UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE DIFERENCIACIÓN ESFÉRICO

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRA EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

DIANA CRISTINA RINCÓN MARTÍNEZ

DIRECTORA DE LA TESINA:
DRA. MAGALI LOUISE MARIE FOLCH GABAYET

MÉXICO, D.F. ENERO, 2012

Índice general

Introducción

Nuestro punto de partida es el *Teorema de diferenciación de Lebesgue.*

Si una función f es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy = f(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $B(x,r)$ es la bola de radio r centrada en x y $|B(x,r)|$ es la medida de Lebesgue de $B(x,r)$.

En otros términos, este teorema dice que conforme nos *acercamos* a un punto fijo x, mediante bolas centradas en este punto, el promedio de la función sobre las bolas tiende a ser la función evaluada en ese punto x, y que esto sucede casi en todas partes. Resulta entonces muy natural preguntarnos qué sucede si nos acercamos a x mediante otro tipo de conjuntos en $\mathbb{R}^n$. Ya desde la década de los treinta, se viene trabajando en esta inquietud, posteriormente Stein y Wainger en [10], retoman esta pregunta, esta vez considerando conjuntos de menor dimensión: esferas centradas con centro en x y radio ε y trozos de curvas que inician en x.

El objetivo principal de este trabajo, se centra en retomar el problema planteado por Stein y Wainger, ¿qué sucede si los conjuntos que se acercan a x no son bolas sino esferas?; y, en ese sentido, dilucidar una respuesta a la pregunta:

¿qué funciones localmente integrables cumplen

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x - ty)d\sigma(y) = f(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n \text{ ?}, \tag{1}$$

donde $d\sigma$ representa la medida de Lebesgue normalizada sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$.

Una primera respuesta a esta inquietud fue dada por Stein y Wainger en 1978. En su artículo, ellos demuestran que para $n \geq 3$ y $p > \frac{n}{n-1}$ todo $L^p(\mathbb{R}^n)$ satisface (1). Sin embargo, la pregunta queda sin responder para $n = 2$. Una década después, Bourgain, en [1] y en [2], demuestra que para $n = 2$ y $p > 2$, las funciones en $L^p(\mathbb{R}^2)$ también satisfacen (1). Posteriormente, entre los años ochenta y finales de los noventa otras personas proporcionaron nuevas demostraciones, tanto para el caso $n \geq 3$, como para $n = 2$; tal es el caso de Mockenhaupt, Segger and Sogge en [6], quienes presentan un prueba para $n = 2$ en la que utilizan resultados relacionados con la *ecuación de onda*; y Schlag en 1998 quien presenta en [8] una *demostración geométrica del teorema circular máximal* para $n = 2$. Otras pruebas para el caso $n \geq 3$ fueron expuestas por Cowling y Mauceri [3], en 1979, y por Rubio de Francia [7], en 1985.

En este trabajo presentamos una adaptación de la prueba realizada por Rubio de Francia [7], para $n \geq 3$; no incluimos ninguna de las pruebas para el caso $n = 2$, pues la complejidad de las técnicas utilizadas en estas demostraciones se sitúan fuera del alcance de este trabajo.

Iniciamos con un capítulo preliminar sobre la función maximal de Hardy-Littlewood, en el que se exponen algunas propiedades de este operador, que serán posteriormente una herramienta clave para el desarrollo de la prueba principal de este trabajo.

En el capítulo 2, se expone la prueba del teorema de diferenciación esférico; comenzamos con una introducción la función maximal esférica asociada a este teorema de diferenciación y demostramos que el operador maximal esférico en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, es de tipo $(p,p)-fuerte$, para $p > \frac{n}{n-1}$; luego, el teorema de diferenciación esférico surge como corolario del resultado anterior.

Finalmente incluimos un apéndice donde presentamos sin demostración, algunos de los conceptos y teoremas fundamentales para la comprensión de las pruebas expuestas en los capítulos 1 y 2. Una exposición clara y detallada de lo que se incluye en el apéndice se puede encontrar en [4] y [5].

Capítulo 1

La función maximal de Hardy-Littlewood y el teorema de diferenciación de Lebesgue

En $\mathbb{R}^n$, el promedio de una función puede ser definido sobre ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ como bolas, cubos, curvas especiales, esferas, etc. Si tenemos una familia de conjuntos para los cuales es posible calcular el promedio de una función f localmente integrable (por ejemplo el conjunto de todas las bolas), entonces definimos la función máximal de f en x, como el supremo del promedio de la función $|f|$ sobre todos los elementos de la familia que contienen a x. Así, el estudio de las funciones maximales resulta de gran importancia en el análisis, pues simplifica el estudio del promedio de funciones y con ello se convierte en una herramienta fuerte en la teoría de diferenciación.

En este capítulo presentaremos algunos resultados importantes relacionados con la *función Maximal de Hardy-Littlewood*, que es la función maximal asociada al promedio de una función sobre las familia de bolas en $\mathbb{R}^n$ centradas en un punto fijo. Entre estos resultados destacaremos el *Teorema de diferenciación de Lebesgue*.

1.1. Función Maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$

Dado un subconjunto Lebesgue medible Ω de $\mathbb{R}^n$, denotaremos su medida de Lebesgue como $|\Omega|$. Para $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $a > 0$, denotaremos por $B(x,r)$ la bola de radio r centrada en x.

Definición 1.1 *Sea f sobre $\mathbb{R}^n$, una función localmente integrable, la función*

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y)|dy \tag{1.1}$$

es la función Maximal de Hardy-Littlewood de f.

Notemos que si $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ entonces f es localmente integrable, además para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}|f(y)|dy \leq \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)}\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)}dy = \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

por lo que $\mathcal{M}$ está bien definida. Además,

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)};$$

por lo tanto, $\mathcal{M}$ es un operador $(\infty,\infty)-$fuerte.

Ahora consideremos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y $\alpha > 0$ sea $E_{\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}(f)(x) > \alpha\}$, entonces, para cada $x \in E_{\alpha}$ existe $r_x > 0$ tal que

$$\frac{1}{|B(x,r_x)|}\int_{B(x,r_x)}|f(y)|dy > \alpha, \tag{1.2}$$

o lo que es equivalente

$$|B(x,r_x)| < \frac{1}{\alpha}\int_{B(x,r_x)}|f(y)|dy. \tag{1.3}$$

Si K es un subconjunto compacto de E_{α}, entonces existen, $x_1, x_2, \cdots, x_m \in E_{\alpha}$ tal que $\mathcal{B} = \{B(x_1, r_{x_1}), \cdots, B(x_m, r_{x_m})\}$ cubre a K; sea $B_1 \in \mathcal{B}$ la bola de mayor radio, sea $B_2 \in \mathcal{B}$ la bola de mayor radio que no intersecta a B_1, sea $B_3 \in \mathcal{B}$ la bola de mayor radio que no intersecta a B_1 o B_2 y así sucesivamente, hasta donde sea posible, B_k la bola de mayor radio que no intersecta a B_1, B_2, $\cdots$ o B_{k-1}. Obtenemos así el conjunto de bolas disjuntas $\{B_1, \cdots, B_s\}$; sean $y_1, \cdots, y_s$ tales que $B_i = B(y_i, r_{y_i})$ para $1 \leq i \leq s$, recordemos que cada y_i satisface (1.2) y (1.3). Por otro lado, si $B(x_t, r_{x_t}) \in \mathcal{B}$, entonces existe i tal que $B(x_t, r_{x_t})$ intersecta a B_i, sea k el mínimo de estos i, entonces $B(x_t, r_{x_t})$ no interseca a B_1, B_2, $\cdots$ o B_{k-1}, por lo tanto, $r_{x_t} \leq r_{y_k}$. Ahora, sea y' un punto en común entre $B(x_t, r_{x_t})$ y B_k, entonces para todo $x \in B(x_t, r_{x_t})$, $|x - y'| < 2r_{x_t} \leq 2r_{y_k}$ y $|y' - y_k| \leq r_{y_k}$, así, $|x - y_k| < 3r_{y_k}$, lo cual significa que $B(x_t, r_{x_t}) \subseteq B(y_k, 3r_{y_k})$, y con esto, que $K \subseteq \cup_{i=1}^{s} B(y_i, 3r_{y_i})$, de donde se sigue,

$$|K| \leq \sum_{i=1}^{s}|B(y_i, 3r_{y_i})| \leq 3^n \sum_{i=1}^{s}|B(y_i, r_{y_i})| < \frac{3^n}{\alpha}\sum_{i=1}^{k}\int_{B(x_i, r_{x_i})}|f(y)|dy \leq \frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $|E_{\alpha}| = \sup\{|K| : K \subseteq E_{\alpha},\ K \textit{ es compacto}\}$, entonces,

$$|E_\alpha| \leq \frac{3^n}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.4}$$

Lo cual significa que $\mathcal{M}$ es $(1,1)-$débil. Usando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz (ver apéndice B.4) y el hecho que $\mathcal{M}$ es $(\infty,\infty)-$fuerte, podemos formular el siguiente resultado.

