



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN**

**SOBRE CONJUNTOS DE PUNTOS EN EL PLANO
(ESTRUCTURAS Y MOVIMIENTO)**

**TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (COMPUTACIÓN)**

**PRESENTA:
MARCO ANTONIO HEREDIA VELASCO**

**TUTOR PRINCIPAL
DR. JORGE URRUTIA GALICIA
(INSTITUTO DE MATEMÁTICAS - U.N.A.M.)**

**COMITÉ TUTOR
DR. JOSÉ MIGUEL DÍAZ-BÁÑEZ
(UNIVERSIDAD DE SEVILLA, ESPAÑA)
DR. SERGIO RAJSBAUM GORODEZKY
(INSTITUTO DE MATEMÁTICAS - U.N.A.M.)**

MÉXICO, D. F. ABRIL 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Laura, la 'muchacha encantadora' que le robó a este distraído su atención.

Al pequeño que está por llegar.

Agradecimientos

Primero que nada, quiero agradecer al doctor Jorge Urrutia, por todo el tiempo que me dedicó en estos (muchos) años en que ha sido mi tutor; por introducirme al mundo de la investigación y de la Geometría Computacional; por acogerme en su grupo de trabajo (e incluso, a veces en su casa); por toda la gente excepcional que he podido conocer a su lado; pero sobre todo, por su paciencia y por aquellos regaños (justamente merecidos) que me ha dado. Jorge, eres de las pocas personas a las que tengo a bien llamar *maestro*, utilizando para ello el sentido más amplio de dicha palabra; además de todo lo que me has enseñado académicamente, he podido aprender de ti numerosas lecciones de vida; te estaré siempre agradecido.

A los miembros de mi comité tutorial, sinodales y jurados, los doctores: Sergio Rajsbaum, José Miguel Díaz-Báñez, Francisco Hernández, Juan José Montellano, Criel Merino y Eduardo Rivera. Por sus valiosos comentarios que ayudaron a enriquecer mi investigación y por el tiempo que me dedicaron, tiempo que en más de una ocasión los alejó de sus actividades centrales. En especial, quiero agradecer al doctor Hernández Quiroz, que ha estado al tanto de mi progreso académico desde la licenciatura y que ha aceptado ser sinodal de diversos alumnos de Jorge, aún cuando los temas que le hemos presentado difieran de sus temas de experticia.

A todas las personas que han sido mis anfitriones durante mis diversas estancias de investigación: Toni Sellarès, Clemens Huemer, Carlos Seara, Inmaculada Ventura, Ferran Hurtado y Alberto Márquez. De manera particular, quisiera agradecer a José Miguel Díaz-Báñez (“Chemi” de cariño) por enseñarme que después de un arduo día de trabajo, uno tiene bien merecido un momento de disfrute, con una cerveza o un buen vino; por recibirme tantas veces en, mi ahora querida, Sevilla; y por hacerme sentir siempre como en casa, al grado de invitarme en múltiples ocasiones a la suya (nunca olvidaré esas tardes de pringá y jamón). También quiero agradecer a Criel Merino por

ser un excelente anfitrión en todos los talleres a los que asistí a Oaxaca.

En mi fiesta de titulación de licenciatura mi papá me dijo algo así: “Toño, más que estar orgulloso por tu título, estoy orgulloso por la gente de la que te has rodeado: tus amigos”; y estoy totalmente de acuerdo, porque aquellos que están en dicha categoría, casi los considero como hermanos. Por ello, agradezco a mis amigos José Angel, Rafael, Vania y Victor, que han recorrido junto conmigo este camino hacia la madurez; pero ayudándome a seguir siendo yo mismo y a no perder de vista lo que es realmente importante. También agradezco a mis amigos y compañeros de ideales (miembros todos de la H.H. UC): Citlali, Cuauhtémoc, Edgar Noe, Javier Alfredo, Juan Carlos, Juan Pedro, Mario, Melina y Sergio Yoni; que con su esfuerzo, cooperaron para que ésta nuestra universidad no excluya a lo más necesitados, a la vez que fueron convirtiéndose en parte medular de la persona que soy ahora.

Le agradezco a toda mi familia por todo su apoyo y cariño, en particular a mis padres Genoveva y Antonio, a mi hermana Alma Rosa y a mis tíos Cecilia y Victor. Además quisiera dedicar este trabajo a mi sobrino Victor Alberto, y a mis primos Alejandra, Itzel y Tonatiuh; sepan que los tengo constantemente en mi mente y que me siento orgulloso por cada nuevo paso que dan.

A todos los estudiantes de Jorge que he conocido, y que, junto con algunos otros, han ido formando un verdadero grupo de investigación en Geometría Computacional y temas afines. Afortunadamente, algunos de este gran grupo han rebasado la barrera de colegas y puedo ahora llamarlos amigos: Adriana, Canek, Crevel, Javier y Marcelino.

A todos mis coautores, pues gracias a ellos mis esfuerzos por investigar no se quedan sólo en las libretas. Deseo seguir trabajando con los actuales y hacer que la lista de los mismos siga creciendo.

Al Posgrado en Ciencia en Ingeniería de la Computación, por las facilidades y numerosos apoyos económicos que me brindaron durante mis estudios de maestría y doctorado. Principalmente quiero agradecer a las secretarías de dicho posgrado: Amalia, Cecilia, Diana y Lulú, por ayudarme con la realización de mis trámites y solicitudes, algunas veces incluso fuera de sus respectivas responsabilidades.

Finalmente quisiera agradecer al CONACYT por la beca que me otorgó para mis estudios de doctorado y por los apoyos de beca mixta que me concedieron durante mis estancias.

Índice general

1. Introducción general	1
1.1. Resumen de Publicaciones	3
1.2. Preliminares	4
I Polígonos [vacíos] dentro de conjuntos de puntos	7
2. Introducción	9
2.1. Resultados previos	10
3. Contando 4-ágonos y 4-hoyos	15
3.1. Conjuntos pequeños	16
3.2. Maximizando el número de 4-hoyos	18
3.3. Maximizando el número de 4-hoyos no convexos	21
3.4. Minimizando el número de 4-hoyos	23
4. Contando k-ágonos y k-hoyos	27
4.1. k -ágonos generales	28
4.1.1. k -ágonos y el número de cruce rectilíneo	28
4.1.2. k -ágonos y poligonizaciones	31
4.2. Maximizando el número de k -hoyos	33
4.3. Acotando por arriba el número de k -hoyos no convexos	37
4.4. Minimizando el número de k -hoyos	39
5. Conclusiones	45

II	Redes de puntos móviles	47
6.	Introducción	49
6.1.	Definición de los problemas	50
7.	Inundación en redes móviles <i>ad hoc</i> restringidas	53
7.1.	Problema de inundación	53
7.2.	Rangos del mismo tamaño	55
7.3.	Optimización de la asignación de rango de transmisión	59
7.3.1.	El problema min-suma- α	59
7.3.2.	El problema min-suma-binario	66
8.	Conclusiones	69
	Bibliografía	70

Índice de figuras

1.1.	Conjunto de puntos conteniendo un 5-ágono y un 4-hoyo. . . .	2
1.2.	Red de dispositivos móviles inalámbricos.	2
1.3.	Ejemplos de polígonos.	5
1.4.	La envolvente convexa o cierre convexo de un conjunto de puntos.	6
1.5.	Poligonización de un conjunto de n puntos en el plano.	6
2.1.	Cualesquiera 5 puntos determinan una cuadrilátero convexo.	11
2.2.	Ejemplo de un conjunto de Horton.	12
3.1.	Tres 4-hoyos generados por un conjunto de 4 puntos.	15
3.2.	Conjuntos que maximizan el número de 4-hoyos con $n = 4, \dots, 8$	17
3.3.	Dos conjuntos extremales de 11 puntos.	18
3.4.	Análisis sobre los 4-hoyos no convexos con vértices de Δ	19
3.5.	Bosquejo del conjunto \mathcal{X}_m para $m = 4$	22
3.6.	Conjunto que contiene sólo cinco 4-hoyos que tienen a p_1 y a p_2 como vértices (uno convexo y cuatro no convexos).	24
3.7.	Un 4-hoyo de $S_{i,j}$ con p_i y p_j entre sus vértices.	25
4.1.	La doble cadena $DC(n)$	32
4.2.	Un camino C en la doble cadena $DC(k)$	35
4.3.	Las dos formas de completar C a una k -poligonización.	36
4.4.	Las “secciones” definidas por $DC(k)$ en la cadena superior de $DC(n)$	37
4.5.	El vértice v_k queda definido de forma única.	38
4.6.	Un conjunto con $\Theta(n^{k-1})$ k -hoyos no convexos.	39
4.7.	Un conjunto $S_{i,j}$ con los puntos seleccionados para un k -hoyo.	40
4.8.	Una ranura pq y las líneas l , l' , y l'' en la malla entera de 9×9	41
4.9.	Una triangulación de un k -hoyo y su árbol binario dual.	43

7.1. Ejemplo de los tiempos que definen $I(s_i, s_j) = [t_a, t_b]$	54
7.2. La gráfica G_R para un conjunto S y el árbol generador obtenido por ESTÁ-CONECTADO ($t_0 = 1$).	56
7.3. Ejemplos de los dos casos de radios críticos.	57
7.4. Ejemplo de los radios críticos que involucran a s_1	58
7.5. Representación visual de las posiciones iniciales y movimientos de la reducción.	61

Capítulo 1

Introducción general

Sin duda alguna, uno de los objetos de estudio preferidos del área de la Geometría Computacional son *los conjuntos finitos de puntos en el plano*. La variedad de problemas que involucran a estos conjuntos van desde gráficas geométricas hasta diagramas de Voronoi, pasando por apareamientos, coloraciones, triangulaciones, número de líneas incidentes, k -conjuntos, etc. [41].

En este trabajo también estudiaremos conjuntos finitos de puntos en el plano, pero desde dos diferentes enfoques: uno que busca estructuras subyacentes en cada conjunto de puntos, particularmente polígonos con vértices en dicho conjunto; y otro que ve a cada punto como nodos móviles de una red inalámbrica, e intenta resolver problemas de conectividad en dicha red. El primer enfoque está más ligado al área de la Combinatoria, en cuanto a asegurar la existencia y contar el número de las estructuras presentes dentro de los conjuntos de puntos. Por otra parte, el segundo enfoque está más relacionado con el área de Algoritmos, en cuanto a qué preguntas de conectividad pueden responderse en tiempo polinomial y cuáles no.

Sea S un conjunto de n puntos en el plano y en posición general. Un k -ágono es un polígono generado por k puntos de S , y un k -hoyo es un k -ágono que no contiene puntos de S en su interior; ver Figura 1.1. En la Parte I de este trabajo daremos cotas superiores e inferiores para el número de k -ágonos y k -hoyos contenidos en S .

Para la Parte II de este trabajo, los puntos de S representarán dispositivos inalámbricos móviles, y cada uno de ellos se desplazará con movimiento rectilíneo uniforme. Para representar este movimiento se utilizarán rectas en el plano, y para los rangos de transmisión de los dispositivos, se utilizarán círculos moviéndose sobre los puntos de S ; ver Figura 1.2. En dicha par-

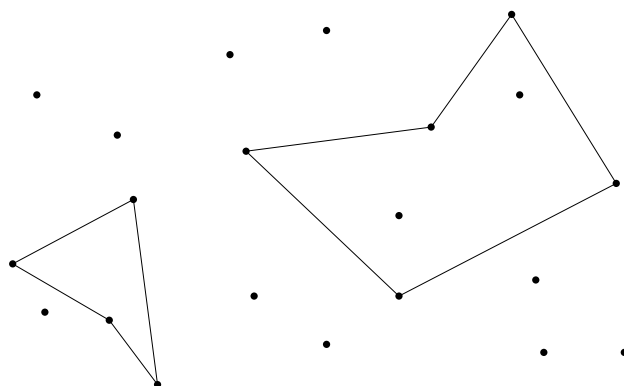


Figura 1.1: Conjunto de puntos conteniendo un 5-ágono y un 4-hoyo.

te estudiaremos problemas relacionados con la operación de *inundación*, e intentaremos reducir al mínimo el costo de energía de esta operación.

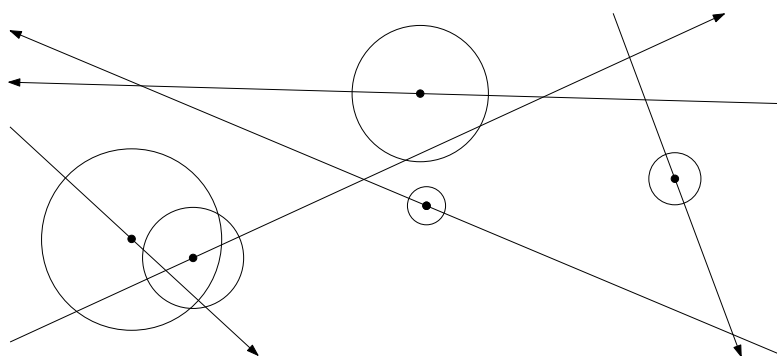


Figura 1.2: Red de dispositivos móviles comunicándose de forma inalámbrica.

Aunque el objeto de estudio sea el mismo, en cada una de las Partes I y II se utilizan los conjuntos de puntos para propósitos diferentes, con lo cual, ambas partes pueden leerse de manera independiente. En la Sección 1.2 se darán definiciones básicas y notación común para todo el trabajo. Es importante mencionar que se presupone que el lector está familiarizado con algunos conceptos básicos de la Geometría Computacional, Análisis de Algoritmos, Combinatoria, y Teoría de las Gráficas; por tanto, algunos de estos conceptos no serán definidos en este trabajo. Se recomienda que ante cualquier duda se consulte bibliografía especializada, como [19, 45] para Geometría Computacional, [17] para Análisis de Algoritmos, y [22] para Teoría de las Gráficas.

1.1. Resumen de Publicaciones

A lo largo de mis estudios de Doctorado tuve la oportunidad de publicar diversos artículos de investigación, sin embargo, debido a la afinidad de los temas tratados, no todas las publicaciones están representadas en este trabajo. A manera de sumario, se presenta a continuación un listado de todas las publicaciones.

El listado se divide en tres categorías: en revista arbitrada, por aparecer, y memorias de congresos. En cada categoría, el listado aparece en orden cronológico inverso y en orden alfabético por autores. Las publicaciones relacionadas con este trabajo aparecen en negritas.

En revista arbitrada

1. C. Bautista-Santiago, M. A. Heredia, C. Huemer, A. Ramírez-Vigueras, C. Seara, y J. Urrutia. *On the number of edges in geometric graphs without empty triangles*. *Graphs and Combinatorics*, Online FirstTM 28 de Septiembre 2012.
2. **J. M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, M. A. Heredia, y J. Urrutia. *Min-energy broadcast in mobile ad hoc networks with restricted motion*. *Journal of Combinatorial Optimization*, 24:413–426, 2012 (Online FirstTM 3 de Mayo 2011).**

Por aparecer

1. J.M. Díaz-Báñez, M. A. Heredia, C. Peláez, J. A. Sellarès, J. Urrutia e I. Ventura. *Convex blocking and partial orders on the plane*. *Computational Geometry: Theory and Applications*. Aceptado salvo correcciones menores.
2. **O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, H. González-Aguilar, T. Hackl, M. A. Heredia, C. Huemer, J. Urrutia, P. Valtr, y B. Vogtenhuber. *4-holes in point sets*. *Computational Geometry: Theory and Applications*, Special Issue on the 27th European Workshop on Computational Geometry. Aceptado.**

Memorias de congresos

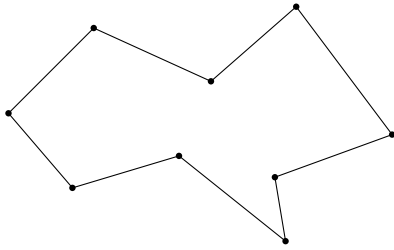
1. J.M. Díaz-Báñez, M. A. Heredia, C. Peláez, J. A. Sellarès, J. Urrutia e I. Ventura. *Convex blocking and partial orders on the plane*. En: Proc. 23th Canadian Conference on Computational Geometry CCCG'11, Toronto, Canadá, 2011.
2. O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, H. González-Aguilar, T. Hackl, M. A. Heredia, C. Huemer, J. Urrutia, P. Valtr, y B. Vogtenhuber. *On k -gons and k -holes in point sets*. En: Proc. 23th Canadian Conference on Computational Geometry CCCG'11, Toronto, Canadá, 2011.
3. J.M. Díaz-Báñez, M. A. Heredia, C. Peláez, J. A. Sellarès, J. Urrutia e I. Ventura. *Convex blocking and partial orders on the plane*. En: Proc. XIV Spanish Meeting on Computational Geometry (EGC11), Alcalá de Henares, España, 2011.
4. O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, H. González-Aguilar, T. Hackl, M. A. Heredia, C. Huemer, J. Urrutia, y B. Vogtenhuber. *4-holes in point sets*. En: Proc. 27th European Workshop on Computational Geometry EuroCG'11, págs. 115–118, Morschach, Suiza, 2011.
5. J.M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, M. A. Heredia y J. Urrutia. *Min-energy Broadcast in Fixed-trajectory Mobile Ad-hoc Networks*. Memorias de los “XIII Encuentros De Geometria Computacional” (EGC09), Zaragoza, España, 2009.

1.2. Preliminares

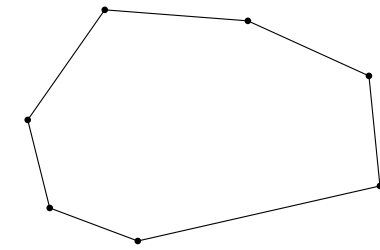
El objeto principal de estudio de este trabajo son los conjuntos finitos de puntos en el plano. Diremos que un conjunto de puntos de este tipo está en *posición general* si no contiene tres puntos colineales. En adelante, cuando se hable de conjuntos de puntos, se supondrá que están en el plano, son finitos y se encuentran en posición general, a menos que se indique explícitamente que no es así.

Dados dos puntos en el plano a y b , denotaremos con $l(a, b)$ a la línea que pasa por a y b , y con ab al segmento de recta que une a a y b .

Un *polígono* P se define entonces como una secuencia ordenada de $n \geq 3$ puntos, p_1, \dots, p_n , llamados vértices de P , junto con los segmentos de línea $\{p_i p_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{p_n p_1\}$, llamados las aristas de P . Decimos que P es *simple* si sus aristas no se intersectan propiamente (i.e., no hay intersecciones en el interior de las aristas), ver Figura 1.3. Un polígono simple divide el plano en dos regiones, una no acotada llamada exterior y otra acotada llamada interior. En general, el término polígono simple denota al polígono junto con su interior.



(a) Polígono simple (no convexo).



(b) Polígono convexo.

Figura 1.3: Ejemplos de polígonos.

Un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ es convexo si, para cualesquiera dos puntos $a, b \in \mathcal{C}$, el segmento ab está totalmente contenido en \mathcal{C} . Tomaremos especial interés en los polígonos convexos, que por definición son también simples; ver Figura 1.3(b).

Sea S un conjunto de n puntos en el plano y en posición general. La *envolvente convexa* o *cierre convexo* de S , denotado por $\text{Conv}(S)$, se puede definir como el polígono convexo P de menor área, tal que todo punto de S es vértice de P o está en su interior, ver Figura 1.4. Diremos que S está en *posición convexa* si todo punto de S es vértice de $\text{Conv}(S)$, y en el caso contrario diremos que se encuentra en *posición no convexa*.

Dado el conjunto S , llamaremos *k-tupla* a todo subconjunto no ordenado de k puntos de S , y llamaremos *k-ágono* a todo polígono simple generado por los puntos de una *k-tupla* (teniendo claramente k lados). De forma similar, un *k-hoyo* es un *k-ágono* vacío, esto es, un *k-ágono* que no contiene en su interior puntos de S . Ver otra vez la Figura 1.1.

Una *poligonización* del conjunto S es un polígono formado por los n puntos de S , o dicho de otra forma, un *n-ágono* de S ; ver Figura 1.5.

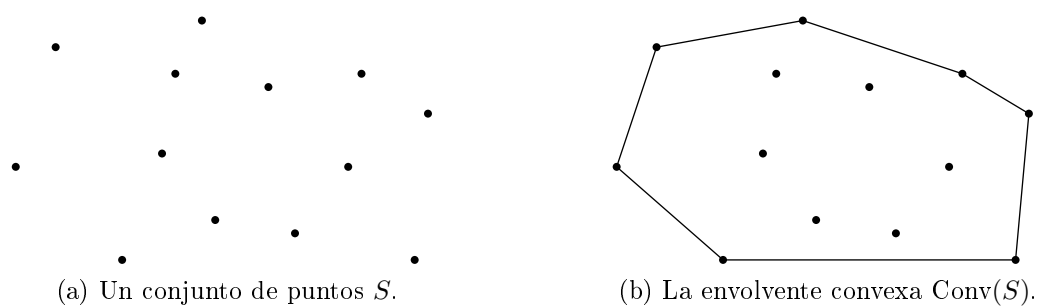


Figura 1.4: La envolvente convexa o cierre convexo de un conjunto de puntos.

