Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

PROCESOS DE LÉVY ESPECTRALMENTE NEGATIVOS CON APLICACIONES A TEORÍA DEL RIESGO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:

RODRIGO GACHUZ ATITLÁN

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JUAN CARLOS PARDO MILLÁN

2013

Índice general

Introducción

En éste trabajo estudiamos conceptos importantes en la teoría de procesos estocásticos tales como martingalas, tiempos de paro, procesos puntuales de Poisson, subordinadores o procesos de Lévy, para finalizar dando una aplicación en el marco de la teoría de riesgo. Ésta aplicación está basada en el artículo de Biffis y Kyprianou: *A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes*, [4].

La tesis consta de cuatro capítulos. El primer capítulo es de carácter introductorio y contiene conceptos y resultados que se necesitarán a lo largo de la tesis. Se estudian elementos básicos de teoría de martingalas y tiempos de paro tales como las desigualdades maximales y el teorema de paro de Doob.

En el segundo capítulo se generaliza la idea del Proceso de Poisson en una dimensión. Estudiamos las medidas aleatorias de Poisson en espacios medibles σ-finitos. Damos una construcción explícita y se demuestran algunas propiedades como la propiedad de la imagen y la fórmula de Campbell. Definimos un proceso puntual de Poisson.
Finalmente se da una extensión de la noción de los procesos puntuales de Poisson definiendo a una clase más general llamada subordinadores y demostramos el teorema de Finetti-Lévy-Khintchine, el cual nos proporciona una caracterización de los subordinadores en términos de sus exponentes de Laplace.

En el tercer capítulo introducimos la noción de los procesos de Lévy, estudiamos propiedades sobre los mismos mediante sus exponentes de Laplace, para así dar paso a la definición de los procesos de Lévy espectralmente negativos e iniciar con el estudio de problemas de salida mediante las funciones de escala.

Finalmente el último capítulo se divide en dos secciones, en la primera sección se analizan las penalizaciones descontadas al momento de la ruina para el comportamiento del superávit caracterizado por un proceso de Lévy espectralmente negativo cuyos saltos son de variación acotada. La segunda sección muestra algunos ejemplos de funciones de escala para algunos casos particulares de procesos de riesgo.

A lo largo del presente trabajo se parte del supuesto que el lector tiene conocimiento previo en teoría de la medida, para lo cual puede consultarse [1], [2], [5] o [9].

Capítulo 1

Martingalas y Tiempos de Paro

En este primer capítulo definiremos y estudiaremos las principales propiedades de los tiempos de paro y las martingalas a tiempo continuo, temas fundamentales para el estudio de los procesos estocásticos y el desarrollo de los capítulos posteriores. Para poder iniciar con este trabajo definiremos de manera formal a los procesos estocásticos, sus trayectorias, procesos equivalentes y algunas de sus propiedades más importantes.

1.1. Procesos Estocásticos

Consideremos un sistema que se caracteriza por tomar valores en un conjunto de estados previamente especificado. Supongamos que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo, y sea X_t el estado del sistema al tiempo t. Si se considera que la forma en la que el sistema evoluciona no es determinista, sino provocada por algún efecto azaroso, entonces puede considerarse que X_t es una variable aleatoria para cada valor de t. Esta colección de variables aleatorias es la definición de proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo.

Definición 1.1. *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias* $X = (X_t)_{t\in I}$*, donde* $I \subseteq \mathbb{R}^+$*, definidas en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *con valores en un espacio medible* $(E, \mathcal{E})$*, generalmente llamado espacio de estados.*

Si por ejemplo tomamos a I como un subconjunto finito o numerable de $\mathbb{R}_+$ extendemos la definición al caso discreto. Generalmente vamos a considerar al conjunto I como $\mathbb{R}_+$.

Definición 1.2. *La trayectoria de un proceso* $(X_t)_{t\geq 0}$ *se define como la función* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *para cada* $\omega \in \Omega$.

La definición anterior nos proporciona un modelo matemático para un experimento aleatorio cuyo resultado se puede observar de manera continua en el tiempo.

Las siguientes definiciones caracterizan a los procesos a través de sus trayectorias.

Definición 1.3. *Decimos que un proceso estocástico* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es continuo (por la derecha o por la izquierda) si las trayectorias del proceso son continuas (por la derecha o por la izquierda) casi seguramente, es decir, que para casi toda* $\omega \in \Omega$ *se cumple que la trayectoria correspondiente* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *es continua (por la derecha o por la izquierda). De la misma manera se define continuidad por la derecha con límite por la izquierda o el de continuidad por la izquierda con límite por la derecha.*

Más adelante se verá la importancia de que los procesos tengan alguna de las propiedades trayectoriales arriba mencionadas.

Una cuestión importante para el estudio de procesos estocásticos es poder definir cuando dos procesos son iguales, así que consideremos a dos procesos estocásticos $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Decimos que dos procesos estocásticos son iguales si para toda $t \geq 0$ y toda $\omega \in \Omega$ se cumple que $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. Esta propiedad de igualdad entre dos procesos estocásticos es muy fuerte. A continuación se analizarán tres conceptos de "igualdad"entre procesos, los cuales requieren condiciones un poco más débiles que la definida anteriormente.

Definición 1.4. *El proceso* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *es una modificación del proceso* $(X_t)_{t\geq 0}$ *si para cada* $t \geq 0$ *se tiene que*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : Y_t(\omega) = X_t(\omega)) = 1.$$

Definición 1.5. *Los procesos* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *y* $(X_t)_{t\geq 0}$ *son indistinguibles si*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega); \textit{para toda } t \in [0, \infty)) = 1.$$

Definición 1.6. *Dos procesos estocásticos* $(X_t)_{t\geq 0}$ *y* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *definidos en los espacios de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ *respectivamente y con el mismo espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *son equivalentes si tienen las mismas distribuciones finito dimensionales, es decir, si para cualquier sucesión finita* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *donde* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ *y* $A \in \mathcal{E}^n$ *se tiene*

$$\mathbb{P}\left((X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \in A\right) = \mathbb{P}\left((Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}) \in A\right).$$

Es claro que si dos procesos son indistinguibles unos es modificación del otro y por lo tanto ambos son equivalente. Por otro lado, dos procesos pueden ser una modificación uno del otro y tener diferentes trayectorias.

Ejemplo 1.7. *Consideremos a una variable aleatoria* Z *positiva con distribución continua, sea* $X_t = 0$, $Y_t = 1$ *si* $t = Z$ *y* $Y_t = 0$ *en otro caso. El proceso* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *es una modificación de* $(X_t)_{t\geq 0}$*, ya que para cada* $t \geq 0$ *tenemos que*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(Z \neq t) = 1,$$

y por otro lado

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t; \textit{para toda } t \in (0, \infty]) = 0.$$

En general si un proceso es modificación de otro y ambos son continuos por la derecha o por la izquierda, entonces van a ser indistinguibles, en efecto,

Proposición 1.8. *Sea* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *una modificación de* $(X_t)_{t\geq 0}$ *y ambos son continuos por la derecha (por la izquierda) o continuos, entonces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *y* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *son indistinguibles.*

Demostración. La demostración es para el caso en que ambos procesos son continuos por la derecha, los otros dos casos son análogos.
Sea A el conjunto donde las trayectorias del proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ no son continuas por las derecha, y sea B el conjunto análogo para el proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$. Si $C_t = \{X_t \neq Y_t\}$, y $C = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} C_t$, entonces $\mathbb{P}(C) = 0$. Por lo tanto si $N = A \cup B \cup C$, se tendra $\mathbb{P}(N) = 0$.
Como N tiene probabilidad cero, entonces para cada $\omega \notin N$ se tiene $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para toda $t \in \mathbb{Q}_+$. Si t no es racional, existe una sucesión $(t_n)_{n\geq 1}$ de racionales no negativos, decreciente que converge a t. Para $\omega \notin N$, $X_{t_n}(\omega) = Y_{t_n}(\omega)$ para cada $n \geq 1$, y

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t(\omega).$$

Como $\mathbb{P}(N) = 0$, entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es indistinguible de $(Y_t)_{t\geq 0}$.

□

De lo anterior es claro que un proceso estocástico es en realidad una función que depende de dos variables (ω, t), si tomamos a t fija, sabemos que X_t es una función $\mathcal{F}$-medible, pero si el evento ω es fijo no tenemos conocimiento de alguna propiedad de medibilidad sobre las trayectorias. Es por ello que conviene tener alguna propiedad de medibilidad conjunta.

Definición 1.9. *Un proceso estocástico* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *se llama medible si, para toda* $A \in \mathcal{E}$*, el conjunto* $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in A\}$ *pertenece a la* σ*-álgebra producto* $\mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{F}$*, es decir,*

$$(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega) : ([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{F}) \longmapsto (E, \mathcal{E}).$$

1.2. Filtraciones

Para poder definir los conceptos de tiempos de paro y martingalas en el caso continuo es necesario el concepto de filtración.

Definición 1.10. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sub-*σ*-álgebras de* $\mathcal{F}$*, tales que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *siempre y cuando* $s \leq t$*.*

Al sistema $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ se le llama espacio de probabilidad filtrado. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la filtración canónica asociada a dicho proceso esta dada por $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$. Denotaremos por

$$\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right), \qquad \mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \qquad \text{para toda } t \geq 0.$$

Es claro que $\mathcal{F}_{t^-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t^+}$, sea $s_0 < t$ entonces, $(X_s : s \leq s_0) \subseteq (X_s : s \leq t)$ por lo que $\mathcal{F}_{s_0} \subseteq \mathcal{F}_t$ para toda $s_0 < t$ por lo cual se tiene que $\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. Por lo tanto por la definición de σ-álgebra $\mathcal{F}_{t^-} \subseteq \mathcal{F}_t$. La prueba para la segunda contención es análoga por lo que omitiremos el detalle.

El introducir una filtración nos permite estudiar conceptos más interesantes y más útiles que el concepto de proceso medible.

Definición 1.11. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ diremos que el proceso es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si para toda $t \geq 0$ se tiene que la variables aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.*

Definición 1.12. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ diremos que el proceso es progresivamente medible si para toda $t \in \mathbb{R}$*

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longmapsto X_s(\omega)$$

es $\mathbb{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible.

Notemos que todo proceso es adaptado a su filtración canónica y todo proceso progresivamente medible es adaptado. En general no siempre se tendrá que un proceso adaptado es progresivamente medible, salvo que el proceso sea continuo por la derecha o por la izquierda, por lo cual enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 1.13. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con valores en un espacio métrico $(E, \mathcal{B}(E))$, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y continuo por la derecha, o por a izquierda, entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible.*

Demostración. Demostraremos el caso en que el proceso es continuo por la derecha, el otro caso es análogo. Por lo que es suficiente ver que para cada $A \in \mathcal{B}$

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t.$$

Para cada $n \geq 1$, $k = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ y $0 \leq s \leq t$, definamos el proceso

$$X_s^n(\omega) = \begin{cases} X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega) & \text{si } \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)t}{2^n}, \\ X_0(\omega) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Debido a la continuidad por la derecha tenemos que $\lim_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$ para toda $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$. Por lo tanto basta mostrar que $X_s^n(\omega)$ es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible para obtener el resultado.

Al conjunto

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s^n(\omega) \in A\}$$

se puede ver como

$$\bigcup_{k=1}^{2^n}\left\{\left(\frac{kt}{2^n},\frac{(k+1)t}{2^n}\right]\times\left\{X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega)\in A\right\}\right\}\bigcup\left\{\{0\}\times\{X_0(\omega)\in A\}\right\},$$

el cual claramente esta en $\mathcal{B}[0,t]\times\mathcal{F}_t$. $\square$

Definición 1.14. *Una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se llama continua por la derecha si $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t^+}$ para toda $t\geq 0$.*

De esta última definición veamos que $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ es continua por la derecha. Renombremos a $\mathcal{F}_{t^+}$ por $\mathcal{G}_t$, entonces,

$$\mathcal{G}_t\subseteq\mathcal{G}_{t^+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{G}_s=\bigcap_{s>t}\left(\bigcap_{u>s}\mathcal{F}_u\right)\subseteq\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s=\mathcal{F}_{t^+}=\mathcal{G}_t,$$

para toda $t\geq 0$, por lo tanto es continua por la derecha.

1.3. Tiempos de Paro

Definición 1.15. *Sea $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Una función $\tau:\Omega\longmapsto[0,\infty]$ se llama tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si*

i) τ es $\mathcal{F}_\infty=\sigma(\mathcal{F}_t:t\in[0,\infty))$ medible

ii) el conjunto $(\tau\leq t)$ pertence a $\mathcal{F}_t$ para toda $t\geq 0$.

Ejemplo 1.16. *Si τ es una función constante, entonces τ es un tiempo de paro, ya que*

$$(\tau\leq t)=\begin{cases}\emptyset & \text{si } t<c,\\ \Omega & \text{si } t\geq c,\end{cases}$$

ambos conjuntos pertenecen a $\mathcal{F}_t$, por lo tanto el conjunto $(\tau\leq t)$ es medible con respecto a $\mathcal{F}_t$ para toda $t\geq 0$, y por definición, τ es tiempo de paro.

Ejemplo 1.17. *Si τ es un tiempo de paro y k una constante positiva, entonces $\tau+k$ es un tiempo de paro, ya que si $t\in[0,k)$, entonces $(\tau+k\leq t)=\emptyset$, el cual esta en $\mathcal{F}_t$, ahora si $t\geq k$, entonces*

$$(\tau+k\leq t)=(\tau\leq t-k)\in\mathcal{F}_{t-k}\subseteq\mathcal{F}_t.$$

Por lo tanto $\tau+k$ es tiempo de paro.

Proposición 1.18. *Si la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq}$ es continua por la derecha, entonces τ es un tiempo de paro si y sólo si $(\tau<t)\in\mathcal{F}_t$ para toda $t\geq 0$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $t \geq 0$ fijo, por ser τ tiempo de paro

$$(\tau \leq s) \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t. \quad \text{para toda } s < t,$$

entonces

$$(\tau < t) = \bigcup_{s<t} (\tau \leq s) \in \mathcal{F}_t \quad \text{para toda } t \geq 0.$$

$\Longleftarrow$) Como la filtración es continua por la derecha y como $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$, se tiene que

$$(\tau \leq t) = \bigcap_{s>t} (\tau < s) \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$$

□

Notemos que en la primera parte de la demostración, nunca se utilizó que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha, por lo cual, se puede afirmar que si τ es un tiempo de paro entonces $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Proposición 1.19. *Sea τ un tiempo de paro con respecto de la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $X_t = 1_{[0,\tau]}(t)$, entonces el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ resulta ser un proceso adaptado a la filtración.*

Demostración. Sea $t \geq 0$ fija, entonces

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \tau(\omega), \\ 0 & \text{si } t > \tau(\omega), \end{cases}$$

por lo tanto,

$$(X_t \leq u) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } u < 0, \\ (\tau < t) & \text{si } u \in [0,1), \\ \Omega & \text{si } u \geq 1, \end{cases}$$

y esos tres conjuntos están en $\mathcal{F}_t$, ya que τ es tiempo de paro, en conclusión el conjunto $(X_t \leq u) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

□

Definición 1.20. *Definamos al tiempo de entrada en A o primera vez que entra el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ al conjunto A, como*

$$T_A(\omega) = \begin{cases} \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} & \text{si } \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si } \{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} = \emptyset. \end{cases}$$

Proposición 1.21. *Sea $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y con espacio de estados $(E, \mathcal{B}(E))$, donde (E, d) es un espacio métrico y sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$*

i) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es continuo por la derecha, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha y A es un conjunto abierto entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

ii) Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es continuo y A es un conjunto cerrado entonces T_A es un tiempo de paro con respecto $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración. i) Sea Ω_0 tal que para todo $\omega \in \Omega_0$ la trayectoria $X_t(\omega)$ es continua por la derecha, entonces $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Sea

$$B_t = \bigcup_{\substack{s<t \\ s\in\mathbb{Q}_+}} (X_s \in A) \quad \text{para } t \geq 0 \text{ fija}$$

donde A es un abierto de $\mathcal{B}(E)$.

Notemos que $B_t \in \mathcal{F}_t$ ya que el proceso X es $\mathcal{F}_t$-adaptado. En consecuencia para mostrar que T_A es un tiempo de paro, basta mostrar que $(T_A \leq t) = B_t$.

Sea $\omega \in B_t$, entonces existe $s \in \mathbb{Q}_+$ y $s < t$ tal que $X_s(\omega) \in A$, por lo tanto $T_A \leq s < t$, es decir $\omega \in (T_A < t)$.

Sea $\omega \in (T_A < t)$ entonces existe t_0 tal que $X_{t_0} \in A$, como A es abierto y $X_{t_0} \in A$ entonces existe ϵ_0 tal que $V(X_{t_0}(\omega), \epsilon_0) = \{y \in E : d(y, X_{t_0}(\omega)) < \epsilon_0\} \subset A$. Como X es continuo por la derecha para ϵ_0 existe δ_0 tal que para todo $s \in [t_0, t_0 + \delta_0)$, $X_s(\omega) \in V(X_{t_0}(\omega), \epsilon_0) \subset A$, por lo tanto T_A es un tiempo de paro.

ii) Para $x \in E$, sea $\rho(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) : y \in A\}$, y consideremos la sucesión de vecindades abiertas de A dada por $A_n = \{x \in E : \rho(x, A) < \frac{1}{n}\}$; como X es continuo y A_n es abierto entonces por (i) T_{A_n} es tiempo de paro.

Notemos que $T_{A_n} < T_{A_{n+1}}$, ya que $A_{n+1} \subset A_n$, además $T_A \geq T_{A_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto el límite de $(T_{A_n})_{n\geq 1}$ existe y es menor que T_A. Sea $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_{A_n}$.

Sobre $(T_A = 0)$ se tiene que $T_{A_n} = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sobre $(T_A > 0)$ existe un entero $k = k(\omega) \geq 1$ tal que

$$0 < T_{A_n} < T_{A_{n+1}} < T_A \quad \text{para } n \geq k$$

Para probar que $T_A = T$ es suficiente probar que $T \geq T_A$ en el conjunto $(T_A > 0, T < \infty)$. En dicho evento tenemos, por la continuidad de las trayectorias de X, que $\lim\limits_{n\to\infty} X_{T_{A_n}} = X_T$ y $X_{T_{A_m}} \in \partial A_m$ para toda $m > n \geq k$. Ahora si hacemos tender a m a infinito obtenemos que $X_T \in A_n$, para toda $n \geq k$ y por lo tanto $X_T = \bigcap\limits_{n\geq k}^{\infty} A_n = A$, es decir, $T_A \leq T$ por la definición de T_A. Finalmente

$$(T_A = 0) = (X_0 \in A) \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t,$$

y para $t > 0$

$$(T_A \leq t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (T_{A_n} < t) \in \mathcal{F}_t$$

Por lo tanto T_A es tiempo de paro.

□

Definición 1.22. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Denotamos por $\mathcal{F}_\tau$ a la colección de eventos $A \in \mathcal{F}$ tales que*

$$A \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Llamaremos a $\mathcal{F}_\tau$ la σ-álgebra detenida en τ.

Proposición 1.23. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Tenemos que $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ y $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$, ya que

$$\Omega \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t \quad \text{y} \quad \emptyset \cap (\tau \leq t) = \emptyset \in \mathcal{F}_t.$$

Veamos que si $A \in \mathcal{F}_\tau$, entonces $A^c \in \mathcal{F}_\tau$,

$$A^c \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) \cap (A \cap (\tau \leq t))^c \in \mathcal{F}_t.$$

Para terminar, sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión tal que $A_n \in \mathcal{F}_\tau$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por demostrar $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_\tau$,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap (\tau \leq t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap (\tau \leq t)) \in \mathcal{F}_t$$

Por lo tanto $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra.

□

Lema 1.24. *Sean θ y τ dos tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\theta \wedge \tau$ y $\theta \vee \tau$ son tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración. Como $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ y $(\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t$, entonces el conjunto

$$(\theta \wedge \tau > t) = (\theta > t) \cap (\tau > t) = (\theta \leq t)^c \cap (\tau \leq t)^c \in \mathcal{F}_t,$$

por lo tanto $(\theta \wedge \tau \leq t) = (\theta \wedge \tau > t)^c \in \mathcal{F}_t$, es decir $\theta \wedge \tau$ es tiempo de paro. La prueba es análoga para $\theta \vee \tau$. □

Lema 1.25. *Sea $(\tau_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$, entonces*

$$\sup_{n\geq 1} \tau_n, \qquad \inf_{n\geq 1} \tau_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} \tau_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} \tau_n$$

son tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$. Si además $(\tau_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces el $\sup\limits_{n\geq 1} \tau_n$ también es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración. Para la demostración de este lema basta ver que

$$\left(\sup_{n\geq 1}\tau_n \leq t\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\tau_n \leq t) \quad \text{y} \quad \left(\inf_{n\geq 1}\tau_n < t\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\tau_n < t)$$

los cuales están en $\mathcal{F}_t$.
Veamos con detalle la primera igualdad, sea $\omega \in \left(\sup_{n\geq 1}\tau_n \leq t\right)$, lo cual equivale a decir que $\sup_{n\geq 1}\tau_n(\omega) \leq t$ que es equivalente a que para toda $n \geq 1$, $\tau_n(\omega) \leq t$ por lo que $\omega \in (\tau_n \leq t)$ para toda $n \geq 1$ por lo tanto $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(\tau_n \leq t)$. La segunda igualdad se demuestra de manera análoga. □

Lema 1.26. *Sean θ y τ dos tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, y $A \in \mathcal{F}_\theta$ entonces $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$. En particular si $\theta \leq \tau$ entonces $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_\tau$.*

Demostración. Basta probar que $A \cap (\theta \leq \tau)$ está en $\mathcal{F}_\tau$ y en $\mathcal{F}_\theta$.

Primero veamos que $A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_\tau$ para todo $t \geq 0$, para ello tenemos que

$$A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) = A \cap (\theta \leq t) \cap (\theta \wedge t \leq \tau \wedge t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

ya que $A \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t$, $(\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ y $\theta \wedge t$ y $\tau \wedge t$ son $\mathcal{F}_t$-medibles, entonces $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\tau$.