Teorema 1.2 *El operador Maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M}$, es $(1,1)-$débil y $(p,p)-$ fuerte para todo $1 < p \leq \infty$.*

1.2. Teorema de diferenciación de Lebesgue

El teorema de diferenciación de Lebesgue dice que *si f es una función localmente integrable sobre $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy = f(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Veamos cómo el estudio de la función maximal de Hardy-Littlewood y sus propiedades, nos proporciona herramientas para demostrar este teorema.

Si K es una función medible sobre $\mathbb{R}^n$, para $\varepsilon > 0$ definimos la función K_ε como $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Decimos que la familia de funciones $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una *aproximación a la identidad* si K es una función integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} K dx = 1$. La razón por la cual llamamos a esta familia una aproximación a la identidad es que si $f \in \mathscr{C}_o$, es decir, f es continua y tiene soporte compacto, entonces $\lim_{\varepsilon\to 0} f * K_\varepsilon(x) = f(x)$ para todo x, en efecto, f es una función integrable, luego por el teorema de convergencia dominada,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} f * K_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)K(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon y)K(y)dy \\
&= f(x)\int_{\mathbb{R}^n} K(y)dy = f(x).
\end{aligned}$$

Si K es integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} K dx = a \in \mathbb{R}$, decimos que $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es un *múltiplo de aproximación a la identidad* y tenemos que toda $f \in \mathscr{C}_0$ satisface $\lim_{\varepsilon\to 0} f * K_\varepsilon(x) = af(x)$ para todo x.

Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos el operador lineal T_ε definido como $T_\varepsilon(f) = f * k_\varepsilon$ donde $k = \frac{1}{|B(0,1)|}\chi_{B(0,1)}$, así,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f * k_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy.$$

Como k una función integrable con $\int_{\mathbb{R}^n} kdx = 1$, la familia $\{k_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una aproximación a la identidad, lo cual implica que si $f \in \mathscr{C}_0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(f)(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, el operador maximal asociado a $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, T^* es de tipo $(1,1)-$débil, ya que $|T^*(f)(x)| \leq \mathcal{M}(f)(x)$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}$ es $(1,1)-$débil; luego, por el corolario B.3, la igualdad 1.5 se cumple para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pues $\mathscr{C}_0$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si f es localmente integrable entonces podemos considerar la función integrable $f\chi_{B(0,N)}$ para N tan grande como se quiera, así se cumple que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy = f(x) \textit{ para casi toda } x \in B(0,N). \tag{1.6}$$

Lo cual implica para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(y)dy = f(x). \tag{1.7}$$

Con lo cual queda demostrado este importante teorema de diferenciación.

1.3. Control de $\mathcal{M}$ sobre otros operadores maximales

En la anterior sección vimos un ejemplo específico de una aproximación a la identidad $\{k_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ para la cual $\lim_{\varepsilon\to 0}(f * k_\varepsilon) = f$ c.t.p., para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Esto se debió a que el operador maximal asociado a esta familia de operadores lineales, estaba controlado por el operador maximal $\mathcal{M}$. En esta sección veremos qué tipo de aproximaciones a la identidad tienen propiedades similares a las del ejemplo anterior y enunciaremos los teoremas de diferenciación consecuentes con estos resultados.

Proposición 1.3 *Sea K una función positiva, radial, decreciente como función de $[0,\infty)$ e integrable sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\sup_{\varepsilon>0}(|f| * K_\varepsilon)(x) \leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\mathcal{M}(f)(x) \tag{1.8}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea K con las condiciones escritas anteriormente, y sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Es suficiente mostrar que $|f| * K(x) \leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,\mathcal{M}(f)(x)$, pues $\|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|K_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, para toda $\varepsilon > 0$.

Consideremos primero que K es una función simple, además de ser positiva, integrable y radialmente drecreciente, entonces $K = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{E_i}$ donde $b_1 > b_2 > \cdots > b_m > 0$ y los Ei son conjuntos medibles disjuntos dos a dos.

(1) Observemos que el soporte de K, que es el conjunto $\cup_{i=1}^{m} E_i$, es acotado, si no fuera así, entonces para toda $R > 0$ existiría $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| > R$ y $K(y) \geq b_m$, así, para todo $x \in B(0,R)$, $|x| < |y|$ y consecuentemente $K(x) \geq K(y) \geq b_m$, por lo tanto $\int_{\mathbb{R}^n} K(x)dx \geq \int_{B(0,R)} K(x)dx \geq b_m|B(0,R)|$ para toda $R > 0$, lo cual es una contradicción con la integrabilidad de K.

(2) Ahora veamos que para todo $1 \leq j \leq$ el conjunto $\cup_{i=1}^{j} E_i = B^*(0,r_j)$ para alguna $r_j \geq 0$, donde $B^*(0,r_j)$ puede ser la bola abierta $B(0,r_j)$ ó la bola cerrada $\overline{B}(0,r_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r_j\}$.

Sea $r_j = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}^n, K(x) \geq b_j\}$.

Si $\text{máx}\{|x| : x \in \mathbb{R}^n, K(x) \geq b_j\}$ no existe, entonces $\cup_{i=1}^{j} E_i = B(0,r_j)$, en efecto, si $y \in \cup_{i=1}^{j} E_i$, entonces $K(y) \geq b_j$, por lo tanto $|y| < r_j$ y así $y \in B(0,r_j)$, ahora, si $y \in B(0,r_j)$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > |y|$ y $K(x) > b_j$, luego $K(y) \geq b_j$ y por lo tanto $K(y) = b_s$ para algún $1 \leq s \leq j$ y con esto concluimos que $y \in E_s \subseteq \cup_{i=1}^{j} E_i$.

Si $\text{máx}\{|x| : x \in \mathbb{R}^n, K(x) \geq a_j\}$ existe, de manera análoga podemos probar que $\cup_{i=1}^{j} E_i = \overline{B}(0,r_j)$.

Usando lo anterior podemos reescribir a K de la siguiente manera

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{j=1}^{m-1} (b_j - b_{j+1}) \chi_{\cup_{i=1}^{j} E_i}(x) + b_m \chi_{\cup_{i=1}^{m} E_i}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} (b_j - b_{j+1}) \chi_{B^*(0,r_j)}(x) + b_m \chi_{B^*(0,r_m)}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{B^*(0,r_j)}, \end{aligned}$$

y con esto tenemos que $|f| * K(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i |f| * \chi_{B(0,r_i)}(x)$, de lo cual se sigue

$$\begin{aligned} |f| * K(x) &= \sum_{i=1}^{m} a_i |B(0,r_i)| \left[|f| * \left(\frac{1}{|B(0,r_i)|} \chi_{B(0,r_i)}(x) \right) \right] \\ &\leq \mathcal{M}(f)(x) \sum_{i=1}^{m} a_i |B(0,r_i)| \\ &= \mathcal{M}(f)(x) \left\| K \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Si K no es una función simple, entonces existe una sucesión de funciones simples y positivas $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$, que crece monótonamente a ella, por lo tanto, para todo $j \geq 1$, se cumple $|f| * \phi_j(x) \leq \|\phi_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}(f)(x)$, y en el límite

$$|f| * K(x) \leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}(f)(x). \tag{1.9}$$

con lo cual llegamos a lo que queríamos demostrar.□

Una generalización de la proposición anterior se expresa en el siguiente corolario.