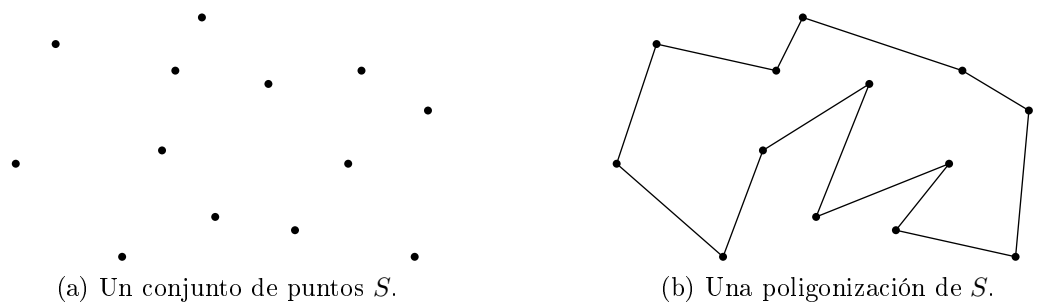


Figura 1.5: Poligonización de un conjunto de n puntos en el plano.

Parte I

Polígonos [vacíos] dentro de conjuntos de puntos

Capítulo 2

Introducción

Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general. Como se definió en la Sección 1.2, un k -ágono es un polígono simple generado por k puntos de S , y un k -hoyo es un k -ágono vacío (sin puntos de S en su interior). Alrededor de estas dos definiciones se han estudiado una gran variedad de problemas combinatorios. En particular, en esta parte del trabajo nos enfocaremos en estudiar los siguientes cuatro problemas clásicos.

1. *¿Será cierto que para toda k existe un entero mínimo $g(k)$, tal que cualquier conjunto de $g(k)$ puntos contiene al menos un k -ágono convexo?* Pregunta fue planteada por Esther Klein en 1933.
2. *¿Cuál es el menor número de k -ágonos convexos determinados por cualquier conjunto de n puntos en el plano?* Generalización del problema anterior propuesta por Erdős y Guy [26] en 1973.
3. *¿Cuál es el mínimo entero $h(k)$, de forma que cualquier conjunto con $h(k)$ puntos en el plano, en posición general, contiene al menos un k -hoyo convexo?* Problema propuesto por Erdős [24] en 1978.
4. *¿Cuál es el mínimo número de k -hoyos convexos $h_k(n)$, determinados por cualquier conjunto de n puntos en el plano?* Generalización del problema anterior planteada por Erdős [25] en 1984.

El enfoque que utilizaremos para estudiar estos problemas será generalizarlos, permitiendo que los k -ágonos y k -hoyos sean también no convexos. Por esta razón, de aquí en adelante se dará el calificativo de *general* a aquel

k -ágono o k -hoyo que, para cuestiones de conteo, no nos interese su tipo (convexo o no convexo).¹

Lo que resta de esta Parte I quedará organizado de la siguiente forma. En la Sección 2.1 de este capítulo presentaremos algunos resultados previos sobre los cuatro problemas mencionados. En el Capítulo 3 se estudiarán dichos problemas para el caso particular de 4-ágonos y 4-hoyos ($k = 4$), mientras que el Capítulo 4 hará lo propio con k -ágonos y k -hoyos para cualquier constante $k \geq 3$. Finalmente, presentaremos las conclusiones correspondientes a esta parte del trabajo en el Capítulo 5.

Es importante mencionar que, aunque los resultados del Capítulo 4 son más generales, no invalidan aquellos presentes en el Capítulo 3, puesto que en este último se utilizan técnicas específicas para el caso $k = 4$.

Los resultados presentados en el Capítulo 3 corresponden con los contenidos en los trabajos [6] y [7], mientras que los resultados del Capítulo 4 corresponden con aquellos en [5].

2.1. Resultados previos

En esta sección presentaremos un poco de historia y resultados previos sobre los cuatro problemas planteados al inicio de este capítulo. También indicaremos explícitamente las cotas obtenidas en este trabajo.

Sobre la pregunta de: *¿Será cierto que para toda k existe un entero mínimo $g(k)$, tal que cualquier conjunto de $g(k)$ puntos contiene al menos un k -ágono convexo?* Ésta fue (parcialmente) respondida en 1935 por Erdős y Szekeres en su ahora clásico artículo [27]. De dicho trabajo se destaca un resultado, que ahora es mejor conocido como el Teorema de Erdős–Szekeres, en el que se establece que $g(k)$ es finito para toda k ; sin embargo no se ha podido determinar su valor exacto para el caso $k \geq 7$.

Klein observó que $g(4) = 5$ (ver Figura 2.1), y por su parte Kalbfleisch *et al.* [38] demostraron que $g(5) = 9$. El caso $k = 6$ fue resuelto de forma más reciente (2006), por Szekeres y Peters [48]; mostrando que $g(6) = 17$, pero utilizando una búsqueda exhaustiva por computadora. Las mejores cotas para el caso $k \geq 7$ son: $2^{k-2} + 1 \leq g(k) \leq \binom{2k-5}{k-2} + 1$. La cota inferior pertenece a los mismísimos Erdős y Szekeres [28] y se conjetura que es justa. Por su parte, la cota superior ha sufrido muchas mejoras con el paso de los años; la

¹Debemos aclarar que, a diferencia de como se maneja en este trabajo, alguna de la literatura relacionada presupone que los k -hoyos son por definición convexos.

cota arriba descrita (la mejor al momento de la escritura) fue obtenida en 2005 por Tóth y Valtr [49]. Recomendamos la lectura de [3] para más detalles sobre los cambios acontecidos en dichas cotas.

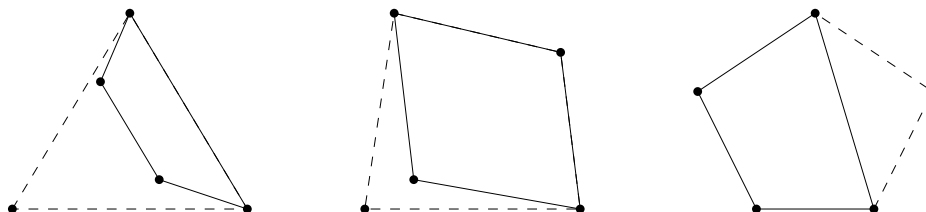


Figura 2.1: Cualesquiera 5 puntos en posición general determinan una cuadrilátero convexo ($g(4) = 5$).

Para el problema de: *¿Cuál es el menor número de k -ágonos convexos determinados por cualquier conjunto S de n puntos en el plano?*, es claro que para $k = 3$ la solución es $\binom{n}{3}$. Sin embargo, para el caso $k > 3$, esta pregunta deja de ser trivial. Por ejemplo, para el caso específico de 4-ágonos convexos, se relaciona íntimamente con el problema de encontrar el número de cruce rectilíneo $\overline{cr}(S)$ de un conjunto S , mismo que ha sido ampliamente estudiado y ha demostrado ser particularmente difícil de resolver, ver [1, 2, 13, 26].

En cuanto a la pregunta de: *¿Cuál es el mínimo entero $h(k)$ de forma que cualquier conjunto con $h(k)$ puntos en el plano, en posición general, contiene al menos un k -hoyo convexo?* Esther Klein observó que cualquier conjunto de 5 puntos determina un 4-hoyo convexo, y Harborth [36] mostró que 10 puntos siempre contienen un 5-hoyo convexo. Sin embargo, en 1983 Horton [37] demostró que existen conjuntos de puntos arbitrariamente grandes que no contienen ningún 7-hoyo convexo (ver Figura 2.2); lo cual también implica que $h(k)$ no existe para $k \geq 7$. Por mucho tiempo la pregunta se mantuvo abierta para los 6-hoyos convexos, hasta que en 2007/08 Nicolás [40] e independientemente Gerken [33] demostraron que cualquier conjunto de puntos suficientemente grande contiene un 6-hoyo convexo; ver también [51].

Finalmente, para la pregunta: *¿Cuál es el mínimo número de k -hoyos convexos $h_k(n)$ determinados por cualquier conjunto de n puntos en el plano?* Sabemos que $h_7(n) = 0$, por la construcción de Horton, lo que implica que $h_k(n) = 0$ para $k \geq 7$. Pero para $k \leq 6$ sólo se tienen cotas superiores e inferiores, o valores exactos para conjuntos muy pequeños de puntos; ver las Tablas 2.1 y 2.2 para las mejores cotas al momento de la escritura.

Todas las cotas superiores en la Tabla 2.2 se deben a Bárány y Valtr [12].



Figura 2.2: Ejemplo de un conjunto de Horton que no contiene 7-hoyos convexos, con $n = 16$.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3-hoyos	1	3	7	13	21	31	43	58	75	94	114~116	136~141	160~169
4-hoyos	-	0	1	3	6	10	15	23	32	42	51~55	61~71	72~90
5-hoyos	-	-	0	0	0	0	0	1	2	3	3~5	3~8	3~12

Tabla 2.1: Número mínimo de k -hoyos convexos para n pequeña [11, 21, 36].

En cuanto a las cotas inferiores para $k \leq 5$, Dehnhardt [21] mostró en su tesis de doctorado que para $n \geq 13$ se tiene: $n^2 - 5n + 10 \leq h_3(n)$, $\binom{n-3}{2} + 6 \leq h_4(n)$, y que $3 \lfloor \frac{n}{12} \rfloor \leq h_5(n)$. Pero como dicha tesis está escrita en idioma Alemán y está poco difundida, se han publicado varias cotas más débiles. Sólo muy recientemente se han podido superar dichos resultados [30, 31, 9, 10, 52, 8], teniendo como las mejores cotas aquellas en [8].

Un resultado relacionado es el de Pinchasi et al. [44], que mostraron que

$$\begin{aligned}
 n^2 - \frac{32}{7}n + \frac{22}{7} &\leq h_3(n) \leq 1.6196n^2 + o(n^2) \\
 \frac{n^2}{2} - \frac{9}{4}n - o(n) &\leq h_4(n) \leq 1.9397n^2 + o(n^2) \\
 \frac{3n}{4} - o(n) &\leq h_5(n) \leq 1.0207n^2 + o(n^2) \\
 \frac{n}{229} - 4 &\leq h_6(n) \leq 0.2006n^2 + o(n^2)
 \end{aligned}$$

Tabla 2.2: Cotas asintóticas para $h_k(n)$ con $k = 3 \dots 6$ obtenidas de [8, 12, 52].

$h_3(n) - \frac{n^2}{2} - O(n) \leq h_4(n)$ y $h_3(n) - n^2 - O(n) \leq h_5(n)$. Con esto, una mejora en el factor n^2 de la cota inferior de $h_3(n)$ implica también mejores cotas inferiores para $h_4(n)$ y $h_5(n)$.

Recomendamos la lectura del compendio [3], si se desea ahondar en la historia de los problemas sobre k -ágonos y k -hoyos.

Para finalizar esta sección, incluimos las Tablas 2.3 y 2.4, que, a forma de resumen, contienen las mejores cotas al momento sobre el número de k -ágonos y k -hoyos, incluyendo aquellas que se presentarán en los Capítulos 3 y 4. Entre otras cosas, se generalizan algunos resultados pertenecientes a nuestros coautores (sobre 5-hoyos) [10]. Las casillas de las tablas contienen tanto cotas inferiores como superiores, para así medir la distancia que separa a ambas cotas.

	convexos	no convexos	generales	
	min	max	min	max
$k=4$	$\overline{\text{cr}}(n)$ $\Theta(n^4)$	$3\binom{n}{4} - 3\overline{\text{cr}}(n)$ $\Theta(n^4)$ [10]	$\binom{n}{4}$ $\Theta(n^4)$ [10]	$3\binom{n}{4} - 2\overline{\text{cr}}(n)$ $\Theta(n^4)$ [10]
$k=5$	$\Theta(n^5)$ [13]	$10\binom{n}{5} - 2(n-4)\overline{\text{cr}}(n)$ $\Theta(n^5)$ [10]	$\binom{n}{5}$ $\Theta(n^5)$ [10]	$\Theta(n^5)$ [Sec. 4.1]
$k \geq 6$	$\Theta(n^k)$ [13]	$\Theta(n^k)$ [Sec. 4.1]	$\binom{n}{k}$ $\Theta(n^k)$ [Sec. 4.1]	$\Theta(n^k)$ [Sec. 4.1]

Tabla 2.3: Cotas sobre el número de k -ágonos convexos, no convexos y generales para n puntos y k constante.

	convexos	no convexos	generales	
	min	max	min	max
$k=4$	$\geq \frac{n^2}{2} - \frac{9}{4}n - o(n)$ [8] $\leq 1.9397n^2 + o(n^2)$ [12]	$\geq \frac{n^3}{2} - \Theta(n^2 \log n)$ [Sec. 3.3] $\leq \frac{n^3}{2} - \Theta(n^2)$ [Sec. 3.3]	$\geq \frac{5}{2}n^2 - \Theta(n)$ [Sec. 3.4] $\leq O(n^{\frac{5}{2}} \log n)$ [Sec. 4.4]	$\binom{n}{4}$ [Sec. 3.2]
$k=5$	$\geq \frac{3n}{4} - o(n)$ [8] $\leq 1.0207n^2 + o(n^2)$ [12]	$\Theta(n^4)$ [Sec. 4.3]	$\geq 17n^2 - O(n)$ [10] $\leq O(n^3 (\log n)^2)$ [Sec. 4.4]	$\binom{n}{5}$ [10]
$k \geq 6$	$k=6: \geq \frac{n}{229} - 4$ [52] $O(n^2)$ [12] $k \geq 7: \emptyset$ [37]	$\Theta(n^{k-1})$ [Sec. 4.3]	$\geq n^2 - O(n)$ [Sec. 4.4] $\leq O(n^{\frac{k+1}{2}} (\log n)^{k-3})$ [Sec. 4.4]	$\binom{n}{k}$ [Sec. 4.2]

Tabla 2.4: Cotas sobre el número de k -hoyos convexos, no convexos y generales para n puntos y k constante.

Capítulo 3

Contando 4-ágonos y 4-hoyos

En este capítulo se estudiarán los problemas presentados en el Capítulo 2, pero para el caso particular $k = 4$. Como se explicó en dicho capítulo, estamos generalizando el alcance de estos problemas al permitir que los 4-ágonos y 4-hoyos sean también no convexos. En particular, se darán cotas inferiores y superiores sobre el número de 4-ágonos y 4-hoyos contenidos en conjuntos de n puntos en el plano; contando de forma independiente los convexos, no convexos y generales.

Un conjunto de cuatro puntos en posición no convexa puede generar hasta tres 4-hoyos, ver Figura 3.1; lo que implica que el número de 4-ágonos y 4-hoyos puede ser tan grande como $\binom{n}{4}$, que es el máximo número de 4-hoyos convexos (con los n puntos en posición convexa). Más aún, el número de k -ágonos y k -hoyos (de cualquiera de los tipos) depende de las características combinatorias del conjunto de n puntos, o dicho de otra forma, depende del *tipo de orden*¹ de dicho conjunto; ver [4, 11, 35].

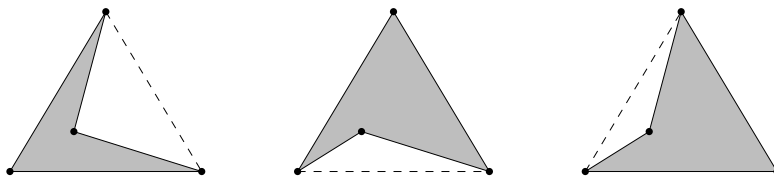


Figura 3.1: Tres 4-hoyos generados por un conjunto de 4 puntos.

En este capítulo, primero contaremos 4-ágonos y 4-hoyos en conjuntos de cardinalidad pequeña, en la Sección 3.1. Dentro de la Sección 3.2 traba-

¹En inglés *order type*.

jaremos en maximizar el número de 4-hoyos (generales), mientras que en la Sección 3.3 maximizaremos el número de 4-hoyos no convexos. Para finalizar, se buscará minimizar el número de 4-hoyos (generales) en la Sección 3.4.

3.1. Conjuntos pequeños

Incluso en conjuntos de puntos con cardinalidad pequeña, determinar el número de 4-ágonos y 4-hoyos no es una tarea sencilla. La Tabla 3.1, que fue parcialmente tomada de [3], muestra el número de 4-ágonos y 4-hoyos para $n = 4, \dots, 11$. Dichos números fueron obtenidos haciendo una revisión exhaustiva por computadora, sobre todos los conjuntos de puntos de las cardinalidades mencionadas, utilizando para ello la base de datos de tipos de órdenes [4, 11]. Se muestran el mínimo número de 4-ágonos y 4-hoyos convexos, el máximo número de 4-ágonos y 4-hoyos no convexos, el mínimo y máximo número de 4-ágonos y 4-hoyos (generales), y el número de 4-tuplas no ordenadas (con fines de comparación).

n	Número de 4-ágonos				Número de 4-hoyos				$\binom{n}{4}$
	convexos min	no convexos max	generales min	generales max	convexos min	no convexos max	generales min	generales max	
4	0	3	1	3	0	3	1	3	1
5	1	12	5	13	1	8	5	9	5
6	3	36	15	39	3	18	15	22	15
7	9	78	35	87	6	36	35	43	35
8	19	153	70	172	10	64	66	77	70
9	36	270	126	306	15	100	102	126	126
10	62	444	210	506	23	150	147	210	210
11	102	684	330	786	32	216	203	330	330

Tabla 3.1: 4-ágonos y 4-hoyos en conjuntos de $n=4, \dots, 11$ puntos.

En la tabla anterior no se incluye el máximo número de 4-ágonos y 4-hoyos convexos, pues trivialmente se alcanza en conjuntos en posición convexa, siendo $\binom{n}{4}$ en total; ni tampoco se incluye el mínimo número de 4-ágonos y 4-hoyos no convexos, pues al tomar conjuntos en posición convexa, éstos generan siempre polígonos convexos. También debemos observar que, la columna del mínimo número de 4-ágonos corresponde exactamente con $\binom{n}{4}$, también en conjuntos en posición convexa. Esto último se debe a que una

4-tupla convexa sólo puede formar un 4-ágono, mientras que una 4-tupla no convexa genera tres (como se vio en la Figura 3.1).

En la Tabla 3.1 podemos ver que, para $n = 4, \dots, 7$, el mínimo número de 4-hoyos generales es $\binom{n}{4}$. Por otro lado, también vemos que para $n = 9, \dots, 11$ el máximo número de 4-hoyos es $\binom{n}{4}$. O sea que, los conjuntos en posición convexa son ejemplos que minimizan los 4-hoyos para $n \leq 7$ y que maximizan para $n = 9, \dots, 11$, al parecer la estructura de los conjuntos extremales cambia.

La Figura 3.2 muestra conjuntos que maximizan el número de 4-hoyos para $n = 4, \dots, 8$. Como se dijo arriba, los resultados obtenidos sugieren que los conjuntos en posición convexa maximizan el número de 4-hoyos para $n \geq 9$. Hecho que en efecto se demostrará en Sección 3.2.

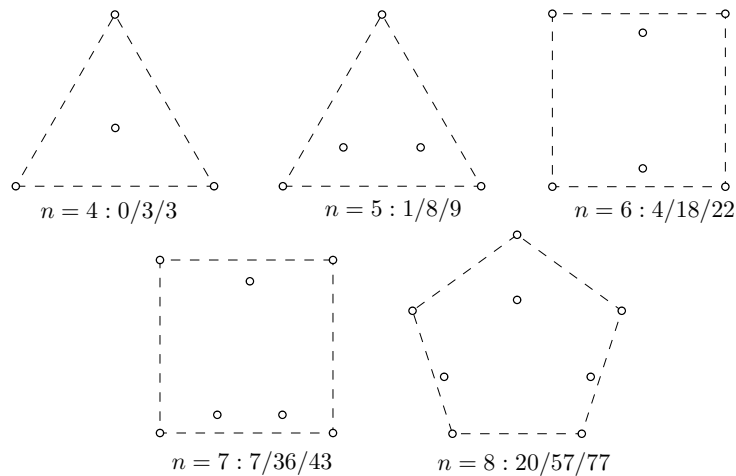


Figura 3.2: Conjuntos de puntos que maximizan el número de 4-hoyos para $n = 4, \dots, 8$. Se muestran también el número de 4-hoyos: convexos / no convexos / generales. Excepto para $n = 7$, los conjuntos son únicos (combinatoriamente hablando).

La Figura 3.3 muestra dos conjuntos extremales de $n = 11$ puntos. Cada conjunto representa un tipo de orden único: el izquierdo aquel que maximiza el número de 4-hoyos no convexos, 216 para ser exactos (y con 51 4-hoyos convexos adicionales); el conjunto de la derecha minimiza el número de 4-hoyos generales, conteniendo 203 4-hoyos, 51 convexos y 203 no convexos.

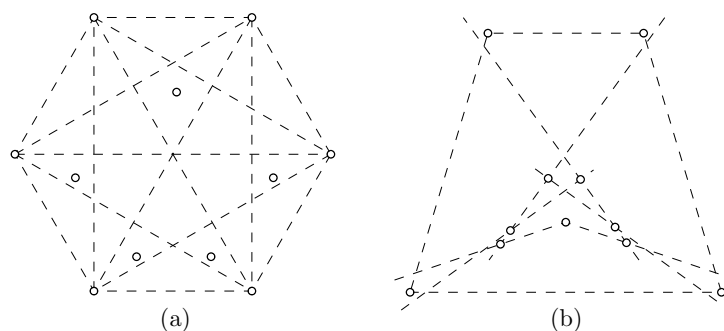


Figura 3.3: Dos conjuntos extremales de $n = 11$ puntos: (a) maximiza el número de 4-hoyos no convexos, y (b) minimiza el número de 4-hoyos generales.

3.2. Maximizando el número de 4-hoyos

En esta sección mostraremos que para n suficientemente grande, el número de 4-hoyos se maximiza en conjuntos convexos, como lo sugieren los resultados para conjuntos pequeños. El siguiente lema es clave para probar este y varios resultados de este trabajo.

