



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de interfaces en un flujo
supersónico mediante shadowgraph
(gráfica de sombras)

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

DAVID PORTA ZEPEDA

DIRECTOR DE TESIS: DRA. CATALINA
ELIZABETH STERN FORGACH

2013





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1.	Resumen	1
2.	Antecedentes	2
3.	Marco teórico	6
3.1	Flujo Compresible	6
3.2	Flujo compresible unidimensional e isentrópico	7
3.3	Técnicas Schlieren y Shadowgraph de visualización	12
3.4	Desviación de la Luz en un medio	13
3.5	Planteamiento geométrico de la desviación de la luz	15
3.6	Técnica schlieren	18
3.7	Técnica shadowgraph	21
3.8	Método de schlieren con un fondo de malla.	24
4.	Métodos experimentales	26
4.1	Optimización de montajes anteriores de schlieren y shadowgraph	26
4.2	Efecto de las diferencias de presión en la estructura de choque	27
4.2.1	Construcción del Riel	30
4.3	Shadowgraph con partículas sembradas en el flujo	32
4.4	Técnica para cuantificar los cambios en el índice de refracción	32
5.	Resultados	35
5.1	Observaciones con los montajes anteriores de schlieren y shadowgraph	35
5.2	Resultados de las diferencias de presión en la estructura de choque	35
5.2.1	Altitudes y presión atmosférica	45
5.2.2	Procesamiento de las Imágenes	46
5.2.3	Determinación de la posición de las ondas de choque	48
5.2.4	Determinación del número de Mach con base en las fotografías	54
5.3	Cambios en la estructura de choque debidos a las partículas sembradas en el flujo	56
5.4	Cuantificación de los cambios en el índice de refracción	59
6.	Discusión	65
6.1	Explicación de lo visto con los montajes anteriores de schlieren y shadowgraph	65

6.2	Discusiones de las diferencias de presión en la estructura de choque.....	66
6.3	Comentarios del shadowgraph con partículas sembradas	67
6.4	Propuestas para cuantificar los cambios en el índice de refracción	68
7.	Conclusiones y Trabajo Futuro	70
7.1	Conclusiones.....	70
7.2	Trabajo a futuro.....	71
8.	Bibliografía.....	73
	Apéndice: Tablas de datos	75

1. Resumen

El objetivo del presente trabajo de tesis, es aportar información que permita comparar y completar la información que se tiene hasta el momento sobre el flujo supersónico. Así como también dar posibles explicaciones a fenómenos que se han presentado paralelamente durante el estudio del flujo supersónico y se ha ahondado en ellos, como: la utilización de toberas convergentes en lugar de toberas convergentes-divergentes y la correcta interpretación de las imágenes de schlieren.

Se pretende aportar información sobre los gradientes de densidad, presentes en el flujo supersónico y se propone un método para cuantificar los cambios puntuales en el índice de refracción.

Paralelamente y en estrecha relación a este estudio, se trabaja en la implementación de un sistema de velocimetría por imágenes de partículas (PIV) para encontrar campos de velocidades dentro del flujo supersónico [13]. En colaboración con éste trabajo, mediante la técnica de visualización shadowgraph, se localizan las regiones de alta densidad correspondientes a las estructuras de choque. También se explora la forma en que se ve afectada la estructura de las ondas de choque, al sembrar el flujo con partículas trazadoras.

Se espera poder relacionar las imágenes obtenidas con los datos sobre la velocidad y las fluctuaciones de densidad, para poder localizar las fuentes de ruido y determinar el patrón de propagación de ondas dentro y fuera del flujo.

2. Antecedentes

En el Laboratorio de Acústica del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la UNAM se ha estudiado un flujo supersónico con diversas técnicas, a fin de aportar información complementaria del fenómeno.

Uno de los objetivos es poder relacionar la emisión acústica del fluido con los eventos aerodinámicos que la producen. A continuación se hace una breve descripción de la labor realizada, para poner en contexto el trabajo que se presenta en esta tesis.

La hipótesis más aceptada sobre las fuentes de emisión acústica [18] y [19], en un flujo supersónico, son las interacciones entre los vórtices de la capa de mezcla, la turbulencia y la interacción entre el flujo y la estructura de choque, las que producen ondas en un amplio espectro de frecuencias.

Puesto que no se pueden introducir micrófonos dentro del flujo, puesto que alterarían su comportamiento, la manera de estudiar la emisión acústica ha sido a través de correlacionar señales provenientes de arreglos de micrófonos en campo lejano. Sin embargo, debido al problema inverso, de correlacionar la información obtenida, y a la difracción de ondas en la capa de mezcla, es imposible localizar las fuentes con esta técnica. Además, la emisión acústica va del audible al ultrasonido, por lo que la información que proporcionan los micrófonos es limitada.

En el laboratorio de acústica se desarrolló una técnica no intrusiva que utiliza la difusión Rayleigh combinada con la detección heterodina para estudiar la densidad espectral de las fluctuaciones de densidad. Consiste en hacer pasar una onda electromagnética \overline{E}_i a través de un gas transparente, lo que induce un momento dipolar en sus moléculas, las cuales emiten a su vez un campo dispersado \overline{E}_s ver figura 1. La amplitud de \overline{E}_s es proporcional a la transformada de Fourier espacial de las fluctuaciones de densidad para un vector de onda, cuya dirección está determinada por el montaje óptico [9] y [10].

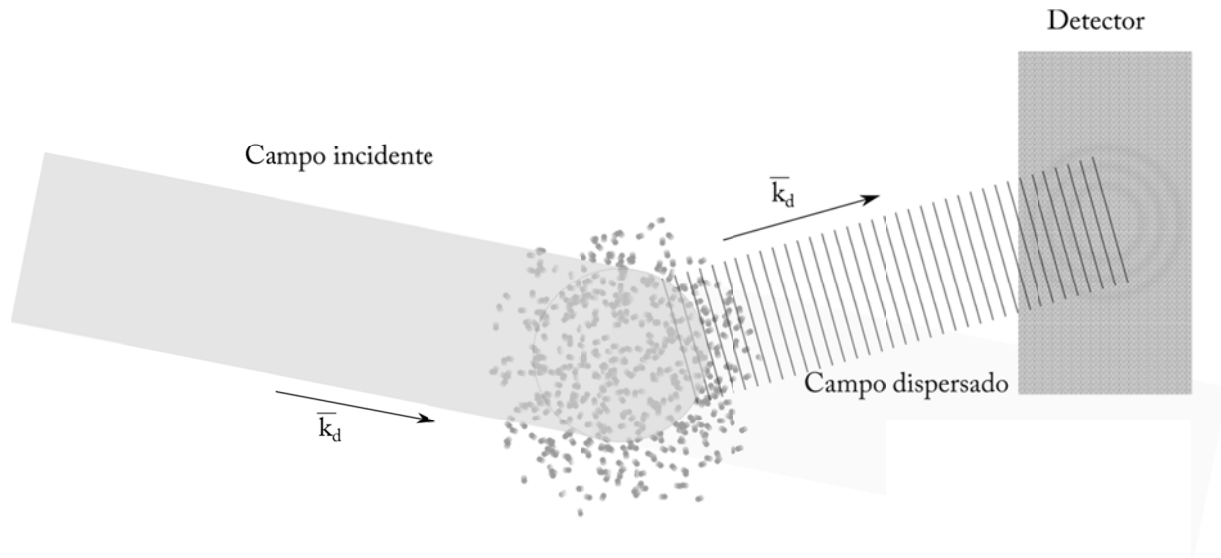


Figura 1.-Esquema de la difusión Rayleigh por la región de dispersión.

Como el campo dispersado tiene una baja potencia, no se puede detectar fácilmente, por este motivo se usa la detección heterodina que consiste en mezclar, sobre un detector, el campo dispersado con otro campo de referencia, llamado oscilador local $\overline{E_{OL}}$, desplazado en frecuencia con respecto al incidente.

El arreglo, mostrado en la figura 2, utiliza un láser de 532nm que se hace pasar a través de un modulador opto-acústico que divide el haz en uno primario, que será el incidente, y otro de referencia. Los dos haces se enfocan en la región de interés, después de lo cual el primario se obstruye y el haz de referencia se hace incidir sobre el detector. El campo total que llega al detector es $\overline{E_t} = \overline{E_i} + \overline{E_s}$. La corriente eléctrica que sale del detector es proporcional a la potencia, es decir, al cuadrado de $\overline{E_t}$:

$$i(t) = \eta \frac{e}{h\nu} \int [|\overline{E_T}(\vec{r}, t)|^2] d^2r = \eta \frac{e}{h\nu} \int [|\overline{E_s}(\vec{r}, t) + \overline{E_{OL}}(\vec{r}, t)|^2] d^2r$$

donde η es la eficiencia cuántica del detector, e la carga del electrón y h es la constante de Planck.

La señal se estudia en el espacio de las frecuencias, se calcula la transformada de Fourier de la función de correlación de la corriente, llamada densidad espectral $I(\omega)$:

$$I(\omega) = \frac{n_0 \epsilon_0}{8\pi k_0^2 \mu_0} \left(\frac{\eta e r_0^2}{\hbar \omega_0} \right) \int |W(\vec{\kappa}_\Delta - \vec{\kappa})|^2 [S(\vec{\kappa}, \omega - \omega_\Delta) + S(\vec{\kappa}, \omega + \omega_\Delta)] d^3 k$$

donde S es el factor de forma que es proporcional a la densidad espectral de las fluctuaciones de densidad, $n(\vec{\kappa}, \omega)$ es la transformada de Fourier espacial y temporal de la densidad y W es la transformada de Fourier del perfil del haz. Dentro de la densidad espectral ($I(\omega)$) se encuentra información sobre las fluctuaciones de densidad, en el interior del volumen de difusión. Si este volumen es muy pequeño, se puede suponer que la medición se realiza de forma puntual.

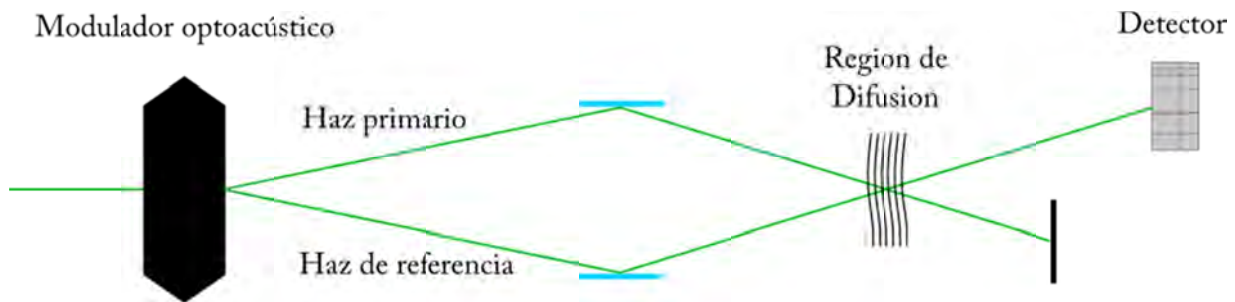
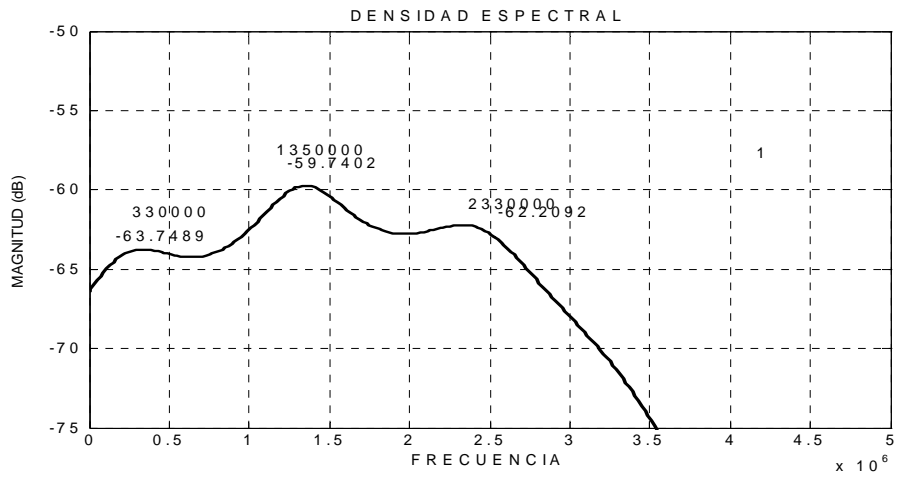


Figura 2.-.- Esquema de la implementación de la difusión Rayleigh y la detección heterodina, para estudiar un gas.

En un flujo compresible, cuando las fluctuaciones son pequeñas, se dividen en tres grupos: entrópicas, acústicas y vorticales. Con la técnica de difusión Rayleigh combinada con la detección heterodina, se pueden detectar los modos de oscilación acústica y entrópica, los cuales dependen de la compresibilidad, una gráfica típica de los espectros obtenidos se muestra en la gráfica 1. Además se ha detectado una fluctuación lenta que aparece muy cerca de las ondas de choque, la cual no se había reportado anteriormente.

La técnica también sirve para medir la velocidad del flujo [10] [13] y para dar valores absolutos de la densidad, sin embargo se requiere calibrar el sistema.

Para visualizar la estructura de choque, se han usado tanto la difusión Rayleigh como las técnicas de schlieren y shadowgraph que se describirán más adelante en detalle, pues son el tema principal de este trabajo. Hasta el momento, no se ha podido observar el flujo al mismo tiempo que la estructura de choque, aunque hay técnicas que permiten hacerlo [2].



Gráfica 1.-Espectro típico de las fluctuaciones entrópicas, acústicas y vorticales.

3. Marco teórico

3.1 Flujo Compresible

Los flujos compresibles son aquellos que presentan variaciones importantes en su densidad. Esto ocurre principalmente en flujos de gases a grandes velocidades, en los que hay variaciones importantes en la presión local, y además los cambios de temperatura no son despreciables. En el caso incompresible, las ecuaciones de momento y de energía están desacopladas; en el caso compresible es necesario tomar ambas ecuaciones en cuenta. Además, al tener a la temperatura como variable, se requiere de una ecuación adicional, para lo cual se recurre a las ecuaciones de estado.

En los flujos compresibles se utiliza un parámetro conocido como el número de Mach (M), el cual se define como el cociente de la velocidad local de la partícula fluida (u), entre la velocidad local del sonido (c):

$$M = \frac{u}{c}$$

En general el número de Mach cambia con la posición y el tiempo pero, en muchos problemas se puede elegir como un valor representativo. Según el valor de M , el flujo tiene propiedades muy diferentes:

Con $M < 1$ el flujo es incompresible, regresando a regímenes en los que la densidad no cambia y la temperatura se puede considerar constante.