Veamos ahora que $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\theta$, fijémonos entonces en los siguientes conjuntos

$$A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau \leq t) \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t$$

y

$$A \cap (\theta \leq \tau) \cap (\tau > t) \cap (\theta \leq t) = A \cap (\tau > t) \cap (\theta \leq t) \in \mathcal{F}_t,$$

por lo tanto

$$A\cap(\theta \leq \tau)\cap(\theta \leq t) = \Big(A\cap(\theta \leq \tau)\cap(\tau \leq t)\cap(\theta \leq t)\Big)\cup\Big(A\cap(\theta \leq \tau)\cap(\tau > t)\cap(\theta \leq t)\Big) \in \mathcal{F}_t,$$

lo cual prueba que $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\theta$.
En particular si $\theta \leq \tau$ entonces $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_\tau$, sea $A \in \mathcal{F}_\theta$ entonces $A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_\theta \cap \mathcal{F}_\tau$ y como $(\theta \leq \tau) = \Omega$ entonces $A \cap \Omega \in \mathcal{F}_\theta \cap \mathcal{F}_\tau$ y por lo tanto $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_\tau$ □

Lema 1.27. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y θ una función $\mathcal{F}_\tau$-medible tal que $\theta \geq \tau$, entonces θ es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Demostración. Como θ es $\mathcal{F}_\tau$-medible y como $\theta \geq \tau$, entonces $(\theta \leq t) = (\theta \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$, por lo tanto θ es tiempo de paro. □

Lema 1.28. *La suma de dos tiempos de paro es tiempos de paro.*

Demostración. Sean τ y θ dos tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, entonces $\tau \vee \theta$ es un tiempo de paro con respecto a la misma filtración, es claro que τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible, θ es $\mathcal{F}_\theta$-medible y $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_{\tau\vee\theta}$, ya que τ, $\theta \leq \tau \vee \theta$, por lo que concluimos que $\tau + \theta$ es $\mathcal{F}_{\tau\vee\theta}$-medible, además $\tau + \theta \geq \tau \vee \theta$ así que por el lema anterior concluimos que $\tau + \theta$ es un tiempo de paro. □

Hemos probado que la suma de tiempos de paro es nuevamente un tiempo de paro, analicemos ahora qué pasa con la diferencia. Consideremos a τ_1 y τ_2 dos tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de tal manera que $\tau_1 \geq \tau_2$ y $\tau_2 = k$, donde k es una constante. Notemos que

$$(\tau_1 - \tau_2 \leq t) = (\tau_1 \leq t + k) \in \mathcal{F}_{t+k}$$

por lo tanto, la diferencia no es tiempo de paro.

Lema 1.29. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ entonces existe una sucesión $(\tau_n)_{n\geq 1}$ de tiempos de paro discretos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau$.*

Demostración. Definamos primero una sucesión $(\tau_n)_{n\geq 1}$ de tiempos aleatorios decreciente, de la siguiente manera

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{si } \frac{k-1}{2^n} \leq \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}, \qquad k = \{1, 2, \ldots\} \\ \infty & \text{si } \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

Por definición $\tau_n \geq \tau_{n+1}$.
Veamos que τ_n es $\mathcal{F}_\tau$-medible para toda n, es decir, $(\tau_n \leq t) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n}$ y sea $\omega \in (\tau_n \leq t)$, entonces por definición de τ_n

$$\tau_n(\omega) \leq t \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_n(\omega) \leq \frac{k-1}{2^n} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(\omega) < \frac{k-1}{2^n}$$

por lo tanto $(\tau_n \leq t) = (\tau < \frac{k-1}{2^n})$, entonces

$$(\tau_n \leq t) \cap (\tau \leq t) = \left(\tau < \frac{k-1}{2^n}\right) \cap (\tau \leq t) = \left(\tau < \frac{k-1}{2^n}\right) \in \mathcal{F}_{\frac{k-1}{2^n}} \subset \mathcal{F}_t$$

Por lo tanto τ_n es $\mathcal{F}_t$-medible. Como $\tau_n \geq \tau$ por el Lema 1.3.4 tenemos que τ_n es un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ ya que

$$|\tau_n - \tau| \leq \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lema 1.30. *Sea τ y θ con tiempos de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Entonces $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$ y cada uno de los eventos*

$$(\tau < \theta), \quad (\theta < \tau), \quad (\tau \leq \theta), \quad (\theta \leq \tau), \quad (\tau = \theta)$$

pertenecen a $\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\theta$

Demostración. Es claro que $\tau \wedge \theta \leq \tau\,, \theta$ así que por el Lema 1.3.3 tenemos $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} \subset \mathcal{F}_{\tau}$ y $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} \subset \mathcal{F}_{\theta}$ por lo tanto concluimos que $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} \subset \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$. Para ver la otra inclusión tomemos un conjunto $A \in \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$ y veamos que

$$\begin{aligned} A \cap (\tau \wedge \theta \leq t) &= A \cap [(\tau \leq t) \cup (\theta \leq t)] \\ &= [A \cap (\tau \leq t)] \cup [A \cap (\theta \leq t)] \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

por lo tanto $A \in \mathcal{F}_{\tau\wedge\theta}$ y $\mathcal{F}_{\tau\wedge\theta} = \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$. Ahora veamos que los conjuntos mencionados están en $\mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$.
Sea $A = \Omega$, es claro que $A \in \mathcal{F}_{\theta}$ y por el Lema 1.3.3 $(\theta \leq \tau) = A \cap (\theta \leq \tau) \in \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$ e intercambiando a τ y θ tenemos que $(\tau \leq \theta) \in \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$. En consecuencia, $(\theta = \tau) \in \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$ ya que $(\theta = \tau) = (\theta \geq \tau) \cap (\theta \leq \tau)$. Para finalizar $(\theta < \tau) \in \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$ ya que $(\theta < \tau) = (\theta \leq \tau) \cap (\theta = \tau)^c$ y nuevamente intercambiando a τ y θ tenemos que $(\tau < \theta) \in \mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\theta}$. □

Definición 1.31. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ es progresivamente medible si el proceso estocástico*

$$1_A(t,\omega) = \begin{cases} 1 & \textit{si } (t,\omega) \in A \\ 0 & \textit{si } (t,\omega) \notin A \end{cases}$$

es progresivamente medible.

Proposición 1.32. *Sean τ y θ dos tiempos de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que $\theta \leq \tau$. Entonces los intervalos $[\theta,\tau]$, (θ,τ), $[\theta,\tau)$, $(\theta,\tau]$ y $[\tau]$ son conjuntos progresivamente medibles.*

Demostración. Primero definamos al proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ por $X_t(\omega) = 1_{[\theta,\tau)}(t,\omega)$. Notemos que este proceso es continuo por la derecha. Para ver que dicho proceso es progresivamente medible, es suficiente notar que es adaptado, debido al Teorema 1.2.1. Como

$$X_t^{-1}(1) = (\theta \leq t < \tau) = (\theta \leq t) \cap (t < \tau) \in \mathcal{F}_t \quad \text{para toda } t \geq 0.$$

tenemos que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado. De las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} (\theta,\tau) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\theta + \tfrac{1}{n}, \tau\right), & [\theta,\tau] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\theta, \tau + \tfrac{1}{n}\right), \\ (\theta,\tau] &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\theta + \tfrac{1}{n}, \tau\right], & [\tau] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\tau, \tau + \tfrac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

se concluye que estos intervalos son progresivamente medibles. □

Definición 1.33. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico y τ un tiempo de paro, vamos a definir a la función X_τ en el evento $(\tau < \infty)$ por*

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

El siguiente teorema nos muestra que si un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible y τ, un tiempo de paro finito, entonces la función X_τ es una variable aleatoria.

Teorema 1.34. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso progresivamente medible con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y con espacio de estados $(E, \mathcal{B}(E))$, y sea τ un tiempo de paro con respecto a la misma filtración. Entonces*

i) La variable aleatoria X_τ definida en el conjunto $(\tau < \infty) \in \mathcal{F}_\tau$, es $\mathcal{F}_\tau$-medible.

ii) El "proceso parado"$(X_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ es progresivamente medible con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración. Para probar el inciso (i) basta mostrar que para cualquier $B \in \mathcal{B}(E)$ y $t \geq 0$ el evento $(X_\tau \in B) \cap (\tau \leq t)$ está en $\mathcal{F}_t$ y como

$$(X_\tau \in B) \cap (\tau \leq t) = (X_{t\wedge\tau} \in B) \cap (\tau \leq t)$$

entonces será suficiente probar (ii).
Sea $\varphi(s, \omega) = s \wedge \tau(\omega)$ y $r \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}(\varphi \leq r) &= \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : s \wedge \tau(\omega) \leq r\} \\ &= ([0, r] \times \Omega) \cup ([0, t] \times (\tau(\omega) \leq r)) \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Ahora consideremos al mapeo $\Psi : [0, t] \times \Omega \longmapsto [0, t] \times \Omega$ definido de la siguiente manera $(s, \omega) \longmapsto (\varphi(\omega), \omega)$, este mapeo es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible, ya que para cada $I \subset [0, t]$ y $A \in \mathcal{F}_t$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(I \times A) &= \{(s, \omega) : \varphi(s, \omega) \in I \text{ y } \omega \in A\} \\ &= \varphi^{-1}(I) \cap ([0, t] \times A) \in \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

Como el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible, entonces la composición

$$X \circ \Psi(s, \omega) = X(s \wedge \tau(\omega), \omega) = X_{s\wedge\tau(\omega)}$$

es $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$-medible, lo cual muestra el segundo inciso. $\square$

1.4. Martingalas a tiempo continuo

Definición 1.35. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, con $\mathbb{E}[| X_t |] < \infty$ para toda $t \geq 0$. Decimos que el proceso es submartingala si para cada pareja de reales s, t,*

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s \qquad \textit{para} \qquad 0 \leq s < t < \infty,$$

y sobremartingala si para cada pareja de reales s, t,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s \qquad \textit{para} \qquad 0 \leq s < t < \infty.$$

Decimos que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es martingala si es submartingala y sobremartingala, es decir,

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s \qquad \textit{para} \qquad 0 \leq s < t < \infty.$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de martingalas, por lo que también necesitamos una definición previa.

Definición 1.36. *Un movimiento browniano es un proceso* $(B_t)_{t\geq 0}$ *adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, continuo, que toma valores en* $\mathbb{R}$ *tal que*

i) $B_0 = 0$ *casi seguramente.*

ii) Para $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ *es independiente de* $\mathcal{F}_s$ *y con distribución Normal con media cero y varianza* $(t-s)$*.*

Ejemplo. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ el movimiento browniano adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. De la definición del movimiento browniano se tiene que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, gracias a dicha propiedad se obtiene que el movimiento browniano es martingala, ya que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s.\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ el movimiento browniano adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, veamos que el proceso $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es martingala. Sea $s \leq t$, entonces

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 - (t-s) \mid \mathcal{F}_s] + B_s^2 - s$$

basta mostrar que $\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 - (t-s) \mid \mathcal{F}_s] = 0$ para ver que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es martingala. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 - (t-s) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 - (t-s) + 2B_tB_s - 2B_s^2 \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] - (t-s) + 2\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s],\end{aligned}$$

claramente el primer término es igual a $(t-s)$ y el último es igual a cero gracias a que el movimiento browniano es martingala, por lo tanto

$$\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2 - (t-s) \mid \mathcal{F}_s] = 0.$$

Ejemplo. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, veamos que el proceso $(M_t^\alpha)_{t\geq 0}$ definido por

$$M_t^\alpha = \exp\left\{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right\},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, es una martingala. para demostrarlo basta ver

$$\mathbb{E}\left[\frac{M_{t+s}^\alpha}{M_t^\alpha}\middle| \mathcal{F}_t\right] = 1 \qquad \text{donde} \qquad 0 < s < \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha B_{t+s}-\frac{\alpha^2}{2}(t+s)-\alpha B_t+\frac{\alpha^2}{2}t\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]&\\ &=\mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha(B_{t+s}-B_t)-\frac{\alpha^2}{2}s\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\\ &=\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}s\right\}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha(B_{t+s}-B_t)\right\}|\,\mathcal{F}_t\right],\end{aligned}$$

pero sabemos que $B_{t+s}-B_t$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y que se distribuye como una v.a. Normal con media cero y varianza s, por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha(B_{t+s}-B_t)\right\}|\,\mathcal{F}_t\right]=\exp\left\{\frac{\alpha^2}{2}s\right\}.$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha B_{t+s}-\frac{\alpha^2}{2}(t+s)-\alpha B_t+\frac{\alpha^2}{2}t\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]=1.$$

1.4.1. Desigualdades Maximales

Proposición 1.37. *Sea $(X_n)_{n\in J}$, donde $J=\{0,1\ldots,N\}$, una submartingala integrable y $\lambda\geq 0$, entonces*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J}X_n\geq\lambda\right)\leq\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[X_N 1_{\{\sup_{n\in J}X_n\geq\lambda\}}\right]\leq\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[|\,X_N\,|].$$

Demostración. Sea

$$\tau=\begin{cases}\inf\{n:X_n\geq\lambda\} & \text{si existe } n\leq N \text{ tal que } X_n\geq\lambda,\\ N & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Notemos que $N\geq\tau$. Como $(X_n)_{n\in J}$ es una submartingala y τ un tiempo de paro, por el Teorema de Muestro Opcional (caso discreto) tenemos que $\mathbb{E}[X_N]\geq\mathbb{E}[X_\tau]$. Sea

$$A=\left\{\omega\in\Omega:\sup_{n\in J}X_n(\omega)\geq\lambda\right\},$$

para $\omega\in A$ tenemos que $X_\tau(\omega)\geq\lambda$, ya que al menos va a existir una $k\in J$ tal que $X_k(\omega)\geq\lambda$ y la más pequeña de ellas cumple que es mayor o igual a λ. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_N]\geq\mathbb{E}[X_\tau]&=\mathbb{E}[X_\tau 1_A]+\mathbb{E}[X_\tau 1_{A^c}]\\ &\geq\lambda\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}[X_\tau 1_{A^c}],\end{aligned}$$

pero en A^c, τ es igual a N, de tal modo

$$\mathbb{E}[X_N]\geq\lambda\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}[X_N 1_{A^c}],$$

y si restamos el último termino en ambas pates de la desigualdad se obtiene que

$$\mathbb{E}[X_N 1_A]\geq\lambda\mathbb{P}(A).$$

obteniendo la primera desigualdad, mientras que la segunda desigualdad es clara. □

Corolario 1.38. *Sea* $(X_n)_{n\in J}$, *donde* $J = \{0, 1, \ldots, N\}$, *una martingala o submartingala y* $\lambda \geq 0$. *Si* $\mathbb{E}\left[X_N^p\right] < \infty$ *para alguna* $p > 1$, *entonces*

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left[|X_N|^p\right]$$

y además

$$\mathbb{E}\left[|X_N|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{n\in J} |X_N|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_N|^p\right].$$

Demostración. Si $(X_n)_{n\in J}$ es una martingala o submartingala, entonces $(|X_n|^p)_{n\in J}$ es una submartingala positiva gracias a la desigualdad de Jensen condicional, ya que

$$\mathbb{E}\left[\,|X_{m+1}|^p|\, \mathcal{F}_m\right] \geq |\mathbb{E}\left[X_{m+1}|\, \mathcal{F}_m\right]|^p = |X_m|^p$$

Así, aplicando la proposición anterior a la submartingala $(|X_n|^p)_{n\in J}$ tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n|^p \geq \lambda^p\right) \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}\left[|X_N|^p\right]$$

y dado que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n| \geq \lambda\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{n\in J} |X_n|^p \geq \lambda^p\right)$$

ya que $\left\{\sup_{n\in J} |X_n| \geq \lambda\right\} \subseteq \left\{\sup_{n\in J} |X_n|^p \geq \lambda^p\right\}$, la primera desigualdad del corolario queda demostrada.

Para probar la segunda desigualdad consideremos a $X^* = \sup_{n\in J} |X_n|$ y a k una constante positiva. Aplicando la proposición anterior, el teorema de Fubini, y la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X^* \wedge k)^p\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X^*\wedge k} p\lambda^{p-1}\, d\lambda\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^k p\lambda^{p-1} 1_{\{\lambda \leq X^*\}}\, d\lambda\right] \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^k p\lambda^{p-1}\mathbb{P}\left(\lambda \leq X^*\right)\, d\lambda \overset{\text{Prop. 1.4.1}}{\leq} \int_0^k p\lambda^{p-1}\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[|X_N| 1_{\{\lambda \leq X^*\}}\right]\, d\lambda \\
&= \mathbb{E}\left[|X_n| \int_0^{X^*\wedge k} p\lambda^{p-2}\, d\lambda\right] = \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|X_n|(X^* \wedge k)^{p-1}\right] \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}\left[(X^* \wedge k)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Dividiendo por $\mathbb{E}\left[(X^* \wedge k)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$ en ambas partes de la desigualdad y elevando a la p obtenemos

$$\mathbb{E}\left[(X^* \wedge k)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_N|^p\right],$$

para finalizar hacemos tender a k a infinito y llegamos a la segunda desigualdad del corolario. $\square$

Corolario 1.39. *Sea* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *una martingala tal que para* $p>1$*,*

$$\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\left[|X_s|^p\right] < \infty.$$

Entonces para $D\subset[0,T]$ *numerable y* $\lambda>0$*,*

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{t\in D}|X_t| \geq \lambda\right) \leq \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[|X_N|^p\right],$$

y

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in D}|X_t|\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right].$$

Demostración. Sea $(D_n)_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de conjuntos finitos de D, tal que $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Por el corolario anterior para cada $D_n=\{1,\ldots,N\}$ tenemos que

$$\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{t\in D_n}|X_t|\geq\lambda\right) \leq \sup_{t\in D_n}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \leq \sup_{t\in D}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \leq \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right].$$

Sean $(Y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias definidas por $Y_n=\sup\limits_{t\in D_n}|X_t|$; y $Y=\sup\limits_{t\in D}|X_t|$. Notemos que Y_n es una sucesión creciente y que además converge a Y.
Por otro lado, sea $\lambda>0$, definamos a los conjuntos

$$A_n=\{\omega\in\Omega : Y_n(\omega)\geq\lambda\} \qquad \text{y} \qquad A=\{\omega\in\Omega : Y(\omega)\geq\lambda\}$$

es claro que $(A_n)_{n\geq1}$ es una sucesión creciente de subconjuntos de Ω. Si vemos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$, entonces

$$\lambda^p\mathbb{P}(A) = \lambda^p \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n) \leq \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$$

esto prueba la primera desigualdad de corolario. Ahora mostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$.

$\subseteq$) Sea $\omega\in A$, es decir, $\sup\limits_{t\in D}|X_t(\omega)|\geq\lambda$, que por definición de supremo es análogo a decir que para toda $\epsilon>0$ exista una $t\in D$ tal que $|X_t(\omega)|\geq\lambda-\epsilon$, como $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$ entonces para toda $\epsilon>0$ existe una $m\in\mathbb{N}$ y $t\in D_m$ tal que $|X_t(\omega)|\geq\lambda-\epsilon$. Sea $A_{n,\epsilon}=\{\omega\in\Omega : Y_n\geq\lambda-\epsilon\}$ entonces

$$Y_m(\omega)=\sup_{t\in D_m}|X_t(\omega)|\geq|X_t(\omega)|\geq\lambda-\epsilon \quad \text{para toda } \epsilon>0$$

entonces para toda $\epsilon>0$, $\omega\in A_{m,\epsilon}$ lo cual implica que $\omega\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A_{m,\epsilon}$, entonces $\omega\in\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\{Y_m\geq\lambda\}$ y por lo tanto $\omega\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

$\supseteq$) Ahora consideremos un elemento $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y $t \in D_m$ tal que $\omega \in A_m$, por lo que $\sup_{t \in D_m} |X_t(\omega)| \geq \lambda$. Como $t \in D$ ya que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ entonces

$$\sup_{t \in D} |X_t(\omega)| \geq \sup_{t \in D_m} |X_t(\omega)| \geq \lambda$$

y por lo tanto $\omega \in A$.

Ahora pasemos a la segunda desigualdad, veamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_n^p\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{t \in D_n} |X_t|^p\right] &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in D_n} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \\ &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Como el $\lim_{n \to \infty} Y_n^p = Y^p$ aplicamos el teorema de Convergencia Monótona y tenemos que $\mathbb{E}\left[Y^p\right] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[Y_n^p\right]$, es decir

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in D} |X_t|^p\right] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\sup_{t \in D_n} |X_t|^p\right],$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in D} |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right].$$

□

Corolario 1.40 (Desigualdades de Doob). *Sea $(X_t)_{t \in [0,T]}$ una martingala continua por la derecha (o por la izquierda). Entonces para $p > 1$ tenemos*

i) $\lambda^p \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^p \geq \lambda\right) \leq \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$,

ii) $\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$

Demostración. Por el corolario anterior, sabemos que ambas desigualdades se cumplen para $D \subset [0,T]$ numerable y como en este caso tenemos continuidad por la derecha (o por la izquierda), podemos aproximar y así obtener el resultado. □

1.5. Regularidad y Convergencia

Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso estocástico con espacio de estados $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Consideremos dos números reales a y b de tal manera que $a < b$ y un subconjunto I de $[0, \infty)$. Sea

$F = \{t_1 < t_2 < \ldots < t_d\}$ un subconjunto finito de I, vamos a definir de manera inductiva los tiempos

$$s_1 = \text{ínf}\,\{t_i : X_{t_i} > b\}, \qquad s_2 = \text{ínf}\,\{t_i > s_1 : X_{t_i} < a\},$$
$$s_{2n+1} = \text{ínf}\,\{t_i > s_{2n} : X_{t_i} > b\} \quad s_{2n+2} = \text{ínf}\,\{t_i > s_{2n+1} : X_{t_i} < a\},$$

por convención $\text{ínf}\,(\emptyset) = t_d$. Definamos a

$$D(X, F, [a, b]) = \sup\,\{n : s_{2n} < t_d\},$$

y al número de veces que cruza el proceso $(X_t)_{t\in I}$ por abajo del intervalo $[a, b]$ por

$$D(X, I, [a, b]) = \sup\,\{D(X, F, [a, b]) : F \subset I \text{ y finito. }\}$$

La función $D(X, I, [a, b])$ es una variable aleatoria cuando I es numerable y además se cumple que

Proposición 1.41. *Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala y el conjunto I numerable, entonces*

$$(b - a)\mathbb{E}\,[D(X, I, [a, b])] \leq \sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[(X_t - b)^+\right].$$

Demostración. Basta probar la desigualdad en el caso en que I es finito. Tomemos al conjunto I como $\{t_1 < t_2 < \ldots < t_d\}$. Por definición, los tiempos $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}, \ldots$ son tiempos de paro con respecto a la $(\mathcal{F}_{t_i})_{t_i\in I}$. Si $A_k = \{s_k < t_d\}$, entonces $A_k \in \mathcal{F}_{s_k}$ y $A_k \supset A_{k+1}$ ya que $s_k \leq s_{k+1}$. En el conjunto A_{2n-1} tenemos que $X_{2n-1} > b$ y en el conjunto A_{2n} tenemos que $X_{2n} < a$, aplicando el teorema de paro para el caso discreto notamos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{A_{2n-1}} (X_{s_{2n-1}} - b)\, d\mathbb{P} \leq \int_{A_{2n-1}} (X_{s_{2n}} - b)\, d\mathbb{P} \\ &= \int_{A_{2n}} (X_{s_{2n}} - b)\, d\mathbb{P} + \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}} (X_{s_{2n}} - b)\, d\mathbb{P} \\ &\leq (a - b)\mathbb{P}\,(A_{2n}) + \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}} (X_{s_{2n}} - b)\, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Notemos que en el conjunto $A_{2n-1} \setminus A_{2n}$, $s_{2n} = t_d$, entonces

$$(b - a)\mathbb{P}\,(A_{2n}) \leq \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}} (X_{s_{2n}} - b)^+\, d\mathbb{P} = \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}} (X_{t_d} - b)^+\, d\mathbb{P}.$$

Revisemos que $A_{2n} = \{D(X, I, [a, b]) \geq n\}$, tomemos $\omega \in A_{2n}$ que es equivalente a $s_{2n}(\omega) < t_d(\omega)$ si y solo si $n \in \{k : s_{2n}(\omega) < t_d(\omega)\}$ si y solo si

$$n \leq \sup\,\{k : s_{2n}(\omega) < t_d(\omega)\} = D(X, I, [a, b])(\omega)$$

por lo que se cumple la igualdad de conjuntos y tenemos que $\mathbb{P}\,(A_{2n}) = \mathbb{P}\,(D(X, I, [a, b])(\omega) \geq n)$, además, los conjunto $A_{2n-1} \setminus A_{2n}$ son disjuntos dos a dos, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b - a)\mathbb{P}\,(D(X, I, [a, b]) \geq n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{2n-1}\setminus A_{2n}} (X_{t_d} - b)^+\, d\mathbb{P},$$

que es equivalente a

$$(b-a)\mathbb{E}\left[D(X,I,[a,b])\right] \leq \mathbb{E}\left[(X_{t_d}-b)^+\right]$$

y queda demostrada la propocisión $\square$

Gracias a esta proposición obtendremos el teorema fundamental de regularización para submartingalas a tiempo continuo.

