq_E y$ y $x \lneqq_E f(y)$, debido a la tercera condición del orden $\leqq_E$. Reescribiendo lo anterior con $B = X - \mathrm{cl}_X(A)$, tenemos que:

$$X - \{x\} = A|B \text{ con } E \subset A \text{ y } \{y, f(y)\} \subset B.$$

Por lo tanto, $f(y) \in B \cap f(B)$. Lo que nos faltaría para demostrar el lema es que x y $f(x)$ son comparables. Para ello, analizaremos más casos:

2.1) Si $f(x) \in \mathrm{cl}_X(B)$ entonces por la segunda o tercera condición del orden $\leqq_E$ tenemos que, $x \leqq_E f(x)$.

2.2) Si $f(x) \in E$ entonces $f(x) \leqq_E x$, por la primera condición del orden $\leqq_E$.

2.3) Si $f(x) \in A - E$ y $f(x)$ no fuera un punto de corte. Por el Lema 4.30, tenemos que $f^{-1}(f(x))$ no separa en X. Además, usando el Lema 4.34, se sigue que:

$$A - f^{-1}(f(x)) = \emptyset \text{ o } B - f^{-1}(f(x)) = \emptyset,$$

es decir, $f^{-1}(f(x))$ contiene a A o a B.

Si $B \subset f^{-1}(f(x))$, entonces $f(y) \in A$. Si $A \subset f^{-1}(f(x))$ entonces $f(x) \in E$. En ambos casos, obtenemos una contradicción. Por tanto, $f(x)$ es punto de corte. Afirmamos que:

$$X - \{f(x)\} = (f(A) - \{f(x)\})|(f(B) - \{f(x)\})$$

y

$$f(A) - \{f(x)\} \neq \emptyset \neq (f(B) - \{f(x)\}).$$

Como $E \subset A$ y $f(x) \in X - E \subset X - f(E)$, entonces $f(E) \subset f(A) - \{f(x)\} \neq \emptyset$. Además, al ser E conexo y tocar a $f(A) - \{f(x)\}$ tenemos que $E \subset f(A) - \{f(x)\}$.

Como $f(x) \neq f(y) \in f(B)$ tenemos que $f(B) - \{f(x)\} \neq \emptyset$. Finalmente, para ver que $(f(A) - \{f(x)\})$ y $(f(B) - \{f(x)\}))$ están mutuamente separados, supongamos que existe $t \in X$ tal que:

$$t \in \mathrm{cl}_X(f(A) - \{f(x)\}) \cap (f(B) - \{f(x)\}).$$

Entonces $t \in \mathrm{cl}_X(f(A)) \cap f(B)$. Recordando que f es no alternante, entonces sólo sería posible que $t = f(x)$. Contradiciendo que $f(x) \in A$. De forma similar se obtiene que

$$\emptyset = \mathrm{cl}_X(f(B) - \{f(x)\}) \cap f(A) - \{f(x)\}.$$

Si $x \in f(\mathrm{cl}_X(B))$, entonces por la segunda y tercera condición del orden $\leqq_E$, tenemos que $f(x) \leqq_E x$.
Ahora, si $x \in f(A) - \{f(x)\}$ usando el Lema 2.18 en:

$$X - \{f(x)\} = (f(A) - \{f(x)\})|(f(B) - \{f(x)\})$$

con

$$x \in f(A) - \{f(x)\},$$

$$X - \{x\} = A|B \text{ con } f(x) \in A.$$

Tenemos que $\mathrm{cl}_X(B) = B \cup \{x\} \subset f(A) - \{f(x)\}$. Luego, $f(y) \in f(A) - \{f(x)\}$ lo que es contradictorio, ya que $f(y) \in f(B) - f(x)$ y dichos conjuntos son ajenos.
Por lo tanto sólo es posible que $x \in f(\mathrm{cl}_X(B))$. Esto prueba que, $f(x)$ y x comparables.