Sí $M = 1$ se dice que es un flujo transónico o sónico, es un punto crítico entre los flujos compresibles e incompresibles.

Cuando $1 < M < 5$, entonces se dice que el flujo es compresible, presentando las características antes mencionadas.

Y si $M > 5$ el flujo se categoriza como hipersónico, en el cual hay efectos adicionales como grandes temperaturas e ionización en los gases [7].

3.2 Flujo compresible unidimensional e isentrópico

Los flujos compresibles cambian con la fricción, la transferencia de calor y con la variación del área. En este estudio se supone que el flujo es isentrópico y unidimensional. A partir de las ecuaciones de momento y de continuidad [5], se llega a la siguiente relación para la variación de la sección transversal en un flujo:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{du}{u}(1 - M^2)$$

Ésta ecuación es de gran relevancia, ya que dice la forma en que cambia la velocidad de un flujo al cambiar la sección transversal por la que se mueve. Si $M < 1$ un cambio en el área produce un cambio con signo opuesto en la velocidad. Esto es, para aumentar la velocidad, en un ducto, hay que disminuir el diámetro, lo cual concuerda con la experiencia en flujos subsónicos o incompresibles. Mientras que, si $M > 1$ un cambio en el área da lugar a un cambio de velocidad con el mismo signo. Por lo tanto, para aumentar la velocidad de un flujo supersónico se requiere que se aumente el área de la sección transversal, lo cual se resume en la figura 3.

Ahora si $M = 1$ entonces el cambio de área es un extremal, que para éste caso es un mínimo, esto es, se alcanza un régimen transónico cuando el área alcanza un valor mínimo.

Del resultado anterior se deduce que para llevar un flujo subsónico al régimen supersónico, se requiere de una tobera convergente seguida de una divergente y en la unión de las dos, donde la sección del área es mínima (estrangulamiento) $M = 1$. En teoría para desacelerar el flujo se debería seguir un proceso análogo, esto es una combinación tobera-difusor, pero cuando la presión crece en la dirección del flujo, éste se vuelve inestable cerca del estrangulamiento.

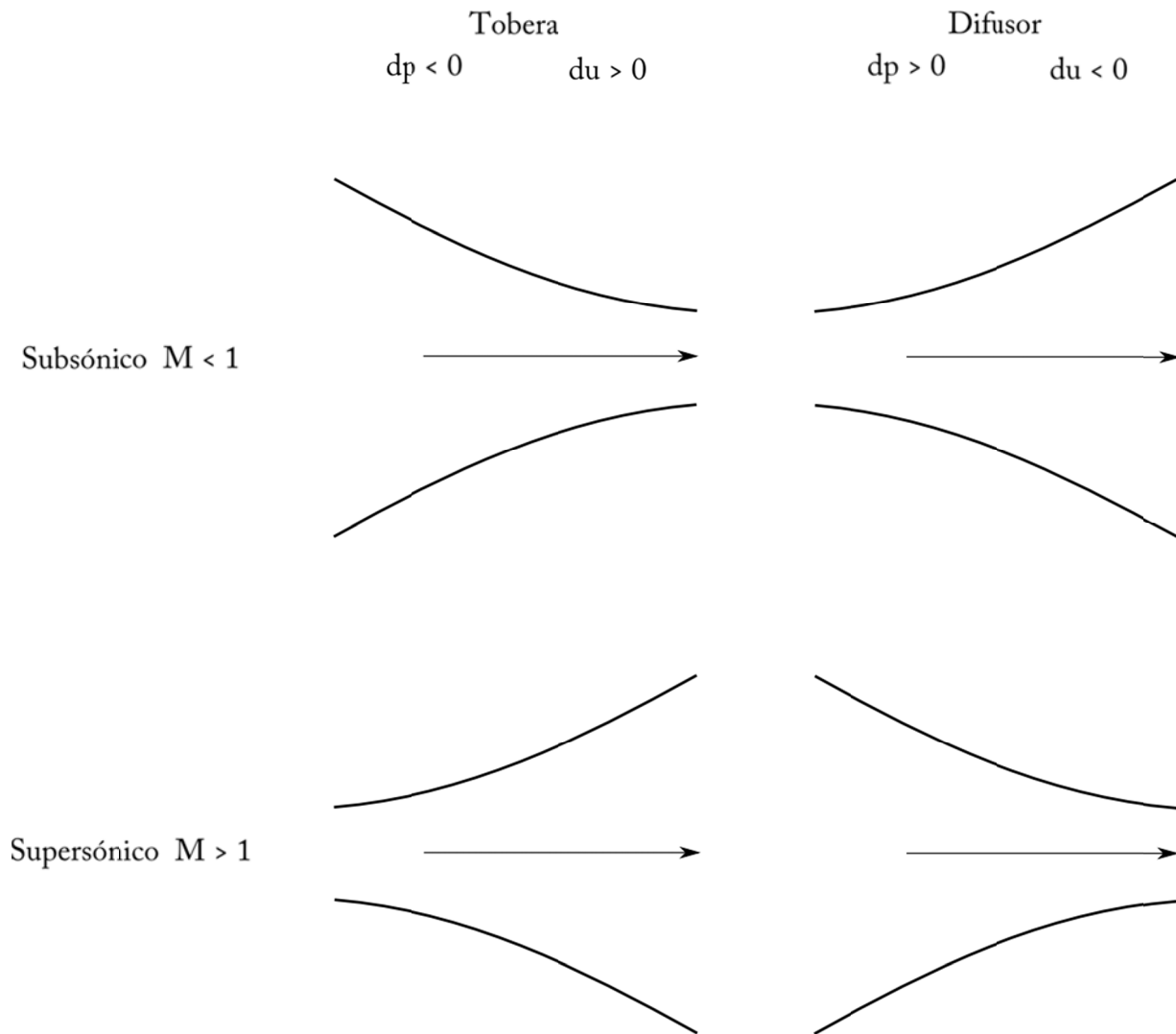
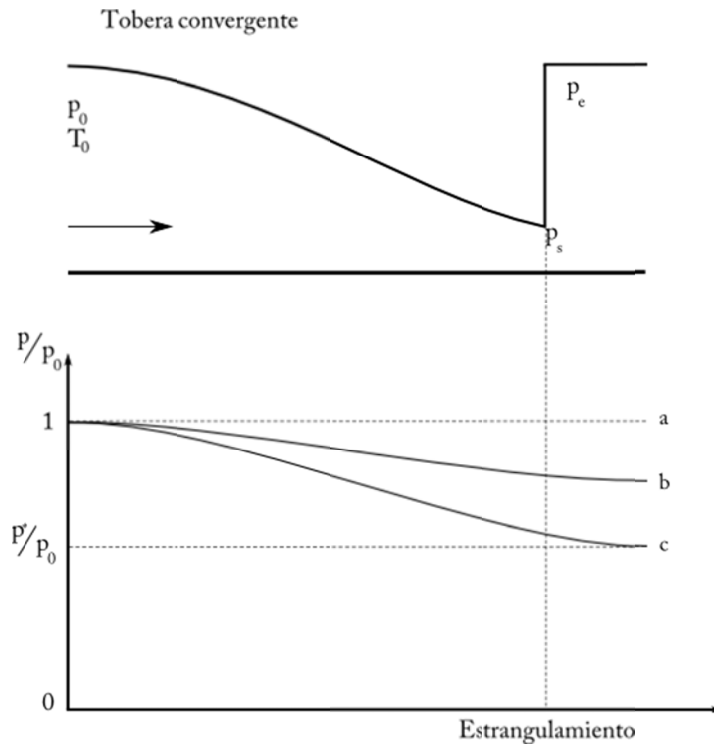


Figura 3.-Comparación entre una tobera supersónica, tobera subsónica, difusor supersónico y un difusor subsónico.

El comportamiento de la presión a la salida (p_s) de una tobera convergente, al cambiar la presión exterior (p_e), y manteniendo constantes las variables antes de la tobera (incluida la presión p_0), se puede ver en la gráfica 2 cuya explicación es la siguiente:

Cuando no hay flujo, la presión externa es la misma que la presión en el interior (Gráfica 2-a). Si la presión externa es menor que la presión en el interior de la tobera, entonces, se producirá un flujo, en el cual, la presión irá disminuyendo a lo largo de la tobera, hasta ser expulsada con una presión de salida (p_s) provocando un flujo subsónico (Gráfica 2-b).



Gráfica 2.- Distribución de presiones en una tobera convergente

Si la presión exterior disminuye aún más, la presión a lo largo de la tobera disminuye más y aumenta el gasto. Éste proceso continúa hasta llegar al punto en el cual la velocidad del flujo alcanza la velocidad del sonido (Gráfica 2-c) en donde el gasto llega a un máximo y a una presión crítica (p^*).

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}$$

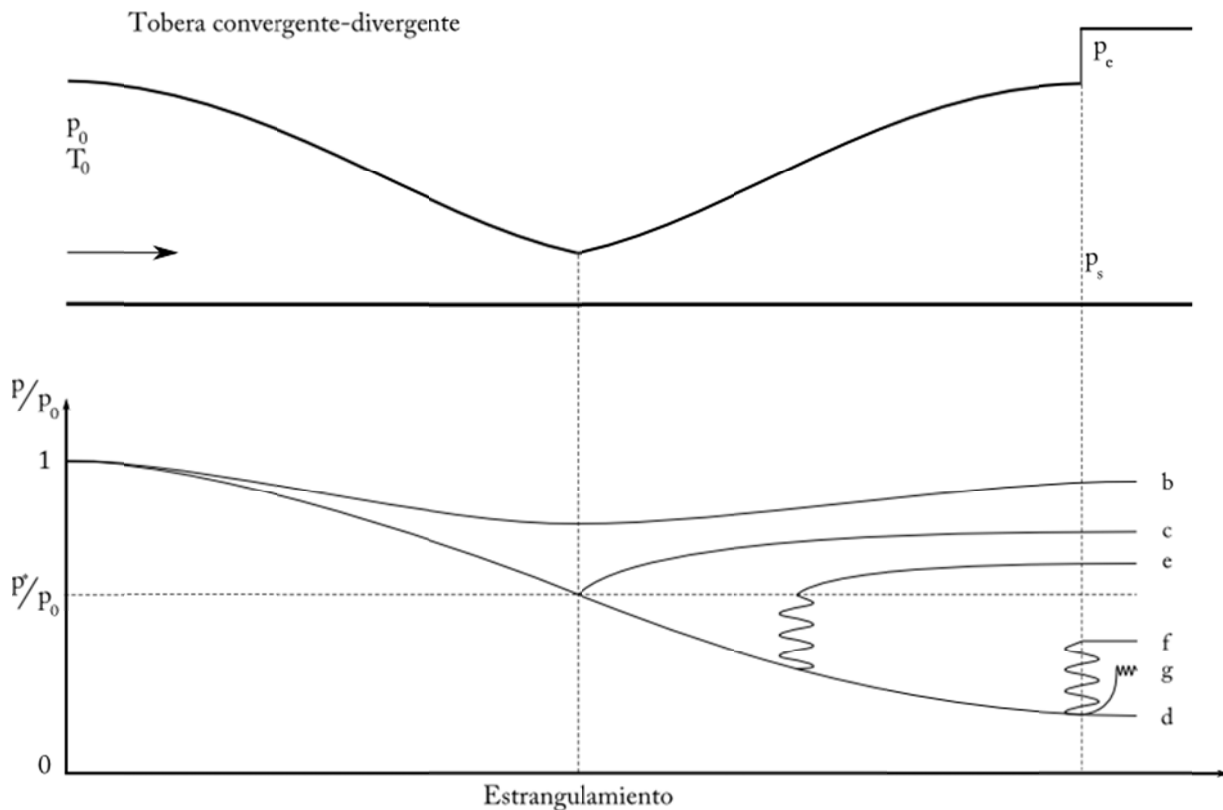
En el caso del aire $p^*/p_0 = 0.528$ y $k = 1.4$. Donde k es el cociente de los calores específicos

Teóricamente, con una tobera divergente no se alcanza una velocidad supersónica. Al reducir la presión en el exterior por debajo de la presión crítica, no se produce ningún efecto en la presión al interior de la tobera ya que $M = 1$ y no se puede transmitir ningún efecto hacia el interior de la tobera. La transmisión hacia dentro para $M = 1$ requeriría velocidades supersónicas. Si $p_e < p^*$, se dice que la tobera está "ahogada" y la disminución en la

presión exterior no repercute en el comportamiento del flujo: ni en la velocidad, ni en el gasto. El flujo que sale se expande hasta igualar la presión en el exterior.

El modelo unidimensional deja de ser válido en el punto de ahogo, ya que a la salida de la tobera se forman ondas de choque, en las cuales la distribución de presión se altera. En cambio, la aproximación isentrópica es acertada. El gradiente de presiones en el interior mantiene la capa límite delgada reduciendo los efectos de la fricción.

La fricción sola produce, en los flujos supersónicos, una disminución en la velocidad y un aumento en la presión, densidad y temperatura. El flujo de calor, si es positivo disminuye la velocidad, aumentando la presión y la densidad y viceversa. Con las mismas hipótesis que con la tobera convergente, se revisará lo que sucede en una tobera convergente-divergente, mostrado en la gráfica 3.



Gráfica 3 Distribución de presiones en una tobera convergente-divergente.

Si el flujo es subsónico, la presión cae en la parte convergente hasta un valor mínimo en el estrangulamiento y posteriormente crece en la región divergente (Gráfica 2-b).

Al disminuir la presión en el exterior por abajo del valor crítico, se puede alcanzar $M = 1$ en el estrangulamiento. El flujo en la tobera divergente se “ahoga” y pueden pasar dos cosas. La primera es que el flujo aumente su presión y salga en un régimen subsónico (Gráfica 2-c); la segunda, es que la presión en la salida caiga aún más, aumentando la velocidad de flujo y llevándolo a un régimen supersónico (Gráfica 2-d).

Reducir la presión del exterior todavía más, no produce un cambio en el flujo volumétrico ya que la sección convergente se encuentra ahogada. Cuando esto sucede se dice que el flujo está subexpandido. Las condiciones de frontera antes de la tobera determinan el único valor de $M > 1$ que se puede alcanzar.

En flujos transónicos o subsónicos la presión a la salida será igual a la presión exterior.

Si la presión en el exterior es superior a la presión crítica supersónica (Gráfica 2-d) y ligeramente menor que la presión crítica subsónica (Gráfica 2-c) se produce una onda de choque normal después del estrangulamiento. Entonces, el flujo se desacelera y la presión aumenta (Gráfica 2-e). Si se disminuye la presión en el exterior un poco más, la onda de choque se traslada a la salida de la tobera (Gráfica 2-f). Si se disminuye todavía más la presión a la salida, pero sin llegar a la presión crítica supersónica (Gráfica 2-d), se crea un desequilibrio en las presiones ya que la presión exterior es superior a la de salida, la cual se ajusta por la creación de ondas de compresión oblicuas a la salida (Gráfica 2-g). Cuando esto sucede se dice que el flujo está sobreexpandido.