Teorema 1.42. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala, entonces*

$$X_{t^+}(\omega) = \lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega), \qquad X_{t^-}(\omega) = \lim_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega)$$

existen casi seguramente para toda $t \geq 0$ y $s > 0$ respectivamente.

Demostración. Consideremos al conjunto

$$A_{n,a,b} = \{\omega \in \Omega : D(X, \mathbb{Q}\cap[0,n],[a,b])(\omega) = \infty\}$$

donde a y b son números racionales. De la proposición anterior tenemos que

$$(b-a)\mathbb{E}\left[D(X,\mathbb{Q}\cap[0,n],[a,b])\right] \leq \sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,n]} \mathbb{E}\left[(X_t-b)^+\right]$$

si t_d es un punto extremo derecho de $\mathbb{Q}\cap[0,n]$ y por la desigualdad del triángulo tenemos que para cualquier $t\in\mathbb{Q}\cap[0,n]$

$$\mathbb{E}\left[(X_t-b)^+\right] \leq \mathbb{E}\left[X_t^+\right] + b^+ \leq \mathbb{E}\left[X_{t_d}^+\right] + b^+$$

entonces

$$\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,n]} \mathbb{E}\left[(X_t-b)^+\right] \leq \mathbb{E}\left[X_{t_d}^+\right] + b^+ < \infty$$

por lo que

$$\mathbb{E}\left[D(X,\mathbb{Q}\cap[0,n],[a,b])\right] < \infty \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}\left(A_{n,a,b}\right) = 0$$

por lo tanto $\bigcup\limits_{a,b\in\mathbb{Q}} A_{n,a,b}$ también tiene medida cero.

Ahora definamos a los siguientes conjuntos,

$$B_{n,a,b} = \left\{\omega\in\Omega : \liminf_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega) < a < b < \limsup_{\substack{s\downarrow t\\ \in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega)\right\}$$

y

$$C_{n,a,b} = \left\{\omega\in\Omega : \liminf_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega) < a < b < \limsup_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega)\right\},$$

es claro que $B_{n,a,b}, C_{n,a,b} \subseteq A_{n,a,b}$ entonces $B_n = \bigcup\limits_{a,b\in\mathbb{Q}} B_{n,a,b}$ y $C_n = \bigcup\limits_{a,b\in\mathbb{Q}} C_{n,a,b} \subseteq A_n$ por lo que B_n y C_n tienen medida cero, así como tambien $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y $C = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
Sea $\Omega^* = \Omega \setminus B$, si $\omega \in \Omega^*$ entonces $\liminf\limits_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega) = \limsup\limits_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}\cap[0,n]}} X_s(\omega)$ por lo que el límite existe y es igual a X_{t^+} y como $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ concluimos que $\lim\limits_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} X_s(\omega) = X_{t^+}(\omega)$ c.s., analogamente para $X_{t^-}(\omega)$.

$\square$

Ahora definiremos y veremos algunas propiedades de integrabilidad uniforme.

1.5.1. Integrabilidad Uniforme

Si X es una variable aleatoria integrable, es claro que $X1_{\{|X|\geq\alpha\}}$ se va a cero conforme α se va a infinito, además es dominada por $|X|$, entonces por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\{|X|\geq\alpha\}} |X| \, d\mathbb{P} = 0.$$

Si ahora tomamos una familia de variables aleatorias integrables $(X_i)_{i\in J}$, donde J es un conjunto de índices, vemos que para cada $i \in J$ se cumple

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i| \, d\mathbb{P} = 0$$

pero el límite no necesariamente es uniforme en J.
El siguiente concepto, como se verá más adelante, nos será de gran utilidad para la convergencia de martingalas.

Definición 1.43. *Una familia $\mathcal{U} = (X_i)_{i\in J}$ de variables aleatorias integrables, donde J es un conjunto de índices, se llama uniformemente integrable si*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left[\sup_{i\in J} \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i| \, d\mathbb{P} = 0\right].$$

La siguiente proposición enuncia las propiedades más importantes de una familia de variables aleatorias uniformemente integrables, a su vez, dichas propiedades resultarán condiciones necesarias y suficientes para que una familia de variables aleatorias sea uniformemente integrable.

Proposición 1.44. *Sea $\mathcal{U} = (X_i)_{i\in J}$ una familia de variables aleatorias integrables, para que $\mathcal{U}$ sea uniformemente integrable es necesario y suficiente que las tres condiciones siguientes se cumplan*

i) $\sup\limits_{i\in J} \mathbb{E}\left[|X_i|\right] < \infty$

ii) $\sup_{i\in J} \mathbb{P}\left(|X_i| > c\right) \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

iii) La medida Q^i es una medida definida en $\mathcal{F}$ por

$$Q^i(A) = \int_A |X_i|\, d\mathbb{P},$$

entonces la familia $\{Q^i\}_{i\in J}$ es uniformemente absolutamente continua, es decir, para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) < \delta$ implica que $\sup_{i\in J} Q^i(A) < \epsilon$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable, y observemos que para toda $|X_i|$ v.a. uniformemente integrable y toda $A \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_A |X_i|\, d\mathbb{P} &= \int_{A\cap\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{|X_i|<\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{A\cap\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} + \alpha\mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

Por ser $\mathcal{U}$ uniformemente integrable, para $\epsilon > 0$ existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\sup_{i\in J} \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para } \alpha \geq \alpha_0.$$

Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que, $\mathbb{P}(A) \leq \frac{\epsilon}{2\alpha_0}$. por lo anterior tenemos que

$$\sup_{i\in J} \int_A |X_i|\, d\mathbb{P} \leq \sup_{i\in J} \int_{\{|X_i|\geq\alpha_0\}} |X_i|\, d\mathbb{P} + \alpha_0\mathbb{P}(A) < \epsilon.$$

Lo cual demuestra que la condición *iii*) es necesaria.
Para ver que la condición *i*) es necesaria, observemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |X_i|\, d\mathbb{P} &= \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i|<\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} + \int_{\{|X_i|<\alpha\}} \alpha\, d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{|X_i|\geq\alpha\}} |X_i|\, d\mathbb{P} + \alpha\end{aligned}$$

Como $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable al aplicar el supremo a ambas partes de la desigualdad, se obtiene que

$$\sup_{i\in J} \int_\Omega |X_i|\, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2} + \alpha \qquad \text{para } \alpha \geq \alpha_0.$$

Para obtener la condición *ii*) basta aplicar la desigualada de Chebyshev a X_i y ver que

$$\mathbb{P}\left(|X_i| \geq c\right) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}\left[|X_i|\right]$$

entonces

$$\sup_{i\in J}\mathbb{P}\left(|X_i|\geq c\right)\leq\sup_{i\in J}\frac{1}{c}\mathbb{E}\left[|X_i|\right]$$

es claro que al hacer a c tender a infinito $\sup\limits_{i\in J}\mathbb{P}\left(|X_i|\geq c\right)$ se va a cero.

$\Longleftarrow$) Reciprocamente supongamos que las condiciones i), ii), iii) se cumplen. Sea $\epsilon>0$, por la condición iii) existe $\delta>0$ tal que para toda $A\in\mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A)<\delta$ implica que

$$\sup_{i\in J}Q^i(A)=\sup_{i\in J}\int_A|X_i|\,d\mathbb{P}<\epsilon$$

además, por Chevyshev y la condición i) tenemos que

$$\mathbb{P}\left(|X_i|\geq c\right)\leq\frac{1}{c}\mathbb{E}\left[|X_i|\right]\leq\frac{1}{c}\sup_{i\in J}\mathbb{E}\left[|X_i|\right]<\infty\qquad\text{para toda } i\in J$$

Sea $\alpha_0=\dfrac{\delta}{\sup\limits_{i\in J}\mathbb{E}\left[|X_i|\right]}>0$, si $\alpha\geq\alpha_0$ entonces

$$\mathbb{P}\left(|X_i|\geq\alpha\right)\leq\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[|X_i|\right]\leq\frac{1}{\alpha}\sup_{i\in J}\mathbb{E}\left[|X_i|\right]<\delta$$

por lo tanto

$$\sup_{i\in J}\int_{\{|X_i|\geq\alpha\}}|X_i|\,d\mathbb{P}<\epsilon.$$

Lo cual prueba que $\mathcal{U}$ es uniformemente integrable.

$\square$

Teorema 1.45. *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias integrables. Si $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$ casi seguramente, entonces las siguiente afirmaciones son equivalentes.*

i) *$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.*

ii) *X_n converge a X en $\mathcal{L}^1$*

Demostración. Supongamos que X_n converge a X en $\mathcal{L}^1$, es decir, para toda $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces $\int_\omega|X-X_n|\,d\mathbb{P}<\epsilon$, y veamos que las condiciones de la proposición 1.44 se cumplen. Notemos primero que X es integrable debido a

$$\int_\Omega|X|\,d\mathbb{P}\leq\int_\Omega|X-X_n|\,d\mathbb{P}+\int_\Omega|X_n|\,d\mathbb{P}\qquad\text{para toda } n\in\mathbb{N},$$

entonces

$$\int_\Omega|X|\,d\mathbb{P}<\infty.$$

Para probar la condición i) de la proposición anterior, tomemos $A\in\mathcal{F}$, entonces

$$\int_A|X_n|\,d\mathbb{P}\leq\int_A|X|\,d\mathbb{P}+\int_\Omega|X_n-X|\,d\mathbb{P}\qquad\text{para toda } n\in\mathbb{N}.$$

En particular para $A = \Omega$ y $n \geq N$

$$\int_\Omega |X_n|\, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X|\, d\mathbb{P} + \int_\Omega |X_n - X|\, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X|\, d\mathbb{P} + \epsilon$$

entonces

$$\sup_{n\geq N} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] = \sup_{n\geq N} \int_\Omega |X_n|\, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega |X|\, d\mathbb{P} + \epsilon < \infty.$$

Por otro lado, sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |X_n - X|\, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad n \geq N,$$

y recordando que X_n y X son integrables, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\mathbb{P}(A) < \delta$ entonces

$$\int_A |X_n|\, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para } n < N \quad \text{y} \quad \int_A |X|\, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{2},$$

además

$$\int_A |X_n|\, d\mathbb{P} \leq \int_A |X|\, d\mathbb{P} + \int_\Omega |X_n - X|\, d\mathbb{P} < \epsilon \qquad \text{si } n \geq N,$$

por lo tanto

$$\int_A |X_n|\, d\mathbb{P} < \epsilon \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \text{ siempre que } \mathbb{P}(A) < \delta$$

por lo tanto la condición *iii*) se satisface y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.
Supongamos ahora que las variables aleatorias X_n son uniformemente integrables. Por el lema de Fatou y por la condición *i*) del teorema anterior implica que

$$\int_\Omega |X|\, d\mathbb{P} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n|\, d\mathbb{P} < \infty.$$

por lo tanto X es integrable.
Sea $c > 0$, definamos a X_n^c por

$$X_n^c(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } |X_n(\omega)| \leq c, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y a $X_{n,c} = X_n - X_n^c$. De la misma manera se define a X_c y a X^c, entonces

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n^c - X^c|\right] + \mathbb{E}\left[|X_{n,c}|\right] + \mathbb{E}\left[|X_c|\right].$$

Sabemos que X es integrable, entonces dada $\epsilon > 0$ existe $c_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{E}\left[|X_c|\right] = \int_{\{|X|>c\}} |X|\, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para } c \geq c_1.$$

Por otro lado (X_n) es uniformemente integrable, entonces existe c_2 tal que si $c \geq c_2$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\mathbb{E}\left[|X_{n,c}|\right] = \int_{\{|X_n|>c\}} |X_n|\, d\mathbb{P} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $c = \max\{c_1, c_2\}$, entonces las últimas dos esperanzas de la desigualdad son menores a $\frac{\epsilon}{3}$ respectivamente. Gracias a el Teorema de Convergencia Dominada tenemos que para n suficientemente grande

$$\mathbb{E}\left[|X_n^c - X^c|\right] < \frac{\epsilon}{3},$$

ya que las variables aleatorias $|X_n^c - X^c|$ están dominadas por $|X_n - X|$ y además convergen c.s. a cero. Por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] < \epsilon,$$

y X_n converge a X en $\mathcal{L}^1$ □

Teorema 1.46. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una submartingala tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[X_n^+\right] < \infty$$

entonces (X_n) converge c.s. a un límite que es finito c.s.

Demostración. Notemos que $|X_n| = 2X_n^+ - X_n$ y recordemos que

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} X_n \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} |X_n|$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int \liminf_{n\in\mathbb{N}} X_n \, d\mathbb{P} &\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&= \liminf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2\int X_n^+ \, d\mathbb{P} - \int X_n \, d\mathbb{P} \right\} \\
&\leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2\int X_n^+ \, d\mathbb{P} - \int X_0 \, d\mathbb{P} \right\} \\
&\leq 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[X_n^+\right] - \int X_0 \, d\mathbb{P} < \infty
\end{aligned}$$

por lo que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} X_n < \infty$ c.s.

Supongamos que el límite no existe, entonces existirían dos reales a y b tal que $\liminf_{n\in\mathbb{N}} X_n < a < b < \limsup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, con probabilidad positiva; entonces tendríamos que $D(X, \mathbb{N}, [a,b]) = +\infty$ con probabilidad positiva, lo cual es imposible ya que

$$+\infty = (b-a)\mathbb{E}\left[D(X, \mathbb{N}, [a,b])\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[(X_n - b)^+\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[X_n^+\right] < +\infty.$$

Por lo tanto existe $X = \lim_{n\to\infty} X_n < +\infty$ casi seguramente.

□

Ahora consideremos una familia de σ-álgebras decreciente en lugar de creciente. Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$, una sucesión de sub-$\sigma$-álgebras tal que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ si $n \leq m \leq 0$. Una submartingala con respecto a $(\mathcal{F}_n)$ es una familia adaptada (X_n) de variables aleatorias tal que $\mathbb{E}\left[X_n^+\right] < \infty$ para cada n y

$$X_n \leq \mathbb{E}\left[X_m | \mathcal{F}_n\right] \qquad \text{para} \qquad n \leq m \leq 0.$$

Entonces tenemos lo siguiente

Teorema 1.47. *Si $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$, es una submartingala, entonces el $\lim\limits_{n\to-\infty} X_n$ existe casi seguramente. Si además $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$, entonces $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable, la convergencia se satisface en $\mathcal{L}^1$, y para toda n*

$$\lim_{k\to-\infty} X_k \leq \mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{F}_{-\infty}\right],$$

donde $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap\limits_{n\in-\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

Demostración. Por la propiedad de submartingala sabemos que $X_n \leq \mathbb{E}\left[X_0 | \mathcal{F}_n\right]$ para todo $n \leq m \leq 0$ así que tomemos a $F \in \mathcal{F}_n$ y fijémonos en lo siguiente

$$\int_F X_n \, d\mathbb{P} \leq \int_F \mathbb{E}\left[X_0 | \mathcal{F}_n\right] \, d\mathbb{P} = \int_F X_0 \, d\mathbb{P}$$

en particular para $F = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq 0\}$, entonces

$$\int_\Omega X_n^+ \, d\mathbb{P} \leq \int_F X_0 \, d\mathbb{P} \leq \int_\Omega X_0^+ \, d\mathbb{P}$$

por lo que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[X_n^+\right] \leq \mathbb{E}\left[X_0^+\right] < \infty$$

entonces la primera observación se prueba exactamente como en el teorema de convergencia para submartingalas (Teorema 1.46). Para probar la segunda parte del teorema, primero observemos que si $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$ es equivalente a $\lim\limits_{n\to-\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] > -\infty$. Ahora, para cualquier $\lambda > 0$ y n, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_n| \, d\mathbb{P} &= \int_{\{X_n>\lambda\}} X_n \, d\mathbb{P} + \int_{\{X_n<-\lambda\}} |X_n| \, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{X_n>\lambda\}} X_n \, d\mathbb{P} - \int_\Omega X_n \, d\mathbb{P} + \int_{\{X_n\geq-\lambda\}} X_n \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

y tomemos una $\epsilon > 0$ fija y un entero negativo n_0 tal que

$$-\mathbb{E}\left[X_n\right] < \epsilon - \mathbb{E}\left[X_{n_0}\right] \qquad \text{para } n \leq n_0.$$

Por lo tanto, gracias a la propiedad de submartingala vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_n|\, d\mathbb{P} &\leq \int_{\{X_n>\lambda\}} X_{n_0}\, d\mathbb{P} - \int_{\Omega} X_n\, d\mathbb{P} + \int_{\{X_n\geq -\lambda\}} X_{n_0}\, d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{\{X_n>\lambda\}} X_{n_0}\, d\mathbb{P} + \epsilon - \mathbb{E}\left[X_{n_0}\right] + \int_{\{X_n\geq -\lambda\}} X_{n_0}\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{|X_n|>\lambda\}} |X_{n_0}|\, d\mathbb{P} + \epsilon.
\end{aligned}$$

Por Chevyshev tenemos que

$$\mathbb{P}\left(|X_n| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\right]$$

de aquí concluimos que $|X_{n_0}| 1_{\{|X_n|>\lambda\}}$ converge a cero casi seguramente cuando λ tiende a infinito, por lo tanto al aplicar el teorema de convergencia dominada a ésta última variable aleatoria y por la desigualdad van a implicar que $(X_n)_{n\in -\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable y por ende la convergencia se satisface en $\mathcal{L}^1$.
Para concluir la demostración, por la propiedad de submartingala tenemos que para todo $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$

$$\int_A X_n\, d\mathbb{P} \leq \int_A X_m\, d\mathbb{P} \qquad \text{para} \qquad n \leq m,$$

y gracias a la convergencia en $\mathcal{L}^1$ obtenemos que

$$\int_A \lim_{n\to -\infty} X_n\, d\mathbb{P} = \lim_{n\to -\infty} \int_A X_n\, d\mathbb{P} \leq \int_A X_m\, d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}\left[X_m \middle| \mathcal{F}_{-\infty}\right] d\mathbb{P}$$

para todo $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to -\infty} X_n \leq \mathbb{E}\left[X_m \middle| \mathcal{F}_{-\infty}\right].$$

□

Proposición 1.48. *Sea* $(X_t)_{t\geq 0}$ *una submartingala. Si* $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$ *para todo* t*, entonces* $\mathbb{E}\left[|X_{t^+}|\right] < \infty$ *para toda* t *y*

$$X_t \leq \mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_t\right] \qquad \textit{casi seguramente.}$$

La igualdad se obtiene si la función $t \longmapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ *es continua por la derecha. Además* $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ *es una submartingala con respecto a* $(\mathcal{F}_{t^+})$ *con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda.*

Demostración. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de racionales que converge a t, como

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] \leq \mathbb{E}\left[X_{t_n}\right] \leq \mathbb{E}\left[X_{t_1}\right]$$

entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_{t_n}|\right] < \infty$ y por el Teorema anterior X_{t_n} converge a X_{t^+} en $\mathcal{L}^1$. Por otro lado, por la propiedad de submartingala

$$X_t \leq \mathbb{E}\left[X_{t_n} \middle| \mathcal{F}_t\right] \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}$$

pasando al límite obtenemos

$$X_t \leq \mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Además, la convergencia en $\mathcal{L}^1$ implica que $\mathbb{E}[X_{t^+}] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{t_n}]$ y si $t \longmapsto \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t^+}]$ y recordando que

$$\mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_t \right] \geq X_t, \qquad \text{y} \qquad \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t^+}] = \int \mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_t \right] d\mathbb{P}$$

por lo tanto $X_t = \mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_t \right]$ casi seguramente.