Lema 3.1. *Sea S un conjunto de n puntos en el plano y Δ un triángulo no vacío de S . Hay a lo más tres 4-hoyos no convexos generados por los tres vértices de Δ más un punto de S en el interior de Δ .*

Demostración. Sean p_1, p_2 , y p_3 los vértices de Δ . Observemos que cualquier 4-hoyo no convexo debe usar al menos dos aristas de Δ . Entonces tenemos tres opciones para escoger la arista de Δ que no utilizaremos, y por cada opción hay a lo más una manera de completar a un 4-hoyo las dos aristas de Δ que sí seleccionamos, ver Figura 3.4(a).

Supongamos por contradicción que existen dos 4-hoyos diferentes que no utilizan la arista p_2p_3 y que utilizan, respectivamente, los puntos q_1 y q_2 en el interior de Δ . Por definición, q_2 debe estar fuera del 4-hoyo correspondiente a q_1 , o sea dentro del triángulo $p_2q_1p_3$; ver Figura 3.4(b). Pero entonces q_1 debe estar en el interior de uno de los dos triángulos que forman el 4-hoyo correspondiente a q_2 (en $p_1q_2p_2$ o en $p_1q_2p_3$), lo cuál es una contradicción.

Observemos que, si Δ tiene exactamente un punto q en su interior, entonces generará los tres 4-hoyos no convexos. Esta pequeña observación será importante más adelante. \square

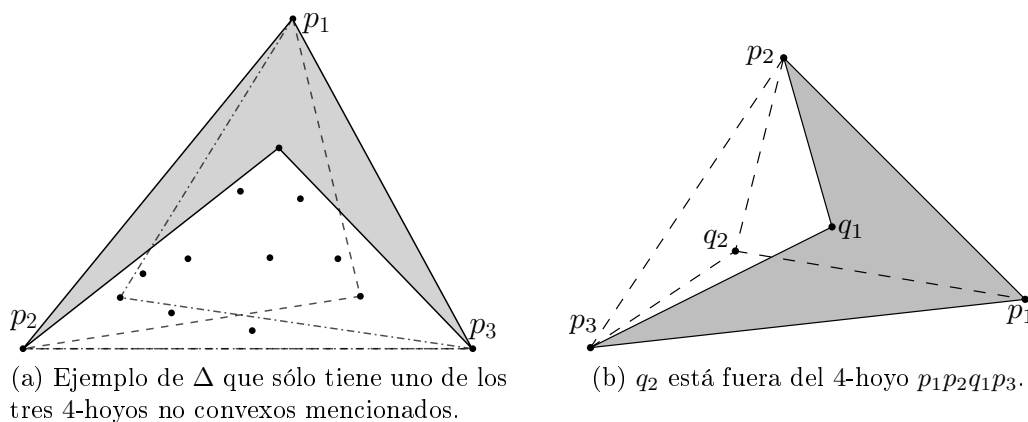


Figura 3.4: Análisis sobre los 4-hoyos no convexos con vértices de Δ .

Teorema 3.2. *Para $n \geq 9$, el número de 4-hoyos (generales) se maximiza en conjuntos de n puntos en posición convexa.*

Demostración. Para esta demostración consideraremos que, toda 4-tupla no convexa será *representada* por el triángulo formado por los tres vértices de su cierre convexo. Por el Lema 3.1, todo triángulo no vacío representa a, a lo más, tres 4-hoyos no convexos, mientras que una 4-tupla convexa tiene a lo más un 4-hoyo.

Sea T el número de triángulos no vacíos de un conjunto de puntos S . Como todo triángulo no vacío induce al menos una 4-tupla no convexa, tenemos

$$\binom{n}{4} - T + 3T = \binom{n}{4} + 2T \quad (3.1)$$

como una primera cota superior de el número de 4-hoyos en S .

Observemos que un triángulo Δ con $k \geq 1$ puntos interiores es contado $k+2$ veces en (3.1), k veces en las $\binom{n}{4}$ 4-tuplas y dos veces más como triángulo no vacío (en $2T$). Para el caso $k > 1$ hemos sobrecontado el número de 4-hoyos no convexos asignados a Δ , en comparación con los tres del Lema 3.1. Más aún, muchos de los 4-ágonos convexos de S podrían no ser 4-hoyos. Por tanto, analizaremos cuántos 4-hoyos sobrecontados podemos reducir de (3.1). Para dicha tarea asignaremos marcadores de sobreconteo a 4-hoyos, a 4-tuplas convexas y a triángulos no vacíos; permitiendo asignar más de un marcador a cada uno de estos objetos.

Tomemos Δ y consideremos todas las 4-tuplas que contienen los tres vértices de Δ y un punto extra p , tenemos dos casos:

Caso 1. p es uno de los $n-k-3$ puntos fuera de Δ . Si la 4-tupla obtenida es convexa le damos un marcador, pues no sería un 4-hoyo. Y si la 4-tupla es convexa no convexa le damos un marcador a el triángulo que la representa, pues al menos uno de los tres 4-hoyos que representa es no vacío.

Caso 2. p está en el interior de Δ . Como dijimos, Δ fue contado $k+2$ veces, pero a lo más tres 4-hoyos son representados por Δ (Lema 3.1). Por tanto, asignamos $k-1$ marcadores a Δ .

Tomando en cuenta ambos casos, hemos distribuido $n-k-3+(k-1) = n-4$ marcadores para Δ . Y al repetir ésto para todos los triángulos no vacíos, obtenemos un total de $(n-4) \cdot T$ marcadores.

- Una 4-tupla convexa no vacía puede haber recibido hasta 4 marcadores, uno por cada uno de sus subtriángulos. Así que, a lo más, tenemos cuatro veces más marcadores que el número de 4-tuplas convexas.

- Un triángulo no vacío Δ con $k \geq 1$ puntos interiores puede haber recibido $4 \cdot (k-1)$ marcadores: debido a su puntos interiores, Δ recibió $k-1$ marcadores del Caso 2; y por cada triángulo no vacío formado por dos vértices de Δ y un punto interior, recibió un marcador del Caso 1. Al menos tres de dichos triángulos internos son vacíos, aquellos generados por una arista de Δ y su punto interior más cercano. Entonces el Caso 1 da a lo más $3 \cdot (k-1)$ marcadores adicionales, dando a lo más un total de $4 \cdot (k-1)$ marcadores para Δ . Como Δ fue contado $k+2$ veces pero representa a lo más más tres 4-hoyos(Lema 3.1), tendremos a lo más $4 \cdot (k-1)$ marcadores repartidos en al menos $(k+2)-3 = k-1$ objetos sobrecontados.

En ambos casos tenemos, a lo más, cuatro veces más marcadores que objetos sobrecontados. Así que podemos restar de la cota superior (3.1) la cuarta parte de los marcadores que distribuimos, es decir $\frac{n-4}{4} \cdot T$. Obteniendo así la nueva cota superior de

$$\binom{n}{4} + 2T - \frac{n-4}{4} \cdot T = \binom{n}{4} - \frac{n-12}{4} \cdot T \quad (3.2)$$

para el número de 4-hoyos.

Para el caso en que $n \geq 12$, la cota superior 3.2 tiene como máximo valor el de $\binom{n}{4}$, mismo que corresponde con el número de 4-hoyos en un conjunto en posición convexa. Desde otro punto de vista, para $n \geq 12$, ese valor máximo se puede tener cuando el número T de triángulos no vacíos es cero, condición que se cumple en un conjuntos en posición convexa. Y junto con los resultados de la Tabla 3.1, para $n = 9, \dots, 11$, se demuestra el teorema. \square

Es importante observar que, en la demostración anterior, el término $\frac{n-12}{4}$. T puede ser cero de dos formas diferentes, con $T = 0$ o con $n = 12$. Lo que implica que, para $n \geq 13$, un conjunto en posición convexa de n puntos tiene más 4-hoyos que cualquier otro conjunto de n puntos. El Teorema 3.2 es justo en cuanto a que dicha propiedad no se cumple para $n < 9$.

3.3. Maximizando el número de 4-hoyos no convexos

En la sección anterior mostramos que para $n \geq 9$, el número de 4-hoyos generales se maximiza en conjuntos en posición convexa. Obviamente esa misma cota se aplica también al máximo número de 4-hoyos convexos, pero si nos interesa maximizar sólo los 4-hoyos no convexos dicha cota no sirve.

En esta sección nos enfocaremos en este último problema, maximizar el número de 4-hoyos no convexos en un conjunto de puntos. Presentaremos una cota superior y otra inferior para dicho número, que como se verá son asintóticamente justas, incluso en el coeficiente del término principal.

Corolario 3.3. *El número de 4-hoyos no convexos de cualquier conjunto de n puntos es a lo más $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^3}{2} - \Theta(n^2)$.*

Demostración. Por el Lema 3.1, cualquier triángulo no vacío genera al o más tres 4-hoyos no convexos, y hay a lo más $\binom{n}{3}$ triángulos de este tipo en un conjunto de n puntos. Por tanto tenemos a lo más

$$3 \cdot \binom{n}{3} = \frac{3n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

□

Ahora mostraremos una familia de conjuntos que tienen un gran número de 4-hoyos no convexos, para comparar qué tan alejado está este número de la cota anterior.

Teorema 3.4. *Para toda $m \geq 1$ existen conjuntos de puntos de tamaño $n = 2^{m+1} - 2$ que contienen $\frac{n^3}{2} - \Theta(n^2 \log n)$ 4-hoyos no convexos.*

Demostración. Consideraremos una familia de conjuntos de puntos presentados en [39]. Para cada $m \geq 1$, el conjunto de puntos \mathcal{X}_m tiene $|\mathcal{X}_m| = n = 2^{m+1} - 2$ puntos y se define recursivamente por capas.

La primera capa $\mathcal{X}_1 := \mathcal{R}_1$ contiene sólo dos puntos. Cada capa adicional \mathcal{R}_i se agrega a $\mathcal{X}_{i-1} := \mathcal{R}_1 \cup \dots \cup \mathcal{R}_{i-1}$ al agregar dos puntos nuevos cerca de cada punto de \mathcal{R}_{i-1} , fuera de la envolvente convexa $\text{Conv}(\mathcal{X}_{i-1})$, de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{X}_i = \mathcal{R}_1 \cup \dots \cup \mathcal{R}_i$ está en posición general,
2. los puntos en \mathcal{R}_i son exactamente los vértices de la envolvente convexa $\text{Conv}(\mathcal{X}_i)$, y
3. todo triángulo determinado por puntos de \mathcal{R}_i contiene exactamente un punto de \mathcal{X}_i en su interior.

En la Figura 3.5 se puede ver un ejemplo de dichos conjuntos, sugerimos revisar [39] si se desea una descripción más detallada de la construcción.

En [39] se demuestra que todo triángulo generado por puntos de \mathcal{X}_m contiene a lo más un punto interior de \mathcal{X}_m ; esto es, todo triángulo no vacío de \mathcal{X}_m contiene exactamente un punto. Recordando la observación en la demostración del Lema 3.1, cada uno de estos triángulos no vacíos generará exactamente tres 4-hoyos.

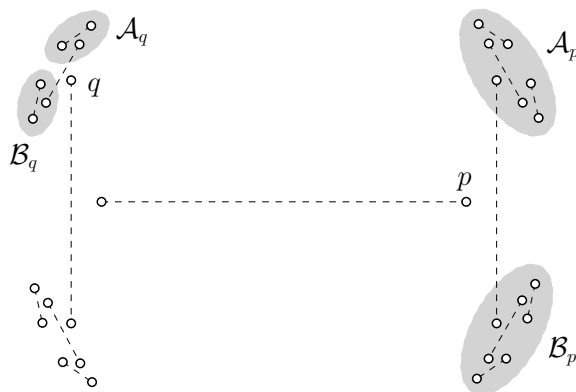


Figura 3.5: Bosquejo del conjunto \mathcal{X}_m para $m = 4$.

Por cada punto del conjunto \mathcal{X}_m , contaremos el número de triángulos que lo contienen en su interior. Primero fijemos uno de los dos puntos de la primera capa \mathcal{R}_1 , digamos p de la Figura 3.5. Cualquier triángulo que contenga p se forma de un punto del conjunto \mathcal{A}_p , un punto de \mathcal{B}_p , y un punto del conjunto restante $\mathcal{C}_p := \mathcal{X}_m \setminus \{\mathcal{A}_p \cup \mathcal{B}_p \cup \{p\}\}$. Diremos que \mathcal{A}_p y \mathcal{B}_p

son los *conjuntos inducidos* por p en \mathcal{X}_m , y que \mathcal{C}_p es el *residuo* (de \mathcal{X}_m) para p . Si tomamos los valores $a_1 := |\mathcal{A}_p| = |\mathcal{B}_p| = \frac{n-2}{4}$ y $c_1 := |\mathcal{C}_p| = n - 2 \cdot a_1 - 1 = \frac{n}{2}$, entonces tenemos que hay $a_1^2 \cdot c_1$ triángulos que contienen a p , y por tanto el número de triángulos que contienen un punto de la capa \mathcal{R}_1 en su interior serían $2 \cdot a_1^2 \cdot c_1 = 2 \cdot \left(\frac{n-2}{4}\right)^2 \cdot \frac{n}{2}$.

Ahora consideremos un punto q de la segunda capa \mathcal{R}_2 . Sus conjuntos inducidos \mathcal{A}_q y \mathcal{B}_q tienen tamaño $a_2 = \frac{n-6}{8}$, y su residuo \mathcal{C}_q tiene tamaño $c_2 = n - 2 \cdot a_2 - 1 = \frac{3n+2}{4}$. Si consideramos $r_2 := |\mathcal{R}_2| = 4$, esto nos da un total de $4 \cdot \left(\frac{n-6}{8}\right)^2 \cdot \frac{3n+2}{4}$ triángulos que contienen un punto de la capa \mathcal{R}_2 .

En general, $r_i = |\mathcal{R}_i| = 2^i$, y el tamaño de los dos conjuntos inducidos para cualquier punto $p_i \in \mathcal{R}_i$ es

$$a_i = \frac{1}{r_{i+1}}(n - |\mathcal{X}_i|) = \frac{n - (2^{i+1} - 2)}{2^{i+1}}.$$

Y con el tamaño del residuo \mathcal{C}_{p_i} de

$$c_i = n - 2 \cdot a_i - 1 = \frac{(2^i - 1)n + 2^i - 2}{2^i},$$

para un total del $r_i \cdot a_i^2 \cdot c_i$ triángulos que contienen un punto de \mathcal{R}_i en su interior.

Observemos que los puntos en \mathcal{R}_m son vértices de $\text{Conv}(\mathcal{X}_m)$ y por tanto no se encuentran en el interior de ningún triángulo. Además cada triángulo no vacío de \mathcal{X}_m nos da tres 4-hoyos no convexos, así que al efectuar la suma de sobre las capas \mathcal{R}_i tenemos

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} r_i \cdot a_i^2 \cdot c_i &= 3 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} 2^i \left(\frac{n - (2^{i+1} - 2)}{2^{i+1}} \right)^2 \frac{(2^i - 1)n + 2^i - 2}{2^i} \\ &= \frac{1}{2}n^3 - 3n^2 \log_2(n+2) + \frac{39}{4}n^2 - 12n \log_2(n+2) \\ &\quad + \frac{41}{2}n - 12 \log_2(n+2) + 12 \end{aligned}$$

como el número total de 4-hoyos no convexos en \mathcal{X}_m . □

3.4. Minimizando el número de 4-hoyos

Como se mencionó en la Sección 2.1, el mínimo número $h_4(n)$ de 4-hoyos convexos está acotado de la siguiente forma: $\frac{n^2}{2} - \frac{9}{4}n - o(n) \leq h_4(n) \leq$

$1.9397n^2 + o(n^2)$. En cuanto al menor número de 4-hoyos no convexos, la cota inferior es trivialmente cero. En esta sección intentaremos minimizar el número de 4-hoyos en general, tomando tanto convexos como no convexos, dando una cota inferior para dicho número.

Haciendo una revisión sobre todos los tipos de órdenes de ocho puntos hemos obtenido la siguiente observación para 4-hoyos generales (haciendo uso de la base de datos [11, 4]).

Observación 3.5. *Dados S un conjunto de $n = 8$ puntos en el plano y en posición general, y dos puntos cualquiera $p_1, p_2 \in S$. El conjunto S contiene al menos cinco 4-hoyos que tienen a p_1 y p_2 entre sus vértices.*

En términos generales, esta cota es lo mejor posible. Por un lado, tomemos cualquier conjunto S con $n \geq 8$ puntos y dos puntos $p_1, p_2 \in S$. Entonces p_1 y p_2 junto con los seis puntos de $S \setminus \{p_1, p_2\}$ más cercanos al segmento $p_1 p_2$ forman un conjunto S' de ocho puntos. Claramente, el cierre convexo $\text{Conv}(S')$ no contiene puntos de $S \setminus S'$. Por la Observación 3.5, S' contiene al menos cinco 4-hoyos generales con p_1 y p_2 entre sus vértices, y por tanto S también los contiene.

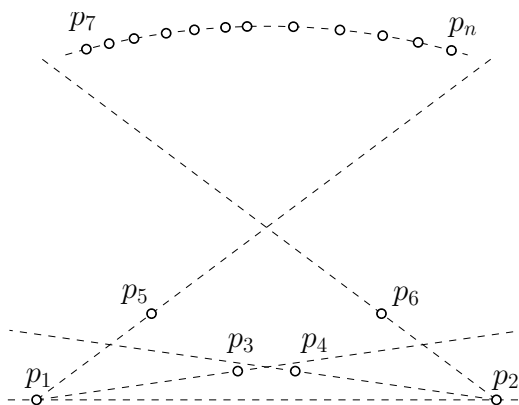


Figura 3.6: Conjunto que contiene sólo cinco 4-hoyos que tienen a p_1 y a p_2 como vértices (uno convexo y cuatro no convexos).

Por otro lado, existen conjuntos arbitrariamente grandes S en los cuales hay dos puntos $p_1, p_2 \in S$ que sólo pertenecen a, a lo más, cinco 4-hoyos. Por ejemplo, tomemos el conjunto mostrado en la Figura 3.6 y consideremos los 4-hoyos que tienen a p_1 y p_2 entre sus vértices. Observemos que todo triángulo $p_1 p_2 p_k$, con $7 \leq k \leq n$, debe contener a p_3, \dots, p_6 ; entonces, siguiendo la demostración del Lema 3.1, nos damos cuenta que no puede formarse un

4-hoyo que contenga las aristas p_1p_k y p_kp_2 . Así que, el conjunto de vértices de cualquier 4-hoyo, que tenga a p_1 y p_2 como vértices, debe ser un subconjunto de $\{p_1, \dots, p_6\}$. Pero este último conjunto sólo contiene cinco de esos 4-hoyos, así que la Observación 3.5 también es justa en ese sentido, para $n > 8$.

Utilizando la Observación 3.5, podemos obtener una cota inferior para el número de 4-hoyos generales. Observemos que hay conjuntos de puntos que contienen menos de $1.94n^2$ 4-hoyos convexos, mientras que el siguiente resultado asegura que todo conjunto de puntos contiene al menos $2.5n^2 - \Theta(n)$ 4-hoyos generales.

Teorema 3.6. *Sea S un conjunto de $n \geq 8$ puntos en el plano y en posición general. Entonces S contiene al menos $\frac{5}{2}n^2 - \Theta(n)$ 4-hoyos.*

Demostración. Tomemos los puntos de S ordenados con respecto al eje x , $S = \{p_1, \dots, p_n\}$, y los subconjuntos $S_{i,j} = \{p_i, \dots, p_j\}$. El número de conjuntos $S_{i,j}$ de tamaño al menos 8 es

$$\sum_{i=1}^{n-7} \sum_{j=i+7}^n 1 = \sum_{i=1}^{n-7} (n - i - 6) = \frac{n^2}{2} - \frac{13}{2}n + 21.$$

Por la Observación 3.5, cada conjunto $S_{i,j}$ (que contenga al menos 8 puntos) tiene al menos cinco 4-hoyos que tienen a p_i y p_j entre sus vértices. Más aún, p_i y p_j deben ser los puntos más a la izquierda y más a la derecha de esos cinco 4-hoyos, respectivamente; ver Figura 3.7. Esto implica que cualquier 4-hoyos de S sólo puede ser contado en a lo más un conjunto $S_{i,j}$, lo que nos da la cota inferior de $\frac{5}{2}n^2 - \Theta(n)$ para el número de 4-hoyos en S . \square

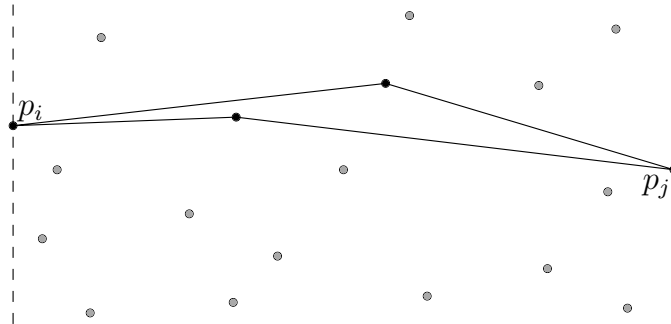


Figura 3.7: Un 4-hoyo de $S_{i,j}$ con p_i y p_j entre sus vértices, para $|S_{i,j}| \geq 8$.

