



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Matrices Aleatorias y Funciones- L

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
JULIO CÉSAR GALINDO LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. EDUARDO DUÑEZ GUZMÁN

CODIRECTOR DE TESIS:
DR. VÍCTOR MANUEL PÉREZ ABREU CARRIÓN



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Galindo
López
Julio César
63 07 86 85
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
405007910
2. Datos del tutor
Dr.
Eduardo
Duñéz
Guzmán
3. Datos del cotutor
Dr.
Víctor Manuel
Pérez Abreu
Carrión
4. Datos del sinodal 1
Dr.
Miguel Ángel
García
Álvarez
5. Datos del sinodal 2
Dr.
Gerónimo Francisco
Uribe
Bravo
6. Datos del sinodal 3
Dr.
Timothy Monney
Gendron
Thornton
7. Datos del trabajo escrito
Matrices Aleatorias y Funciones-*L*
89 p.
2013

Índice

Introducción	i
Notación	iv
Capítulo 1. Matrices Aleatorias: La Familia Gaussiana Unitaria (GUE)	1
1. Familia Gaussiana Unitaria	2
2. Distribución de eigenvalores	3
3. Funciones de correlación	4
4. Fórmula determinantal y núcleo GUE	4
5. El Teorema de Dyson	7
6. Correlación de parejas	8
7. Distribución de huecos	9
Capítulo 2. Matrices Aleatorias: Grupos Compactos Clásicos	11
1. Definiciones y medida de Haar	11
2. Fórmula de integración de Weyl	12
3. Fórmulas determinantaes para las medidas de Haar	14
4. Distribución de huecos	20
5. Estadísticas discriminantes	25
Capítulo 3. Correlación de parejas de ceros de la función zeta	31
1. La función zeta de Riemann	31
2. La Ley Montgomery-Odlyzko	32
3. Demostración del Teorema de Montgomery	35
4. Demostración del Teorema de Montgomery versión dual	37
Capítulo 4. Funciones- L y Matrices Aleatorias	52
1. Generalidades sobre funciones- L	52
2. La Ley Montgomery-Odlyzko	54
3. Filosofía de Katz y Sarnak	57
4. Familias de funciones zeta de campos de funciones	60
Capítulo 5. Familia de tipo simpléctico: funciones- L de Dirichlet cuadráticas	63
1. Funciones- L de Dirichlet	63

2. Familias de funciones- L cuadráticas de Dirichlet	68
Apéndice A. El lema de transposición y el lema de Gaudin	80
1. Lema de Gaudin	80
Apéndice B. Polinomios ortogonales, núcleos reproductivos y determinantes de Fredholm	83
1. Ejemplos de polinomios ortogonales	83
2. Fórmula de Christoffel-Darboux	84
3. Núcleos Reproductivos y Determinantes de Fredholm	85
Apéndice C. Resultados de teoría analítica de números	86
Apéndice. Bibliografía	88

Introducción

La Teoría de Matrices Aleatorias tiene sus inicios a finales de los años cincuenta. Fue el físico Eugene Wigner quien las introdujo para modelar el espectro de átomos pesados compuestos de muchas partículas con interacciones desconocidas. Incapaz de calcular explícitamente el comportamiento de estos sistemas, surgió la idea de prescindir de ellos y realizar una descripción aleatoria considerando conjuntos de matrices, denominadas familias, con entradas aleatorias y que obedecen ciertas restricciones derivadas de la simetría. Recientemente, la teoría de matrices aleatorias ha permeado distintas áreas del conocimiento matemático y físico como la teoría de números, teoría de operadores, permutaciones aleatorias y modelos de crecimiento aleatorio, entre otras (ver [1]). En este trabajo se abordará la relación entre la teoría de matrices aleatorias y la teoría de números.

Hilbert y Pólya, alrededor de 1927, sugirieron que podría existir una interpretación espectral de los ceros de la función zeta de Riemann. Es decir, conjeturaron que es posible asociar los ceros no triviales de la función zeta con los eigenvalores de algún operador actuando sobre algún espacio de Hilbert. La primera evidencia significativa fue en 1972, cuando el matemático Hugh Montgomery [34], calculó la correlación de parejas de la función zeta de Riemann: los ceros exhiben la misma repulsión que los eigenvalores de matrices unitarias de gran escala (es decir, cuando el tamaño de las matrices tiende a infinito), como hizo notar el físico Freeman Dyson. Montgomery conjeturó analogías más generales en relación con las matrices aleatorias, las cuales fueron confirmadas por Odlyzko [36] en los años 80. A este fenómeno se le conoce como la *Ley de Montgomery-Odlyzko*. Por otra parte, en 1995, Rudnick y Sarnak [41] determinaron la $n \geq 2$ correlaciones para los ceros de la función zeta de Riemann, así como para funciones- L más generales. Estos resultados están en perfecta coincidencia con las predicciones provenientes de la teoría de matrices aleatorias. Desafortunadamente, el comportamiento universal descrito por la ley Montgomery-Odlyzko no proporciona información sobre cuál debería de ser el operador relevante específico para cada función- L . La filosofía de Katz y Sarnak [26] nos enseña que la situación es de hecho aún mas rica estudiando la distribución de los ceros de familias de funciones- L de campos de funciones. Katz y Sarnak mostraron que, en campos de

funciones, la ley Montgomery-Odlyzko resulta ser verdadera, pero también que las leyes asociadas a la distribución de ceros que se encuentran en una vecindad alrededor del punto crítico son distintas. Estas leyes corresponden a eigenvalores de matrices aleatorias pertenecientes a los grupos compactos clásicos (unitario, ortogonal y simpléctico). En este caso, este comportamiento puede ser explicado de manera natural en términos del grupo de monodromía geométrico asociado a cada familia.

Este es el tipo de resultados que nos disponemos a explicar aquí. Lo único que podemos decir de antemano es que la teoría de matrices aleatorias resulta ser un modelo probabilístico notable y coherente para describir los ceros de funciones- L .

La estructura y elección de tópicos de este texto están basados en [27] y pretende ser una extensión de algunos de los temas que allí se manejan.

La tesis está organizada de la siguiente forma. El capítulo 1 se introduce un tipo particular de matrices aleatorias, la Familia Gaussiana Unitaria. Se estudian las estadísticas asociadas a los eigenvalores de matrices en esta familia. De particular importancia en capítulos subsecuentes será el Teorema de Dyson, así como la distribución de huecos entre eigenvalores.

En el capítulo 2 se estudian otros tipos de matrices aleatorias, los grupos compactos clásicos. Se estudian las estadísticas de eigenvalores asociadas a estas matrices: la n -correlación de niveles, la distribución de huecos entre eigenvalores, la n -densidad de niveles y la distribución del primer eigenvalor.

En el capítulo 3 examinamos el artículo de Montgomery [34], dando una demostración detallada del resultado principal (la correlación de parejas).

En el capítulo 4 se discute sobre la generalización de Rudnick y Sarnak al teorema de Montgomery, no sin antes revisar de manera general el concepto de una función- L . La generalización se da en dos sentidos: primero se extienden las funciones estudiadas y después se extienden los resultados a todas las correlaciones entre ceros de funciones- L . En la segunda parte del capítulo se discute la filosofía de Katz-Sarnak, la cual propone estudiar a los ceros de familias de funciones- L que se encuentran en vecindades alrededor del punto crítico. De aquí surge la Conjetura de Densidad la cual afirma que, en el límite, la distribución de los ceros (de familias de funciones- L) cercanos al punto crítico coincide con la distribución de eigenvalores cercanos al punto 1 de grupos compactos clásicos. Se dan ejemplos de familias de funciones- L estudiadas hasta ahora que dan soporte a la Conjetura de Densidad. En la tercera parte del capítulo se revisan las analogías con campos de funciones.

En el capítulo 5 se estudia una familia en particular: la familia formada por funciones- L cuadráticas de Dirichlet. En vías de establecer evidencia a la Conjetura de Densidad de Katz-Sarnak se calcula la 1-densidad de niveles de esta familia mostrando que el grupo compacto subyacente es el simpléctico. Cabe recalcar que la demostración que aquí presentamos está influenciada por las ideas de Rubinstein [38].

Se incluyen además tres apéndices. En el apéndice A se encuentra la demostración del Lema de Gaudin que tiene importancia central en todo el desarrollo de los capítulos 1 y 2. En el apéndice B se encuentran resultados generales concernientes a polinomios ortogonales. En el apéndice C se encuentran algunas definiciones y resultados generales de Teoría Analítica de Números.

Finalmente, queremos revelarle al lector que un vasto universo se extiende más allá del material incluido en la tesis, que es absolutamente el más básico. Por ejemplo, no consideramos en esta tesis el problema de momentos de Keating-Snaith [28], el cual ha dado un nuevo aliciente a la teoría. Al lector que desee obtener más información sobre toda la gama de nuevas perspectivas en este tema, podemos recomendar el volumen [32].

Notación

Dado un número complejo $s = \sigma + it$ denotaremos por $\text{Re}(s)$ (resp. $\text{Im}(s)$) a la parte real (resp. parte imaginaria) de s .

La proposición

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow \infty$$

se pronuncia como “ f es O -grande de $g(x)$ ”. Es equivalente a

$$f(x) \ll g(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

que se pronuncia “ f es menor menor que $g(x)$ ”. Ambas proposiciones significan que existe una constante $C > 0$ tal que si x es suficientemente grande $|f(x)| \leq Cg(x)$. Al número C se le llama la constante implícita.

La proposición

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow \infty$$

se pronuncia como “ f es o -pequeña de $g(x)$ ”. Explícitamente, significa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Equivalentemente, para toda $C > 0$, si x es suficientemente grande $|f(x)| \leq Cg(x)$

La proposición $f(x) \sim g(x)$, la cual se lee “ f es asintótica a $g(x)$ ”, significa que $f(x) = (1 + o(1))g(x)$.

Denotaremos por $\Lambda(n)$ a la función de Möbius, la cual está dada por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ para algún primo } p, k > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase Schwartz (o pertenece a la clase de Schwartz) si f es suave y tanto f como todas sus derivadas son de decaimiento rápido:

$$f^{(j)} \ll_{j,N} (1 + |x|)^{-A},$$

para toda $A \geq 0$ y todo entero $j \geq 0$.

Asimismo si f es una función de clase Schwartz, la transformada de Fourier de f es la función

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi ixy} dx.$$

como f es de decaimiento rápido, observamos que la integral precedente converge absoluta y uniformemente sobre \mathbb{R} .

Matrices Aleatorias: La Familia Gaussiana Unitaria (GUE)

De acuerdo a la teoría cuántica, los niveles de energía de un sistema atómico son los eigenvalores de un operador hermitiano en el espacio de Hilbert, el hamiltoniano del sistema. Ya que el sistema atómico contiene demasiadas partículas atómicas elementales, existe una profusión de niveles de energía y el hamiltoniano es muy complejo de diagonalizar numéricamente. Es este el contexto en el que el físico E. Wigner tuvo la idea de modelar los niveles de energía de tal hamiltoniano con eigenvalores de una matriz hermitiana aleatoria de gran tamaño. Heurísticamente, tal operador hermitiano tiene un espectro continuo además de un número (posiblemente grande) de niveles discretos. Para poder realizar cálculos para el hamiltoniano de un sistema, el espacio de Hilbert se reduce a un espacio de dimensión finita, se toma una base, y el hamiltoniano se representa por una matriz finito dimensional que necesariamente tiene espectro discreto. Por lo tanto, un *ensamble* de sistemas puede pensarse como una familia de matrices cada una con dimensión grande cuyas propiedades reflejen las propiedades estadísticas de la familia de los sistemas.

Este modelo difiere de la mecánica estadística clásica en el sentido de que en ésta los posibles estados para el sistema son conocidos aunque el estado específico del sistema es totalmente desconocido. Ahora, como Dyson lo explica en [11], lo que se requiere es un nuevo tipo de mecánica estadística, en la cual renunciemos por completo al conocimiento no del estado del sistema sino de la naturaleza del sistema en sí. El problema, pues, es definir una familia de sistemas de una forma matemáticamente precisa en la cual todas las posibles leyes de interacción sean igualmente probables.

Entonces, para estudiar las propiedades locales de los eigenvalores, se busca dar al espacio vectorial de las matrices hermitianas una medida de probabilidad que sea invariante bajo la acción del grupo unitario por conjugación, esto ya que uno está interesado en los eigenvalores, y éstos se preservan bajo conjugación.

Ya que la naturaleza del sistema no se conoce, las entradas de una matriz representativa se toman de manera aleatoria con distribución gaussiana. Las matrices aleatorias que resultan representando al ensamble de sistemas están sujetas solo

a requerimientos de simetría correspondiente a propiedades de simetría de los sistemas físicos.

Así, uno esperaría que propiedades estadísticas de niveles de energía, por ejemplo la distribución de huecos, coincidan con aquellas de matrices aleatorias. Es después de mucho trabajo teórico y experimental que se pudo revelar la intuición de Wigner y se logra observar una buena correspondencia entre los experimentos y las predicciones de matrices aleatorias. En el libro de Mehta [31] se puede consultar estas cuestiones.

Las familias de matrices aleatorias considerados originalmente por Wigner son tres. La Familia Gaussiana Ortogonal (Gaussian Orthogonal Ensemble) de matrices aleatorias reales simétricas representa a sistemas con spin par e invarianza bajo inversión de la dirección del tiempo. La Familia Gaussiana Simpléctica (Gaussian Symplectic Ensemble) de matrices aleatorias hermitianas autoduales representa a sistemas con spin impar e invarianza bajo inversión de la dirección del tiempo. La Familia Gaussiana Unitaria (Gaussian Unitary Ensemble) representa a sistemas no invariantes bajo la dirección del tiempo. Dyson [11] también construyó de una manera elegante tres familias circulares relacionados: La Familia Circular Ortogonal (Circular Orthogonal Ensemble), la Familia Circular Simpléctica (Circular Symplectic Ensemble) y la Familia Circular Unitaria (Circular Unitary Ensemble). Además mostró que estas estadísticas coinciden con los ensambles de matrices correspondientes GOE, GSE y GUE.

1. Familia Gaussiana Unitaria

Es el espectro de la Familia Gaussiana Unitaria el que es importante para nosotros. En particular, estamos interesados en distintas estadísticas acerca de los eigenvalores en GUE. Por ejemplo, la densidad de eigenvalores, la distribución conjunta de parejas de eigenvalores (o de un número finito n de ellos) y la distribución de huecos entre eigenvalores sucesivos.

La siguiente exposición está basada en la presentación que hace Mehta [31] en su capítulo 6 y en [17].

Definición 1.1. *La familia gaussiana unitaria consiste, para cada $N = 1, 2, 3, \dots$, del conjunto $\text{GUE}(N)$ de todas las matrices complejas hermitianas de $N \times N$:*

$$\text{GUE}(N) = \{H \in \text{Mat}_N(\mathbb{C}) \mid H^\dagger = H\}.$$

Las entradas h_{jk} de una matriz $H \in \text{GUE}(N)$, para $1 \leq j < k \leq N$, son variables gaussianas complejas ¹ de varianza $\sigma^2 = 1/2$, mientras que $h_{kj} = \bar{h}_{jk}$. Asimismo, las entradas diagonales h_{jj} para $1 \leq j \leq N$ son gaussianas reales de varianza $\sigma^2 = 1/2$. Todas las entradas son independientes.

¹Una variable aleatoria compleja $Z = X + iY$ es gaussiana compleja de varianza σ^2 si sus partes real X e imaginaria Y son variables gaussianas reales independientes con varianza $\sigma^2/2$ cada una.

El volumen estándar en $\text{GUE}(N)$ es

$$d \text{vol}_{\text{GUE}(N)}(H) = \bigwedge_{1 \leq j < k \leq N} d \text{Re}(h_{jk}) \bigwedge_{1 \leq j < k \leq N} d \text{Im}(h_{jk}).$$

Con la definición anterior podemos deducir la función de densidad de probabilidades de $\text{GUE}(N)$:

$$f_{\text{GUE}(N)}(H) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{2}{\pi} \exp(-2|h_{jk}|^2) \prod_{1 \leq j \leq N} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-h_{jj}^2).$$

Observe que $f_{\text{GUE}(N)}(H)$ depende solamente de los eigenvalores de H ,

$$\begin{aligned} f_{\text{GUE}(N)}(H) &= \frac{2^{N(N-1)/2}}{\pi^{N^2/2}} \exp\left(-2 \sum_{j < k} (\text{Re}(h_{jk})^2 + \text{Im}(h_{jk})^2) - \sum_j h_{jj}^2\right) \\ &= \frac{2^{N(N-1)/2}}{\pi^{N^2/2}} \exp(-\text{Tr}(H^2)). \end{aligned}$$

Note de la definición que el conjunto $\text{GUE}(N)$ no consiste de matrices unitarias. El nombre proviene del siguiente hecho importante (ver [13] para detalles). Si $Q \in \text{U}(N)$ (ver definición 2.4) es fija, entonces Q actúa por conjugación en $\text{GUE}(N)$. Ya que la traza es invariante bajo similitudes la función de densidad de probabilidades también lo es. Además, el jacobiano de la transformación asociada al cambio de variables es igual a 1.

2. Distribución de eigenvalores

Una matriz H en $\text{GUE}(N)$ tiene N eigenvalores reales $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$. El resultado relevante en la teoría de matrices aleatorias es el que concierne a la densidad de los eigenvalores de una matriz aleatoria. A continuación enunciamos el resultado para el caso GUE.

Teorema 1.2. *La función de densidad conjunta $\mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(\vec{x})$ de los eigenvalores de una matriz en $\text{GUE}(N)$ está dada por*

$$\mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(\vec{x}) = \frac{1}{C_N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |x_j - x_k|^2 \exp\left(-\sum_{j=1}^N x_j^2\right)$$

donde

$$C_N = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |x_j - x_k|^2 \exp\left(-\sum_{j=1}^N x_j^2\right) dx_1 \dots dx_N.$$

es la constante de normalización necesaria para que $\mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}$ sea una función de densidad de probabilidades conocida como la función de partición.

3. Funciones de correlación

Se puede extraer información útil a partir de la función de densidad conjunta de los eigenvalores. Una forma de hacerlo es por medio de otras funciones, las cuales definimos a continuación.

Definición 1.3. Si n es un entero positivo fijo, la función de n -correlación de los N eigenvalores \vec{x} con función de densidad conjunta $\mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(\vec{x})$ se define como

$$\rho_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_{\mathbb{R}^{N-n}} \mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(\vec{x}) dx_{n+1} \dots dx_N.$$

La función de n -correlación es la densidad de probabilidad de que n de los eigenvalores, independientemente del orden, se encuentren en vecindades infinitesimales de x_1, \dots, x_n . (Estrictamente hablando, no es una densidad de probabilidad ya que la integral total da $N!/(N-n)!$ en vez de 1).

Para proveer una interpretación más clara de las funciones de correlación, las relacionamos con las estadísticas de la variable aleatoria N_B que representa el número de puntos de la sucesión (x_1, \dots, x_N) dentro de cualquier conjunto B de \mathbb{R} . Por ejemplo, $\int_B \rho_1^{(N)}(x_1) dx_1$ se interpreta como el número esperado de puntos en B ;

$$\begin{aligned} \int_B \rho_1^{(N)}(x_1) dx_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x_1) \rho_1^{(N)}(x_1) dx_1 \\ &= N \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x_1) \mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N \chi_B(x_i) \mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \end{aligned}$$

Similarmente, $\int_{B \times B} \rho_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ se interpreta como el número esperado de parejas de puntos en B ;

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x_1) \chi_B(x_2) \rho_2^{(N)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= N(N-1) \int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x_1) \chi_B(x_2) \mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i \neq j}^N \chi_B(x_i) \chi_B(x_j) \mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N. \end{aligned}$$

4. Fórmula determinantal y núcleo GUE

Todas las funciones $\rho_n^{(N)}$ son expresables en términos de una función de densidad \mathbf{e}_N de una N -ada de niveles. Sin embargo, ya que estamos pensando a N

como un número grande, es deseable encontrar expresiones alternativas para estas cantidades en las cuales este número solo aparezca como un parámetro, es decir, expresiones que no crezcan en complejidad en el límite $N \rightarrow \infty$. Esto se logra representando a las funciones de correlación en términos de un determinante de una matriz finita de $n \times n$. El método (conocido en la literatura como *el método de Gaudin-Mehta* [16]) hace uso de los polinomios ortogonales y de un resultado debido a Gaudin A.3.

Nos enfocaremos en una sucesión ortonormal en $L^2(\mathbb{R}, dx)$ derivada a partir de los polinomios de Hermite (B).

Definición 1.4. *Definimos, para cada $n \geq 0$,*

$$\psi_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\pi^{1/4} 2^{n/2} \sqrt{n!}} e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Las funciones ψ_n así definidas son llamadas las funciones de Hermite normalizadas o funciones de onda del oscilador.

Teorema 1.5 (Gaudin-Mehta). *Las correlaciones ρ_n están dadas por el siguiente determinante*

$$\rho_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \det_{n \times n} \left(K_{\text{GUE}(N)}(x_j, x_k) \right)$$

en donde

$$K_{\text{GUE}(N)}(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(x) \psi_n(y).$$

es el núcleo asociado a las funciones de Hermite normalizadas que llamaremos núcleo GUE.

Si los eigenvalores son considerados como puntos aleatorios, entonces la colección de todos ellos es un proceso puntual. Entonces, las intensidades de este proceso están dadas de acuerdo a las funciones de correlación (como vimos al final de la sección anterior). Los procesos puntuales para los cuales las intensidades (definidas en términos de esperanza del número de puntos, parejas de puntos, etc.) están dadas en términos del determinante de un núcleo, son llamados *procesos puntuales determinantaes* (determinantal point processes). De manera más general, cualquier núcleo K que pueda escribirse como $K(x, y) = \sum f_k(x) f_k(y)$, con f_k funciones ortonormales con respecto a algún peso admisible (véase apéndice B), da lugar a un proceso puntual determinantal. El lector que desee profundizar en la teoría de estos procesos así como en sus aplicaciones, recomendamos el artículo de A. Borodin que se encuentra en el volumen [1].

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.5. Sea $M = (M_{jk})$ la matriz de tamaño $N \times N$ tal que $M_{jk} = \psi_{j-1}(x_k)$ para $1 \leq j, k \leq N$. Se afirma que

$$\mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(\vec{x}) = \frac{1}{N!} \det \left(M^T M \right).$$

En efecto, como los polinomios de Hermite $H_N(x)$ son polinomios de x , multiplicamos el j -ésimo renglón por 2^{j-1} y luego le añadimos una combinación lineal adecuada de renglones que consistan de potencias menores. Así, podemos reemplazar el j -ésimo renglón por el siguiente renglón cuyos términos son polinomios de Hermite

$$\left(H_{j-1}(x_1), H_{j-1}(x_2), \dots, H_{j-1}(x_N)\right).$$

Después transformamos la matriz resultante en términos de las funciones $\psi_{j-1}(x)$ multiplicando la k -ésima columna por $e^{-\frac{1}{2}x_k^2}$ y multiplicando el j -ésimo renglón por el factor $(\sqrt{\pi}2^{j-1}(j-1)!)^{1/2}$. Hecho lo anterior, obtenemos la ecuación

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N x_k^2\right) \prod_{j < k} (x_k - x_j) = c \cdot \det(M)$$

para alguna constante c . Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad anterior, se tiene

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^N x_k^2\right) \prod_{j < k} (x_k - x_j)^2 = c^2 \cdot (\det(M))^2.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(\vec{x}) = c' \cdot (\det(M))^2.$$

Resta calcular el valor de c' . Nótese que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \det(M^T M) dx_1 \dots dx_N = \int_{\mathbb{R}^N} \det_{N \times N} \left(K_{\text{GUE}(N)}(x_j, x_k) \right) dx_1 \dots dx_N.$$

En vista de la ortonormalidad de $\{\psi_n\}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{GUE}(N)}(x, y) K_{\text{GUE}(N)}(y, z) dy = K_{\text{GUE}(N)}(x, z)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\text{GUE}(N)}(x, x) dx = N.$$

Aplicando el lema de Gaudin N veces,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \det(M^T M) dx_1 \dots dx_N = N!$$

Ya que $\mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}$ está definida de tal manera que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{e}_{\text{GUE}(N)}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N = 1,$$

se logra deducir que

$$c' = \frac{1}{N!},$$

por lo que la afirmación queda comprobada.

De este modo, podemos escribir a la función de n -correlación de los N eigenvalores como

$$\rho_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(N-n)!} \int_{\mathbb{R}^{N-n}} \det \left(K_{\text{GUE}(N)}(x_j, x_k) \right) dx_{n+1} \dots dx_N$$

Finalmente, aplicando el lema de Gaudin N veces, se sigue el resultado. \square

5. El Teorema de Dyson

El objetivo ahora es describir el comportamiento límite de la función de n -correlación de los N eigenvalores de una matriz en GUE. Para ello, usaremos un importante teorema debido a Wigner el cual predice la ley del semicírculo para la densidad global de las familias gaussianas. La demostración del teorema de Wigner puede consultarse en [2].

Teorema 1.6 (Ley del Semicírculo de Wigner). *La densidad, $\rho_1^{(N)}$, de eigenvalores para GUE tiene el siguiente comportamiento cuando la dimensión de la matriz tiende a infinito*

$$\rho_1^{(N)}(x) \rightarrow \sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{2N - x^2} & |x| < \sqrt{2N} \\ 0 & |x| \geq \sqrt{2N} \end{cases}$$

Se sigue entonces que con el rescalamiento $x_j \rightarrow \pi x_j / \sqrt{2N}$, la densidad en el grueso del espectro (es decir, la densidad en una vecindad del origen) se aproxima a 1 conforme $N \rightarrow \infty$, de modo que el límite buscado está bien definido.