Finalmente sea $s < t$ y (s_n) una sucesión de racionales decreciente menores que t que convergen a s. Por lo ya demostrado

$$X_{s_n} \leq \mathbb{E}\left[X_t \middle| \mathcal{F}_{s_n} \right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_t \right] \middle| \mathcal{F}_{s_n} \right] = \mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_{s_n} \right]$$

aplicando nuevamente el teorema anterior

$$X_{s^+} \leq \mathbb{E}\left[X_{s_n} \middle| \mathcal{F}_{s^+} \right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_{s_n} \right] \middle| \mathcal{F}_{s^+} \right] = \mathbb{E}\left[X_{t^+} \middle| \mathcal{F}_{s^+} \right]$$

Es decir $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es una submartingala con respecto a $(\mathcal{F}_{t^+})_{t^+\geq 0}$. Por último aplicando el teorema 1.5.1 vemos que $t \longmapsto X_{t^+}$ es continua por la derecha y con límite por la izquierda. □

Teorema 1.49. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala con respecto a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continua por la derecha y completa. Si la función $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha entonces el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene una modificación continua por la derecha y con límite por la izquierda.*

Demostración. Supongamos que la función $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ es continua por la derecha, probemos que el proceso $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es una modificación continua por la derecha de $(X_t)_{t\geq 0}$. Es claro que $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es adaptado gracias a que la filtración es continua por la derecha. Sea $t \geq 0$ y definamos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales que decrezca a t, por razonamientos análogos a los de la proposición anterior sabemos que $\mathbb{E}[X_{t^+}] = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{t_n}]$ y por hipótesis ésta es igual a $\mathbb{E}[X_t]$.
De la proposición anterior vemos que $X_{t^+} \geq X_t$ casi seguramente, entonces $X_{t^+} = X_t$ casi seguramente. Nuevamente gracias a la proposición anterior el proceso $(X_{t^+})_{t\geq 0}$ es una submartingala continua por la derecha y con límite por la izquierda. □

A partir de ahora vamos a considerar solamente submartingalas continuas por la derecha, notemos que para estos procesos la desigualdad de la proposición 1.5.1 se extiende a

$$(b-a)\mathbb{E}\left[D(X, \mathbb{R}_+, [a,b]) \right] \leq \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[(X_t - b)^+ \right],$$

ya que I lo podemos tomar como $\mathbb{Q}_+$ y como este es un subconjunto denso de $\mathbb{R}_+$, puedo cambiar la desigualdad a $\mathbb{Q}_+$ por $\mathbb{R}_+$ sin alterarla. A continuación veamos algunos resultados de convergencia.

Teorema 1.50. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una submartingala tal que*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[X_t^+\right] < \infty.$$

Entonces $X_t \to X_\infty$ casi seguramente, cuando t se va a infinito y X_∞ es integrable.

Demostración. Como $|X_t| = 2X_t^+ - X_t$ entonces notemos que

$$\mathbb{E}\left[|X_t|\right] = 2\mathbb{E}\left[X_t^+\right] - \mathbb{E}\left[X_t\right] \leq 2\mathbb{E}\left[X_t^+\right] - \mathbb{E}\left[X_0\right]$$

lo cual implica que $\sup\limits_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$. Por lo tanto para toda $a < b$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[D(X, \mathbb{R}_+, [a,b])\right] &\leq \frac{1}{(b-a)} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[(X_t - b)^+\right] \\ &\leq \frac{1}{(b-a)} \left(|b| + \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t|\right]\right) < \infty,\end{aligned}$$

lo cual va a implicar que $D(X, \mathbb{R}_+, [a,b]) < \infty$ casi seguramente.
Como en el teorema 1.42, resulta que el conjunto

$$A = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega : D(X, \mathbb{R}_+, [a,b])(\omega) = \infty\},$$

tiene probabilidad cero, esto va a implicar que

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{t\to\infty} X_t < \limsup_{t\to\infty} X_t\right) = 0,$$

ya que de lo contrario existirían dos números a y b tal que el conjunto

$$\left\{\omega \in \Omega : \liminf_{t\to\infty} X_t(\omega) < \limsup_{t\to\infty} X_t(\omega)\right\} \subset A$$

tendría probabilidad positiva y por ende A también. Por lo tanto

$$X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty.$$

Por otro lado, por el lema de Fatou se tiene que

$$\mathbb{E}\left[|X_\infty|\right] \leq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_t|\right],$$

lo cual prueba que X_∞ es integrable. □

Teorema 1.51. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala, entonces las siguiente condiciones son equivalentes,*

i) El $\lim\limits_{t\to\infty} X_t$ existe en $\mathcal{L}^1$, *ii) Existe una variable aleatoria X_∞ en $\mathcal{L}^1$, tal que $X_t = \mathbb{E}\left[X_\infty \middle| \mathcal{F}_t \right]$,*

iii) La familia $(X_t)_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable.

Si estas condiciones se satisfacen entonces $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ casi seguramente.

Demostración. Primero veamos que la condición $ii)$ implica la $iii)$ fijémonos en

$$|X_t| = \left|\mathbb{E}\left[X_\infty \middle| \mathcal{F}_t \right]\right| \leq \mathbb{E}\left[|X_\infty| \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[|X_t|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_\infty|\right]$$

por lo tanto

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_\infty|\right] < \infty.$$

Luego si $A = \{|X_t| > c\}$ entonces

$$\int_A |X_t|\, d\mathbb{P} = \int_A \left|\mathbb{E}\left[X_\infty \middle| \mathcal{F}_t \right]\right| d\mathbb{P} \leq \int_A \mathbb{E}\left[|X_\infty| \middle| \mathcal{F}_t \right]\, d\mathbb{P} = \int_A |X_\infty|\, d\mathbb{P}.$$

Por otro lado por la desigualdad de Chevyshev obtenemos que

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}\left[|X_t|\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_\infty|\right]}{c} \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo cual va a implicar que

$$\sup_{t\geq 0} \int_A |X_t|\, d\mathbb{P} \leq \sup_{t\geq 0} \int_A |X_\infty|\, d\mathbb{P} \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si la condición $iii)$ se satisface se tiene que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$ y por lo tanto la condición del teorema pasado, entonces X_t converge a X_∞ casi seguramente y como $(X_t)_{t\geq 0}$ es uniformemente integrable entonces también converge en $\mathcal{L}^1$. Lo cual prueba la condición $i)$.
Para finalizar, si la condición $i)$ se satisface, por la igualdad

$$X_t = \mathbb{E}\left[X_{t+h} \middle| \mathcal{F}_t \right] \qquad \text{para toda } t \geq 0 \quad \text{y} \quad h > 0,$$

resulta que $X_t = \mathbb{E}\left[X_\infty \middle| \mathcal{F}_t \right]$, para toda $t \geq 0$. $\square$

Para finalizar el capítulo enunciaremos enunciaremos el teorema de paro de Doob para martingalas continuas.

1.6. Teorema de Paro de Doob

Teorema 1.52 (Teorema de Paro de Doob). *Sean τ y θ dos tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de tal manera que $\theta \leq \tau$ casi seguramente. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala continua por la derecha que satisface las condiciones i), ii) ó iii) del Teorema 1.51 entonces*

i) X_τ y X_θ son integrables,

ii) $X_\theta = \mathbb{E}\left[X_\tau | \mathcal{F}_\theta\right] = \mathbb{E}\left[X_\infty | \mathcal{F}_\theta\right]$, en particular $\mathbb{E}\left[X_\tau\right] = \mathbb{E}\left[X_\theta\right]$.

Demostración. Por el teorema de paro en el caso discreto resulta que

$$X_\theta = \mathbb{E}\left[X_\tau | \mathcal{F}_\theta\right] = \mathbb{E}\left[X_\infty | \mathcal{F}_\theta\right], \tag{1.1}$$

para cada tiempo de paro $\theta \leq \tau$, donde θ y τ toman valores numerables. Ahora definamos dos sucesiones de tiempos de paro discretos $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que decrecen a θ y τ respectivamente.
Sea $A \in \mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}_{\theta_n}$, entonces

$$\int_A X_{\theta_n}\, d\mathbb{P} = \int_A X_{\tau_n}\, d\mathbb{P} \tag{1.2}$$

para toda $n \geq 1$.
Por la continuidad por la derecha del proceso se tiene que $\lim_{n\to\infty} X_{\theta_n} = X_\theta$ y $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau$ casi seguramente. Gracias a la ecuación (1.1) tenemos que las familias $(X_{\theta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ son uniformemente integrables y por consiguiente los $\lim_{n\to\infty} X_{\theta_n} = X_\theta$ y $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} = X_\tau$ se satisfacen en $\mathcal{L}^1$, entonces al pasar el límite en la ecuación (1.2) obtenemos

$$\int_A X_\theta\, d\mathbb{P} = \int_A X_\tau\, d\mathbb{P}$$

Lo cual finaliza la prueba del teorema. $\square$

Ahora demostraremos una proposición que nos será de gran utilidad en el siguiente capítulo ya que la utilizaremos para probar la independencia entre procesos de Poisson.

Proposición 1.53. *Un proceso cádlág adaptado X es una martingala si y solo si para todo tiempo de paro acotado τ, $X_\tau \in \mathcal{L}^1$ y*

$$\mathbb{E}\left[X_\tau\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right].$$

Demostración. Si X es martingala y τ un tiempo de paro acotado, por el teorema de paro de Doob (1.52) $X_\tau \in \mathcal{L}^1$ además

$$\mathbb{E}\left[X_\tau\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right].$$

Ahora, sea $s \leq t$ y $A \in \mathcal{F}_s$ definimos a $\tau = t1_{A^c} + s1_A$, entonces τ es un tiempo de paro acotado y por hipótesis

$$\mathbb{E}\left[X_0\right] = \mathbb{E}\left[X_\tau\right] = \mathbb{E}\left[X_t 1_{A^c}\right] + \mathbb{E}\left[X_s 1_A\right].$$

Analogamente, definimos $\theta = t$, por lo que es un tiempo de paro acotado y nuevamente por hipótesis

$$\mathbb{E}\left[X_0\right] = \mathbb{E}\left[X_t\right] = \mathbb{E}\left[X_t 1_A\right] + \mathbb{E}\left[X_t 1_{A^c}\right],$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[X_t 1_A\right] = \mathbb{E}\left[X_s 1_A\right] \qquad \text{para toda} \qquad A \in \mathcal{F}_s,$$

es decir

$$\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

□

Capítulo 2

Procesos Puntuales de Poisson y Subordinadores

En este capítulo introducimos las nociones básicas de los procesos puntuales de Poisson y subordinadores. El proceso de Poisson y dos importantes familias de martingalas con respecto a este proceso serán estudiadas. También introducimos la noción de medidas aleatorias de Poisson para poder definir el proceso puntual de Poisson. La última parte de éste capítulo concierne al estudio de los subordinadores y su relación con la fórmula de Lévy-Khintchine.

2.1. Procesos puntuales de Poisson

2.1.1. Procesos de Poisson

Definición 2.1. *Un proceso de Poisson con parámetro $c > 0$ es un proceso $(N_t)_{t\geq 0}$ adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ con trayectorias no decrecientes, continuas por la derecha con límite por la izquierda, que toma valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que*

i) $N_0 = 0$ *casi seguramente.*

ii) *Para $0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y tiene distribución de Poisson con parámetro $c(t-s)$.*

Fijémonos ahora en dos familias de martingalas respecto a la filtración natural $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ del proceso de Poisson N. Sea

$$M_t = N_t - ct, \ \ y \ \ \xi_t^q = \exp\left\{-qN_t + ct(1 - e^{-q})\right\}, \ \ t \geq 0, \ q > 0$$

De la independencia y homogeneidad de los incrementos, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[N_{t+s} | \, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[N_{t+s} - N_t + N_t | \, \mathcal{F}_t\right] = N_t + cs,$$

luego restando $c(t+s)$ en ambos lados, obtenemos que $M=(M_t)_{t\geq 0}$ es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)$. Por la aditividad de los exponentes tenemos que para cualesquiera $s,t\geq 0$ tales que $s<t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\xi_t^q|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{-qN_t+ct(1-e^{-q})}|\mathcal{F}_s]\\ &= e^{ct(1-e^{-q})}\mathbb{E}[e^{-q(N_t-N_s)-qN_s}|\mathcal{F}_s]\\ &= e^{ct(1-e^{-q})-qN_s}\mathbb{E}[e^{-q(N_t-N_s)}]\\ &= e^{ct(1-e^{-q})-qN_s}e^{c(t-s)(e^{-q}-1)}\\ &= e^{-qN_s+cs(1-e^{-q})}=\xi_s^q\end{aligned}$$

resultando que $\xi^q=(\xi_t^q)_{t\geq 0}$ es también una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)$.

Ahora, sea $H=(H_t)_{t\geq 0}$ un proceso continuo por la izquierda, definimos la integral estocástica con respecto al proceso de Poisson N por

$$\int_0^t H_s\,dN_s=\sum_{s\leq t}H_s\Delta N_s,\qquad \text{donde}\qquad \Delta N_s=N_s-N_{s^-}.$$

Notemos que de la definición de N, tenemos la siguiente identidad

$$\int_0^t H_s\,dNs=\sum_{n=1}^{\infty}H_{\tau_n}1_{\{\tau_n\leq t\}},$$

donde los τ_n son v.a. independientes con ley exponencial de parámetro c.

Proposición 2.2. *Sea H un proceso continuo por la izquierda con*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_s|\,ds\right]<\infty,\qquad \textit{para toda}\qquad t\geq 0,$$

entonces la integral compensada

$$\int_0^t H_s\,dN_s-c\int_0^t H_s\,ds,\qquad t\geq 0,$$

es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)$. Además, obtenemos la célebre **fórmula de compensación**

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s\,dN_s\right]=c\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s\,ds\right]$$

Demostración. Supongamos que H es un proceso simple, i.e.

$$H_s=H_{t_i}\qquad \text{para}\qquad s\in(t_i,t_{i+1}]$$

donde $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t$ es una partición del intervalo $[0,t]$ y H_{t_i} es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible, supongamos también que H es acotado.
Sea $s<t$, y supongamos sin perdida de generalidad que $t_j<s\leq t_{j+1}$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^t H_u\,dN_u - c\int_0^t H_u\,du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) - c\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}(t_{i+1} - t_i) \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i}\left[(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) - c(t_{i+1} - t_i)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{j-1} H_{t_i}\left[(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) - c(t_{i+1} - t_i)\right] + H_{t_j}\left[(N_s - N_{t_j}) - c(s - t_j)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[H_{t_j}\left[(N_{t_{j+1}} - N_s) - c(t_{j+1} - s)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\sum_{i=j+1}^{n-1} H_{t_i}\left[(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) - c(t_{i+1} - t_i)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\mathbb{E}\left[H_{t_i}\left[(N_t - ct) - (N_{t_i} - ct_i)\right] \middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0 \quad \text{para} \quad t \in (t_i, t_{i+1}],
$$

lo cual implica que el segundo termino de la última suma sea cero; Además

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{i=j+1}^{n-1} H_{t_i}\left[(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) - c(t_{i+1} - t_i)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad\qquad = \sum_{i=j+1}^{n-1} \mathbb{E}\left[H_{t_i}\left[(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) - c(t_{i+1} - t_i)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad\qquad = \sum_{i=j+1}^{n-1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H_{t_i}\left[(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) - c(t_{i+1} - t_i)\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_{t_i}\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = 0,
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^t H_u\,dN_u - \int_0^t H_u\,du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s H_u\,dN_u - \int_0^s H_u\,du,
$$

lo que implica que $\displaystyle\int_0^t H_s\,dM_s$ es una martingala.
A continuación, supongamos que H es un proceso continuo por la izquierda y acotado para alguna $C > 0$. Para $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$
H_t^{(n)} = H_{k/2^n}, \qquad \text{para} \qquad k2^{-n} < t \leq (k+1)2^{-n}.
$$

Por lo tanto, $(H^n, n \geq 1)$ es una sucesión de procesos simples, acotados y continuos por la izquierda tales que

$$H_t^{(n)} \longrightarrow H_t \quad \text{para toda} \quad t \geq 0 \quad \text{casi seguramente.}$$

Por el teorema de convergencia dominada, obtenemos que $I_t^n := \int_0^t H_s^{(n)} \, dM_s$, donde $M_s = N_s - cs$, converge a $I_t := \int_0^t H_s \, dM_s$, casi seguramente. Dado que I^n es martingala y converge casi seguramente a I, por el teorema de convergencia dominada para esperanza condicional, I es martingala,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_u \, dM_u \middle| \mathcal{F}_s\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u^{(n)} \, dM_u \middle| \mathcal{F}_s\right] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)} \, dM_u = \int_0^t H_u \, dM_u.$$

Ahora, por simplicidad supongamos que H es positivo y definamos el siguiente tiempo de paro $T_C = \inf\{t \geq 0 : H_s \geq C\}$. Entonces

$$(I_C)_t := \int_0^{T_c \wedge t} H_s \, dM_s \qquad \text{para} \qquad t \geq 0,$$

es martingala. Por el teorema de paro óptimo, obtenemos la formula de compensación. Por otro lado, como T_C se va a ∞, cuando C crece, tenemos que I_C converge a $\int_0^t H_s \, dM_s$, casi seguramente. Por consiguiente, aplicando el teorema de convergencia monótona, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_C \wedge t} H_s \, dN_s\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \, dN_s\right] \quad \text{cuando} \quad C \to \infty.$$

Por otro lado, usando de nuevo el teorema de convergencia monótona obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_C \wedge t} H_s \, ds\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \, ds\right] \quad \text{cuando} \quad C \to \infty,$$

y hemos completado al prueba.

□

Otra familia de martingalas importante relacionadas con el proceso de Poisson está definida en la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea h una función medible positiva, entonces el proceso exponencial*

$$\exp\left\{-\int_0^t h(s) \, dN_s + c\int_0^t (1 - e^{-h(s)}) \, ds\right\}, \quad t \geq 0,$$

es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)$. En particular, tenemos la **fórmula exponencial**

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^t h(s) \, dN_s\right\}\right] = \exp\left\{-c\int_0^t (1 - e^{-h(s)}) \, ds\right\}.$$

Demostración. Supongamos que h es una función simple, de la siguiente forma

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} h_{t_i} 1_{(t_i, t_{i+1}]}$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ es una partición del intervalo $[0, t]$ y h_{t_i} es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible. Verifiquemos la condición de martingala. Sea $s < t$ y supongamos sin perdida de generalidad que $t_j < s \leq t_{j+1}$, entonces usando un argumento similar a la prueba del resultado anterior vemos que para la martingala exponencial ξ^q, tomando a q igual al valor h_{t_i} para cada i, tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^t h(u)\,dN_u + c\int_0^t (1 - e^{-h(u)})\,du\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = \exp\left\{c\int_0^t (1 - e^{-h(u)})\,du\right\}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-1} h_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

donde el segundo factor corresponde a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-1} h_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=0}^{n-1} h_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\right\}\exp\{-h_{t_j}(N_s - N_s)\}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \prod_{i=0}^{j-1} \exp\{-h_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\}\exp\{-h_{t_j}(N_s - N_{t_j})\}\times \\
&\quad \mathbb{E}\left[\prod_{i=j+1}^{n-1} \exp\{-h_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\}\exp\{-h_{t_j}(N_{t_{j+1}} - N_s)\}\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left\{\int_0^s -h(u)\,dN_u\right\}\prod_{i=j+1}^{n-1}\mathbb{E}\left[\exp\{-h_{t_i}(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})\}\right]\mathbb{E}\left[\exp\{-h_{t_j}(N_{t_{j+1}} - N_s)\}\right] \\
&= \exp\left\{-\int_0^s h(u)\,dN_u\right\}\exp\left\{-c\int_s^t (1 - e^{-h(u)})\,du\right\}
\end{aligned}$$

y finalmente obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^t h(u)\,dN_u + c\int_0^t (1 - e^{-h(u)})\,du\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left\{-\int_0^s h(u)\,dN_u + c\int_0^s (1 - e^{-h(u)})\,du\right\}$$

Por lo tanto el proceso exponencial es martingala. A fin de extender este resultado para cualquier h medible positiva, es suficiente aproximar a h por una sucesión $(h_n)_{n\geq 1}$ de funciones simples positivas tales que converjan a h, casi seguramente, y aplicar el teorema de la convergencia monótona. □

Concluimos esta sección con un criterio para la independencia de procesos de Poisson que nos será de gran utilidad para lo que sigue.

Proposición 2.4. *Sean N y N' dos procesos $(\mathcal{F}_t)$-Poisson. Los procesos son independientes si y solo si nunca saltan simultáneamente, es decir*

$$N_t - N_{t^-} = 0 \quad ó \quad N'_t - N'_{t^-} = 0 \quad \textit{para toda } t > 0 \quad \textit{casi seguramente.}$$

Es crucial en la proposición asumir que N y N' son procesos de Poisson en la misma filtración, En otro caso, el resultado no es cierto. Por ejemplo, si definimos $N'_t = N_{2t}$ es claro que N' sigue siendo un proceso de Poisson que nunca salta al mismo tiempo que N y N' no es independiente de N.

Demostración. Primero, supongamos que N y N' son independientes y sea $(\tau_n)_{n\geq 1}$ los tiempos de saltos sucesivos de N. Entonces

$$\sum_{s>o} (\Delta N_s)(\Delta N'_s) = \sum_{n\geq 1} \Delta N'_{\tau_n} \quad \text{c.s.}$$

Por otro lado, para cada t fijo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Delta N'_t\right] &= \mathbb{E}\left[N'_t - N'_{t^-}\right] \\
&= \lim_{s\uparrow t} \mathbb{E}\left[N_t - N_s\right] \\
&= \lim_{s\uparrow t} c(t-s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Delta N'_t = 0$ c.s. para toda t.
Por la independencia de N' y $(\tau_n)_{n\geq 1}$ tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \Delta N'_{\tau_n}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{s>0} (\Delta N_s)(\Delta N'_s)\right] = \sum_{s>0} \mathbb{E}\left[\Delta N_s\right] \mathbb{E}\left[\Delta N'_s\right] = 0$$

Entonces $\Delta N'_{\tau_n} = 0$ c.s. para toda $n \in \mathbb{N}$, i.e. cada vez que salta N, no lo hace N'.

Para el regreso de la proposición necesitaremos del siguiente lema.

Lema 2.5. *Sea M una martingala càdlàg de variación acotada y M' una martingala càdlàg acotada en la misma filtración. Si M y M' nunca saltan simultáneamente entonces MM' es una martingala.*

Demostración. Para demostrar este lema, debido a la proposición (1.6.1), es suficiente mostrar que para cualquier tiempo de paro T, tenemos

$$\mathbb{E}\left[M_T M'_T\right] = \mathbb{E}\left[M_0 M'_0\right].$$

Tomemos, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = A$, una partición del intervalo $[0, A]$ con $T \leq A$ c.s. Entonces

$$\begin{aligned}
M_T M'_T - M_0 M'_0 = &\sum_{t_i<T} M_{t_i}(M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i}) + \sum_{t_i<T} M'_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \\
&+ \sum_{t_i<T} (M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}).
\end{aligned}$$

Si tomamos la esperanza de la igualdad anterior, es claro que la esperanza de los primeros dos términos del lado derecho son iguales a 0, por lo que

$$\mathbb{E}\left[M_T M_T' - M_0 M_0'\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{t_i<T} (M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\right].$$

Por otro lado, como M' esta acotado y M es de variación acotada, tenemos

$$\left|\sum_{t_i<T} (M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\right| \leq C \left|\sum_{t_i<T} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\right| \leq C V_0^A(M) \leq C',$$

donde $V_0^A(M)$ es la variación total de M. Cuando la longitud del más grande de los subintervalos en la partición tiende a 0, tenemos que

$$\sum_{t_i<T} (M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \longrightarrow \sum_{s<T} (\Delta M_s)(\Delta M'_s) = 0,$$

la convergencia se da por el hecho de que M (también recordemos que M es de variación acotada) y M' son càdlàg y nunca saltan simultáneamente. Por lo tanto aplicando el teorema de convergencia dominada, obtenemos el resultado.