Hay diferentes perfiles convergentes y divergentes, cuyo diseño en la parte divergente se basa en el método de las curvas características [12], un ejemplo se ve en la figura 4.

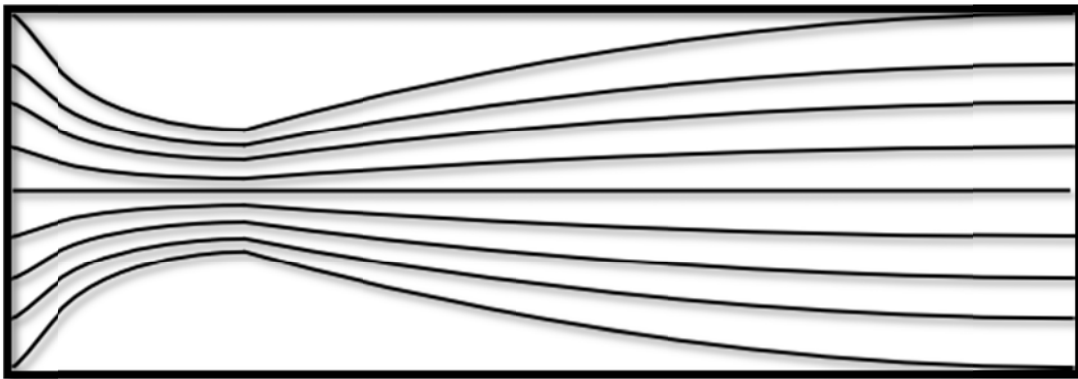


Figura 4.-Forma de una tobera convergente-divergente, obtenida por medio de las curvas características.

3.3 Técnicas Schlieren y Shadowgraph de visualización

Las técnicas schlieren y shadowgraph, son métodos ópticos que permiten ver cambios en el índice de refracción en medios transparentes, producidos por variaciones de la densidad en el medio. Transforman diferencias de fase de la luz en diferencias de amplitud o color según el arreglo y la fuente de iluminación.

Las variaciones de densidad pueden estar relacionadas con variaciones en la presión, como en las regiones de choques en los flujos supersónicos. También pueden deberse a cambios en la temperatura debidos a la transferencia de calor lo que produce movimientos convectivos en los fluidos. Cuando se mezclan dos fluidos con diferentes densidades, variando en cada punto con la concentración si son miscibles o en las interfaces si son inmiscibles. Un caso particular se presenta en la estratificación, cuyos efectos más visibles se presentan cuando el fluido se encuentra en movimiento. En la combustión se aprecian los tres fenómenos anteriores combinados al mismo tiempo, al tener grandes cambios de temperatura, mezcla de componentes y compresión. También es posible estudiar a los plasmas usando estas técnicas.

La densidad y el índice de refracción de un medio transparente, están relacionadas por la ecuación de Lorentz- Lorenz:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = k\rho$$

con k una constante.

Como el índice de refracción de los gases es aproximadamente uno se pueden hacer las siguientes aproximaciones: $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \approx 2(n - 1)$ y $n^2 + 2 \approx 3$. Por lo que se obtiene

$$n - 1 = k\rho$$

que es la relación de Gladstone-Dale.

Éstas técnicas ópticas consisten, grosso modo, en iluminar el medio de estudio, hacer pasar la luz a través de diferentes elementos ópticos y sacar información de su imagen proyectada en una pantalla.

En general las técnicas se utilizan solamente para visualizar los fenómenos y tener una noción cualitativa de los mismos. Sin embargo, se pueden complementar para obtener información cuantitativa. Con la gran ventaja de que son técnicas no intrusivas.

3.4 Desviación de la Luz en un medio

La luz al atravesar un medio se desvía un cierto ángulo ε , respecto de su trayectoria original, ésta es la refracción. La cual sigue un comportamiento extremal y se describe a través del principio de Fermat general:

$$\delta LCO = \delta \int n(x, y, z) ds$$

Donde *LCO* es la abreviatura para longitud de camino óptico, *ds* es la longitud de arco recorrido por la luz y $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Se puede demostrar [1] mediante el cálculo variacional, que es equivalente a:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \left(1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{dx}{dz} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left(1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{dy}{dz} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \right)$$

El problema es determinar la solución al sistema $x(z)$ y $y(z)$ que describe el camino de la luz en un campo de índice de refracción no homogéneo. Para lo cual se requieren las condiciones iniciales del rayo transmitido, las coordenadas en donde el rayo entra al volumen. Una vez encontrada una solución particular se determinan tanto las coordenadas como el ángulo de salida.

Para predecir lo que se observa en la pantalla, en cada rayo hay que determinar lo siguiente: el desplazamiento, esto es, lo que se desvió el rayo de su trayectoria original en x y y ; los ángulos que se desviaron (ε) en x y y ; por último el retardo que sufrió la luz al pasar por el volumen de prueba.

Las ecuaciones anteriores se simplifican al hacer las siguientes consideraciones:

Las desviaciones en la dirección z de los rayos de luz en un gas compresible son muy pequeñas, sin embargo el rayo de luz puede dejar la región de prueba si la curvatura no es pequeña. Por lo tanto se puede asumir que las pendientes del rayo $\frac{dx}{dz}$ y $\frac{dy}{dz}$ son muy pequeñas en comparación con la unidad.

En la mayoría de los casos los cambios en el índice de refracción respecto de la posición son del mismo orden de magnitud, esto es:

$$\frac{\partial n}{\partial x} \sim \frac{\partial n}{\partial y} \sim \frac{\partial n}{\partial z}$$

Por lo cual se simplifica a:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}$$

Con estas simplificaciones los rayos de luz salen en la misma posición en la que entran, el ángulo desviado se determina mediante la integral de línea de la derivada del índice de refracción del interior del volumen de prueba.

$$\varepsilon_x = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} dz$$

$$\varepsilon_y = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz$$

De los signos de las expresiones anteriores se puede ver que la luz se desvía en la dirección en la que se incrementa el índice de refracción. En gran medida esto significa que la luz se desvía alrededor de la región de mayor densidad.

Estas suposiciones se hicieron considerando que las trayectorias de los rayos de luz, dentro de la zona de prueba, son en línea recta y se provocan por grandes gradientes de

densidad. Estos cambios no son necesariamente ciertos en líquidos debido al alto valor de la refractividad $(n - 1)$, lo que provoca que la luz no se mueva en línea recta dentro de la zona de prueba.

3.5 Planteamiento geométrico de la desviación de la luz.

A continuación se presenta un planteamiento geométrico de la desviación de los rayos al pasar de un medio a otro con distinto índice de refracción, a fin de encontrar una expresión para el ángulo de desviación de los rayos.

Se toma al eje z como la dirección en la que se propaga la luz. El gradiente de índice de refracción se da en la dirección y .

La velocidad con la que se mueve la luz en el medio es $c_0 = c/n$ con c la velocidad de la luz en el vacío y n el índice de refracción del medio.

Un rayo al atravesar el medio recorre una distancia:

$$\Delta z = \frac{c}{n} \Delta t$$

También se puede escribir

$$n\Delta z = c\Delta t \quad (1)$$

Se tienen dos rayos, uno que entra en una posición y y el otro entra en la posición $y + \Delta y$.

La distancia que recorre la luz en el medio es función de la posición con la que entra la luz, esto es, $z = z(y)$. Entonces basándonos en la figura 5 y bautizando como $\Delta z(y) = \overline{AC}$, $\Delta z(y + \Delta y) = \overline{DE}$ y $\Delta_2 z = \overline{BC}$.

Se busca encontrar el valor de la distancia $\Delta_2 z$ en términos del índice de refracción.

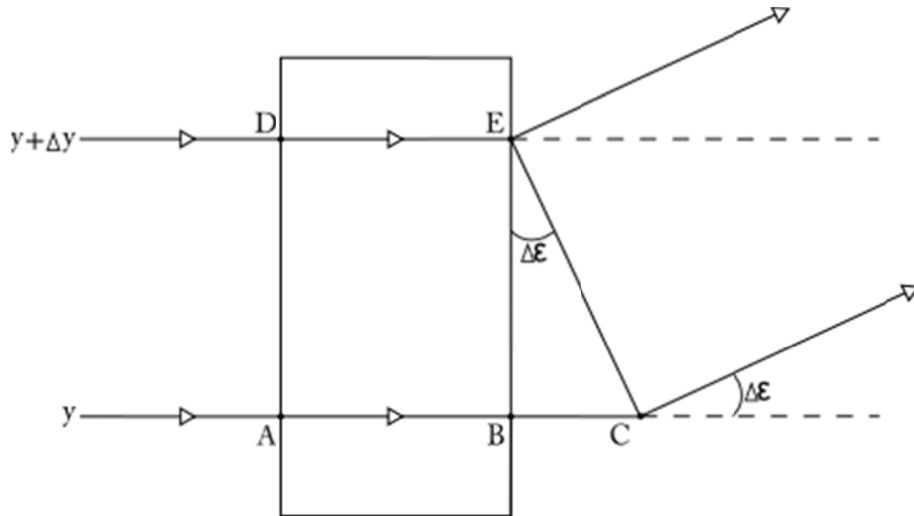


Figura 5.-Diagrama del ángulo desviado por dos rayos al pasar por una región con un gradiente de índices de refracción en la dirección y .

De la figura 5 se ve que

$$\Delta_2 z = \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{DE} = \Delta z(y) - \Delta z(y + \Delta y)$$

esto es

$$\Delta_2 z = \Delta z(y) - \Delta z(y + \Delta y) = -(\Delta z(y + \Delta y) - \Delta z(y))$$

que dividido por Δy es la definición de la derivada. Por otro lado

$$\Delta z(y) = \left(\frac{c}{n} + \frac{c}{\Delta n} \right) \Delta t$$

y

$$\Delta z(y + \Delta y) = \frac{c}{n} \Delta t$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Delta_2 z &= \frac{c}{n} \Delta t - \left(\frac{c}{n} + \frac{c}{\Delta n} \right) \Delta t = -\Delta \left(\frac{1}{n} \right) c \Delta t = -\frac{\Delta \left(\frac{1}{n} \right)}{\Delta y} c \Delta t \Delta y \\ &\Rightarrow \frac{\Delta_2 z}{\Delta y} = -\frac{\Delta \left(\frac{1}{n} \right)}{\Delta y} c \Delta t \end{aligned}$$

introduciendo la ecuación (1) queda:

$$-\frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\Delta y} c \Delta t = -\frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\Delta y} n \Delta z$$

luego, como se trabaja con ángulos pequeños

$$\Delta \varepsilon \approx \tan \Delta \varepsilon = \frac{\Delta z}{\Delta y}$$

$$\therefore \Delta \varepsilon = -\frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\Delta y} n \Delta z$$

En el límite de $\Delta y \rightarrow 0$, se convierte en la diferencial

$$d\varepsilon = -n \frac{\partial\left(\frac{1}{n}\right)}{\partial y} dz$$

$$\therefore d\varepsilon = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz \quad (II)$$

lo cual en algunas ocasiones se escribe como

$$d\varepsilon = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz = \frac{\partial(\ln n)}{\partial y} dz$$

Cuando el ángulo de desviación de la luz es pequeño, se puede tomar como la pendiente $\partial y / \partial z$ del rayo de luz. Con lo cual queda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}$$

que es la ecuación que describe el comportamiento de los rayos desviados en el schlieren sin el factor de peso causado por los rayos obstruidos.

3.6 Técnica schlieren

Con esta técnica se pueden detectar pequeños cambios en el índice de refracción, esto es, ángulos de desviación de los rayos de luz de entre 10^{-6} y 10^{-3} radianes.

Esencialmente el arreglo del schlieren es el siguiente: un haz paralelo atraviesa la región de prueba, al hacerlo la luz se desvía un ángulo respecto a su trayectoria original, pero como los haces no van paralelos, debido a que fueron desviados, no todos coinciden en el foco de la lente. En el foco se coloca una navaja, la cual obstruye algunos de los rayos desviados. Después de esto se coloca una pantalla en donde se ve la imagen. El arreglo típico del schlieren se muestra en la figura 6.

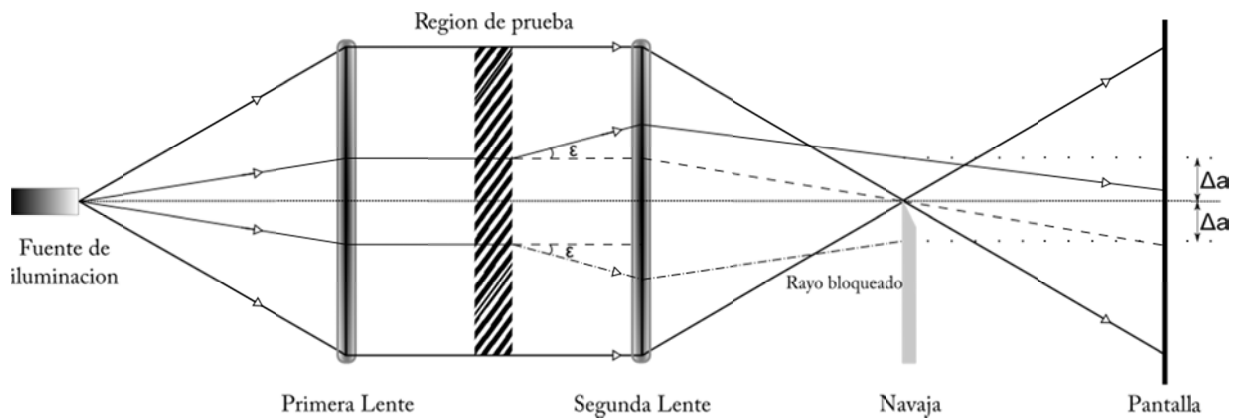


Figura 6.-Diagrama del schlieren, mostrando el ángulo que se desvían los rayos, así como los obstruidos.

Hay muchas variedades de arreglos para el schlieren: se puede cambiar la fuente de iluminación, ya sea monocromática y de gran intensidad con un láser o luz blanca con todo el espectro; también cambia si es un espejo o una lente la que enfoca la luz, con la ventaja; si se utilizan espejos, de que entre mayor sea su tamaño mayor es la resolución que se puede obtener; el elemento más importante es la navaja, ya que con ella se define el contraste que se tendrá en la imagen, una de las variantes que hay es colocar en vez de la navaja un diafragma para obstruir los rayos alrededor del foco en vez de una dirección.