Lema 1.7. *Se tiene la siguiente fórmula para el núcleo GUE en términos de las funciones de Hermite normalizadas en caso de que $x \neq y$:*

$$K_{\text{GUE}(N)}(x, y) = \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \frac{\psi_N(x)\psi_{N-1}(y) - \psi_{N-1}(x)\psi_N(y)}{x - y}$$

DEMOSTRACIÓN. El lema es consecuencia de aplicar la fórmula de Christoffel-Darboux (ver B.5) para los polinomios de Hermite. Por la ortonormalidad de $\{\psi_n\}$ se tiene

$$\langle H_n, H_n \rangle = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

Así, la fórmula de Christoffel-Darboux ahora es

$$\sum_{n=0}^N \frac{H_n(x)H_n(y)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} 2^N N!} \frac{H_{N+1}(x)H_N(y) - H_N(x)H_{N+1}(y)}{x - y}.$$

Multiplicando ambos lados por el factor $e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ y reescribiendo de una manera adecuada los coeficientes, tenemos que

$$\sum_{n=0}^N \frac{H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(y)e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{\pi} 2^n n!}$$

es igual a

$$\frac{(N+1)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\sqrt{2}(\sqrt{\pi}2^N N!)^{1/2}(\sqrt{\pi}2^{N+1}(N+1)!)^{1/2}} \frac{H_{N+1}(x)H_N(y) - H_N(x)H_{N+1}(y)}{x-y}.$$

Reconociendo la función de onda del oscilador en la ecuación anterior se sigue el lema. \square

Teorema 1.8 (Dyson). Para $n \geq 2$, el comportamiento límite r_n^{GUE} de la función de n -correlación para GUE está dado por

$$r_n^{\text{GUE}}(x_1, \dots, x_n) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2N}} \right)^n \rho_n^{(N)} \left(\frac{\pi x_1}{\sqrt{2N}}, \dots, \frac{\pi x_n}{\sqrt{2N}} \right) = \det_{n \times n} \left(S(x_j, x_k) \right),$$

donde S es el Núcleo Seno de Dyson

$$S(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen } \pi(y-x)}{\pi(y-x)} & x \neq y \\ 1 & x = y. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Para $j = 1, 2$, sea $y_j = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} x_j$. Pongamos $N = 2m$ en el lema 1.7 (el caso cuando $N = 2m + 1$ es análogo). Entonces,

$$K_{\text{GUE}(2m)}(y_1, y_2) = \sqrt{m} \frac{\psi_{2m}(y_1)\psi_{2m-1}(y_2) - \psi_{2m-1}(y_1)\psi_{2m}(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Tomando el límite $m \rightarrow \infty$, $y_1 \rightarrow \infty$ y $y_2 \rightarrow \infty$ y usando la fórmula asintótica para los polinomios de Hermite [43]

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^m m^{1/4} \psi_{2m}(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\pi x) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^m m^{1/4} \psi_{2m+1}(y) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen}(\pi x), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} K_{\text{GUE}(2m)}(y_1, y_2) &= \frac{2\sqrt{m} \cos(\pi x_1) \text{sen}(\pi x_2) - \text{sen}(\pi x_1) \cos(\pi x_2)}{\pi \pi(x_1 - x_2)} \\ &= \frac{2\sqrt{m} \text{sen}(\pi(x_2 - x_1))}{\pi \pi(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

El resultado se sigue por el teorema de Gaudin-Mehta 1.5. \square

6. Correlación de parejas

Una aplicación esencial para nuestros propósitos del Teorema de Dyson es la siguiente. Considérese la sucesión de términos positivos $\{\epsilon_N\}$ tal que

$$\epsilon_N \rightarrow \infty, \quad \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \epsilon_N \rightarrow 0,$$

conforme $N \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\widehat{N} := \mathbb{E} \left[\# \left\{ |x_j| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \epsilon_N \right\} \right] = \int_{-\frac{\pi}{\sqrt{2N}} \epsilon_N}^{\frac{\pi}{\sqrt{2N}} \epsilon_N} \rho_1^{(N)}(x) dx \sim 2\epsilon_N,$$

conforme $N \rightarrow \infty$.

Para $a < b$, definimos al conjunto $\Delta_N \subset \mathbb{R}^2$ como

$$\Delta_N = \left\{ (x, y) : \frac{\pi}{\sqrt{2N}} a < x - y < \frac{\pi}{\sqrt{2N}} b, |x|, |y| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \epsilon_N \right\}.$$

Recordemos de la sección 3

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\#(i, j), i \neq j : x_i, x_j \in \Delta(N) \right] &= \int_{\Delta_N} \rho_2^{(N)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2N}} \right)^2 \rho_2^{(N)} \left(\frac{\pi s}{\sqrt{2N}}, \frac{\pi t}{\sqrt{2N}} \right) ds dt, \end{aligned}$$

donde

$$\Gamma_N = \{(x, y) : a < x - y < b, |x|, |y| \leq \epsilon_N\}.$$

Por lo tanto, por el teorema de Dyson,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\#(i, j), i \neq j : x_i, x_j \in \Delta(N) \right] = \int_a^b r_2^{\text{GUE}}(u) du.$$

El hecho de que la función

$$r_2^{\text{GUE}}(u) = \frac{1}{3!} (\pi u)^2 - \frac{1}{5!} (\pi u)^4 + \dots$$

se anule en 0 se traduce en el hecho de que los eigenvalores de una matriz aleatoria tienden a repelerse mutuamente.

7. Distribución de huecos

Históricamente, la teoría de matrices aleatorias se centraba principalmente en el estudio de los huecos entre eigenvalores consecutivos. La idea era que esta teoría podía servir para dar un modelo a las fluctuaciones de los tamaños de huecos entre niveles de energía consecutivos de sistemas cuánticos complejos. Denotemos por $E_k^{\text{GUE}(N)}(\eta)$ a la probabilidad de que un intervalo de longitud η , elegido al azar, contenga exactamente k de los N niveles, y por $\mu_k^{\text{GUE}(N)}(\eta)$ a la densidad de probabilidad de tener dos eigenvalores separados una distancia η con exactamente k eigenvalores entre ellos. A esta densidad se conoce como *la distribución de huecos entre eigenvalores k -consecutivos*.

Gaudin [17] logró dar una expresión de estas funciones en términos de un determinante de Fredholm (ver apéndice B.3.).

Proposición 1.9. *Se tienen las siguientes fórmulas para $E_k^{\text{GUE}(N)}(\eta)$ y $\mu_k^{\text{GUE}(N)}(\eta)$ para $k \geq 1$ [45]:*

$$E_k^{\text{GUE}(N)}(\eta) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \det \left(I + T \chi_{[0, \eta]} K_{\text{GUE}(N)} \right) \Big|_{T=-1}$$

$$\mu_k^{\text{GUE}(N)}(\eta) = \frac{d^2}{d\eta^2} \sum_{j=0}^k (k-j) E_j^{\text{GUE}(N)}(\eta).$$

Como se hizo notar anteriormente, si $y_1 = \sqrt{2N}x_1/\pi$ y $y_2 = \sqrt{2N}x_2/\pi$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K_{\text{GUE}(N)}(y_1, y_2) = \frac{\text{sen}(\pi(y_1 - y_2))}{\pi(y_1 - y_2)}.$$

De este modo, la teoría de Fredholm (ver [2] capítulo 3), permite tomar el límite cuando $N \rightarrow \infty$ en fórmulas en la proposición 1.9, los cuales existen y están dados por

$$E_k^{\text{GUE}}(\eta) := \lim_{N \rightarrow \infty} E_k^{\text{GUE}(N)}(\eta) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \det \left(I + T \chi_{[0, \eta]} S \right) \Big|_{T=-1}$$

$$\mu_k^{\text{GUE}}(\eta) := \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_k^{\text{GUE}(N)}(\eta) = \frac{d^2}{d\eta^2} \sum_{j=0}^k (k-j) E_j^{\text{GUE}}(\eta).$$

A las medidas (de probabilidad) μ_k^{GUE} se les conoce como *las medidas de Gaudin*. Gaudin hizo notar que las expresiones anteriores permiten calcular a las medidas μ_k^{GUE} numéricamente. En efecto, las eigenfunciones de la ecuación integral

$$\int_0^\eta S(x, y) f(y) dy = \lambda f(x)$$

son las funciones prolatoesferoidales [31]. Esto puede usarse para calcular las eigenvalores, $\lambda_{j, \text{GUE}}$, así como las eigenfunciones $f_j(x, \eta)$ de la ecuación integral anterior.

La distribución de la distancia η entre pares de eigenvalores k -consecutivos (normalizados) tiene por función de densidad de probabilidades μ_k^{GUE} por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq j \leq N-k : x_{j+k} - x_j \leq \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \eta \right\} \right) = \int_0^\eta \mu_k^{\text{GUE}}(u) du.$$

Una derivación rigurosa de este hecho se encuentra en [10]. La prueba radica, principalmente, en expresar la distribución de huecos entre eigenvalores en términos de las funciones de correlación.

Matrices Aleatorias: Grupos Compactos Clásicos

Ahora consideramos una clase particular de matrices aleatorias cuya distribución de probabilidad es la medida de Haar normalizada, los grupos compactos clásicos. El propósito ahora es desarrollar algunas de las herramientas necesarias para calcular estadísticas sobre los grupos compactos, a saber, la n -correlación y n -densidad de niveles. Esto permite calcular otras cantidades de interés como la distribución de huecos entre eigenvalores así como la distribución de eigenvalores cercanos a 1 (por ejemplo la distribución del primer eigenvalor). Para esto es de vital importancia el lema de Gaudin el cual nos dicta una manera de reinterpretar la fórmula de integración de Weyl en términos de un determinante de una función núcleo. La exposición que aquí se presenta cubre, fundamentalmente, los aspectos de matrices aleatorias del libro [26].

1. Definiciones y medida de Haar

Para poner en contexto el estudio a realizar, es conveniente repasar brevemente la definición así como algunas propiedades de la medida de Haar de grupos localmente compactos. Aquel lector interesado en un estudio detallado sobre la construcción y propiedades de la medida de Haar puede consultar [19].

Definición 2.1. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Una medida invariante en G (o medida de Haar de G) es una medida de Borel μ con la propiedad de invarianza bajo la acción multiplicativa izquierda de G en sí mismo:*

$$\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(gx)d\mu(x),$$

para toda función continua compleja f en G , y todo elemento $g \in G$. Adicionalmente se requiere que μ no sea la medida trivial (idénticamente cero).

Teorema 2.2. *La medida de Haar de un grupo localmente compacto G es única en el siguiente sentido. Dada una medida de Haar μ , cualquier otra medida de Haar es $c\mu$ para un número c real y positivo.*

Teorema 2.3. *Si G es compacto, entonces la medida de Haar de G es tanto invariante por la izquierda como por la derecha:*

$$\int_G f(xg)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(gx)d\mu(x),$$

para toda función continua compleja f en G , y todo elemento $g \in G$.

Como G es compacto, se tiene que $\mu(G)$ es un número real positivo y finito; por tanto, existe una única medida de probabilidad de Haar en un grupo compacto G , que además es bi-invariante (invariante bajo traslaciones izquierdas tanto como derechas en G).

Los grupos localmente compactos que aquí consideramos son los llamados *grupos compactos clásicos*.

Definición 2.4. *Los grupos compactos clásicos son:*

- *El grupo unitario, denotado por $U(N)$, es el grupo de todas las matrices complejas X de dimensión $N \times N$ tales que $XX^\dagger = I$.*
- *El grupo ortogonal, denotado por $O(N)$, es el subgrupo de $U(N)$ que consiste de todas las matrices con entradas complejas.*
- *El grupo especial ortogonal, denotado por $SO(N)$, es el subgrupo de $O(N)$ que consiste de todas las matrices tales que $\det(X) = 1$.*
- *El grupo simpléctico, denotado por $USp(2N)$, es el subgrupo de $U(2N)$ formado por todas las matrices X tales que $X^t J X = Z$, donde*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix}$$

Notación 2.5. *Cuando se quiera hacer referencia a cualquiera de estos grupos (indistintamente) se usará la notación $G(N)$.*

2. Fórmula de integración de Weyl

Dados los eigenvalores de una matriz unitaria X , sabemos que se encuentran sobre el círculo unitario en el plano complejo y pueden ser escritos (contando multiplicidad) como $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N}$ donde $0 \leq \theta_j < 2\pi$, para toda $1 \leq j \leq N$. Los eigenvalores de X^\dagger son justamente los conjugados complejos de los eigenvalores de X . Ahora bien, ya que el determinante de una matriz cuadrada compleja es el producto de los eigenvalores, se tiene que $\det(X) = \prod_{j=1}^n e^{i\theta_j}$ el cual, de nuevo, cae sobre el círculo unitario.

Toda matriz unitaria que sea real es ortogonal (y recíprocamente). Para matrices en $SO(N)$ necesitaremos distinguir dos casos: $SO(2N)$ y $SO(2N+1)$. Dado un eigenvalor complejo de una matriz ortogonal, su conjugado complejo es también un eigenvalor. Para $X \in SO(2N)$, escribimos sus eigenvalores como $e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \dots, e^{\pm i\theta_N}$ donde $0 \leq \theta_j \leq \pi$. Para el caso en que $X \in SO(2N+1)$, escribimos sus eigenvalores como $1, e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \dots, e^{\pm i\theta_N}$ donde $0 \leq \theta_j \leq \pi$.

Cuando $X \in \text{USp}(2N)$ escribimos sus eigenvalores como $e^{\pm i\theta_1}, e^{\pm i\theta_2}, \dots, e^{\pm i\theta_N}$ donde $0 \leq \theta_j \leq \pi$.

Notación 2.6. En lo sucesivo nos referiremos como eigenvalores a los N eigenángulos de una matrix en $G(N)$ y los denotaremos como el vector $\Theta_N = (\theta_1, \dots, \theta_N)$.

La colección de todas las matrices en $G(N)$ tales que tienen los mismos eigenvalores sobre el círculo unitario, forman una clase de conjugación en $G(N)$.

Definición 2.7. Una función de clases f en $G(N)$ es una función que solamente depende de la clase (de similitud, es decir, bajo conjugación) de cada matrix en $G(N)$.

Aquí debe hacerse una importante observación. El valor de una función de clases, $f(X)$, depende solamente de los eigenvalores de X . Nótese que la invarianza de f bajo conjugación implica que $f(\theta_1, \dots, \theta_N)$ es una función simétrica en sus N variables.

El siguiente teorema fue probado por Hermann Weyl en 1925 y proporciona una fórmula para integrar una función de clases sobre grupos de Lie compactos con respecto a medidas invariantes proporcionando así la función de densidad de probabilidades para los eigenvalores de una matrix en $G(N)$. La fórmula es conocida como la fórmula de integración de Weyl. Vale aclarar que la fórmula es más general que la que aquí presentamos. Una demostración puede leerse en [5].

Teorema 2.8 (Fórmula de integración de Weyl). Sea f una función de clases en $G(N)$. Entonces

$$\int_{G(N)} f(X) dX_{G(N)} = \int_{[0, \sigma\pi]^N} f(\Theta_N) \mathbf{e}_{G(N)}(\Theta_N) d\theta_1 \dots d\theta_N,$$

en donde $\sigma = 2$ cuando $G(N) = \text{U}(N)$ y $\sigma = 1$ para los demás casos. En la fórmula, estamos denotando por $dX_{G(N)}$ a la medida de Haar sobre $G(N)$ y $\mathbf{e}_{G(N)}$ es la función de densidad de probabilidades de los eigenvalores de una matrix en $G(N)$ la cual está dada por, según sea el caso,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\text{U}(N)}(\Theta_N) &= \frac{1}{(2\pi)^N N!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j}|^2 \\ \mathbf{e}_{\text{SO}(2N)}(\Theta_N) &= \frac{2^{(N-1)^2}}{\pi^N N!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\cos \theta_k - \cos \theta_j)^2 \\ \mathbf{e}_{\text{SO}(2N+1)}(\Theta_N) &= \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\cos \theta_k - \cos \theta_j)^2 \prod_{h=1}^N \sin^2\left(\frac{\theta_h}{2}\right) \\ \mathbf{e}_{\text{USp}(2N)}(\Theta_N) &= \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\cos \theta_k - \cos \theta_j)^2 \prod_{h=1}^N \sin^2(\theta_h). \end{aligned}$$

Para comparar las distintas situaciones, se normalizan los eigenvalores de una matriz en $G(N)$ como

$$\tilde{\theta}_j = \frac{N + \lambda}{\sigma\pi} \theta_j,$$

donde $\theta_0 = \theta_N - 2\pi$ y $\lambda = 1/2$ si $G(N) = \text{SO}(2N + 1)$ o $\lambda = 0$ en cualquier otro caso, con el fin de tener una diferencia promedio, entre los ángulos consecutivos, de uno.

Notación 2.9. Denotaremos por $\tilde{\Theta}_{G(N)}$ a la sucesión de N eigenvalores normalizados de una matriz $X \in G(N)$.

3. Fórmulas determinantaes para las medidas de Haar

En lo que resta del capítulo, seguiremos la siguiente notación. Denotemos por

$$K_{G(N)}(x, y) = \frac{\sigma}{2} \left[S_{\rho N + \tau}(y - x) + \epsilon S_{\rho N + \tau}(y + x) \right],$$

a las funciones núcleo, en donde los parámetros τ, ϵ, ρ y σ están dados de acuerdo a la siguiente tabla

$G(N)$	τ	ϵ	ρ	σ
$U(N)$	0	0	1	2
$\text{SO}(2N)$	-1	1	2	1
$\text{SO}(2N + 1)$	0	-1	2	1
$\text{USp}(2N)$	1	-1	2	1

con

$$S_{\rho N + \tau}(x) = \frac{\text{sen}\left(\frac{(\rho N + \tau)x}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Para estudiar las distintas estadísticas de los eigenvalores de matrices en los grupos compactos clásicos, es conveniente reescribir a la función de densidad de probabilidades de los eigenvalores de una matriz $X \in G(N)$ en términos de determinantes que involucran a las funciones núcleo.

Teorema 2.10. La función de densidad de los eigenvalores de una matriz en $G(N)$ tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{e}_{G(N)}(\theta_1, \dots, \theta_N) = \frac{1}{(\sigma\pi)^N N!} \det_{N \times N} \left(K_{G(N)}(\theta_j, \theta_k) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. En la prueba se utilizará el lema de transposición [A.2](#) y el lema de Gaudin [A.3](#), así como la definición del determinante de Vandermonde [A.1](#). Consideremos cada caso.

- $U(N)$. Comenzamos observando lo siguiente:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq k < j \leq N} \left| e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j} \right|^2 &= \text{Van}(\exp(i\Theta_N)) \overline{\text{Van}}(\exp(i\Theta_N)) \\ &= \det_{N \times N} \left(e^{i(j-1)\theta_k} \right) \det_{N \times N} \left(e^{-i(j-1)\theta_k} \right), \end{aligned}$$

en donde $\exp(i\Theta_N) = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N})$. Pongamos $\psi_j(\theta_k) = e^{i(j-1)\theta_k}$ y $\phi_j(\theta_k) = e^{-i(j-1)\theta_k}$ en el lema de transposición para así obtener

$$\prod_{1 \leq k < j \leq N} \left| e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j} \right|^2 = \det_{N \times N} \left(\sum_{l=1}^N e^{i(l-1)(\theta_k - \theta_j)} \right).$$

Ahora bien, por la fórmula para la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{l=1}^N e^{i(l-1)(\theta_k - \theta_j)} = \begin{cases} \frac{1 - e^{iN(\theta_k - \theta_j)}}{1 - e^{i(\theta_k - \theta_j)}} & \theta_j \neq \theta_k \\ N & \theta_j = \theta_k. \end{cases}$$

Así, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{iN(\theta_k - \theta_j)}}{1 - e^{i(\theta_k - \theta_j)}} &= e^{i \frac{(N-1)}{2} (\theta_k - \theta_j)} \frac{e^{iN(\theta_k - \theta_j)/2} - e^{-iN(\theta_k - \theta_j)/2}}{e^{i(\theta_k - \theta_j)/2} - e^{-i(\theta_k - \theta_j)/2}} \\ &= e^{i \frac{(N-1)}{2} (\theta_k - \theta_j)} S_N(\theta_k - \theta_j). \end{aligned}$$

Factorizando el término $e^{iN\theta_j}$ del j -ésimo renglón y $e^{-iN\theta_k}$ de la k -ésima columna.

$$\prod_{1 \leq k < j \leq N} \left| e^{i\theta_k} - e^{i\theta_j} \right|^2 = \det_{N \times N} \left(S_N(\theta_k - \theta_j) \right).$$

Por lo tanto

$$\mathbf{e}_{U(N)}(\Theta_N) = \frac{1}{(2\pi)^N N!} \det_{N \times N} \left(K_{U(N)}(\theta_j, \theta_k) \right).$$

- $SO(2N)$. Tenemos que

$$\prod_{1 \leq j < k \leq N} (\cos \theta_k - \cos \theta_j) = \text{Van}(\cos \Theta_N),$$

donde $\cos \Theta_N = (\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_N)$. Multiplicando el j -ésimo renglón de la matriz $\text{Van}(\cos \Theta_N)$ por 2^{j-2} y añadiéndole una combinación lineal apropiada de renglones de variables con potencias menores, es posible

reemplazar el j -ésimo renglón de esta matriz por un renglón que consista de los polinomios de Chebyshev de primera especie $T_j(\cos \theta)$ (ver B.3) como entradas

$$\left(T_{j-1}(\cos \theta_1), T_{j-2}(\cos \theta_2), \dots, T_{j-1}(\cos \theta_N) \right).$$

Haciendo lo mismo a todos los renglones, excepto al primero, encontramos que

$$\text{Van}(\cos \Theta_N) = 2^{-(N-1)(N-2)/2} \det_{N \times N} \left(T_{j-1}(\cos \theta_k) \right).$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\text{SO}(2N)}(\Theta_N) &= \frac{2^{(N-1)^2}}{\pi^N N!} \left(\text{Van}(\cos \Theta_N) \right)^2 \\ &= \frac{2^{N-1}}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left(T_{j-1}(\cos \theta_k) \right)^2. \end{aligned}$$

Después, multiplicamos cada renglón por $\sqrt{2}$ de tal manera que

$$\text{Van}(\cos \Theta_N) = 2^{-(N-1)^2/2} \det_{N \times N} \left(T_{j-1}^*(\cos \theta_k) \right),$$

en donde $T_{j-1}^* = \sqrt{2}T_j$ para $j \geq 1$ y $T_0^* = T_0 = 1$. Por lo tanto,

$$\mathbf{e}_{\text{SO}(2N)}(\Theta_N) = \frac{1}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left(T_{j-1}^*(\cos \theta_k) \right)^2.$$

Poniendo $\psi_j(x_k) = T_{j-1}^*(\cos \theta_k) = \phi_j(x_k)$ en el lema de transposición, obtenemos

$$\left(\text{Van}(\cos \Theta_N) \right)^2 = 2^{-(N-1)^2} \det_{N \times N} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \cos(n\theta_j) \cos(n\theta_k) \right).$$

Afirmamos lo siguiente

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \cos(n\theta_j) \cos(n\theta_k) = K_{\text{SO}(2N)}(\theta_j, \theta_k).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-N}^N \cos(nx) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n=-N}^N e^{inx} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(N+1/2)x} - e^{-i(N+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \right) \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)}.
 \end{aligned}$$

De esto último, se sigue que

$$\sum_{n=1}^N \cos(nx) = \frac{S_{2N+1}(x) - 1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \cos(n\theta_j) \cos(n\theta_k) = \frac{S_{2N-1}(\theta_j - \theta_k) + S_{2N-1}(\theta_j + \theta_k)}{2}.$$

En consecuencia, se tiene la identidad

$$2^{(N-1)^2} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(\cos \theta_k - \cos \theta_j \right)^2 = \det_{N \times N} \left(K_{\operatorname{SO}(2N)}(\theta_j, \theta_k) \right),$$

de lo cual deducimos que

$$\mathbf{e}_{\operatorname{SO}(2N)}(\Theta_N) = \frac{1}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left(K_{\operatorname{SO}(2N)}(\theta_j, \theta_k) \right).$$

- $\operatorname{SO}(2N + 1)$. Por operaciones elementales de renglón sobre $\operatorname{Van}(\cos \Theta_N)$, podemos transformar el j -ésimo renglón de la matriz en uno cuyas entradas sean los polinomios de Chebyshev de segunda especie (el coeficiente principal es 2^n , ver B.4)

$$\left(V_{j-1}(\cos \theta_1), V_{j-2}(\cos \theta_2), \dots, V_{j-1}(\cos \theta_N) \right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{\operatorname{SO}(2N+1)} &= \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \left(\operatorname{Van}(\cos \Theta_N) \right)^2 \prod_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_n}{2} \right) \\
 &= \frac{2^N}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left(V_{j-1}(\cos \theta_k) \right)^2 \prod_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_n}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Poniendo $\psi_j(x_k) = V_{j-1}(\cos \theta_k) = \phi_j(x_k)$ en el lema de transposición, se tiene que la expresión anterior es igual a

$$\frac{2^N}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left[\sum_{n=1}^N \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) \theta_j \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) \theta_k \right].$$

Observe que se cumple la siguiente identidad trigonométrica: Entonces,

$$2 \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(ny) = \frac{S_{2N+1}(x-y) - S_{2N+1}(x+y)}{2}.$$

Entonces,

$$2 \sum_{n=1}^N \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} x \right) \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} y \right) = \frac{S_{2N}(x-y) - S_{2N}(x+y)}{2},$$

y por lo tanto

$$\mathbf{e}_{\text{SO}(2N+1)}(\Theta_N) = \frac{1}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left(K_{\text{SO}(2N+1)}(\theta_j, \theta_k) \right).$$

- $\text{USp}(2N)$. Nuevamente, por operaciones elementales de renglón sobre $\text{Van}(\cos \Theta_N)$, podemos transformar el j -ésimo renglón de la matriz en uno cuyas entradas sean los polinomios de Chebyshev de segunda especie

$$\left(U_{j-1}(\cos \theta_1), U_{j-2}(\cos \theta_2), \dots, U_{j-1}(\cos \theta_N) \right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\text{USp}(2N)}(\Theta_N) &= \frac{2^{N^2}}{\pi^N N!} \left(\text{Van}(\cos \Theta_N) \right)^2 \prod_{n=1}^N \operatorname{sen}^2(\theta_n) \\ &= \frac{2^N}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left(U_{j-1}(\cos \theta_k) \right)^2 \prod_{n=1}^N \operatorname{sen}^2(\theta_n). \end{aligned}$$

Poniendo $\psi_j(x_k) = U_{j-1}(\cos \theta_k) = \phi_j(x_k)$ en el lema de transposición,

$$\begin{aligned} &\prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(\cos \theta_k - \cos \theta_j \right)^2 \prod_{n=1}^N \operatorname{sen}^2(\theta_n) \\ &= 2^{-N(N-1)} \det_{N \times N} \left(\sum_{n=1}^N \operatorname{sen}(n\theta_j) \operatorname{sen}(n\theta_k) \right), \end{aligned}$$

y de aquí, llegamos al resultado deseado,

$$\mathbf{e}_{\text{USp}(2N)}(\Theta_N) = \frac{1}{\pi^N N!} \det_{N \times N} \left(K_{\text{USp}(2N)}(\theta_k, \theta_j) \right).$$

□

El teorema que sigue nos da una forma específica para integrar, sobre grupos compactos con respecto a la medida de Haar, una función de N variables obtenida a partir de una función de n variables, específicamente, una función de la forma

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq N \\ i_j \neq i_k}} f(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_n}).$$

Es de destacar el papel que juega el lema de Gaudin (A.3) para calcular dichas integrales.