$\square$

Ahora, sean h y h' dos funciones simples y definamos las martingalas exponenciales

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t h(s)\, dN_s + c\int_0^t (1 - e^{-h(s)})\, ds\right\},$$

y

$$M'_t = \exp\left\{-\int_0^t h'(s)\, dN'_s + c'\int_0^t (1 - e^{-h'(s)})\, ds\right\},$$

las cuales están definidas en la misma filtración. Ya que N y N' nunca saltan simultáneamente, las martingalas M y M' nunca saltan simultáneamente también y el producto es una martingala por el lema anterior. Por lo que $\mathbb{E}\left[M_t M'_t\right] = 1$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^t h(s)\, dN_s \; - \; \int_0^t h'(s)\, dN'_s\right\}\right] & \\
&= \exp\left\{-c\int_0^t (1 - e^{-h(s)})\, ds - c'\int_0^t (1 - e^{-h'(s)})\, ds\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-c\int_0^t (1 - e^{-h(s)})\, ds\right\}\right] \mathbb{E}\left[\exp\left\{-c'\int_0^t (1 - e^{-h'(s)})\, ds\right\}\right],
\end{aligned}$$

y la independencia queda demostrada.

$\square$

2.1.2. Medidas de Poisson y procesos puntuales de Poisson

Definición 2.6. *Sea $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espacio medible donde μ es una medida σ-finita. Una medida aleatoria de Poisson con medida de intensidad μ es una familia de variables aleatorias $M = \{M(A), A \in \mathcal{E}\}$ definidas en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que*

i) Si $B \in \mathcal{E}$ es tal que $\mu(B) < \infty$, la variable aleatoria $M(B)$ tiene una distribución Poisson con parámetro $\mu(B)$, es decir,

$$\mathbb{P}\left(M(B) = k)\right) = \frac{\mu(B)^k}{k!} e^{-\mu(B)}, \qquad \textit{para} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Si $\mu(B) = \infty$, entonces $M(B) = \infty$ c.s.

ii) Sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una sucesión finita de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{E}$, las variables aleatorias $M(B_1), M(B_2), \ldots, M(B_n)$ son independientes.

Ejemplo. Sea $E = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y $\mu = c\lambda$, donde λ es la medida de Lebesgue y $c > 0$. El proceso

$$t \longmapsto M([0, t]),$$

es un proceso de Poisson con parámetro c. De manera inversa, sea N un proceso de Poisson con parámetro $c = 1$ y definimos

$$M(B) = \int_0^\infty 1_B(s)\, dN_s,$$

la familia M es una medida aleatoria de Poisson.

Primero, por ser la familia M una medida aleatoria de Poisson sabemos que $M([0, t])$ es independiente de $M([t, t + s])$ para todo $s, t > 0$, además

$$\mathbb{P}\left(M([0, t]) = k\right) = \frac{\mu([0, t])^k}{k!} e^{-\mu([0,t])} = \frac{(ct)^k}{k!} e^{-ct},$$

y

$$\mathbb{P}\left(M([t, t + s]) = \hat{k}\right) = \frac{\mu([t, t + s])^{\hat{k}}}{\hat{k}!} e^{-\mu([t,t+s])} = \frac{(cs)^{\hat{k}}}{\hat{k}!} e^{-cs} = \mathbb{P}\left(M([0, s]) = \hat{k}\right)$$

por lo tanto

$$t \longmapsto M([0, t]),$$

es un proceso de Poisson.

Ahora, veamos que la familia M definida por $M(B) = \displaystyle\int_0^\infty 1_B(s)\, dN_s$ es una medida aleatoria de Poisson. Sea $B \in \mathcal{E}$ tal que $\mu(B) = \lambda(B) < \infty$, $q \geq 0$, por la martingala exponencial tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left\{-M(B)q\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^\infty q1_B(s)\,dN_s\right\}\right]\\
&= \exp\left\{-\int_0^\infty (1-e^{-q1_B(s)})\,ds\right\}\\
&= \exp\left\{-\int_0^\infty (1-e^{-q})1_B(s)\,ds\right\}\\
&= \exp\left\{-\lambda(B)(1-e^{-q})\right\}
\end{aligned}
$$

que resulta ser la transformada de Laplace de una v.a. de Poisson con parámetro $\lambda(B)$.

Si $\lambda(B)=\infty$, entonces existe una sucesión $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B$ y $\lambda(B_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión $(1_{Bn})_{n\geq 1}$ es creciente, positiva y converge a 1_B, por lo tanto aplicando el teorema de la convergencia monótona obtenemos que $M(B)=\infty$.

Ahora, sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una sucesión finita de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{E}$, definimos $M=(M(B_1), M(B_2), \ldots, M(B_n))$ y $Q=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ con $q_i \geq 0$ para toda i veamos que las v.a. $M(B_i)$ son independientes

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\langle Q, M\rangle\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^n q_i M(B_i)\right\}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^\infty \sum_{i=1}^n q_i 1_{B_i}(s)\,dN_s\right\}\right]\\
&= \exp\left\{-\int_0^\infty (1-e^{-\sum_{i=1}^n q_i 1_{B_i}(s)})\,ds\right\}\\
&= \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \int_0^\infty (1-e^{-q_i})1_{B_i}(s)\,ds\right\}\\
&= \exp\left\{-\sum_{i=1}^n (1-e^{-q_i})\lambda(B_i)\right\}\\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp\left\{-M(B_i)q\right\}\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la familia M es una medida aleatoria de Poisson.

Debido a su definición y por la Proposición 1.4, las medidas aleatorias de Poisson satisfacen las siguientes propiedades:

Proposición 2.7 (Propiedad de Superposición). *Sea $(\mu_n, n \geq 1)$ una sucesión de medidas σ-finitas y definamos $\mu = \sum_{n\geq 1}\mu_n$. Si μ es también una medida σ-finita y*

$M^{(1)}, M^{(2)}, \dots$ son medidas aleatorias de Poisson independientes con medidas de intensidad $\mu_1, \mu_2, \dots$ respectivamente, entonces $M = \sum_{n\geq 1} M^{(n)}$ es una medida aleatoria de Poisson con medida de intensidad μ.

Demostración. Primero, sea $B \in \mathcal{E}$, supongamos que $\mu(B) < \infty$ y fijémonos en la transformada de Laplace de $M(B)$. Sea $q \geq 0$, por el teorema de convergencia dominada y la continuidad de la función exponencial

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\{-M(B)q\}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M^{(i)}(B)q\right\}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} M^{(i)}(B)q\right\}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(B)(1-e^{-q})\right\} \\
&= \exp\left\{-\mu(B)(1-e^{-q})\right\}
\end{aligned}$$

por lo tanto la transformada de Laplace corresponde a la de una v.a. de Poisson con parámetro $\mu(B)$.

Si $\mu(B) = \infty$ y $\mu_i(B) < \infty$ para toda i, tenemos entonces que $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(B) = \infty$, además, sea $q > 0$ por continuidad

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(B)(1-e^{-q})\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M^{(i)}(B)q\right\}\right]
\end{aligned}$$

si y solo si $M(B) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} M^{(i)}(B) = \infty$.

En el caso de que $\mu_i(B) = \infty$ p.a. i, entonces $M^{(i)}(B) = \infty$ y por lo tanto $M(B) = \infty$.

Ahora, sea $B_1, B_2, \dots, B_n$ una sucesión finita de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{E}$, sabemos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $M^{(k)}(B_1), M^{(k)}(B_2), \dots, M^{(k)}(B_n)$ son independientes, entonces

$$\sum_{k\geq 1} M^{(k)}(B_1),\ \sum_{k\geq 1} M^{(k)}(B_2),\ \dots\ ,\sum_{k\geq 1} M^{(k)}(B_n) \quad \text{son independientes}$$

Por lo tanto M es una medida aleatoria de Poisson con intensidad μ.

□

Proposición 2.8 (**Propiedad de Divisibilidad**). *Sea M una medida aleatoria de Poisson en $(E, \mathcal{E})$, con intensidad μ y (B_i) una sucesión de conjuntos disjunta dos a dos de conjuntos de $\mathcal{E}$, entonces las restricciones $M|_{B_1}, M|_{B_2}, \ldots$ son medidas aleatorias de Poisson independientes con intensidad $\mu(\cdot \cap B_1), \mu(\cdot \cap B_2), \ldots$ respectivamente.*

Demostración. Primero veamos que $M|_{B_i}$ es medida aleatoria de Poisson para toda $i \in \mathbb{N}$.
Sea $A \in \mathcal{E}$ tal que $\mu(A \cap B_i) < \infty$, entonces

$$\mathbb{P}\left(M|_{B_i}(A) = k\right) = \mathbb{P}\left(M(A \cap B_i) = k\right) = \frac{\mu(A \cap B_i)^k}{k!} e^{-\mu(A \cap B_i)},$$

si $\mu(A \cap B_i) = \infty$, entonces $M|_{B_i}(A) = M(A \cap B_1) = \infty$.
Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una sucesión finita de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{E}$, entonces la sucesión $A_1 \cap B_i, A_2 \cap B_i, \ldots, A_n \cap B_i$ es también una sucesión finita de conjuntos disjuntos dos a dos, por lo que

$$M|_{B_i}(A_1) = M(A_1 \cap B_i), \ldots, M|_{B_i}(A_n) = M(A_n \cap B_i) \quad \text{son independientes.}$$

Esto implica que $M|_{B_i}$ es una medida de Poisson para toda i. Ahora veamos que $(M|_{B_i})$ son independientes, para ello consideramos a $C \in \mathcal{E}$, notemos que la sucesión $C \cap B_i$ es disjunta dos a dos, por tanto

$$M|_{B_1}(C) = M(C \cap B_1), \ldots, M|_{B_n}(C) = M(C \cap B_n) \quad \text{son independientes.}$$

□

Proposición 2.9 (**Propiedad de la Imagen**). *Sea $f : (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (G, \mathcal{G})$ una función medible, μ una medida σ-finita en $(E, \mathcal{E})$ y γ la medida imagen de μ inducida por f. Suponemos también que γ es σ-finita. Si M es una medida aleatoria de Poisson en $(E, \mathcal{E})$ con medida de intensidad μ y si definimos*

$$M \circ f^{-1}(C) = M(f^{-1}), \qquad \textit{para} \quad C \in \mathcal{G}$$

Entonces $M \circ f^{-1}$ es una medida aleatoria de Poisson con medida de intensidad γ.

Demostración. Sea $C \in \mathcal{G}$ tal que $\gamma(C) < \infty$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(M \circ f^{-1}(C) = k\right) &= \mathbb{P}\left(M(f^{-1}(C)) = k\right) \\
&= \frac{\mu(f^{-1}(C))^k}{k!} e^{-\mu(f^{-1}(C))} \\
&= \frac{\gamma(C)^k}{k!} e^{-\gamma(C)}.
\end{aligned}$$

Si $\gamma(C) = \infty$, entonces $M(f^{-1}(C)) = \infty$.

Sea $C_1, C_2, \ldots, C_n$ una sucesión finita de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{G}$, entonces la sucesión finita de imágenes inversas $f^{-1}(C_i)$ es ajena dos a dos para $i = 1, 2, \ldots, n$, por lo que

$$M(f^{-1}(C_1)), M(f^{-1}(C_2)), \ldots, M(f^{-1}(C_n)) \quad \text{son independientes.}$$

Por lo tanto $M \circ f^{-1}$ es una medida aleatoria de Poisson con intensidad γ. $\square$

Fijémonos ahora en la construcción de medidas aleatorias de Poisson. Primero, supongamos que $\mu(E) < \infty$ y definamos la medida de probabilidad

$$\rho(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(E)}, \qquad \text{para} \quad B \in \mathcal{E}.$$

Tomemos $(\xi_n)_{n\geq 1}$, una sucesión de variables aleatorias independientes identicamente distribuidas con ley ρ y a N una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\mu(E)$ que sea independiente de $(\xi_n)_{n\geq 1}$.

Ahora, definamos a la medida aleatoria

$$M(dx) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi_i}(dx),$$

donde δ_y es la medida de Dirac en y. Observemos que la medida aleatoria M es una medida de conteo, i.e. para cualquier $B \in \mathcal{E}$

$$M(B) = \text{card}\left\{i \leq N : \xi_i \in B\right\},$$

aún más, M es una medida aleatoria de Poisson con intensidad μ.

Primero verifiquemos la construcción para el caso finito, por simplicidad escogemos $\mu(E) = 1$. Calculando la distribución de $M(B)$, para $B \in \mathcal{E}$ tenemos

$$\mathbb{P}\left(M(B) = k\right) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} 1_{\{\xi_i \in B\}} = k | N = n\right) \mathbb{P}\left(N = n\right).$$

Como $(1_{\{\xi_i\in B\}}, i \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias Bernoulli con parámetro $\mu(B)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(M(B) = k\right) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-1}}{n!}\binom{n}{k}\mu(B)^k(1-\mu(B))^{n-k} \\
&= \frac{\mu(B)^k}{k!}e^{-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1-\mu(B))^r}{r!} \\
&= \frac{\mu(B)^k}{k!}e^{-\mu(B)}.
\end{aligned}$$

Ahora, demostremos la independencia (propiedad (ii)). Sea B y B' dos conjuntos ajenos en $\mathcal{E}$, sea un proceso de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ con parámetro 1 (o $\mu(E)$) que es independiente de $(\xi_n)_{n\geq 1}$ y definimos $X_t = \xi_{N_t}$, y sea $(\mathcal{F}_t)$ la filtración natural de $X = (X_t)_{t\geq 0}$. Definimos a los procesos de conteo

$$N_t^B = \text{card}\{i \leq N_t : \xi_i \in B\} \qquad \text{y} \qquad N_t^{B'} = \text{card}\{i \leq N_t : \xi_i \in B'\}$$

Veamos que N_t^B y $N_t^{B'}$ son procesos de Poisson, sean $t, s \geq 0$ entonces revisemos que tienen incrementos estacionarios

$$\begin{aligned} N_{t+s}^B - N_t^B &= \sum_{i=1}^{N_{t+s}} \delta_{\xi_i}(B) - \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{\xi_i}(B) \\ &= \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+s}} \delta_{\xi_i}(B) \\ &= \sum_{i=1}^{N_{t+s}-N_t} \delta_{\xi_{N_t+i}}(B) \\ &\overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{N_s} \delta_{\xi_i}(B) = N_s^B, \end{aligned}$$

análogamente para $N_t^{B'}$.

Además, ya demostramos que tienen un distribución de Poisson debido a su definición y es claro que tienen incrementos independientes por lo que N_t^B y $N_t^{B'}$ son procesos $(\mathcal{F}_t)$-Poisson. Debido a que B y B' son ajenos, N_t^B y $N_t^{B'}$ nunca saltan simultáneamente y por lo tanto son independientes, fijando $t = 1$ ($N_1^B = M(B), N_1^{B'} = M(B')$) obtenemos que M es una medida aleatoria de Poisson.

Para el caso σ-finito, escogemos una partición $(B_n, n \geq 1)$ de E con $B_n \in \mathcal{E}$ y $\mu(B_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el caso finito, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n(A)$ con intensidad $\mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{E}|_{B_n}$ y definimos

$$M(A) = \sum_{n\geq 1} M_n(A \cap B_n) \qquad \text{para} \quad A \in \mathcal{E},$$

por lo tanto por la propiedad de superposición M es medida aleatoria de Poisson.

Proposición 2.10 (Fórmula de Campbell). *Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ medible y M una medida aleatoria de Poisson con intensidad μ. Definimos*

$$< M, f >= \int_E f(x)\, dM(x),$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[\exp\{- < M, f >\}\right] = \exp\left\{- \int_E (1 - e^{-f(x)})\, d\mu(x)\right\}.$$

Demostración. Supongamos primero que $\mu(E) < \infty$ y que f es una función simple, i.e.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 1_{\{x \in B_i\}}, \qquad c_i \geq 0 \quad \text{y} \quad (B_i) \text{ una partición de } E.$$

Veamos primero que $< M, f >$ está bien definido, es claro que $< M, f >= \sum_{i=1}^{\infty} c_i M(B_i)$, y por la construcción anterior tenemos

$$< M, f >= \sum_{i=1}^{\infty} c_i M(B_i) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j),$$

donde $(\xi_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de v.a identicamente distribuidas con ley $\rho(\cdot) = \mu(\cdot)/\mu(E)$ y N es una v.a. de Poisson con parámetro $\mu(E)$ que es independiente de $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left\{- < M, f >\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\right\}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{-f(\xi_1)\cdots} e^{f(\xi_k)}\right] \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_E e^{-f(x)} \frac{d\mu(x)}{\mu(E)}\right)^k \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} \\
&= \exp\left\{-\int_E (1 - e^{f(x)})\, d\mu(x)\right\},
\end{aligned}$$

observando además que lo anterior demuestra que $< M, f >$ está bien definido.

Para demostrar la fórmula de Campbell para cualquier función medible positiva, definimos la integral $< M, f >$ por aproximación. Definamos

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \qquad \text{en} \quad \left\{x : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}.$$

Entonces, es claro que f_n converge a f y aplicando el teorema de la convergencia monótona, obtenemos

$$< M, f >= \lim_{n\to\infty} < M, f_n >,$$

que implica

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{- < M, f >\right\}\right] = \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\, d\mu(x)\right\}.$$

Nos ocupamos ahora del caso cuando $\mu(E) = \infty$. Sea $(B_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos ajenos en $\mathcal{E}$ ta que $\mu(B_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \geq 1$, definimos $E_n = \bigcup_{k\leq n} B_k$

y tomamos la restricción $M^n = M|_{E_n}$. Sea $f \geq 0$ medible, entonces por definición

$$< M^n, f >= \int_E f(x) 1_{\{E_n\}}(x)\, dM^n(x),$$

satisface la fórmula de Campbell. Ya que E_n converge de manera creciente a E cuando n se va a ∞ , es claro que $f 1_{\{E_n\}}$ converge a f y que $(1 - e^{-f(x)}) 1_{\{E_n\}}$ converge a $(1 - e^{-f(x)})$ de manera creciente. Por lo tanto, para finalizar, aplicamos el teorema de convergencia monótona nuevamente, y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\{- < M, f >\}\right] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\{- < M^n, f >\}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{- \int_{E_n} (1 - e^{-f(x)})\, d\mu(x)\right\} \\
&= \exp\left\{- \int_E (1 - e^{-f(x)})\, d\mu(x)\right\},
\end{aligned}$$

lo cual deseábamos probar. □

Ahora, introducimos M una medida aleatoria de Poisson en $[0, \infty) \times E$ con medida de intensidad $\lambda \otimes \mu$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0, \infty)$ y μ es una medida σ-finita en E.

Lema 2.11. *Casi seguramente, para toda $t \geq 0$*

$$M(\{t\} \times E) = 0 \text{ ó } 1.$$

Demostración. Primero supongamos que $\mu(E) < \infty$. Para $n \geq 1$, por la propiedades de estacionariedad e independencia de M

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\exists k \leq 2^n : M\Big([(k-1)2^{-n}, k2^{-n}) \times E\Big) \geq 2\Big) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big(M\Big([(k-1)2^{-n}, k2^{-n}) \times E\Big) \geq 2\Big) \\
&= 2^n \mathbb{P}\Big(M\Big([0, 2^{-n}) \times E\Big) \geq 2\Big).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\mathbb{P}\Big(M\Big([0, 2^{-n}) \times E\Big) \geq 2\Big) = 1 - e^{-2^{-n}\mu(E)} - 2^{-n}\mu(E) e^{-2^{-n}\mu(E)} \leq (2^{-n}\mu(E))^2,$$

implicando que

$$\mathbb{P}\Big(\exists k \leq 2^n : M\Big([(k-1)2^{-n}, k2^{-n}) \times E\Big) \geq 2\Big) \leq 2^{-n}\mu^2(E).$$

Haciendo a n tender a ∞ obtenemos el resultado.
Probemos ahora el resultado cuando $\mu(E) = \infty$. Sea $(B_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos ajenos en $\mathcal{E}$ tal que $\mu(B_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \geq 1$, definimos $E_n = \bigcup_{k\leq n} B_k$ y la función $f_n(x) = 1_{\{\{t\}\times E_n\}}$ y notemos que casi seguramente, para toda $t \geq 0$

$$< M, f_n >= \int_{[0,\infty)\times E} 1_{\{\{t\}\times E_n\}}\, dM(x) = M(\{t\} \times E_n) \leq 1,$$

ya que $\mu(E_n) < \infty$. Por otro lado, la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ es creciente y converge a $f = 1_{\{\{t\}\times E\}}$. Luego, aplicando el teorema de convergencia monótona, tenemos que

$$M(\{t\} \times E) =< M, f >= \lim_{n\to\infty} < M, f_n >= \lim_{n\to\infty} M(\{t\} \times E_n) \leq 1,$$

que se satisface casi seguramente para toda $t \geq 0$, ya que

$$A = \{\omega \in \Omega : \text{para toda } t \geq 0, < M, f >\leq 1\}$$

cumple que

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega : \text{para toda } t \geq 0, < M, f_n >\leq 1\},$$

y cada uno de estos conjuntos tienen probabilidad igual que 1.

□

Si $M(\{t\} \times E) = 1$, entonces existe uno y solo un punto $\Delta_t \in E$ tal que

$$M|_{\{t\}\times E} = \delta_{(t,\Delta_t)}.$$

Si $M(\{t\} \times E) = 0$, entonces no definimos $\Delta_t \in E$.

Definición 2.12. *El proceso definido por $\Delta = (\Delta_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson puntual con medida característica μ.*

Lema 2.13. *Sea $B \in \mathcal{E}$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$ y definimos*

$$T_B = \inf\{t \geq 0 : \Delta_t \in B\}.$$

Entonces, T_B y Δ_{T_B} son variables aleatorias independientes. La distribución de T_B es una v.a. exponencial con parámetro $\mu(B)$ y la de Δ_{T_B} esta dada por $\mu(\cdot \cap B)/\mu(B)$.