Corolario 1.4 *Sea ϕ una función integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y K una función positiva, radial, decreciente e integrable sobre $\mathbb{R}^n$ que domina a ϕ, es decir, que $|\phi(x)| \leq |K(x)|$. Entonces*

$$\sup_{\varepsilon>0}(f * \phi_\varepsilon)(x) \leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}(f)(x) \tag{1.10}$$

para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

A continuación presentamos como corolarios, dos teoremas de diferenciación asociados a los resultados anteriores.

Corolario 1.5 ***Teorema de diferenciación para aproximaciones de la identidad*** *Sea ϕ una función integrable con integral 1 y dominada por una función positiva, radial, decreciente e integrable sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * \phi_\varepsilon = f \tag{1.11}$$

casi en todas partes, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Consideremos, el operador maximal T^* definido como $T^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(f * \phi_\varepsilon)(x)|$, por el corolario anterior, sabemos que T^* está controlado por la función $\mathcal{M}$, por lo tanto es $(p,p)-$débil para todo $1 \leq p < \infty$. Por otro lado, $\mathscr{C}_0^\infty$ es un conjunto denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$ y si $f \in \mathscr{C}_0^\infty$, $\lim_{\varepsilon\to 0} f * \phi_\varepsilon = f$ casi en todas partes, entonces, por el corolario B.3, $\lim_{\varepsilon\to 0} f * \phi_\varepsilon = f$ casi en todas partes, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Corolario 1.6 ***Teorema de diferenciación para múltiplos de aproximaciones de la identidad*** *Sea ϕ una función integrable con integral a y dominada por una función positiva, radial, decreciente e integrable sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * \phi_\varepsilon = af \tag{1.12}$$

casi en todas partes, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. De manera análoga al corolario anterior; consideremos, el operador maximal T^* definido como $T^*(f)(x) = \sup_{\varepsilon>0}(f * \phi_\varepsilon)(x)$; T^* es $(p,p)-$débil para todo $1 \leq p < \infty$. Por otro lado, $\mathscr{C}_0^\infty$ es un conjunto denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$ y si $f \in \mathscr{C}_0^\infty$, $\lim_{\varepsilon\to 0} f * \phi_\varepsilon = af$ casi en todas partes, entonces, por el corolario B.3, $\lim_{\varepsilon\to 0} f * \phi_\varepsilon = af$ casi en todas partes, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Capítulo 2

Teorema de diferenciación esférico

Intuitivamente hablando el *Teorema de diferenciación de Lebesgue* nos dice que el promedio, de una función locamente integrable en $\mathbb{R}^n$, sobre una bola centrada en un punto x, tiende al valor de la función en x a medida que esta bola se comprime hacia este punto. Resulta entonces natural preguntarnos, si sucede lo mismo cuando se calcula el promedio de una función, en otro tipo de conjuntos que se comprimen hacia x. Atendiendo a esta inquietud, el objetivo principal de este trabajo, y en particular de este capítulo, se centra en responder qué pasa cuando los conjuntos que se comprimen a x no son bolas, sino conjuntos de menor dimensión: esferas centradas en x; para ello, debemos considerar el promedio de la función sobre una esfera de radio r centrada en x,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x-ry)d\sigma(y) \tag{2.1}$$

donde $d\sigma$ representa la medida normalizada de Lebesgue sobre $\mathbb{S}^{n-1}$; luego preguntarnos cuándo podemos decir que

$$\lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x-ry)d\sigma(y) = f(x) \textit{ para casi toda } x \textit{ en } \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Es claro que esta pregunta sólo tiene sentido para $n \geq 2$, pues las esferas en $\mathbb{R}$ se componen apenas de un par de puntos y por tanto la medida de Lebesgue sobre ellas es siempre nula. Para $n \geq 2$, si f es una función continua en $\mathbb{R}^n$, (2.2) se cumple, ya que para toda $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(f(x-ry)-f(x))d\sigma(y) = 0$. Pensando más generalmente, nos preguntamos si para todas las funciones locamente integrables (2.2) es cierto, y encontramos que se cumple para las funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $n \geq 2$ y $p \geq \frac{n}{n-1}$. Para probar esto último, tal como ocurre con el *Teorema de diferenciación de Lebesgue*, utilizaremos ciertas desigualdades de tipo débil asociadas al operador maximal correspondiente a la forma 2.1.

2.1. Función maximal esférica

La función maximal asociada a este teorema de diferenciación, se define de la siguiente forma:

$$\mathscr{M}(f)(x) = \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x - t\theta) d\sigma(\theta) \right| \tag{2.3}$$

y es llamada *función maximal esférica*. El operador $\mathscr{M}$ es el *operador maximal esférico.*

Consideremos la integral $\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x - t\theta) d\sigma(\theta)$; al hacer el cambio de variable $\xi = t\theta$, tenemos que

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(x - t\theta) d\sigma(\theta) = \frac{1}{t^{n-1}} \int_{t\mathbf{S}^{n-1}} f(x - \xi) d\sigma(\frac{\xi}{t}) = f * d\sigma_t(x);$$

donde $d\sigma_t(\xi) = \frac{1}{t^{n-1}} d\sigma(\frac{\xi}{t})$, es decir, que $d\sigma_t$ es la medida de superficie de $t\mathbf{S}^{n-1}$. Si tomamos f en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la siguiente identidad tiene sentido

$$f * d\sigma_t = (\widehat{f * d\sigma_t})^{\vee} = \left(\widehat{f}\widehat{d\sigma_t}\right)^{\vee} = \left(\widehat{f}\delta^t\widehat{d\sigma}\right)^{\vee},$$

donde $\delta^t\widehat{d\sigma}(x) = \widehat{d\sigma}(tx)$ (ver apéndice A). Así obtenemos una nueva expresión para la función maximal esférica cuando f está en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathscr{M}(f)(x) = \sup_{t>0} \left| \left(\widehat{f}(\xi)\widehat{d\sigma}(t\xi)\right)^{\vee}(x) \right|. \tag{2.4}$$

Sea $m(\xi) = \widehat{d\sigma}(\xi)$, entonces $m \in \mathcal{C}^{\infty}$ y es acotada,

$$\mathscr{M}(f)(x) = \sup_{t>0} \left| \left(\widehat{f}(\xi) m(t\xi)\right)^{\vee}(x) \right|. \tag{2.5}$$

Tomemos ahora una función radial $\eta_0 \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta_0(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$ y $\eta_0(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 2$; para $j \geq 1$, definimos $\eta_j(\xi) = \eta_0(2^{-j}\xi) - \eta_0(2^{1-j}\xi)$. Observemos que para todo $j \geq 1$, $\eta_j \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, pues es la suma de dos funciones en $\mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j(\xi) = 1$; en efecto, si $\xi \leq 1$, entonces $\eta_0(\xi) = 1$ y $\eta_j(\xi) = 0$ para todo $j \geq 1$; si $\xi > 1$, entonces existe $j_0 \geq 1$ tal que $2^{j_0 - 1} \leq |\xi| \leq 2^{j_0}$ y así, $\eta_j(\xi) = 0$ si $j > j_0$; por lo tanto,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j(\xi) = \sum_{j=0}^{j_0} \eta_j(\xi) = \eta_0(\xi) + \sum_{j=0}^{j_0} \left[\eta_0(2^{-j}\xi) - \eta_0(2^{1-j}\xi)\right] = \eta_0(2^{-j_0}\xi) = 1.$$

Luego, $m = \sum_{j=0}^{\infty} m_j$, donde $m_j = m\eta_j \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ para todo $j \geq 0$. De esto se sigue que,

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(f) &= \sup_{t>0} \left| \left(\widehat{f}(\xi) m(t\xi) \right)^{\vee}(x) \right| \\ &= \sup_{t>0} \left| \left(\widehat{f}(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} m_j(t\xi) \right)^{\vee}(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{t>0} \left| \left(\widehat{f}(\xi) m_j(t\xi) \right)^{\vee}(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{t>0} \left| f * \left(m_j^{\vee} \right)_t (x) \right|,\end{aligned}$$

donde $\left(m_j^{\vee} \right)_t (x) = t^{-n} m_j(\frac{x}{t})$.