Teorema 2.11 (Gaudin-Mehta). Sean $n \geq 1$ y f una función simétrica en sus n variables medible y acotada. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{G(N)} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq N \\ i_j \neq i_k}} f(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_n}) dX_{G(N)} \\ = \frac{1}{(\sigma\pi)^n} \int_{[0, \sigma\pi]^n} f(\theta_1, \dots, \theta_n) \det_{n \times n} \left(K_{G(N)}(\theta_j, \theta_k) \right) d\theta_1 \dots d\theta_n. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Debido a la ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev, se tiene que

$$\int_0^{\sigma\pi} K_{G(N)}(x, \theta) K_{G(N)}(\theta, y) d\theta = \sigma\pi K_{G(N)}(x, y)$$

y

$$\int_0^{\sigma\pi} K_{G(N)}(\theta, \theta) d\theta = \sigma\pi N.$$

Así, por el lema de Gaudin, tenemos

$$\int_{[0, \sigma\pi]^{N \times N}} \det \left(K_{G(N)}(\theta_j, \theta_k) \right) d\theta_N = \sigma\pi \det_{(N-1) \times (N-1)} \left(K_{G(N)}(\theta_j, \theta_k) \right).$$

Aplicando el lema de Gaudin $N - n$ veces,

$$\int_{[0, \sigma\pi]^{N-n} \times [0, \sigma\pi]^{N \times N}} \det \left(K_{G(N)}(\theta_j, \theta_k) \right) d\theta_{n+1} \dots d\theta_N = (\sigma\pi)^{N-n} (N-n)! \det_{n \times n} \left(K_{G(N)}(\theta_j, \theta_k) \right).$$

Integrando sobre las n variables restantes, aplicando el teorema 2.10, y notando que hay $\binom{N}{n} n!$ sumandos, se sigue el resultado. □

4. Distribución de huecos

Definición 2.12. Sea $X \in G(N)$. Las distribuciones (locales) de huecos entre eigenvalores normalizados de X son las siguientes:

- Para $k \geq 1$, los huecos entre eigenvalores k -consecutivos, $\mu_k^{(X)}[a, b]$, son las medidas sobre \mathbb{R}_+ definidas como

$$\frac{1}{N} \# \{1 \leq j \leq N - k : \tilde{\theta}_{j+k} - \tilde{\theta}_j \in [a, b]\}$$

- Para $n \geq 2$, la n -correlación de niveles $R_n^{(X)}(Q)$ se define, para $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ una caja compacta, como

$$\frac{1}{N} \# \{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq N, j_i \neq j_k : (\tilde{\theta}_{j_1} - \tilde{\theta}_{j_2}, \dots, \tilde{\theta}_{j_{n-1}} - \tilde{\theta}_{j_n}) \in Q\}.$$

Se puede también definir, de manera técnicamente más conveniente, la n -correlación de niveles para una función prueba arbitraria como sigue.

Notación 2.13. Para $n \geq 2$, denotemos por $\mathcal{T}(n)$ al espacio de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medibles y acotadas que verifiquen las siguientes condiciones:

- i) $f(x_1, \dots, x_n)$ es simétrica
- ii) $f(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_n + t) = f(x_1, \dots, x_n)$ para toda $t \in \mathbb{R}$.
- iii) f está soportada en alguna vecindad de la diagonal $x_1 = \dots = x_n$; es decir, existe una $\beta \geq 0$ tal que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ cuando $\max_{j,k} |x_j - x_k| > \beta$.

La segunda condición afirma que f depende solamente de las diferencias de las coordenadas, mientras que la tercer condición asegura que f mide los huecos locales entre coordenadas.

Definición 2.14. Dada una sucesión de números reales $B = \{b_j\}_{j=1}^N$, se define la n -correlación de niveles de B con respecto a una función $f \in \mathcal{T}(n)$ como

$$R_n^{(X)}[f(B)] := \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq N \\ j_k \neq j_l}} f(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}).$$

Note también que, si consideramos a la sucesión de eigenvalores normalizados $\tilde{\Theta}_{G(N)}$ de una matriz $X \in G(N)$, y si ponemos

$$f(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n) = \chi_Q(\tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_{n-1} - \tilde{\theta}_n)$$

en la definición 2.14, recuperamos la definición dada en el segundo punto de 2.12.

Katz y Sarnak [26] demostraron que el comportamiento límite (cuando $N \rightarrow \infty$) de las distribuciones locales de los eigenvalores de una matriz $X \in G(N)$, promediadas sobre $G(N)$, son como los de GUE. En la siguiente sección, precisaremos estos resultados.

4.1. n -correlación de niveles.

Teorema 2.15. *Sea $n \geq 2$ y $f \in \mathcal{T}(n)$. Entonces,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{G(N)} R_n^{(X)} [f(\tilde{\Theta}_{G(N)})] dX = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) r_n^{\text{GUE}}(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Gaudin-Mehta 2.11,

$$\begin{aligned} & \int_{G(N)} R_n^{(X)} [f(\tilde{\Theta}_{G(N)})] dX \\ &= \frac{1}{N} \int_{[0, N+\lambda]^n} f(\theta_1, \dots, \theta_n) \det_{n \times n} \left[\frac{1}{N+\lambda} K_{G(N)} \left(\frac{\sigma\pi}{N+\lambda} \theta_j, \frac{\sigma\pi}{N+\lambda} \theta_k \right) \right] d\theta_1 \dots d\theta_n. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables, $x_1 = \theta_1, x_2 = \theta_2 - \theta_1, \dots, x_n = \theta_n - \theta_1$, la integral anterior se convierte en

$$\frac{1}{N} \int_0^{N+\lambda} \int_{[-x_1, N+\lambda-x_1]^{n-1}} g_N(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_n + x_1) dx_2 \dots dx_n dx_1,$$

en donde

$$g_N(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \det_{n \times n} \left[\frac{1}{N+\lambda} K_{G(N)} \left(\frac{\sigma\pi}{N+\lambda} \theta_j, \frac{\sigma\pi}{N+\lambda} \theta_k \right) \right].$$

Por ser g invariante bajo traslaciones la expresión anterior es igual a

$$\frac{1}{N} \int_0^{N+\lambda} \int_{[-x_1, N+\lambda-x_1]^{n-1}} g(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n dx_1.$$

Por la hipótesis sobre el soporte de f , para N suficientemente grande, lo último equivale a

$$\frac{1}{N} \int_{[-\beta, \beta]^{n-1}} f(0, x_2, \dots, x_n) \int_{\max\{-x_j\}}^{\min\{N-x_j\}} \det_{n \times n} \left[\frac{1}{2N} \left(L_{G(N)}(x_j, x_k) \right) \right] dx_1 \dots dx_n,$$

en donde

$$L_{G(N)}(x_j, x_k) = S_{2N+\tau} \left(\frac{\sigma\pi}{N} (x_k - x_j) \right) \Big|_{x_1=0} + \epsilon S_{2N+\tau} \left(\frac{\sigma\pi}{N} (x_k^* + x_j^* + 2x_1) \right),$$

con $x_j^* = x_j$ si $j \neq 1$ mientras que $x_1^* = 0$.

Afirmamos lo siguiente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\max\{-x_j\}}^{\min\{N-x_j\}} \det_{n \times n} \left[\frac{1}{2N} \left(L_{G(N)}(x_j, x_k) \right) \right] dx_1 = r_2^{\text{GUE}}(0, x_2, \dots, x_n).$$

En efecto, expandiendo el determinante en $n!$ términos del tipo

$$\text{sgn}(\sigma) \prod_i \frac{1}{2N} \left(L_{G(N)}(x_i, x_{\sigma(i)}) \right),$$

notamos que en el producto hay 2^n términos, excepto uno, que contienen al menos un factor con $\frac{1}{2N} S_{2N+\tau}(\pi(x_k + x_j + 2x_1))$. Cualquier término con al menos un factor como este tenderá a cero después de integrar con respecto a x_1 y al dividir por N ; poniendo

$$c(a, b, N)(x) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}(ax + b)}{\text{sen}\left(\frac{ax+b}{N}\right)},$$

observamos que $c(a, b, N)(x) \leq \frac{2}{\pi} \frac{\text{sen}(ax+b)}{ax+b}$ si $ax + b \leq \frac{\pi N}{2}$, y $|c(a, b, N)(x)| \leq 1$ para toda x . Por lo tanto, usando el hecho de que $\int_0^\infty \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right|^j dx < \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N \prod_{j=1}^J c(a_j, b_j, N)(x) dx = 0,$$

por lo que solamente nos queda el término con los factores $\frac{1}{2N} S_{2N+\tau}(\pi(x_k - x_j))$. Notando que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_N\left(\frac{2\pi}{N}x\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\text{sen}(\pi x)}{\text{sen}\left(\frac{\pi x}{N}\right)} = S(x),$$

se llega al resultado. \square

Nota 2.16. Observe que si ponemos $n = 2$ y consideramos $G(N) = U(N)$ en el teorema 2.15, entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{U(N)} f(\tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_j) dX = \int_{\mathbb{R}} f(x) r_2^{\text{GUE}}(x) dx.$$

4.2. Distribución de huecos entre eigenvalores. El conocimiento de las n -correlaciones permite determinar las distribuciones de huecos entre eigenvalores; por ejemplo, la distribución entre eigenvalores sucesivos.

Teorema 2.17. Para cada $k \geq 1$ existen medidas μ_k sobre \mathbb{R}_+ tales que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{G(N)} \mu_k^{(X)}(s) dX = \mu_k(s),$$

en donde las medidas μ_k coinciden con las medidas de Gaudin:

$$d\mu_k(s) = \mu_k^{\text{GUE}}(s) ds.$$

Aquí, por simplicidad, estamos denotando por $\mu_k(s)$ a $\mu_k[0, s]$.

Además, una ley de los grandes números asegura que para una matriz $X \in G(N)$, $\mu_k^{(X)}$ se aproxima a μ_k^{GUE} cuando $N \rightarrow \infty$. Precisamente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{G(N)} D\left(\mu_k^{(X)}, \mu_k^{\text{GUE}}\right) dX = 0,$$

donde $D(\nu_1, \nu_2)$ es la distancia de Kolmogorov-Smirnov entre ν_1 y ν_2 ¹.

La clave para demostrar el teorema radica en expresar a la distribución de huecos en términos de las n -correlaciones. Para esto, será conveniente definir conjuntos auxiliares de la siguiente forma.

Sea $B : b_1 \leq \dots \leq b_N$ una sucesión de números reales. Vemos a estos N puntos como puntos sobre una línea (contando posibles multiplicidades). Para $n \geq 0$ un entero, sea

$$S_n(s, B) = \#\{1 \leq j \leq N - n : b_{j+n} - b_j \leq s\}.$$

También, para cualquier $m \geq 0$, denotemos por $C_m(s, B)$ al número de subconjuntos de cardinalidad m cuyos puntos extremos están alejados a lo más una distancia s . Es decir,

$$C_k(s, B) = \#\{C \subset \{1, \dots, N\} : |C| = k, \max |b_j - b_l| \leq s\}.$$

En este contexto se tiene el siguiente lema:

Lema 2.18.

$$C_{k+2}(s, B) = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} S_{n+1}(s, B).$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \geq k$, consideremos la $k+2$ -upla de índices $j_1 < j_2 < \dots < j_{k+2}$ tales que $b_{j_{k+2}} - b_{j_1} \leq s$. Sea $n = j_{k+2} - j_1$ de modo que el par de puntos extremos contribuyen una unidad a $S_n(s, B)$. Entonces, hay $\binom{n-1}{k}$ conjuntos de tamaño k entre estos puntos extremos, los cuales, tomados junto con los puntos extremos contribuyen una unidad a $C_{k+2}(s, B)$ y así, conforme variamos $n \geq k$, tenemos precisamente la contribución total a $C_{k+2}(s, B)$. \square

En general la relación anterior puede invertirse ² produciendo el siguiente corolario.

Corolario 2.19.

$$S_k(s, B) = \sum_{n \geq k-1} (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k-1} C_{n+2}(s, B).$$

¹La distancia de Kolmogorov-Smirnov entre dos medidas ν_1 y ν_2 se define como

$$D(\nu_1, \nu_2) = \sup\{|\nu_1(I) - \nu_2(I)| : I \subset \mathbb{R} \text{ intervalo}\}.$$

²Este hecho se sigue de la identidad para los coeficientes binomiales

$$\sum_{l=m}^n (-1)^l \binom{l}{m} \binom{n}{l} = \begin{cases} (-1)^m & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Así, para $X \in G(N)$, podemos dar una interpretación de la distribución de huecos de acuerdo a las definiciones de los conjuntos auxiliares definidas anteriormente:

$$\mu_k^{(X)}(s) = \sum_{n \geq k-1} (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k-1} \frac{1}{N} C_{n+2}(s, \tilde{\Theta}_{G(N)}).$$

Recordando la definición de las n -correlaciones,

$$\frac{1}{N} C_{n+2}(s, \tilde{\Theta}_{G(N)}) = R_{n+2}^{(X)}[F_{n+2,s}(\tilde{\Theta}_{G(N)})]$$

donde

$$F_{m,s}(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \max |x_j - x_k| \leq s \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}.$$

De manera que podemos establecer la siguiente relación:

$$\mu_k^{(X)}(s) = \sum_{n \geq k} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} R_{n+1}^{(X)}[F_{n+1,s}(\tilde{\Theta}_{G(N)})].$$

Utilizando el teorema 2.15 (note que $F_{n,s} \in \mathcal{T}(n)$) y el teorema de convergencia acotada³ se obtiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{G(N)} \mu_k^{(X)}(s) dX = H_k(s)$$

en donde

$$H_k(s) := \sum_{n \geq k} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{n!} \int_{[0,s]^n} r_{n+1}^{\text{GUE}}(0, x_2, \dots, x_{n+1}) dx_2 \dots dx_{n+1}.$$

Por lo tanto definimos,

$$d\mu_k(s) = \frac{dH_k(s)}{ds} \cdot ds$$

Se puede probar (sección 7.3 de [26]) que la definición de μ_k define una medida absolutamente continua sobre $[0, \infty)$ que de hecho es una medida de probabilidad y que tiene una representación como determinante de Fredholm. Justamente esta representación coincide con las medidas de Gaudin definidas en la sección 7.

³Utilizando la desigualdad de Hadamard para determinantes, puede probarse que

$$\left| \int_{G(N)} R_m^{(X)}[F_{m,s}(\tilde{\Theta}_{G(N)})] dX \right| \leq \frac{2(2s)^{m-1}}{n-1}.$$

5. Estadísticas discriminantes

Mientras que los resultados anteriores muestran que los huecos locales entre todos los eigenvalores de una matriz típica X en $G(N)$ son *universalmente* como los de GUE cuando $N \rightarrow \infty$, la distribución de aquellos eigenvalores que se encuentran cercanos a 1 (*eigenvalores bajos*) es susceptible a la simetría del grupo compacto específico.

Definición 2.20. *Las estadísticas discriminantes para los eigenvalores normalizados de una matriz $X \in G(N)$ son las siguientes:*

- Para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $n \geq 1$ fijo, que sea de decaimiento rápido, definimos la n -densidad de niveles como

$$W_n^{G(N)}(f) = \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq N \\ j_k \neq j_l}} f(\tilde{\theta}_{j_1}, \dots, \tilde{\theta}_{j_n}).$$

- Para $j \geq 1$, la medida sobre \mathbb{R}_+ que da la distribución del j -ésimo eigenvalor se define como

$$\nu_j^{G(N)}[0, s] = \text{Haar} \{X \in G(N) : \tilde{\theta}_k \in [0, s]\}.$$

Note que, por la hipótesis sobre f , $W_n^{G(N)}(f)$ sólo depende de aquellos eigenvalores $\theta \leq c/N$ para alguna constante c .

Katz y Sarnak [26] demostraron que, en el límite $N \rightarrow \infty$, estas estadísticas son distintas para cada grupo compacto y dependen de la simetría específica.

5.1. n -densidad de niveles.

Teorema 2.21. *Sea $n \geq 1$ fijo. Para toda función f simétrica y de decaimiento rápido se tiene*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{G(N)} W_n^{G(N)}(f) dX = \int_{\mathbb{R}_+} f(x_1, \dots, x_n) W_n^G(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

en donde

$$W_n^G(x_1, \dots, x_n) = \det_{n \times n} \left(K_G(x_j, x_k) \right)$$

y $K_G(x, y)$ son los límites rescalados de las funciones núcleo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma \pi}{N + \lambda} K_{G(N)} \left(\frac{\sigma \pi}{N + \lambda} x, \frac{\sigma \pi}{N + \lambda} y \right) = K_G(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN. Debido al teorema de Gaudin-Mehta 2.11, tenemos

$$\int_{G(N)} W_n^{G(N)}(f) dX = \frac{1}{(\sigma \pi)^n} \int_{[0, \sigma \pi]^n} f(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_n) \det_{n \times n} \left(K_{G(N)}(\theta_j, \theta_k) \right) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Haciendo cambio de variables $\theta_i \mapsto \frac{\sigma\pi}{N+\lambda}x_i$, la integral anterior es

$$\int_{[0, N+\lambda]^n} f(x_1, \dots, x_n) \det_{n \times n} \left[\frac{1}{N+\lambda} K_{G(N)} \left(\frac{\sigma\pi}{N+\lambda} x_k, \frac{\sigma\pi}{N+\lambda} x_j \right) \right] dx_1 \dots dx_n.$$

Por hipótesis, para N grande, el soporte de f está contenido en la región donde $x_i \leq N$ para toda i . Entonces, la integral anterior se convierte en

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x_1, \dots, x_n) \det_{n \times n} \left[\frac{1}{N+\lambda} K_{G(N)} \left(\frac{\sigma\pi}{N+\lambda} x_j, \frac{\sigma\pi}{N+\lambda} x_k \right) \right] dx_1 \dots dx_n.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{G(N)} W_n^{G(N)}(f) dX = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x_1, \dots, x_n) \det_{n \times n} \left(K_G(x_k, x_j) \right) dx_1 \dots dx_n.$$

Lo último fue porque

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} S_{\sigma N + \tau} \left(\frac{\sigma\pi x}{N} \right) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}.$$

□

Nota 2.22. Si tomamos $n = 1$ en el teorema 2.21 y consideramos $G(N) = U(N)$ obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{U(N)} \sum_{j=1}^N f(\tilde{\theta}_j) dX = \int_0^\infty f(x) dx.$$

Es decir, se obtiene una densidad uniforme. Sin embargo, si ponemos $n = 2$, obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{U(N)} \sum_{1 \leq j_1 \neq j_2 \leq N} f(\tilde{\theta}_{j_1}, \tilde{\theta}_{j_2}) dX = \int_{[0, \infty)^2} f(x_1, x_2) W_2^{U(N)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

De esto último se sigue que cuando x_1 está próximo a x_2 , la integral es pequeña. La no uniformidad se refleja en el hecho de que los eigenvalores unitarios tienden a repelerse mutuamente.

Notemos que el resultado anterior no permite una discriminación completa del grupo estudiado; esto porque el determinante que depende de las funciones núcleo límites coincide cuando el grupo considerado es el simpléctico $USp(2N)$ y el ortogonal impar $SO(2N + 1)$. Por esta razón, definimos una estadística relacionada a la 1-densidad de niveles que permita recuperar al grupo estudiado. Para esto, introducimos la siguiente normalización. Dado un elemento $X \in U(N)$, extendemos su espectro definiendo

$$\theta_{j+lN}(X) = \theta_j + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \text{ y } j \in \{1, \dots, N\}.$$

Entonces, bajo esta normalización, para f una función de decaimiento rápido, definimos ⁴

$$D^{U(N)}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{N}{2\pi} \theta_k(X)\right).$$

Debido a la importancia que tendrá esta estadística en capítulos subsecuentes, la llamaremos simplemente por **1-densidad de niveles** o estadísticas lineales (teniendo en mente la distinción que acabamos de mencionar entre ésta con el primer punto de la definición 2.20 para $n = 1$).

Observe que la 1-densidad de niveles cuenta el eigenvalor en $\theta = 0$ que ocurre en el caso cuando el grupo considerado es $SO(2N + 1)$; lo cual produce el siguiente resultado:

Teorema 2.23 (1-densidad de niveles). *Sea f una función de decaimiento rápido. Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_K D^{U(N)}(f) dX_K = \int_{\mathbb{R}} f(x) D^G(x) dx$$

en donde $K \subset U(N)$ es un subgrupo compacto y D^G son las **1-densidades límite** (cuando $N \rightarrow \infty$) dadas, según sea el caso, por

$$\begin{aligned} D^U(x) &= 1 \\ D^{\text{SO}^+}(x) &= 1 + \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2\pi x} \\ D^{\text{SO}^-}(x) &= 1 - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2\pi x} + \delta_0(x) \\ D^{\text{USp}}(x) &= 1 - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2\pi x}. \end{aligned}$$

Será conveniente tener fórmulas duales para las 1-densidades límite. Sea $I(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ la función característica del intervalo unitario. Es bien conocido que $\widehat{I} = \delta$ (en el sentido de distribuciones).

Con estas definiciones es evidente la siguiente relación (en sentido de distribuciones):

$$\frac{1}{2} I(u) = \frac{\widehat{\text{sen}(2\pi u)}}{2\pi u}.$$

Gracias a esta última propiedad se sigue directamente el siguiente teorema:

⁴Es posible generalizar el argumento de normalización para las n -densidad de niveles; sin embargo, para nuestros propósitos venideros esto no será necesario.

Proposición 2.24. *La transformada de Fourier para las 1-densidades límite está dada, según sea el caso, por:*

$$\begin{aligned}\widehat{D^U}(u) &= \delta_0(u) \\ \widehat{D^{SO^+}}(u) &= \delta_0(u) + \frac{1}{2}I(u) \\ \widehat{D^{SO^-}}(u) &= \delta_0(u) - \frac{1}{2}I(u) + 1 \\ \widehat{D^{USP}}(u) &= \delta_0(u) - \frac{1}{2}I(u).\end{aligned}$$

Nota 2.25. *Observe que los valores de $\widehat{D^{SO^+}}(u)$ y de $\widehat{D^{SO^-}}(u)$ concuerdan cuando $u \in (-1, 1)$.*

5.2. Distribución del j -ésimo eigenvalor.

Teorema 2.26. *Para $j \geq 1$, existen medidas ν_k^G sobre $[0, \infty)$ que dependen de la simetría de G tales que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_j^{G(N)} = \nu_j^G,$$

en el sentido débil, es decir, que la convergencia se da por medio de sus funciones de distribución.

DEMOSTRACIÓN. Sea $E_n^{G(N)}(s)$ la medida del conjunto de matrices $X \in G(N)$ que tienen exactamente n eigenvalores en el intervalo $[0, s]$. En primer lugar, demostremos que la medida así definida tiene una expresión en términos de determinante de Fredholm. Es decir, para $N \geq 2$ y $s \in [0, \sigma\pi]$,

$$E_n^{G(N)}(s) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial T^n} \det(I + T\chi_{[0,s]}K_{G(N)}) \Big|_{T=-1}.$$

Observe que cuando $n > N$, $E_n^{G(N)}(s) = 0$. Mientras que el lado derecho de la expresión anterior es 0 debido a que el determinante es un polinomio en T de grado a lo más N . Por lo tanto, en lo que sigue, supondremos que $0 \leq n \leq N$.

Para simplificar la notación, pongamos

$$A_k = \int_{[0,s]^k} \det_{k \times k}(K_{G(N)}(x_i, x_j)) \prod_{m=1}^k \frac{dx_m}{\sigma\pi}.$$

Comencemos observando que la medida $E_n^{G(N)}(s)$ es igual a

$$\frac{1}{n!(N-n)!} \int_{[0,s]^n \times [0,\sigma\pi]^{N-n}} \prod_{i=n+1}^N (1 - \chi_{[0,s]}(\theta_i)) \det_{N \times N}(K_{G(N)}(\theta_i, \theta_j)) \prod_{m=1}^N \frac{d\theta_m}{\sigma\pi}.$$

Observe lo siguiente,

$$\prod_{i=n+1}^N (1 - \chi_{[0,s]}(\theta_i)) = \sum_{k=0}^{N-n} (-1)^k \sum_{\substack{J \subset \{n+1, \dots, N\} \\ \#J=k}} \prod_{j \in J} \chi_{[0,s]}(\theta_j).$$

Debido a la simetría de $\det_{N \times N}(K_{G(N)}(\theta_i, \theta_j))$, la integral de arriba es independiente de la elección particular del subconjunto J . Por lo tanto, aplicando el lema de Gaudin,

$$\int_{[0,s]^{n+k} \times [0,\sigma\pi]^{N-n-k}} \det_{N \times N}(K_{G(N)}(\theta_i, \theta_j)) \prod_{m=1}^N \frac{d\theta_m}{\sigma\pi} = (N-n-k)! A_{n+k}.$$

Así,

$$\begin{aligned} E_n^{G(N)}(s) &= \frac{1}{n!(N-n)!} \sum_{k=0}^{N-n} (-1)^k \binom{N-n}{k} (N-n-k)! A_{n+k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-n} (-1)^k \frac{A_{n+k}}{n!k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k}{n} \frac{A_{n+k}}{(n+k)!}, \end{aligned}$$

que es el valor de $T = -1$ de

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} T^k \binom{n+k}{n} \frac{A_{n+k}}{(n+k)!} &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial T^n} \sum_{k=0}^{\infty} T^{n+k} \frac{A_{n+k}}{(n+k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial T^n} \sum_{l=0}^{\infty} T^l \frac{A_l}{l!}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad anterior queda demostrada.