Demostración. Sea $A \subset B$. Un sencillo cálculo muestra que

$$\mathbb{P}\left(T_B \leq t, \Delta_{T_B} \in A\right) = \mathbb{P}\left(T_A < T_{B\setminus A}, T_A \wedge T_{B\setminus A} \leq t\right).$$

Por otro lado, es claro que T_A es el primer salto del proceso de Poisson N^A definido por

$$N_t^A = \text{card}\{s \leq t : \Delta_s \in A\},$$

por lo cual T_A tiene una distribución exponencial con parámetro $\mu(A)$. Ya que A y $B \setminus A$ son ajenos, T_A y $T_{B\setminus A}$ son variables aleatorias independientes exponenciales con parámetros $\mu(A)$ y $\mu(B) - \mu(A)$, respectivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_B \leq t, \Delta_{T_B} \in A\right) &= \mathbb{P}\left(T_A < T_{B\setminus A}, T_A \wedge T_{B\setminus A} \leq t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(T_A < T_{B\setminus A}, T_A \leq t\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\{T_A < T_{B\setminus A}, T_A \leq t\}} \middle| T_A\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{T_A \leq t\}}\mathbb{E}\left[1_{\{T_A < T_{B\setminus A}\}} \middle| T_A\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{T_A \leq t\}} e^{-(\mu(B)-\mu(A))T_A}\right] \\
&= \frac{\mu(A)}{\mu(B)}(1 - e^{-t\mu(B)}),
\end{aligned}$$

obteniendo el resultado deseado. □

2.2. Subordinadores

Los subordinadores son una extensión de la noción de los procesos de Poisson puntuales y generalmente, son definidos como sigue.

Definición 2.14. *Un subordinador es un proceso estocástico que toma valores en* $[0, \infty)$ *con trayectorias càdlàg (i.e. continuas por la derecha y con límites por la izquierda) y tal que tiene incrementos homogéneos e independientes.*

Es importante notar que los subordinadores tienen trayectorias crecientes. También estamos interesados en los subordinadores matados que son un poco más generales que los subordinadores. Con mayor exactitud, sea $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ un subordinador y $\mathbf{e} = \mathbf{e}_q$ tiempo exponencial independiente con parámetro $q \geq 0$, el proceso $\sigma^{(q)}$ que toma valores en $[0, \infty)$ y definido por

$$\sigma_t^{(q)} = \begin{cases} \sigma_t & \text{si } t \in [0, \mathbf{e}) \\ \infty & \text{si } t \in [\mathbf{e}, \infty) \end{cases}$$

es llamada un subordinador matado con tasa q. De hecho cualquier proceso continuo por la derecha no-decreciente $X = (X_t)_{t \geq 0}$ que tome valores en $[0, \infty)$ es un subordinador matado con tasa q si y solo si $\mathbb{P}\left(X_t < \infty\right) = e^{-qt}$ y condicionando sobre $X_t < \infty$, el incremento $X_{t+s} - X_t$ es independiente de $(X_u, 0 \leq u \leq t)$ y tiene la misma ley que X_s.
Notemos que el proceso de Poisson es un subordinador cuyos saltos son iguales a uno.

Usando la descomposición

$$\sigma_n = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + \ldots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}),$$

la independencia y homogeneidad de los incrementos de σ, observamos que la transformada de Laplace de σ_n satisface

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_n}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{q\sigma_1}\right]\right)^n \qquad q \geq 0.$$

Además si t es un número racional, tenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_t}\right] = \left(\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_1}\right]\right)^t \qquad q \geq 0.$$

Por la continuidad por la derecha de las trayectorias, esta última igualdad es válida para una $t \geq 0$ arbitraria. Ahora, si

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_1}\right] = e^{-\Phi(q)} \qquad \text{para toda } q \geq 0,$$

para una función $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ llamada el exponente de Laplace, entonces

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_t}\right] = e^{-t\Phi(q)} \qquad \text{para toda } t, q \geq 0.$$

Una pregunta natural es: ¿Cuáles son las funciones Φ que aparecen como el exponente de Laplace de un subordinador?

Teorema 2.15 (De Finetti, Lévy, Khintchine). *(i) Si Φ es el exponente de Laplace de un subordinador $\sigma = (\sigma_t)_{t\geq 0}$, entonces existe un único par (k, d) de reales no negativos y una única medida Π con soporte en $(0,\infty)$, que satisface $\int (1 \wedge x)\, d\Pi(x) < \infty$, tal que para toda $\lambda \geq 0$*

$$\Phi(\lambda) = k + d\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda x})\, d\Pi(x). \tag{2.1}$$

(ii) De manera inversa, cualquier función Φ que pueda ser expresada de la forma (1.1) es el exponente de Laplace de un subordinador.

La ecuación (2.1) se conoce como la fórmula de Lévy-Khintchine; uno llama a k la tasa de muerte, d la deriva y Π la medida de Lévy de σ.

Demostración. (i) Para cualquier $t > 0$, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\sigma_t}\right] = e^{-t\Phi(\lambda)}.$$

Notemos que Φ puede ser expresado como sigue

$$\Phi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} n(1 - e^{-\Phi(\lambda)/n}) \qquad \text{y} \qquad 1 - e^{\Phi(\lambda)/n} = \mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda\sigma_{1/n}}\right].$$

Ahora, definimos $\overline{F}_n(x) = n\mathbb{P}\left(\sigma_{1/n} > x\right)$, $x > 0$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x}\overline{F}_n(x)\, dx &= \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} n\mathbb{P}\left(\sigma_{1/n} > x\right)\, dx \\
&= n\int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} \int_x^\infty \mathbb{P}\left(\sigma_{1/n} \in \mathrm{d}y\right)\, dx \\
&= n\int_0^\infty \int_0^y e^{-\lambda x}\, dx\mathbb{P}\left(\sigma_{1/n} \in \mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{n}{\lambda}\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y})\mathbb{P}\left(\sigma_{1/n} \in \mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{n}{\lambda}\mathbb{E}\left[1 - e^{-\lambda\sigma_{1/n}}\right] = \frac{n}{\lambda}(1 - e^{\frac{\Phi(\lambda)}{n}}),
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x}\overline{F}_n(x)\, dx.$$

Por lo cual $(\overline{F}_n(x)dx, n \geq 1)$ converge vagamente a una medida dada en $[0,\infty)$ cuando n tiende a ∞. Ya que cada función $\overline{F}_n$ decrece, el límite tiene necesariamente la forma

$$d\delta_0(dx) + \overline{\Lambda}(x)dx,$$

donde $d \geq 0$, $\overline{\Lambda}$ es una función no creciente. En consecuencia

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = d + \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x}\overline{\Lambda}(x)\, dx,$$

donde integrando por partes obtenemos,

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x}\overline{\Lambda}(x)\, dx &= \overline{\Lambda}(x)\left(\frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right) d\overline{\Lambda}(x) \\ &= \frac{\overline{\Lambda}(\infty)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x})\, d\overline{\Lambda}(x)\end{aligned}$$

por lo que con $k = \overline{\Lambda}(\infty)$ y $\Pi(dx) = -d\overline{\Lambda}(x)$ en $(0,\infty)$ obtenemos (2.1). Para finalizar la prueba verifiquemos la condición sobre la medida Π establecida anteriormente,

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\, d\Pi(x) &= \int_0^1 x\, d\Pi(x) + \int_1^\infty d\Pi(x) \\ &= \int_0^1 x\, d\Pi(x) - \int_1^\infty d\overline{\Lambda}(x) \\ &= \int_0^1 x\, d\Pi(x) + \overline{\Lambda}(1) - \overline{\Lambda}(\infty)\end{aligned}$$

como $\overline{\Lambda}(x)$ es no creciente, $\overline{\Lambda}(\infty) < \infty$, además

$$\int_0^1 x\, d\Pi(x) \leq \int_0^1 (1-e^{-\lambda x})\, d\Pi(x) \leq \Phi(\lambda) < \infty,$$

por lo tanto

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\, d\Pi(x) < \infty.$$

(ii)Consideremos un proceso puntual de Poisson $\Delta = (\Delta_t, t \geq 0)$ con valores en $[0,\infty]$ y con medida característica $\Pi + k\delta_\infty$. Esto significa que para cualquier boreliano $B \subseteq (0,\infty]$, el proceso de conteo $N_t^B = \mathrm{card}\{s \in [0,t] : \Delta_s \in B\}$ es un proceso de Poisson con intensidad $\Pi(B) + k\delta_\infty(B)$, y para borelianos ajenos corresponden procesos de Poisson independientes. En particular, el instante del primer punto al infinito, $T_\infty = \text{ínf}\{t \geq 0 : \Delta_t = \infty\}$, tiene una distribución exponencial con parámetro k ($T_\infty = \infty$, si $k = 0$), y es independiente del proceso puntual de Poisson restringido a $(0,\infty)$. Además, éste último es un proceso puntual de Poisson con medida característica Π.

Definimos $\Sigma = (\Sigma_t, t \geq 0)$ como

$$\Sigma_t = dt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s.$$

La condición $\int(1 \wedge x)\, d\Pi(x)$ asegura que si $t < T_\infty$ entonces $\Sigma_t < \infty$ c.s. Observemos que Σ es un proceso creciente, continuo por la derecha y que inicia en 0, con tiempo de vida T_∞, y sus incrementos son estacionarios e independientes sobre $[0, T_\infty]$. En otras palabras, Σ es un subordinador. Finalmente, la fórmula de Campbell da como resultado que para toda $\lambda, t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda\Sigma_t\}\right] = \exp\left\{-t\left(k + d\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{\lambda x})\, d\Pi(x)\right)\right\},$$

lo cual muestras que el exponente de Laplace de Σ esta dado por (2.1).

$\square$

La prueba de la fórmula de Lévy-Khintchine nos da también una interpretación probabilista como se puede ver en el siguiente corolario.

Corolario 2.16 (Descomposición de Lévy-Itô)**.** *Uno tiene casi seguramente, para toda* $t \geq 0$*:*

$$\sigma_t = dt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta_s,$$

donde $\Delta = (\Delta_s : s \geq 0)$ *es un proceso puntual de Poisson con valores en* $(0, \infty]$ *y medida característica* $\Pi + k\delta_\infty$*. El tiempo de vida de* σ *esta dado por* $\zeta = \inf\{t \geq 0 : \Delta_t = \infty\}$.

Capítulo 3

Procesos de Lévy espectralmente negativos

3.1. Introducción

Sean $B = (B_t, t \geq 0)$ un movimiento browniano estándar y $\sigma = (\sigma_t, t \geq 0)$ un subordinador sin deriva independiente de B. Definimos al proceso $X = (X_t, t \geq 0)$ como

$$X_t = ct + \beta B_t - \sigma_t \quad \text{con} \quad c > 0, \quad \beta \geq 0. \tag{3.1}$$

Observemos que si $\beta = 0$ y σ es un proceso de Poisson compuesto, es decir, σ es de la forma

$$\sigma_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n,$$

donde $N = (N_t, t \geq 0)$ es un proceso de Poisson de parámetro λ y $Y_1, Y_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes identicamente distribuidas e independientes de N, entonces

$$X_t = ct - \sum_{n=1}^{N_t} Y_n \quad \text{con} \quad c > 0, \quad t \geq 0,$$

representa el modelo clásico de ruina de Cramér-Lundberg empezando en 0, donde interpretamos a ct como la entrada por primas hasta el tiempo t con c constante positiva y Y_j el monto de la $j-$ésima reclamación.

Debido a lo anterior, podemos interpretar a $X = (X_t, t \geq 0)$ definido por (3.1) como el modelo de ruina generalizado de Crámer-Lundberg, donde nuevamente ct es la entrada por primas hasta el tiempo t con c constante positiva, B_t es el comportamiento del capital inicial y las primas invertidas en el mercado al tiempo t afectado por la volatidad β del mercado y σ_t el monto de las reclamaciones al tiempo t.

3.2. Exponente de Laplace

Observemos ahora al exponente de Laplace correspondiente al proceso X,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(ct+\beta B_t-\sigma_t)}\right]\\ &= \exp\left\{-t\left(\lambda c+\frac{\beta^2\lambda^2}{2}-\phi(\lambda)\right)\right\}\\ &= \exp\left\{-t\Phi(\lambda)\right\},\end{aligned}$$

donde

$$\phi(\lambda)=\int_{(0,\infty)}(1-e^{-\lambda x})\,d\Pi(x),$$

entonces

$$\Phi(\lambda)=\lambda c+\frac{\beta^2\lambda^2}{2}-\int_{(0,\infty)}(1-e^{-\lambda x})\,d\Pi(x).$$

Revisaremos algunas de las propiedades de la función $\Phi:[0,\infty)\longmapsto\mathbb{R}$. Primero demostraremos que $\Phi(\lambda)$ es una función convexa. Sean $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ y $\alpha\in[0,1]$,

$$\Phi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)=\ln\mathbb{E}\left[e^{\alpha\lambda_1X_1}e^{(1-\alpha)\lambda_2X_1}\right].$$

Por otro lado, de la desigualdad de Hölder con $p=\dfrac{1}{\alpha}$ y $q=\dfrac{1}{(1-\alpha)}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha\lambda_1X_1}e^{(1-\alpha)\lambda_2X_1}\right]\leq\left(\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1X_1}\right]\right)^{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[e^{\lambda_2X_1}\right]\right)^{(1-\alpha)}$$

entonces

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2) &= \ln\mathbb{E}\left[e^{\alpha\lambda_1X_1}e^{(1-\alpha)\lambda_2X_1}\right]\\ &\leq\alpha\ln\left(\mathbb{E}\left[e^{\lambda_1X_1}\right]\right)+(1-\alpha)\ln\left(\mathbb{E}\left[e^{\lambda_2X_1}\right]\right)=\alpha\Phi(\lambda_1)+(1-\alpha)\Phi(\lambda_2),\end{aligned}$$

por lo tanto Φ es convexa.

Por ser $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ un subordinador sin deriva y gracias al teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\phi(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{(0\infty)}e^{-\lambda x}\overline{\Pi}(x)\,dx=0,\quad\text{donde }\overline{\Pi}(x)=\Pi(x,\infty)$$

entonces,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda^2}=\frac{\beta^2}{2},$$

por lo que, $\Phi(\lambda)=O(\lambda^2)$.

Ahora definamos la función inversa generalizada de Φ como,

$$\Phi^{-1}(\lambda)=\inf\{s\geq 0:\Phi(s)\geq\lambda\}$$

para cada $\lambda\geq 0$. Por la convexidad de Φ resulta que $\Phi^{-1}(0)$ es la raíz más grande de Φ, además si $\Phi^{-1}(0)>0$ entonces el cero y $\Phi^{-1}(0)$ son las dos únicas raíces.

3.3. Procesos de Lévy espectralmente negativos

Definimos ahora una clase general de procesos estocásticos llamados procesos de Lévy, y veamos que X pertenece a ésta clase.

Definición 3.1 (**Proceso de Lévy**). *Un proceso $Z = (Z_t : t \geq 0)$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se dice que es un proceso de Lévy si posee las siguiente propiedades:*

i) Las trayectorias de Z son continuas por la derecha casi seguramente con límites por la izquierda.

ii) $\mathbb{P}(Z_0 = 0) = 1$.

iii) Para $0 \leq s \leq t$, $Z_t - Z_s$ tiene la misma distribución que Z_{t-s}.

iv) Para $0 \leq s \leq t$, $Z_t - Z_s$ es independiente de $\mathcal{G}_s = \sigma(Z_u : u \leq s)$.

Observemos que la propiedad (iv) es equivalente a probar que para todo $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq s$ la variables aleatorias $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes, debido a la versión funcional del lema de clases monótonas.

Proposición 3.2. *El proceso $X = (X_t, t \geq 0)$ definido en (3.1) es un proceso de Lévy.*

Demostración. Es claro que el proceso X al tiempo $t = 0$ es identicamente 0 casi seguramente, por lo que basta mostrar que tiene incrementos independientes y estacionarios. Sean $t, s \geq 0$, por ser $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano y $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ un subordinador tenemos

$$\begin{aligned} X_{t+s} - X_s &= c(t+s) + \beta B_{t+s} - \sigma_{t+s} - (cs + \beta B_s - \sigma_s) \\ &= ct + \beta(B_{t+s} - B_s) - (\sigma_{t+s} - \sigma_t) \\ &\overset{\mathcal{L}}{=} ct + \beta B_t - \sigma_t \\ &= X_t \end{aligned}$$

por lo tanto el proceso es estacionario.
Para mostrar la independencia de los incrementos es suficiente probar que para todo $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ las variables aleatorias $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes, es decir

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda \sum_{i=i}^{n} (X_{t_i} - X_{t_{i-i}})\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda(X_{t_i} - X_{t_{i-i}})\right\}\right], \quad \lambda \geq 0.$$

Entonces, debido a los incrementos independientes de B y de σ y a la independencia entre los mismos, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda\sum_{i=i}^{n}(X_{t_i}-X_{t_{i-i}})\right\}\right] \\
&\qquad\qquad = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda\sum_{i=i}^{n}\left[(ct_i-\beta B_{t_i}-\sigma_{t_i})-(ct_{i-1}-\beta B_{t_{i-1}}-\sigma_{t_{i-1}})\right]\right\}\right] \\
&\qquad\qquad = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda\sum_{i=1}^{n}\left[c(t_i-t_{i-1})-\beta(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})-(\sigma_{t_i}-\sigma_{t_{i-1}})\right]\right\}\right] \\
&\qquad\qquad = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda(X_{t_i}-X_{t_{i-i}})\right\}\right],
\end{aligned}
$$

por lo tanto el proceso X es un proceso de Lévy. $\square$

Definición 3.3. *Sea $x \in [0,\infty)$ definimos $\mathbb{P}_x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot\,|X_0 = x)$, por lo que $\mathbb{P}_x$ es la ley del proceso $X + x$. En particular $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}$.*

A continuación veremos que el proceso X satisface la propiedad fuerte de Markov.

Teorema 3.4. *Supongamos que τ es un tiempo de paro y sea $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u : u \leq s)$. Definimos en $\{\tau < \infty\}$ el proceso $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_t, t \geq 0)$ donde*

$$\widetilde{X}_t = X_{\tau+t} - X_\tau, \quad t \geq 0.$$

Entonces bajo el evento $\{\tau < \infty\}$ el proceso es independiente de $\mathcal{F}_\tau$ y tiene que misma ley de X.

Demostración. Como una distribución finito dimensional determina la ley de un proceso estocástico, basta probar que para cualquier $F : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ continua y acotada, $H \in \mathcal{F}_\tau$ y $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F\left(X_{\tau+t_1}-X_\tau, X_{\tau+t_2}-X_{\tau+t_1},\ldots,X_{\tau+t_n}-X_{\tau+t_{n-1}}\right); H\cap\{\tau<\infty\}\right] \\
&\qquad\qquad = \mathbb{E}\left[F\left(X_{t_1}, X_{t_2-t_1},\ldots,X_{t_n-t_{n-1}}\right)\right]\mathbb{P}\left(H\cap\{\tau<\infty\}\right).
\end{aligned}
$$

Con este fin, definimos una sucesión de tiempos de paro $\{\tau^{(n)} : n \geq 1\}$ por

$$\tau^{(n)} = \begin{cases} k2^{-n} & \text{si } (k-1)2^{-n} < \tau \leq k2^{-n} \text{ para } k = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{si } \tau = 0. \end{cases}$$

Debido a los incrementos independientes y estacionarios de X, junto con el hecho de

$H \cap \{\tau^{(n)} = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F\left(X_{\tau^{(n)}+t_1} - X_{\tau^{(n)}}, X_{\tau^{(n)}+t_2} - X_{\tau^{(n)}+t_1}, \dots, X_{\tau^{(n)}+t_n} - X_{\tau^{(n)}+t_{n-1}}\right); H \cap \{\tau^{(n)} < \infty\}\right] \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[F\left(X_{\tau^{(n)}+t_1} - X_{\tau^{(n)}}, \dots, X_{\tau^{(n)}+t_n} - X_{\tau^{(n)}+t_{n-1}}\right); H \cap \{\tau^{(n)} = k2^{-n}\}\right] \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[F\left(X_{k2^{-n}+t_1} - X_{k2^{-n}}, \dots, X_{k2^{-n}+t_n} - X_{k2^{-n}+t_{n-1}}\right); H \cap \{\tau^{(n)} = k2^{-n}\}\right] \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left[1_{\{H\cap\{\tau^{(n)}=k2^{-n}\}\}} \mathbb{E}\left[F\left(X_{k2^{-n}+t_1} - X_{k2^{-n}}, \dots, X_{k2^{-n}+t_n} - X_{k2^{-n}+t_{n-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_{k2^{-n}}\right]\right] \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\left(H \cap \{\tau^{(n)} = k2^{-n}\}\right) \mathbb{E}\left[F\left(X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}\right)\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[F\left(X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}\right)\right] \mathbb{P}\left(H \cap \{\tau^{(n)} < \infty\}\right)
\end{aligned}$$

Las trayectorias de X son continuas por la derecha casi seguramente y $\tau^{(n)} \downarrow \tau$ cuando n tiende a infinito, entonces $X_{\tau^{(n)}+s} \to X_{\tau+s}$ casi seguramente para toda $s \geq 0$ cuando n tiende a infinito. Se sigue del teorema de convergencia dominada que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F\left(X_{\tau+t_1} - X_{\tau}, X_{\tau+t_2} - X_{\tau+t_1}, \dots, X_{\tau+t_n} - X_{\tau+t_{n-1}}\right); H \cap \{\tau < \infty\}\right] \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[F\left(X_{\tau^{(n)}+t_1} - X_{\tau^{(n)}}, \dots, X_{\tau^{(n)}+t_n} - X_{\tau^{(n)}+t_{n-1}}\right); H \cap \{\tau^{(n)} < \infty\}\right] \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[F\left(X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}\right)\right] \mathbb{P}\left(H \cap \{\tau^{(n)} < \infty\}\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[F\left(X_{t_1}, X_{t_2-t_1}, \dots, X_{t_n-t_{n-1}}\right)\right] \mathbb{P}\left(H \cap \{\tau < \infty\}\right)
\end{aligned}$$

mostrando que $\widetilde{X}$ es independiente de $\mathcal{F}_\tau$ bajo el evento $\{\tau < \infty\}$ y tiene la misma ley que X.

□

Ahora que contamos con la propiedad fuerte de Markov para el proceso X enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Para $x \geq 0$ definimos al primer tiempo de pasada por arriba del nivel x como*

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq x\},$$

donde $S_t = \sup_{u\in[0,t]} X_u$. Entonces, el proceso $T = (T_x, x \geq 0)$ es un subordinador con exponente de Laplace $\Phi^{-1}(\cdot)$, matado en un tiempo exponencial en el caso que X deriva hacia $-\infty$.

Demostración. Notemos que

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq x\} = \inf\{s \geq 0 : X_s \geq x\},$$

ahora mostremos que T tiene incrementos independientes y estacionarios.
Sea $x, y \geq 0$, podemos definir a T_{x+y} como,

$$T_{x+y} = \text{ínf}\{s \geq 0 : X_s \geq x+y\} = T_y + \text{ínf}\{s \geq T_y : X_s \geq x+y\} = T_y + \text{ínf}\{t \geq 0 : X_{t+T_y} - y \geq x\},$$

por otro lado, gracias a que el proceso X tiene sólo saltos negativos tenemos

$$X_{t+T_y} - y = X_{t+T_y} - X_{T_y},$$

y por la propiedad fuerte de Markov sabemos

$$X_{t+T_y} - X_{T_y} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_t.$$

Por lo que el proceso T tiene incrementos independientes y además

$$T_{x+y} - T_y = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_{t+T_y} - y \geq x\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t \geq x\} = T_x$$

entonces T es estacionario, y como es creciente es un subordinador.