Definimos

$$\mathscr{M}_j(f)(x) := \sup_{t>0} \left| f * \left(m_j^{\vee} \right)_t (x) \right|, \tag{2.6}$$

y con esto

$$\mathscr{M}(f)(x) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathscr{M}_j(f)(x).$$

Aunque la desigualdad anterior, por ahora tiene sentido si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la definición del operador maximal $\mathscr{M}_j$ que subyace de 2.6, nos dice que este operador puede actuar sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$. Esto es porque $m_j \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, así, $m_j^{\vee} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; por lo tanto, para toda $j \geq 0$, existe una función K_j integrable y radialmente decreciente que domina a $m_j^{\vee}$ (ver propocisión A.2), luego, por el corolario 1.4

$$\mathscr{M}_j(f)(x) = \sup_{t>0} \left| f * (m_j^{\vee})_t(x) \right| \leq \|K_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \mathcal{M}\left(f\right)(x), \tag{2.7}$$

donde $\mathcal{M}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood. Recordemos que $\mathcal{M}$ es un operador $(p,p)-$fuerte para $1 < p \leq \infty$ y $(1,1)-$débil, la desigualdad anterior nos permite afirmar lo mismo sobre cada $\mathscr{M}_j$. El lema que sigue a continuación nos proporciona información sobre el comportamiento de la constante en la desigualdad débil en $L^1(\mathbb{R}^n)$, para cada $\mathscr{M}_j$ con $j \geq 1$.

Lema 2.1 *Existe una constante $A = A(n)$ tal que, para todo $j \geq 1$, el operador $\mathscr{M}_j$ es de tipo $(1,1)-$ débil con constante $A2^j$, es decir,*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathscr{M}_j(f)(x) > \alpha\}| \leq \frac{A2^j}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.8}$$

para toda $\alpha > 0$ y toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. De la expresión 2.7 podemos concluir que si A' es una constante de la desigualdad débil para $\mathcal{M}$, entonces $A' \|K_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ será una constante para la desigualdad débil del operador $\mathscr{M}_j$. Recordemos que K_j es una función integrable y radialmente decreciente que domina a $m_j^{\vee}$; lo que haremos a continuación es mostrar que en efecto, para toda $j \geq 1$, existe esa K_j tal que su norma en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un múltiplo de 2^j.

Observemos que $m_j^{\vee} = (\eta_j m)^{\vee} = \eta_j^{\vee} * m^{\vee} = \eta_j^{\vee} * d\sigma$. Recordemos que para $j \geq 1$, $\eta_j(\xi) = \eta_0(2^{-j}\xi) - \eta_0(2^{1-j}\xi)$. Si consideramos la función $\varphi_0 \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ definida como $\varphi_0(\xi) = \eta_0(\xi) - \eta_0(2\xi)$ entonces $\eta_j = \delta^{2^{-j}}\varphi_0$, y por lo tanto $\eta_j^{\vee} = \phi_{2^{-j}}$, donde $\phi = \varphi_0^{\vee}$ es una función de Schwartz. Así, para cada $N > 0$, y en particular para $N > n$, existe una constante C_N tal que

$$\left|(1 + 2^j |x|)^N \phi(2^j x)\right| \leq C_N,$$

de esto se sigue que,

$$|\phi_{2^{-j}}(x)| = \left|2^{nj}\phi(2^j(x)\right| \leq \frac{C_N 2^{jn}}{(1 + 2^j |x|)^N}, \textit{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $m_j^{\vee} = \phi_{2^{-j}} * d\sigma$, entonces

$$\begin{aligned} \left|m_j^{\vee}(x)\right| &= \left|\int_{\mathbf{S}^{n-1}} \phi_{2^{-j}}(x-y)d\sigma(y)\right| \\ &\leq \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\phi_{2^{-j}}(x-y)|\, d\sigma(y) \\ &\leq C_N \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \left|\frac{2^{jn}}{(1 + 2^j |x-y|)^N}\right| d\sigma(y). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ahora, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, consideremos las siguientes porciones de S^{n-1}:

$$\begin{aligned} S_{-1}(x) &= \mathbf{S}^{n-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^n : 2^j |x-y| < 1\} \\ S_r(x) &= \mathbf{S}^{n-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^n : 2^r \leq 2^j |x-y| < 2^{r+1}\} \text{ para } r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como estos conjuntos son disjuntos dos a dos y $\bigcup_{r=-1}^{\infty} S_r(x) = \mathbf{S}^{n-1}$, de la expresión 2.9 tenemos:

$$\begin{aligned} \left|m_j^{\vee}(x)\right| &\leq C_N \sum_{r=-1}^{\infty} \int_{S_r(x)} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} d\sigma(y) \\ &\leq C_N \sum_{r=-1}^{\infty} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \int_{S_r(x)} d\sigma(y). \end{aligned}$$

Notemos que si $y \in S_r(x)$, entonces $|x| \leq 2^{r+1-j}+1$, de esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|m_j^{\vee}(x)\right| &\leq C_N \sum_{r=-1}^{\infty} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \chi_{B(0,2^{r+1-j}+1)}(x)\sigma(S_r(x)) \\
&\leq C_N \left[\sum_{r=-1}^{j} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \chi_{B(0,3)}(x)\sigma(S_r(x)) + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \chi_{B(0,2^{r+1-j}+1)}(x)\sigma(S_r(x)) \right].
\end{aligned}$$

La medida esférica de cada $S_r(x)$ está acotada por un múltiplo de $2^{(r+1-j)(n-1)}$ que sólo depende de n. Esto es porque $S_r(x) \subseteq \mathbf{S}^{n-1} \cap B_{2^{r+1-j}}(0)$ y la medida de $\mathbf{S}^{n-1} \cap B(0,R)$ está acotada por un múltiplo de R^{n-1}; así, podemos afirmar que existe C_n tal que $\sigma(S_r(x)) \leq c_n 2^{(r+1-j)(n-1)}$. Por otro lado $\sigma(S_r(x)) \leq \sigma(\mathbf{S}^{n-1}) = 1$. De estas estimaciones resulta,

$$\begin{aligned}
\left|m_j^{\vee}(x)\right| &\leq C_N \left[\chi_{B(0,3)}(x) \sum_{r=-1}^{j} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \left(c_n 2^{(r+1-j)(n-1)}\right) + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \chi_{B(0,2^{r+1-j}+1)}(x) \right] \\
&\leq C_N \left[\sum_{r=-1}^{j} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \chi_{B(0,3)}(x) \left(c_n 2^{(r+1-j)(n-1)}\right) + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \chi_{B(0,2^{r+1-j}+1)}(x) \right].
\end{aligned}$$