Ahora, observe la siguiente relación de eventos,

$$\{X : \theta_j > s\} = \bigcup_{n=0}^{j-1} \{X : \theta_j \in [0, s], \text{ para exactamente } n \text{ índices}\}.$$

Así,

$$\int_s^{\infty} \nu_j^{G(N)}(x) dx = \sum_{n=0}^{j-1} E_n^{G(N)}(s).$$

Por lo tanto

$$\nu_j^{G(N)}(s) = -\frac{d}{ds} \sum_{n=0}^{j-1} E_n^{G(N)}(s).$$

Rescalando apropiadamente a los ángulos, la teoría de Fredholm permite tomar el límite $N \rightarrow \infty$, obteniendo finalmente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v_j^{G(N)}(s) = v_j^G(s)$$

en donde

$$v_j^G(s) = -\frac{d}{ds} \sum_{n=0}^{j-1} E_n^G(s),$$

con

$$E_n^G(s) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial T^n} \det(I + T \chi_{[0,s]} K_G) \Big|_{T=-1}.$$

□

Nota 2.27. Observe que las medidas $E_n^U(s)$ coinciden justamente con la expresión que definen a las medidas de Gaudin. Se puede demostrar ([26] capítulo 7) que las medidas v_j^G son de probabilidad sobre $[0, \infty)$. El desarrollo de Taylor alrededor del 0 de las densidades en $j = 1$ están dadas por

$$v_1^U(s) = 1 - \frac{\pi^2}{9} s^3 + O(s^5)$$

$$v_1^{\text{SO}^+}(s) = 2 - \frac{2\pi^2}{3} s^2 + O(s^4)$$

$$v_1^{\text{USp}}(s) = v_1^{\text{SO}^-}(s) = \frac{\pi^2}{3} s^2 + O(s^4).$$

La anulación de orden 2 muestra que el punto crítico 1 tiende a repeler (de forma cuadrática) a los eigenvalores de matrices ortogonales impares o simplécticas. En el caso unitario u ortogonal par, tal fenómeno no existe y las matrices de este tipo pueden tener eigenvalores muy cercanos al punto crítico 1; además, las matrices ortogonales pares tienden a tener más (de hecho el doble) de eigenvalores en una vecindad de 1 que las matrices unitarias.

Correlación de parejas de ceros de la función zeta

En 1972, Hugh Montgomery y Freeman Dyson descubrieron una sorprendente relación entre la teoría de la función zeta de Riemann y la teoría de matrices aleatorias. El propósito de este capítulo es el de examinar esta notable relación dando una demostración detallada sobre el teorema de la correlación de parejas de ceros de la función zeta de Riemann [34]. Así que antes de precisar los resultados, demos una visión general sobre la definición y algunas propiedades de esta función. Para detalles sobre lo que se expondrá, el lector puede consultar [8].

1. La función zeta de Riemann

Definición 3.1. La función zeta de Riemann $\zeta(s)$ de una variable compleja s se define por medio de la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 1,$$

en donde el producto es sobre el conjunto de los números primos.

Un hecho notable acerca de esta función, provado por Riemann en 1859, es que admite una continuación analítica al plano complejo que además satisface una ecuación funcional.

Teorema 3.2. La función ζ admite una continuación analítica a $\mathbb{C} - \{1\}$ la cual satisface la ecuación funcional

$$\xi(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \xi(1-s).$$

Los ceros de $\zeta(s)$ se encuentran en los enteros pares estrictamente negativos correspondientes a los polos de $\Gamma(s/2)$, estos puntos de anulación son llamados *ceros triviales*. La ecuación funcional implica que los demás ceros se encuentran en la *banda crítica* $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$. A estos ceros les llamaremos *ceros no triviales*.

Por la simetría $\xi(s) = \xi(\bar{s})$ tenemos que ρ , en la banda crítica, es un cero de $\xi(s)$ si y sólo si $\bar{\rho}$, $1 - \bar{\rho}$ son también ceros de $\xi(s)$. Así pues, los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se distribuyen simétricamente con respecto al eje real y a la recta $\text{Re}(s) = 1/2$. Denotemos a los ceros no triviales de $\zeta(s)$ por

$$\rho = \frac{1}{2} + i\gamma.$$

De lo anterior es claro que $|\operatorname{Im}(\gamma)| \leq 1/2$. Hadamard y de la Vallée-Poussin en sus pruebas independientes del Teorema del Número Primo, establecieron que $|\operatorname{Im}(\gamma)| < 1/2$. Con esto en mente, mencionamos la famosa *Hipótesis de Riemann* (HR):

Conjetura 3.3 (Hipótesis de Riemann). *Todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se encuentran en la línea crítica $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.*

2. La Ley Montgomery-Odlyzko

La certidumbre o falsedad de la HR tiene gran influencia sobre la distribución de los números primos. De hecho, la hipótesis es equivalente a la afirmación de que el término de error en el Teorema del Número Primo,

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right),$$

en donde $\pi(x)$ se define en C.4, tiene un orden de magnitud de $O(x^{1/2+\epsilon})$ para cualquier $\epsilon > 0$.

Varias aproximaciones se han sugerido para probar HR. Una de ellas es una conjetura establecida por Hilbert y Pólya la cual predice una correspondencia entre los ceros de ζ y son los eigenvalores de algún operador hermitiano. Esta predicción ha ganado terreno después de una inesperada conexión entre ζ y la teoría de matrices aleatorias que fue descubierta durante un encuentro entre Hugh Montgomery y Freeman Dyson en 1972. A continuación discutimos los resultados obtenidos por Montgomery.

Primero, gracias a la simetría de la función zeta, consideremos solamente a aquellos ceros que se encuentran sobre la línea crítica por encima del eje real.

Nota 3.4. *En todo lo que resta del capítulo, asumiremos la HR. Cuando queramos hacer énfasis lo haremos de forma explícita.*

Asúmase HR; con lo cual, podemos ordenar a los ceros ¹ de la forma:

$$\dots \gamma_{-1} \leq 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \dots$$

Entonces, $\gamma_j = -\gamma_{-j}$ para $j = 1, 2, \dots$. Denotemos por $N(T)$ al número de ceros que se encuentran en el intervalo $[0, T]$, es decir

$$N(T) := \#\{j : 0 \leq \gamma_j \leq T\}$$

Entonces, se tiene la fórmula asintótica [8]:

$$N(T) \sim \frac{T \log T}{2\pi}, \quad T \rightarrow \infty.$$

¹En este contexto, es conveniente usar la palabra cero para referirnos a las partes imaginarias de ρ .

En particular, el hueco promedio entre los ceros tiende a cero cuando $j \rightarrow \infty$. Para examinar las leyes entre los huecos locales de estos números, normalizamos como sigue:

$$\tilde{\gamma}_j = \frac{\gamma_j \log \gamma_j}{2\pi}, \quad j \geq 1.$$

Para establecer los resultados, introduzcamos la siguiente definición (comparar con 2.14):

Definición 3.5. *La correlación de parejas para los ceros de $\zeta(s)$ en $|\text{Im } s| \leq T$ está dada, para una función suave y de decaimiento rápido f , por*

$$R_2^{(T)}(f) = \frac{1}{N(T)} \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} f\left(\frac{\log T}{2\pi}(\gamma - \gamma')\right) \frac{4}{4 - (\gamma - \gamma')^2}.$$

Específicamente, Montgomery demostró el siguiente resultado:

Teorema 3.6 (Montgomery). *Asúmase HR. Sea f una función de clase Schwartz cuya transformada de Fourier está soportada en $(-1, 1)$. Entonces*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_2^{(T)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) r_2^{\text{GUE}}(x) dx.$$

Es decir, la correlación de parejas de ceros de ζ está dictado por $r_2^{\text{GUE}}(x)$ (ver sección 6 del capítulo 1) al menos para funciones prueba cuya transformada de Fourier está soportada en $(-1, 1)$.

En un nivel fenomenológico este es, tal vez, el descubrimiento más impactante alrededor de la función zeta desde Riemann.

Nota 3.7. *La importancia del intervalo $(-1, 1)$ está en el hecho de que $\widehat{r_2^{\text{GUE}}}(x)$ cambia su carácter analítico en $x = \pm 1$, y esto significa que para aquellas \widehat{f} cuyo soporte se encuentra fuera del intervalo $(-1, 1)$ habrá nuevos términos que no están en la diagonal que contribuirán al término principal. Para una extensión del soporte de \widehat{f} , es necesario conocer los términos fuera de la diagonal. Para ello, se debe comprender a las sumas del tipo*

$$\sum_{n, d} \frac{\Lambda(n)\Lambda(n+d)}{n},$$

es decir, la correlación entre los números primos. Más precisamente, Goldston y Montgomery [18] demostraron que si se conoce el equivalente

$$\int_1^X \left[\sum_{x < n \leq x+h} \Lambda(n) - h \right]^2 dx \sim hX \log \frac{X}{h},$$

donde $1 \leq h \leq X^{1-\epsilon}$ y $X \rightarrow \infty$.

De esta forma, podemos extender el soporte de \widehat{f} tanto como queramos.

La conjetura de Montgomery afirma que el teorema 3.6 es válido sin restricción alguna sobre el soporte de f o, equivalentemente,

Conjetura 3.8 (Conjetura de Montgomery). *Asúmase HR. Para $a, b \in (0, \infty)$ se cumple que*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(T)} \#\{(\gamma, \gamma') : \gamma, \gamma' \in [0, T], a \leq \tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}' \leq b\} = \int_a^b r_2^{\text{GUE}}(u) du.$$

De aquí surge la observación de Dyson² sobre la coincidencia entre la correlación de parejas de eigenvalores de una matriz en GUE y la correlación de parejas de ceros de ζ (ver sección 6 del capítulo 1).

El conocimiento de las n -correlación de niveles para toda $n \geq 2$ determina a todas las leyes de los huecos locales y en particular los huecos k -consecutivos. Hejhal [20] demostró que la 3-correlación coincide con las de GUE y por Rudnick y Sarnak [40] probaron el mismo resultado para n en general. Todos estos resultados con las mismas restricciones sobre la función prueba f .

Una vez que la conexión fue establecida, se ha conjeturado que la distribución de huecos de ceros de ζ coinciden con aquellos de GUE. Esto ha sido establecido numéricamente por Odlyzko [36] quien, inspirado por los resultados de Montgomery, ha encontrado una excelente coincidencia con las predicciones de GUE. En particular, Odlyzko ha confirmado la coincidencia entre la predicción $\mu_1^{\text{GUE}}(s)$ (ver sección 7 del capítulo 1) y datos empíricos de los ceros de ζ . Más generalmente, se espera, aunque más difícil de probar numéricamente, que la predicción de μ_k^{GUE} concuerde con los datos para los ceros de ζ .

De este modo, gracias a los resultados analíticos obtenidos por una parte por Montgomery para la correlación de parejas y por Rudnick-Sarnak para las n -correlación de ceros de ζ junto con la evidencia experimental de Odlyzko, se puede establecer la siguiente conjetura:

Conjetura 3.9 (Ley Montgomery-Odlyzko). *La distribución de huecos entre ceros de la función $\zeta(s)$ es, estadísticamente, idéntica a la distribución de huecos entre eigenvalores de GUE. Es decir que para cualquier función prueba $f \in C(\mathbb{R}_+)$,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(T)} \sum_{j \in [0, T]} f(\tilde{\gamma}_{j+k} - \tilde{\gamma}_j) = \int f(x) \mu_k^{\text{GUE}}(x) dx.$$

²En realidad, la observación de Dyson surgió en el estudio de eigenvalores en la Familia Circular Unitaria (o $U(N)$). Sin embargo, como hicimos notar en el capítulo anterior (ver nota 2.16)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{U(N)} \frac{\#\{(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}') : \tilde{\theta} - \tilde{\theta}' \in [a, b]\}}{N} dX = \int_a^b r_2^{\text{GUE}}(u) du,$$

es decir, que la correlación de parejas de la Familia Circular Unitaria (y de hecho del grupo unitario) es igual, asintóticamente, que la de GUE.

3. Demostración del Teorema de Montgomery

El objetivo ahora es dar una demostración al teorema 3.6. El punto de partida del trabajo de Montgomery fue estudiar el comportamiento asintótico de la distribución de los huecos de ceros consecutivos de la función zeta. Más precisamente, encontrar una fórmula asintótica para la función definida por

$$F(\alpha, T) = \frac{1}{N(T)} \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} T^{i\alpha(\gamma - \gamma')} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T \geq 2$, conforme $T \rightarrow \infty$. Esto se sigue debido al siguiente resultado:

Proposición 3.10. *Sea f una función de clase Schwartz. Entonces,*

$$\sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} f\left(\frac{\log T}{2\pi}(\gamma - \gamma')\right) \frac{4}{4 - (\gamma - \gamma')^2} = \frac{T \log T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, T) \widehat{f}(\alpha) d\alpha.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de $F(\alpha, T)$,

$$\begin{aligned} \frac{T \log T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, T) \widehat{f}(\alpha) d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} T^{i\alpha(\gamma - \gamma')} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2} \widehat{f}(\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) e^{2\pi i \alpha (\gamma - \gamma') \frac{\log T}{2\pi}} d\alpha \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} f\left(\frac{\log T}{2\pi}(\gamma - \gamma')\right) \frac{4}{4 - (\gamma - \gamma')^2}. \end{aligned}$$

□

Concretamente, el trabajo principal de Montgomery consiste en el siguiente teorema:

Teorema 3.11 (Teorema de Montgomery versión dual). *Asúmase HR. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $T \geq 2$, $F(\alpha, T)$ es real y $F(\alpha, T) = F(-\alpha, T)$. Además, conforme $T \rightarrow \infty$:*

$$F(\alpha, T) = (1 + o(1)) T^{-2|\alpha|} \log T + |\alpha| + o(1)$$

uniformemente para $|\alpha| \leq 1 - \epsilon$ ³.

Vale hacer mención que Montgomery demostró que la fórmula asintótica para $F(\alpha, T)$ no es válida para $|\alpha| > 1$. Sin embargo, describió argumentos heurísticos los cuales sugieren que, conforme $T \rightarrow \infty$,

$$F(\alpha, T) = 1 + o(1)$$

uniformemente sobre intervalos acotados $1 \leq \alpha \leq M$.

³De hecho, Goldston y Montgomery [18], demostraron que el teorema sigue siendo válido para $|\alpha| \leq 1$.

Esta conjetura junto con el teorema de Montgomery 3.11 equivalen, esencialmente, a la conjetura 3.8.

Para más información sobre la conjetura de Montgomery, sus equivalencias y aplicaciones, remitimos al lector al artículo de Goldston “Notes on Pair Correlation” que se encuentra en el volumen [32].

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE MONTGOMERY 3.6. Supongamos por el momento la validez del teorema de Montgomery en su versión dual (la siguiente sección está dedicada a su prueba). Entonces, conforme $T \rightarrow \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) F(\alpha, T) d\alpha = \int_{-1}^1 \widehat{f}(\alpha) \left[(1 + o(1)) T^{-2|\alpha|} \log T + |\alpha| + o(1) \right] d\alpha.$$

Es claro que, si definimos

$$G(\alpha, T) = F(\alpha, T) - T^{-2|\alpha| \log T} - |\alpha|,$$

entonces

$$\int_{-1}^1 \widehat{f}(\alpha) G(\alpha, T) d\alpha = o(1).$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) F(\alpha, T) d\alpha = \int_{-1}^1 \widehat{f}(\alpha) \left[T^{-2|\alpha|} \log T + |\alpha| \right] d\alpha.$$

Haciendo expansión de Taylor alrededor del 0,

$$\begin{aligned} \log T \int_{-1}^1 \widehat{f}(\alpha) T^{-2|\alpha|} d\alpha &= \int_{-1}^1 \left(\widehat{f}(0) + O(|\alpha|) \right) T^{-2|\alpha|} \log T d\alpha \\ &= \widehat{f}(0) \int_{-\log T}^{\log T} e^{-2|u|} du + O \left(\int_{-1}^1 |\alpha| T^{-2|\alpha|} \log T d\alpha \right) \\ &= \widehat{f}(0) (1 - T^{-2}) + O \left(\frac{1}{\log T} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, conforme $T \rightarrow \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) F(\alpha, T) d\alpha = \widehat{f}(0) + \int_{-1}^1 \widehat{f}(\alpha) |\alpha| d\alpha + O \left(\frac{1}{\log T} \right).$$

Observemos que, utilizando Plancherel, la integral la integral anterior se puede reinterpretar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \widehat{f}(\alpha) |\alpha| d\alpha &= f(0) - \int_{-1}^1 (1 - |\alpha|) \widehat{f}(\alpha) d\alpha \\ &= f(0) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

en donde lo último fue debido a que la función

$$k(x) = \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \right)^2$$

tiene por transformada de Fourier

$$\widehat{k}(\alpha) = (1 - |\alpha|)\chi_{[-1,1]}.$$

Recordando que $N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T$, se sigue de la proposición 3.10 que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(T)} \sum_{\substack{\gamma, \gamma' \in [0, T] \\ \gamma \neq \gamma'}} f\left(\frac{\log T}{2\pi}(\gamma - \gamma')\right) \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2} \\ = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(1 - \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos simplificar esta última expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(0) \sum_{\substack{\gamma, \gamma' \in [0, T] \\ \gamma = \gamma'}} 1 + \sum_{\substack{\gamma, \gamma' \in [0, T] \\ \gamma \neq \gamma'}} f\left(\frac{\log T}{2\pi}(\gamma - \gamma')\right) \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2} \\ = \frac{T \log T}{2\pi} f(0) + \frac{T \log T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(1 - \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right) dx, \end{aligned}$$

de donde se sigue el teorema 3.6. □

4. Demostración del Teorema de Montgomery versión dual

Antes que nada, el hecho de que $F(\alpha, T)$ es real y simétrica en la variable α , se sigue de observar que, para cualquier α real y $T \geq 2$,

$$\overline{F(\alpha, T)} = F(\alpha, T) = F(-\alpha, T).$$

4.1. Fórmula Explícita. La clave para probar el teorema se encuentra en la *fórmula explícita*; una fórmula que relaciona sumas sobre ceros con sumas números primos. Existen distintas versiones de la fórmula explícita (ver [8] capítulo 17). Aquí usaremos, la dada por Montgomery ⁴.

⁴Puede darse una demostración alternativa del teorema 3.6 recurriendo a una fórmula explícita suavizada como en la proposición 5.10.

Proposición 3.12 (Fórmula Explícita). *Asúmase HR⁵. Si $1 < \sigma < 2$ y $x \geq 1$ entonces*

$$(2\sigma - 1) \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + (t - \gamma)^2} = -x^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \right] \\ + x^{\frac{1}{2}-\sigma+it} \left(\log(|t| + 2) + O_{\sigma}(1) \right) + O_{\sigma} \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{|t| + 2} \right)$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos con la fórmula explícita dada por Riemann (ver por ejemplo [30]). Para $x > 1$ real, $x \neq p^n$ y para $s \in \mathbb{C}$ con $s = \sigma + it$, $s \neq 1$, $s \neq \rho$, $s \neq -2n$,

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-s}}{\rho-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s}.$$

Esta relación se satisface independientemente de HR. Sin embargo, suponiéndola, podemos escribir $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ y de esta manera obtener,

$$\sum_{\gamma} \frac{x^{\frac{1}{2}+i\gamma-s}}{\frac{1}{2} + i\gamma - s} = -\left[\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s} \right].$$

Reordenando términos

$$\sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma-it}}{\sigma - \frac{1}{2} + it - i\gamma} = x^{\sigma-\frac{1}{2}} \left[\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-s}}{2n+s} \right].$$

Por otro lado, si $s = 1 - \sigma + it$,

$$\sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma-it}}{\frac{1}{2} - \sigma + it - i\gamma} = x^{\frac{1}{2}-\sigma} \left[\frac{\zeta'}{\zeta}(1 - \sigma + it) + \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{1-\sigma+it}} - \frac{x^{\sigma-it}}{\sigma-it} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n-1+\sigma-it}}{2n+1-\sigma+it} \right].$$

⁵El rol de la HR es, en realidad, notacional. Recientemente, una nueva notación ha emergido de manera más conveniente. Escribimos los ceros de ζ como $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ con $\gamma \in \mathbb{C}$, de modo que γ es complejo cuando se encuentra fuera de la recta crítica $\frac{1}{2}$. Así, la HR equivale a decir que $\gamma \in \mathbb{R}$. Con esta notación, la prueba de la proposición no cambia y se sigue sosteniendo incondicionalmente. Sin embargo, ya que el tamaño de los términos que ocurren en la suma sobre ceros son de importancia, la HR es necesaria.

Restando esta última ecuación con la previa y aplicando el lema C.1, se obtiene la fórmula,

$$\begin{aligned} (2\sigma - 1) \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + (t - \gamma)^2} &= -x^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{1-\sigma+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma+it} \right] \\ &\quad - x^{\frac{1}{2}-\sigma+it} \frac{\zeta'}{\zeta}(1 - \sigma + it) + \frac{x^{\frac{1}{2}}(2\sigma - 1)}{(\sigma - 1 + it)(\sigma - it)} \\ &\quad - x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}(2\sigma - 1)}{(2n + \sigma + it)(\sigma - 1 - 2n - it)}. \end{aligned}$$

Ambos lados de la ecuación son continuas para toda $x \geq 1$, así que no excluirémos mas los valores $x = 1$ y $x = p^n$.

Para $1 < \sigma < 2$ (ver Davenport [8] capítulo 12),

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(1 - \sigma + it) &= -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma - it) - \log(|t| + 2) + O_{\sigma}(1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma+it} - \log(|t| + 2) + O_{\sigma}(1) \\ &= -\log(|t| + 2) + O_{\sigma}(1). \end{aligned}$$

Acotando los términos,

$$x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-2n}(2\sigma - 1)}{(2n + \sigma + it)(\sigma - 1 - 2n - it)} \ll_{\sigma} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\log(|t| + 2)}$$

y

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}(2\sigma - 1)}{(\sigma - 1 + it)(\sigma - it)} \ll_{\sigma} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\log(|t| + 2))^2},$$

llegamos al resultado deseado. \square

Pongamos $\sigma = 3/2$ en la fórmula explícita 3.12 para así obtener:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{1 + (t - \gamma)^2} &= -x^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{2}+it} \right] \\ &\quad + x^{-1+it} \left(\log(|t| + 2) + O(1) \right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}(|t| + 2)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Denotemos a esta igualdad por

$$L(x, t) = R(x, t).$$

¿Cómo podemos extraer información de la fórmula explícita? Montgomery estaba interesado en estudiar la distribución de las diferencias de parejas de ceros,

y por esta razón es necesario estimar $L(x, t)$. Sería bueno poder tener esta distribución en un intervalo de longitud uno alrededor de t . Empero, es intratable por la dependencia de t en la suma sobre primos. Para eludir el problema, integramos con respecto a t para obtener nuestra distribución en un rango más grande.

$$\int_0^T |L(x, t)|^2 dt = \int_0^T |R(x, t)|^2 dt.$$

Lo que sigue es analizar cada lado de la fórmula explícita.

4.2. $\int_0^T |L(x, t)|^2 dt$. Primero,

$$\begin{aligned} \int_0^T |L(x, t)|^2 dt &= \int_0^T L(x, t) \overline{L(x, t)} dt \\ &= 4 \int_0^T \sum_{\gamma, \gamma'} \frac{x^{i(\gamma - \gamma')}}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} dt \end{aligned}$$

Ahora bien, nos fijamos en aquellos ceros γ, γ' que se encuentran en el intervalo $[0, T]$ para T fijo. Consideremos tales ceros en la integral. Para hacer esto, aislemos la contribución que resulta de aquellas parejas de ceros γ, γ' tales que al menos uno de ellos no se encuentre en el intervalo $[0, T]$ para luego acotar esta contribución, permitiéndonos así, concentrarnos en la contribución a la integral solo de aquellos ceros $\gamma, \gamma' \in [0, T]$.

Dicho lo anterior, es necesario encontrar una aproximación para

$$\sum_{\gamma \notin [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \text{ y } \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2}.$$

Para estos fines será de utilidad el siguiente lema, cuya prueba puede encontrarse en [8] capítulo 15.