El mismo principio de la prueba anterior será utilizado en la Sección 4.4, para obtener una cota inferior de $\Omega(n^2)$ para el número de k -hoyos generales (para toda $c < 1$ y $3 \leq k \leq c \cdot n$). El problema de esta generalización es que la cota sólo es asintótica, y no brinda constantes tan específicas como el factor de $\frac{5}{2}$ que muestra el Teorema 3.6.

Capítulo 4

Contando k -ágonos y k -hoyos

En este capítulo se estudiarán los problemas presentados en el Capítulo 2, pero para cualquier constante $k \geq 3$. Como se explicó en dicho capítulo, estamos generalizando el alcance de estos problemas al permitir que los k -ágonos y k -hoyos sean también no convexos. En concreto, se darán cotas inferiores y superiores sobre el número de k -ágonos y k -hoyos contenidos en conjuntos de n puntos en el plano; tanto de tipo convexo, como no convexos y generales. Debemos mencionar que, como las cotas de este capítulo son más generales que las del Capítulo 3, también son un poco más débiles para el caso particular de $k = 4$.

Un conjunto de k puntos en posición convexa genera obviamente sólo un k -hoyo. En contraste, un conjunto de n puntos puede admitir una cantidad exponencial de ciclos generadores (poligonizaciones) [23, 32, 47], lo que implica que el número de k -ágonos y k -hoyos (generales) pudiera ser tan grande como $\binom{n}{k}$, y además hace que los problemas estudiados constituyan un reto más grande de lo que parecería a primera vista.

La organización de este capítulo será como a continuación se indica. En la Sección 4.1 damos cotas asintóticas sobre el número de k -ágonos no convexos y generales. La Sección 4.2 está enfocada a los k -hoyos generales, probando que su número se maximiza en conjuntos en posición convexa, si k es suficientemente pequeña; sin embargo también demostramos que conforme k crece esta situación no se mantiene. En la Sección 4.3 se da una cota justa sobre el máximo número de k -hoyos no convexos, mientras que en la Sección 4.4 se dan cotas sobre el mínimo número de k -hoyos generales.

4.1. k -ágonos generales

4.1.1. k -ágonos y el número de cruce rectilíneo

Sea S un conjunto de n puntos. Para valores pequeños de k , el número de k -ágonos no convexos de S puede ser expresado en términos del número de cruce rectilíneo de S , denotado por $\overline{\text{cr}}(S)$. Donde $\overline{\text{cr}}(S)$ se define como el número de intersecciones propias (i.e., intersecciones en el interior de las aristas) en el dibujo de la gráfica completa sobre S , utilizando segmentos de recta como aristas. Y donde $\overline{\text{cr}}(n)$ denota a el mínimo número de cruce rectilíneo entre todos los conjuntos de cardinalidad n .

El problema de determinar $\overline{\text{cr}}(n)$ ha sido ampliamente estudiado; ver por ejemplo [13, 26] como compendios generales del problema, y [2] para consultar distintas cotas para conjuntos pequeños de puntos. A grandes rasgos se tiene que $\overline{\text{cr}}(n) = c_4 \binom{n}{4} = \Theta(n^4)$, donde c_4 es una constante en el rango $0.379972 \leq c_4 \leq 0.380488$. Las mejores cotas para c_4 pertenecen en estos momentos a Ábrego *et al.* [1].

Es fácil ver que el número de 4-ágonos convexos en S es igual a $\overline{\text{cr}}(S)$ y que se minimiza para los conjuntos que alcanzan $\overline{\text{cr}}(n)$. Más aún, como cuatro puntos en posición no convexa generan tres 4-ágonos no convexos, tenemos a lo más $3 \binom{n}{4} - 3 \overline{\text{cr}}(n) \approx 1.86 \binom{n}{4}$ no convexos y a lo más $3 \binom{n}{4} - 2 \overline{\text{cr}}(n) \approx 2.24 \binom{n}{4}$ 4-ágonos generales. Estas cotas son justas para conjuntos de puntos que minimizan el número de cruce rectilíneo.

Una relación similar ha sido obtenida para el número de de 5-ágonos no convexos en [10]: cualquier conjunto de n puntos contiene a lo más $10 \binom{n}{5} - 2(n-4) \overline{\text{cr}}(n) \approx 6.2 \binom{n}{5}$ 5-ágonos no convexos. También siendo justas para conjuntos de puntos que minimizan el número de cruce rectilíneo. Se debe resaltar que el máximo número de 4-ágonos y 5-ágonos no convexos supera a el máximo número de sus contrapartes convexas.

Para el número de 5-ágonos generales no encontramos una relación con el $\overline{\text{cr}}(n)$, de entrada para $n = 6$ tenemos conjuntos de puntos cuyo número de cruces difiere de manera importante del número de 5-ágonos. De forma similar ocurre para $k \geq 6$, ninguno de los tres tipos de k -ágonos (convexos, no convexos, y generales) en un conjunto S puede ser expresado en términos de $\overline{\text{cr}}(S)$. Aún así, podemos usar el número de cruce rectilíneo para acotar dichos números. De aquí en adelante tomaremos $g_k^t(S)$ como el número de k -ágonos de *tipo* t (convexo, no convexo o generales) en un conjunto de puntos S .

Proposición 4.1. *Sea $k \geq 4$, y sean c_1 , c_2 , y x constantes fijas arbitrarias de forma que la Desigualdad (4.1) se cumple para todos los conjuntos S' de cardinalidad k .*

$$c_1 \leq g_k^t(S') + x \cdot \overline{\text{cr}}(S') \leq c_2 \quad (4.1)$$

Entonces para todo conjunto S con $|S| \geq k$, se cumplen las siguientes cotas para el número $g_k^t(S)$ de k -ágonos tipo t en S .

$$g_k^t(S) \geq c_1 \cdot \binom{n}{k} - x \cdot \binom{n-4}{k-4} \cdot \overline{\text{cr}}(S) \quad (4.2)$$

$$g_k^t(S) \leq c_2 \cdot \binom{n}{k} - x \cdot \binom{n-4}{k-4} \cdot \overline{\text{cr}}(S) \quad (4.3)$$

Demostración. Dado un conjunto S con n puntos, considera sus $\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamaño k , $\{S_i \subseteq S : |S_i| = k\}$. Entonces se cumple las siguientes ecuaciones.

$$\sum_i \overline{\text{cr}}(S_i) = \binom{n-4}{k-4} \cdot \overline{\text{cr}}(S) \quad (4.4)$$

$$\sum_i g_k^t(S_i) = g_k^t(S) \quad (4.5)$$

Usando la primera parte de la Desigualdad (4.1) podemos transformar la Ecuación (4.5) en la cota inferior

$$\begin{aligned} g_k^t(S) &= \sum_i g_k^t(S_i) \\ &\geq \sum_i (c_1 - x \cdot \overline{\text{cr}}(S_i)) \\ &= c_1 \cdot \binom{n}{k} - x \cdot \sum_i \overline{\text{cr}}(S_i) \end{aligned}$$

la cual, al aplicar (4.4), nos da la cota deseada (4.2). De forma análoga, obtenemos (4.3) al combinar la segunda parte de la Desigualdad (4.1) con las ecuaciones (4.4) y (4.5). \square

Si x fuera negativo en la Desigualdad (4.2), entonces el número de cruce rectilíneo $\overline{\text{cr}}(S)$ se suma a la cota inferior. Así que podemos reemplazarla por el mínimo sobre todos los conjuntos de puntos de tamaño n , i.e. $\overline{\text{cr}}(n)$, y al hacerlo obtenemos una cota inferior independiente del conjunto S .

Corolario 4.2. *Supongamos que para algunas constantes arbitrarias $x \leq 0$ y c_1 , y para todo conjunto S' con $|S'| = k$, se cumple la siguiente desigualdad.*

$$c_1 \leq g_k^t(S) + x \cdot \overline{\text{cr}}(S)$$

Entonces para todo conjunto S con $|S| \geq k$, se tiene la siguiente cota inferior para el número $g_k^t(S)$ de k -ágonos tipo t en S .

$$g_k^t(S) \geq c_1 \cdot \binom{n}{k} - x \cdot \binom{n-4}{k-4} \cdot c_4 \binom{n}{4} = \left(c_1 - x \cdot c_4 \cdot \binom{k}{4} \right) \binom{n}{k} \quad (4.6)$$

De la misma forma, si x es positivo podemos generalizar la Desigualdad (4.3) a una cota superior general.

Corolario 4.3. *Supongamos que para algunas constantes arbitrarias $x \geq 0$ y c_2 , y para todo conjunto S' con $|S'| = k$, se cumple la siguiente desigualdad.*

$$c_2 \geq g_k^t(S) + x \cdot \overline{\text{cr}}(S)$$

Entonces para todo conjunto S con $|S| \geq k$, se tiene la siguiente cota superior para el número $g_k^t(S)$ de k -ágonos tipo t en S .

$$g_k^t(S) \leq \left(c_2 - x \cdot c_4 \cdot \binom{k}{4} \right) \binom{n}{k} \quad (4.7)$$

En cada una de las cotas de la Proposición 4.1, una de las dos constantes c_1 o c_2 no es usada. La optimización de ambas cotas puede hacerse de forma independiente, considerando por ejemplo los pares (c_1, x) y (c_2, x) de forma aislada, con la posibilidad de encontrar diferentes valores óptimos de x . Sin embargo, si se optimizaran los tres valores c_1 , c_2 y x de forma simultánea se obtendrían valores más fáciles de comparar. A continuación optimizaremos las cotas de las dos formas mencionadas. Por un lado, intentamos minimizar la diferencia entre c_1 y c_2 , para cerrar lo más posible los rangos en los que $g_k^t(S)$ se puede mover en términos de $\overline{\text{cr}}(S)$. Por otro lado, optimizamos (c_1, x) y (c_2, x) de forma independiente, para tener cotas generales (independientes del número de cruce de un conjunto dado) obtenidas al aplicar los Corolarios 4.2 y 4.3.

Es importante observar que, en lo que a las cotas generales se refiere, las cotas inferiores sólo tienen sentido para el caso de k -ágonos convexos, ya que el número de k -ágonos generales y no convexos claramente se minimiza

en conjuntos en posición convexa. De forma similar ocurre con las cotas superiores, ya que sólo interesan las de k -ágonos no convexos y generales, el máximo número de k -ágonos es $\binom{n}{k}$ y es alcanzado también por conjuntos en posición convexa.

Recordemos que el número de k -ágonos (no importando el tipo) en un conjunto de puntos S depende sólo de las propiedades combinatorias de dicho conjunto, o dicho de otra forma, del tipo de orden $OT(S)$ propio de S . De esta forma, hemos calculado los pares $(g_k^t(OT), \overline{cr}(OT))$ para todos los posibles tipos de órdenes OT de k puntos, obteniendo así todos los posibles pares $(g_k^t(S), \overline{cr}(S))$ para cualquier conjunto de puntos S con $|S| = k$. Para dichos cálculos se ha utilizado la base de datos de tipos de órdenes [4, 11], que contiene una lista completa de tipos de órdenes para conjuntos de hasta 11 puntos. Con esto, se han optimizado los valores c_1 , c_2 , y x que cumplen la Desigualdad (4.1). Las Tablas 4.1 y 4.2 resumen las relaciones obtenidas. Observemos que se pueden obtener cotas sobre el número de k -ágonos de forma trivial, contando por cada k -tupla el máximo teórico de k -ágonos contenidos en ella. Como el número máximo de k -ágonos generales y no convexos en una k -tupla son 8, 29 y 92 para $k \in \{5, 6, 7\}$ respectivamente, todas las cotas de la Tabla 4.2 mejoran estas cotas triviales.

$$\begin{array}{rcl}
-0.75\binom{n}{5} + 0.25 \cdot (n-4) \cdot \overline{cr}(S) \leq g_5^{conv}(S) & \leq & -0.25\binom{n}{5} + 0.25 \cdot (n-4) \cdot \overline{cr}(S) \\
& & g_5^{no-conv}(S) = 10\binom{n}{5} - 2 \cdot (n-4) \cdot \overline{cr}(S) \\
9.25\binom{n}{6} - 1.75 \cdot (n-4) \cdot \overline{cr}(S) \leq g_6^{gen}(S) & \leq & 9.75\binom{n}{6} - 1.75 \cdot (n-4) \cdot \overline{cr}(S) \\
-\binom{n}{6} + 0.08\dot{3}\binom{n-4}{2} \cdot \overline{cr}(S) \leq g_6^{conv}(S) & \leq & -0.25\binom{n}{6} + 0.08\dot{3}\binom{n-4}{2} \cdot \overline{cr}(S) \\
29\frac{4}{9}\binom{n}{6} - \frac{22}{9}\binom{n-4}{2} \cdot \overline{cr}(S) \leq g_6^{no-conv}(S) & \leq & 36\frac{6}{9}\binom{n}{6} - \frac{22}{9}\binom{n-4}{2} \cdot \overline{cr}(S) \\
28\frac{1}{3}\binom{n}{6} - \frac{7}{3}\binom{n-4}{2} \cdot \overline{cr}(S) \leq g_6^{gen}(S) & \leq & 36\binom{n}{6} - \frac{7}{3}\binom{n-4}{2} \cdot \overline{cr}(S) \\
-1.1923076\binom{n}{7} + 0.03884615\binom{n-4}{3} \cdot \overline{cr}(S) \leq g_7^{conv}(S) & \leq & -0.3461538\binom{n}{7} + 0.03884615\binom{n-4}{3} \cdot \overline{cr}(S) \\
86.230769\binom{n}{7} - 3.538461\binom{n-4}{3} \cdot \overline{cr}(S) \leq g_7^{no-conv}(S) & \leq & 123.846153\binom{n}{7} - 3.538461\binom{n-4}{3} \cdot \overline{cr}(S) \\
85.5\binom{n}{7} - 3.5\binom{n-4}{3} \cdot \overline{cr}(S) \leq g_7^{gen}(S) & \leq & 123.5\binom{n}{7} - 3.5\binom{n-4}{3} \cdot \overline{cr}(S)
\end{array}$$

Tabla 4.1: Acotando el número de k -ágonos en un conjunto S de n puntos, por medio de su número de cruce $\overline{cr}(S)$.

4.1.2. k -ágonos y poligonizaciones

Las poligonizaciones, también llamadas ciclos generadores, pueden ser vistas como k -ágonos maximales en tamaño (i.e., $k = n$). García *et al.* [32]

$g_5^{no-conv}(S)$	\leq	$(10 - 10 \cdot c_4) \binom{n}{5} \approx 6.20 \binom{n}{5}$
$g_5^{gen}(S)$	\leq	$(9.75 - 8.75 \cdot c_4) \binom{n}{5} \approx 6.43 \binom{n}{5}$
$g_6^{no-conv}(S), g_6^{gen}(S)$	\leq	$(36 - 35 \cdot c_4) \binom{n}{6} \approx 22.7 \binom{n}{6}$
$g_7^{no-conv}(S)$	\leq	$(123.\overline{846153} - 123.\overline{846153} \cdot c_4) \binom{n}{7} \approx 75.64 \binom{n}{7}$
$g_7^{gen}(S)$	\leq	$(123.5 - 122.5 \cdot c_4) \binom{n}{7} \approx 76.95 \binom{n}{7}$

Tabla 4.2: Acotando el número de k -ágonos en un conjunto S de n puntos, por medio del mínimo número de cruce $\overline{cr}(n)$.

mostraron un conjunto de puntos que induce $\Omega(4.64^n)$ ciclos generadores, la llamada doble cadena $DC(n)$, misma que al momento de la escritura contiene la mayor cantidad de éstos; ver Figura 4.1.

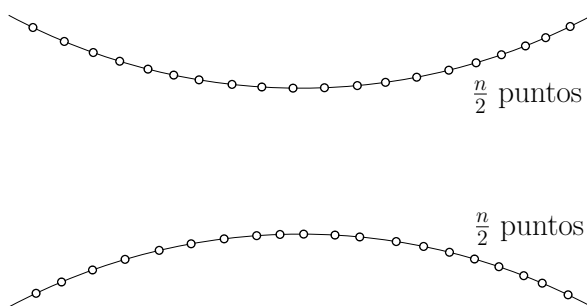


Figura 4.1: La doble cadena $DC(n)$.

Por otro lado, la cota superior sobre el número de ciclos generadores en cualquier conjunto de n puntos ha mejorado en los últimos años, con cotas de $O(70.21^n)$ [47] y $O(68.664^n)$ [23] (dejando de lado los factores polinomiales). El mínimo se alcanza en conjuntos de puntos en posición convexa, que tienen exactamente un ciclo generador. En lo que respecta al número de k -ágonos generales, lo anterior implica una cota inferior de $1 \cdot \binom{n}{k}$ y una cota superior de $O(68.664^k \cdot \binom{n}{k})$. Tomando k como constante obtenemos $\Theta(n^k)$. Por otro lado, la doble cadena nos da $\Omega(n^k)$ k -ágonos no convexos, con $k \geq 4$ constante. Para ver esto, escojamos un vértice de la cadena superior de $DC(n)$, $k-1 \geq 3$ vértices de la cadena inferior y los conectamos formando un polígono simple no convexo. Con esto tenemos al menos $\frac{n}{2} \binom{n/2}{k-1} = \Omega(n^k)$ k -ágonos no convexos. Como asintóticamente la cota inferior sobre el número máximo de k -ágonos no convexos coincide con la cota superior para el número máximo de k -ágonos generales, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.4. *Sea S un conjunto de n puntos en el plano en posición general, y $k \geq 3$ una constante. Entonces el máximo número de k -ágonos no convexos en S y el máximo número de k -ágonos generales son ambos $\Theta(n^k)$.*

4.2. Maximizando el número de k -hoyos

En el Capítulo 3 de este trabajo (y también en [6, 7]) se muestra que el número de 4-hoyos se maximiza en conjuntos de puntos en posición convexa, si n es suficientemente grande. También se conjeturó que esta propiedad se mantiene para cualquier constante $k \geq 4$. El siguiente teorema prueba favorablemente esa conjetura.

Teorema 4.5. *Para toda $k \geq 4$ y $n \geq 2(k-1)!\binom{k}{4}+k-1$, el número de k -hoyos (generales) se maximiza en conjuntos de n puntos en posición convexa.*

Demostración. Todo k -hoyo no convexo tiene como conjunto de vértices una k -tupla no convexa, y toda k -tupla no convexa tiene al menos un triángulo formado por tres puntos extremos (puntos del cierre convexo de la k -tupla) que contiene puntos de la k -tupla en su interior. Llamemos Δ a dicho triángulo. Podemos contar el número de k -hoyos no convexos que tienen a los vértices de Δ como puntos extremos. Observemos que cualquiera de esos k -hoyos se puede reducir a un $(k-1)$ -ágono no vacío (y no necesariamente simple) al remover un vértice no convexo (reflex) de su frontera.

Denotemos con \mathcal{M} al conjunto de los $(k-1)$ -ágonos no vacíos antes mencionados. La cardinalidad $|\mathcal{M}|$ puede ser acotada superiormente por el número de $(k-1)$ -ágonos que tienen los tres vértices de Δ en su frontera, que son $\frac{(k-2)!}{2}\binom{n-3}{k-4}$. Es importante observar que estos últimos pueden ser no necesariamente simples o no vacíos.

Todo $(k-1)$ -ágono en \mathcal{M} puede completarse a un k -hoyo no convexo (simple) en a lo más $k-1$ maneras, al agregar un vértice no convexo. Así que, el número de k -hoyos que tienen los tres vértices de Δ en su cierre convexo está acotado por arriba por

$$(k-1)\frac{(k-2)!}{2}\binom{n-3}{k-4} = \frac{(k-1)!}{2}\binom{n-3}{k-4}.$$

En lo que respecta a k -hoyos convexos, observemos que toda k -tupla tiene a lo más un k -hoyo convexo. Denotemos con N a el número de k -tuplas que

no forman un k -hoyo convexo, y con T el número de triángulos no vacíos. Entonces la Ecuación (4.8) es una primera cota superior sobre el número de k -hoyos generales en un conjunto de puntos.

$$\binom{n}{k} - N + \left(\frac{(k-1)!}{2} \binom{n-3}{k-4} \right) \cdot T \quad (4.8)$$

Para obtener una mejor cota que (4.8), debemos encontrar una buena cota inferior para N . Consideremos otra vez el triángulo no vacío Δ . Al ser Δ no vacío, ninguna de las $\binom{n-3}{k-3}$ k -tuplas que contienen los tres vértices de Δ forma un k -hoyo convexo; y cada una de esas k -tuplas contiene $\binom{k}{3}$ triángulos que podrían ser no vacíos. Entonces tenemos $T \cdot \binom{n-3}{k-3} / \binom{k}{3}$ como cota inferior para N , y por tanto (4.9) como cota superior para el número de k -hoyos (generales).

$$\binom{n}{k} + \left(\frac{(k-1)!}{2} \binom{n-3}{k-4} - \frac{\binom{n-3}{k-3}}{\binom{k}{3}} \right) \cdot T \quad (4.9)$$

Para $n \geq 2(k-1)\binom{k}{4} + k - 1$ esto es a lo más $\binom{n}{k}$, que es el número de k -hoyos contenidos en un conjunto de n puntos en posición convexa. \square

El teorema anterior plantea que la convexidad maximiza el número de k -hoyos para $k = O(\frac{\log n}{\log \log n})$ y n suficientemente grande. Aún más, de la prueba podemos concluir que cualquier triángulo no vacío reduce del número de k -hoyos. De esto se sigue que, para $k = O(\frac{\log n}{\log \log n})$ y n suficientemente grande, el máximo número de k -hoyos convexos es estrictamente mayor que el máximo número de k -hoyos no convexos; cosa que veremos en la siguiente sección.