Observemos que si $r > j$ y $x \in B\left(0, 2^{r+1-j}+1\right)$, entonces $\frac{2^{r+2-j}}{1+|x|} \geq 1$; y si $x \in B(0,3)$, entonces $\frac{4}{1+|x|} \geq 1$; si elegimos $M > n$ y $N > M$, de la desigualdad anterior, se sigue

$$\begin{aligned}
\left|m_j^{\vee}(x)\right| &\leq C_N \left[c_n \sum_{r=-1}^{j} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \left(\frac{4}{1+|x|}\right)^M 2^{(r+1-j)(n-1)} + \sum_{r=j+1}^{\infty} \frac{2^{jn}}{2^{rN}} \left(\frac{2^{r+2-j}}{1+|x|}\right)^M \right] \\
&\leq \frac{2^j 4^M C_N}{(1+|x|)^M} \left[c_n \sum_{r=-1}^{j} 2^{j(n-1)+(r+1-j)(n-1)-rN} + \sum_{r=j+1}^{\infty} 2^{j(n-1)+M(r-j)-rN} \right] \\
&\leq \frac{2^j 4^M C_N}{(1+|x|)^M} \left[c_n \sum_{r=-1}^{j} 2^{n-1} 2^{r(n-1-N)} + \sum_{r=j+1}^{\infty} 2^{j(n-1-M)} 2^{r(M-N)} \right] \\
&\leq \frac{2^j 4^M C_N}{(1+|x|)^M} \left[c_n' \sum_{r=-1}^{j} 2^{r(n-1-N)} + \sum_{r=j+1}^{\infty} 2^{r(M-N)} \right].
\end{aligned}$$

Observemos que los exponentes de 2 en estas dos sumas son negativos, entonces éstas están acotadas por constantes A_1 y A_2, y por lo tanto:

$$\left|m_j^{\vee}(x)\right| \leq \frac{2^j 4^M C_N}{(1+|x|)^M} \left[c_n' A_1 + A_2\right].$$

Dicho de manera más simple, hemos probado que para todo $M > n$ existe una constante C''_M, tal que

$$\left|m_j^{\vee}(x)\right| \leq 2^j \frac{C''_M}{(1+|x|)^M}. \tag{2.10}$$

Si fijamos $M > N$ y hacemos $K_j(x) = 2^j \frac{C''_M}{(1+|x|)^M}$, entonces K_j es la función que queríamos encontrar, es integrable, positiva, radialmente decreciente y domina a $m_j^{\vee}$; además $\|K_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 2^j \left\|\frac{C''_M}{(1+|x|)^M}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$; luego, si $A = A' \left\|\frac{C''_M}{(1+|x|)^M}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, podemos concluir que $A2^j$ es una constante en la desigualdad $(1,1)-$débil, para cada operador $\mathscr{M}_j$ con $j \geq 1$. $\square$

El lema que sigue a continuación nos proporciona información sobre el comportamiento de la constante en la desigualdad $(2,2)-$fuerte para cada operador $\mathscr{M}_j$ con $j \geq 1$.

Lema 2.2 *Existe una constante $B = B(n)$ tal que, para todo $j \geq 1$, el operador $\mathscr{M}_j$ es de tipo $(2,2)-$fuerte con constante $B2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)}$, es decir,*

$$\|\mathscr{M}_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq B2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)j} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.11}$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in f^2(\mathbb{R}^n)$ y sean

$$\mathcal{A}_{j,t}(f)(x) = \left(\widehat{f}\,(\xi)\, m_j\,(t\xi)\right)^{\vee}(x) \tag{2.12}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{j,t}(f)(x) = \left(\widehat{f}\,(\xi)\, \widetilde{m}_j\,(t\xi)\right)^{\vee}(x), \tag{2.13}$$

donde $\widetilde{m}_j\,(\xi) = \xi \cdot \nabla m_j\,(\xi)$. Si para ξ fija consideramos $m_j(s\xi)$ como función de s, con $s \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{d}{ds} m_j(s\xi) = \frac{\nabla m_j(\xi)\cdot\xi}{s} = \frac{\widetilde{m}_j(\xi)}{s}$. Similarmente, si fijamos x y consideramos $\mathcal{A}_{j,s}(f)(x)$, como función de s, veamos que $s\frac{d}{ds}\left(\mathcal{A}_{j,s}(f)\right) = \widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}(f)$, en efecto,

$$\begin{aligned} s\frac{d}{ds}\left(\mathcal{A}_{j,s}(f)\right) &= s\frac{d}{ds}\left(\widehat{f}\,(\xi)\, m_j\,(s\xi)\right)^{\vee}(x) \\ &= s\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,(\xi)\, m_j\,(s\xi)\, e^{2\pi i\xi\cdot x} d\xi \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $m_j \in \mathscr{S}$, haciendo uso del teorema de convergencia dominada, podemos tomar el límite $\frac{d}{ds}$ dentro de la integral anterior,

$$\begin{aligned} s\frac{d}{ds}\left(\mathcal{A}_{j,s}(f)\right) &= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}\left(\xi\right)s\frac{d}{ds}m_j\left(s\xi\right)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}\left(\xi\right)\widetilde{m}_j\left(s\xi\right)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi \\ &= \left(\widehat{f}\left(\xi\right)\widetilde{m}_j\left(t\xi\right)\right)^{\vee}(x)=\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}(f). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0}\mathcal{A}_{j,s}(f)(x) = \lim_{s\to 0}\left(\widehat{f}\left(\xi\right)m_j\left(s\xi\right)\right)^{\vee}(x) = \lim_{s\to 0}\left(\widehat{f}\left(\xi\right)\delta^s m_j\left(\xi\right)\right)^{\vee}(x) \\ = \lim_{s\to 0} f*\left(\delta^s m_j\right)^{\vee}(x) = \lim_{s\to 0} f*\left(m_j^{\vee}\right)_s(x). \end{aligned}$$

Recordemos que $m_j^{\vee}$ está dominada por una función integrable, positiva y radialmente decreciente, además $\int_{\mathbb{R}^n} m_j^{\vee}\left(\xi\right)d\xi = 0$, así $\lim_{s\to 0}\mathcal{A}_{j,s}(f)(x) = 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, si $f\in\mathscr{S}$, entonces por el corolario B.3, concluimos que $\lim_{s\to 0}\mathcal{A}_{js}(f)(x)=0$ para casi todo $x\in\mathbb{R}^n$, para toda $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$; luego, por el *Teorema Fundamental del Cálculo*, tenemos que

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{A}_{j,t}(f)(x)\right]^2 &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left[\mathcal{A}_{j,s}(f)\left(x\right)\right]^2 ds \\ &= \int_0^t 2\mathcal{A}_{j,s}(f)(x)\frac{d}{ds}\mathcal{A}_{j,s}(f)(x)ds \\ &= 2\int_0^t \mathcal{A}_{j,s}(f)(x)\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}(f)(x)\frac{ds}{s}; \end{aligned}$$

y así,

$$\left[\mathcal{A}_{j,t}(f)(x)\right]^2 \leq 2\int_0^t \left|\mathcal{A}_{j,s}(f)\left(x\right)\right|\left|\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}\left(f\right)\left(x\right)\right|\frac{ds}{s};$$

luego,

$$\sup_{t>0}\left[\mathcal{A}_{j,t}(f)(x)\right]^2 \leq 2\int_0^{\infty}\left|\mathcal{A}_{j,s}\left(f\right)\left(x\right)\right|\left|\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}(f)(x)\right|\frac{ds}{s};$$

entonces

$$\left|\mathscr{M}_j(f)(x)^2\right| \leq 2\int_0^{\infty}\left|\mathcal{A}_{j,s}(f)\left(x\right)\right|\left|\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}\left(f\right)\left(x\right)\right|\frac{ds}{s}.$$