Lema 3.13. *Asúmase HR. Para $T \geq 2$,*

$$N(T + 1) - N(T) = \sum_{T < \gamma \leq T + 1} 1 = O(\log T).$$

Lema 3.14. *Para $t \in [0, T]$,*

$$\sum_{\gamma \notin [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \ll \left(\frac{1}{t + 1} + \frac{1}{T - t + 1} \right) \log T.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que $T \geq 2$ (de hecho, el primer cero se encuentra en 14.134725...) por lo que podemos aplicar el lema 3.13 para obtener

una cota superior para el número de ceros en cada intervalo de la forma $[k, k + 1]$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{\gamma \notin [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} &\ll \sum_{k=T}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{1 + (t - x)^2} dN(x) \\
 &\ll \frac{\log T}{1 + (t - T)^2} + \sum_{k=T+1}^{\infty} \frac{\log k}{1 + (t - k)^2} \\
 &\ll \frac{\log T}{1 + (t - T)^2} + \int_{T+1}^{\infty} \frac{\log x}{1 + (x - t)^2} dx \\
 &\ll \frac{\log T}{1 + (t - T)^2} + \int_{T+1}^{\infty} \frac{\log x}{(x - t)^2} dx \\
 &= \frac{\log T}{1 + (t - T)^2} + \frac{\log(T + 1)}{t} + \frac{\log(T + 1)}{T + 1 - t} - \frac{\log((T + 1) - t)}{t}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, debido a que $t \in [0, T]$, observamos que el segundo y tercer término de la cota dominan al primero y cuarto. Por lo tanto, se sigue la afirmación del lema. \square

Lema 3.15. Para $t \in [0, T]$

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \ll \log T.$$

DEMOSTRACIÓN. La afirmación se sigue del lema 3.14 como sigue. Para $T \geq T_0$ con $T_0 \in [2, 14]$ fija,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} &= \sum_{\gamma > 14} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \\
 &= \sum_{\gamma \notin [0, T_0]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \\
 &\ll \left(\frac{1}{t + 1} + \frac{1}{T_0 - t + 1} \right) \log T_0.
 \end{aligned}$$

\square

Ya que el peso en $L(x, t)$ será pequeño cuando $|t - \gamma|$ sea grande, que es el caso sobre la mayor parte del rango de integración a menos que $\gamma \in (0, T]$, podemos restringir la suma a este rango con un error pequeño. Entonces, con la suma restringida a los ceros $\gamma \in (0, T]$, podemos extender el rango de integración a todo \mathbb{R} produciendo un error no significativo.

Proposición 3.16.

$$\int_0^T |L(x, t)|^2 dt = 4 \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} x^{i(\gamma - \gamma')} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} + O(\log^3 T).$$

DEMOSTRACIÓN. De los lemas 3.14 y 3.15,

$$\begin{aligned} \int_0^T |L(x, t)|^2 dt &= 4 \int_0^T \sum_{\gamma, \gamma'} x^{i(\gamma - \gamma')} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} \\ &= 4 \int_0^T \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} x^{i(\gamma - \gamma')} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} \\ &\quad + 8 \int_0^T \left(\sum_{\gamma \notin [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \right) \left(\sum_{\gamma'} \frac{1}{1 + (t - \gamma')^2} \right) dt \\ &\ll 4 \int_0^T \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} x^{i(\gamma - \gamma')} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} \\ &\quad + \int_0^T \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{T-t+1} \right) \log T \cdot \log T dt \\ &= 4 \int_0^T \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} x^{i(\gamma - \gamma')} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} + O(\log^3 T). \end{aligned}$$

Veamos cómo es la contribución a la suma si se extiende el dominio de integración. Usando el lema 3.13, para cualquier $j \in [2, T]$, la siguiente cota es válida para $t \in [T, \infty)$

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} &= \sum_{k=j}^{T-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{1 + (t - x)^2} dN(x) \\ &\leq \log T \sum_{k=j}^{T-2} \frac{1}{1 + (t - (k+1))^2} + \frac{\log T}{1 + (t - T)^2} \\ &\ll \log T \int_j^{T-2} \frac{dx}{(t - (x+1))^2} + \frac{\log T}{1 + (t - T)^2} \\ &\ll \left(\frac{1}{|t - T + 1|} + \frac{1}{|1 - t|} + \frac{1}{|1 + (t - T)^2|} \right) \log T \\ &\ll \frac{1}{|t - T + 1|} \log T. \end{aligned}$$

También, de manera completamente análoga, para $t \in (-\infty, 0]$

$$\sum_{\gamma \in [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \ll \frac{1}{|t - T + 1|} \log T.$$

Con esto, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_T^\infty \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} \\ &= \int_T^\infty \left(\sum_{\gamma \in [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \right) \left(\sum_{\gamma' \in [0, T]} \frac{1}{1 + (t - \gamma')^2} \right) dt \\ &\ll \log^2 T \int_T^\infty \frac{dt}{(t - T + 1)^2} \\ &\ll \log^2 T, \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\int_{-\infty}^0 \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} \ll \log^2 T.$$

Por lo tanto, se logra extender el dominio de integración a todo \mathbb{R} produciendo un error de magnitud $\log^3 T$ proporcionando así, el resultado deseado. \square

Usando el teorema del residuo, se puede calcular explícitamente la integral ahora extendida en términos de γ y γ' . Este cálculo es importante ya que justifica el factor de peso en la definición de $F(\alpha, T)$. Más precisamente, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.17. Para $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} = \frac{\pi}{2} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Definimos a la función f de variable compleja z como

$$f(z) = \frac{1}{(1 + (z - \gamma)^2)(1 + (z - \gamma')^2)}.$$

Sea Γ el segmento de línea $[-R, R]$ y el semicírculo $\{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ en la dirección contraria a las manecillas del reloj. Integramos a f sobre Γ para así obtener

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)} \\ &\quad + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{(1 + (Re^{i\theta} - \gamma)^2)(1 + (Re^{i\theta} - \gamma')^2)}. \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando R tiende a infinito

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{(1 + (Re^{i\theta} - \gamma)^2)(1 + (Re^{i\theta} - \gamma')^2)} \right| \\ & \leq \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{(R^2 - c)(R^2 - c')} \\ & \leq \frac{\pi R}{R^4 - c''} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

por lo que la integral sobre el arco se anula, dejándonos así

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1 + (t - \gamma)^2)(1 + (t - \gamma')^2)}.$$

Para calcular la integral haremos uso del teorema del residuo. De los cuatro polos de f , $z_{1,2} = \pm i + \gamma$ y $z_{3,4} = \pm i + \gamma'$, solo $i + \gamma$ e $i + \gamma'$ están contenidos en el contorno de Γ . El residuo en el polo $z = i + \gamma$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i + \gamma) &= \lim_{z \rightarrow i + \gamma} \frac{(z - (i + \gamma))}{(1 + (z - \gamma)^2)(1 + (z - \gamma')^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow i + \gamma} \frac{(z - (i + \gamma))}{(1 + (z + i\gamma))(1 + (z - i\gamma))(1 + (z + i\gamma'))(1 + (z - i\gamma'))}. \end{aligned}$$

Note que $(1 + i(z - \gamma)) = i(z - (i + \gamma))$. Entonces,

$$\text{Res}(f, i + \gamma) = \frac{-1}{2(\gamma - \gamma')(2 - i(\gamma - \gamma'))}.$$

Por simetría, el polo $z = i + \gamma'$ tiene residuo

$$\text{Res}(f, i + \gamma') = \frac{-1}{2(\gamma' - \gamma)(2 - i(\gamma' - \gamma))}.$$

Por el teorema del residuo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)dz &= 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}(f, z_j) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2}. \end{aligned}$$

□

Pongamos $x = T^\alpha$ para $T \geq 2$ y α cualquier número real. De la definición de $F(\alpha, T)$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T |L(T^\alpha, t)|^2 dt &= 2\pi \sum_{\gamma, \gamma' \in [0, T]} T^{i\alpha(\gamma - \gamma')} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2} + O(\log^3 T) \\ &= F(\alpha, T) \cdot T \log T + O(\log^3 T). \end{aligned}$$

4.3. $\int_0^T |R(x, t)|^2 dt$. Recordemos la expresión de $R(x, t)$,

$$R(x, t) := -x^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{2}+it} \right] \\ + x^{-1+it} \left(\log(|t| + 2) + O(1) \right) + O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{|t| + 2}\right).$$

Escribamos esta ecuación como $R(x, t) = A(x, t) + B(x, t) + C(x, t) + D(x, t)$.

Se quiere encontrar una cota para la integral $\int_0^T |R(x, t)|^2 dt$. Para lograr el cometido, empleamos el siguiente lema, el cual es una consecuencia directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Lema 3.18. *Supongamos que*

$$\int_0^T |A_k(t)|^2 dt = M_k$$

para $k = 1, \dots, n$. Supóngase también que $M_n \leq M_{n-1} \leq \dots \leq M_2 \leq M_1$. Entonces

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^n A_k(t) \right|^2 dt = M_1 + O(\sqrt{M_1 M_2}).$$

Para poder aplicar el lema 3.18, es necesario dar una cota para cada término individual:

$$A(T) := \frac{1}{x} \int_0^T \left| \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}+it} + \sum_{n > x} \Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{2}+it} \right|^2 dt$$

$$B(T) := \int_0^T \left| x^{-1+it} \log(|t| + 2) \right|^2 dt$$

$$C(T) := \int_0^T \left| x^{-1+it} O(1) \right|^2 dt$$

$$D(T) := \int_0^T \left| O\left(x^{\frac{1}{2}}(|t| + 2)^{-1}\right) \right|^2 dt.$$

Como se ve a continuación, no es difícil dar una cota para los términos $B(T)$, $C(T)$ y $D(T)$.

Para $B(T)$,

$$\begin{aligned} B(T) &= \int_0^T x^{-2} |\log(t+2)|^2 dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_2^{T+2} \log^2 t dt \\ &= \frac{T}{x^2} (\log^2 T + O(\log T)). \end{aligned}$$

Para $C(T)$,

$$\begin{aligned} C(T) &= O(x^{-2}) \int_0^T dt \\ &= O(Tx^{-2}). \end{aligned}$$

Finalmente, para $D(T)$,

$$\begin{aligned} D(T) &= O(x) \int_0^T (t+2)^{-2} dt \\ &= O(x). \end{aligned}$$

La cota de $A(T)$ requiere de un análisis más profundo. Primero, usamos la siguiente forma cuantitativa de la identidad de Parseval para series de Dirichlet [35],

$$\int_0^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-it} \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (T + O(n)),$$

con lo cual obtenemos,

$$\int_0^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) a_n(x) n^{-it} \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |\Lambda(n) a_n(x)|^2 (T + O(n)),$$

en donde

$$a_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{1}{2}} & n \leq x \\ \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{2}} & n > x. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$A(T) = \frac{T}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^2(n) a_n^2(x) + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^2(n) a_n^2 O(n).$$

Abreviemos la suma como $A(T) = A_1(T) + A_2(T)$.

En las siguientes líneas, utilizaremos el teorema del número primo con error suponiendo HR (ver definición C.2):

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x).$$

Comencemos con un lema que servirá de apoyo para lograr acotar los términos antes mencionados.

Lema 3.19. Para $x \geq 1$, se tiene

$$\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) = x \log x - x + O(x^{1/2} \log^3 x).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) &= \int_1^x \log t \, d\psi(t) \\ &= \psi(x) \log(x) - \int_1^x \psi(t) \frac{1}{t} dt \\ &= \left(x + O(x^{1/2} \log^2 x) \right) \log x - \int_1^x \left(t + O(t^{1/2} \log^2 t) \right) \frac{1}{t} dt \\ &= x \log x - x + O(x^{1/2} \log^3 x). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.20. Para $T \geq 2$ y $x \geq 1$,

$$A_1(T) = T \left(\log x + O(1) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Observe que,

$$A_1(T) = \frac{T}{x^2} \sum_{n \leq x} n \Lambda^2(n) + T x^2 \sum_{n > x} \frac{\Lambda^2(n)}{n^3}.$$

Por el lema 3.19,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} n \Lambda^2(n) &= \int_1^x t \, d \sum_{n \leq t} \Lambda^2(t) \\ &= \left(\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) \right) x - \int_1^x \sum_{n \leq t} \Lambda^2(n) dt \\ &= x^2 \log x - x^2 + O(x^{3/2} \log^3 x) - \int_1^x \left(t \log t - t + O(t^{1/2} \log^3 t) \right) dt. \end{aligned}$$

Evaluando la integral anterior, nos da como resultado

$$\int_1^x \left(t \log t - t + O(t^{1/2} \log^3 t) \right) dt = \frac{x^2}{2} \log x + O(x^2).$$

Entonces, se sigue la fórmula

$$\sum_{n \leq x} n \Lambda^2(n) = \frac{x^2}{2} \log x + O(x^2).$$

Nuevamente, por el lema 3.19

$$\begin{aligned} \sum_{n > x} \frac{\Lambda^2(n)}{n^3} &= \int_x^\infty \frac{1}{t^3} d \sum_{n \leq t} \Lambda^2(n) \\ &= \int_x^\infty \frac{\log t}{t^3} dt + \int_x^\infty \frac{1}{t^3} de(t) \\ &= \frac{\log x}{2x^2} - \frac{1}{x^2} + \int_x^\infty \frac{1}{t^3} de(t), \end{aligned}$$

con $e(t) \ll t^{1/2} \log^3 t$. Por otro lado, usando sumación por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{1}{t^3} de(t) &= -\frac{e(x)}{x^3} + 3 \int_x^\infty \frac{e(t)}{t^4} dt \\ &\ll x^{-1/2} \log x. \end{aligned}$$

Así, llegamos a que

$$\sum_{n > x} \frac{\Lambda^2(n)}{n^3} = \frac{\log x}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

de donde se sigue el resultado.

Proposición 3.21. Para $T \geq 2$ y $x \geq 1$,

$$A_2(T) = O(x \log x)$$

Por el lema 3.19, se tiene, haciendo caso omiso temporalmente de la constante implícita ya que no afectará alguno al resultado final,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} n \Lambda^2(n) O(n) &= \int_1^x t^2 d \sum_{n \leq t} \Lambda^2(n) \\ &= \left(\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) \right) x^2 - 2 \int_1^x t \sum_{n \leq t} \Lambda^2(n) dt \\ &= x^3 \log x - x^3 + O(x \log^3 x) - \int_1^x \left(t^2 \log t - t^2 + O(t^{3/2} \log^3 t) \right) dt. \end{aligned}$$

Evaluando la integral de esta última ecuación,

$$\int_1^x \left(t^2 \log t - t^2 + O(t^{3/2} \log^3 t) \right) dt = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{4x^3}{9} + O(x^{9/2}).$$

Observando que todos los términos se absorben en $O(x^3 \log x)$, concluimos que

$$\sum_{n \leq x} n \Lambda^2(n) O(n) = O(x^3 \log x).$$

Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n > x} \frac{\Lambda^2(n)}{n^3} O(n) &= \int_x^\infty \frac{1}{t^2} d \sum_{n \leq t} \Lambda^2(n) \\ &= \int_x^\infty \frac{\log t}{t^2} dt + \int_x^\infty \frac{1}{t^2} de(t) \\ &= \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x} + \int_x^\infty \frac{1}{t^2} de(t), \end{aligned}$$

con $e(t) \ll t^{1/2} \log^3 t$.

Sumando por partes,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} dh(t) &= -\frac{h(x)}{x^2} + 2 \int_x^\infty \frac{h(t)}{t^3} dt \\ &\ll \frac{\log x}{x}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n > x} \frac{\Lambda^2(n)}{n^3} O(n) = O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

y de aquí se deduce el resultado. □

Por lo tanto, de acuerdo a las proposiciones 3.20 y 3.21, la cota para $A(T)$ es

$$A(T) = T(\log x + O(1)) + O(x \log x).$$

Así, solo resta determinar el orden de magnitud de las cuatro cotas que se han obtenido:

$$M_1 = T(\log x + O(1)) + O(x \log x)$$

$$M_2 = \frac{T}{x^2} (\log^2 T + O(\log T))$$

$$M_3 = \left(\frac{T}{x^2}\right)$$

$$M_4 = O(x)$$

Consideremos tres casos:

- (i) $1 \leq x \leq \log^{3/4} T$
- (ii) $\log^{3/4} T < x \leq \log^{3/2} T$
- (iii) $\log^{3/2} T < x \leq T/\log T$

En el caso (i), M_2 es dominante:

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{T}{x^2} (\log^2 T + O(\log T)) \\ &\geq \frac{T}{\log^{3/2} T} \log^2 T + T \frac{O(\log T)}{\log^{3/2} T} \\ &= O(T \log^{1/2} T). \end{aligned}$$

Las demás cotas son, entonces, $o(M_2)$:

$$\begin{aligned} M_1 &\leq T \log(\log^{3/4} T) + O(T) + O(\log^{3/4} T \cdot \log(\log^{3/4} T)) \\ &= o(M_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &\leq T \log(\log^{3/4} T) + O(T) + O(\log^{3/4} T \cdot \log(\log^{3/4} T)) \\ &= o(M_2) \end{aligned}$$

Similarmente, en el caso (ii), los cuatro términos son $o(T \log T)$. En el caso (iii), $M_1 = T(\log x + O(1)) + O(x \log x)$ es dominante, mientras que los otros términos son $o(M_1)$.

Aplicamos el lema 3.18 a cada uno de los tres casos. En el caso (i),

$$\begin{aligned} \int_0^T |R(x, t)|^2 dt &= M_2 + O(\sqrt{M_2 M_1}) \\ &= (1 + o(1)) \frac{T}{x^2} \log^2 T. \end{aligned}$$

En el caso (ii),

$$\begin{aligned} \int_0^T |R(x, t)|^2 dt &= M_1 + O(\sqrt{M_2 M_1}) \\ &= o(T \log T). \end{aligned}$$

En el caso (iii),

$$\begin{aligned} \int_0^T |R(x, t)|^2 dt &= M_1 + O(\sqrt{M_2 M_1}) \\ &= (1 + o(1)) T \log x. \end{aligned}$$

En total,

$$\int_0^T |R(x, t)|^2 dt = (1 + o(1)) \frac{T}{x^2} \log^2 T + o(T \log T) + (1 + o(1)) T \log x,$$

para toda $x \in [1, T/\log T]$. Los tres casos anteriormente expuestos cubren el rango total de x , esto permite poner $x = T^\alpha$ para cualquier $\alpha \in [0, 1 - \epsilon]$ con $\epsilon > 0$, para

obtener la cota

$$\int_0^T |R(T^\alpha, t)|^2 dt = \left[(1 + o(1)) \frac{T}{T^{2\alpha}} \log T + \alpha + o(1) \right] T \log T$$

uniforme para $\alpha \in [0, 1 - \epsilon]$.

4.4. $\int_0^T |L(x, t)|^2 dt = \int_0^T |R(x, t)|^2 dt$. Finalmente, igualando ambas integrales con $x = T^\alpha$, se tiene

$$F(\alpha, T) T \log T + O(\log^3 T) = \left[(1 + o(1)) \frac{T}{T^{2\alpha}} \log T + \alpha + o(1) \right] T \log T,$$

conforme $T \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, se concluye que

$$F(\alpha, T) = (1 + o(1)) T^{-2\alpha} \log T + \alpha + 1,$$

cuando $T \rightarrow \infty$, para toda $\alpha \in [0, 1 - \epsilon]$ con $\epsilon > 0$.

Esto completa la prueba del teorema **3.11**.

Funciones- L y Matrices Aleatorias

En el capítulo anterior observamos que la ley Montgomery-Odlyzko indica que las propiedades estadísticas de los ceros de $\zeta(s)$ están en correspondencia con aquellas de GUE. Recordemos que la mayor evidencia hacia este comportamiento fue dada por Rudnick y Sarnak [41], quienes extendieron los resultados de Montgomery a las n -correlaciones para ceros normalizados de $\zeta(s)$; además mostraron que el mismo comportamiento universal es válido para una clase más amplia de funciones conocidas como *funciones- L* . En este capítulo se discuten las ideas primordiales detrás de los resultados de Rudnick-Sarnak. Por otra parte, un problema un tanto distinto concierne a los *ceros bajos de familias de funciones- L* , es decir, aquellos que se encuentran en alguna vecindad de la línea $s = \frac{1}{2}$ y cerca del eje real. La conjetura de densidad de Katz y Sarnak sugiere que la distribución de los ceros bajos de una familia de funciones- L es la misma que la de los eigenvalores cercanos a 1 de un correspondiente grupo compacto clásico. Esta filosofía (*la filosofía de Katz y Sarnak*) ha atraído la atención recientemente y se ha confirmado para varias familias de funciones- L . Las predicciones de Katz-Sarnak están influenciadas de las analogías con campos de funciones en donde sí se tiene una interpretación espectral de los ceros.

1. Generalidades sobre funciones- L

Para poder observar la importancia y formular de manera precisa los resultados de este capítulo, es importante ahondar, aunque sea de manera muy general, sobre la definición general de una función- L . El lector interesado en profundizar las ideas que aquí se esbozan puede consultar [7] o [6] y las referencias que allí se encuentran.

Una *serie- L* asociada a un objeto de estudio, digamos por el momento f , está definida por una función

$$a_f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Usualmente a_f es una función multiplicativa y no crece muy rápido, digamos $a_f = O(n^c)$ para alguna $c \geq 0$. Estudiamos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_f}{n^s}.$$

que converge absolutamente cuando $\text{Re } s > 1 + c$. La *función-L* es la continuación analítica de la serie anterior a una función entera (posiblemente meromorfa: $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$) sobre \mathbb{C} . De acuerdo al Programa de Langlands, todas las funciones-L pueden escribirse como productos de funciones-L, $L(s, \pi)$, asociadas a una representación automorfa irreducible y cuspidal π de $GL_m(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, siendo $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ el anillo de adeles de \mathbb{Q} . Por lo tanto estos son los objetos primitivos en la teoría de funciones-L.

Usaremos la notación $L(s, \pi)$ para representar a una función-L general, con coeficientes $\alpha_{\pi, j}$ que describimos a continuación. Para $m \geq 1$, la función-L (estándar) asociada a π es un producto de Euler de grado m

$$L(s, \pi) = \prod_p L(s, \pi_p),$$

donde

$$L(s, \pi_p) = \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{\alpha_{\pi, j}(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Para cada $p < \infty$, el número complejo $\alpha_{\pi, j}(p)$ satisface,

$$|\alpha_{\pi, j}(p)| < \sqrt{p}.$$

Asociamos a π un entero $Q_{\pi} > 0$ llamado *su conductor*. La conjetura de Ramanujan-Petersson afirma que $|\alpha_{\pi, j}(p)| = 1$ (este resultado es inmediato cuando $m = 1$, es decir, cuando consideramos a la función $\zeta(s)$ y a las funciones-L de Dirichlet (ver capítulo 5)).

También asociamos a π un conjunto de m números complejos $(\mu_{\pi, j})_{j=1}^m$ y el factor al infinito

$$L(s, \pi_{\infty}) = \prod_{j=1}^m \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu_{\pi, j})$$

con

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right),$$

y $\{\mu_{\pi, j}\}$ es un conjunto de m números asociados a π_{∞} . Ellos satisfacen,

$$\text{Re}(\mu_{\pi, j}) > -\frac{1}{2}.$$

La función-L completada asociada a π es

$$\xi(s, \pi) = L(s, \pi_{\infty})L(s, \pi).$$

¹La conjetura de Selberg predice que, en realidad, $\text{Re}(\mu_{\pi, j}) > 0$.

Esta función admite una continuación analítica a una función entera (excepto cuando se trata de la función zeta de Riemann), es acotada en las bandas verticales y satisface la ecuación funcional

$$\xi(s, \pi) = \tau_\pi Q_\pi^{-s} \xi(1-s, \bar{\pi}),$$

donde τ_π es un complejo no nulo y $\bar{\pi}$ es una representación asociada a otra función- L llamada el contragrediente de π . Los parámetros de $\bar{\pi}$ se deducen de aquellos de π por conjugación compleja,

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{\pi},j}(p) &= \overline{\alpha_{\pi,j}(p)} \\ \mu_{\bar{\pi},j} &= \overline{\mu_{\pi,j}} \\ Q_{\bar{\pi}} &= Q_\pi \\ \tau(\bar{\pi}) &= Q_\pi / \tau(\pi). \end{aligned}$$

Nótese que cuando los coeficientes $\alpha_{\bar{\pi},j}$ son reales, el contragrediente es el mismo que el de la función- L original, de modo que la ecuación funcional nos permite estudiar a $L(s, \pi)$, particularmente a sus ceros, en toda región del plano complejo.

Por definición, un cero no trivial de $L(s, \pi)$ es un punto de anulación de $\xi(s, \pi)$. Denotamos por

$$\rho_\pi = \frac{1}{2} + i\gamma_\pi$$

a los ceros de la función- L .

Indudablemente, uno de los problemas analíticos centrales en la teoría de funciones- L es la *Hipótesis de Riemann Generalizada* (HRG).

Conjetura 4.1 (Hipótesis de Riemann Generalizada). *Los ceros de la función- L completada $\xi(s, \pi)$, se encuentran sobre la línea $\text{Re}(s) = 1/2$.*

2. La Ley Montgomery-Odlyzko

Rudnick y Sarnak estudiaron las estadísticas locales de ceros de funciones- L . Este estudio es de importancia para dar claridad en la naturaleza (espectral) de los ceros en el sentido planteado por Hilbert y Pólya. Asumiremos la HRG en lo que resta de la sección. Escribimos los ceros como

$$\dots \leq \gamma_\pi^{(-2)} \leq \gamma_\pi^{(-1)} < 0 \leq \gamma_\pi^{(1)} \leq \gamma_\pi^{(2)} \leq \dots$$

Denótese por $N(T, \pi)$ al número de ceros no triviales de $L(s, \pi)$ con $|\gamma_\pi^{(j)}| \leq T$. Es bien conocido (ver, por ejemplo, [23]) que $N(T, \pi)$ satisface, cuando $T \rightarrow \infty$,

$$N(T, \pi) \sim \frac{mT \log T}{\pi}.$$

En particular, ya que $N(T, \pi)$ crece más rápido que T , los huecos entre ceros tienden a 0 conforme $T \rightarrow \infty$. Para estudiar las distribuciones locales de los huecos normalizamos:

$$\widetilde{\gamma}_\pi^{(j)} = \gamma_\pi^{(j)} \frac{m}{2\pi} \log |\gamma_\pi^{(j)}|, \quad j \geq 1$$

de modo que el hueco promedio entre ceros consecutivos normalizados es 1.