□

Antes de demostrar nuestros resultados principales debemos introducir la noción de acumulación y convergencia para sucesiones de conjuntos en un espacio topológico.

Definición 4.37. *Una sucesión de conjuntos* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X *se* ***acumula*** *en un punto* x*, si una infinidad de elementos de la sucesión* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, intersecta cualquier abierto que tenga a* x*. Denotaremos al conjunto de puntos de acumulación como* $\operatorname{lím\,sup} A_n$.

La sucesión de subconjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* X ***converge*** *a* x*, si todos excepto posiblemente una cantidad finita de elementos* A_n*, intersecta a cualquier abierto que tenga a* x*. Denotaremos al conjunto de puntos de convergencia como* $\operatorname{lím\,inf} A_n$.

Claramente $\operatorname{lím\,inf} A_n \subset \operatorname{lím\,sup} A_n$ y en el caso que $\operatorname{lím\,inf} A_n = \operatorname{lím\,sup} A_n$, entonces simplemente denotaremos a dicho conjunto como $\operatorname{lím} A_n$.

Teorema 4.38. *Supongamos que* X *es un continuo* T_2 *localmente conexo con un elemento terminal* E *propio de* X*. Sea* $f\colon X \to X$ *una función monótona y sobreyectiva, tal que* $f(E) = E$*. Entonces* X *contiene un subcontinuo no vacío* K *que cumple* $f(K) = K$ *y* K *es punto de corte o* $K \subset X - E$*. Además, ningún punto de* X *separa a ningún par de puntos en* K*.*

Demostración. Por el Teorema 4.33, X es un $QOTS$. Además, tenemos que preserva el orden $\leqq_E$ usando el Lema 4.35, por ser una función monótona y sobreyectiva. También por el Lema 4.36 existe un punto de corte $x \in X$ tal que x y $f(x)$ son comparables.

1) Si $x \in E$, entonces la Proposición 4.26 dice que tenemos:

$$X - \{x\} = (E - \{x\})|(X - E)$$

Si $f(x) = x$, el teorema estaría probado tomando $K = \{x\}$.

De lo contrario, tenemos que $f(x) \in E - \{x\}$ porque $f(E) = E$. Luego, por la Proposición 4.25, $f(x)$ no es punto de corte. Usando que f es una función no alternante y el Lema 4.30:

$$E - \{x\} \subset f^{-1}(f(x)) \text{ o bien } X - E \subset f^{-1}(f(x)).$$

Si $E - \{x\} \subset f^{-1}(f(x))$, tendríamos que $f(E) = \{f(x)\} \subset E - \{x\}$, contradiciendo que $f(E) = E$. Por otro lado, si $X - E \subset f^{-1}(f(x))$, nos diría que $f(X) = E$, lo cual es falso, ya que $f(X) = X$ y $X - E \neq \emptyset$. Por lo tanto, si $x \in E$, entonces $f(x) = x$ con lo que habríamos probado el teorema.

2) Ahora consideraremos el caso donde $x \in X - E$.

2.1) Supongamos que, $x \leqq_E f(x)$. Como X es un $QOTS$ compacto, entonces sus cadenas maximales son compactas. Además, por el inciso 3) del Teorema 4.33, tenemos que la $orb(x, f)$ está acotada fuera de E. Usando el Teorema 4.18, con $e \in E$, tenemos que existen $x_0 \in X - E(e) = X - E$ y un conjunto no vacío $K \subset E(x_0)$ tal que $f(K) = K$. Por el inciso 1) del Teorema 4.33, $E(x_0) = \{x_0\}$. Por lo tanto, $K = \{x_0\}$. Esto probaría el teorema presente, para este caso.