Ahora, si consideramos la integral sobre $\mathbb{R}^n$ a ambos lados de la desigualdad anterior, tenemos

$$\|\mathscr{M}_j(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} 2\int_0^{\infty}\left|\frac{\mathcal{A}_{j,s}(f)(x)}{s^{\frac{1}{2}}}\right|\left|\frac{\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}(f)(x)}{s^{\frac{1}{2}}}\right| dsdx,$$

y al aplicar la desigualdad de Hölder,

$$\|\mathscr{M}_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty |\mathcal{A}_{j,s}(f)(x)|^2\,\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty \left|\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}(f)(x)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}dx;$$

entonces

$$\|\mathscr{M}_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^n} G_j(f)\,(x)\,\widetilde{G}_j(f)(x)dx, \tag{2.14}$$

donde,

$$G_j(f)(x) = \left(\int_0^\infty |\mathcal{A}_{j,s}(f)(x)|^2\,\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \left|\left(\widehat{f}\,(\xi)\,m_j\,(s\xi)\right)^{\vee}(x)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\widetilde{G}_j(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left|\widetilde{\mathcal{A}}_{j,s}(f)\,(x)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \left|\left(\widehat{f}\,(\xi)\,\widetilde{m}_j\,(s\xi)\right)^{\vee}(x)\right|^2\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{2}},$$

y nuevamente aplicando la desigualdad de Hölder, de 2.14 resulta

$$\|\mathscr{M}_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|G_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left\|\widetilde{G}_j(f)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.15}$$

Veamos ahora que los operadores G_j y $\widetilde{G}_j$son acotados de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned}\|G_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty\left|\left(\widehat{f}\,(\xi)\,m_j\,(s\xi)\right)^{\vee}(x)\right|^2\frac{ds}{s}dx\\ &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left(\widehat{f}\,(\xi)\,m_j\,(s\xi)\right)^{\vee}(x)\right|^2 dx\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

y por las identidad de Plancherel y Tonelli, tenemos que

$$\begin{aligned}\|G_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{f}\,(\xi)\,m_j\,(s\xi)\right|^2 d\xi\frac{ds}{s}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{f}\,(\xi)\right|^2\int_0^\infty\frac{|m_j\,(s\xi)|^2}{s}dsd\xi.\end{aligned}$$

Recordemos que m_j tiene soporte en el anillo $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$, así que

$$\|G_j(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}\,(\xi)\right|^2 \int_{\frac{2^{j-1}}{|\xi|}}^{\frac{2^{j+1}}{|\xi|}} \frac{1}{s} ds d\xi$$

$$= \ln 4 \, \|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

nuevamente aplicando la identidad de Plancherel,

$$\|G_j(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \ln 4 \, \|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

por lo tanto

$$\|G_j(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \, \|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.16}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\widetilde{m}_j$ se soporta en el anillo $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$ llegamos a una expresión análoga para $\widetilde{G}_j$:

$$\left\|\widetilde{G}_j(f)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0' \, \|\widetilde{m}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.17}$$

Como $|m_j(\xi)| = \left|\eta_j(\xi)\,\widehat{d\sigma}(\xi)\right|$, y existe una constante C_n tal que $\left|\widehat{d\sigma}(\xi)\right| \leq \frac{C_n}{(1+|\xi|)^{\frac{n-1}{2}}}$ (ver ápendice C); entonces $|m_j(\xi)| \leq |\eta_j(\xi)| \frac{C_n}{(1+|\xi|)^{\frac{n-1}{2}}}$, así que considerando nuevamente el soporte de m_j tenemos,

$$|m_j(\xi)| \leq \frac{C_n}{\left(1+2^{j-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{C_n}{\left(2^{j-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \leq C_n 2^{\frac{n-1}{2}} 2^{-j\frac{n-1}{2}} = C_n' 2^{-j\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

por lo tanto $\|m_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_n' 2^{-j\left(\frac{n-1}{2}\right)}$. De manera similar obtenemos una estimación para $\|\widetilde{m}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, en efecto,

$$|\widetilde{m}_j(\xi)| = \left|\xi\left(\nabla\eta_j(\xi)\,\widehat{d\sigma}(\xi) + \eta_j(\xi)\,\nabla\widehat{d\sigma}(\xi)\right)\right| \leq C_1 |\xi| \left(\left|\widehat{d\sigma}(\xi)\right| + \left|\nabla\widehat{d\sigma}(\xi)\right|\right),$$

y existe una constante C_n tal que $\left|\widehat{d\sigma}(\xi)\right| + \left|\nabla\widehat{d\sigma}(\xi)\right| \leq \frac{C_n}{(1+|\xi|)^{\frac{n-1}{2}}}$ (ver Apéndice C); entonces $|\widetilde{m}_j(\xi)| \leq C_1 |\xi| \frac{C_n}{(1+|\xi|)^{\frac{n-1}{2}}}$, así que

$$|\widetilde{m}_j(\xi)| \leq \frac{C_1 C_n 2^{j+1}}{\left(1+2^{j-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{C_1 C_n 2^{j+1}}{\left(2^{j-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \leq \left(C_1 C_n 2^{\frac{n-1}{2}+1}\right) 2^j 2^{-j\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \widetilde{C_n'} 2^{j\left(1-\frac{n-1}{2}\right)},$$

luego, $\|\widetilde{m}_j\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C'_n} 2^{j\left(1-\frac{n-1}{2}\right)}$. Así, de 2.16 y 2.17, se sigue que

$$\|G_j(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C'_n 2^{-j\left(\frac{n-1}{2}\right)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \text{ y}$$

$$\left\|\widetilde{G}_j(f)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C'_n} 2^{j\left(1-\frac{n-1}{2}\right)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Con estas estimaciones para $\|G_j(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ y $\left\|\widetilde{G}_j(f)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ de 2.15, resulta

$$\|\mathscr{M}_j(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{\frac{-j(n-2)}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

con esto concluimos la prueba.□

De los lemas anteriores, y el teorema de Marcinkiewicz, obtenemos que para toda $j \geq 1$, los operadores son de tipo $(p,p) - \mathit{fuerte}$ para $1 < p \leq 2$, de manera que

$$\|\mathscr{M}_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C'_{j,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.18}$$

donde

$$\begin{aligned} C'_{j,p} &= 2\left(\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2-p}\right)\left[A2^j\right]^{\frac{2-p}{p}} \left[B2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)j}\right]^{2\frac{p-1}{p}} \\ &= C''_p 2^{j\frac{2-p}{p}} 2^{j(1-(n-1))\frac{p-1}{p}} = C''_p 2^{j(1-(n-1)(p-1))\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Si $p > \frac{n}{n-1}$, entonces $1-(n-1)(p-1) < 0$, así $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-(n-1)(p-1))\frac{1}{p}}$, converge y

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathscr{M}_j(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.19}$$

donde $C_p = C''_p \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(1-(n-1)(p-1))\frac{1}{p}}$. Esto significa que el operador $\mathscr{M}$ es de tipo $(p,p)-$fuerte si $\frac{n}{n-1} < p < 2$, pero esto último sólo es posible si $n \geq 3$. Además, $\mathscr{M}$ es de tipo $(\infty,\infty)-$fuerte, ya que $|\mathscr{M}(f)(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ casi en todas partes. Así podemos aplicar nuevamente el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz para formular el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *Si $n \geq 3$, y $p > \frac{n}{n-1}$, existe una constante $C = C(p)$, tal que*

$$\|\mathscr{M}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para toda f en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

2.2. Teorema de diferenciación esférico en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$

Teorema 2.4 *Sea $n \geq 3$ y $p > \frac{n}{n-1}$, entonces*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x-ty)d\sigma(y) = f(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^n$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos la familia de operadores $\{\mathcal{A}_r\}_{r>0}$, donde

$$\mathcal{A}_t(f)(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x-ry)d\sigma(y).$$

En efecto, todos los operadores de esta familia son lineales además $\mathscr{M}$ es el operador maximal asociado a esta familia , que como ya demostramos es de tipo si $p \geq \frac{n}{n-1}$, por otro lado si $f \in \mathscr{C}_0^\infty$, entonces $\lim_{t\to 0} \mathcal{A}_t(f) = f$, entonces si invocamos nuevamente el corolario B.3, tenemos que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{t\to 0} \mathcal{A}_t(f)(x) = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x-ty)d\sigma(y) = f(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^n$$

Llegando así al teorema de diferenciación esférico, el objetivo principal de este trabajo.