Dependiendo de las necesidades, en la pantalla puede colocarse algún tipo de sensor que recolecte la luz, pero en cualquier caso se recomienda que no se encuentre demasiado

lejos, de la región de prueba, para evitar que los rayos se superpongan, se crucen e interfieran entre si antes de llegar.

Lo que distingue al schlieren es la navaja la cual debe de colocarse en el foco de la lente, de lo contrario la intensidad en la imagen no será pareja. La intensidad cambia en la dirección perpendicular a la misma. Si se tiene un haz de diámetro a_0 , la intensidad inicial I_0 se ve modificada por el factor a_k/a_0 donde a_k es la parte vertical del haz que no se tapa por la navaja. La intensidad de luz I_k con navaja es:

$$I_k = \frac{a_k}{a_0} I_0$$

esto se muestra en la figura 7.

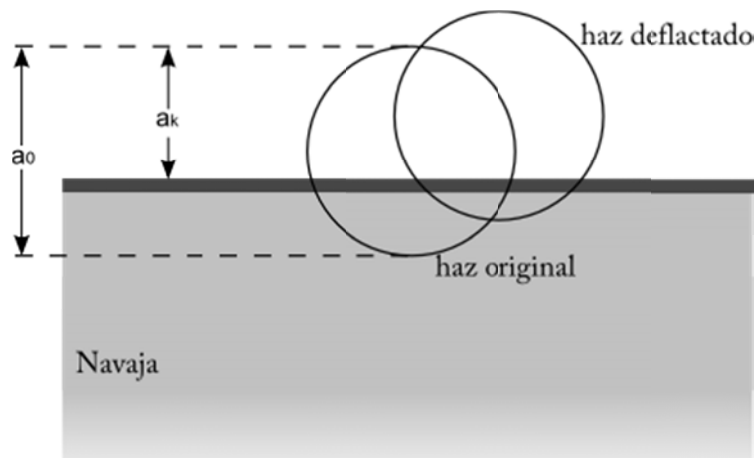


Figura 7.-Diagrama de la navaja del sistema schlieren, mostrando la parte de la luz que se tapa con la navaja.

Después, la luz se envía a la región de prueba. Si un rayo se desvía un ángulo (ϵ) como consecuencia de un gradiente en el índice de refracción, no llega paralelo a la lente, por lo que no converge en su foco (f) y pasa a una distancia Δa de la navaja (figura 6), donde

$$\Delta a = \pm f \epsilon$$

Entonces, la intensidad en la pantalla (I_d) es:

$$I_d = \frac{a_k + \Delta a}{a_k} I_k$$

Y la intensidad relativa o contraste, es:

$$\frac{\Delta I}{I_k} = \frac{I_d - I_k}{I_k} = \frac{\Delta a}{a_k} = \pm \frac{\varepsilon f}{a_k}$$

De la ecuación (II) , sustituimos ε y queda:

$$\frac{\Delta I}{I_k} = \pm \frac{f}{a_k} \int \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz$$

Por otro lado, la sensibilidad se obtiene a partir de:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\Delta I}{I_k} \right) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon f}{a_k} \right) = \frac{f}{a_k}$$

De esta expresión puede verse que para aumentar la sensibilidad en el sistema schlieren debe de procurarse tener una distancia focal muy grande, aunque en la práctica f está fija, pero también aumenta la sensibilidad si a_k disminuye, lo que significa que la navaja oculte más luz, sin embargo se debe de tener cuidado, ya que si bien al tapar más luz aumenta el contraste, también se pierde información en las regiones en las que el gradiente del índice de refracción es pequeño.

Las regiones oscuras arrojan una representación del objeto sin distorsionar, mientras que las regiones iluminadas marcan el lugar a donde fueron a parar los rayos desviados, figura 8.

En lo que respecta al cambio en el índice de refracción en las imágenes por schlieren, las regiones iluminadas muestran donde el índice de refracción se incrementa en la dirección en la que esta puesta la navaja, esto es, donde el gradiente local de densidad es positivo y en las regiones oscuras es al revés.

Imagen proyectada

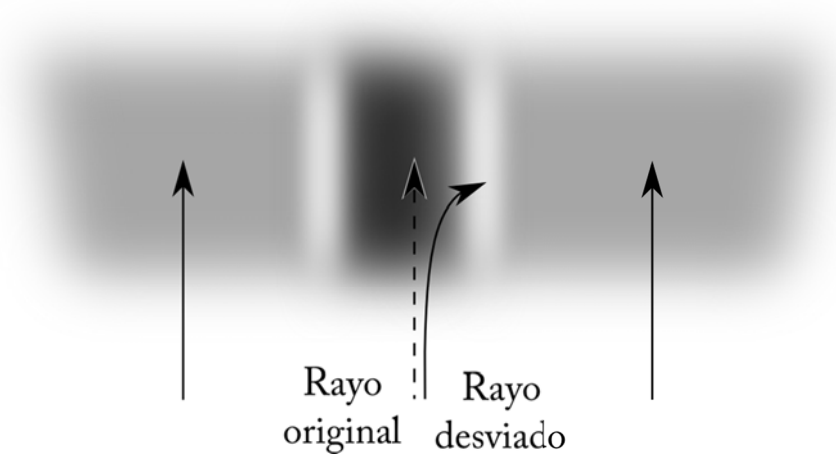


Figura 8.- Esquema de la imagen proyectada de un schlieren debida a la desviación de los rayos.

3.7 Técnica shadowgraph

El arreglo de la técnica de shadowgraph es bastante simple. Un haz de luz incidente atraviesa la región de prueba provocando que los rayos se desvíen y se proyecten en una pantalla.

Según el tipo de fuente utilizada o algún arreglo previo, la luz llega como rayos paralelos o como un haz que se abre, también la pantalla se puede sustituir por algún tipo de sensor que extraiga información sobre la luz que recibe.

En la figura 9 se tienen dos rayos separados una distancia Δy que atraviesan al gradiente del índice de refracción, como consecuencia, se desvían en dos ángulos diferentes y llegan a la pantalla separados una distancia Δy_s . La intensidad en la pantalla se modifica, de la intensidad inicial I_0 que llega a la pantalla, a I_s la intensidad al colocar la región de prueba, esto es:

$$I_s = \frac{\Delta y}{\Delta y_s} I_0$$

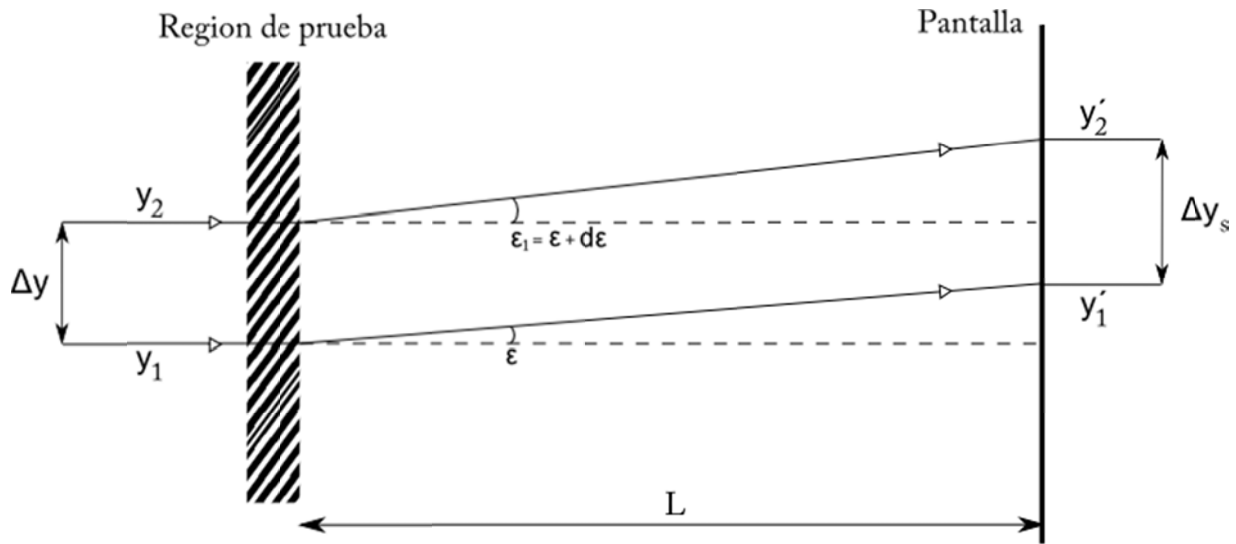


Figura 9.-Diagrama del shadowgraph, que muestra el desplazamiento de los rayos desviados por la región de prueba.

Teniendo como coordenadas de entrada y_1, y_2 y como coordenadas de llegada a la pantalla y'_1, y'_2 .Entonces:

$$y'_1 = L \tan \varepsilon \approx L\varepsilon$$

$$y'_2 = L \tan (\varepsilon + d\varepsilon) \approx L(\varepsilon + d\varepsilon)$$

$$\therefore \Delta y_s = \Delta y + \delta y = \Delta y + L \tan(d\varepsilon) = \Delta y + L d\varepsilon$$

Ahora el contraste, se debe a los rayos que divergen y es igual al desplazamiento de los rayos respecto a la sombra o a la proyección, esta es:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{I_s - I_0}{I_0} = \frac{\Delta y}{\Delta y_s} - 1$$

Suponiendo que $Ld\varepsilon \ll \Delta y$ se puede aproximar:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{\Delta y}{\Delta y_s} - 1 \approx -L \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$$

Por la ecuación (II) , de ε se llega a la igualdad:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = -L \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = -\frac{L}{n_0} \int \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} dz$$

Si ahora se tiene un campo de índices de refracción considerando la coordenada x , suponiendo que x y y son independientes, la expresión anterior queda:

$$\frac{\Delta I}{I_0} = -L \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = -\frac{L}{n_0} \int \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right) dz$$

El arreglo más simple que hay, es el Shadowgraph directo, en el cual la luz proviene de una fuente puntual y se expande en un cono, por lo que los rayos no son paralelos, lo que provoca que la imagen se agrande, figura 10.

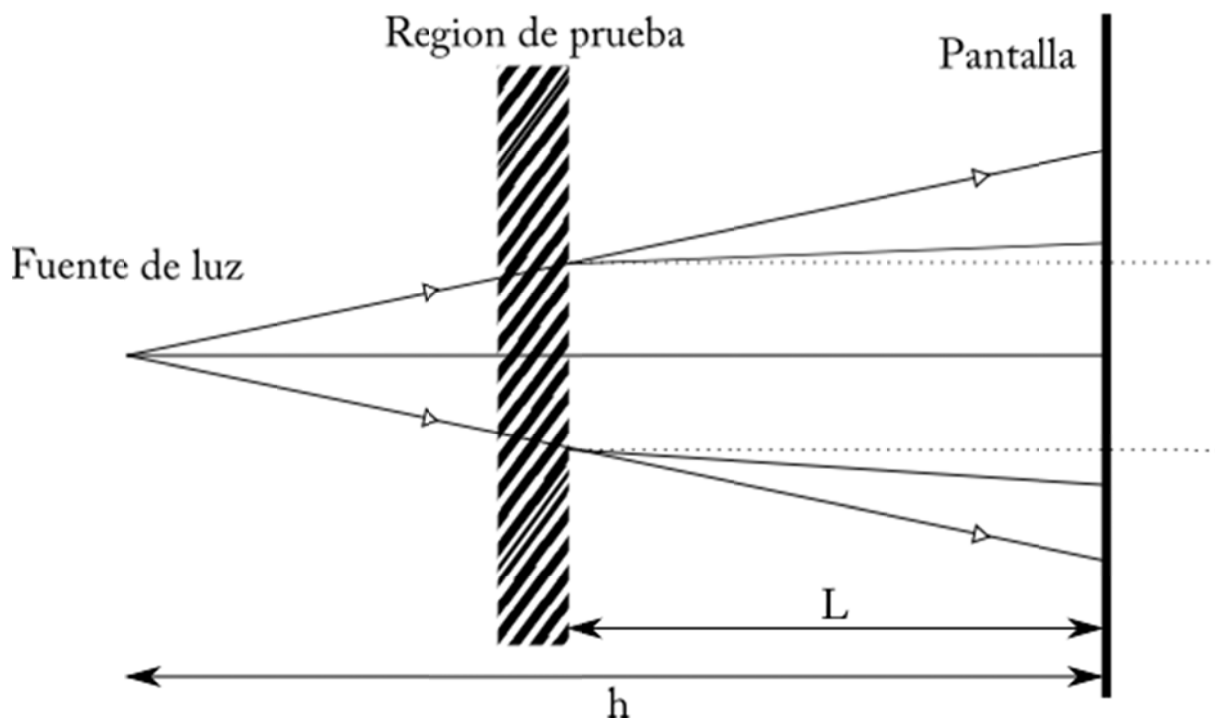


Figura 10.-Diagrama del shadowgraph directo.

En esta configuración la magnificación de la imagen está dada por

$$m = \frac{h}{h - L}$$

donde h es la distancia de la fuente de iluminación a la pantalla y L la distancia de la región de prueba a la pantalla.

3.8 Método de schlieren con un fondo de malla.

Este método es una variante de shadowgraph que permite cuantificar el cambio en el índice de refracción. A pesar de que en la referencia [4] aparece con el nombre de schlieren, no lo es, puesto que no tiene navaja o algo que obstruya algunas direcciones de los rayos de luz, es en realidad una variante de Shadowgraph.

El arreglo consiste en un shadowgraph de haces paralelos al que se le coloca una transparencia con un patrón de puntos entre la fuente de iluminación y la región de prueba, figura 11.

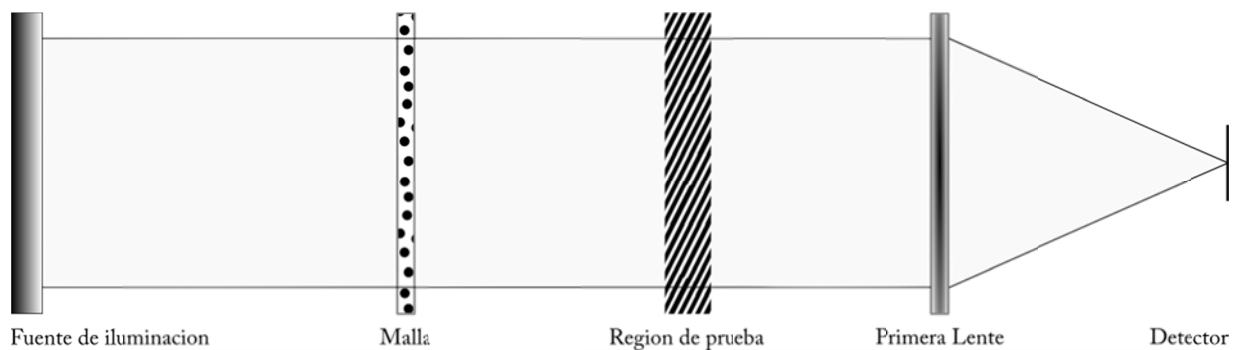


Figura 11.-Diagrama de schlieren con una malla posterior a la región de prueba.