En el otro extremo, para $k \approx n$ dicha afirmación no es cierta: Como mencionamos al principio de este capítulo, un conjunto de k puntos genera a lo más un k -ágono convexo, pero puede tener una cantidad exponencial de k -ágonos no convexos diferentes. Esto nos lleva a la siguiente pregunta, para cuáles valores de k la situación cambia. El siguiente teorema plantea que para toda $k \geq c \cdot n$ y alguna $0 < c < 1$, el conjunto convexo no maximiza el número de k -hoyos.

Teorema 4.6. *El número de k -hoyos en la doble cadena $DC(n)$ es al menos*

$$\binom{\frac{n-4}{2}}{\frac{n-k}{2}} \cdot \frac{n-k+2}{2} \cdot \Omega(4.64^k).$$

Demostración. Como se vio en la Sección 4.1, García *et al.* [32] mostraron que la doble cadena de n puntos, $DC(n)$, acepta $\Omega(4.64^n)$ poligonizaciones. Para estimar el número de k -hoyos de $DC(n)$ utilizaremos este resultado, pero restringiéndolo a una doble cadena de k puntos. Dado $DC(n)$, seleccionaremos un subconjunto de vértices que forme una doble cadena $DC(k)$ ($k/2$ puntos de cada cadena de $DC(n)$), misma que generará $\Omega(4.64^k)$ k -poligonizaciones diferentes. Nos interesa contar cuántas de estas k -poligonizaciones están vacías, es decir, cuántas son k -hoyos de $DC(n)$.

El la prueba de García *et al.* se cuentan todos los caminos que empiezan en el primer vértice de la cadena superior y que terminan en el último vértice de la cadena inferior. Además, agregan un punto adicional q antes de el primer vértice de la cadena inferior, y con él completan dichos caminos a poligonizaciones. Nosotros modificaremos ligeramente este principio, etiquetando de izquierda a derecha los vértices de $DC(k)$ como $\{p_1, p_2, \dots, p_{\frac{k}{2}-1}, p\}$ y $\{q, q_1, q_2, \dots, q_{\frac{k}{2}-1}\}$ para las cadenas superior e inferior respectivamente. Esta etiquetación se hace para que cada camino C que tomemos empiece en p_1 y termine en $q_{\frac{k}{2}-1}$, pero sin incluir a p ni q ; ver Figura 4.2.

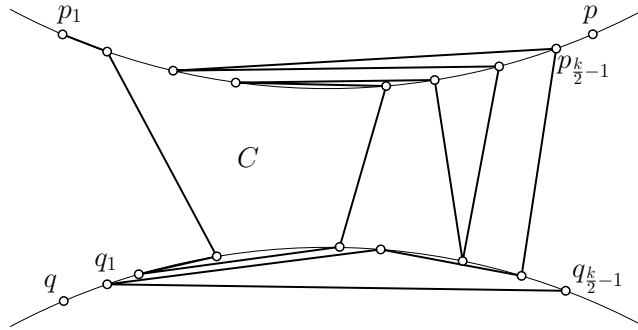


Figura 4.2: Un camino C en la doble cadena $DC(k)$, utilizando todos los vértices excepto p y q .

De esta forma, completamos cada C a una k -poligonización en una de las dos formas siguientes:

- Extendemos C a un nuevo camino C' , insertando q en C después de q_1 , y luego usamos p para completar C' a una poligonización P_p ;
- o extendemos C a C' , insertando p en C después de $p_{\frac{k}{2}-1}$, y luego usamos q para completar C' a una poligonización P_q ; ver la Figura 4.3.

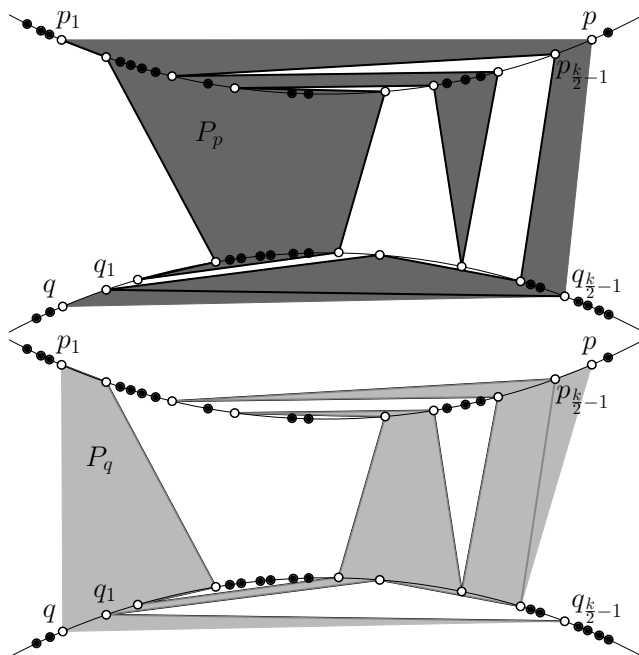


Figura 4.3: Las dos formas de completar C a una k -poligonización.

Las modificaciones que hemos realizado sólo alteran el número de k -poligonizaciones de $DC(k)$ por un factor constante, manteniendo la cota asintótica original. También observemos que las dos poligonizaciones, P_p y P_q , se “complementan”, en el sentido de que si colocamos un punto dentro de P_p entonces este punto yace en el exterior de P_q , y vice versa.

Sea \mathcal{R} el conjunto de $n - k$ puntos de $DC(n)$ que no pertenecen a $DC(k)$. Para contar cuántas de las k -poligonizaciones de $DC(k)$ son k -hoyos de $DC(n)$, primero necesitamos determinar en dónde están posicionados los elementos de \mathcal{R} . Centrando nuestra atención en una de las dos cadenas de $DC(n)$ podemos observar que, los $k/2$ puntos de $DC(k)$ en esta cadena determinan $\frac{k}{2} + 1$ “secciones”, dos de las cuales son no acotadas, la primera y la última. Los elementos de \mathcal{R} se encuentran en las “secciones” de $DC(n)$, $\frac{n-k}{2}$ en cada cadena; ver Figura 4.4.



Figura 4.4: Las “secciones” definidas por $DC(k)$ en la cadena superior de $DC(n)$.

De entre las diferentes formas en que pueden distribuirse los elementos de \mathcal{R} dentro de las “secciones”, contaremos aquellas en las que P_p o P_q queden vacíos. Por su forma de “complementarse”, una de las dos k -poligonizaciones, P_p o P_q , tiene al menos $\frac{k}{2} + 1$ “secciones” en su exterior, las cuales llamaremos “permitidas”. De forma similar, en dicha k -poligonización una de las dos cadenas tiene al menos $\frac{k}{4} + 1$ “secciones permitidas”; ver de nuevo la Figura 4.3. Dicho de otra forma, en esta cadena hay exactamente $\frac{k}{4} + j + 1$ “secciones permitidas”, mientras que la otra cadena tiene (al menos) $\text{máx}\{2, \frac{k}{4} - j\}$ “secciones permitidas”. Hay que distribuir $\frac{n-k}{2}$ puntos de \mathcal{R} por cadena, y si éstos quedaran sólo en “secciones permitidas” esta k -poligonización estaría vacía. Distribuir a bolas dentro de b cajas puede hacerse de $\binom{a+b-1}{a}$ maneras diferentes, así que tenemos

$$\binom{\frac{n-k}{2} + \frac{k}{4} + j}{\frac{n-k}{2}} \cdot \text{máx} \left\{ \binom{\frac{n-k}{2} + 1}{\frac{n-k}{2}}, \binom{\frac{n-k}{2} + \frac{k}{4} - j - 1}{\frac{n-k}{2}} \right\}$$

maneras de distribuir los elementos de \mathcal{R} para que P_p o P_q queden vacíos. El valor anterior se minimiza con $j = \frac{k}{4} - 2$, obteniendo así la cota de

$$\binom{\frac{n-4}{2}}{\frac{n-k}{2}} \cdot \frac{n-k+2}{2} \cdot \Omega(4.64^k)$$

para el número de k -hoyos en $DC(n)$. □

4.3. Acotando por arriba el número de k -hoyos no convexos

El siguiente teorema muestra que si k es lo suficientemente pequeña con respecto a n , entonces el máximo número de k -hoyos no convexos es menor que el máximo número de k -hoyos convexos.

Teorema 4.7. *Para cualquier constante $k \geq 3$, el número de k -hoyos no convexos en un conjunto de n puntos está acotado superiormente por $O(n^{k-1})$, y existen conjuntos de puntos que tienen $\Theta(n^{k-1})$ k -hoyos no convexos.*

Demostración. Sea S un conjunto de n puntos en el plano. Primero mostraremos que S tiene a lo más $O(n^{k-1})$ k -hoyos no convexos, al presentar una forma algorítmica de generarlos todos. Para esto, representaremos cada k -hoyo no convexo con la secuencia que siguen sus vértices en el sentido contrario a las manecillas del reloj, requiriendo que el último de los vértices en la secuencia sea no convexo (reflex). De esta forma, cualquier k -hoyo no convexo tendrá $r \geq 1$ representaciones distintas, donde r es su número de vértices no convexos. Entonces el número de representaciones diferentes puede verse como una cota para el número de k -hoyos no convexos.

Tenemos n posibilidades diferentes para escoger el primer vértice v_1 de un k -hoyo; tenemos $n - 1$ posibilidades para el segundo vértice v_2 , y así sucesivamente. Muchas de estas secuencias podrían generar polígonos que no sean simples, pero como sólo queremos acotar por arriba, podemos quedarnos con ellas. Para el penúltimo vértice v_{k-1} tenemos $n - k + 2$ posibilidades, pero a diferencia de los otros, el último vértice v_k está definido de forma única, pues debe ser reflex y dejar vacío al polígono. De forma más detallada, necesitamos “unir” v_1 con v_{k-1} pasando sólo por un vértice más (v_k), pero aunque hubiera muchas posibilidades de escoger este punto para que sea reflex, sólo una de ellas dejaría vacío al polígono obtenido (aquella donde la geodésica que une v_1 con v_{k-1} se encuentre más “profunda” dentro del polígono); ver Figura 4.5. Sólo de esta forma obtendríamos un k -hoyo no convexo (pasando por alto los posibles problemas de simplicidad del polígono). Así que tenemos a lo más $n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2) = n!/(n-k+1)! = O(n^{k-1})$ k -hoyos no convexos.

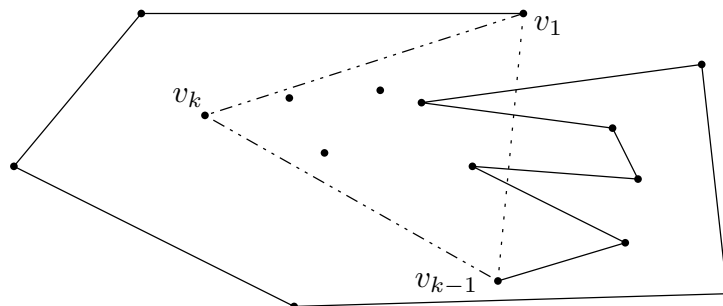


Figura 4.5: El vértice v_k queda definido de forma única.

Un ejemplo de un conjunto de n puntos que alcanza dicha cota es el que se muestra en la Figura 4.6. El conjunto consta de cuatro grupos de puntos, cada uno de los cuáles contiene una fracción lineal del número de puntos totales, por ejemplo $\frac{n}{4}$. Basta con considerar sólo los k -hoyos que tienen un triángulo como cierre convexo y que son similares al que se muestra en la figura. Al escoger cada uno de los tres vértices del cierre convexo, tenemos un número lineal de posibilidades, y para los $k - 4$ vértices convexos internos también tenemos un número lineal de posibilidades. Entonces tenemos $\Omega(n^3 \cdot \binom{n}{k-4}) = \Omega(n^{k-1})$ k -hoyos no convexos. \square

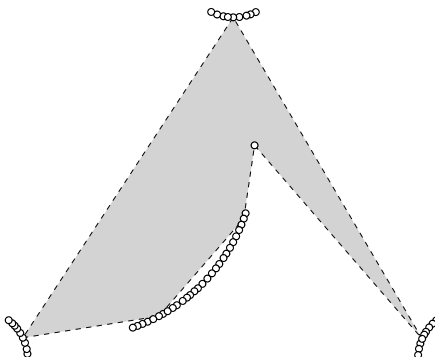


Figura 4.6: Un conjunto con $\Theta(n^{k-1})$ k -hoyos no convexos.

4.4. Minimizando el número de k -hoyos

Todo conjunto de k puntos acepta al menos una poligonización. Haciendo uso de este hecho, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.8. *Sea S un conjunto de n puntos en el plano y en posición general. Para toda $c < 1$ y toda $k \leq c \cdot n$, tenemos que S tiene $\Omega(n^2)$ k -hoyos.*

Demostración. Esta demostración está basada en aquella del Teorema 3.6 de este trabajo. Primero tomemos los puntos de S ordenados con respecto al eje x , $S = \{p_1, \dots, p_n\}$, y los subconjuntos $S_{i,j} = \{p_i, \dots, p_j\}$. El número de conjuntos $S_{i,j}$ de tamaño al menos k es

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=i+k-1}^n 1 = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} = \Theta(n^2).$$

Por cada uno de estos $S_{i,j}$ toma los $k-2$ puntos de $S_{i,j} \setminus \{p_i, p_j\}$ que sean más cercanos al segmento de recta $p_i p_j$; éstos puntos junto con p_i y p_j tienen al menos una poligonización, o sea al menos un k -hoyo; ver Figura 4.7. Más aún, por la forma de selección, p_i y p_j deben ser los puntos más a la izquierda y más a la derecha de ese k -hoyo, respectivamente. Esto implica que cualquiera de estos k -hoyos sólo puede ser contado en a lo más un conjunto $S_{i,j}$, lo que nos da la cota inferior de $\Omega(n^2)$ k -hoyos en S . \square

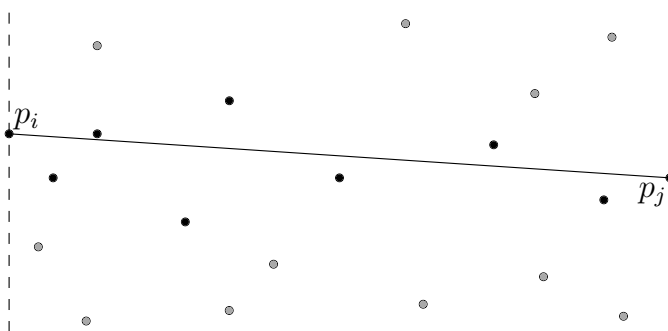


Figura 4.7: Un conjunto $S_{i,j}$. En negro los puntos seleccionados para el k -hoyo, con $k = 9$.

En lo que respecta a una cota superior, sabemos que el mínimo número de k -hoyos generales (de entre todos los conjuntos de n puntos) no puede ser mayor que el mínimo número de k -hoyos convexos más el máximo número de k -hoyos no convexos. Y recordemos que el mínimo número de k -hoyos convexos es $O(n^2)$ para $k \leq 6$ (y cero para $k \geq 7$), y que el máximo número de k -hoyos no convexos es $O(n^{k-1})$. Como la última cota domina a la primera, esto nos daría una cota superior de $O(n^{k-1})$ para el mínimo número de k -hoyos generales, pero como se demuestra en un teorema más adelante, esta cota está lejos de ser justa.

Lema 4.9. *En la malla entera G de tamaño $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$, toda arista es incidente a lo más a $O(\sqrt{n} \log n)$ triángulos interior-vacíos. Donde un triángulo es interior-vacío si en efecto no contiene ningún punto de G en su interior, pero permitiendo que cada uno de sus lados tenga más de dos puntos de G , o que su interior sea igual al conjunto vacío (triángulos degenerados).*

Demostración. Llamemos *ranura* a toda aquella arista de G que no contenga ningún punto de G en su interior. Además, dada una línea l generada por

puntos de G , representaremos su pendiente como el par (d_x, d_y) , obtenido al restar las coordenadas de los extremos de una ranura en l . Observemos que una ranura con pendiente $(0, 1)$ o $(1, 0)$ contiene exactamente \sqrt{n} puntos de G . Mientras que una línea con pendiente (d_x, d_y) , con $d_x, d_y \neq 0$, contiene a lo más mín $\left\{ \left\lceil \frac{\sqrt{n}}{|d_x|} \right\rceil, \left\lceil \frac{\sqrt{n}}{|d_y|} \right\rceil \right\}$ puntos de G .

Ahora considera cualquier arista pq de G (que pudiera o no contener puntos de G en su interior) y su línea soporte l . Sean l' y l'' las dos líneas paralelas a l , generadas por puntos de G , tales que no hay puntos de G entre l y l' , ni entre l y l'' . Ver la Figura 4.8 para un ejemplo donde pq es una ranura.

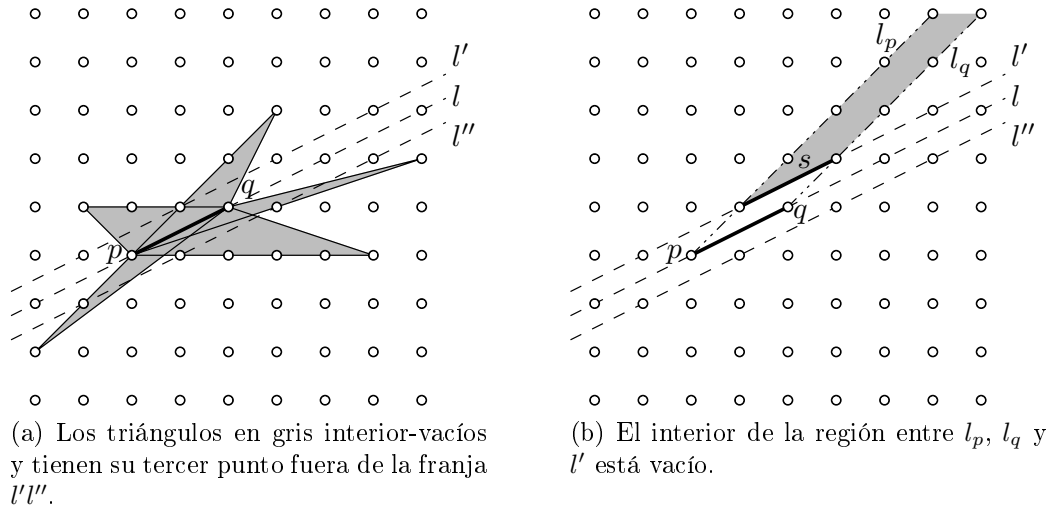


Figura 4.8: Una ranura pq y las líneas $l, l',$ y l'' en la malla entera de 9×9 .

Tanto l' como l'' contienen a lo más \sqrt{n} puntos de G (cada una), y a su vez, cada uno de esos puntos genera un triángulo interior-vacío con pq . Además, cada punto de l , excepto p y q mismos, generan un triángulo interior-vacío degenerado con pq . Cualquier otro triángulo Δ , con pq como arista, tiene su tercer punto r afuera de la banda acotada por l' y l'' ; ver Figura 4.8(a).

Una condición necesaria para que Δ sea interior-vacío es que, tanto pr como qr , atraviesen una misma ranura s en l' (o en l''). Más aún, al menos una de las líneas soporte de pr y qr debe contener un extremo de la ranura s . Para mostrar esto último, considera las líneas l_p y l_q , que van desde p y q a los respectivos extremos de una ranura s en l' . Como s es una ranura, no hay puntos en el interior de la región acotada por l_p, l_q y l' , y entonces, cualquier

punto que sea visto por p y q , a través de s , debe estar en la frontera de la región mencionada, exactamente sobre l_p o l_q ; ver la Figura 4.8(b).

Utilizando esta última propiedad, podemos obtener una cota superior del número de puntos $r \in G$ que son visibles desde p y q , a través de la misma ranura, al contar el número de puntos sobre dichas líneas soporte. Consideremos primero el caso en que pq es un segmento horizontal, i.e., $q - p = (d_x, 0)$. Entonces las líneas que pasan por p (o q) y un extremo de una ranura en l' (o en l'') tienen pendientes: $\{(0, 1), (\pm 1, 1), (\pm 2, 1), \dots, (\pm \sqrt{n}, 1)\}$. Suponiendo que todas estas líneas existen para pq , entonces tenemos la siguiente cota superior para el número de triángulos interior-vacíos con pq como lado (los primeros $3\sqrt{n}$ tienen su tercer punto sobre $l, l',$ o l'').

$$3\sqrt{n} + 2 \cdot \sum_{i=-\sqrt{n}}^{-1} \left\lceil \frac{\sqrt{n}}{|i|} \right\rceil + 2 \cdot \sqrt{n} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \left\lceil \frac{\sqrt{n}}{|i|} \right\rceil = O(\sqrt{n} \log(n)) \quad (4.10)$$

Para el caso general, en el que pq es tal que $q - p = (d_x, d_y)$, la línea l tendrá pendiente $(d'_x, d'_y) = \left(\frac{d_x}{\gcd(d_x, d_y)}, \frac{d_y}{\gcd(d_x, d_y)} \right)$. Así que las pendientes de las líneas que pasan por p (o q) y un extremo de una ranura en l' (o en l''), difieren todas por múltiplos de (d'_x, d'_y) . Y como d'_x y d'_y son enteros con $\max\{d'_x, d'_y\} \geq 1$, entonces el número de triángulos interior-vacíos para el caso general no puede superar la cota de una arista horizontal en (4.10), lo cuál completa la prueba. \square

Y haciendo uso del lema anterior podemos demostrar:

Teorema 4.10. *Para toda constante $k \geq 4$ y todo $n \geq k$, con $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, existen conjuntos de n puntos en posición general que admiten a lo más $O(n^{\frac{k+1}{2}} (\log n)^{k-3})$ k -hoyos.*

Demostración. El conjunto de puntos S que vamos a utilizar es el conjunto de Horton cuadrado¹ de tamaño $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$; ver [50]. De forma intuitiva, S es una malla perturbada de tal forma que todo conjunto de puntos colineales forma un conjunto de Horton. Para cualesquiera dos puntos $p, q \in S$, el número de triángulos vacíos que tienen pq como lado debe estar acotado por el número de triángulos interior-vacíos que tienen pq como lado, suponiendo que p y q son puntos de una malla regular de tamaño n . Por el Lema 4.9, sabemos que éstos últimos son a lo más $O(\sqrt{n} \log n)$.