Para mostrar que el exponente de Laplace de T es $\Phi^{-1}(\cdot)$, notemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{\Phi^{-1}(\lambda)X_t}\right] = e^{t\Phi(\Phi^{-1}(\lambda))} = e^{t\lambda},$$

y definamos al proceso $M = (M_t, t \geq 0)$ como

$$M_t = \exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_t - t\lambda\},$$

donde X está adaptado a su filtración natural $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Veamos que el proceso $(M_t)_{t\geq 0}$ es martingala. Sean $0 \leq s \leq t$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_t - \lambda t\} \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\exp\{\Phi^{-1}(\lambda)(ct + \beta B_t - \sigma_t + \beta B_s - \beta B_s + \sigma_s - \sigma_s + cs - cs) - \lambda t\} \middle| \mathcal{F}_s\right] \\
&\qquad = \exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_s - \lambda t\}\mathbb{E}\left[\exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_{t-s}\}\right] \\
&\qquad = \exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_s - \lambda t\}\exp\{(t-s)\Phi(\Phi^{-1}(\lambda))\} \\
&\qquad = \exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_s - \lambda s\} = M_s,
\end{aligned}$$

por lo tanto M es martingala. Notemos que para una $x \geq 0$ fija, T_x es un tiempo de paro. Por lo que $(M_t^{T_x})_{t\geq 0}$, donde

$$M_t^{T_x} = M_{T_x \wedge t} = \exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_{T_x\wedge t} - \lambda(T_x \wedge t)\},$$

es una martingala, esto se debe a que $T_x \wedge t \leq t$ y para $0 \leq s \leq t$ tenemos

$$\mathbb{E}\left[M_{T_x\wedge t} \middle| \mathcal{F}_s\right] = M_{T_x\wedge t\wedge s} = M_{T_x\wedge s}.$$

Además, observemos que está acotada

$$M_{T_x \wedge t} \leq e^{\Phi^{-1}(\lambda)x},$$

entonces M^T es uniformemente integrable, y gracias al teorema de paro de Doob (1.52) obtenemos

$$1 = \mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_x}\right] = \mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_x} 1_{\{T_x<\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_x} 1_{\{T_x=\infty\}}\right],$$

donde el segundo sumando

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_x} 1_{\{T_x=\infty\}}\right] = \mathbb{E}\left[M_t\right] = e^{\Phi^{-1}(\lambda)X_t - t\lambda} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

por lo que al aplicar el teorema de convergencia dominada al primer sumando, y debido a que

$$M_{T_x} = \exp\{\Phi^{-1}(\lambda)X_{T_x} - \lambda T_x\} = \exp\{\Phi^{-1}(\lambda)x - \lambda T_x\}$$

obtenemos

$$\mathbb{E}\left[M_{T_x} 1_{\{T_x<\infty\}}\right] = e^{-x\Phi^{-1}(\lambda)}.$$

$\square$

Ahora fijaremos nuestra atención a un cambio de medida que será de gran utilidad. El primer paso consiste en analizar cómo caracterizar la deriva del proceso X a través de su exponente de Laplace.
Sabemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_1}\right] = e^{\Phi(\lambda)},$$

por lo que

$$\mathbb{E}\left[X_1 e^{\lambda X_1}\right] = \Phi'(\lambda)e^{\Phi(\lambda)},$$

entonces

$$\mathbb{E}\left[X_1\right] = \Phi'(0^+)$$

Resultado de lo anterior podemos caracterizar la deriva del proceso como sigue, si $\Phi^{-1}(0) > 0$ entonces $\Phi'(0+) < 0$, por lo que X deriva hacia $-\infty$. Además, si $\Phi^{-1}(0) = 0$, tenemos dos casos, cuando $\Phi'(0+) = 0$ entonces X oscila y finalmente si $\Phi'(0+) > 0$ entonces X deriva hacia $+\infty$.
Ahora, notemos que $\mathbb{E}\left[e^{\Phi^{-1}(q)X_1}\right] = e^q$ por lo tanto el proceso $M^q = (M_t^q, t \geq 0)$ definido como

$$M_t^q = e^{\Phi^{-1}(q)X_t - qt},$$

es una martingala y definimos la siguiente medida $\mathbb{P}^{(q)}$ como

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^{(q)}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \left.M_t^q\right|_{\mathcal{F}_t}$$

Calculando la transformada de Laplace bajo la nueva medida $\mathbb{P}^{(q)}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(q)}\left[e^{\lambda X_t}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t}e^{\Phi^{-1}(q)X_t-qt}\right] \\ &= \exp\left\{(\Phi(\lambda+\Phi^{-1}(q))-q)t\right\}.\end{aligned}$$

Por lo que definimos al exponente de Laplace bajo la medida $\mathbb{P}^{(q)}$ como

$$\Phi^{(q)}(\lambda)=\Phi(\lambda+\Phi^{-1}(q))-q$$

Con el siguiente lema veremos una propiedad importante de la medida $\mathbb{P}^{(q)}$

Lema 3.6. *Para toda $x>0$ y $q>0$ la ley de $(X_t, 0\leq t<T_x)$ es la misma bajo $\mathbb{P}^{(q)}$ que bajo $\mathbb{P}[\cdot|\, T_x<\mathbf{e_q}]$, donde $\mathbf{e_q}$ es una variable aleatoria independiente de X con ley exponencial de parámetro q.*

Demostración. Calculando, para $y<x$ y $A\in\mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)|\, T_x<\mathbf{e_q}\right)\\ &\qquad=\mathbb{P}\left(A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)\cap(T_x<\mathbf{e_q})\right)\backslash\mathbb{P}\left(T_x<\mathbf{e_q}\right),\end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{P}\left(T_x<\mathbf{e_q}\right)=\mathbb{E}\left[1_{\{T_x<\mathbf{e_q}\}}\right]=\mathbb{E}\left[\int_{T_x}^{\infty}qe^{-qy}\,dy\right]=\mathbb{E}\left[e^{-qT_x}\right]=e^{-x\Phi^{-1}(q)}$$

y

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)\cap(T_x<\mathbf{e_q})\right)\\ &\qquad=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)\cap(T_x<\mathbf{e_q})\cap(\mathbf{t}<\mathbf{e_q})}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\right]\\ &\qquad=\mathbb{E}\left[1_{A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)}\mathbb{E}_y\left[1_{(T_x<\mathbf{e_q})}\right]\mathbb{E}\left[1_{(t<\mathbf{e_q})}\right]\right]\\ &\qquad=\mathbb{E}\left[1_{A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)}\right]\mathbb{P}_y(T_x<\mathbf{e_q})\mathbb{P}\left(\mathbf{t}<\mathbf{e_q}\right)\\ &\qquad=\mathbb{E}\left[1_{A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)}\right]e^{-(x-y)\Phi^{-1}(q)}e^{-qt},\end{aligned}$$

por lo que finalmente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)|\, T_x<\mathbf{e_q}\right)&=e^{-qt}e^{y\Phi^{-1}(q)}\mathbb{P}\left(A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)\right)\\ &=\mathbb{P}^q(A\cap(X_t\in dy)\cap(t<T_x)).\end{aligned}$$

□

De la forma del exponente de Laplace $\Phi^{(q)}$ vemos que

$$\mathbb{E}^{(q)}[X_1]=\Phi'(\Phi^{-1}(q)).$$

Observemos que si $q\geq 0$ y $\Phi^{-1}(0)>0$ tenemos $\Phi'(\Phi^{-1}(q))>0$. Por lo tanto X deriva hacia ∞ bajo la medida $\mathbb{P}^{(q)}$. Si q es idénticamente cero y $\Phi^{-1}(0)=0$ entonces $\mathbb{P}^{(q)}$ y $\mathbb{P}$

coinciden. En el caso en que $q=0$ y $\Phi^{-1}(0)>0$, vamos a denotar a $\mathbb{P}^{(q)}$ por $\mathbb{P}^{\#}$ cuyo exponente de Laplace vamos a denotar por

$$\Phi^{\#}(\lambda) := \Phi(\lambda + \Phi^{-1}(0)).$$

Notemos que bajo $\mathbb{P}^{\#}$ el proceso X deriva hacia ∞, es decir, que si bajo la medida original $\mathbb{P}$ el proceso deriva hacia $-\infty$ al hacer el cambio de medida $\mathbb{P}^{\#}$ esta obliga al proceso a derivar hacia ∞. En este sentido enunciamos el siguiente lema el cual nos dice que la ley $\mathbb{P}$ condicionada a derivar hacia $+\infty$ coincide con $\mathbb{P}^{\#}$.

Lema 3.7. *Supongamos que el proceso X deriva hacia $-\infty$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}\left(A \middle| S_\infty > x\right) = \mathbb{P}^{\#}(A).$$

Demostración. Recordemos que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_x}, T_x < \infty\right] = e^{-\Phi^{-1}(\lambda)x},$$

por lo que haciendo a λ idénticamente cero, obtenemos

$$\mathbb{P}\left(T_x < \infty\right) = \mathbb{P}\left(S_\infty > x\right) = e^{-x\Phi^{-1}(0)},$$

entonces,

$$S_\infty \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbf{e}_{\Phi^{-1}(0)}.$$

donde $\mathbf{e}_{\Phi^{-1}(0)}$ es una variable aleatoria con ley exponencial de parámetro $\Phi^{-1}(0)$.

Fijémonos ahora en

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A \middle| S_\infty > x\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(A, S_\infty > x\right)}{\mathbb{P}\left(S_\infty > x\right)} \\
&= e^{\Phi^{-1}(0)x}\left(\mathbb{P}\left(A, T_x < t\right) + \mathbb{P}\left(A, t \le T_x < \infty\right)\right)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A, t \le T_x < \infty\right) &= \mathbb{E}\left[1_{\{A\cap(t\le T_x)\cap(T_x<\infty)\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\{A\cap(t\le T_x)\cap(T_x<\infty)\}} \middle| \mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{A\cap(t\le T_x)\}}\mathbb{E}_{X_t}[1_{\{T_x<\infty\}}]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{A\cap(t\le T_x)\}}\mathbb{P}\left(S_\infty > x - X_t\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{A\cap(t\le T_x)\}}e^{-\Phi^{-1}(0)(x-X_t)}\right]
\end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A \middle| S_\infty > x\right) &= e^{\Phi^{-1}(0)x}\left[\mathbb{P}\left(A, T_x < t\right) + \mathbb{E}\left[e^{\Phi^{-1}(0)(X_t - x)}, 1_{\{A\cap(t\le T_x)\}}\right]\right] \\
&= e^{\Phi^{-1}(0)}\mathbb{P}\left(A, T_x < t\right) + \mathbb{P}^{\#}(A, t < T_x)
\end{aligned}$$

y ya que

$$e^{\Phi^{-1}(0)}\mathbb{P}\left(A, T_x < t\right) \le e^{\Phi^{-1}(0)}\mathbb{P}\left(T_x < t\right) \le e^{\lambda t + x(\Phi^{-1}(0)-\Phi^{-1}(\lambda))} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

concluimos que

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}\left(A \middle| S_\infty > x\right) = \mathbb{P}^{\#}(A).$$

□

3.4. Problemas de salida

Para continuar, denotaremos por W a la función de escala, la cual veremos que es la única función creciente absolutamente continua con transformada de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)\, dx = \frac{1}{\Phi(\lambda)}, \qquad \lambda > \Phi^{-1}(0), \tag{3.2}$$

además vamos a asumir la siguientes igualdades, que determinan la ley del ínfimo global en el caso en que X deriva hacia $+\infty$ y la del ínfimo hasta un tiempo exponencial independiente de X y de parámetro q,

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda I_\infty}\right] = \frac{\lambda \Phi'(0+)}{\Phi(\lambda)},\ \lambda > 0. \tag{3.3}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda I_{\mathbf{e}_q}}\right] = \frac{q(\Phi^{-1}(q) - \lambda)}{\Phi^{-1}(q)(q - \Phi(\lambda))},\ \lambda > 0. \tag{3.4}$$

Definimos para $a > 0$ los tiempos de arribo

$$T_a = \inf\{t \ge 0 : X_t > a\}, \quad T_a^* = \inf\{t \ge 0 : -X_t > a\}.$$

y enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Para toda $0 < x < a$, la probabilidad de que el proceso X, iniciando en x, salga por primera vez del intervalo $[0, a]$ por arriba es*

$$\mathbb{P}_x[T_a < T_0^*] = \frac{W(x)}{W(a)} \tag{3.5}$$

Demostración. Supongamos primero que $\mathbb{E}\left[X_1\right] > 0$ y probemos que la función definida por

$$W(x) = \frac{\mathbb{P}\left(I_\infty \ge -x\right)}{\Phi'(\Phi^{-1}(0))} = \frac{\mathbb{P}\left(I_\infty \ge -x\right)}{\Phi'(0)}$$

satisface (3.2) y (3.5). Notemos primero que

$$\mathbb{P}_x[T_a < T_0^*] = \mathbb{P}\left(T_{a-x} < T_x^*\right) = \mathbb{P}\left(I_{T_{a-x}} > -x\right)$$

y calculamos $\mathbb{P}_x[I_\infty \geq 0]$, por lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x[I_\infty \geq 0] &= \mathbb{E}_x[1_{\{I_\infty \geq 0\}} 1_{\{T_a < T_0^*\}}] + \mathbb{E}_x[1_{\{I_\infty \geq 0\}} 1_{\{T_a \geq T_0^*\}}] \\
&= \mathbb{E}_x\left[1_{\{T_a < T_0^*\}} \mathbb{E}_x[1_{\{I_\infty \geq 0\}} \mid \mathcal{F}_{T_a}]\right] + \mathbb{E}_x\left[1_{\{T_0^* \leq T_a\}} \mathbb{E}_x[1_{\{I_\infty \geq 0\}} \mid \mathcal{F}_{T_0^*}]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[1_{\{T_a < T_0^*\}} \mathbb{E}_a[1_{\{X_\infty \geq 0\}}]\right] + \mathbb{E}_x\left[1_{\{T_0^* \leq T_a\}} \mathbb{E}_{X_{T_0^*}}[1_{\{X_\infty \geq 0\}}]\right] \\
&= \mathbb{P}_x[T_a < T_0^*] \mathbb{P}_a[I_\infty > 0] \\
&= \mathbb{P}\left(I_{T_{a-x}} > -x\right) \mathbb{P}_a[I_\infty > 0],
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbb{P}_x[I_\infty \geq 0] = \mathbb{P}\left(I_{T_{a-x}} > -x\right) \mathbb{P}_a[I_\infty > 0]. \tag{3.6}$$

Así, por un lado

$$\mathbb{P}_x(I_\infty \geq 0) = \Phi'(0) W(x) \quad y \quad \mathbb{P}_a(I_\infty \geq 0) = \Phi'(0) W(a),$$

por lo que

$$\mathbb{P}_x(T_a < T_0^*) = \mathbb{P}\left(I_{T_{a-x}} \geq -x\right) = \frac{W(x)}{W(a)}.$$

Finalmente veamos que satisface la condición requerida para la transformada de Laplace,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)\, dx &= \frac{1}{\Phi'(0)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(I_\infty \geq -x\right) dx \\
&= \frac{1}{\Phi'(0)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \int_0^x \mathbb{P}\left(-I_\infty \in dz\right) dx \\
&= \frac{1}{\lambda \Phi'(0)} \int_0^\infty \mathbb{P}\left(-I_\infty \in dz\right) \int_z^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \frac{1}{\lambda \Phi'(0)} \int_0^\infty e^{-\lambda z} \mathbb{P}\left(-I_\infty \in dz\right) \\
&= \frac{1}{\lambda \Phi'(0)} \mathbb{E}\left[e^{\lambda I_\infty}\right],
\end{aligned}$$

y gracias a la identidad (3.3) tenemos

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)\, dx = \frac{1}{\Phi(\lambda)}.$$

Ahora, si X deriva hacia $-\infty$, definimos a

$$W(x) = e^{\Phi^{-1}(0)} W^{\#}(x),$$

donde $W^{\#}$ denota a la función de escala del proceso X bajo la media $\mathbb{P}^{\#}$ introducida anteriormente. Tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)\,dx &= \int_0^\infty e^{-(\lambda-\Phi^{-1}(0))x} W^{\#}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\Phi^{\#}(\lambda - \Phi^{-1}(0))} \\
&= \frac{1}{\Phi(\lambda)},
\end{aligned}$$

y, por lo demostrado anteriormente y del lema (3.6), vemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_{a-x} < T_x^*\right) &= e^{-(a-x)\Phi^{-1}(0)} \mathbb{P}\left(T_{a-x} < T_x^* \mid T_{a-x} < \infty\right) \\
&= e^{-(a-x)\Phi^{-1}(0)} \mathbb{P}^{\#}(T_{a-x} < T_x^*) = \frac{e^{x\Phi^{-1}(0)} W^{\#}(x)}{e^{a\Phi^{-1}(0)} W^{\#}(a)} = \frac{W(x)}{W(a)}.
\end{aligned}$$

Cuando X oscila, necesitamos un argumento límite. Sea $\tilde{\mathbb{P}}^{(\epsilon)}$ la medida correspondiente al proceso $X_t + \epsilon t$, donde $\epsilon > 0$, y notemos que, con la notación obvia, $\tilde{\Phi}^{(\epsilon)}(\lambda) \to \Phi(\lambda)$ cuando $\epsilon \downarrow 0$. Así, aplicando el teorema de continuidad para las transformadas de Laplace, deducimos de (3.2) que $W(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \tilde{W}^{(\epsilon)}(x)$ existe. Para probar que (3.5) ocurre con esta W, notemos que

$$\mathbb{P}\left(T_{a-x} < T_x^*\right) \leq \tilde{\mathbb{P}}^{(\epsilon)}(T_{x-a} < T_x^*) = \frac{\tilde{W}^{(\epsilon)}(x)}{\tilde{W}^{(\epsilon)}(a)}.$$

Por otro lado, sea $0 < t < \dfrac{x}{\epsilon}$ fija,

$$\mathbb{P}\left(T_x^* < t, T_x^* < T_{a-x}\right) \leq \tilde{\mathbb{P}}^{(\epsilon)}(T_{x-\epsilon t}^* < T_{a-x}) = 1 - \frac{\tilde{W}^{(\epsilon)}(x)}{\tilde{W}^{(\epsilon)}(a-\epsilon t)},$$

y la conclusión se sigue haciendo $\epsilon \downarrow 0$ y luego $t \to \infty$.

$\square$

Ahora con el estudio del tiempo de salida $\sigma_a = T_a \wedge T_0^*$, podemos generalizar el resultado anterior. Notemos el hecho de que la función $W^{(q)}$ determina la distribución del tiempo de salida. Específicamente $W^{(q)}$ denota la única función creciente absolutamente continua con transformada de Lapace

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)}(x)\,dx = \frac{1}{\Phi(\lambda) - q}, \quad \lambda > \Phi^{-1}(q),\ q \geq 0, \tag{3.7}$$

y por conveniencia definimos $W^{(q)}(x) = 0$ para $x \in (-\infty, 0)$. También necesitamos la función definida por $Z^{(q)}(x) = 1$ para $x \leq 0$ y

$$Z^{(q)}(x) = 1 + q\overline{W}^{(q)}(x) \text{ para } x > 0, \text{ donde } \overline{W}^{(q)}(x) = \int_0^x W^{(q)}(y)\,dy. \tag{3.8}$$

Por lo que extendiendo el resultado previo resulta en la solución completa al problema de salida en la siguiente forma:

Teorema 3.9. *Para $0 \leq x \leq a$ y $q \geq 0$ tenemos*

$$\mathbb{E}_x[e^{-qT_a}; T_a < T_0^*] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}, \tag{3.9}$$

y

$$\mathbb{E}_x[e^{-qT_0^*}; T_0^* < T_a] = Z^{(q)}(x) - \frac{W^{(q)}(x)Z^{(q)}(a)}{W^{(q)}(a)}. \tag{3.10}$$

Demostración. Tomemos $q > 0$. Usando el lema (3.6), vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[e^{-qT_a}; T_a < T_0^*] &= \mathbb{E}\left[e^{-qT_{a-x}}; T_{a-x} < T_x^*\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{T_{a-x} < T_x^*\}} \int_{T_{a-x}}^{\infty} qe^{-qt}\,dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{T_{a-x} < T_x^*\}} 1_{\{T_{a-x} < \mathbf{e}_q\}}\right] \\
&= \mathbb{P}\left(T_{a-x} < T_x^* \middle| T_{a-x} < \mathbf{e}_q\right) \mathbb{P}\left(T_{a-x} < \mathbf{e}_q\right) \\
&= e^{-(a-x)\Phi^{-1}(q)} \mathbb{P}\left(I(T_{a-x}) \geq -x \,|T_{a-x} < \mathbf{e}_q\right) \\
&= e^{-(a-x)\Phi^{-1}(q)} \mathbb{P}^{(q)}(I(T_{a-x}) \geq -x).
\end{aligned}$$