2.2) Si $f(x) \lneqq_E x$, consideramos la separación del caso 2) del Lema 4.36:

$$X - \{x\} = A|B.$$

Donde A es la componente de $X - \{x\}$ que tiene a E. Si $f(x) \in B$, entonces $x \leqq_E f(x)$ lo cual diría, por el inciso 1) del Teorema 4.33 que $f(x) = x$, lo cual es falso. Esto prueba que, $f(x) \in A$.

Además, por el Lema 4.36, x puede ser tomado tal que exista $b \in X$ con $b, f(b) \in B$. Notemos que para cualquier entero positivo n

$$X - f^{-n}(x) = f^{-n}(A)|f^{-n}(B).$$

Dado que, f es monótona:

$$f^{-1}(\mathrm{cl}_X(B)) = \mathrm{cl}_X\big(f^{-1}(B)\big) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(x),$$

deducimos por el Lema 4.31 que $f^{-1}(\mathrm{cl}_X(B))$ es conexo. Entonces tenemos lo siguiente:

$$X - f^{-1}(x) = f^{-1}(A)|f^{-1}(B) \text{ con } x \in f^{-1}(A),$$

$$X - \{x\} = A|B \text{ con } f(x) \in A \text{ y } \{b, f(b)\} \subset B,$$

entonces el Lema 2.18 nos dice que $f^{-1}(\mathrm{cl}_X(B)) \subset B$.

Por otro lado,

$$\mathrm{cl}_X(A) \subset X - B \subset X - f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A).$$

Luego, si $n \lneqq m$ tenemos

$$f^{-n}(\mathrm{cl}_X(A)) \subset f^{-m}(A).$$

Como X es compacto, afirmamos que $\limsup f^{-n}(x) \neq \emptyset$. Para ello tomemos $y_i \in f^{-i}(x) \neq \emptyset$, dicha sucesión al estar en un compacto tiene una subsucesión convergente a x_0 en X. Y dicho punto resulta ser de acumulación de la familia de conjuntos $\{f^{-n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que $x_0 \in \limsup f^{-n}(x)$.

Ahora, observaremos que $\limsup f^{-n}(x) = \liminf f^{-n}(x)$. De no ser cierto, tendríamos que existe $x_0 \in (\limsup f^{-n}(x)) - (\liminf f^{-n}(x))$. Luego, por la conexidad local existe un abierto conexo U que tiene a x_0 tal que para cada N entero positivo con $f^{-N}(x) \cap U \neq \emptyset$, habría $m \gneqq N$ de tal forma que $f^{-m}(x) \cap U = \emptyset$.

Entonces, $U \subset f^{-m}(A)$ o $U \subset f^{-m}(B)$ por la separación que vimos. Pero $f^{-N}(x) \cap U \neq \emptyset$ y

$$f^{-N}(x) \subset f^{-N}(\mathrm{cl}_X(A)) \subset f^{-m}(A),$$

entonces $U \subset f^{-m}(A)$.

Por lo tanto, para cualquier $p \gneqq m$ tendiríamos

$$U \subset f^{-m}(A) \subset f^{-p}(A),$$

es decir, $f^{-p}(x) \cap U = \emptyset$, contradiciendo que $x_0 \in \limsup f^{-n}(x)$.

A continuación, veremos que $\lim f^{-n}(x)$ es un continuo. Claramente es cerrado y por lo tanto, compacto. Supongamos que existen dos cerrados ajenos no vaciós P y Q, tales que:

$$\lim f^{-n}(x) = P|Q,$$

Como X es T_4 entonces hay abiertos disjuntos U y V que contienen a P y Q respectivamente. Podemos además suponer que hay un entero positivo m tal que

$$f^{-m}(x) \cap U \neq \emptyset \neq f^{-m}(x) \cap V.$$

Como $f^{-m}(x)$ es conexo por el Lema 4.31, podemos escoger una sucesión de y_n con $n = m, m+1, ...$ tal que $y_n \in f^{-n}(x) - (U \cup V)$. Claramente dicha sucesión se acumula en $y_0 \in X - (U \cup V)$ contradiciendo que $\lim f^{-n}(x) \subset U \cup V$.