El patrón de puntos utilizado es generalmente aleatorio aunque no hay una razón que impida colocarlos en un arreglo específico.

Las imágenes obtenidas se graban con una cámara, para no saturar el sensor de la cámara debe evitarse usar luz demasiado intensa.

La técnica aprovecha la traslación del patrón de puntos respecto a la posición original, debido al gradiente de índices de refracción. La presencia de luz en el exterior no interfiere con la imagen, más bien se busca un alto contraste.

El desplazamiento local de los puntos d se calcula como:

$$d = \frac{f z_b}{z_b + L - f} \int_{\Delta z} \frac{1}{n_0} \frac{\partial n}{\partial r} dz \quad (III)$$

Donde f es la distancia focal de la lente de la cámara, L es la distancia de la cámara a la región de estudio y z_b es la distancia de la retícula de puntos a la región de estudio [4].

La resolución espacial de la medida depende de la relación del tamaño de los puntos en comparación con el tamaño de la imagen.

Pueden usarse algoritmos basados en la correlación cruzada para encontrar la distancia que se movieron los puntos.

4. Métodos experimentales

4.1 Optimización de montajes anteriores de schlieren y shadowgraph

Los arreglos de schlieren y shadowgraph utilizados, en trabajos anteriores llevados a cabo en el Laboratorio de Acústica, tuvieron algunas dificultades, sobre todo, para interpretar las imágenes obtenidas, figura 12. Por lo tanto se volvieron a montar como se describe a continuación, y se analizan los problemas que se tuvieron.

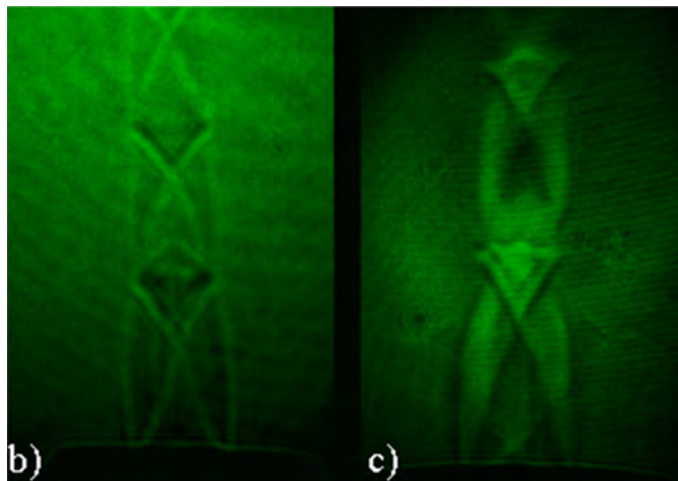


Figura 12.-Fotos schlieren a 3.54 atm, en la foto de la derecha se acercó el flujo a la lente [14].

Estos arreglos difieren de los descritos anteriormente en las figuras 6, 10 Y 11.

En ambos casos se abre un haz de luz láser con la ayuda de un objetivo de microscopio, el flujo supersónico (generado con la tobera de la figura 14-6) se coloca dentro de la zona iluminada. Para el montaje de shadowgraph, detrás del chorro se monta un arreglo de dos lentes que, en principio, disminuye las aberraciones, la luz se proyecta finalmente en una pantalla.

Para el sistema schlieren se coloca en el foco de la primera lente un atenuador, que absorbe longitudes de onda de 348 nm y deja pasar el resto, como se muestra en la figura 13.

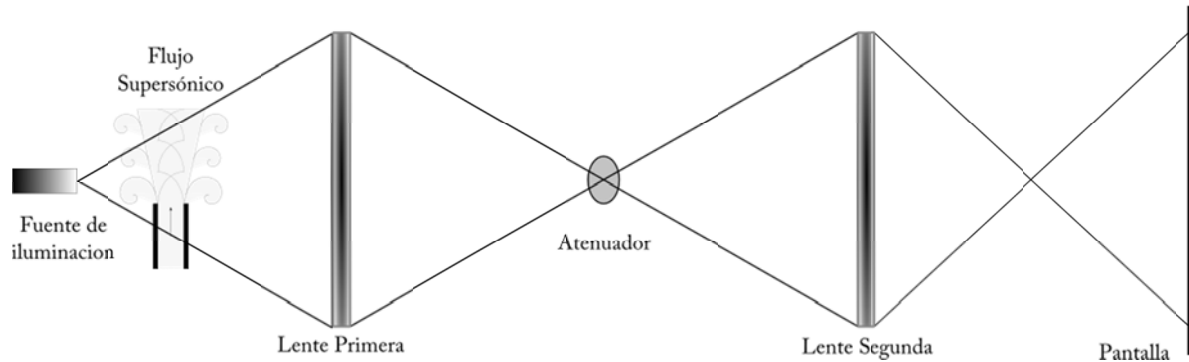


Figura 13.- Diagrama de schlieren de dos lentes.

La magnificación de la imagen se determina a partir de las distancias focales de las lentes [14].

Con ambos arreglos se puede observar la estructura de choque estacionaria del chorro. Sin embargo, la interpretación de las imágenes no es sencilla, ya que al cambiar la posición del chorro respecto de la primera lente, las regiones claras y oscuras de la pantalla se modifican.

Para interpretar mejor las imágenes respecto a la distribución de la densidad, se centró la observación en la región del primer choque, ya que en éste se nota el mayor cambio de las zonas brillantes y oscuras, al mover el chorro.

4.2 Efecto de las diferencias de presión en la estructura de choque

En el laboratorio de acústica se han utilizado solamente toberas convergentes con diferentes características como se muestra en la figura 14 y en la tabla 1. Es interesante notar que en general se utilizaron toberas cuyas contracciones no son suaves.

Tabla 1.-Características de las toberas

Tobera	Diámetro de entrada (± 0.01 mm)	Diámetro de salida (± 0.01 mm)	Forma del estrangulamiento
1	6.10	4.42	Escalón
2	3.62	3.62	Sin estrangulamiento
3	5.12	0.76	Escalón a la salida
4	5.18 , 3.14	0.84	Cónico al final
5	7.06	0.70 x 5.88 (rectangular)	Escalón a la salida
6	Entra a 6.00 y luego se expande a 39.76	1.60	Primero curvo, luego cónico y al final cilíndrico
7	5.36	3.94	Escalón

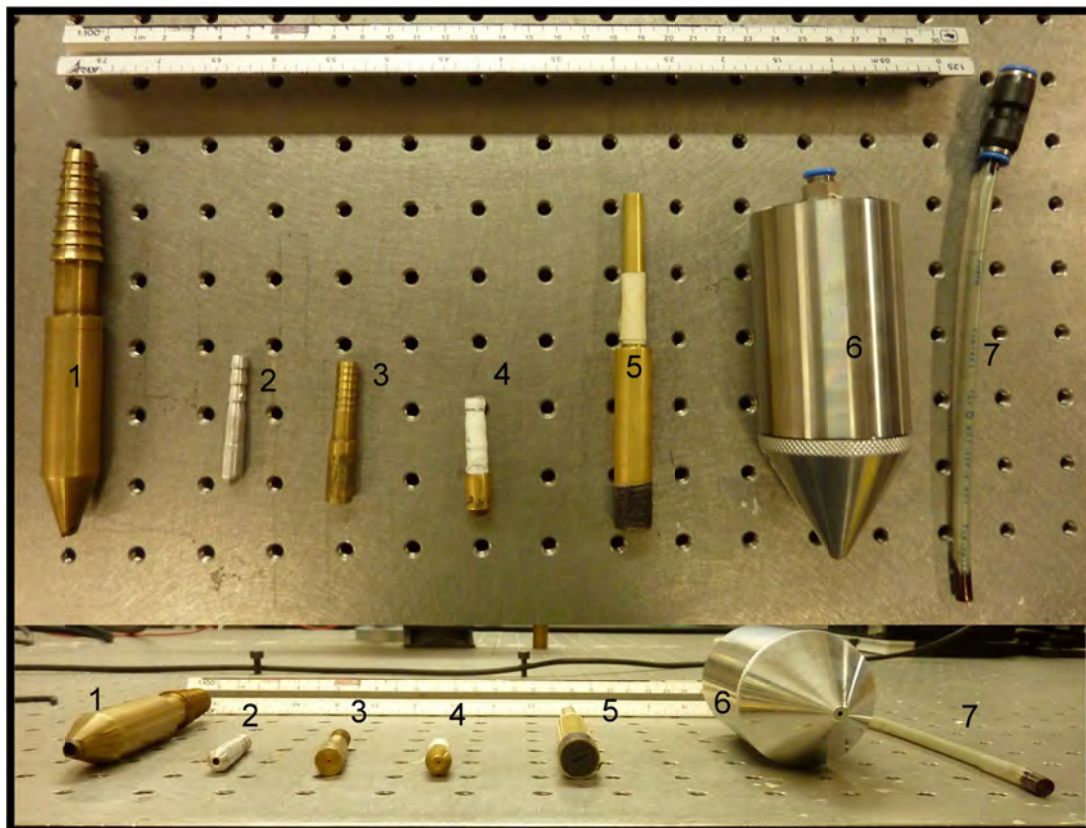


Figura 14.- Fotografía de las toberas utilizadas.

Según la teoría descrita para flujos compresibles, no se debería producir un flujo supersónico con ninguna de las toberas de la figura 14. Sin embargo, con todas las toberas, se ha visto la estructura de choque.

Esta estructura de las ondas de choque, que se producen en un flujo supersónico, son muy particulares, son estacionarias y muy estables, con forma de "X" alargada y curvada. Además a presiones muy altas, la "X" desaparece y se crea un disco de Mach, figura 15.

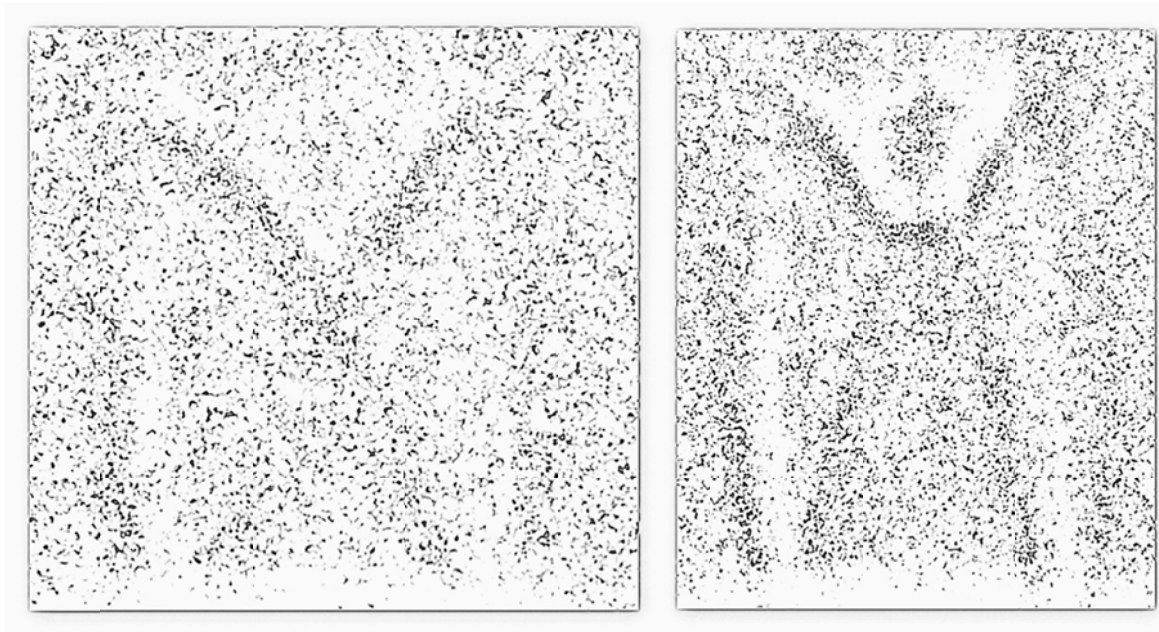


Figura 15.-Ondas de choque. A la izquierda las líneas de cruce a 4.08 atm, a la derecha disco de Mach a 5.79 atm. Las imágenes fueron tratadas aplicándoles un filtro de detección de bordes gaussiano, con radios de 81 y 1.

La presión exterior comprime al flujo que sale a alta velocidad y a menor presión, en el punto en el que ya no se puede comprimir más, se empieza a expandir. Este fenómeno se repite varias veces creando zonas alternadas de compresión y expansión.

Por lo anterior se busca explorar los cambios en la estructura de choque en el flujo supersónico al modificar la presión en el exterior. Para realizar esto se trasladó el experimento a tres diferentes altitudes: En el edificio Tlahuizcalpan (altitud de 2290 m) de la Ciudad Universitaria de la Ciudad de México; en un domicilio particular (altitud de 1585 m)

de la Ciudad de Cuernavaca y en las instalaciones del CIE (altitud de 1255 m) de la población de Temixco.

4.2.1 Construcción del Riel

A fin de trasladar el arreglo experimental de forma práctica y para garantizar que las condiciones del montaje se mantuvieran lo más parecidas posibles, se construyó un riel para fijar todos los elementos. El arreglo a utilizar es de un shadowgraph, debido a que su disposición experimental es más sencilla y los cambios de densidad son claros.

El arreglo consta de un láser verde (520-540 nm) de estado sólido con una potencia de 500 mW , marca “Crystal Laser” y modelo GCL-200-S, como fuente de iluminación. Para reducir la intensidad de la luz un 30%, se colocó un atenuador (FSQ-OD30) que absorbe longitudes de onda de 546.1 nm. Inmediatamente después se puso un objetivo de microscopio de 40X marca “Newport” para abrir el haz de luz. Para formar el chorro se usó una tobera de 4 mm de diámetro interior (manguera marca “festo”, figura 14-7). Como pantalla se usó una cartulina y del otro lado de la pantalla se instaló una cámara, marca Cannon, modelo “EOS Rebel Xsi”. El riel se muestra en la figura 16.