Definimos

$$V^{(q)}(x) = c(q)e^{x\Phi^{-1}(q)}\mathbb{P}^{(q)}(I_\infty \geq -x), \tag{3.11}$$

recordando que X deriva hacia $+\infty$ bajo $\mathbb{P}^{(q)}$ y por la ecuación (3.6) tenemos que

$$\mathbb{E}_x[e^{-qT_a}; T_a < T_0^*] = \frac{V^{(q)}(x)}{V^{(q)}(a)}.$$

Además tomando $\lambda > \Phi^{-1}(q)$ y definiendo $\tilde{\lambda} = \lambda - \Phi^{-1}(q)$, se sigue de (3.3) que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda x} V^{(q)}(x)\,dx &= c(q) \int_0^\infty e^{-\tilde{\lambda} x} \mathbb{P}^{(q)}(I_\infty \geq -x)\,dx \\
&= \frac{c(q)}{\tilde{\lambda}} \mathbb{E}^{(q)}\left[e^{\tilde{\lambda} I_\infty}\right] = \frac{c(q)\Phi'(\Phi^{-1}(q))}{\Phi^{(q)}(\tilde{\lambda})} \\
&= \frac{c(q)\Phi'(\Phi^{-1}(q))}{(\Phi(\lambda) - q)},
\end{aligned}$$

escogiendo $c(q) = 1/\Phi'(\Phi^{-1}(q))$ tenemos (3.7) para $q > 0$, por lo tanto

$$V^{(q)}(x) = W^{(q)}(x).$$

Manteniendo a $q>0$ podemos usar (3.9) en (3.4) junto con el hecho de que al ser $W^{(q)}$ un función creciente podemos hablar de la medida $W^{(q)}(dx)$ asociada con la distribución $W^{(q)}(0,x]$, por lo que integrando por partes obtenemos una caracterización de la medida $W^{(q)}$,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda x} W^{(q)}(dx) &= W^{(q)}(0) + \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda x} dW^{(q)}(0,x] \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} W^{(q)}(0) dx + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} W^{(q)}(0,x] dx \\
&= \frac{\lambda}{\Phi(\lambda)-q} \qquad \text{para} \qquad \lambda > \Phi^{-1}(q),
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{P}\left(-I_{\mathbf{e}_p} \in dx\right) &= \mathbb{E}\left[e^{\lambda I_{\mathbf{e}_q}}\right] \\
&= \frac{q(\Phi^{-1}(q)-\lambda)}{\Phi^{-1}(q)(q-\Phi(\lambda))} \\
&= \frac{q}{\Phi^{-1}(q)} \left(\Phi^{-1}(q)\frac{1}{q-\Phi(\lambda)} - \frac{\lambda}{q-\Phi(\lambda)}\right) \\
&= \frac{q}{\Phi^{-1}(q)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)}(dx) - q\int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)}(x) dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left[\frac{q}{\Phi^{-1}(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)\right]
\end{aligned}$$

para toda $\lambda > 0$, por lo tanto

$$\mathbb{P}\left(-I_{\mathbf{e}_q} \in dx\right) = \frac{q}{\Phi^{-1}(q)} W^{(q)}(dx) - qW^{(q)}(x)dx. \tag{3.12}$$

De donde se sigue,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-qT_0^*}; T_0^* < \infty\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{T_x^*}^\infty qe^{-qt}\, dt\right] \\
&= \mathbb{P}_x\left(\mathbf{e}_q > T_0^*\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(-I_{\mathbf{e}_p} > 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-I_{\mathbf{e}_p} > x\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(-I_{\mathbf{e}_p} \leq x\right) \\
&= 1 + q\int_0^x W^{(q)}(y)\, dy - \frac{q}{\Phi^{-1}(q)} W^{(q)}(x) \\
&= Z^q(x) - \frac{q}{\Phi^{-1}(q)} W^{(q)}(x),
\end{aligned}$$

entonces,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-qT_0^*}; T_0^* < T_a\right] = \mathbb{E}_x\left[e^{-qT_0^*}\right] - \mathbb{E}_x\left[e^{-qT_0^*}; T_a < T_0^*\right],$$

ocupando la propiedad de Markov fuerte

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-qT_0^*}; T_a < T_0^*\right] &= \mathbb{E}_x\left[e^{-qT_a}; T_a < T_0^*\right]\mathbb{E}_a\left[e^{-qT_0^*}; T_a < T_0^*\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-qT_a}; T_a < T_0^*\right]\mathbb{E}_a\left[e^{-qT_0^*}\right],
\end{aligned}$$

por lo que al aplicar (3.9) y (3.4) obtenemos,

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-qT_0^*}; T_0^* < T_a\right] = Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(a)\frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}.$$

$\square$

Capítulo 4

Valuación al tiempo de ruina para un modelo de riesgo asociado a un proceso de Lévy espectralmente negativo

4.1. Introducción

En este capítulo analizamos las penalizaciones descontadas al momento de la ruina para el comportamiento del superávit caracterizado por un proceso de Lévy espectralmente negativo cuyos saltos son de variación acotada.

Gerber y Shiu introdujeron en la teoría del riesgo una función que penaliza conjuntamente el valor presente del superávit al momento de la ruina, el superávit antes de la ruina y el déficit después de la ruina para un proceso tipo Crámer-Lundberg, esta esperanza de la penalización descontada se conoce como la formula de Gerber y Shiu.

La característica principal de este modelo es que el proceso de riesgo tiene incrementos estacionarios e independientes sin saltos positivos.

A continuación caracterizaremos propiedades de la esperanza de las penalidades descontadas a través del uso de las funciones de escala cuando el comportamiento del superávit está caracterizado por un proceso de Lévy espectralmente negativo.

4.2. Aplicaciones

Definición 4.1. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow [0, \infty)$ *una función medible y acotada tal que* $f(0, \cdot, \cdot) = 0$ *y* $x, q \geq 0$. *Para un proceso de Lévy espectralmente negativo,* X*, que inicia en* x*, la* *función de penalización con descuento asociada con f y q está dada por*

$$\phi_f(x,q) = \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_0^*} f(-X_{T_0^*}, X_{T_0^*-}, \underline{X}_{T_0^*-}) 1_{\{T_0^*<\infty\}} \right]. \tag{4.1}$$

donde $\underline{X}_{T_0^*-} := \text{ínf}_{t<T_0^*-} X_t$, *con* $T_0^* := \text{ínf}\{t > 0 : X_t < 0\}$ *denotando el tiempo de ruina de* X.

A continuación utilizaremos un caso particular del resultado conocido como la ley quíntuple para procesos de Lévy que se encuentra en el **Teorema 7.7** de [7] y cuya prueba omitiremos. El cual dice que la quíntuple ley para procesos de Lévy espectralmente positivos pude reducirse a la triple ley como

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{T_x^+} - x \in \mathrm{d}u, x - X_{T_x^+-} \in \mathrm{d}v, x - \overline{X}_{T_x^+-} \in \mathrm{d}y\right) \\
&= e^{\Phi^{-1}(0)(v-y)} W(x - \mathrm{d}y) \Pi(\mathrm{d}u + v) \mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

para $y \in [0,x], v \geq y$ y $u > 0$.

El siguiente teorema provee una caracterización analítica exacta de ϕ en término de las funciones de escala estudiadas en el capítulo anterior.

Teorema 4.2. *Supongamos que X es un proceso de Lévy. El valor esperado de la función de penalización con descuento definida en (4.1) esta dado por*

$$\phi_f(x,q) = \int_{(0,\infty)^3} 1_{\{v\geq y\}} f(u,v,y) K_x^{(q)}(du,dv,dy),$$

donde

$$K_x^{(q)}(du,dv,dy) = e^{\Phi^{-1}(q)(v-y)} \left\{ W^{(q)\prime}(x-y) - \Phi^{-1}(q) W^{(q)}(x-y) \right\} \Pi(du+v)dydv.$$

Demostración. A lo largo de la demostración asumiremos algunos resultados concernientes a las funciones de escala.
Probaremos el resultado para el caso donde $q > 0$. El resultado para el caso donde $q = 0$ se sigue al tomar el límite cuando $q \downarrow 0$, recordando que si $\Phi^{-1}(0) > 0$ entonces $\Phi'(0+) < 0$, por lo que X deriva hacia $-\infty$, es decir, $\mathbb{E}[X_1] < 0$. Ahora, por conveniencia, definiremos un proceso de Lévy espectralmente positivo $Y = -X$. Por lo que ahora el problema es calcular

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_x} f(Y_{\sigma_x} - x, x - Y_{\sigma_{x^-}}, x - \overline{Y}_{\sigma_{x^-}}) 1_{\{\sigma_x<\infty\}}\right]$$

o lo que sería equivalente

$$\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_{x^-}} \in dv, x - \overline{Y}_{\sigma_{x^-}} \in dy\right],$$

donde $\sigma_x = \text{ínf}\{t > 0 : Y_t > x\}$, $\overline{Y}_{\sigma_{x^-}} = \sup_{t<\sigma_x} Y_t$, y en la segunda esperanza, por conveniencia implicitamente entendemos $\sigma_x < \infty$.

De acuerdo a la ley quíntuple, mencionada al inicio de la sección, en el caso que Y derive hacia ∞ (y por eso $\Phi^{-1}(0) = 0$), tenemos para $u, v > 0$ y $0 < y \leq v \wedge x$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_{x^-}} \in dv, x - \overline{Y}_{\sigma_{x^-}} \in dy\right) &= kW(x - dy)\Pi(du + v)dv \\ &= kW'(x - y)\Pi(du + v)dydv\end{aligned}$$

donde W es la función de escala asociada a X teniendo por transformada de Laplace $1/\Phi(\lambda)$, W' es una versión de su densidad, y k es una constante que depende de la normalización del tiempo local en el supremo de Y.
De hecho notemos que, por un lado, la ley quintuple nos dice

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y_{\sigma_x} \neq x\right) &= k\int_0^\infty \int_y^\infty \int_0^\infty W'(x - y)\Pi(du + v)dvdy \\ &= k\int_0^\infty \int_y^\infty \int_v^\infty W'(x - y)\Pi(du)dvdy \\ &= k\int_0^\infty \int_y^\infty W'(x - y)\overline{\Pi}(v)dvdy \\ &= k\int_0^x \int_0^\infty W'(x - y)\overline{\Pi}(z + y)dzdy.\end{aligned}$$

Por otro lado, por el método de resolventes descrito al final de la sección 8.4 de Kyprianou y recordando que X deriva a ∞ (y por eso $\Phi^{-1}(0) = 0$), también sabemos que

$$\mathbb{P}_x(-X_{T_0^*} \in du, X_{T_0^*-} \in dy) = \Pi(du + v)\{W(x) - W(x - v)\}dv$$

para $u, v > 0$. Integrando sobre $u, v > 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y_{\sigma_x} \neq x\right) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Pi(du + v)\{W(x) - W(x - v)\}dv \\ &= \int_0^\infty \{W(x) - W(x - v)\}\overline{\Pi}(v)dv \\ &= \int_0^\infty \overline{\Pi}(v)\int_0^v W'(x - y)dydv \\ &= \int_0^x \int_y^\infty \overline{\Pi}(v)W'(x - y)dvdy \\ &= \int_0^x W'(x - y)\int_0^\infty \overline{\Pi}(z + y)dzdy.\end{aligned}$$

Comparando las dos ecuaciones para $\mathbb{P}\left(Y_{\sigma_x} \neq x\right)$ llegamos a la conclusión de que $k = 1$.
Para completar la prueba, necesitamos desarrollar la expresión

$$W'(x - y)\Pi(du + v)dydv \tag{4.2}$$

de modo que incorpore el descuento exponencial. Sin embargo, esto puede lograrse simplemente aplicando el cambio de medida exponencial

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^{(q)}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\Phi^{-1}(q)X_t - qt},$$

donde $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s < t)$.
Recordemos que bajo $\mathbb{P}^{(q)}$ el proceso X sigue siendo espectralmente negativo, e, independiente del valor de $\mathbb{E}[X_1]$, sigue derivando hacia ∞. Además, la función de escala bajo $\mathbb{P}^{(q)}$, que escribimos como $W_{\Phi^{-1}(q)}(x)$, está relacionada a la función q-escala de X bajo $\mathbb{P}$, es decir $W^{(q)}(x)$, a través de la relación

$$W^{(q)}(x) = e^{\Phi^{-1}(q)x} W_{\Phi^{-1}(q)}(x), \tag{4.3}$$

ya que

$$\int_0^\infty e^{\lambda x} W^{(q)}(x)\, dx = \frac{1}{\Phi(\lambda) - q},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\lambda x} W^{(q)}(x)\, dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{\Phi^{-1}(q)x} W_{\Phi^{-1}(q)}(x)\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-(\lambda - \Phi^{-1}(q))} W_{\Phi^{-1}(q)}(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\Phi^{(q)}(\lambda - \Phi^{-1}(q))} \\
&= \frac{1}{\Phi(\lambda - \Phi^{-1}(q) + \Phi^{-1}(q)) - \Phi(\Phi^{-1}(q))} \\
&= \frac{1}{\Phi(\lambda) - q}
\end{aligned}$$

Haciendo uso de (4.2) pero bajo la ley $\mathbb{P}^{(q)}$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_{x^-}} \in dv, x - \overline{Y}_{\sigma_{x^-}} \in dy\right] \\
&\quad = e^{\Phi^{-1}(q)(x+u)} \mathbb{P}^{(q)}(Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_{x^-}} \in dv, x - \overline{Y}_{\sigma_{x^-}} \in dy) \\
&\quad = e^{\Phi^{-1}(q)(x+u)} W_{\Phi^{-1}(q)}(x - y) \Pi_{\Phi^{-1}(q)}(du + v) dv \\
&\quad = e^{\Phi^{-1}(q)(x+u)} W'_{\Phi^{-1}(q)}(x - y) \Pi_{\Phi^{-1}(q)}(du + v) dy dv.
\end{aligned}$$

Donde $\Pi_{\Phi^{-1}(q)}$ es la medida de salto asociada con $(X, \mathbb{P}^{(q)})$ y $W'_{\Phi^{-1}(q)}$ es una versión de la densidad de $W_{\Phi^{-1}(q)}$. Sabemos que $\Pi_{\Phi^{-1}(q)}(dx) = e^{-\Phi^{-1}(q)x}\Pi(dx)$ ya que

$$\phi^{(q)}(\lambda) = a_q \lambda + \frac{\sigma_q^2}{2}\lambda^2 - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \Pi_q(dx)$$

y

$$\begin{aligned}
\phi^{(q)}(\lambda) &= \phi(\lambda + \Phi^{-1}(q)) - q \\
&= a(\lambda + \Phi^{-1}(q)) + \frac{\sigma^2}{2}(\lambda + \Phi^{-1}(q))^2 - \int_0^\infty (1 - e^{-(\lambda + \Phi^{-1}(q))}) \Pi(dx) - q \\
&= (a + \sigma^2 \Phi^{-1}(q))\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) e^{-\Phi^{-1}(q)x} \Pi(dx) \\
&+ a\Phi^{-1}(q) + \frac{\sigma^2}{2}\Phi^{-1}(q)^2 - \int_0^\infty (1 - e^{-\Phi^{-1}(q)x}) \Pi(dx) - q,
\end{aligned}$$

por lo que

$$a_q = a + \sigma^2 \Phi^{-1}(q),$$
$$\sigma_q^2 = \sigma^2,$$
$$\Pi_q(dx) = e^{-\Phi^{-1}(q)}\Pi(dx),$$

obteniendo entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_{x^-}} \in dv, x - \overline{Y}_{\sigma_{x^-}} \in dy\right] \\
&\quad = e^{\Phi^{-1}(q)(x+u)} W'_{\Phi^{-1}(q)}(x-y) e^{-\Phi^{-1}(q)(u+v)} \Pi_{\Phi^{-1}(q)}(du+v)dydv \\
&\quad = e^{-\Phi^{-1}(q)(v-y)} e^{-\Phi^{-1}(q)(x-y)} W'_{\Phi^{-1}(q)}(x-y) \Pi_{\Phi^{-1}(q)}(du+v)dydv.
\end{aligned}$$

Se sabe que podemos diferenciar $W_{\Phi^{-1}(q)}$ casi seguramente [Kyprianou 2006]. Se sigue de poder diferenciar (4.3) casi seguramente que resulta en una densidad que satisface

$$W^{(q)\prime}(x) - \Phi^{-1}(q) W^{(q)}(x) = e^{\Phi^{-1}(q)x} W^{(q)\prime}_{\Phi^{-1}(q)}(x).$$

Usando la fórmula anterior obetenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{-q\sigma_x}; Y_{\sigma_x} - x \in du, x - Y_{\sigma_{x^-}} \in dv, x - \overline{Y}_{\sigma_{x^-}} \in dy\right] \\
&\quad = e^{-\Phi^{-1}(q)(v-y)} \{W^{(q)\prime}(x-y) - \Phi^{-1}(q) W^{(q)}(x-y)\} \Pi(du+v)dydv,
\end{aligned}$$

donde $u, v > 0$, $0 < y < v \wedge x$. Notemos en particular cuando $q = 0$, recordando que $\Phi^{-1}(0) = 0$ cuando el proceso deriva hacia $-\infty$, vemos que concuerda con la fórmula (4.2) y la prueba queda completa. $\square$

4.3. Ejemplos

Para finalizar mostramos ejemplos de funciones de escala para algunos caso particulares del proceso de riesgo $X = (X_t, t \geq 0)$.

1. Iniciamos cuando X está definido como $X_t = at + \sigma B_t$, con $a, \sigma > 0, q = 0$ y deseamos encontrar a W tal que,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)\, dx = \frac{1}{\Phi(\lambda)}, \quad \text{donde} \quad \Phi(\lambda) = a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2},$$

entonces

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}} = \frac{A}{\lambda} + \frac{B}{a + \frac{\sigma^2}{2}\lambda},$$

por lo que resolviendo el sistema encontramos que

$$A = \frac{1}{a} \quad \text{y} \quad B = -\frac{\sigma^2}{2a},$$

así que

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{a\lambda} - \frac{\sigma^2}{2a}\frac{1}{a+\frac{\sigma^2}{2}\lambda}$$
$$= \frac{1}{a\lambda} - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\frac{2a}{\sigma^2}+\lambda}\right).$$

De donde obtenemos

$$\frac{1}{a\lambda} - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\frac{2a}{\sigma^2}+\lambda}\right) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{a}\int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{2a}{\sigma^2}+\lambda\right)x\right\}dx$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left(1-e^{-(2a/\sigma^2)x}\right)dx.$$

Por lo tanto

$$W(x) = \frac{1}{a}\left(1-e^{-(2a/\sigma^2)x}\right).$$

Ahora calculemos $W^{(q)}$ para $q>0$. Para ello recordemos que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}W^{(q)}(x)\,dx = \frac{1}{\Phi(\lambda)-q}, \quad \text{donde} \quad \Phi(\lambda) = a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2},$$

por lo que primero encontramos la factorización adecuada para el denominador, es decir,

$$a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} - q = \frac{\sigma^2}{2}\left(\lambda^2 + \frac{2a}{\sigma^2}\lambda - \frac{2q}{\sigma^2}\right)$$
$$= \frac{\sigma^2}{2}(\lambda+\alpha)(\lambda-\beta),$$

donde una vez resuelto el sistema obtenemos

$$\alpha = \frac{a}{\sigma^2} \stackrel{+}{-} \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{a^2+2q\sigma^2}, \quad \beta = \frac{2q}{\alpha\sigma^2}.$$

Entonces

$$\frac{1}{a\lambda+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}-q} = \frac{2}{\sigma^2(\lambda+\alpha)(\lambda-\beta)}$$
$$= \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{A}{\lambda+\alpha}+\frac{B}{\lambda-\beta}\right)$$

Obteniendo

$$A = -\frac{1}{\alpha+\beta}, \quad B = \frac{1}{\alpha+\beta},$$

así que

$$\frac{1}{a\lambda+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}-q} = \frac{2}{\sigma^2}\left(-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\lambda+\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\lambda+\beta}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{\sigma^2}\left(-\frac{1}{\alpha+\beta}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\alpha)x}\,dx + \frac{1}{\alpha+\beta}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\beta)x}\,dx\right)$$
$$= \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left(e^{-\beta x}-e^{-\alpha x}\right)dx\right)$$

por lo tanto

$$W^{(q)}(x) = \frac{2}{\sigma^2(\alpha+\beta)}\left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right).$$

2. Finalmente consideremos el caso donde X está definido como

$$X_t = at + \sigma B_t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

con $a, \sigma > 0$, $N = (N_t, t > 0)$ un proceso de Poisson de parámetro $c > 0$ y $Y_1, Y_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes identicamente distribuidas como exponenciales de parámetro θ. Nuevamente, deseamos encontrar $W^{(q)}$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)}(x)\,dx = \frac{1}{\Phi(\lambda) - q}, \quad \text{donde} \quad \Phi(\lambda) = a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} - \frac{c\lambda}{\theta+\lambda}.$$

Aplicando el mismo procedimiento que en los dos ejemplos anteriores y sin perdida de generalidad supongamos que hemos obtenido la factoriazación correspondiente para el recíproco del exponente de Laplace menos q, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} - \frac{c\lambda}{\theta+\lambda} - q} &= \frac{2(\theta+\lambda)}{\sigma^2\lambda^3 + (2a+\sigma^2\theta)\lambda^2 + 2(\theta a - c - q)\lambda - 2\theta q} \\ &= \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\frac{\theta+\lambda}{(\lambda+\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda+\gamma)},\end{aligned}$$

y recordando que para que una ecuación de grado 3 de la forma $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tenga soluciones reales es necesario que su discriminante sea mayor o igual a cero ($\Delta \geq 0$), es decir,

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \geq 0,$$

lo que en nuestro caso corresponde a que

$$\begin{aligned}&72\sigma^2 q\theta(2a+\sigma^2\theta)(c+q-\theta a) + 8q\theta(2a+\sigma^2\theta)^3 \\ &\qquad + 4(2a+\sigma^2\theta)^2(\theta a - c - q)^2 - 32\sigma^2(\theta a - c - q)^3 - 108\sigma^4 q^2\theta^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{2}{\sigma^2}\frac{\theta+\lambda}{(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta)(\lambda+\gamma)} = \left(\frac{A}{\lambda+\alpha} + \frac{B}{\lambda+\beta} + \frac{C}{\lambda+\gamma}\right)\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)$$

y resolviendo se obtiene

$$A = \frac{\theta-\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \quad B = \frac{\beta-\theta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}, \quad C = \frac{\theta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)},$$

así que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} - \frac{c\lambda}{\theta+\lambda} - q} \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\theta-\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\left(\frac{1}{\lambda+\alpha}\right) + \frac{\beta-\theta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}\left(\frac{1}{\lambda+\beta}\right) + \frac{\theta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}\left(\frac{1}{\lambda+\gamma}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sigma^2}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left(\frac{\theta-\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}e^{-\alpha x} + \frac{\beta-\theta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}e^{-\beta x} + \frac{\theta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}e^{-\gamma x}\right) dx\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
W^{(q)}(x) = \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\theta-\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}e^{-\alpha x} + \frac{\beta-\theta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}e^{-\beta x} + \frac{\theta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}e^{-\gamma x}\right).
$$

Bibliografía

[1] Athreya, Krishna B.; Lahiri, Soumendra N. *Measure theory and probability theory.* Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2006.

[2] Bartle, R.G. *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics, 1995.

[3] Bertoin, Jean. *Subordinators: examples and applications.* Lectures on probability theory and statistics, Springer, Berlin, 1999.

[4] Biffis, Enrico; Kyprianou, Andreas E. *A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes.* Insurance Math. Econom. 46 (2010), no. 1, 85–91.

[5] Jacod, Jean; Protter, Philip. *Probability essentials.* Second edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003

[6] Kingman, J. F. C. *Poisson processes.* Oxford Studies in Probability, 3. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[7] Kyprianou, Andreas E. *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[8] Revuz, Daniel; Yor, Marc. *Continuous martingales and Brownian motion.* Third edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 293. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] Royden. H.L. *Real Analysis*, Macmillan, 1998.

[10] Shiryaev, A. N. *Probability.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 95. Springer-Verlag, New York, 1996.