Para estudiar la densidad local de huecos de ceros normalizados hacemos la siguiente definición, generalizando la correlación de parejas para la función $\zeta(s)$ (definición 3.5):

Definición 4.2. Sea $f \in \mathcal{T}(n)$ una función de decaimiento rápido sobre el hiperplano $x_1 + \dots + x_n = 0$. Para $n \geq 2$ definimos la n -correlación de los ceros normalizados, $\{\widetilde{\gamma}_\pi^{(j_i)}\}_{i=1}^N$, de una función $L(s, \pi)$, como

$$R_{\pi, n}^{(T)}(f) = \frac{1}{N(T, \pi)} \sum_{\substack{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq T \\ j_k \neq j_l}} f\left(\widetilde{\gamma}_\pi^{(j_1)}, \dots, \widetilde{\gamma}_\pi^{(j_n)}\right).$$

Teorema 4.3 (Rudnick-Sarnak [41]). *Asúmase HRG. Sea $n \geq 2$ y π una representación unitaria irreducible automorfa y cuspidal de $GL_m(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ con $m \geq 1$. En el caso cuando $m > 3$, admitimos la siguiente hipótesis ²: sea $k \geq 2$, entonces*

$$\sum_p \frac{\log p \, a_\pi(p^k)}{p^k} < \infty,$$

en donde

$$a_\pi(p^k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{\pi, j}(p)^k.$$

Sea $f \in \mathcal{T}(n)$ que sea de decaimiento rápido sobre el hiperplano $x_1 + \dots + x_n = 0$. Supongamos, además, que $\widehat{f}(u)$ tiene soporte en $\sum_j |u_j| < 2/m$. Entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_{\pi, n}^{(T)}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) r_n^{\text{GUE}}(x_1, \dots, x_n) \delta\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n,$$

en donde $r_n^{\text{GUE}}(x_1, \dots, x_n)$ es la n -correlación de eigenvalores de una matriz en GUE (ver teorema 1.8).

Nota 4.4. Si se remueve la HRG, se puede establecer una versión suave del teorema de Rudnick-Sarnak. Presuntamente, el teorema es válido sin poner restricción alguna sobre el soporte de \widehat{f} .

²Rudnick y Sarnak demostraron que esta hipótesis se verifica para $m \leq 3$. En todo caso, es una consecuencia débil de la conjetura de Ramanujan-Petersson.

Experimentos numéricos llevados a cabo por Rumely [39] (para funciones- L de Dirichlet) y por Rubinstein [38] (para una gran variedad de funciones- L sobre $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$) entre otros, apoyan la idea de que las estadísticas locales de ceros de funciones- L están en correspondencia con estadísticas locales de eigenvalores de matrices en GUE y, en particular, sugieren que no es necesaria restricción alguna sobre las funciones de prueba. Esto motiva a formular la siguiente:

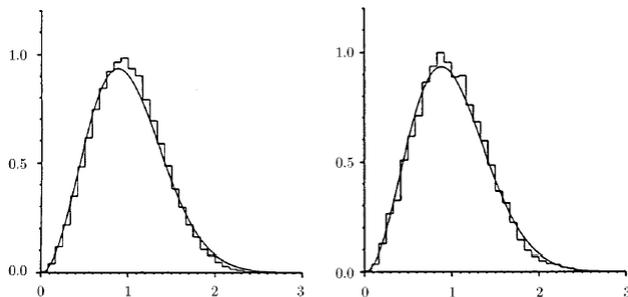


FIGURA 1. La figura de la izquierda muestra los huecos consecutivos entre ceros de funciones- L de Ramanujan contra μ_1^{GUE} . La figura de la derecha muestra los huecos consecutivos entre ceros de funciones- L asociadas a la curva $E: y^2 + y = x^3 - x$ contra μ_1^{GUE} . Cortesía de Michael Rubinstein.

Conjetura 4.5 (Ley Montgomery-Odlyzko para funciones- L). *Las huecos entre de los ceros de funciones- L son, estadísticamente, los mismos que los huecos entre eigenvalores de matrices en GUE.*

2.1. Comentarios acerca del teorema de Rudnick-Sarnak. La condición de que $L(s, \pi)$ sea primitiva (es decir, que provenga de una representación cuspidal) es crucial. Primero, si por ejemplo, nos fijamos en $L(s) = \zeta(s)^2$, entonces la distribución de los ceros seguiría el GUE con multiplicidad dos. Más aún, en el caso en que $L(s) = L(s, \pi_1)L(s, \pi_2)$, con $\pi_1 \neq \pi_2$, la distribución no será GUE. La razón es que los ceros de distintas funciones- L primitivas no están correlacionados. En efecto, la conjetura natural es que los ceros de $L(s)$ seguirían la distribución de la superposición de dos GUE [31].

Observemos que el lado derecho de la ecuación en el teorema 4.3 puede escribirse como

$$n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) r_n^{\text{GUE}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{n-1},$$

donde $x_n = -x_1 - \dots - x_{n-1}$.

Si tomamos $n = 2$ en el teorema de Rudnick-Sarnka y consideramos una pareja de ceros normalizados de la función $\zeta(s)$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} R_2^{(T)}(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x, -x) r_2^{\text{GUE}}(x, -x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(1 - \left(\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} \right)^2 \right) dx, \end{aligned}$$

donde $f(x) = f(x, 0)$, lo que concuerda precisamente con el resultado de Montgomery sobre la correlación de parejas del capítulo anterior.

El teorema de Rudnick-Sarnak nos habla acerca de *universalidad* en el sentido de que la correlación de los ceros de una función- L no depende de la función- L considerada. La responsabilidad de este comportamiento universal recae meramente en la universalidad del segundo momento de los coeficientes a_π

$$\sum_{n \leq x} \frac{|\Lambda(n) a_\pi(n)|^2}{n} \sim \frac{1}{2} \log^2 x, \quad x \rightarrow \infty.$$

El ingrediente más importante en la demostración del teorema de Rudnick-Sarnak radica en la *fórmula explícita*, la cual enunciamos a continuación.

Proposición 4.6 (Fórmula Explícita). *Sea g una función suave con soporte compacto y sea $h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iru} du$. Entonces*

$$\begin{aligned} \sum_j h(\gamma_\pi^{(j)}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \left(\log Q_\pi + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}} \left(\frac{1}{2} + \mu_{\pi, j} + it \right) + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}} \left(\frac{1}{2} + \overline{\mu_{\pi, j}} - it \right) \right) dr \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left(a_\pi(n) g(\log n) + \overline{a_\pi(n)} g(-\log n) \right) + \delta_\zeta \left[h\left(\frac{i}{2}\right) + h\left(-\frac{i}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

en donde $\delta_\zeta = 1$ si $L(s, \pi) = \zeta(s)$ y 0 en otro caso.

3. Filosofía de Katz y Sarnak

Las n -correlaciones son, por definición, insensibles a la localización de cualquier colección finita de ceros. En particular, no pueden describir el comportamiento límite de ceros cercanos al punto central.

El número de ceros de $L(s, \pi)$, $N(1, \pi)$, que se encuentran a una distancia menor o igual a 1 del punto $1/2$ es (restringiéndose al caso cuando $\mu_{\pi, j}$ son reales y positivos) [23]:

$$N(1, \pi) \sim \frac{\log(Q_\pi \prod_i (1 + \mu_{\pi, i}))}{\pi},$$

conforme $c_\pi := Q_\pi \prod_i (1 + \mu_{\pi, i}) \rightarrow \infty$. Al número c_π lo llamaremos *el conductor analítico* de $L(s, \pi)$.

Consideremos una familia \mathcal{F} de funciones- L . En el estudio de una familia de funciones- L , usamos el conductor analítico para ordenar a los miembros de la familia, formando así a la subfamilia

$$\mathcal{F}_X = \{\pi \in \mathcal{F} : c_\pi \leq X\}^3.$$

Como mencionamos arriba, el Programa de Langlands predice que todas las funciones- L pueden escribirse como productos finitos de $L(s, \pi)$; por lo que restringirse al estudio de subconjuntos de estas no involucra pérdida de información.

También, para estudiar una familia \mathcal{F} , se necesita entender el comportamiento asintótico de $\#\mathcal{F}_X$ conforme $X \rightarrow \infty$. En las distintas familias hasta ahora estudiadas se ha establecido que este comportamiento asintótico puede determinarse.

Mientras que el teorema de universalidad de Rudnick-Sarnak apunta hacia una interpretación espectral de los ceros, en realidad no nos revela si el operador subyacente es hermitiano o si es alguno de los grupos compactos clásicos. *La filosofía de Katz-Sarnak* propone estudiar estadísticas distintas para los ceros bajos de familias de funciones- L con el fin de obtener más información sobre la simetría subyacente de estas familias. Una de las estadísticas propuestas a estudiar es la 1-densidad de niveles.

Sean

$$\cdots \leq \gamma_\pi^{(-2)} \leq \gamma_\pi^{(-1)} \leq 0 \leq \gamma_\pi^{(1)} \leq \gamma_\pi^{(2)} \leq \cdots$$

los ceros críticos de una función $\pi \in \mathcal{F}$.

Normalizamos estos ceros por el factor $\log c_\pi / 2\pi$ de tal manera que el hueco promedio entre ceros normalizados es asintóticamente 1:

$$\tilde{\gamma}_\pi^{(j)} = \frac{\gamma_\pi^{(j)} \log c_\pi}{2\pi}.$$

Definición 4.7. Dada una familia \mathcal{F} de funciones- L y f una función de clase Schwartz, la **1-densidad de niveles** para \mathcal{F}_X se define como:

$$D_\pi(f) = \sum_j f\left(\tilde{\gamma}_\pi^{(j)}\right),$$

en donde la suma corre sobre las ordenadas de ceros contados con multiplicidad.

Ya que f decae rápidamente, el escalamiento por $\frac{1}{2\pi} \log c_\pi$ significa que $D_\pi(f)$ mide la densidad de ceros de $L(s, \pi)$ que se encuentran a una distancia $O(1/\log c_\pi)$ del punto central $s = 1/2$.

En la práctica, es imposible evaluar asintóticamente la suma $D_\pi(f)$ para una sola función- L , ya que la suma captura, esencialmente, un número acotado de

³Estamos denotando por π a un miembro típico de la familia \mathcal{F} . Esto porque, como dijimos en la sección anterior, existe una correspondencia explícita entre representaciones automorfas cuspidales y funciones- L .

ceros. Por tal motivo, consideramos el promedio sobre la subfamilia:

$$\left\langle D_\pi(f) \right\rangle_{\mathcal{F}_X} = \frac{1}{\#\mathcal{F}_X} \sum_{\pi \in \mathcal{F}_X} D_\pi(f).$$

Conjetura 4.8 (Conjetura de Densidad). *Para cualquier función f de clase Schwartz, se espera que*

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left\langle D_\pi(f) \right\rangle_{\mathcal{F}_X} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D^{\mathcal{F}}(x) dx,$$

en donde $D^{\mathcal{F}}(x) = D^G(x)$ (ver teorema 2.23) son las 1-densidades límite ($N \rightarrow \infty$) asociadas al grupo compacto G (el límite rescalado de $G(N)$).

Cabe recalcar que se debe extender la definición hacia las n -densidades. El estudio de las n -densidades es importante para determinar otra estadística llamada la *distribución del j -ésimo cero más bajo*, es decir, las medidas sobre \mathbb{R}_+ dadas por (ver subsección 5.2)

$$\nu_j^{\mathcal{F}_X}[a, b] = \frac{1}{\#\mathcal{F}_X} \# \left\{ L \in \mathcal{F} : \frac{\gamma_L^{(j)} \log c_L}{2\pi} \in [a, b] \right\}.$$

De la misma manera que en la conjetura de densidad, se espera que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \nu_j^{\mathcal{F}_X} = \nu_j^{\mathcal{F}},$$

en donde $\nu_j^{\mathcal{F}} = \nu_j^G$.

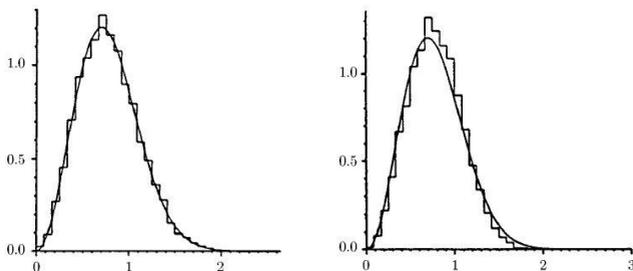


FIGURA 2. La figura de la izquierda muestra la comparación entre la distribución del primer cero crítico de funciones- L de Dirichlet cuadráticas vs el primer eigenvalor de una matriz en $USp(2N)$. La figura de la derecha muestra la comparación entre la distribución del segundo cero crítico de funciones- L de Ramanujan twist un carácter de Dirichlet con simetría impar (funciones- L en GL_2) vs el segundo eigenvalor de una matriz en $SO(2N+1)$. Cortesía de Michael Rubinstein.

De esta forma, podemos precisar las simetrías en familias de funciones- L y sus conexiones con la teoría de matrices aleatorias. Determinar el tipo de simetría exhibido por una familia de funciones- L es especialmente útil ya que la matriz

aleatoria subyacente puede usarse para obtener predicciones sobre otras cuestiones estadísticas acerca de la familia.

La conjetura de densidad ha sido verificada, analítica y numéricamente, para diversas familias de funciones- L (todos los resultados sujetos a una restricción sobre el soporte de \widehat{f}). A continuación enlistamos algunos de los resultados que se han obtenido con su respectiva simetría.

Unitaria

- $\{L(s, \chi) : \chi \text{ carácter de Dirichlet no trivial de conductor } q\}$ [22];

Simpléctica

- $\{L(s, \chi_d) : d = \text{discriminante fundamental, } |d| < X\}$ [37], [38];
- $L(s, \psi)$ con ψ un carácter del grupo de clases de ideales del campo cuadrático imaginario $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ con $D > 3$ libre de cuadrados y congruente con 3 módulo 4 [14];
- $\{L(s, \phi \times f) : \phi \text{ forma de Maass fija } f \text{ forma modular de peso } k\}$ [9];

Ortogonal

- $\{L(s, f) : f = \text{forma modular de peso } k \text{ nivel } N \leq X\}$ [24]
- $\{L(s, f) : f = \text{forma modular de nivel } N \text{ peso } k \leq X\}$ [24], [21].
- $\{L(s, E \otimes \chi_d) : E \text{ curva elíptica fija}\}$ [46], [33].

Nota 4.9. En [24] (por ejemplo), los autores muestran vía 1-densidad de niveles, que la familia de funciones- L tratada exhibe simetría ortogonal cuando la restricción de la transformada de Fourier de la función prueba tiene soporte en $(-1, 1)$. Sin embargo, como hicimos notar en 2.25 la 1-densidad de niveles no permite hacer una distinción completa de la simetría subyacente a menos que se extienda el soporte de la transformada de Fourier de la función prueba más allá del intervalo $(-1, 1)$. En el mismo artículo, los autores llevan a cabo este análisis aunque con un esfuerzo considerablemente mayor.

4. Familias de funciones zeta de campos de funciones

La conexión entre funciones- L y la teoría de las matrices aleatorias es particularmente transparente si consideramos el análogo en campos de funciones. Sin embargo, la analogía entre los dos casos dista mucho de ser perfecta (o al menos, no está perfectamente entendida). Por ejemplo, aún no se conoce cuál es el rol de la monodromía en el caso de campo de números.

La siguiente discusión pretende exponer, de manera un tanto somera, algunos de los numerosos resultados tratados por Katz y Sarnak en [26] sobre huecos consecutivos de ceros de funciones- L de Artin.

Reemplacemos al campo de números racionales por un campo k que sea una extensión finita del campo $\mathbb{F}_q(t)$ de funciones racionales en una variable formal t con coeficientes en \mathbb{F}_q , el campo finito de q elementos.

Sea $f(X, Y, Z)$ un polinomio homogéneo de grado d y no singular (es decir, sus primeras derivadas parciales no tienen ceros en común en $\overline{\mathbb{F}}_q$). Entonces,

$$f(X, Y, Z) = 0$$

es una curva proyectiva en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 , denotada por C/\mathbb{F}_q , con género $g = (d-1)(d-2)/2$. Para $n \geq 1$, sea N_n el número de soluciones proyectivas de $f = 0$ en \mathbb{F}_{q^n} . Entonces la función zeta de C/\mathbb{F}_q es la serie formal en T

$$\zeta(T, C/\mathbb{F}_q) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n T^n}{n}\right).$$

Este punto de vista geométrico es muy poderoso. Por ejemplo, el teorema de Riemann-Roch sobre la curva C juega un papel análogo al de la fórmula de sumación de Poisson y muestra que

$$\zeta(T, C/\mathbb{F}_q) = \frac{P(T, C/\mathbb{F}_q)}{(1-T)(1-qT)}$$

con $P \in \mathbb{Z}[T]$ un polinomio de grado $2g$. De Riemann-Roch se sigue la ecuación funcional

$$P(T) = q^g T^{2g} P(1/qT).$$

Existe una hipótesis de Riemann para $\zeta(T, C/\mathbb{F}_q)$, la cual afirma que todos los ceros (complejos) se encuentran sobre el círculo $|T| = 1/\sqrt{q}$. Esta afirmación fue probada por Weil. Una razón para obtener demostraciones de los resultados en campos de funciones es que sí se tiene una interpretación espectral de $\zeta(T, C/\mathbb{F}_q)$.

Para estudiar la distribución de los ceros de estas funciones zeta, los escribimos como

$$\frac{e^{i\theta_j}}{\sqrt{q}}, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{2g} < 2\pi.$$

Katz y Sarnak consideraron el hueco consecutivo k -consecutivo $\mu_k^{(C/\mathbb{F}_q)}$ sobre $[0, \infty)$ definida por

$$\mu_k^{(C/\mathbb{F}_q)}[a, b] = \frac{1}{2d} \#\left\{1 \leq j \leq 2d : \frac{d}{\pi}(\theta_{j+k} - \theta_j) \in [a, b]\right\}$$

para cualesquiera $0 \leq a < b \leq 2\pi$, en donde los índices se consideran módulo $2g$ y las diferencias $\theta_{j+k} - \theta_j$ módulo 2π . El factor d/π normaliza μ_k para que tenga media k .

En lo que sigue $\#\mathcal{M}_X(\mathbb{F}_q)$ denota al conjunto (finito) de \mathbb{F}_q -clases de isomorfismo de curvas sobre \mathbb{F}_q con género g .

Teorema 4.10 (Katz-Sarnak). *Para cualquier $k \geq 1$,*

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{M}_X(\mathbb{F}_q)} \sum_{C \in \mathcal{M}_X(\mathbb{F}_q)} D\left(\mu_k^{(C/\mathbb{F}_q)}, \mu_k^{(\text{GUE})}\right) = 0.$$

Esto es, las funciones zeta de curvas sobre campos de funciones siguen, en promedio sobre g y q , la ley Montgomery-Odlyzko. Cabe resaltar que en el caso q fijo, no sabemos si aparecen estadísticas de matrices aleatorias en el límite $g \rightarrow \infty$.

La prueba de este teorema requiere de argumentos algebraicos profundos; a continuación damos una pequeña idea de estos. Primero, un ingrediente importante es la interpretación espectral de los ceros de $\zeta(T, C/\mathbb{F}_q)$ en términos del Frobenius: N_n es el número de puntos fijos cuando se aumentan las coordenadas de C en $\overline{\mathbb{F}_q}$ a la potencia de q , iterado n veces.

Basado en este punto de vista, Katz y Sarnak mostraron que el grupo de monodromía geométrica de esta familia de curvas es el simpléctico (ver Teorema 10.1.18.3 en [26] para un enunciado preciso). Esto permite usar el teorema de equidistribución de Deligne el cual implica que para género g fijo, los huecos consecutivos de los ceros convergen en promedio, cuando $q \rightarrow \infty$, a aquellos de un elemento distribuido con la medida de Haar en $\mathrm{USp}(2g)$. Conforme g tiende a infinito, el límite asintótico de los huecos k -consecutivos es siempre μ_k^{GUE} , lo cual conduce al resultado.

Katz y Sarnak estudiaron varias familias de funciones- L en campos de funciones. Cabe resaltar que, en campos de funciones, el concepto de familia sí tiene un significado preciso. Para darnos una idea general sobre los resultados establecidos por Katz-Sarnak, revisemos un ejemplo. Considérese al conjunto de todas las extensiones cuadráticas de $k = \mathbb{F}_q(t)$. Sea $H_n(\mathbb{F}_q)$ el conjunto de todos los polinomios mónicos libres de cuadrados de grado n con coeficientes en \mathbb{F}_q . Las extensiones cuadráticas son $k_\Delta = k(\sqrt{\delta})$ con $\Delta \in H_n(\mathbb{F}_q)$. Para cada n , estos campos de funciones corresponden a curvas hiperelípticas, $Y^2 = \Delta(X)$, $\Delta \in H_n$ y forman una familia de curvas. El género $g = g(n)$ de k_Δ satisface $n = 2g + 2$ si n es par y $n = 2g + 1$ si n es impar. Así $\zeta(T, k_\Delta)$, que puede escribirse como $L(T, \chi_\Delta)/(1-T)(1-qT)$ con χ_Δ el correspondiente carácter cuadrático, tiene $2g(n)$ ceros con ángulos $\theta_1(\Delta), \theta_2(\Delta), \dots, \theta_{2g}(\Delta)$. Para $j \geq 1$ fijo, se examina la distribución de $\theta_j(\Delta)$ conforme Δ varía sobre $H_n(\mathbb{F}_q)$, $n \rightarrow \infty$.

Teorema 4.11. *Para $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$ una función de prueba*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\#H_n(\mathbb{F}_q)} \sum_{\Delta \in H_n(\mathbb{F}_q)} f\left(\frac{\theta_j(\Delta)2g}{2\pi}\right) = \int_0^\infty f(x) d\nu_j^{\mathrm{USp}}(x).$$

Es decir, que las distribuciones de los ceros que se encuentran cercanos a $T = 1/\sqrt{q}$ de las extensiones cuadráticas k_Δ de $k = \mathbb{F}_q(t)$ tienen límites rescalados que obedecen a estadísticas simplécticas.

Familia de tipo simpléctico: funciones- L de Dirichlet cuadráticas

En este capítulo estudiamos los resultados significativos acerca de la distribución ceros bajos de familias de funciones- L de Dirichlet en vías de dar sustento a la conjetura de densidad. Específicamente estudiamos la 1-densidad de niveles para funciones- L de Dirichlet cuadráticas. En este tenor, Özlük y Snyder [37], demostraron que el grupo de simetría subyacente para esta familia es simpléctico. Aquí presentamos este hecho aunque con argumentos distintos a los presentados originalmente por Özlük-Snyder.

1. Funciones- L de Dirichlet

En esta sección revisamos algunos resultados generales referentes a funciones- L de Dirichlet, es decir funciones- L de grado 1. En la sección 1 del capítulo anterior ya hemos mencionado, en toda generalidad, las propiedades que cumplen estas funciones. Sin embargo, como ejemplo ilustrativo, reiteramos algunas propiedades de estas funciones debidamente simplificadas a este caso. Para los detalles que aquí se exponen, el lector puede consultar [8].

Dirichlet definió sus funciones para probar el siguiente teorema:

Teorema 5.1. *Sean q, a enteros positivos tales que $(a, q) = 1$. Entonces existe un número infinito de primos en la progresión aritmética*

$$\{a, a + q, a + 2q, \dots\}.$$

Definición 5.2. *Sea q un entero positivo. Una función aritmética $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ se llama carácter de Dirichlet módulo $q \geq 1$ si satisface las siguientes condiciones:*

- 1) χ es periódica con período q : $\chi(n + q) = \chi(n)$.
- 2) $\chi(n) = 0$ si y sólo si $(n, q) \neq 1$.
- 3) $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$ para cada $m, n \in \mathbb{Z}$.
- 4) $\chi(1) = 1$.

Observamos que, para un carácter de Dirichlet, $\chi(-1) = \pm 1$. Esto se sigue de 3) ya que $(\chi(-1))^2 = \chi((-1)^2) = \chi(1) = 1$. De aquí, decimos que χ es *par* si $\chi(-1) = 1$ e *impar* si $\chi(-1) = -1$.

Definición 5.3. El carácter trivial, χ_0 , está definido como

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & (n, q) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 5.4. Un carácter de Dirichlet módulo q se llama **primitivo** si para cada divisor d de q tal que $1 < d < q$, existe un entero $a \equiv 1 \pmod{d}$, con $(a, q) = 1$, tal que $\chi(n) \neq 1$. En caso contrario, decimos que el carácter χ es imprimitivo.

En general, hay exactamente $\phi(q)$ caracteres de Dirichlet módulo q . Adicionalmente, satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

Proposición 5.5. Sean $\chi_0, \dots, \chi_{\phi(q)}$ los diferentes caracteres módulo q , y sean m, n dos enteros tales que $(q, n) = 1$, entonces

$$\sum_{r=1}^{\phi(q)} \chi_r(m) \overline{\chi_r(n)} = \begin{cases} \phi(q) & m \equiv n \pmod{q} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 5.6. Para χ un carácter de Dirichlet módulo q , se define la función-L de Dirichlet asociada a χ como

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

para $\text{Re}(s) > 1$.

Usando la factorización única para primos y la propiedad multiplicativa de χ , se puede probar (como en el caso de $\zeta(s)$) que $L(s, \chi)$ es una función analítica y además existe una factorización como producto de Euler:

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Esta factorización evidentemente exhibe una relación profunda entre primos en progresiones aritméticas y funciones-L de Dirichlet.

Nota 5.7. Es bien conocido ([8] capítulo 5) que a un carácter de Dirichlet imprimitivo χ módulo q le corresponde un factor q_1 de q y un carácter de Dirichlet primitivo χ_1 módulo q_1 tal que

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n) & (n, q) = 1, \\ 0 & (n, q) > 1. \end{cases}$$

En este caso decimos que χ_1 induce a χ . Así, si χ es un carácter de Dirichlet módulo q que está inducido por el carácter χ_1 módulo q_1 , entonces

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s} \right).$$

Es decir, el estudio de una función-L arbitraria puede reducirse al estudio de una función-L correspondiente a un carácter de Dirichlet primitivo. Un hecho observado en general en el capítulo anterior.

Un resultado importante, motivado por la función ζ , es la continuación analítica.