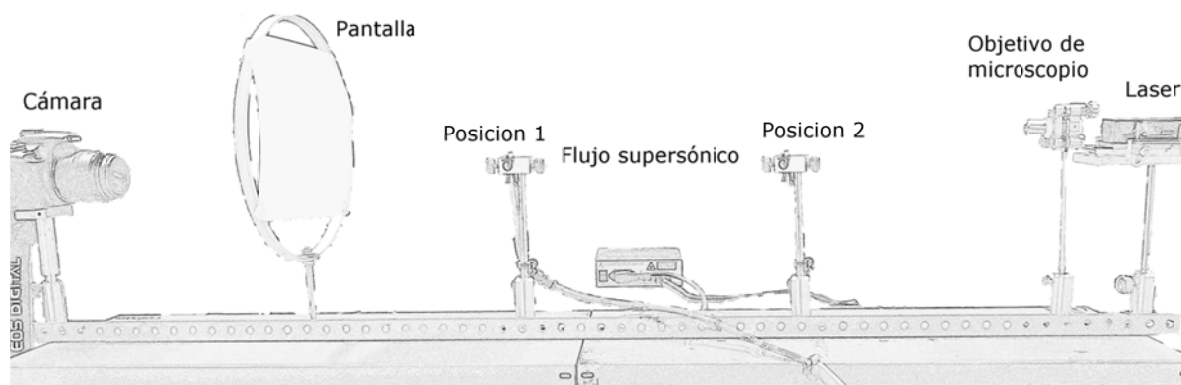


Figura 16.-Fotografía del arreglo experimental construido. El riel, las monturas, postes y accesorios.

Para colocar cada parte sobre el riel se usaron cuatro soportes. A fin de tener la misma altura para todos los elementos se fabricaron varias piezas. Para el láser, se hizo una montura

especial en acrílico que permite movimientos finos y por lo tanto una buena alineación (figura 17). Para el objetivo de microscopio también se modificó la altura de un poste y se le fabricó cuerda para que entrara el soporte. La tobera se fijó con la ayuda de una nuez. En el interior de uno de sus agujeros se colocaron tres láminas de neopreno para sostener la tobera sin estrangularla; la nuez se sostenía de otro poste. La pantalla consistía del exterior de un bastidor para bordar al cual se le hizo una perforación. Mediante un espagueti y tuercas se fijó el bastidor al riel. Al bastidor se le pegó con cinta adhesiva la pantalla, la cual fue de cartulina opalina. Se eligió éste tipo de celulosa por ser muy blanca y lisa; reduce la intensidad lo suficiente para no saturar al sensor de la cámara y además a simple vista no se ven las fibras que lo constituyen, como en otro tipo de papeles y cartulinas. Al final del arreglo se hizo un poste especial para colocar la cámara, con el tornillo a la medida para la cámara y un cojín de *foami* para sostenerla. Cabe mencionar que todos los postes se cortaron a la medida, se carearon y se cilindraron en un torno.

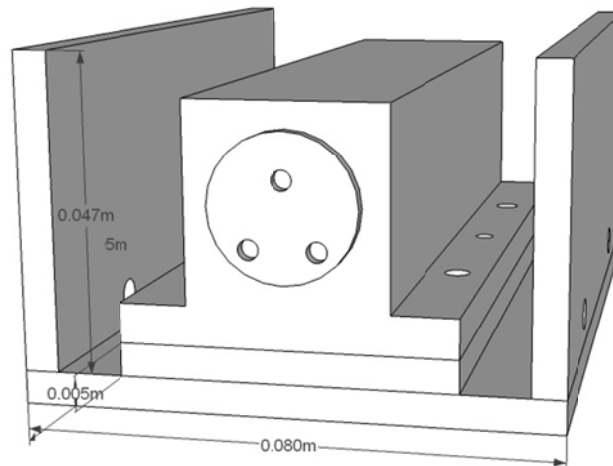


Figura 17.-Diagrama del soporte del láser con el láser. El láser se encuentra en medio y la "U" de alrededor es la montura.

Para bombear el aire a la tobera se utilizó una compresora con una capacidad de 94.74 l y un motor de 5 caballos de fuerza, la cual da un máximo de 5.39 atm con una mínima unidad de medición de 0.34atm.

Como se notará todo el arreglo es en línea recta, hasta la cámara. Con este diseño se evita tener paralaje por tomar las fotos al colocar la cámara a un lado de la pantalla.

4.3 Shadowgraph con partículas sembradas en el flujo

Puesto que el objetivo ha sido relacionar las imágenes con las mediciones de PIV, también se colaboró en la implementación de esta técnica en el laboratorio. Una de las primeras dudas que surgieron es el efecto del sembrado¹ de partículas en el flujo y la estructura de choque. En principio, la técnica PIV es no intrusiva ya que las partículas sembradas son muy pequeñas y siguen el flujo.

Para aclarar esta duda, se realizó un shadowgraph del flujo supersónico al ser sembrado con partículas. Las partículas utilizadas fueron dióxido de titanio, un componente común en las pinturas blancas y talco de bebe, las cuales tienen un diámetro que varía entre 0.1 y 5 μm y entre 0.1 y 10 μm respectivamente.

Puesto que con este método la salida de las partículas es un tanto impredecible, sacar fotografías del momento justo es muy difícil. Se tomó un video con una cámara de alta resolución (1920x1080 px) y a 30 cuadros por segundo, marca Sony Handycam.

Para éste experimento se utilizó el mismo arreglo de la sección anterior acomodando el chorro en la posición dos del riel. Para esta parte solo se sacaron videos con una presión de salida de 5.78 y 5.44 atm, en la Ciudad de México, para los dos tipos de partículas trazadoras.

4.4 Técnica para cuantificar los cambios en el índice de refracción

¹ Los detalles de PIV su funcionamiento y realización, así como el método de sembrado y los resultados obtenidos de los campos de velocidad se exponen en detalle en [13].

Para cuantificar el cambio en el índice de refracción, se montó un arreglo inspirado en la figura 12, con la variante de que se coloca una pantalla antes de la cámara. Para éste arreglo se utilizan los dispositivos de la sección anterior, utilizando la tobera con sección de salida rectangular (figura 14-5).

El arreglo consta primero del Laser, seguido del objetivo de microscopio que abre la luz, le sigue una lente separada a su distancia focal, para enviar los rayos paralelos. Después de la lente se coloca una matriz de puntos, después a una distancia Z_b (160 mm) se coloca la tobera, como se muestra en la figura 42. Entre la tobera y la pantalla hay una separación L (2720 mm) y atrás de la pantalla se coloca la cámara, arreglada con una distancia focal de 81.2 mm.

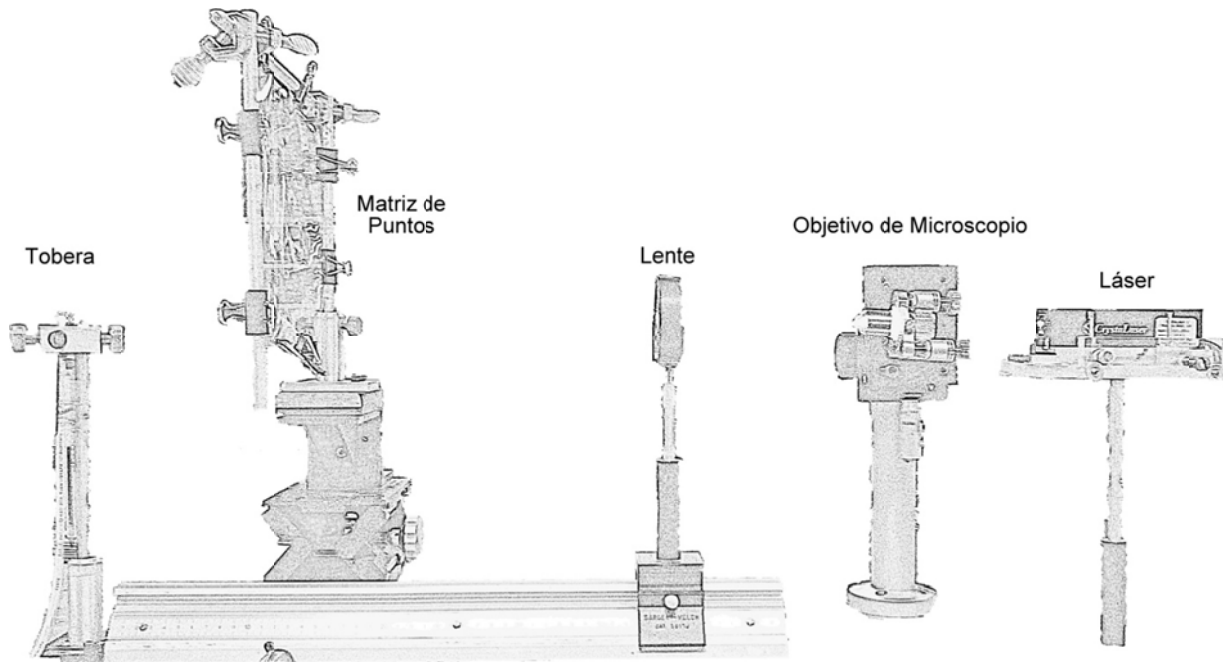


Figura 18.-Montaje experimental del shadowgraph con una malla antes del flujo supersónico.

La malla se hizo con un acetato al cual se le imprimió una matriz de puntos acomodados de forma cuadrada y equiespaciados una distancia de un milímetro. Los puntos tienen un diámetro de 0.1 mm.

Para éste arreglo es necesario que se utilicen rayos paralelos y por lo tanto, que la imagen proyectada sea de tamaño real, esto hace todo más complicado puesto que una onda

de choque tiene un grosor del orden de 0.2 micras. Los puntos se hicieron lo más pequeños posible y como los cambios en el índice de refracción en las regiones de las ondas de choque son muy grandes, los puntos deben de estar separados una distancia considerable para que no se sobrepongan y se distingan claramente.

En la referencia [4] se utiliza un arreglo aleatorio de puntos. En este trabajo se utilizó un arreglo cuadrado que facilita su ubicación.

Se tomaron fotografías con la tobera con sección de salida rectangular, figura 14-5. Se decidió utilizar la tobera rectangular en lugar de la utilizada en los experimentos anteriores debido a que las ondas de choque se encuentran más espaciadas y los puntos se localizan mejor.

Por causa de la difracción y la interferencia de la luz, dependiendo del lugar en el que se coloque la pantalla, los puntos se ven nítidos o desaparecen. La separación entre la tobera y la pantalla se eligió de forma que los puntos se distingan y que se vea definida la estructura de la onda de choque.

5. Resultados

5.1 Observaciones con los montajes anteriores de schlieren y shadowgraph

Se coloca al flujo supersónico en una primera posición, escogida arbitrariamente en el punto medio entre el microscopio y la primera lente se observa el cruce, líneas curvas en forma de "X". La imagen de choque se encuentra sobre un fondo verde y la "X" se compone, de afuera hacia adentro, por una región más brillante y delgada, la cual por comodidad se llamará región 1, le sigue una zona oscura y algo gruesa llamada región 2, por último le sigue otra región más brillante y delgada, bautizada como región 3.

Al desplazar el flujo supersónico con respecto a la primera lente se nota que la región 2 (oscura) se adelgaza paulatinamente y las regiones 1 y 3 (brillantes) comienzan a hacerse más gruesas.

5.2 Resultados de las diferencias de presión en la estructura de choque

Todas las fotografías fueron tomadas utilizando un tiempo de exposición de $1/500s$, una apertura F7.1 y un ISO de 1600.

En cada altitud se tomaron dos series de fotografías; la primera colocando el chorro cerca del objetivo de microscopio, a 17.5 ± 0.5 cm, y la segunda en una posición más alejada, 63.5 ± 0.5 cm. En la primera posición se logra ver los primeros dos cruces con detalle y en la segunda se ven hasta cinco cruces. Cada serie de fotografías comienza en 5.78 atm y termina en 2.04 o 1.70 atm dependiendo de la nitidez de la imagen.

En cada uno de los tres lugares se tomaron dos series de fotografías, la primera colocando cerca la tobera del cono de luz (17.5 ± 0.5 cm) y la segunda a una posición más alejada (63.5 ± 0.5 cm). Con la primera posición se logra ver los primeros dos cruces con detalle y en la segunda se ven hasta cinco cruces. Cada serie de fotografías comienza en 5.78 atm y termina en 2.04 o 1.70 atm dependiendo de si la imagen se distingue o no.

A continuación se presentan las fotografías tomadas:

Las primeras fotos corresponden a la posición uno del riel, se presentan de tres en tres y las segundas a la posición 2 del riel presentadas de 5 en 5. De las figuras de la 18 a 21 se presentan las fotografías tomadas a una altitud de 2290 m; en las figuras de la 22 a 25 las fotografías tomadas a la altitud de 1585 m, de la figura 26 a la 29 las fotografías tomadas a la altitud de 1255 m para la posición uno; las figuras 30 y 31 son de la altitud de 2290 m, las figuras 32 y 33 de la altitud de 1585 m y por último las figuras 34 y 35 son las correspondientes a la altitud de 1255 m.

Fotografía de la posición uno, con la altitud de 2290 m.

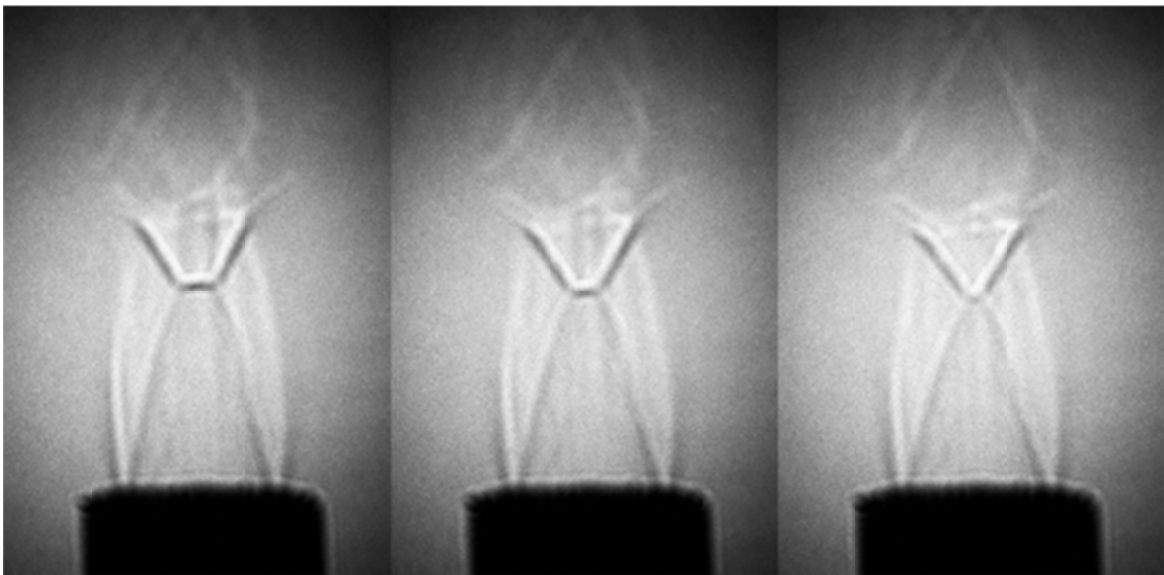


Figura 19.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 2290 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 5.78 a 5.10 atm.