2.3. Teorema de diferenciación esférico en $\mathbb{R}^2$

Si tomamos $p > 2$ es posible enunciar un teorema análogo al teorema de diferenciación 2.4; similarmente, este teorema se concluye como un corolario después de establecer que el operador maximal esférico es de tipo $(p,p) - fuerte$. La primera mención de este resultado fue dada por Bourgain en [2], en 1985; y la primera demostración, también de Bourgain, en [1] en 1986, esto fue casi una década después de que el teorema para $n \geq 3$, fuera mencionado por Stein en [9] y demostrado por Stein y Wainger en [10]. Más adelante Mockenhaupt, Segger and Sogge en [6], presentan un prueba en la que utilizan resultados conocidos y mejorados en relación con la *ecuación de onda*. En 1998, Schlag presenta en [8] la que llama una *demostración geométrica del teorema circular máximal* , tal prueba utiliza técnicas combinatorias, el teorema de los tres círculos y la construcción un lema para dos círculos.

2.4. Exactitud de la cota para p

Hasta aquí hemos afirmado que el teorema de diferenciación esférico es válido para $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 2$ y $p < \frac{n}{n-1}$. Stein y Wainger en [10], presentan un ejemplo con el que prueban que la cota para p es exacta, éste es la función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \leq \frac{n}{n-1}$, definida como sigue,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{n-1}\log\left(\frac{1}{|x|}\right)} & \text{si } 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases} . \tag{2.20}$$

Apéndice A

Transformada de Fourier

En esta sección exponemos algunos resultados en torno a la una herramienta importante para el desarrollo de este trabajo: la *Transformada de Fourier*. Aunque usualmente, esta transformada se define para funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$, comenzaremos por definirla sobre la *clase de funciones de Schwartz*, para luego extrapolar algunos de estos resultados a las funciones en los espacios $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$. Lo que se expone a continuación puede encontrarse de manera detallada en [5].

La clase de funciones de Schwartz

Informalmente hablando una función es de Schwartz, si es suave y todas sus derivadas decaen más rápidamente que el recíproco de cualquier polinomio. De manera formal, presentamos la siguiente definición.

Definición A.1 *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es de Schwartz si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para cada pareja de multi-índices α, β existe una constante positiva $C_{\alpha,\beta}$ tal que,*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| = C_{\alpha,\beta} < \infty \tag{A.1}$$

El conjunto de todas las funciones de Schwartz sobre $\mathbb{R}^n$ es denotado por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Una caracterización del conjunto $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ usualmente usada es la siguiente.

Proposición A.2 *Una función $f \in \mathscr{C}^\infty$ es de Schwartz si y sólo si para todo entero positivo N y todo multi-índice α existe una constante positiva $C_{\alpha,N}$ tal que*

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{(1+|x|)^N}. \tag{A.2}$$

Lo cual implica que f y sus derivadas siempre están dominadas por funciones integrables radialmente decrecientes.

El espacio $\mathscr{C}_0^\infty$, es decir, el espacio de las funciones suaves con soporte compacto, está contenido en el espacio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; por otro lado $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \geq 1$; ésto implica que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Otra propiedad del espacio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en relación con los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \geq 1$, es que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, la función $f * \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

La transformada de Fourier de una función de Schwartz

Como lo mencionamos anteriormente, la transformada de Fourier es usualmente definida en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$. No obstante, en este trabajo iniciaremos definiéndola en el espacio de Schwartz, esto porque tanto la suavidad, como el rápido decaimiento de las funciones en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nos permite enumerar una variedad de propiedades de la transformada de Fourier que resultarán crucialmente útiles a lo largo de este trabajo.

Definición A.3 *Sea f en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx. \tag{A.3}$$

Y decimos que $\widehat{f}$ es la transformada de Fourier de f.

Continuamos ahora con una lista de propiedades de la transformada de Fourier, pero antes consideremos la siguiente notación. Si f es una función medible sobre $\mathbb{R}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$ definimos,

$$\begin{aligned} \tau_y f(x) &= f(x-y) \\ \delta^a(f)(x) &= f(ax) \\ f_t &= t^{-n}\delta^{1/t}(f) \end{aligned}$$

Proposición A.4 *Sean f y g en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{C}$, α un multi-índice y $t > 0$, tenemos*

(1) $(af+bg)\hat{} = a\hat{f} + b\hat{g}$ *(linealidad),*

(2) $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

(3) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$,

(4) $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$,

(5) $\widehat{\tau_y(f)}(\xi) = e^{2\pi y\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$,

(6) $(e^{2\pi y\cdot x}f(x))\check{}(\xi) = \tau_y(\hat{f})(\xi)$,

(7) $\widehat{\delta^t(f)} = (\hat{f})_t$,

(8) $(\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = ((-2\pi i\xi)^\alpha f(x))\check{}(\xi)$,

(9) $(\partial^\alpha f)\check{}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(x)(\xi)$

Corolario A.5 *La transformada de Fourier de una función radial es una función radial.*

La trasformada inversa de Fourier

Ahora definiremos la transformada inversa de Fourier.

Definición A.6 *Sea f en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos*

$$f^\vee(x) = \hat{f}(-x), \tag{A.4}$$

y decimos que $f^\vee$ es la transformada inversa de Fourier de f.

La transformada inversa de Fourier tiene las mismas propiedades de la transformada de Fourier, así que en este trabajo consideraremos una lista de propiedades análoga a la que se presenta en la proposición A.4, para la trasformada inversa de Fourier. También queremos tener en cuenta algunas propiedades existentes entre la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier; el siguiente teorema da cuenta de ello.

Teorema A.7 *Sean f, g y h en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx$

(2) $(\hat{f})^\vee = f = (f^\vee)\check{}$ *(Inversión de Fourier),*

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi)}d\xi$ *(relación de Parseval),*

(4) $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f^\vee\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ *(Identidad de Plancherel),*

(5) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g^\vee(x)dx$

Corolario A.8 *La trasformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$

La definición de la transformada de Fourier para funciones en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, también tiene sentido si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, permitiéndonos así extender la definición de la transformada de Fourier a todo $L^1(\mathbb{R}^n)$. Además, este operador también satisface las propiedades (1),(3),(4),(5),(6) y (7) de la proposición A.4, cuando f y g son integrables. También podemos definir la transformada inversa de Fourier sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ como $\widetilde{f}(x) = \widehat{f}(-x)$. Sin embargo, no siempre tendremos que $\left(\widehat{f}\right)^{\vee} = f$, ésto sólo sucederá si $\widehat{f}$ también es integrable.

Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Si tomamos $f \in L^1(\mathbb{R}^n \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces se cumple que $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, es decir, que $^\wedge$ es L^2 isometría sobre $L^1 \cap L^2$, el cual es un espacio denso de L^2. Por lo tanto, existe una extensión de $^\wedge$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tal extensión, que denotaremos similarmente con el símbolo $^\wedge$, también es una isometría sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,,$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

De manera similar podemos encontrar que $^\vee$ también tiene una extensión sobre $L^2\mathbb{R}^n)$, que denotaremos similarmente como $^\vee$, y que también cumple

$$\|f^\vee\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Apéndice B

Desigualdades de tipo fuerte y tipo débil

Las desigualdades de tipo fuerte y tipo débil son respectivamente las que se asocian a los operadores de tipo fuerte y tipo débil como se muestra en la siguiente definición.

Definición B.1 *Sean (X,μ) y (Y,ν) espacios de medida y T un operador de $L^p(X,\mu)$ en el conjunto de funciones medibles sobre Y, decimos que,*

(a) T es $(p,q)-$fuerte si es acotado de $L^p(X,\mu)$ a $L^q(Y,\nu)$, es decir, si existe una constante $C = C(p,q)$, tal que

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C\,\|f\|_{L^p(X,\mu)} \tag{B.1}$$

para toda $f \in L^p(X,\mu)$. Diremos entonces que T es $(p,q)-$fuerte con constante C.