Teorema 5.8. *Sea χ un carácter de Dirichlet primitivo módulo q . Entonces la función $L(s, \chi)$ puede ser extendida analíticamente a todo el plano complejo y además cumple la ecuación funcional*

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^\mu \sqrt{q}}{\tau(\chi)} \xi(s, \chi),$$

donde

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi(-1) = 1 \\ 1 & \text{si } \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

$$\xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+\mu}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mu}{2}\right) L(s, \chi).$$

y $\tau(\chi)$ es la suma de Gauss asociada a χ definida como

$$\tau(\chi) := \sum_{m=1}^q \chi(m) e^{2\pi i m/q}.$$

Para todo χ primitiva, la función $L(s, \chi)$ tiene un número infinito de ceros no triviales

$$\frac{1}{2} + i\gamma^{(j)}.$$

Así, de la misma forma que para $\zeta(s)$, se tiene la hipótesis de Riemann para $L(s, \chi)$ que anunciamos a continuación:

Conjetura 5.9 (Hipótesis de Riemann para $L(s, \chi)$). *Los puntos de anulación de $L(s, \chi)$ en el interior de la banda crítica $0 \leq \text{Re } s \leq 1$ se encuentran situados en el eje $\text{Re } s = \frac{1}{2}$*

1.1. Fórmula explícita. Como se ha mencionado anteriormente, un ingrediente fundamental para nuestro análisis es la fórmula explícita, la cual permite expresar sumas sobre ceros de funciones-L en términos de sumas sobre primos. La siguiente derivación es una modificación de la proposición 4.6, debidamente simplificada al caso de funciones-L de Dirichlet.

Proposición 5.10 (Fórmula Explícita). *Sea g una función suave y con soporte compacto, con valores en \mathbb{R} y sea $h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iru} du$. Entonces*

$$\sum_j h(\gamma^{(j)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \left(\log q + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}} \left(\frac{1}{2} + ir + \mu \right) + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}} \left(\frac{1}{2} - ir + \mu \right) \right) dr$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \left(\chi(n)g(\log n) + \bar{\chi}(n)g(-\log n) \right)$$

donde,

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu) = \pi^{-\frac{s+\mu}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mu}{2}\right) \text{ y } \mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ es par} \\ 1 & \text{si } \chi \text{ es impar.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Note que, para $\text{Re } s = 1/2$, se sigue que $\frac{s-1/2}{i} \in \mathbb{R}$, y por lo tanto $h\left(\frac{s-1/2}{i}\right)$ existe y está bien definida. Definamos entonces

$$H(s) = h\left(\frac{s-1/2}{i}\right).$$

Inicialmente, $H(s)$ está definida solo cuando $\text{Re } s = 1/2$. Sin embargo, usando inversión de Fourier vemos que

$$h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{2\pi i r t} dt,$$

y como h tiene soporte compacto, la podemos extender de tal manera que $H(s)$ esté bien definida. Así, $H(x + iy)$ es la transformada de Fourier de alguna función que sea de clase Schwartz, y por lo tanto es de decaimiento rápido en $\text{Im } s$. Consideremos la integral:

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) H(s) ds,$$

en donde hemos escrito

$$\xi(s, \chi) = q^{\frac{s+\mu}{2}} \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \mu) L(s, \chi).$$

Cambiamos el contorno de integración de $\text{Re } s = 2$ a -1 . Esto hace que tomemos ceros/polos de $\xi(s)$. El término de la función Γ está en $s = 0$: sin embargo, como $\xi(2) \neq 0$, hay un cero del factor L que lo cancela. Por lo tanto, los únicos ceros/polos sobrevivientes son aquellos ceros de la función-L en la banda crítica, y el residuo es justamente $H(1/2 + i\gamma) = h(\gamma)$. Por lo tanto

$$S = \sum_j h\left(\gamma_d^{(j)}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)} \frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) H(s) ds.$$

Ahora, por la ecuación funcional,

$$\frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) = -\log q - \frac{\xi'}{\xi}(1-s, \bar{\chi})$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_j h(\gamma_d^{(j)}) &= S - \frac{1}{2\pi i} \int_{(-1)} \frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) H(s) ds \\ &= S + \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \log q H(s) ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\xi'}{\xi}(s, \bar{\chi}) H(1-s) ds. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando que

$$\frac{\xi'}{\xi}(s, \chi) = \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(s + \mu) + \frac{L'}{L}(s, \chi),$$

observamos inmediatamente que

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \left(\frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(s + \mu) + \frac{L'}{L}(s, \chi) \right) H(s) ds$$

Moviendo la línea de integración a $\text{Re}=1/2$ y poniendo $s = \frac{1}{2} + ir$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(s + \mu) H(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}\left(\frac{1}{2} + ir + \mu\right) h(r) dr \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{L'}{L}(s, \chi) H(s) ds &= - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \chi(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{1}{n^s} H(s) ds. \end{aligned}$$

De igual manera, moviendo la línea de integración a $\text{Re}=1/2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{L'}{L}(s, \chi) H(s) ds &= - \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \chi(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} + ir}} h(r) dr \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{\sqrt{n}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^{ir}} h(r) dr \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{\sqrt{n}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir \log n} h(r) dr \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{\sqrt{n}} g(\log n). \end{aligned}$$

Haciendo el mismo análisis para

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\xi'}{\xi}(s, \bar{\chi}) H(1-s) ds,$$

llegamos a que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{\xi'}{\xi}(s, \bar{\chi}) H(1-s) ds = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \bar{\chi}(n)}{\sqrt{n}} g(-\log n)$$

□

1.2. Funciones-L de Dirichlet cuadráticas. Consideramos ahora un caso particular de funciones-L de Dirichlet, las funciones-L de Dirichlet cuadráticas. Estas funciones surgen, naturalmente, de considerar ciertos caracteres primitivos reales (o cuadráticos) inducidos por el símbolo de Kronecker. Para detalles remitimos al lector al capítulo 5 de [8].

Un carácter de Dirichlet es *real* (o cuadrático) si sus valores son reales. Es bien conocido que el símbolo de Kronecker $\left(\frac{d}{n}\right)$ define un carácter real no principal módulo $|d|$ si d es un discriminante, esto es, $d \equiv 0, 1 \pmod{4}$ y d no es cuadrado. De hecho, todos los caracteres primitivos reales módulo $|d|$ pueden formarse usando este símbolo y además todos los caracteres reales módulo $|d|$ son de la forma $\chi_d(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$, donde d es un *discriminante fundamental*, esto es d es un discriminante libre de cuadrados o $d = 4D$, donde D es libre de cuadrados y $D \equiv 2, 3 \pmod{4}$. De aquí en adelante, el símbolo χ_d denotará al símbolo de Kronecker y por tanto un carácter real módulo $|d|$.

Definición 5.11. *Sea d un discriminante fundamental. La función-L de Dirichlet asociada a los caracteres $\chi_d(n)$ inducidos por el símbolo de Kronecker*

$$L(s, \chi_d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_d(n)}{n^s},$$

es llamada la función-L cuadrática de Dirichlet.

2. Familias de funciones-L cuadráticas de Dirichlet

En lo que sigue, tomamos a $\{L(s, \chi_d)\}$ como nuestra familia de funciones-L y esperamos encontrar evidencia en favor de una interpretación espectral en términos de grupos compactos clásicos calculando la 1-densidad de niveles. Precisemos la formulación de los resultados.

Escribimos los ceros no triviales de $L(s, \chi_d)$ como

$$\frac{1}{2} + i\gamma_d^{(j)}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde

$$0 \leq \operatorname{Re}\left(\gamma_d^{(1)}\right) \leq \operatorname{Re}\left(\gamma_d^{(2)}\right) \leq \operatorname{Re}\left(\gamma_d^{(3)}\right) \dots$$

y

$$\gamma_d^{(-j)} = -\gamma_d^{(j)}.$$

Nótese que no asumimos la hipótesis de Riemann para $L(s, \chi_d)$, ya que permitimos que los ceros sean números complejos.

Denotemos por $N(T, d)$ al número de ceros $\gamma_d^{(j)}$ con $|\gamma_d^{(j)}| < T$. Entonces (ver [8] capítulo 16) para $T \geq 2$

$$N(T, d) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{|d|T}{2\pi}\right) - \frac{T}{\pi} + O(\log T + \log |d|).$$

Observemos que la fórmula anterior no nos proporciona demasiada información cuando T es muy cercana a 1, ya que el término principal y el término de error son del mismo tamaño. Sin embargo, tomando $T = 1$ en $N(T, d)$ podemos pensar que hay suficientes ceros alrededor de $\log |d|/\pi$ hasta altura 1 de tal forma que el hueco promedio entre ellos sea $2\pi/\log |d|$.

Normalizamos a los ceros,

$$\tilde{\gamma}_d^{(j)} = \frac{\gamma_d^{(j)} \log |d|}{2\pi}, \quad j \geq 1.$$

Notación 5.12. Sea d un discriminante fundamental y χ_d el carácter real primitivo asociado. Denotaremos por \mathcal{D}_X , para $X > 0$, al conjunto de tales d con $X/2 \leq |d| < X$.

Definición 5.13. Sea f una función de clase Schwartz cuya transformada de Fourier esté soportada en alguna vecindad del origen. Definimos la **1-densidad de niveles** para la familia \mathcal{D}_X como:

$$D_d(f) = \sum_j f\left(L\gamma_d^{(j)}\right),$$

donde

$$L = \frac{\log X}{2\pi}.$$

Consideremos el valor esperado de las funciones $D_d(f)$:

$$\left\langle D_d(f) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} = \frac{1}{\#\mathcal{D}_X} \sum_{d \in \mathcal{D}_X} D_d(f).$$

Enunciemos la Conjetura de Densidad para este caso.

Conjetura 5.14 (Conjetura de Densidad). Para cualquier función f de clase Schwartz,

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left\langle D_d(f) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D^{\text{USP}}(x) dx.$$

2.1. 1-densidad de niveles. El resultado que da evidencia hacia la Conjetura de Densidad es el siguiente.

Teorema 5.15 (Özlük-Snyder). Sea f una función par ¹ y de clase Schwartz. Supongamos que \widehat{f} tiene soporte en $(-1, 1)$. Entonces,

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left\langle D_d(f) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D^{\text{USp}}(x) dx.$$

Este resultado confirma la conexión entre ceros de $L(s, \chi_d)$ y eigenvalores de matrices unitarias simplécticas además de que explica la repulsión lejos del punto crítico, ya que la densidad de ceros está descrita por la función

$$D^{\text{USp}}(x) = 1 - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2\pi x}.$$

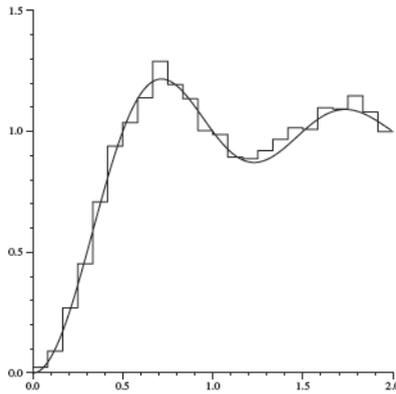


FIGURA 1. Comparación entre la densidad de ceros de $L(s, \chi_d)$ contra la predicción $D^{\text{USp}}(x)$. Cortesía de Michael Rubinstein.

Nota 5.16. Si hubiésemos considerado a los ceros no triviales de todas las funciones-L, entonces $D^{\text{USp}}(x)$ debería reemplazarse por $D^{\text{U}}(x) = 1$ ([22]). Así, para funciones-L cuadráticas, los ceros no triviales cercanos al eje real son más escasos. Así que, de alguna forma, están siendo repelidos del eje real.

Para probar el teorema 5.15, es indispensable saber qué términos son los que contribuyen, en el límite $X \rightarrow \infty$, a $\left\langle D_d(f) \right\rangle_{\mathcal{D}_X}$. En esto radica el contenido de los siguientes dos lemas.

Lema 5.17. Para toda función medible acotada g con soporte en $(-1, 1)$, defínase:

$$R_d^{(X)}(g) = \frac{1}{\log X} \sum_{m \neq \square} \frac{\Lambda(m)}{\sqrt{m}} \chi_d(m) g\left(\frac{\log m}{\log X}\right).$$

¹La hipótesis de que f sea par es innecesaria. Sin embargo la supondremos por simplicidad.

Entonces

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left\langle R_d^{(X)}(g) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Elijase $\alpha \in [0, 1)$ de modo que g esté soportada en $[-\alpha, \alpha]$. Entonces $g(\log m / \log X) = 0$ si $m > X^\alpha$ de manera que en la suma sobre m basta asumir $m \leq X^\alpha$. Intercambiando el orden de sumación y aplicando Cauchy-Schwarz se tiene, en vista de la acotación de $|g|$:

$$\left\langle R_d^{(X)}(g) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} \ll \frac{1}{\#\mathcal{D}_X} \frac{1}{\log X} \sqrt{\sum_{\substack{m \leq X^\alpha \\ m \neq \square}} \frac{\Lambda^2(m)}{m}} \sqrt{\sum_{\substack{m \leq X^\alpha \\ m \neq \square}} \left| \sum_{d \in \mathcal{D}_X} \chi_d(m) \right|^2}.$$

Por un lado, la aproximación obtenida en el lema 3.19, sin el término de error dado por la hipótesis de Riemann, nos dice que

$$\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) = x \log x + O(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq X^\alpha} \frac{\Lambda^2(m)}{m} &= \int_1^{X^\alpha} \frac{1}{t} d \sum_{m \leq t} \Lambda^2(m) \\ &\ll \frac{1}{X^\alpha} \left(X^\alpha \log X^\alpha + O(X^\alpha) \right) - \int_1^{X^\alpha} \frac{1}{t^2} (t \log t + O(t)) dt \\ &\ll \int_1^{X^\alpha} \frac{\log t}{t} dt \\ &\ll \log X^2. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\sum_{\substack{m \leq X^\alpha \\ m \neq \square}} \frac{\Lambda^2(m)}{m} \ll \log^2 X.$$

Por otro lado, la cota de Jutila [25],

$$\sum_{\substack{m \leq M \\ m \neq \square}} \left| \sum_{\substack{|d| \leq N \\ d \text{ discr. fundl.}}} \chi_d(n) \right| \ll MN \log^{10} M,$$

implica que

$$\sum_{\substack{m \leq X^\alpha \\ m \neq \square}} \left| \sum_{d \in \mathcal{D}_X} \chi_d(m) \right|^2 \ll X^{\alpha+1} \log^{10} X.$$

Por tanto, el hecho de que $\#\mathcal{D}_X \asymp X$, implica

$$\left\langle R_d^{(X)}(g) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} \ll X^{(\alpha-1)/2} \log^5 X.$$

La convergencia a cero en el límite $X \rightarrow \infty$ se sigue inmediatamente de la hipótesis $\alpha < 1$. \square

El lema 5.17 nos dice que la contribución a la suma debe venir de aquellos enteros que son cuadrados perfectos.

Lema 5.18. *Para toda función medible acotada g , definase:*

$$S_d^{(X)}(g) = \frac{1}{\log X} \sum_{m=\square} \frac{\Lambda(m)}{\sqrt{m}} \chi_d(m) g\left(\frac{\log m}{\log X}\right).$$

Entonces

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left\langle S_d^{(X)}(g) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} = \frac{1}{2} \int_0^\infty g(u) du.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que, por la restricción de m a ser cuadrado perfecto, $\chi_d(m) = 1$ (a menos que $\text{mcd}(d, m) > 0$, en cuyo caso $\chi_d(m) = 0$). Así, usando sumación por partes,

$$\begin{aligned} S_d^{(X)}(g) &= \frac{1}{\log X} \sum_p \frac{\log p}{p} g\left(\frac{2 \log p}{\log X}\right) \\ &= -\frac{1}{\log X} \int_1^\infty \sum_{p \leq t} \frac{\log p}{p} \frac{d}{dt} g\left(\frac{2 \log t}{\log X}\right) dt. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la fórmula de Mertens [3]

$$\sum_{p \leq t} \frac{\log p}{p} = \log t + O(1).$$

obtenemos

$$S_d^{(X)}(g) = -\frac{1}{\log X} \int_1^\infty (\log t + O(1)) \frac{d}{dt} g\left(\frac{2 \log t}{\log X}\right) dt.$$

Integrando por partes, y del hecho de que $\frac{d}{du} g(u)$ tiene soporte en $|u| \leq \alpha$,

$$-\frac{1}{\log X} \int_1^\infty (\log t + O(1)) \frac{d}{dt} g\left(\frac{2 \log t}{\log X}\right) dt = \frac{1}{\log X} \int_1^\infty g\left(\frac{2 \log t}{\log X}\right) \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{\log X}\right).$$

Finalmente haciendo el cambio de variable $u = 2 \log t / \log X$,

$$S_d^{(X)}(g) = \frac{1}{2} \int_0^\infty g(u) du + O\left(\frac{1}{\log X}\right),$$

de donde se sigue el resultado. \square

Con la información proporcionada por los lemas 5.17 y 5.18 podemos dar la demostración al teorema de Özlük-Snyder.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE ÖZLÜK-SNYDER 5.15. Pongamos $h(r) = f(Lr)$ y $g(y) = \frac{1}{\log X} \widehat{f}\left(-\frac{y}{\log X}\right)$ en la fórmula explícita. Note que, ya que f es una función par, \widehat{f} también lo es. La fórmula explícita 5.10 en este caso dice:

$$\sum_j f(L\gamma_d^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(Lr) \left(\log|d| + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}\left(\frac{1}{2} + ir + \mu\right) + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}\left(\frac{1}{2} - ir + \mu\right) \right) dr \\ - \frac{2}{\log X} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{\sqrt{m}} \chi_d(m) \widehat{f}\left(\frac{\log m}{\log X}\right).$$

Analicemos por separado los términos de la ecuación. Notemos que el término de la integral es igual a

$$\frac{\log|d|/\pi}{L} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(Lr) \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ir + \mu\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2} - ir + \mu\right) \right) dr.$$

Debido al decaimiento rápido de f y por la hipótesis $|d| \leq X$, tenemos que la primera integral es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + O\left(\frac{1}{\log X}\right).$$

Así, solo necesitamos considerar la segunda integral, para lo cual necesitamos de la siguiente versión de la fórmula de Stirling,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \log z + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

la cual es válida para $|z| > 1$ con $|\arg(z)| < \pi - \epsilon$. Entonces,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ir + \mu\right) = \log\left(\frac{1}{2} + ir + \mu\right) + O\left(\frac{1}{\left|\frac{1}{2} + ir + \mu\right|}\right).$$

Por tanto, expandiendo el logaritmo,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2} + ir + \mu\right) = O\left(\log(2 + |t|)\right).$$

Similarmente, y debido a que f es una función par,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2} - ir + \mu\right) = O\left(\log(2 + |t|)\right).$$

Ahora, analicemos el término que consiste de la suma sobre primos. Observe que

$$\frac{2}{\log X} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{\sqrt{m}} \chi_d(m) \widehat{f}\left(\frac{\log m}{\log X}\right) = \frac{2}{\log X} \left(R_d^{(X)}(\widehat{f}) + S_d^{(X)}(\widehat{f}) \right).$$

Usando los lemas 5.17 y 5.18 deducimos que

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{D}_X} \sum_{d \in \mathcal{D}_X} \sum_j f(L\gamma_d^{(j)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_0^{\infty} \widehat{f}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u) du. \end{aligned}$$

Ya que el soporte de \widehat{f} se encuentra en $(-1, 1)$ (ver proposición 2.24),

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{D}_X} \sum_{d \in \mathcal{D}_X} \sum_j f(L\gamma_d^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(1 - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2\pi x}\right) dx,$$

que es lo que se quería probar. \square

2.2. 1-densidad de niveles asumiendo HRG. Asumiendo la HRG, Özlük y Snyder [37] mostraron que la hipótesis sobre la función de prueba en 5.15 puede extenderse a aquellas con soporte en $(-2, 2)$. En esta sección revisamos de manera muy general esta extensión siguiendo las ideas de P. Gao [15]. Sin embargo, ya que las demostraciones son muy técnicas y nada ilustrativas, solo mencionaremos las características esenciales de la prueba. Además, la idea principal puede sugerir una nueva forma de darle un mejor sustento a la Conjetura de Densidad 5.14. Hacemos mención aquí, que P. Gao demostró el resultado para las n -densidades para $n \leq 3$. Recientemente, A. Entin, E. Roditty-Gershon y Z. Rudnick [12] han generalizado este resultado, para n en general.

El primer detalle técnico consiste en considerar a la familia $\{L(s, \chi_{8d})\}$ con d impar, positiva y libre de cuadrados de tal forma que el carácter χ_{8d} sea real, primitivo con conductor $8d$ y $\chi_{8d}(-1) = 1$. Se recomienda al lector revisar el capítulo 5 de [8] para observar que, en esencia, se está considerando a la misma familia que antes. En realidad se trata de evitar que la función $\chi_2(n)$ aparezca en el análisis. Consideramos entonces a la subfamilia \mathcal{D}_X , para $X > 0$, que consiste de tales discriminantes con $X \leq d \leq 2X$.

El problema ahora es entender los términos provenientes de la fórmula explícita (proposición 5.10). Específicamente a los términos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{\sqrt{m}} \chi_{8d}(m) \widehat{f}\left(\frac{\log m}{\log X}\right).$$

Cuando $n = p^k$ para $k \geq 3$, los términos contribuyen $O(1/\log X)$. Los términos $n = p^2$ contribuyen

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u) du + O\left(\frac{\log \log X}{\log X}\right).$$

Por lo tanto,

$$D_{8d}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u) du - S_d^{(X)}(\widehat{f}) + O\left(\frac{\log \log X}{\log X}\right),$$

con

$$S_d^{(X)}(\widehat{f}) = \frac{1}{\log X} \sum_p \frac{\log p}{\sqrt{p}} \chi_{8d}(p) \widehat{f}\left(\frac{\log p}{\log X}\right).$$

El segundo detalle técnico consiste en encontrar una expresión asintótica para

$$S_d^{(X)}(Y; g) = \sum_{\substack{X \leq d \leq 2X \\ (d,2)=1}} \mu^2(d) \sum_{p \leq Y} \frac{\log p}{\sqrt{p}} \chi_{8d}(p) g\left(\frac{\log p}{\log X}\right)$$

donde ahora g es una función suave y con soporte en $(-2+\epsilon, 2-\epsilon)$ (especificaremos el valor aproximado de ϵ más tarde) y $\mu(d)$ es la función de Möbius (definición C.3)

Técnicamente, es mucho más manejable trabajar con una versión suavizada de $S_d^{(X)}(Y; g)$. Sea Φ una función suave con soporte en $(1, 2)$ tal que $\Phi(t) = 1$ para $t \in (1 + U^{-1}, 2 - U^{-1})$ y $\Phi^{(j)}(t) \ll_j U^j$ para toda $j \geq 0$. Defínase,

$$S_d^{(X)}(Y; g, \Phi) = \sum_{(d,2)=1} \mu^2(d) \sum_{p \leq Y} \frac{\log p}{\sqrt{p}} \chi_{8d}(p) g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \Phi\left(\frac{d}{X}\right).$$

En todo caso, $S_d^{(X)}(Y; g)$ está bien aproximada vía su versión suavizada. Más precisamente,

$$S_d^{(X)}(Y; g) - S_d^{(X)}(Y; g, \Phi) \ll \frac{X \log^7 X}{U}.$$

Sea $Z > 1$ un número real. Escribábase $\mu^2(d) = M_Z(d) + R_Z(d)$ con

$$M_Z(d) = \sum_{\substack{l^2 | d \\ l \leq Z}} \mu(l) \quad \text{y} \quad R_Z(d) = \sum_{\substack{l^2 | d \\ l > Z}} \mu(l).$$

Defínase,

$$M_d^{(X)}(Y; g, \Phi) = \sum_{(d,2)=1} M_Z(d) \sum_{p \leq Y} \frac{\log p}{\sqrt{p}} \chi_{8d}(p) g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \Phi\left(\frac{d}{X}\right)$$

$$R_d^{(X)}(Y; g, \Phi) = \sum_{(d,2)=1} R_Z(d) \sum_{p \leq Y} \frac{\log p}{\sqrt{p}} \chi_{8d}(p) g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \Phi\left(\frac{d}{X}\right),$$

de modo que $S_d^{(X)}(Y; g, \Phi) = M_d^{(X)}(Y; g, \Phi) + R_d^{(X)}(Y; g, \Phi)$.

Proposición 5.19. *Asúmase HRG. Para cualquier carácter cuadrático no principal χ con módulo q y $U \leq X^2$ con g suave y con soporte en $(-2, 2)$,*

$$E(U; \chi, g) := \sum_{p \leq U} \frac{\log p}{\sqrt{p}} \chi(p) g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \ll \log^3(qX).$$

Gracias a la proposición 5.19 podemos deducir, poniendo $d = l^2 m$, que

$$R_d^{(X)}(Y; g, \Phi) \ll \frac{X \log^3 X}{Z}.$$

Así, el término principal proviene solamente de $M_d^{(X)}(Y; g, \Phi)$. Para evaluar la contribución de este término se introduce

$$\begin{aligned} \tau_m(k) &= \sum_{a \bmod k} \left(\frac{a}{k}\right) e\left(\frac{am}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1+i}{2} + \left(\frac{-1}{k}\right) \frac{1-i}{2}\right) G_m(k), \end{aligned}$$

en donde $G_m(k)$ es la función definida en el siguiente lema.

Lema 5.20 ([42], Lemma 2.3). *Si $(k_1, k_2) = 1$ entonces $G_m(k_1 k_2)$. Supóngase que p^a es la potencia más grande de p que divide a m (con $a = \infty$ si $m = 0$). Entonces para $b \geq 1$,*

$$G_m(p^b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq a \text{ es impar,} \\ \phi(p^b) & \text{si } b \leq a \text{ es par,} \\ -p^a & \text{si } b = a + 1 \text{ es par,} \\ \left(\frac{m/p^a}{p}\right) p^a \sqrt{p} & \text{si } b = a + 1 \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } b \geq a + 2. \end{cases}$$

Para F una función de clase Schwartz, se define

$$\widetilde{F}(\xi) = \frac{1+i}{2} \widehat{F}(\xi) + \frac{1-i}{2} \widehat{F}(-\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(2\pi\xi x) + \text{sen}(2\pi\xi x)) F(x) dx.$$

El siguiente lema nos dicta una forma de evaluar el término $M_d^{(X)}(Y; g, \Phi)$.