Esto prueba que, $\lim f^{-n}(x)$ es un continuo.

Veamos que ningún punto separa al ningún par de puntos de $\lim f^{-n}(x)$. De lo contrario, existiría $a \in X$ y $p, q \in \lim f^{-n}(x)$ tal que:

$$X - \{a\} = P|Q \text{ y } p \in P\ ,\ q \in Q.$$

Como $\{f^{-n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a p y q, entonces hay un entero positivo N tal que $f^{-m}(x)$ toca tanto a P como a Q para $m \geq N$. Por la conexidad de $f^{-m}(x)$, tenemos que:

$$a \in \bigcap_{m \geq N} f^{-m}(x).$$

Luego, $x = f^{N+1}(a) = f(x)$ contradiciendo nuestra suposición de que $f(x) \lneqq_E x$.

Afirmamos que, $f(\lim f^{-n}(x)) \subset \lim f^{-n}(x)$. Tomemos $y_0 = f(x_0)$ con $x_0 \in \lim f^{-n}(x)$ y un abierto U tal que tenga a y_0. Observemos que $x_0 \in f^{-1}(U)$. Por lo tanto, existe un entero positivo N tal que para toda $m \geq N$:

$$f^{-m}(x) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto:

$$\emptyset \neq f(f^{-m}(x) \cap f^{-1}(U)) \subset f^{1-m}(x) \cap U,$$

es decir, $y_0 \in \lim f^{-n}(x)$.

Finalmente, usando el Corolario 4.14 observamos que:

$$K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^i(\lim f^{-n}(x))$$

es un continuo no vacío y ningún punto separa a ningún par de puntos de K en X. Como $K \subset \lim f^{-n}(x) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}_X(B)) \subset B$, para cada $n \in \mathbb{N}$, concluimos que:

$$K \subset X - \mathrm{cl}_X(A) \subset X - E.$$

□

Corolario 4.39. *Si se satisfacen las condiciones del Teorema 4.38 con* $E = \{p\}$, *donde* p *es un punto final, entonces* $K \subset X - E$.

Demostración. Tomemos $y \in X - \{p\}$ tal que $f(y) \in X - \{p\}$ y tenemos que $f(p) = p$.

Como p es un punto final entonces existe un abierto A de X que tiene a p tal que :

$$E \subset \mathrm{cl}_X(A) \subset X - \{y, f(y)\}$$

y $\mathrm{cl}_X(A) - A = \{x\}$. Usando el Lema 4.24, tenemos que:

$$X - \{x\} = A|(X - \mathrm{cl}_X(A))$$

y que $x \neq p$. Entonces siguiendo el caso 2) del Lema 4.36, x y $f(x)$ son comparables. Además, $x \lneqq_p y$ y $x \lneqq_p f(y)$.

Por el Teorema 4.38, X contiene un subcontinuo no vacío K tal que $f(K) = K$ y $K \subset X - \{p\}$. □

Con la maquinaria construida llegamos al teorema más importante del capítulo, el Teorema de Schweigert [20] y Wallace [21], encunciado a continuación.

Teorema 4.40. *Sea X un continuo T_2 localmente conexo con un elemento terminal E propio de X que no es punto de corte. Si f es un homeomorfismo de X sobre sí mismo, tal que $f(E) = E$, entonces f tiene un punto fijo x_0 en el complemento de E.*

Demostración. Por el Lema 4.35 f y f^{-1} preservan orden $\leqq_E$. Además, por el Lema 4.36, hay un punto de corte p en X tal que p y $f(p)$ son comparables.

El primer incisio de la demostración del Teorema 4.38 nos dice que si $p \in E$, entonces $f(p) = p$. Si p no está en E, entonces tenemos que $f(p) \leqq_E p$ o $p \leqq_E f(p)$.