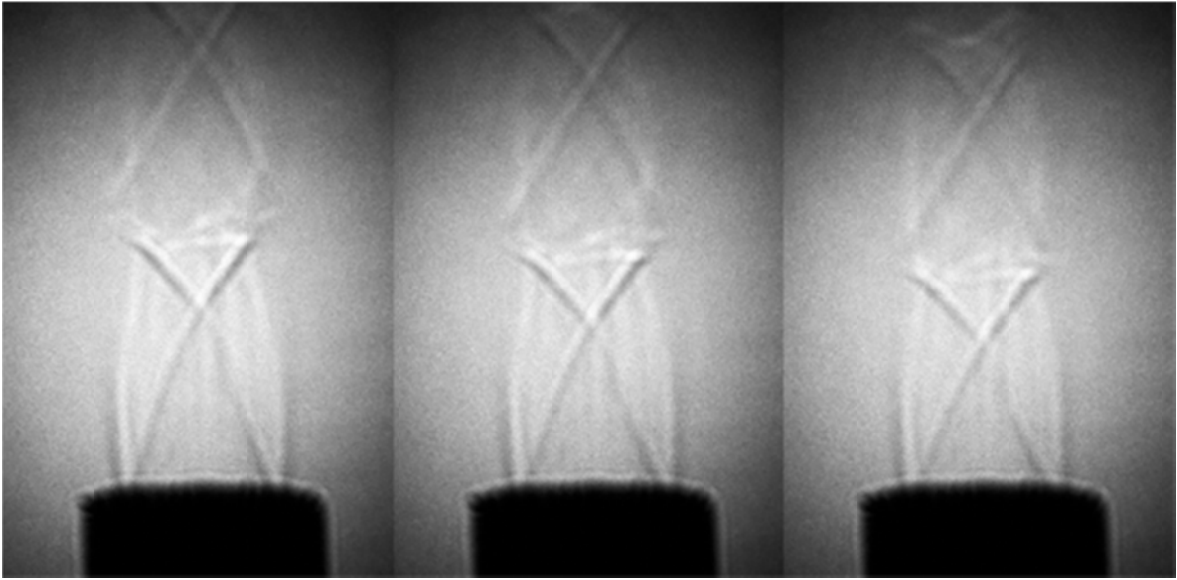


Figura 20.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 2290 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 5.76 a 4.08 atm.

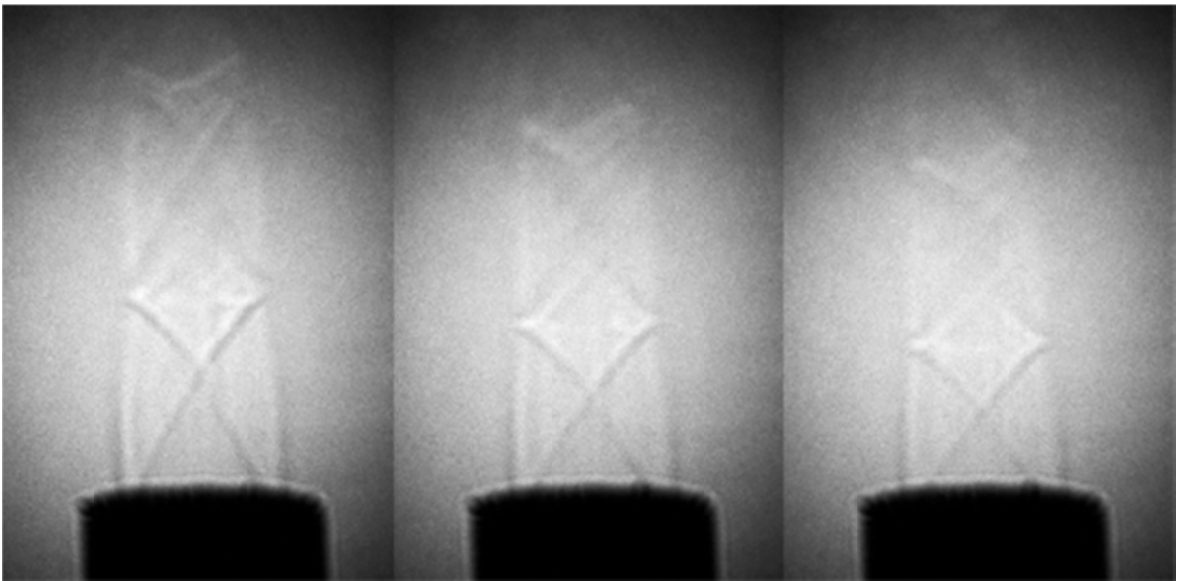


Figura 21.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 2290 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 3.74 a 3.04 atm.

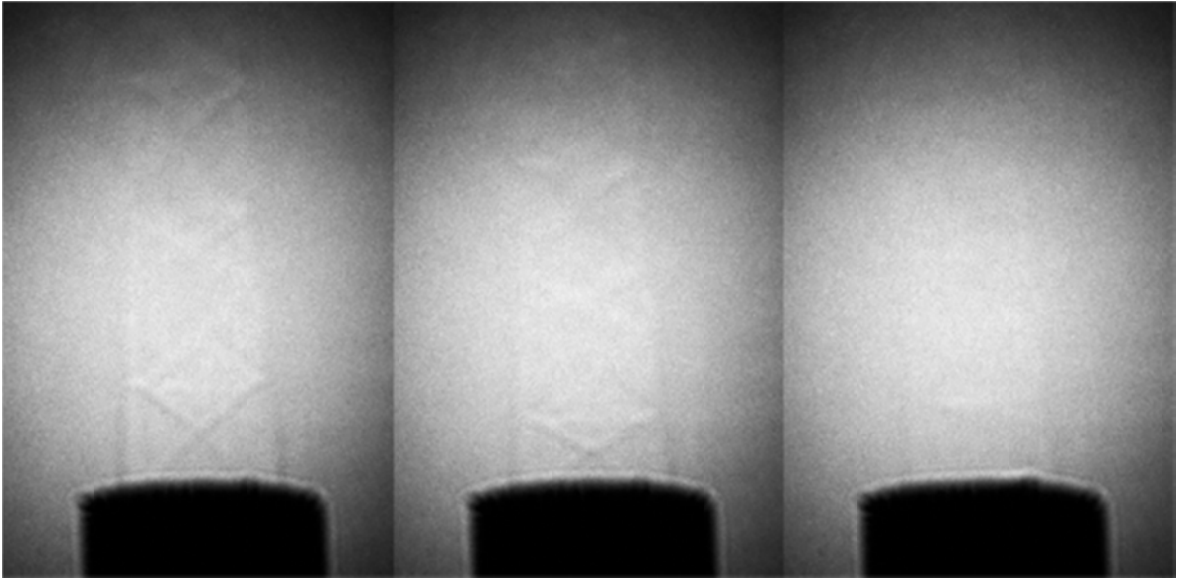


Figura 22.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 2290 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 2.72 a 2.04 atm.

Fotografía de la posición uno, en la altitud de 1585 m.

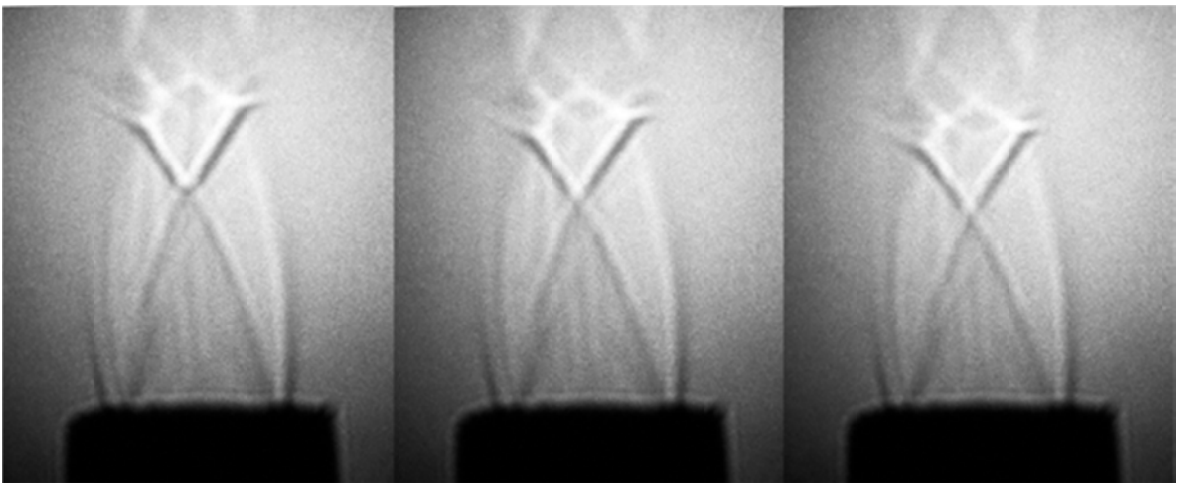


Figura 23.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1585 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 5.78 a 5.10 atm.

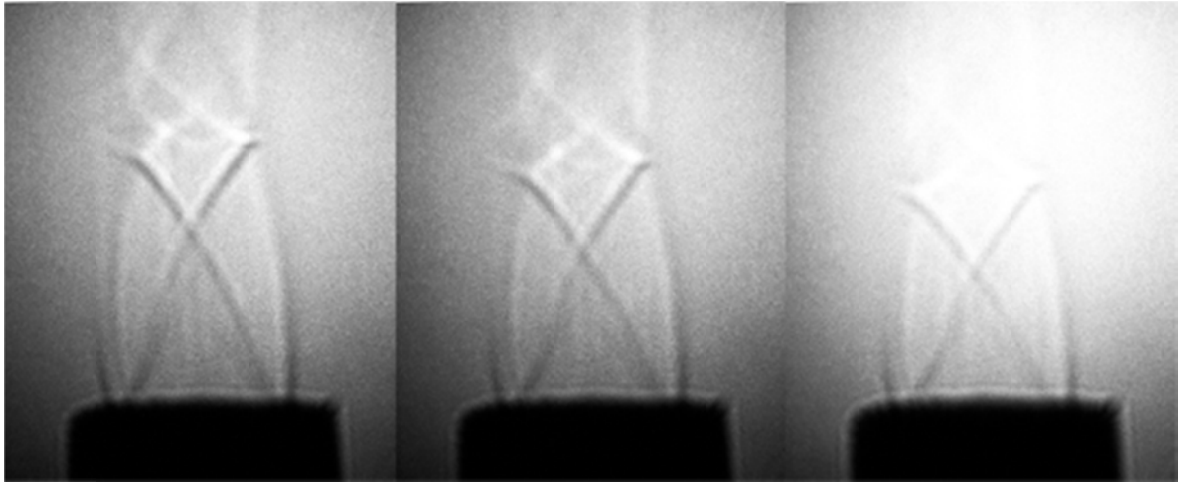


Figura 24 Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1585 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 5.76 a 4.08 atm.

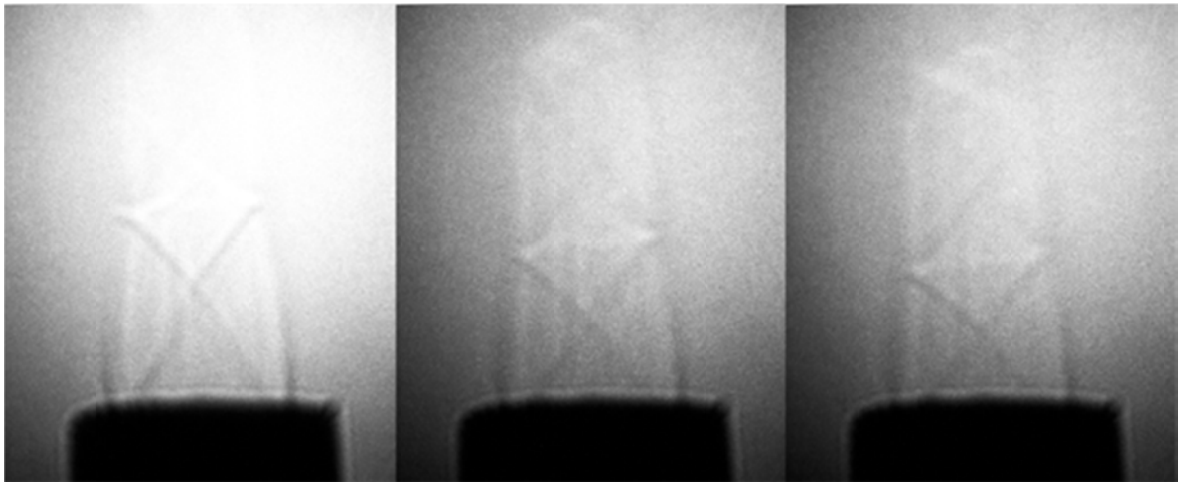


Figura 25. Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1585 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 3.74 a 3.04 atm.

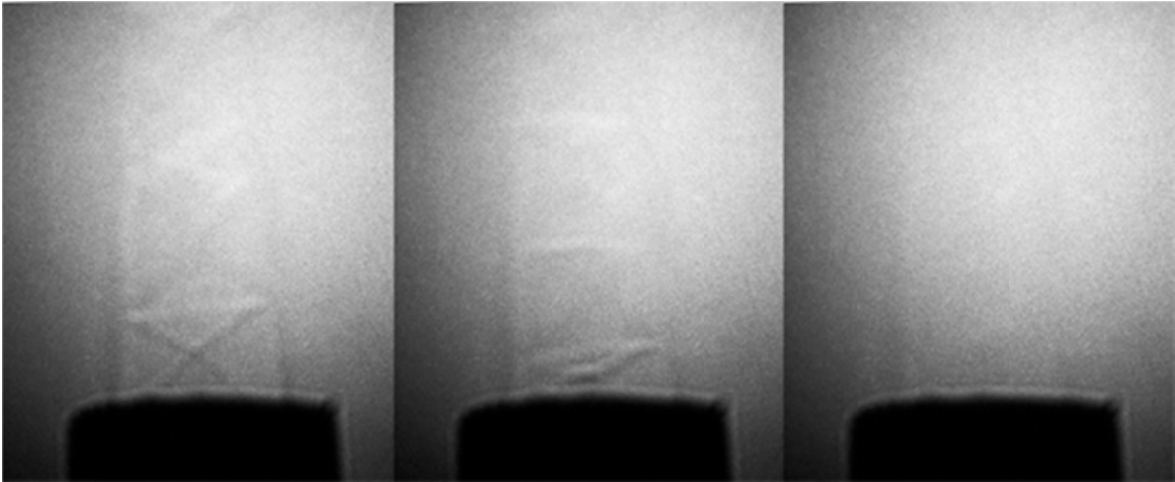


Figura 26.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 2290 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 2.72 a 2.04 atm.