¹En inglés squared.

Para acotar el número de k -hoyos en S , tomaremos triangulaciones de S y su dual. En la gráfica dual de una triangulación, todo triángulo es representado como un nodo, y dos nodos están conectados si y sólo si sus correspondientes triángulos comparten un lado. Una triangulación de un k -hoyo tiene entonces como dual un árbol binario (de $k - 2$ vértices), y se puede seleccionar a cualquiera de los triángulos que tocan la frontera del k -hoyo para que sea la raíz de dicho árbol, ver Figura 4.9. Por otro lado, es bien conocido que el número de árboles binarios con raíz y de tamaño m , corresponde con el m -ésimo número de Catalan C_m , ver [20]. Lo cual implica que existen $C_{k-2} = O(4^k \cdot k^{-\frac{3}{2}})$ árboles de los antes mencionados. Observemos que aunque esta cota es exponencial con respecto a k , es constante desde el punto de vista de n .

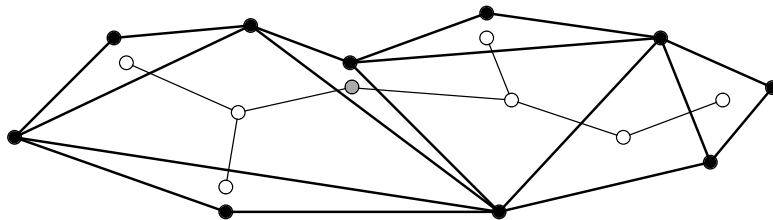


Figura 4.9: Una triangulación de un k -hoyo y su árbol binario dual ($k = 10$). En gris la raíz seleccionada.

Sea Δ un triángulo vacío de S , y sea B un árbol binario de tamaño $k - 2$ con raíz. Ahora considera todos los k -hoyos de S que tengan una triangulación cuyo dual sea B con raíz en Δ . Observemos que las triangulaciones de estos k -hoyos pueden ser construidas y contadas empezando en Δ y siguiendo las aristas de B ; lo cual también sería una cota superior para el número de estos k -hoyos. Como se dijo al principio, el número de triángulos incidentes a una arista de S es $O(\sqrt{n} \log n)$, así que cada una de las $k - 3$ aristas de B tiene $O(\sqrt{n} \log n)$ posibilidades para formar el siguiente triángulo del k -hoyo. Entonces tenemos $O((\sqrt{n} \log n)^{k-3})$ como cota superior para el número de (las triangulaciones de) k -hoyos formados por Δ y B .

Al multiplicar esto por el número (constante) de árboles binarios de tamaño $k - 2$ se mantiene la misma cota asintótica, así que tenemos a lo más $O((\sqrt{n} \log n)^{k-3})$ k -hoyos que contienen Δ .

Finalmente, como hay $O(n^2)$ triángulos vacíos en S (ver [12]), obtenemos $O(n^2(\sqrt{n} \log n)^{k-3}) = O(n^{\frac{k+1}{2}}(\log n)^{k-3})$ como cota superior para el número de k -hoyos generales en S . \square

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de esta Parte I presentamos distintas cotas superiores e inferiores para el número de k -ágonos y k -hoyos contenidos en conjuntos de puntos en el plano, en particular para $k = 4$ y para el caso más general de $k \geq 3$ (con k constante). En estas cotas se hizo un conteo por separado para las distintas clases de k -ágonos y k -hoyos, tanto convexos como no convexos y generales; ver Tablas 2.3 y 2.4. Para algunas de las cotas incluso tenemos conjuntos de puntos que las alcanzan, como los puntos en posición convexa que maximizan el número de k -hoyos generales.

Aunque las cotas presentadas en este trabajo son las mejores al momento de la escritura, muchas preguntas se mantienen sin resolver. Por ejemplo, algunas de las cotas no son justas, como la del mínimo número de k -hoyos convexos, $h_k(n)$, generados por un conjunto de n puntos, para el caso $k \leq 6$.

Un problema abierto que parece ser de los más desafiantes e interesantes, es el decidir si en todo conjunto de puntos hay o no una cantidad supercuadrática de k -hoyos (generales), para $k \geq 4$. En las Secciones 3.4 y 4.4 dimos cotas inferiores cuadráticas para dicho número, para $k = 4$ y $k \geq 3$ respectivamente. En particular, como se mostró en [6], una cantidad supercuadrática de 4-hoyos resolvería positivamente una conjetura de Bárány, la cual afirma que todo conjunto de puntos en posición general contiene dos puntos que son incidentes a una cantidad superconstante de 3-hoyos; ver [13], Capítulo 8.4, Problema 4.

Parte II

Redes de puntos móviles

Capítulo 6

Introducción

En su forma más simple, una red de computadoras puede ser modelada utilizando una gráfica. En dicha gráfica las computadoras son representadas por vértices (también llamados nodos), y dos vértices son adyacentes si las computadoras que representan se pueden comunicar. Este modelo de representación de redes ha sido aplicado y estudiado extensamente, especialmente en cuanto a la resolución de problemas de forma algorítmica. Sin embargo, el avance tecnológico ha hecho que dicho modelo sea insuficiente, especialmente con la llegada de los dispositivos inalámbricos móviles.

Un *dispositivo inalámbrico móvil*, que también llamaremos *estaciones móviles*, es cualquier dispositivo de cómputo que puede comunicarse por medio de señales de radio y que además tiene la capacidad de modificar su ubicación. Las redes que pueden formar este tipo de dispositivos son diversas, siendo las más estudiadas las *Redes Móviles Ad hoc* (o MANETs por sus siglas en inglés). Estas últimas pueden verse como la versión móvil de las conocidas *Redes Inalámbricas Ad hoc*, y en su forma más general, el movimiento de los nodos no se conoce de antemano [14].

En esta Parte II del trabajo se estudiarán redes que se encuentran entre los dos modelos mencionados, es decir, redes inalámbricas *ad hoc* donde hay capacidad de movimiento, pero éste está restringido y se conoce de antemano. Para realizar dicho estudio, modelaremos las estaciones presentes en estas redes por medio de puntos en el plano y representaremos sus trayectorias con curvas también en el plano. En particular, analizaremos una operación clásica de redes, la *inundación*¹, y se revisarán los aspectos algorítmicos y de

¹En inglés *broadcast*.

optimización de energía ligados a ella.

Tomaremos tres problemas bien conocidos sobre inundación en redes, los generalizaremos para este modelo intermedio, y estudiaremos cómo cambia su dificultad una vez que se ha añadido movimiento a las estaciones. A lo largo de la Sección 6.1 presentaremos y definiremos formalmente estos problemas, y en el Capítulo 7 presentaremos nuestros resultados. Finalmente, expondremos nuestras conclusiones referentes a esta parte en el Capítulo 8.

Los resultados presentados a lo largo de esta Parte II corresponden a aquellos contenidos en el artículo [18].

6.1. Definición de los problemas

Una *red inalámbrica ad hoc* consta de n estaciones de radio, representadas por un conjunto de puntos en el plano $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, mismas que intercambian mensajes por medio de comunicaciones inalámbricas. Recibe el calificativo de *ad hoc* porque no está centralizada ni depende de una infraestructura preexistente, por tanto, cada una de las estaciones de la red participa en el ruteo y reenvío de datos. Cada estación tiene asignado un rango de transmisión, de forma que una estación s_j puede recibir una transmisión de otra estación s_i si y sólo si s_j está dentro del rango de transmisión de s_i . Generalmente las estaciones en estas redes tienen una fuente de energía limitada (una batería por ejemplo), y en consecuencia, el uso eficiente de energía juega un papel importante en el diseño de estas redes (ver [16, 54]).

El poder necesario para transmitir correctamente datos de una estación s_i a otra s_j depende de la fórmula $d(s_i, s_j)^\alpha$, donde $d(s_i, s_j)$ es la distancia Euclidiana entre s_i y s_j , y el valor $\alpha \geq 1$ que denominaremos exponente de atenuación.² En un ambiente ideal $\alpha = 2$, pero dependiendo de las condiciones presentes en el ambiente puede tomar el valor de hasta 6 (ver [42]).

En este contexto, una *inundación* es una tarea iniciada por una estación fuente para diseminar un mensaje a todas las estaciones de la red. Al ser una tarea básica de comunicación ha sido ampliamente estudiada, ver por ejemplo [55, 43, 16].

La extensión que le hacemos al modelo antes explicado es la inclusión de movimiento, pero en este caso cada punto de S se moverá en el plano en línea recta y a velocidad constante (misma que puede ser diferente a la de las otras

²En inglés el valor α recibe el nombre de *distance-power gradient*.

estaciones). Así, la posición de cada estación s_i puede ser vista en función del tiempo, donde $s_i(t)$ es la posición de la estación s_i en el tiempo t . El *rango de transmisión* de $s_i \in S$ es entonces un disco D_{s_i} de radio $r_i \geq 1$ centrado en $s_i(t)$, para todo tiempo t (se toma $r_i \geq 1$ para evitar el uso de rangos de transmisión infinitamente pequeños); de forma que una estación s_j puede recibir un mensaje de s_i en el tiempo t si y sólo si $s_j(t) \in D_{s_i}$, con $i \neq j$. Con esto, definimos la *asignación de rango de transmisión* para S como una función $R : S \rightarrow \{r \in \mathbb{R} | r \geq 1\}$, donde $r_i = R(s_i)$ para cada $s_i \in S$.

En lo que respecta al intercambio de mensajes se asumirá lo siguiente: la transmisión de un mensaje se puede completar en un sólo instante de tiempo; y si s_i tiene un mensaje M en el tiempo t , entonces lo transmitirá a toda estación que quede dentro de D_{s_i} en cualquier tiempo $t' \geq t$.

A continuación se definirán algunos problemas bien conocidos sobre inundación en redes inalámbricas *ad hoc*. En cada uno de ellos, queremos medir cómo cambia su dificultad (algorítmica) una vez que se ha añadido movimiento a las estaciones; y para discernir exactamente a qué nuevos aspectos nos enfrentamos, restringiremos intencionalmente nuestro modelo a movimientos simples (movimiento rectilíneo uniforme) y a transmisión instantánea de mensajes. Desde cierto punto de vista, un modelo con trayectorias fijas podría parecer algo ingenuo o poco práctico, sin embargo dicha abstracción puede ser útil en por ejemplo redes de satélites [46] o en modelos como el que se presenta en [56].

Sea S un conjunto de estaciones (puntos) móviles y sea $s \in S$ una estación fuente que genera un mensaje M en el tiempo t_0 . Nos enfocaremos en los siguientes problemas:

- (1) *inundación*: Dada una asignación de rango de transmisión para S , decidir si s puede inundar el mensaje M , es decir, decidir si eventualmente todas las demás estaciones de S reciben M (al tiempo t_0 o posterior).
- (2) *min-rangos-iguales*: Encontrar el valor mínimo $r \geq 1$ necesario para inundar M desde s , suponiendo que la asignación de rango de transmisión R es tal que $R(s_i) = r$, para toda $s_i \in S$, i.e. suponiendo que todas las estaciones en S tienen el mismo rango de transmisión r .
- (3) *min-suma- α* : Dado el exponente de atenuación $\alpha \geq 1$, encontrar la asignación de rango de transmisión R , tal que s puede inundar M y se minimiza el valor $\sum_{s_i \in S} R(s_i)^\alpha$; dicho valor representa el costo total de energía de R .

- (4) *min-suma-binario*: Es un caso restringido del problema *min-suma- α* , donde cada estación puede, ya sea, transmitir con un rango de radio 1 o dejar de transmitir.

Los primeros los problemas han sido estudiados ampliamente para el caso estático. El método que se utiliza comúnmente para buscar su solución es: construir una gráfica dirigida que representa la conectividad de la red, utilizando la asignación de rango de transmisión R para construirla, y al final, buscar la propiedad deseada en dicha gráfica [16, 54]. Sin embargo esta estrategia no se puede aplicar directamente al caso móvil, ya que la recepción de mensajes depende también del tiempo de transmisión.

La versión estática del problema *min-suma- α* fue estudiado en [16] para distintas dimensiones y valores de α . En dicho artículo, la pertenencia del problema *min-suma- α* a la clase NP-duro se demuestra para el caso en que $\alpha > 1$ y con estaciones sobre el plano.

Capítulo 7

Inundación en redes móviles *ad hoc* restringidas

En este capítulo se estudiarán los problemas de inundación presentados en el Capítulo 6, para nuestro modelo con trayectorias rectilíneas. Como se explicó en dicho capítulo, estudiaremos estos problemas desde el punto de vista algorítmico y sobre la posible pertenencia de cada uno de ellos a la clase NP-duro.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: La Sección 7.1 presenta un algoritmo para resolver el problema de inundación en tiempo $O(n^2)$, mientras que la Sección 7.2 propone un algoritmo de tiempo $O(n^3 \log n)$ para resolver el problema min-rangos-iguales. En la Sección 7.3 se prueba que el problema min-suma- α pertenece a la clase NP-duro, y además se demuestra que no puede aproximarse en tiempo polinomial a un factor $(1 - o(1)) \ln n$, a menos que la clase NP contenga algoritmos “ligeramente” superpolinomiales en tiempo. En la misma sección, se discute una posible aproximación al problema min-suma-binario, que al igual que el problema min-suma- α pertenece a la clase NP-duro, sin embargo el interés de dicha aproximación es meramente teórico.

7.1. Problema de inundación

Como se mencionó antes, el problema de *inundación* consiste en: Dados un conjunto S de n estaciones móviles, una asignación de rango de transmisión R para S , una estación fuente $s \in S$, y un mensaje M generado en s al

tiempo t_0 , decidir si el resto de las estaciones de S recibirán eventualmente M (al tiempo t_0 o posterior).

Para resolver el problema de inundación se propone un método basado en el famoso algoritmo de Dijkstra, y como resultado adicional este método calculará el primer instante en que cada estación recibe M .

Como cada $s_i \in S$ se mueve en línea recta u con velocidad constante, entonces s_i podría mandarle un mensaje a s_j durante un solo intervalo de tiempo, con $i \neq j$. Llamaremos a este intervalo como el *intervalo de transmisión de s_i a s_j* y será denotado por $I(s_i, s_j)$. Si s_i y s_j no se mueven sobre líneas paralelas ($i \neq j$) entonces $I(s_i, s_j) = [t_a, t_b]$, donde t_a es el primer instante de tiempo en el que s_j yace dentro de D_{s_i} , y t_b es el último instante de tiempo en el que s_j yace dentro de D_{s_i} , ver Figura 7.1.

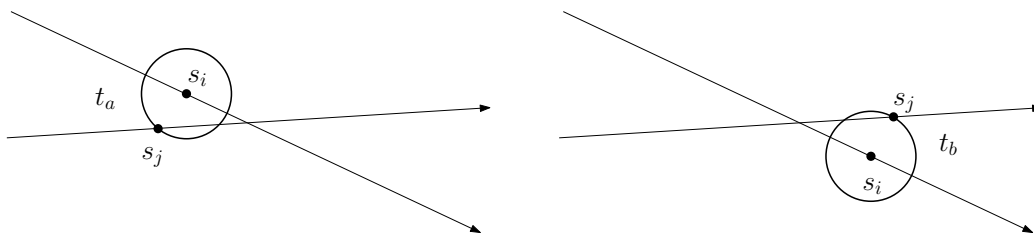


Figura 7.1: Ejemplo de los tiempos que definen $I(s_i, s_j) = [t_a, t_b]$.

Es importante observar que, dependiendo de la asignación R y las trayectorias de s_i y s_j , el intervalo $I(s_i, s_j)$ podría ser vacío; además siempre se cumple que $I(s_i, s_j) \subseteq I(s_j, s_i)$ o que $I(s_j, s_i) \subseteq I(s_i, s_j)$.

La *gráfica de conectividad* G_R , definida por S y R , es una gráfica dirigida donde cada vértice representa un elemento de S . Un arco de s_i a s_j está en G_R si y sólo si $I(s_i, s_j) \neq \emptyset$, y será etiquetado como $I(s_i, s_j)$. Ver el lado izquierdo de la Figura 7.2 para un ejemplo.

Si t_i es el primer instante de tiempo en el que la estación s_i recibe M , entonces s_i puede transmitir M a otra estación s_j si y sólo si $t_i \leq t_b$, donde $[t_a, t_b] = I(s_i, s_j)$, esto es, antes de que s_i pierda la conectividad (dirigida) con s_j . Este concepto puede modelarse en G_R de la siguiente forma: asigna el valor t_i al vértice s_i ; considera el arco de s_i a s_j (etiquetada como $[t_a, t_b]$) y asigna el valor t_j al vértice s_j , donde $t_j = t_i$ si $t_i \in [t_a, t_b]$ o $t_j = t_a$ si $t_i \leq t_a$, el valor t_j representa el tiempo en el que s_j recibe M desde s_i .

Entonces, para resolver el problema de inundación, basta con mostrar que G_R tiene un árbol generador inducido con raíz en s , formado por arcos

con etiquetas de tiempo adecuadas. Para resolver el problema proponemos el siguiente algoritmo que toma a G_R y a s como entradas:

Algoritmo 1 ESTÁ-CONECTADO(G, s, t_0)

* G es una gráfica de conectividad y s es el vértice inicial que genera M en el tiempo t_0 . *\

1. Asigna el valor t_0 a el vértice s .
 2. Asigna el valor de ∞ a los otros vértices.
 3. Corre una versión modificada del algoritmo de Dijkstra desde s , pero sacando los vértices de la cola de prioridad de acuerdo al instante de tiempo en que reciben M .
-

El algoritmo de Dijkstra nos garantiza que una vez que un vértice que sale de la cola de prioridad ya tiene asignada la distancia mínima posible a la fuente. De forma similar, el algoritmo ESTÁ-CONECTADO nos garantizará que el vértice que salga de la cola tiene asignado el tiempo mínimo en que recibió M . Por tanto, si el árbol obtenido por ESTÁ-CONECTADO es un árbol generador de G_R , entonces la inundación desde s será exitosa (ver el lado derecho de la Figura 7.2). De esta forma, transformamos un problema de conectividad en un problema de caminos más cortos. Además, como resultado adicional obtenemos el tiempo en que cada estación recibe M por primera vez. La correctez y complejidad del algoritmo ESTÁ-CONECTADO se siguen directamente de las del algoritmo de Dijkstra. Como G_R puede ser potencialmente una gráfica completa, entonces ESTÁ-CONECTADO tiene una complejidad de tiempo de $O(n^2)$, lo cual se puede resumir como:

Teorema 7.1. *El problema de inundación puede resolverse en tiempo $O(n^2)$.*

7.2. Rangos del mismo tamaño

En esta sección mostramos un algoritmo de tiempo $O(n^3 \log n)$ para resolver el problema min-rangos-iguales. Dicho problema consiste en, dado un conjunto de n estaciones móviles S , una estación fuente $s \in S$ y un mensaje M generado en s en el tiempo t_0 , encontrar el valor el valor mínimo de $r \geq 1$

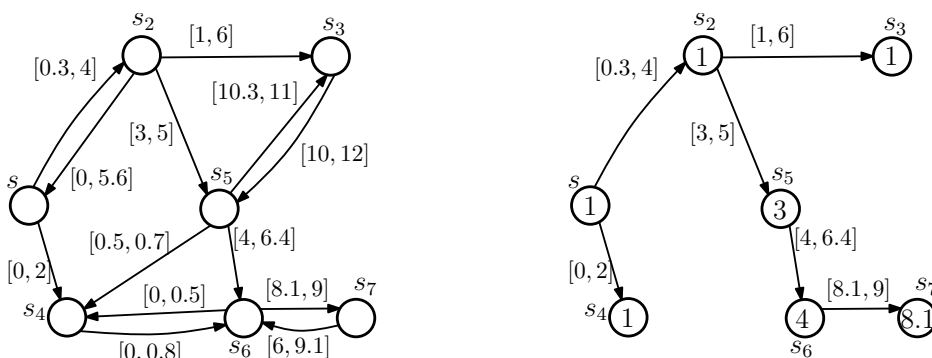


Figura 7.2: La gráfica G_R para un conjunto S y el árbol generador obtenido por ESTÁ-CONECTADO ($t_0 = 1$).

necesario para inundar M desde s , suponiendo que la asignación de rango de transmisión R es tal que $R(s_i) = r$, para toda $s_i \in S$.

Como el radio de D_{s_i} es igual al radio de D_{s_j} tendríamos que $I(s_i, s_j) = I(s_j, s_i)$ y entonces podemos usar ambos intervalos de forma intercambiable. Este hecho hace que la gráfica de conectividad pueda manejarse como una gráfica no dirigida.