Lema 5.21 (Sumación de Poisson [42], Lemma 2.6). *Sea Φ una función no negativa y suave con soporte en $(1, 2)$. Entonces,*

$$\sum_{(d,2)=1} M_Z(d) \left(\frac{d}{p}\right) \Phi\left(\frac{d}{X}\right) = \frac{X}{2p} \left(\frac{2}{p}\right) \sum_{\substack{\alpha \leq Z \\ (\alpha, 2p)=1}} \frac{\mu(\alpha)}{\alpha^2} \sum_m (-1)^m G_m(p) \widetilde{\Phi}\left(\frac{mX}{2\alpha^2 p}\right).$$

De este modo,

$$M_d^{(X)}(Y; g, \Phi) = \frac{X}{2} \sum_{\substack{p \leq Y \\ (2,p)=1}} \frac{\log p}{p^{3/2}} g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \sum_{\substack{\alpha \leq Z \\ (\alpha, 2p)=1}} \frac{\mu(\alpha)}{\alpha^2} \sum_m (-1)^m G_m(p) \widetilde{\Phi}\left(\frac{mX}{2\alpha^2 p}\right).$$

Se sigue directamente de la definición que, cuando $m = 0$, $M_d^{(X)}(Y; g, \Phi) = 0$. Ahora, las sumas en $M_d^{(X)}(Y; g, \Phi)$ correspondientes a la contribución de $m \neq 0$, □

pueden escribirse como $XR/2$, en donde

$$R = \sum_{\substack{\alpha \leq Z \\ (\alpha, 2)=1}} \frac{\mu(\alpha)}{\alpha^2} \sum_{\substack{p \leq Y \\ (2\alpha, p)=1}} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \sum_{m \neq 0, \square} (-1)^m \widetilde{\Phi}\left(\frac{mX}{2\alpha^2 p}\right) \left(\frac{m}{p}\right).$$

Escribimos la condición de $(2\alpha, p) = 1$ como $\chi_{4\alpha^2}(p)$. Entonces, ya que

$$\sum_{\substack{p \leq Y \\ (2\alpha, p)=1}} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \widetilde{\Phi}\left(\frac{mX}{2\alpha^2 p}\right) \left(\frac{m}{p}\right) = \int_1^Y \frac{1}{\sqrt{V}} \widetilde{\Phi}\left(\frac{mX}{2\alpha^2 p}\right) dE(V; \chi_{4\alpha^2 m}, g),$$

se tiene, sumando por partes y por la proposición 5.19, que

$$R \ll \sum_{\alpha \leq Z} \frac{\log^3 X}{\alpha^2} (R_1 + R_2 + R_3),$$

donde

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{\sqrt{Y}} \sum_{m \neq 0, \square} \log^3(|m| + 2) \left| \widetilde{\Phi}\left(\frac{mX}{2\alpha^2 Y}\right) \right| \\ R_2 &= \int_1^V \frac{1}{V^{3/2}} \sum_{m \neq 0, \square} \log^3(|m| + 2) \left| \widetilde{\Phi}\left(\frac{mX}{2\alpha^2 V}\right) \right| dV \\ R_3 &= \int_1^V \frac{X}{\alpha^2 V^{5/2}} \sum_{m \neq 0, \square} \log^3(|m| + 2) \left| m \widetilde{\Phi}'\left(\frac{mX}{2\alpha^2 V}\right) \right| dV. \end{aligned}$$

Lema 5.22. Para $N > 0$, $M \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq 0, \square} \log^3(|m|M) \left| \widetilde{\Phi}\left(\frac{mM}{N}\right) \right| &\ll (\log^3 M(N+2)) \frac{UN}{M} \\ \sum_{m \neq 0, \square} \log^3(|m|M) \left| mM \widetilde{\Phi}'\left(\frac{mM}{N}\right) \right| &\ll (\log^3 M(N+2)) \frac{U^2 N^2}{M}. \end{aligned}$$

El lema nos ayuda a deducir que

$$R \ll \frac{U^2 Z \sqrt{Y} \log^7 X}{X}.$$

Veamos la contribución en el caso cuando $m = \square$. En este caso $G_m(p) = 0$ si $p \mid m$. Si $p \nmid m$ y $m = \square$, $G_m(p) = \sqrt{p}$. Por lo tanto,

$$R_{\square} = \sum_{\substack{\alpha \leq Z \\ (\alpha, 2)=1}} \frac{\mu(\alpha)}{\alpha^2} \sum_{\substack{p \leq Y \\ (2\alpha, p)=1}} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{\log p}{\log X}\right) \sum_{d \mid p} \mu(d) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \widetilde{\Phi}\left(\frac{d^2 m^2 X}{2\alpha^2 p}\right),$$

en donde se ha expresado la condición $(m, p) = 1$ como $\sum_{d \mid (m, p)} \mu(d)$.

Pongamos $d = p$. Hacemos dos distinciones. Cuando $1 \leq pX$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \widetilde{\Phi} \left(\frac{p^2 m^2 X}{2\alpha^2 p} \right) \right| &\ll \sum_{m^2 X p < 2\alpha^2} 1 + \sum_{m^2 X p \geq 2\alpha^2} \frac{\alpha^2}{m^2 X p} \\ &\ll \alpha \sqrt{\frac{1}{pX}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, estos términos contribuyen $\ll \log Z$.

Cuando $1 > pX$, un análisis basado en sumación de Poisson, produce

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \widetilde{\Phi} \left(\frac{p^2 m^2 X}{2\alpha^2 p} \right) = -\frac{\widehat{\Phi}(0)}{2} + O\left(\frac{U}{\alpha} \sqrt{Xp}\right),$$

lo cual contribuye $\ll U$ al término principal.

Los factores aritméticos producen constantes que multiplican al término principal y términos de error que están controlados por los términos de error que se han encontrado. Por ejemplo,

$$\sum_{\substack{\alpha \leq Z \\ (\alpha, 2)=1}} \frac{\mu(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{1}{\zeta(2)} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^{-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{Z}\right)\right).$$

Así, sumando por partes, la contribución a R_{\square} es

$$-\frac{2X \log X \widetilde{\Phi}(0)}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \chi_{[-1,1]}(u)\right) g(u) du + O\left(X(\log Z + U) + \frac{X \log X}{Z}\right).$$

Por lo tanto, la contribución total a $M_d^{(X)}(Y; g, \Phi)$ es

$$\begin{aligned} M_d^{(X)}(Y; g, \Phi) &= -\frac{2X \log X \widetilde{\Phi}(0)}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \chi_{[-1,1]}(u)\right) g(u) du \\ &\quad + O\left(X(\log Z + U) + \frac{X \log X}{Z}\right) + O\left(\frac{U^2 Z \sqrt{Y} \log^7 X}{X}\right). \end{aligned}$$

Pongamos $\widetilde{\Phi}(0) = 1 + O(1/U)$. Sea $\Phi_1(t) = 1 - \Phi(t)$ para $1 \leq t \leq 2$ y $\Phi_1(t) = 0$ en otro caso. Aplicando un análisis similar con esta nueva elección y tomando $Y = X^{2-\epsilon}$ (con $\epsilon = O(1/\log X)$) $U = \log \log X$ y $Z = \log^3 X$, se obtiene (observando que $\#\mathcal{D}_X \sim \frac{4X}{\pi^2}$ conforme $X \rightarrow \infty$)

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{D}_X} S_d^{(X)}(g) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \chi_{[-1,1]}(u)\right) g(u) du.$$

Por lo tanto, para f una función par y de clase Schwartz con \widehat{f} soportada en $(-2, 2)$,

$$\begin{aligned}\lim_{X \rightarrow \infty} \left\langle D_{8d}(f) \right\rangle_{\mathcal{D}_X} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(u) du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \chi_{[-1,1]}(u)) \widehat{f}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(1 - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{2\pi x} \right) dx.\end{aligned}$$

APÉNDICE A

El lema de transposición y el lema de Gaudin

Definición A.1. Para cualquier N -upla de números complejos (x_1, \dots, x_N) , se define al determinante de Vandermonde como:

$$\text{Van}(x_1, \dots, x_N) = \det_{N \times N} \left(x_k^{j-1} \right)_{j,k} = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j).$$

En nuestros cálculos, será útil el siguiente lema:

Lema A.2 (Lema de Transposición). Se tiene que

$$\det_{N \times N} \left(\psi_{j-1}(x_k) \right) \det_{N \times N} \left(\phi_{j-1}(x_k) \right) = \det_{N \times N} \left(\sum_{n=1}^N \psi_{n-1}(x_j) \phi_{n-1}(x_k) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que el determinante de una matriz es el mismo que el de su transpuesta, es claro que

$$\begin{aligned} \det_{N \times N} \left(\psi_{j-1}(x_k) \right) \det_{N \times N} \left(\phi_{j-1}(x_k) \right) &= \det_{N \times N} \left(\left(\psi_{j-1}(x_k) \right)^t \right) \det_{N \times N} \left(\phi_{j-1}(x_k) \right) \\ &= \det_{N \times N} \left(\left(\psi_{j-1}(x_k) \right)^t \left(\phi_{j-1}(x_k) \right) \right) \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left(\left(\psi_{j-1}(x_k) \right)^t \left(\phi_{j-1}(x_k) \right) \right)_{j,k} &= \sum_{n=1}^N \left(\psi_{j-1}(x_k) \right)_{j,n}^t \left(\phi_{j-1}(x_k) \right)_{n,k} \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\psi_{j-1}(x_k) \right)_{n,j} \left(\phi_{j-1}(x_k) \right)_{n,k} \\ &= \sum_{n=1}^N \psi_{n-1}(x_j) \phi_{n-1}(x_k), \end{aligned}$$

con lo cual terminamos la prueba. □

1. Lema de Gaudin

El siguiente lema será de vital importancia para calcular las estadísticas de interés.

Teorema A.3 (Lema de Gaudin). *Supongamos que tenemos una función $f(x, y)$ integrable sobre un intervalo J y tal que*

$$\int_J f(x, \theta) f(\theta, y) dy = C f(x, y),$$

para toda x, z y donde $C = C(f, J)$ es una constante. Supongamos también que

$$\int_J f(x, x) dx = D,$$

donde $D = D(f, J)$ es una constante. Entonces

$$\int_{M \times M} \det(f(\theta_j, \theta_k)) d\theta_M = (D - (M - 1)C) \det_{(M-1) \times (M-1)}(f(\theta_j, \theta_k)).$$

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos con la expansión del determinante

$$\det_{M \times M}(f(\theta_j, \theta_k)) = \sum_{\sigma \in S_M} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=i}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma_j}),$$

e integramos ésta expresión con respecto a J para así obtener:

$$\int_J \det_{M \times M}(f(\theta_j, \theta_k)) d\theta_M = \sum_{\sigma \in S_M} \operatorname{sgn}(\sigma) \int_J \prod_{j=i}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma_j}) d\theta_M.$$

Ahora bien, lo que se hará es partir la prueba en dos casos

i) $\sigma M \neq M$. En cada producto $\prod_{j=1}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma_j})$, la variable θ_M aparece en dos factores:

$$f(\theta_M, \theta_{\sigma M}) \text{ y } f(\theta_{\sigma^{-1}M}, \theta_M).$$

En donde hemos utilizado el hecho de que $\sigma j = M$ implica que $j = \sigma^{-1}M$.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \int_J \prod_{j=1}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma_j}) d\theta_M &= \prod_{\substack{j=1 \\ \sigma j \neq M}}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma_j}) \int_J f(\theta_{\sigma^{-1}M}, \theta_M) f(\theta_M, \theta_{\sigma M}) d\theta_M \\ &= C f(\theta_{\sigma^{-1}M}, \theta_{\sigma M}) \prod_{\substack{j=1 \\ \sigma j \neq M}}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma_j}). \end{aligned}$$

Ahora, reordenamos el producto en términos de una permutación en S_{M-1} . Para esto, definimos $\sigma' \in S_{M-1}$ como sigue

$$\sigma' j = \begin{cases} \sigma j & \text{si } \sigma j \neq M \\ \sigma M & \text{si } \sigma j = M \end{cases}$$

Así pues, para $\sigma \in S_M$ fijo con $\sigma' \in S_{M-1}$,

$$\int_J \prod_{j=1}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma j}) d\theta_M = C \prod_{j=1}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma' j}).$$

Hacemos notar lo siguiente

- $\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(\sigma')$
- Existen $M - 1$ permutaciones distintas $\sigma \in S_M$ que dan la misma permutación $\sigma' \in S_{M-1}$

Gracias a estas observaciones, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma \in S_M \\ \sigma M \neq M}} \text{sgn}(\sigma) \int_J \prod_{j=1}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma j}) &= -(M-1)C \sum_{\sigma' \in S_{M-1}} \text{sgn}(\sigma') \prod_{j=1}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma' j}) \\ &= -(M-1)C \det_{(M-1) \times (M-1)} (f(\theta_j, \theta_k)). \end{aligned}$$

ii) $\sigma M = M$. En cada producto $\prod_{j=1}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma j})$, la variable θ_M aparece solo en un factor:

$$f(\theta_M, \theta_{\sigma M}) = f(\theta_M, \theta_M).$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \int_J \prod_{j=1}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma j}) d\theta_M &= \int_J f(\theta_M, \theta_M) dx_M \prod_{j=1}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma j}) \\ &= D \prod_{j=1}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma j}) \\ &= D \prod_{j=1}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma' j}) \end{aligned}$$

donde $\sigma' j \in S_{M-1}$ está definida por $\sigma' j = \sigma j$ para $1 \leq j \leq M-1$. Notemos que $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma')$. Por lo tanto, obtenemos para este caso

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma \in S_M \\ \sigma M = M}} \int_J \prod_{j=1}^M f(\theta_j, \theta_{\sigma j}) d\theta_M &= D \sum_{\sigma' \in S_{M-1}} \text{sgn}(\sigma') \prod_{j=1}^{M-1} f(\theta_j, \theta_{\sigma' j}) \\ &= D \det_{(M-1) \times (M-1)} (f(\theta_j, \theta_k)). \end{aligned}$$

Combinando ambos casos, obtenemos el resultado. □

Polinomios ortogonales, núcleos reproductivos y determinantes de Fredholm

Sea W una medida positiva finita en \mathbb{R} . W puede o no ser absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dx de \mathbb{R} ; sin embargo en los ejemplos que consideramos W sí tiene una densidad, es decir $dW(x) = w(x)dx$. A w lo llamaremos un peso admisible. Sea $w(x) \geq 0$ un peso admisible sobre \mathbb{R} con momentos finitos, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^j w(x) dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Definición B.1. Dado un peso admisible $w(x)$, los polinomios ortogonales $\{p_n\}_{n \geq 0}$ están definidos por las siguientes condiciones:

- i) $p_n(x)$ es un polinomio de grado n ,
- ii) son ortogonales,

$$\langle p_n, p_m \rangle := \int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) w(x) dx = \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker, que vale la unidad cuando $n = m$ y cero en otro caso.

1. Ejemplos de polinomios ortogonales

1.1. Polinomios de Hermite.

Definición B.2. Los polinomios de Hermite H_n están definidos por la fórmula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx^n} e^{-x^2}.$$

1.1.1. *Ortogonalidad.* Los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto al peso admisible e^{-x^2} es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = n! 2^n \sqrt{\pi} \delta_{n,m}.$$

1.2. Polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie.

Definición B.3. Los polinomios de Chebyshev T_n de primera especie están definidos por

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Definición B.4. Los polinomios de Chebyshev U_n de segunda especie están definidos por

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\text{sen}(\theta(n+1))}{\text{sen}(\theta)}.$$

Nótese que el coeficiente principal en $T_n(x)$ es 2^{n-1} y en $U_n(x)$ es 2^n . Una modificación de los polinomios de Chebyshev de segunda especie son los polinomios de grado n definidos como

$$V_n(\cos(\theta)) = U_{2n}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

1.2.1. *Ortogonalidad.* Los polinomios de Chebyshev de primera especie son ortogonales con respecto al peso admisible

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

en el intervalo $[-1, 1]$, es decir, tenemos:

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Similarmente, los polinomios de Chebyshev de segunda especie son ortogonales con respecto al peso admisible

$$\sqrt{1-x^2}$$

en el intervalo $[-1, 1]$, es decir, tenemos:

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } n = m \end{cases}$$

2. Fórmula de Christoffel-Darboux

Proposición B.5 (Christoffel-Darboux). Dada una sucesión $\{p_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortogonales, se cumple la siguiente relación para $x \neq y$:

$$\sum_{n=0}^N \frac{p_n(x)p_n(y)}{\langle p_n, p_n \rangle} = \frac{a_{N+1}}{a_N \langle p_N, p_N \rangle} \frac{p_{N+1}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N+1}(y)}{x - y},$$

en donde a_n es el coeficiente principal del n -ésimo polinomio.

3. Núcleos Reproductivos y Determinantes de Fredholm

Definición B.6. Si $\{p_n\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales con respecto al peso admisible w , el núcleo reproductivo de grado N es la función

$$K_N(u, v) := \sum_{j=0}^{N-1} p_j(u)p_j(v).$$

Definición B.7. Sea $K(x, y)$ una función con valores en los reales acotada y simétrica en xy . Definimos el determinante de Fredholm del núcleo $I + TK$ como

$$\det(I + T\chi_B K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \int_B \cdots \int_B \det_{n \times n}(K(x_i, x_j)) dx_1 \dots dx_n.$$

Un hecho general es que si un núcleo K es de rango finito en el sentido de que para funciones f_j en $L^2(w)$,

$$K(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j(x)f_j(y),$$

entonces la serie que determina al determinante de Fredholm es un polinomio de grado N en T (es decir, el N -ésimo término de la serie no se anula, mientras que todos los términos posteriores son nulos).

APÉNDICE C

Resultados de teoría analítica de números

Todos los resultados que aquí se enuncian pueden ser encontrados en [3].

Lema C.1. Para $\text{Re}(s) > 1$,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

DEMOSTRACIÓN. Tomando la derivada logarítmica al producto de Euler de $\zeta(s)$ se tiene, para $\text{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) &= \sum_p \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} \\ &= - \sum_p \log p \frac{1}{1 - p^{-s}} \\ &= - \sum_p \log p \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k \\ &= - \sum_{p,k} \frac{\log p}{p^{ks}} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n}. \end{aligned}$$

□

Definición C.2. La función ψ de Chebyshev se define como

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \Lambda(n).$$

Definición C.3. La función de Möbius se define como

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^k & n = p_1 p_2 \cdots p_k \\ 0 & p^2 \mid n. \end{cases}$$

Definición C.4. La función que cuenta el número de primos no mayores que un real x es

$$\pi(x) = \#\{p \leq x : p \text{ es primo}\}$$

Teorema C.5 (Teorema del Número Primo). Tenemos

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

En particular, esto es equivalente a decir que

$$\psi(x) \sim x.$$

Proposición C.6. Sea $f(n)$ una sucesión de funciones complejas. Sea $g(t)$ una función con argumento real y continua. Sea

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$$

la función suma de la sucesión $f(n)$. Entonces

$$\sum_{a \leq n \leq b} f(n)g(n) = \int_{a^-}^b g(t)dF(t).$$

Proposición C.7 (Sumación por partes). Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones complejas. Suponga que $g(t)$ es continua. Sea

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$$

la función suma de la sucesión $f(n)$. Entonces

$$\int_a^b g(t)dF(t) = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)dg(t).$$

Bibliografía

- [1] G. Akemann, J. Baik, and P. Di Francesco editors, The Oxford Handbook of Random Matrix Theory (Oxford University Press, 2011)
- [2] G. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. An Introduction to Random Matrices, volume 118 of Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 2009.
- [3] T. Apostol, Introducción a la Teoría Analítica de Números, Editorial Reverté, Barcelona, (1984)
- [4] E. Bombieri, Hilbert's 8-th Problem an Analogue, Proc. Sym. Pure Math. AMS XXVIII, 269-275, (1976).
- [5] D. Bump. Lie groups, volume 225 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [6] D. Bump, J. W. Cogdell, E. de Shalit, D. Gaitsgory, E. Kowalski, and S. S. Kudla. An introduction to the Langlands program. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003. Lectures presented at the Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, March 12-16, 2001, Edited by Joseph Bernstein and Stephen Gelbart.
- [7] J. Cogdell, Notes on L-functions for GL_n , ICTP Lecture Notes, (1999)
- [8] H. Davenport, Multiplicative Number Theory, Springer Verlag, G.T.M. (1974).
- [9] E. Dueñez and S. J. Miller, The low lying zeros of a $GL(4)$ and a $GL(6)$ family of L-functions, 142 (2006), no. 6.
- [10] P. Deift, Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach, Courant Lec. Notes No. 3. Amer. Math. Society, Providence, Rhode Island, 2000.
- [11] F. Dyson, Statistical theory of the energy levels of complex systems, I, II and III, J. Mathematical Phys., v. 3, 140-175 (1962).
- [12] A. Entin, E. Roditty-Gershon and Z. Rudnick, Low-lying zeros of quadratic Dirichlet L-functions, hyper-elliptic curves and Random Matrix Theory, arxiv:1208.5962
- [13] P. Forrester, Log-gases and random matrices. London Mathematical Society Monographs Series, 34. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010.
- [14] E. Fouvry and H. Iwaniec, Low-lying zeros of dihedral L-functions, Duke Math. J. 116 (2003), no. 2.
- [15] P. Gao, n -level density of the low-lying zeros of quadratic Dirichlet L-functions. Disponible en arXiv:0806.4830
- [16] M. Gaudin, M. Mehta, On the Density of Eigenvalues of a Random Matrix, Nucl. Phys., v. 18, 420-427 (1960).
- [17] M. Gaudin, Sur la loi Limite de L'espacement de Valeurs Propes D'une Matrice Aleatoire, Nucl. Phys., 25, 447-458, (1961).
- [18] D. Goldston, H. Montgomery, Pair Correlation of Zeroes and Primes in Short Intervals, Progress in Math., Vol. 70, Birkhauser, 183-203, (1987).
- [19] P. Halmos, Measure Theory, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.
- [20] D. Hejhal, On the Triple Correlation of the Zeroes of the Zeta Function, IMRN, 293-302, (1994).
- [21] C. Hughes, S. J. Miller. Low-lying zeros of L-functions with orthogonal symmetry. Duke Math. J., 136(1), (2007).

- [22] C. Hughes, Z. Rudnick, Linear statistics of low-lying zeros of L-functions. *Q. J. Math.* 54 (2003), no. 3, 309-333.
- [23] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [24] H. Iwaniec, W. Luo, P.Sarnak, Low Lying Zeros of families of L-functions, *Publ. IHES.* 91 (2001), 55-131.
- [25] M. Jutila, On the mean value of $L(1/2, \chi)$ for real characters, *Analysis* 1 (1981), no. 2, 149-161.
- [26] N. Katz, P. Sarnak, *Random Matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy monodromy*, volume 45 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, (1999).
- [27] N. Katz, P. Sarnak, Zeros of zeta functions and symmetry, *Bull. Amer. Soc.* 36, 1-26, 1999. *Colloquium Publications*, 45. American Mathematical Society, Providence, Rhode island, 1999.
- [28] J. Keating, N. Snaith, *Random Matrix Theory and $\zeta(1/2 + it)$* , *Comm. Math. Phys.* 214, p 57-89, 2000.
- [29] J. Keating, N. Snaith, *Random matrix theory and L-functions at $s = 1/2$* , *Comm. Math. Phys.* 214 p 91-110, 2000.
- [30] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Berlin, (1909).
- [31] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Second Edition, Academic Press, Boston (1991).
- [32] F. Mezzadri, N. Snaith (editors), *Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory*, *London Mathematical Society Lecture Note Series* 322 (CUP), (2005).
- [33] S. J. Miller, 1- and 2-level densities for families of elliptic curves: evidence for the underlying group symmetries, *Compositio Mathematica* 104 (2004), 952-992.
- [34] H. Montgomery, *The Pair Correlation of Zeroes of the Zeta Function*, *Proc. Sym. Pure Math.*, 24, AMS, 181-193, (1973).
- [35] H. Montgomery, R. Vaughan, *The Large Sieve*, *Mathematika* 20, 119-134, (1973).
- [36] A. Odlyzko, *The 10^{20} -th Zero of the Riemann Zeta Function and 70 Million of its Neighbors*, *ATT Bell laboratories*, (1989).
- [37] A. Ozlük, C. Snyder, *Small Zeroes of Quadratic L-Functions*, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 47, 307-319, (1993).
- [38] M. Rubinstein, *Evidence for a Spectral Interpretation of Zeros of L-functions*. Thesis, Princeton University, (1998).
- [39] R. Rumely, *Numerical Computations Concerning ERH*, *Math. Comp.*, 61, 415-440, (1993).
- [40] Z. Rudnick, P. Sarnak, *The n-level correlations of zeros of the zeta function*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 1027-1032, (1994).
- [41] Z. Rudnick, P. Sarnak, *Zeros of Principle L-Functions and Random Matrix Theory*, *Duke Math. Jnl.*, v. 81, 2, 269-322, (1996).
- [42] K. Soundararajan, *Nonvanishing of quadratic Dirichlet L-functions at $s = \frac{1}{2}$* , *Ann. of Math. (2)* 152 (2000), no. 2, 447-488.
- [43] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, New York, 1939.
- [44] E. Titchmarsh *The zeros of Dirichlet's L-functions*, *Proc. London Math. Soc. (2)* 32 (1931).
- [45] C. A. Tracy and H. Widom, *Correlation functions, cluster functions, and spacing distributions for random matrices*, *J. Stat. Phys.* 92 (1998), 809-835.
- [46] M. Young, *Low-lying zeros of families of elliptic curves*, *J. Amer. Math. Soc.* 19 (2006), no. 1.