(b) T es $(p,q)-$débil, con $p < \infty$, si existe una constante $C = C(p,q)$, tal que

$$\nu\left\{y \in Y : |T(f)(y)| > \alpha\right\} \leq \left(\frac{C}{\alpha}\,\|f\|_{L^p(X,\mu)}\right)^q \tag{B.2}$$

para toda $f \in L^p(X,\mu)$ y toda $\alpha > 0$. Diremos que T es $(p,q)-$débil, con constante C.

(c) T es (p,∞)-débil si es acotado de $L^p(X,\mu)$ a $L^\infty(Y,\nu)$, es decir si es (p,∞)-fuerte.

Veamos que la desigualdad fuerte implica la desigualdad débil, en efecto, si un operador T es $(p,q)-$fuerte, y $E_\alpha = \{y \in Y : |T(f)(y)| > \alpha\}$, entonces

$$\nu\left(E_\alpha\right) = \int_{E_\alpha} d\nu \leq \int_{E_\alpha} \left|\frac{T(f)(y)}{\alpha}\right|^q d\nu \leq \frac{\|T(f)\|^q_{L^q(Y,\nu)}}{\alpha^q} \left(\frac{C}{\alpha}\,\|f\|_{L^p(X,\mu)}\right)^q \tag{B.3}$$

lo que significa que T es (p,q)-débil.

Ahora presentaremos dos resultados útiles con respecto a la desigualdad débil, el primero de ellos tiene que ver con la convergencia casi en todas partes.

Teorema B.2 *Sea (X, μ) un espacio de medida y $\{T_t\}_{t>0}$ una familia de operadores lineales de $L^p(X, \mu)$ en el espacio de funciones medibles sobre X y definimos el operador*

$$T^*(f)(x) = \sup_{t>0} |T_t(f)(x)| . \tag{B.4}$$

Si T^* es (p,q)-débil para algún q, entonces, para todo $t_0 \geq 0$ y para toda constante λ, el conjunto

$$\left\{ f \in L^p(X, \mu) : \lim_{t \to t_0} T_t(f) = \lambda f \textit{ casi en todas partes} \right\} \tag{B.5}$$

es cerrado en $L^p(X, \mu)$.

Corolario B.3 *Sea (X, μ) un espacio de medida y $\{T_t\}_{t>0}$ una familia de operadores lineales de $L^p(X, \mu)$ en el espacio de funciones medibles sobre X, tal que T^*, como se definió anteriormente, es un operador (p,q)-débil. Si existe una constante λ y conjunto D, denso en $L^p(X, \mu)$, tal que si $f \in D$, $\lim_{t \to t_0} T_t(f)(x) = \lambda f$ c.t.p, entonces*

$$\lim_{t \to t_0} T_t(f) = \lambda f \textit{ c.t.p.} \tag{B.6}$$

para toda $f \in L^p(X, \mu)$.

El segundo resultado, que resultará ampliamente útil en este trabajo, nos dice cómo podemos encontrar desigualdades de tipo fuerte a partir de dos desigualdades de tipo débil; este resultado es el *Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz* cuyo enunciado se encuentra a continuación.

Teorema de interpolación de Marcinkiewikz

Teorema B.4 *Sean (X, μ) y (Y, ν) espacios de medida y $0 < p_0 < p_1$. Sea T un operador sublineal definido sobre el espacio $L^{p_0}(X, \mu) + L^{p_1}(X, \mu)$ y que toma valores en el espacio de las funciones medibles sobre Y. Si T es (p_0, p_0)-débil y (p_1, p_1)-débil con constantes C_0 y C_1, entonces para todo $p_0 < p < p_1$, T es de tipo (p, p)-fuerte y*

$$\|T(f)\|_{L^p(Y,\nu)} \leq C \, \|f\|_{L^p(X,\mu)} \tag{B.7}$$

donde

$$C = 2 \left(\frac{p}{p - p_o} + \frac{p}{p_1 - p_0} \right)^{\frac{1}{p}} C_0^{\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}} C_1^{\frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}} .$$

Una exposición más detallada de lo que se encuentra en este apéndice se puede encontrar en [4].

Apéndice C

Funciones de Bessel

A continuación se muestran algunas propiedades las de funciones de Bessel que son pertinentes para establecer algunos resultados en este trabajo en relación con la transformada de fourier de la medida de superficie sobre $\mathbb{S}^{n-1}$. Lo que se expone en apéndice puede encontrarse de manera más detallada en [5].

Definimos la función de Bessel de orden ν como

$$J_\nu(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} e^{its}\left(1-s\right)^\nu \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}},$$

cuando $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ y $t \geq 0$.

Algunas propiedades de las funciones de Bessel son las siguientes:

(a) $\frac{d}{dt}\left(t^\nu J_\nu(t)\right) = t^\nu J_{v-1}(t)$,

(b) $\frac{d}{dt}\left(t^{-\nu} J_v(t)\right) = -t^{-\nu} J_{v+1}(t)$,

(c) Si $0 \leq r \leq 1$ y $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$

$$\left|J_\nu\left(r\right)\right| \leq C_0 e^{c_0|\operatorname{Im}\nu|} r^{\operatorname{Re}\nu},$$

donde $C_0 = C_0\left(\operatorname{Re}\nu\right)$ y $c_0 = c_0\left(\operatorname{Re}\nu\right)$;

(d) Si $r > 1$ y $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$,

$$\left|J_\nu\left(r\right)\right| \leq C_0 e^{\pi|\operatorname{Im}\nu| + \pi^2|\operatorname{Im}\nu|^2} r^{-\frac{1}{2}}.$$

Observación: en particular, si $r \in \mathbb{R}$, $\nu > -\frac{1}{2}$, tenemos que existe $C = C(\nu)$

(c') $|J_\nu(r)| \leq C r^\nu$, si $0 \leq r < 1$,

(d') $|J_\nu(r)| \leq C r^{-\frac{1}{2}}$, si $r > 1$.

La transformada de Fourier de la Medida de Superficie sobre $\mathbf{S}^{n-1}$

Si $d\sigma$ denota la medida de superficie sobre S^{n-1} para $n \geq 2$, tenemos la siguiente identidad

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \xi \cdot \theta} d\sigma(\theta) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi |\xi|).$$

De donde es posible obtener acotaciones para $\left|\widehat{d\sigma}(\xi)\right|$ y $\left|\nabla \widehat{d\sigma}(\xi)\right|$ a partir de las propiedades (b), (c') y (d') de las funciones de Bessel.

Existe $C = C(n)$ tal que

$$\left|\widehat{d\sigma}(\xi)\right| + \left|\nabla \widehat{d\sigma}(\xi)\right| < \frac{C}{(1 + |\xi|)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Bibliografía

[1] J. Bourgain, *Averages in the plane over convex curves and maximal operators*, J. Analyse Math. 47. (1986), 69–85.

[2] J. Bourgain, *Estimations de certaines fonctions maximales*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 301. (1985), 499–502.

[3] M. Cowling and G. Mauceri, *On maximal functions*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 49. (1979), 79–87.

[4] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, American Mathematical Society, Providence, 2001.

[5] L.Grafakos. *Classical Fourier analysis.* 2nd ed. New York:Springer, 2008.

[6] G. Mockenhaupt, A. Seeger, and C. Sogge, *Wave front sets, local smoothing and Bourgain's circular maximal theorem*, Ann. of Math. 136. (1992), 207–218.

[7] J.L. Rubio de Francia, *Maximal functions and Fourier transforms*, Duke Math. J. 53. (1986), 395–404.

[8] W. Schlag, *A geometric proof of the circular maximal theorem.* Duke Math. J. 93 (1998), 505–533.

[9] E. M. Stein, *Maximal functions: Spherical means*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 73. (1976), 2174–2175.

[10] E. M. Stein and S. Wainger, *Problems in harmonic analysis related to curvature*, Bull. A.M.S. 84. (1978), 1239–1295.