Denotaremos como G_r a la gráfica de conectividad G_R para el caso en que todas las estaciones transmitan con radio r (con $R(s_i) = r$ para toda $s_i \in S$). De igual forma, denotaremos por T_r al árbol obtenido al correr el algoritmo ESTÁ-CONECTADO (de la sección anterior) sobre G_r con s y t_0 . El problema de min-rangos-iguales se reduce entonces a encontrar el radio mínimo r_{MIN} que cumpla que $T_{r_{MIN}}$ es un árbol generador de $G_{r_{MIN}}$.

Para poder encontrar r_{MIN} , primero reduciremos su espacio de búsqueda a un conjunto discreto de valores, y luego haremos una búsqueda sobre éstos. Llamaremos a este conjunto como los *radios críticos* de S , denotado por $CR(S)$, y contendrá todos los radios r donde exista la posibilidad de que T_r y $T_{r-\varepsilon}$ sean diferentes, para todo $\varepsilon > 0$.

Formalmente, r es un radio crítico de S si, al asignarlo como rango de transmisión de las estaciones, ocurre cualquiera de los siguientes casos:

- Existen dos estaciones diferentes, s_i y s_j , que tienen sólo un instante de conexión ($I(s_i, s_j) = [t, t]$). Ver Figura 7.3(a) para un ejemplo.
- Hay un instante de tiempo t donde $I(s_i, s_j) \cap I(s_i, s_k) = [t, t]$, para tres estaciones diferentes s_i, s_j , y s_k . Ver Figura 7.3(b) para un ejemplo.

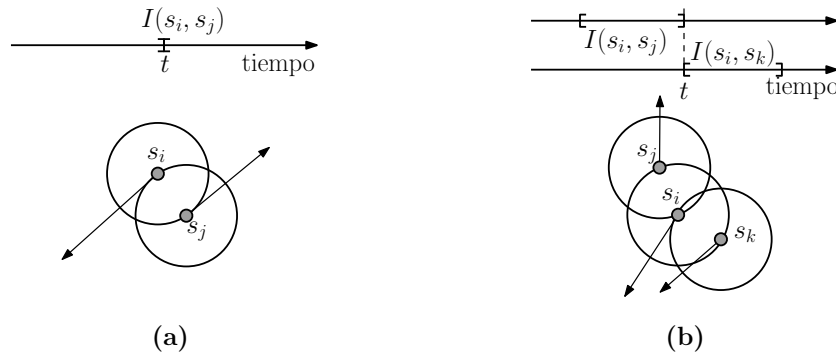


Figura 7.3: Ejemplos de los dos casos de radios críticos.

Un radio crítico de tipo (a) corresponde a la aparición de una arista en G_r que no estaba presente en $G_{r-\varepsilon}$, para toda $\varepsilon > 0$. La aparición de una arista en T_r que no estaba presente en $G_{r-\varepsilon}$, para toda $\varepsilon > 0$, corresponde con radios de tipo (b); sin embargo, dependiendo de la ejecución de ESTÁ-CONECTADO, puede suceder que no todo radio de tipo (b) conlleve a la aparición de una arista en T_r .

Dadas dos estaciones diferentes s_i y s_j , sea $d_{i,j}(t)$ el cuadrado de la distancia Euclidiana entre ambas estaciones al tiempo t . Observa que $d_{i,j} = d_{j,i}$, y como s_i y s_j se mueven ambas sobre líneas, entonces $d_{i,j}$ será un polinomio de grado 2 en t .

Considera ahora el arreglo de las $n - 1$ funciones que involucran a s_i ($\{d_{i,j} \mid i \neq j\}$). Cualquiera dos de estas funciones se intersectan a lo más dos veces. Por lo tanto, dicho arreglo contiene $O(n^2)$ intersecciones. Cada una de las $O(n^2)$ intersecciones nos da un radio (al cuadrado) que corresponde a un radio crítico de tipo (b), y cada mínimo de las $n - 1$ funciones nos da un radio (al cuadrado) que corresponde a un radio crítico de tipo (a); ver Figura 7.4.

Como tenemos n arreglos diferentes (uno por estación), entonces el tamaño de $\text{CR}(S)$ es $O(n^3)$. Asumiendo que podemos calcular tanto el mínimo de cada una de las funciones como la intersección de dos de ellas en tiempo constante; entonces podemos calcular $\text{CR}(S)$ en tiempo $O(n^3)$.

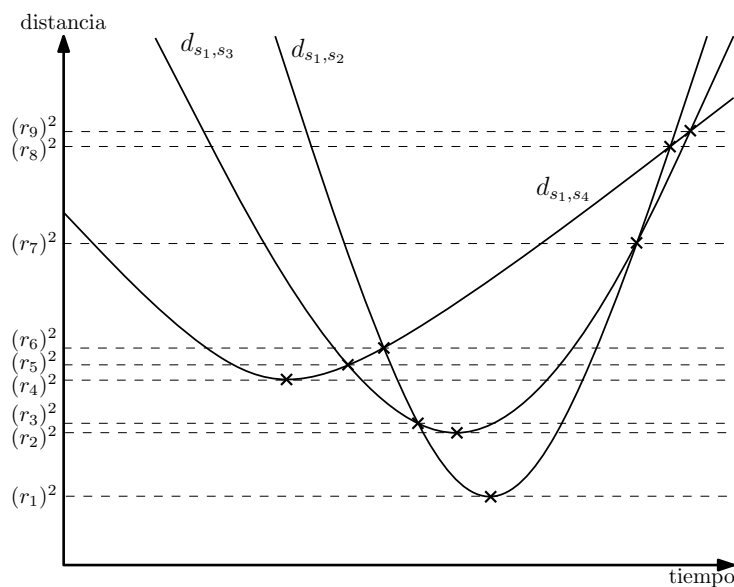


Figura 7.4: Ejemplo de los radios críticos que involucran a s_1 .

Tomando en cuenta lo anterior, el siguiente algoritmo RADIO-MÍNIMO resuelve el problema min-rangos-iguales.

Algoritmo 2 RADIO-MÍNIMO

1. Calcula el conjunto $CR(S)$.
 2. Ordena los elementos en $CR(S)$.
 3. Usando búsqueda binaria en $CR(S)$ y aplicando ESTÁ-CONECTADO en cada paso, busca el menor radio r_{MIN} , que cumpla que $T_{r_{MIN}}$ es árbol generador de $G_{r_{MIN}}$.
-

En cuanto a la complejidad de RADIO-MÍNIMO: el paso 1 toma tiempo $O(n^3)$; el paso 2 tiempo de $O(n^3 \log n)$; y el paso 3 a lo más hace $O(\log n)$ subpasos, cada uno de tiempo $O(n^2)$. Así, la complejidad total del algoritmo sería de tiempo $O(n^3 \log n)$, y por tanto el siguiente resultado es inmediato.

Teorema 7.2. *El problema min-rangos-iguales puede resolverse en tiempo $O(n^3 \log n)$.*

7.3. Optimización de la asignación de rango de transmisión

En esta sección mostraremos que el problema min-suma- α no puede resolverse en tiempo polinomial, a menos que $P = NP$, además no puede ser aproximado de forma polinomial a un factor sublogarítmico, a menos que la clase NP contenga algoritmos “ligeramente” superpolinomiales en tiempo. Probaremos dichos resultados al reducir (en tiempo polinomial) el problema clásico del *conjunto cobertura*¹ [53, 15] a el problema min-suma- α . De forma adicional, discutiremos una aproximación polinomial al problema min-suma-binario, sin embargo el interés de dicha aproximación es meramente teórico, debido a su mal factor de aproximación.

7.3.1. El problema min-suma- α

Recordemos que el problema de min-suma- α consiste en, dados el conjunto de n estaciones S , la estación fuente $s \in S$, un mensaje M generado en s en el tiempo t_0 , y el valor $\alpha \geq 1$, encontrar una asignación de rangos de transmisión R de forma que, s pueda inundar M en la red y que se minimice el valor $\sum_{s_i \in S} R(s_i)^\alpha$; en otras palabras, inundar M en la red y minimizar el costo total de energía.

Como se vio en la Sección 6.1, la pertenencia del problema min-suma- α a la clase NP-duro se demuestra para el caso en que $\alpha > 1$ y con estaciones sobre el plano. Sin embargo, en el caso de nuestro modelo móvil, el problema es NP-duro incluso cuando $\alpha = 1$. De la misma forma, aunque el problema estático es aproximable a un factor constante en el plano (para $\alpha \geq 1$), mostraremos que en el caso móvil no puede aproximarse a un factor $(1 - o(1)) \ln n$, a menos que $P = NP$.

Una instancia de problema del conjunto cobertura consiste de un conjunto U , una familia \mathcal{F} de subconjuntos de U , y una función de costo $\text{Costo} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Q}^+$. Lo que se desea es encontrar una subcolección \mathcal{F}' de \mathcal{F} tal que cubra U (que cada elemento de U pertenezca al menos a un elemento de \mathcal{F}'), y que además minimice la suma de costos $\sum_{F \in \mathcal{F}'} \text{Costo}(F)$.

Se sabe que el problema del conjunto cobertura es NP-duro [53] y que no puede ser aproximado en tiempo polinomial a un factor $(1 - o(1)) \ln n$, a

¹Conocido como el *set cover problem* en inglés.

menos que $\text{NP} \subset \text{DTIME}(n^{O(\log \log n)})$, donde $\text{DTIME}(t)$ es la clase de problemas que pueden resolverse con un algoritmo determinista de tiempo $O(t)$; ver [29]. Probaremos las mismas propiedades para el problema min-suma- α , mostrando una reducción polinomial adecuada del problema del conjunto cobertura a el problema min-suma- α .

Reducción

Toma una instancia del problema del conjunto cobertura: $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$, y $\text{Costo} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Q}^+$. Supondremos que cada conjunto F_i tiene un costo mayor o igual a 1; si este no es el caso, sumaremos 1 a el costo de cada uno de los conjuntos en \mathcal{F} , sin afectar con esto la solución óptima del problema.

Primero describiremos las posiciones iniciales y direcciones de la estaciones para la instancia del problema min-suma- α , más adelante especificaremos las velocidades.

Posiciones Iniciales y direcciones

Sea $N > 1$ y considera el siguiente parámetro de distancia:

$$P := (N(\sum_{F_i \in \mathcal{F}} \text{Costo}(F_i)) + n + 1)^{1/\alpha}.$$

Sean L_U , $L_{\mathcal{F}}$ y L_C tres líneas horizontales en el plano, de forma que L_U está sobre $L_{\mathcal{F}}$, y $L_{\mathcal{F}}$ está sobre L_C . La distancia entre cada una de estas líneas se dará más adelante. Toma n estaciones, $s_{u_1}, s_{u_2}, \dots, s_{u_n}$, sobre la línea L_U y con una distancia mayor que P entre cada una; también toma otras k estaciones, s_{F_1}, \dots, s_{F_k} , sobre la línea $L_{\mathcal{F}}$ y con una distancia mayor que P entre cada una. Ambos conjuntos de estaciones (s_{F_i} y s_{u_j}) permanecerán estáticas.

Las estaciones s_{u_j} representan a los elementos de U , y las estaciones s_{F_i} a los elementos de \mathcal{F} . Para modelar el hecho de que un conjunto F_i cubre a un elemento u_j agregaremos la estación $s_{c_{i,j}}$, que tendrá su posición inicial sobre la línea L_C y se moverá hacia s_{u_j} pasando “cerca de” s_{F_i} . Este nuevo tipo de estaciones será particionado en conjuntos de la forma $C_j := \{s_{c_{i,j}} | u_j \in F_i\}$, recordando que todas la estaciones en C_j se moverán hacia s_{u_j} . La posición inicial de cada $s_{c_{i,j}}$ será tal que la línea $l_{i,j}$, sobre la que se moverá dicha estación, es tangente al disco cerrado D_i , centrado en s_{F_i} y

7.3. Optimización de la asignación de rango de transmisión 61

con radio $(\text{Costo}(F_i)N)^{1/\alpha}$. Obsérvese que, como $\text{Costo}(F_i)$ es mayor que 1, también lo es $(\text{Costo}(F_i)N)^{1/\alpha}$.

Finalmente, la estación fuente s será colocada sobre $L_{\mathcal{F}}$ en cualquier punto que quede a la izquierda de las estaciones s_{F_i} , su movimiento será hacia la derecha a lo largo de la línea $L_{\mathcal{F}}$, de forma que eventualmente pase sobre cada estación s_{F_i} . De esta forma, obtendremos una instancia del problema min-suma- α donde el conjunto de estaciones será $S = \{s\} \cup \{s_{F_i} | 1 \leq i \leq k\} \cup \{s_{u_j} | 1 \leq j \leq n\}$. Ver Figura 7.5.

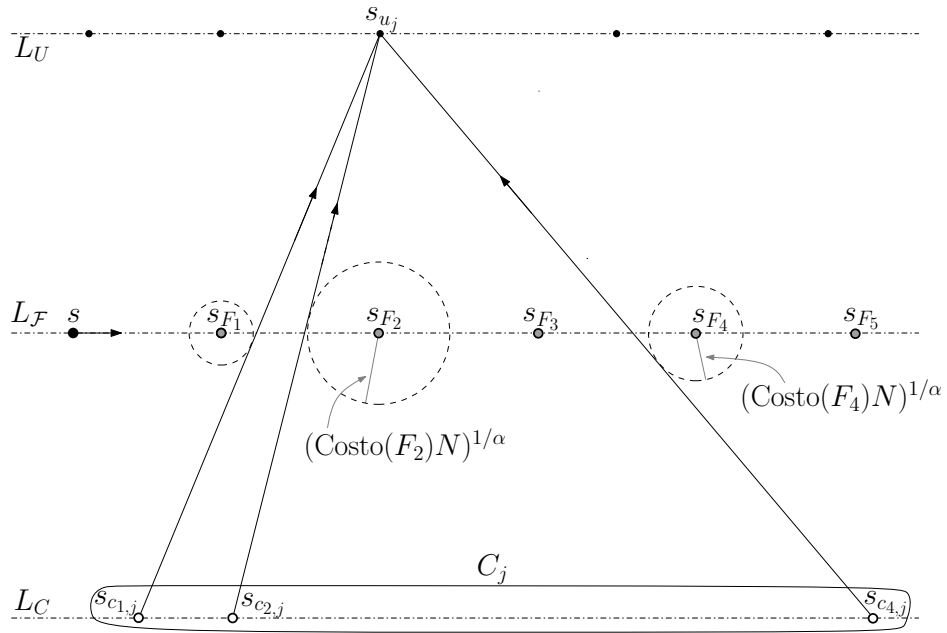


Figura 7.5: Representación visual de las posiciones iniciales y movimientos (Todas las distancias son mayores que P , a menos que se indique lo contrario).

La separación entre las líneas L_U , $L_{\mathcal{F}}$ y L_C debe ser tal que se cumpla con lo siguiente:

- Las tres líneas se encuentran a una distancia mayor a P una de la otra.
- Ninguna estación $s_{c_{i,j}}$ se encuentra en algún momento a distancia menor que P de una estación s_{F_k} , a menos que $i = k$.
- Ninguna estación $s_{c_{i,j}}$ se encuentra en algún momento a distancia menor que P de una estación s_{u_k} , a menos que $j = k$.

Velocidades de Desplazamiento

Las únicas estaciones de S que se encuentran en movimiento son aquellas que están inicialmente sobre L_C y s . Como ya especificamos la trayectoria de cada una de ellas, sólo resta especificar sus velocidades.

Para facilitar la explicación, partiremos el conjunto de estaciones en movimiento en $n+1$ subconjuntos S_0, S_1, \dots, S_n , y, abusando un poco del lenguaje, llamaremos a esos subconjuntos como etapas. La etapa S_0 se compone sólo de la estación fuente s pasando por encima de cada s_{F_i} ; cada etapa S_j , con $j > 0$, se compone de las estaciones C_j dirigiéndose a la estación s_{u_j} .

Entonces, las velocidades de las estaciones en cada etapa se escogen de forma que:

- Para $j > 0$, las estaciones de la etapa S_j llegan a la estación s_{u_j} al mismo tiempo.
- La fuente s genera el mensaje M antes de pasar encima de las estaciones s_{F_i} , y se encuentra siempre a distancia mayor que P de cualquier estación $s_{c_{i,j}}$.
- Ninguna estación $s_{c_{i,j}}$ de la etapa S_j tocará su correspondiente disco D_i antes que las las estaciones de etapas anteriores toquen el suyo, esto es, antes que $s_{c_{k,l}}$ toque D_k , con $j > l$.
- Después que una estación $s_{c_{i,j}}$ de la etapa S_j toque su disco D_i , ninguna estación de etapas posteriores se acercará a $s_{c_{i,j}}$ a distancia menor o igual que P .

Observación 7.3. *La construcción anterior puede realizarse en tiempo polinomial (con respecto al tamaño de la instancia del problema del conjunto cobertura) y se cumple que:*

- *Si una estación $s_{c_{i,j}}$ recibe el mensaje M de una estación ajena a C_j y diferente de s_{F_i} , entonces el rango de transmisión de dicha estación debería ser superior a P .*
- *Si una estación s_{u_j} recibe M de una estación ajena a C_j , entonces el rango de transmisión de dicha estación debería ser superior a P .*

Resultados de pertenencia a NP-duro e inaproximabilidad

Usando los dos lemas siguientes se demostrará la pertenencia del problema min-suma- α a la clase NP-duro. Intuitivamente, una asignación de rangos de transmisión R que resuelva la instancia del problema min-suma- α (inundando M en la red y minimizando $\sum_{s_i \in S} R(s_i)^\alpha$), selecciona un conjunto de estaciones $S_{\mathcal{F}'} \subseteq \{s_{F_i} | 1 \leq i \leq k\}$ donde $R(s_{F_i}) = (\text{Costo}(F_i)N)^{1/\alpha}$ por cada $s_{F_i} \in S_{\mathcal{F}'}$. Dicha selección se puede mapear a un conjunto $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ que cubre U con costo mínimo, resolviendo así la instancia original del problema del conjunto cobertura.

Lema 7.4. *Para toda $\alpha \geq 1$ y $N > 1$, existe una función f que transforma en tiempo polinomial una instancia x del problema del conjunto cobertura en una instancia $f(x)$ del problema min-suma- α , de forma que:*

1. *Si hay una solución para x de costo w , entonces hay una solución para $f(x)$ de costo $Nw + (n + 1)$.*
2. *Si hay una solución a $f(x)$ de costo w' , entonces hay una solución para x de costo a lo más $(w' - (n + 1))/N$.*

Demostración. Sea $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$, $\text{Costo} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ una instancia del problema del conjunto cobertura. La función f será la construcción que se desarrolló arriba, con la cual obtenemos una instancia del problema min-suma- α .

Supongamos que existe una solución para la instancia del problema del conjunto cobertura, con costo de a lo más w . Esto significa que, hay un subconjunto $\mathcal{F}' = \{F_{i'}, \dots, F_{k'}\}$ de \mathcal{F} que cubre U , tal que

$$\sum_{F_{i'} \in \mathcal{F}'} \text{Costo}(F_{i'}) = w.$$

Observemos que la fuente s puede transmitir M a todas las estaciones sobre $L_{\mathcal{F}}$ con un rango de transmisión de radio 1. Si asignamos a cada estación $s_{F_{i'}}$ un radio de transmisión de $(\text{Costo}(F_{i'})N)^{1/\alpha}$ y apagamos el rango de transmisión de las demás estaciones s_{F_i} , entonces cada estación $s_{F_{i'}}$ transmitirá M a todas las estaciones $s_{c_{i',j}}$ con un costo de

$$((\text{Costo}(F_{i'})N)^{1/\alpha})^\alpha = \text{Costo}(F_{i'})N;$$

y así el costo total de esta inundación será de $\sum_{F_{i'} \in \mathcal{F}'} (\text{Costo}(F_{i'})N) = Nw$.

Como por cada elemento u_j hay un conjunto $F_{i'}$ que lo cubre, entonces la estación $s_{c_{i',j}}$ recibe M desde $s_{F_{i'}}$ y podrá transmitirlo a s_{u_j} y a todas las demás estaciones $s_{c_{k,j}}$ que lleguen a s_{u_j} . Escogiendo una de las $s_{c_{i',j}}$ por cada elemento u_j y dándole rango de transmisión de 1, tendremos lo siguiente:

1. Todas las estaciones s_{F_i} reciben M de la fuente s ;
2. todas las estaciones $s_{c_{i,j}}$ también recibieron M , ya sea de s_{F_i} o de una estación en C_j ;
3. todas las estaciones s_{u_j} reciben M de algún elemento en C_j .

Por lo tanto, la asignación de rangos dado corresponde con una solución para la instancia del problema min-suma- α , con un costo de $Nw + (n + 1)$.

Ahora supongamos que existe una solución para la instancia del problema min-suma- α , con costo w' . Por la Observación 7.3, si una estación de tipo $s_{c_{i,j}}$ recibiera M de una estación diferente de s_{F_i} o de una estación que no pertenezca a C_j , entonces el rango de transmisión de dicha estación emisora debe ser mayor que $P = (N(\sum_{F_i \in \mathcal{F}} \text{Costo}(F_i)) + n + 1)^{1/\alpha}$, y su costo asociado mayor que $N(\sum_{F_i \in \mathcal{F}} \text{Costo}(F_i)) + n + 1$. En este caso

$$w' > N\left(\sum_{F_i \in \mathcal{F}} \text{Costo}(F_i)\right) + n + 1,$$

lo cual implicaría que podríamos tomar todo \mathcal{F} como solución para la instancia del problema del conjunto cobertura, ya que su costo sería de a lo más $(w' - (n + 1))/N$. Tendríamos una situación similar si una estación s_{u_j} recibiera M de una estación que no pertenezca a C_j .