Si $p \leqq_E f(p)$ por el inciso 2.1) del Teorema 4.38, existe un punto fijo x_0 contenido en $X - E$.

Si $f(p) \leqq_E p$ usando un razonamiento análogo, para f^{-1} tiene un punto fijo en el complemento de E.

□

Veremos que la condición de que f sea un homeomorfismo del Teorema 4.40 no se puede cambiar por la propiedad de ser monótona, con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.41. *Existen un continuo T_2 localmente conexo con un punto final e y $f\colon X \to X$ una función continua, monótona y sobreyectiva que sólo fija a e.*

Demostración. Sea X el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $z \in [0, 2]$, y satisfacen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ si } z \in [0, 1],$$

$$x = 0 = y \text{ si } z \in [1, 2].$$

Tenemos que X es una semiesfera unitaria con un arco unitario en $(0, 0, 1)$. Por lo tanto, X es un continuo T_2 localmente conexo y $e = (0, 0, 2)$ es punto final.

Definimos $f\colon X \to X$ como:

1)
$$f(x,y,z) = \left(-\frac{(1-4z^2)^{\frac{1}{2}}x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, -\frac{(1-4z^2)^{\frac{1}{2}}y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, 2z \right) \text{ si } z \in [0, \frac{1}{2}],$$

2)
$$f(x,y,z) = (0,0,2z) \text{ si } z \in [\frac{1}{2}, 1],$$

3)
$$f(x,y,z) = e \text{ si } z \in [1,2].$$

Para ver que está bien definida, basta analizar 1). Al evaluar un punto (x, y, z) en X, tenemos:

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{(1-4z^2)^{\frac{1}{2}}x}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}, -\frac{(1-4z^2)^{\frac{1}{2}}y}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}, 2z \right).$$

Al elevar al cuadrado cada coordenada obtenemos:

$$\frac{(1-4z^2)x^2}{1-z^2} + \frac{(1-4z^2)y^2}{1-z^2} + 4z^2$$

Factorizando y usando la definición de X :

$$\frac{(1-4z^2)(x^2+y^2)}{1-z^2} + 4z^2,$$

$$= (1-4z^2) + 4z^2 = 1.$$

En cada uno de sus tres intervalos de definición es continua, el único que necesitaría argumentación es el 1) por su denominador, pero no puede ser cero por la construcción del objeto mismo. Además, cuando $z = \frac{1}{2}$ tenemos $f(x, y, \frac{1}{2}) = (0, 0, 1)$ valen lo mismo en los dos primeros casos. Cuando $z = 1$, entonces $f(x, y, 1) = (0, 0, 2)$, toman el mismo valor en los dos últimos casos.

Luego, f es continua y claramente $f(e) = e$. Ahora notemos que la preimagen de cualquier punto es conexo.

Para $z \in [0, 1]$, tenemos que:

$$f^{-1}(x,y,z) = \left\{ \left(\frac{(1-\frac{z^2}{4})x}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{(1-\frac{z^2}{4})y}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{z}{2} \right) \right\}$$

es un punto. Al igual que $f^{-1}(e) = \{e\}$.

Para $z \in (1, 2)$ es la circunferencia que resulta de cortar a la semiesfera unitaria con el plano paralelo al plano xy que pasa por $z = 2$.

Si en el caso 1) dejara puntos fijos implicaría que $z = 0 = x = y$, lo cual no se encuentra en X, y por tanto, nos lleva a una contradicción. Para el caso 2) implicaría que $z = 0$, que también es una contradicción, por el intervalo de definición. Finalmente sólo e es punto fijo de f.

Se puede observar que $K = \{(x, y, 0) \in X\}$ es un subcontinuo que queda fijo bajo f, tal como afirma el Teorema 4.38. $\square$

Las técnicas empleadas para demostrar el Teorema 4.38 dependen fuertemente de la conexidad local. G. E. Schweigert mostró en [20] que si X es un continuo separable y semilocalmente conexo con un elemento terminal E, y f un homeomorfismo que deja fijo a E, entonces existe un subcontinuo fijo K distinto de E, tal que ningún par de puntos de K es separado por ningún punto de X. A. D. Wallace demuestra en [21] que la conexidad semilocal y separabilidad pueden omitirse y que, en prescencia de conexidad local, K es un punto.