Supongamos entonces que todas las estaciones de tipo $s_{c_{i,j}}$ reciben M ya sea de s_{F_i} o de una estación de C_j , y que todas las estaciones s_{u_j} reciben M de una estación en C_j . Observa que la fuente s debe tener forzosamente un rango de transmisión de al menos 1. También, por cada estación s_{u_j} debe haber al menos una estación de C_j con radio de transmisión de al menos 1. Estas asignaciones de rango tienen un costo de al menos $(n + 1)$, dejando disponible a lo más un costo de $w' - (n + 1)$ para repartirse entre las estaciones s_{F_i} que tengan rango de transmisión mayor que cero. Así que, si escogemos \mathcal{F}' formado por los F_i tales que s_{F_i} tenga rango de transmisión mayor que cero, entonces obtendremos un conjunto que cubre U con un costo de a lo más $(w' - (n + 1))/N$. \square

Lema 7.5. *Para toda $\alpha \geq 1$ y $N > 1$, existe una función f que transforma, en tiempo polinomial, cualquier instancia x del problema del conjunto cobertura en una instancia $f(x)$ del problema min-suma- α ; de forma que el valor óptimo $\text{OPT}(f(x))$ de una solución de $f(x)$ es igual a $\text{OPT}(x)N + (n + 1)$, donde $\text{OPT}(x)$ es el valor óptimo de una solución de x .*

Demostración. Sea x una instancia del problema del conjunto cobertura. Y sea f la función descrita en el Lema 7.4. Por el primer inciso del Lema 7.4, existe una solución a $f(x)$ de costo $w' = \text{OPT}(x)N + (n + 1)$. Y por el segundo inciso, si $f(x)$ tuviera una solución de costo menor que w' entonces x tendría una solución de costo menor que $(w' - (n + 1))/N = \text{OPT}(x)$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, $\text{OPT}(f(x))$ debe ser igual a $\text{OPT}(x)N + (n + 1)$, como se quería demostrar. \square

Haciendo uso de los lemas anteriores podemos demostrar el siguiente resultado, acerca de algoritmos de aproximación.

Teorema 7.6. *Sea $\alpha \geq 1$. Si existe un β -algoritmo de aproximación para el problema min-suma- α , esto es, un algoritmo de aproximación que garantice estar a lo más a un factor β de la solución óptima, entonces también existe un β -algoritmo de aproximación para el problema del conjunto cobertura.*

Demostración. Sea x una instancia del problema del conjunto cobertura y toma f la función descrita en el Lema 7.4. Escojamos N lo suficientemente grande de forma que $(\beta - 1)(n + 1)/N$ sea más pequeño que la diferencia entre cualquiera dos soluciones de x . Supongamos ahora que existe un β -algoritmo de aproximación para el problema min-suma- α . Si dicho algoritmo produce una solución para $f(x)$ de costo w' , entonces por el Lema 7.5:

$$w' \leq \beta \text{OPT}(f(x)) \leq \beta(\text{OPT}(x)N + n + 1).$$

Por el Lema 7.4 hay una solución para x con costo a lo más:

$$(w' - (n + 1))/N \leq \beta \text{OPT}(x) + (\beta - 1)(n + 1)/N.$$

Y dada la N que elegimos esto es a lo más $\beta \text{OPT}(x)$. \square

El problema del conjunto cobertura no es aproximable a un factor $(1 - o(1)) \ln n$, a menos que $\text{NP} \subset \text{DTIME}(n^{O(\log \log n)})$ (ver [29]), entonces como consecuencia del teorema anterior podemos resumir lo siguiente:

Teorema 7.7. *El problema min-suma- α es NP-duro y no es polinomialmente aproximable a un factor $(1 - o(1)) \ln n$, excepto que $\text{NP} \subset \text{DTIME}(n^{O(\log \log n)})$.*

7.3.2. El problema min-suma-binario

Por lo expuesto en el Teorema 7.7, podemos concluir que determinar un buen factor de aproximación para el problema min-suma- α no es una tarea trivial. A continuación se discutirá una posible aproximación polinomial al problema min-suma-binario, resaltando sólo su valor teórico, ya que su factor de aproximación es muy alto no tiene mérito en la práctica.

Recordemos que el problema de min-suma-binario consiste en, dados el conjunto de n estaciones S , la estación fuente $s \in S$, un mensaje M generado en s en el tiempo t_0 , determinar el mínimo número de estaciones que deben ser encendidas (que deben tener rango de transmisión de radio 1) de forma que se inunde M en la red. Suponiendo que el resto de las estaciones pueden recibir mensajes, pero no transmitir (o abusando del lenguaje, que tienen rango de transmisión de radio 0).

Primero que nada debemos observar que, de manera análoga al Teorema 7.7, la construcción desarrollada en la sección 7.3.1 y el Teorema 7.6 implican lo siguiente:

Teorema 7.8. *El problema de min-suma-binario es NP-duro y no es polinomialmente aproximable a un factor $(1 - o(1)) \ln n$, a menos que $\text{NP} \subset \text{DTIME}(n^{O(\log \log n)})$.*

Para nuestro algoritmo de aproximación nos basaremos en el clásico algoritmo de aproximación *voraz* (greedy) para el problema del conjunto cobertura [15]. A grandes rasgos, a cada paso buscaremos maximizar el siguiente radio: el número de estaciones nuevas que reciben el mensaje entre el costo que conlleva transmitir M a esas estaciones. Específicamente, escogemos la estación s_i y el tiempo t que maximicen el radio dado por: el número de estaciones nuevas que recibirán M de s_i después del tiempo t entre el mínimo número de estaciones que deben ser encendidas para que s_i tenga M al tiempo t . Para discretizar el espacio de búsqueda, consideraremos sólo aquellos tiempos en que una estación s_j entra dentro del rango de transmisión de s_i .

Formalmente, supongamos que la estación s_i está encendida, podemos tomar a $t_{i,1} \leq t_{i,2} \leq \dots \leq t_{i,k_i}$ como los tiempos en que otras estaciones entran en el rango de transmisión de s_i , con $k_i < n$. Sea $S_{i,k}$ el conjunto de estaciones que estarán dentro del rango de transmisión de s_i al tiempo $t_{i,k}$ o posterior. Y así definimos el costo de cada $S_{i,k}$, denotado por $\text{Costo}(S_{i,k})$, como el número mínimo de estaciones que deben encenderse para que s_i haya recibido M para el tiempo $t_{i,k}$.

Esta función de costo puede calcularse en tiempo polinomial: Supongamos que todas las estaciones están encendidas, y sean $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_p$ los instantes de tiempo en que cualquiera dos estaciones adquieren comunicación. Dado uno de estos instantes t_k , definimos $G(t_k)$ como la subgráfica de G_1 (definida en la Sección 7.2) que contiene sólo las aristas cuyo intervalo empiece después del tiempo t_k . Y denotamos con $T(t_k)$ al árbol obtenido al ejecutar ESTÁ-CONECTADO (de la Sección 7.1) con $G(t_k)$, s y t_0 como entradas.

Observemos que, si s_i tiene M al tiempo t_k , entonces $\text{Costo}(S_{i,k}) - 1$ corresponde con la longitud del camino entre s y s_i en $T(t_k)$. Entonces podemos calcular el costo de cada $S_{i,k}$ en tiempo polinomial, al obtener los árboles $T(t_1), T(t_2), \dots, T(t_p)$, y llegar así al siguiente algoritmo de aproximación:

Algoritmo 3 APROX-MIN-SUMA-BINARIO

1. Mientras S tenga estaciones no marcadas como “cubiertas”:
 2. Escogemos la $S_{i,k}$ que maximice el valor:

$$\text{radio}(S_{i,k}) = (\# \text{ estaciones de } S_{i,k} \text{ no “cubiertas”}) / \text{Costo}(S_{i,k})$$
 3. Marca las estaciones de $S_{i,k}$ como “cubiertas”.
 4. Enciende la estación s_i .
-

En cierto sentido, estamos “cubriendo” S utilizando los conjuntos $S_{i,k}$, y al mismo tiempo intentamos minimizar la suma de valores $\text{Costo}(S_{i,k})$, esto es, estamos resolviendo una instancia del problema del conjunto cobertura. Del análisis presentado en [15], el enfoque voraz (greedy) que estamos utilizando estará a lo más a un factor $\ln |S| + 1 = \ln n + 1$ de la solución óptima de la “instancia” del problema del conjunto cobertura. Sin embargo, desde el punto de vista del problema min-suma-binario, dicho factor de aproximación no se mantiene; la solución obtenida estará a un factor aún mayor, con respecto a la solución óptima OPT de nuestra instancia original de min-suma-binario.

Explícitamente, el factor de aproximación del algoritmo APROX-MIN-SUMA-BINARIO es de $(\ln n + 1)\text{OPT}$, con una complejidad en tiempo de $O(n^4)$. No se incluye en este trabajo el análisis realizado para obtener dichos valores, ya que no contribuye a mejorar el entendimiento del problema, y es claro que por su complejidad, el algoritmo APROX-MIN-SUMA-BINARIO no tiene mérito en la práctica.

Capítulo 8

Conclusiones

A lo largo de esta Parte II estudiamos problemas donde permitimos que nuestros conjuntos de puntos tuvieran movimiento. En particular los vimos como si fueran estaciones inalámbricas de una red; buscando inundar información en ésta y al mismo tiempo manteniendo un uso eficiente de la energía. Nuestro enfoque intenta, más que nada, discernir exactamente qué aspectos cambian al introducir la variable del movimiento en las redes inalámbricas *ad hoc*; y es justo con esta intención que restringimos el modelo a movimiento rectilíneo uniforme e intercambio instantáneo de mensajes.

Sorprendentemente, algunos de los problemas propuestos pudieron ser resueltos en tiempo polinomial, aún con movimiento, por ejemplo los problemas de inundación y min-rangos-iguales. Como se esperaba, otros problemas incrementaron su dificultad de la versión estática a la versión móvil. El problema min-suma- α es NP-duro ahora también para $\alpha = 1$, y su factor de aproximación creció de constante (para el caso estático) a al menos logarítmico con respecto al número de estaciones (Teorema 7.7).

Creemos que se puede hacer muy poco en cuanto a algoritmos de aproximación para el problema min-suma- α . De hecho conjeturamos que no puede ser aproximado a un factor mayor que logarítmico. Por otro lado, debemos observar que hay estrategias que no fueron ampliamente exploradas en la realización de esta investigación, como el uso de heurísticas; por ejemplo, el algoritmo ESTÁ-CONECTADO puede ser combinado con una búsqueda tabú [34] para intentar buscar soluciones al problema min-suma- α .

Bibliografía

- [1] B. M. Ábrego, S. Fernández-Merchant, J. Leaños, and G. Salazar. A central approach to bound the number of crossings in a generalized configuration. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:273–278, 2008.
- [2] O. Aichholzer. On the rectilinear crossing number. <http://www.ist.tugraz.at/aichholzer/research/rp/triangulations/crossing/>.
- [3] O. Aichholzer. [Empty] [colored] k -gons - Recent results on some Erdős-Szekeres type problems. In *Proc. XIII Encuentros de Geometría Computacional ECG2009*, pages 43–52, Zaragoza, España, 2009.
- [4] O. Aichholzer. Enumerating order types for small point sets with applications. <http://www.ist.tugraz.at/aichholzer/research/rp/triangulations/ordertypes/>, 2012.
- [5] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, H. González-Aguilar, T. Hackl, M. A. Heredia, C. Huemer, J. Urrutia, P. Valtr, and B. Vogtenhuber. On k -gons and k -holes in point sets. In *Proc. 23th Canadian Conference on Computational Geometry CCCG'11*, pages 21–26, Toronto, Canadá, 2011.
- [6] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, H. González-Aguilar, T. Hackl, M. A. Heredia, C. Huemer, J. Urrutia, P. Valtr, and B. Vogtenhuber. 4-holes in point sets. *Computational Geometry: Theory and Applications, Special Issue on the 27th European Workshop on Computational Geometry*, Por aparecer.
- [7] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, H. González-Aguilar, T. Hackl, M. A. Heredia, C. Huemer, J. Urrutia, and B. Vogtenhuber. 4-holes in point

- sets. In *Proc. 27th European Workshop on Computational Geometry EuroCG'11*, pages 115–118, Morschach, Suiza, 2011.
- [8] O. Aichholzer, R. Fabila-Monroy, T. Hackl, C. Huemer, A. Pilz, and B. Vogtenhuber. Lower bounds for the number of small convex k -holes. In *Proc. 24th Canadian Conference on Computational Geometry CCCG'12*, Charlottetown, Canada, 2012. Por aparecer.
- [9] O. Aichholzer, T. Hackl, and B. Vogtenhuber. On 5-holes and 5-gons. In *Proc. XIV Encuentros de Geometría Computacional ECG2011*, pages 7–10, Alcalá de Henares, España, 2011.
- [10] O. Aichholzer, T. Hackl, and B. Vogtenhuber. On 5-holes and 5-gons. In A. Marquez, P. Ramos, and J. Urrutia, editors, *Special issue: XIV Encuentros de Geometría Computacional ECG2011*, Lecture Notes in Computer Science (LNCS), page to appear. Springer, 2012.
- [11] O. Aichholzer and H. Krasser. The point set order type data base: A collection of applications and results. In *Proc. 13th Canadian Conference on Computational Geometry CCCG'01*, volume 13, pages 17–20, 2001.
- [12] I. Bárány and P. Valtr. Planar point sets with a small number of empty convex polygons. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 41(2):243–266, 2004.
- [13] P. Brass, W. Moser, and J. Pach. *Research Problems in Discrete Geometry*. Springer, 2005.
- [14] T. Camp, J. Boleng, and V. Davies. A survey of mobility models for ad hoc network research. *Wireless Communications & Mobile Computing (WCMC): Special Issue On Mobile Ad Hoc Networking: Research, Trends And Applications*, 2(5):483–502, 2002.
- [15] V. Chvatal. A greedy heuristic for the set-covering problem. *Mathematics of Operations Research*, 4(3):233–235, 1979.
- [16] A. Clementi, P. Crescenzi, P. Penna, G. Rossi, and P. Vocca. On the complexity of computing minimum energy consumption broadcast subgraphs. In A. Ferreira and H. Reichel, editors, *STACS 2001*, volume 2010 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 121–131. Springer, 2001.

-
- [17] T. H. Cormen, C. Stein, R. L. Rivest, and C. E. Leiserson. *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill Higher Education, 2nd edition, 2001.
- [18] J. M. Díaz-Báñez, R. Fabila-Monroy, D. Flores-Peñaloza, M. A. Heredia, and J. Urrutia. Min-energy broadcast in mobile ad hoc networks with restricted motion. *Journal of Combinatorial Optimization*, 24:413–426, 2012.
- [19] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational geometry: algorithms and applications*. Springer-Verlag, Secaucus, NJ, USA, 1997.
- [20] J. A. De Loera, J. Rambau, and F. Santos. *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*, volume 25 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, 1st edition, 2010.
- [21] K. Dehnhardt. *Leere konvexe Vielecke in ebenen Punktmengen*. PhD thesis, TU Braunschweig, Germany, 1987. En Alemán.
- [22] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2005.
- [23] A. Dumitrescu, A. Schulz, A. Sheffer, and C. Tóth. Bounds on the maximum multiplicity of some common geometric graphs. In *Proc. 28th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2011)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), pages 637–648, Dagstuhl, Germany, 2011.
- [24] P. Erdős. Some more problems on elementary geometry. *Australian Mathematical Society Gazette*, 5:52–54, 1978.
- [25] P. Erdős. Some old and new problems in combinatorial geometry. In M. Rosenfeld and J. Zaks, editors, *Annals of Discrete Mathematics (20) - Convexity and Graph Theory - Proceedings of the Conference on Convexity and Graph Theory*, volume 87 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 129 – 136. North-Holland, 1984.
- [26] P. Erdős and R. Guy. Crossing number problems. *The American Mathematical Monthly*, 88:52–58, 1973.

-
- [27] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [28] P. Erdős and G. Szekeres. On some extremum problems in elementary geometry. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös, Sect. Math.*, 3/4:53–62, 1960.
- [29] U. Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *Journal of the ACM*, 45(4):634–652, 1998.
- [30] A. García. A note on the number of empty triangles. In *Proc. XIV Encuentros de Geometría Computacional ECG2011*, pages 101–104, Alcalá de Henares, España, 2011.
- [31] A. García. A note on the number of empty triangles. In A. Marquez, P. Ramos, and J. Urrutia, editors, *Special issue: XIV Encuentros de Geometría Computacional ECG2011*, Lecture Notes in Computer Science (LNCS), page to appear. Springer, 2012.
- [32] A. García, M. Noy, and J. Tejel. Lower bounds on the number of crossing-free subgraphs of K_n . *Computational Geometry: Theory and Applications*, 16:211–221, 2000.
- [33] T. Gerken. Empty convex hexagons in planar point sets. *Discrete and Computational Geometry*, 39(1–3):239–272, 2008.
- [34] F. Glover and M. Laguna. *Tabu Search*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [35] J. E. Goodman and R. Pollack. Multidimensional sorting. *SIAM Journal on Computing*, 12(3):484–507, 1983.
- [36] H. Harborth. Konvexe fünfecke in ebenen punktmengen. *Elemente der Mathematik*, 33:116–118, 1978. En Alemán.
- [37] J. Horton. Sets with no empty convex 7-gons. *Canadian Mathematical Bulletin*, 26(4):482–484, 1983.
- [38] J. Kalbfleisch, J. Kalbfleisch, and R. Stanton. A combinatorial problem on convex n -gons. In *Proc. Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, pages 180–188, Louisiana State University, 1970.

-
- [39] G. Károlyi, J. Pach, and G. Tóth. A modular version of the Erdős-Szekeres theorem. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 38(1–4):245–260, 2001.
- [40] C. Nicolás. The empty hexagon theorem. *Discrete and Computational Geometry*, 38(2):389–397, 2007.
- [41] J. Pach. Finite point configurations. In J. E. Goodman and J. O’Rourke, editors, *Handbook of discrete and computational geometry*, pages 3–18. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1997.
- [42] K. Pahlavan and A. H. Levesque. *Wireless information networks*. Wiley-Interscience, 2005.
- [43] D. Peleg. Time-efficient broadcasting in radio networks. In A. Pelc, editor, *Distributed Computing*, volume 4731 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 3–4. Springer, 2007.
- [44] R. Pinchasi, R. Radoičić, and M. Sharir. On empty convex polygons in a planar point set. *J. Comb. Theory Ser. A*, 113:385–419, April 2006.
- [45] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry: An introduction*. Monographs in Computer Science. Springer New York, 1985.
- [46] M. G. C. Resende and P. M. Pardalos, editors. *Handbook of optimization in telecommunications*. Springer, 2006.
- [47] M. Sharir and A. Sheffer. Counting triangulations of planar point sets. *arXiv:0911.3352*, 2009.
- [48] G. Szekeres and L. Peters. Computer solution to the 17-point erdős-szekeres problem. *The ANZIAM Journal*, 48(2):151–164, 2006.
- [49] G. Tóth and P. Valtr. The erdős-szekeres theorem: upper bounds and related results. *Combinatorial and Computational Geometry, J.E. Goodman, J. Pach, and E. Welzl (Eds.)*, 52:557–568, 2005.
- [50] P. Valtr. Convex independent sets and 7-holes in restricted planar point sets. *Disc. Comp. Geom.*, 7:135–152, 1992.

-
- [51] P. Valtr. On empty hexagons. *J. E. Goodman, J. Pach, and R. Pollack, Surveys on Disc. Comp. Geom., Twenty Years Later, Contemp. Math. 453, AMS*, 453:433–441, 2008.
- [52] P. Valtr. On empty pentagons and hexagons in planar point sets. In *Proc. 18th Computing: Australasian Theory Symposium CATS2012*, pages 47–48, Melbourne, Australia, 2012.
- [53] V. V. Vazirani. *Approximation algorithms*. Springer, 2001.
- [54] Y. Wang and X.-Y. Li. Minimum power assignment in wireless ad hoc networks with spanner property. *Journal of Combinatorial Optimization*, 11:99–112, 2006.
- [55] B. Williams and T. Camp. Comparison of broadcasting techniques for mobile ad hoc networks. In *Proceedings of the 3rd ACM international symposium on Mobile ad hoc networking & computing, MobiHoc '02*, pages 194–205. ACM, 2002.
- [56] W. Zhao, M. Ammar, and E. Zegura. A message ferrying approach for data delivery in sparse mobile ad hoc networks. In *Proceedings of the 5th ACM international symposium on Mobile ad hoc networking and computing, MobiHoc '04*, pages 187–198. ACM, 2004.

Pero creo en tu fuerza,
porque el trigo germina;
y llegará el día, pueblo mío,
en que se unan tus hijos
para lavar tu frente,
que si estás indefenso
no será para siempre.

No será para siempre,
cuando se unan tus hijos
para lavar tu frente.

Alí Primera, "Trigo y molino" (fragmento).

Aprieto firme mi mano
y hundo el arado en la tierra,
hace años que llevo en ella,
¿cómo no estar agotado?
[. . .]

Vuelan mariposas, cantan grillos,
la piel se me pone negra,
y el sol brilla, brilla, brilla.
Y en la tarde, cuando vuelvo,
en el cielo apareciendo
una estrella.

Nunca es tarde, me dice ella,
la paloma volará, volará, volará.
Como el yugo de apretado,
tengo el puño esperanzado,
porque todo . . .
cambiará.

Víctor Jara, "El Arado" (fragmento).