Una pregunta que surge de este estudio es que si el Teorema 4.38 sigue siendo válido si se quita la hipótesis de conexidad local. Los métodos empleados en esta tesis parecen adecuados para atacar dicha conjetura.

Bibliografía

[1] S. P. Arya y K. Gupta, *New separation axioms in topological ordered spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. 22(6)(1991), 461–468.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 25, New York, 1948.

[3] D. C. J. Burgess y M. Fitzpatrick, *On separation axioms for certain types of ordered topological spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82 (1977), 59–65.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics Vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series 4, Princeton University Press, Estados Unidos, 1945.

[6] F. Husseinov, *Monotonic extension*, Discussion Papers No. 10-04, Bilkent University, Department of Economics, Turkey (2010), 1–14.

[7] T. Jech, *Set Theory*, Springer Monographs in Mathematics, 3rd Millenium ed, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo 2002.

[8] M. Kamga, *Topology and Order*, Ensayo, 2005. Disponible en http://archive.aims.ac.za/2004.

[9] H. M. MacNeille, *Partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 42 (3)(1937), 416–460.

[10] M. Madriz Mendoza, *Conexidad en los Hiperespacios de Continuos Hausdorff*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2003.

[11] S. D. McCartan, *Separation axioms for topological ordered spaces*, Proc. Camb. Phil Soc. 64 (1968), 965–973.

[12] A. K. Misra, *A note on arcs in hyperpsaces*, Acta Math. Hung. 45 (1985), 285-288.

[13] A. K. Misra, *C-supersets, piecewise order-arcs local arcwise connectedness in hyperspaces*, Questions Answers Gen. Topology, 8 (1990), 467-485.

[14] J. R. Munkres, *Topología*, Segunda Edición. Editorial Pretice Hall, Madrid, España, 2002.

[15] L. Nachbin, *Topologia e Ordem*, Chicago University Press, Chicago, 1950.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Bassel, Hong Kong, 1992.

[17] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets: An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. Vol. 158, Marcel Dekker, New York and Bassel and Hong Kong, 1992.

[18] J. Margalef Roig, E. Outelero Domínguez y J. L. Pinilla Ferrado, *Topología* $**$, Editorial Alhambra, Madrid, España, 1979.

[19] J. Margalef Roig, E. Outelero Domínguez y J. L. Pinilla Ferrado, *Topología* $*****$, Editorial Alhambra, Madrid, España, 1982.

[20] G. E. Schweigert, *Fixed elements and periodic types for homeomorphisms on s.l.c. continua*, Amer. J. Math.,Vol. 66 (1944) pp. 229-244.

[21] A. D. Wallace, *A fixed point theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 51 (1945), 413–416.

[22] A. D. Wallace, *Monotone transformation*, Duke Math.J., Vol. 9 (1943), 487–506.

[23] A. D. Wallace, *Endelements and the inversion of continua*, ibid., Vol. 516 (1949), 141–144.

[24] L. E. Ward, Jr., *Binary relations in topological spaces*, An. Acad. Brasil. Ci. Vol. 26 (1954), 357–373.

[25] L. E. Ward, Jr., *Partially ordered topological spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 5, No. 1 (1954), 144-161.

[26] L. E. Ward, Jr., *On the non-cutpoint existence theorem*, Canad. Math. Bull. 11 (1968), 213–216.

[27] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc., Vol. 28, New York, 1942.

[28] S. Willard, *General Topology*, Segunda Edición. Editorial Addison-Wesley Publishing Company , California, Estados Unidos, 1970.