Fotografía de la posición uno, en la altitud de 1255 m.

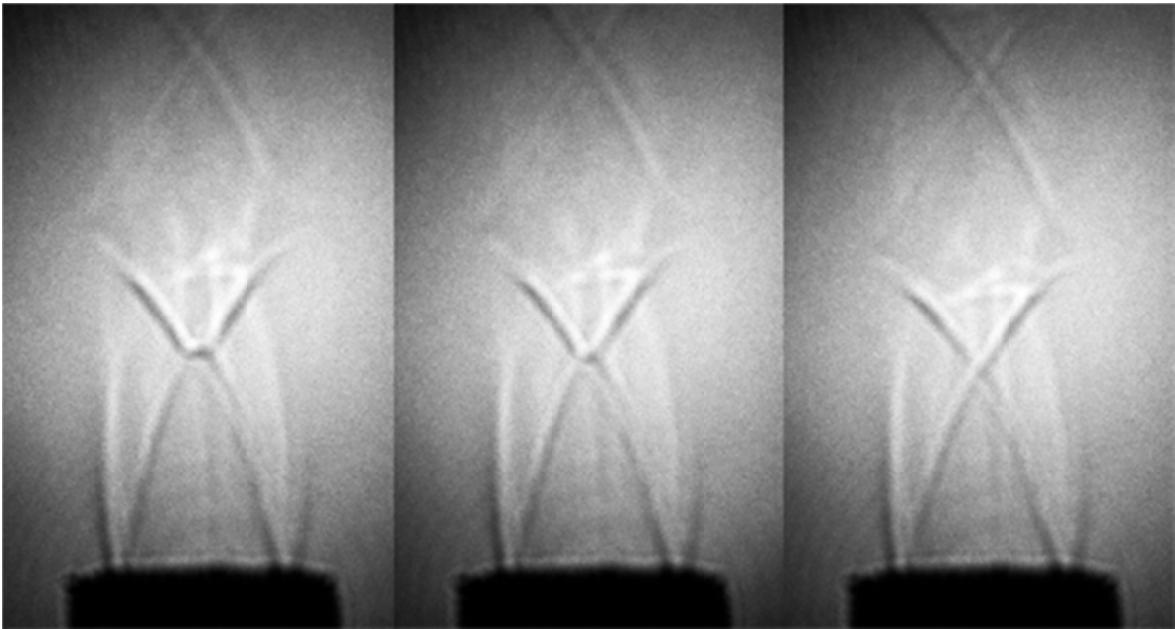


Figura 27.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1255 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 5.78 a 5.10 atm.

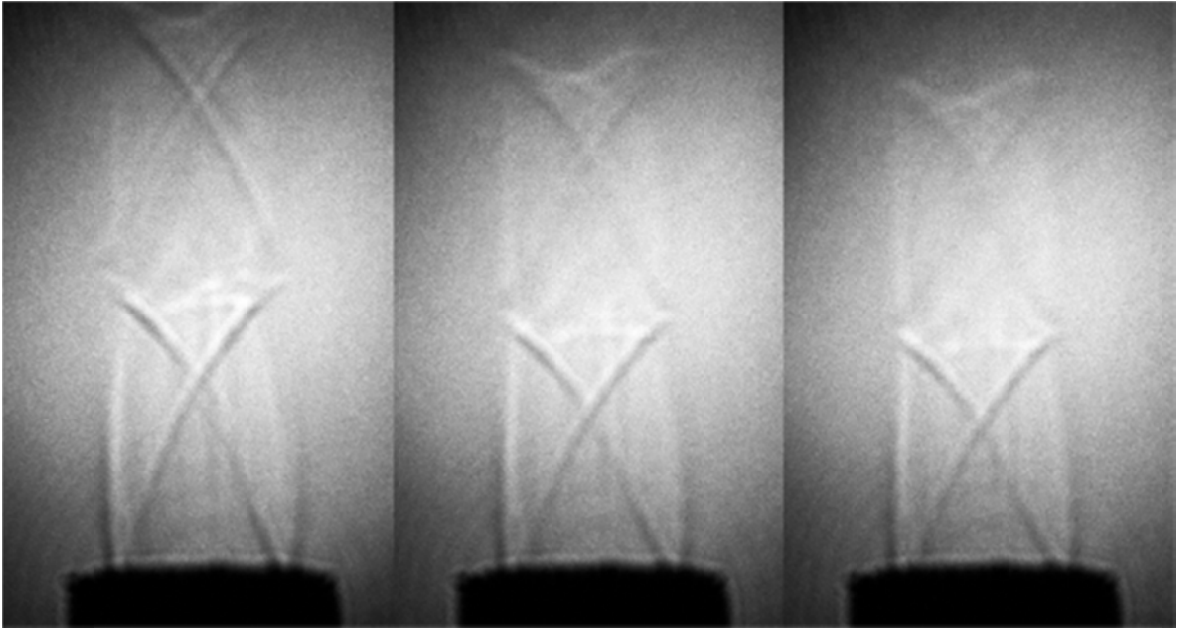


Figura 28.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1255 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 5.76 a 4.08 atm.

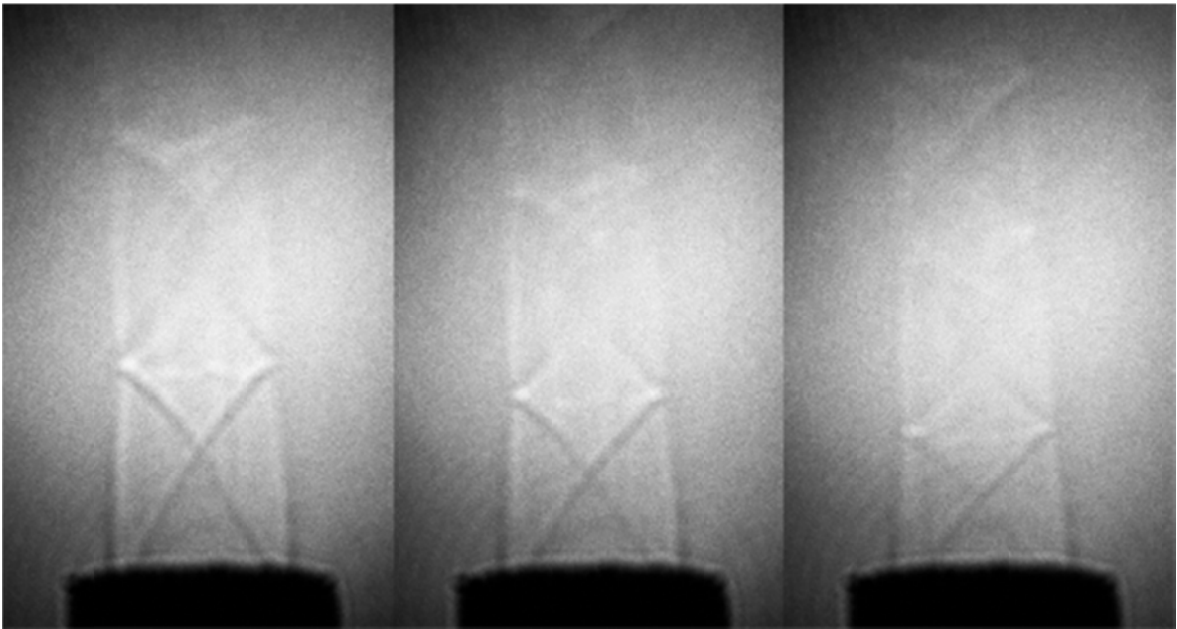


Figura 29.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1255 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 3.74 a 3.04 atm.

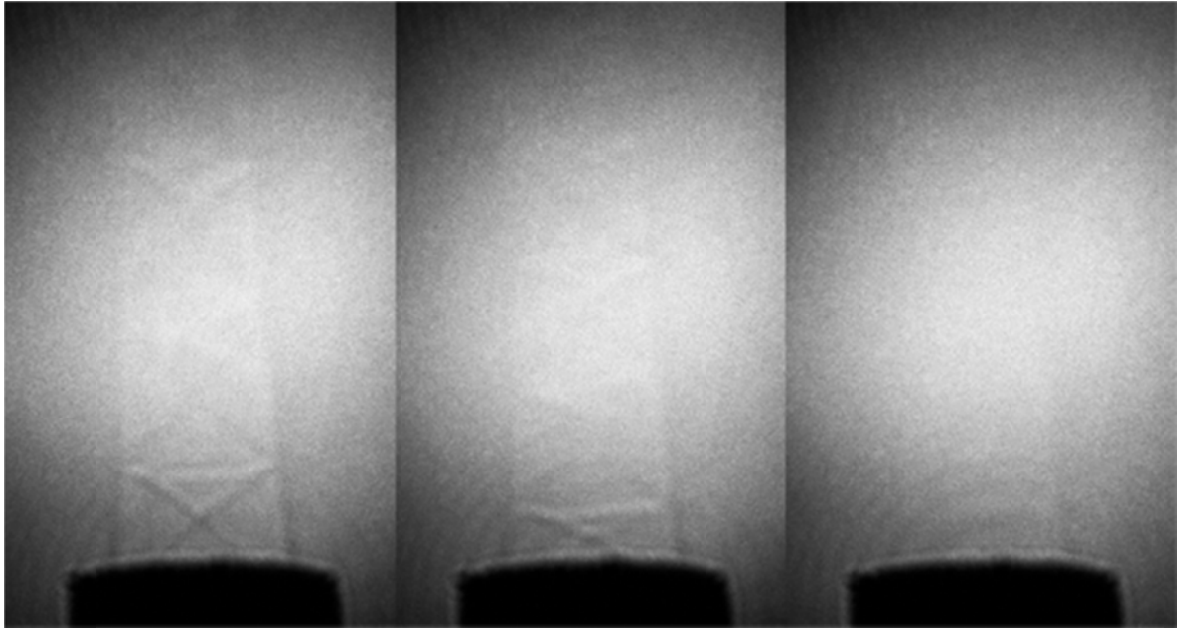


Figura 30.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1255 m de altitud y en la posición 1 para las presiones de entrada de 2.72 a 2.04 atm.

Fotografía de la posición dos, en la altitud de 2290 m.

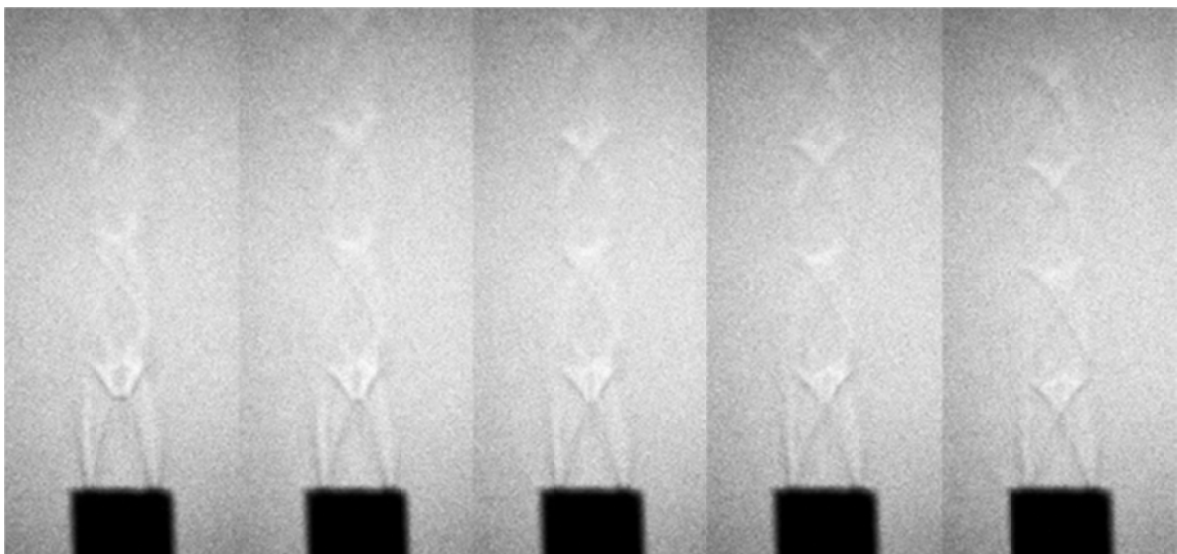


Figura 31.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 2290 m de altitud y en la posición 2 para las presiones de entrada de 5.78 a 4.42 atm.

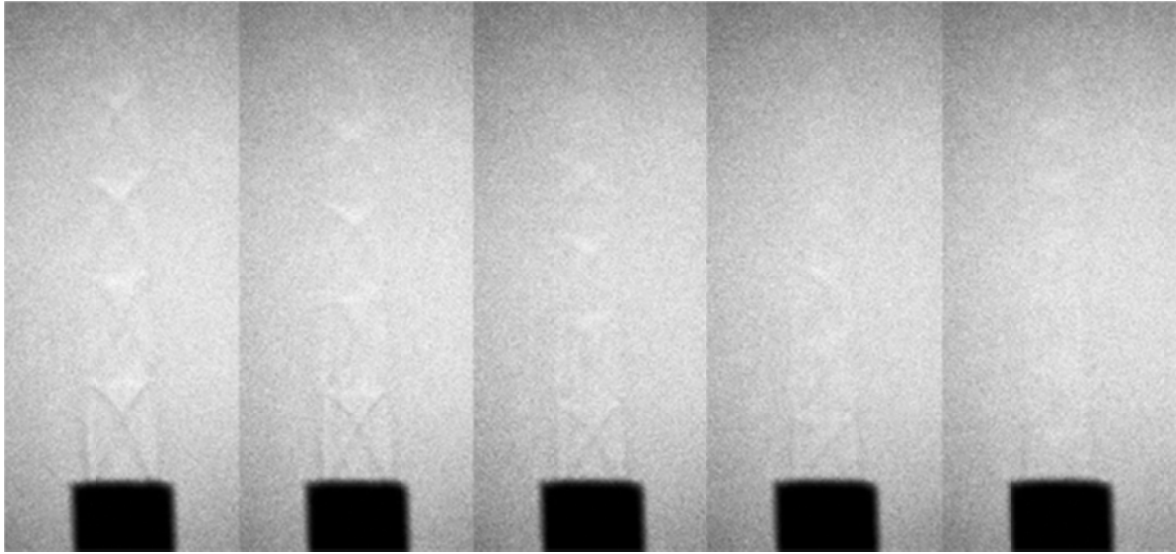


Figura 32.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 2290 m de altitud y en la posición 2 para las presiones de entrada de 4.08 a 2.72 atm.

Fotografía de la posición dos, en la altitud de 1585 m.

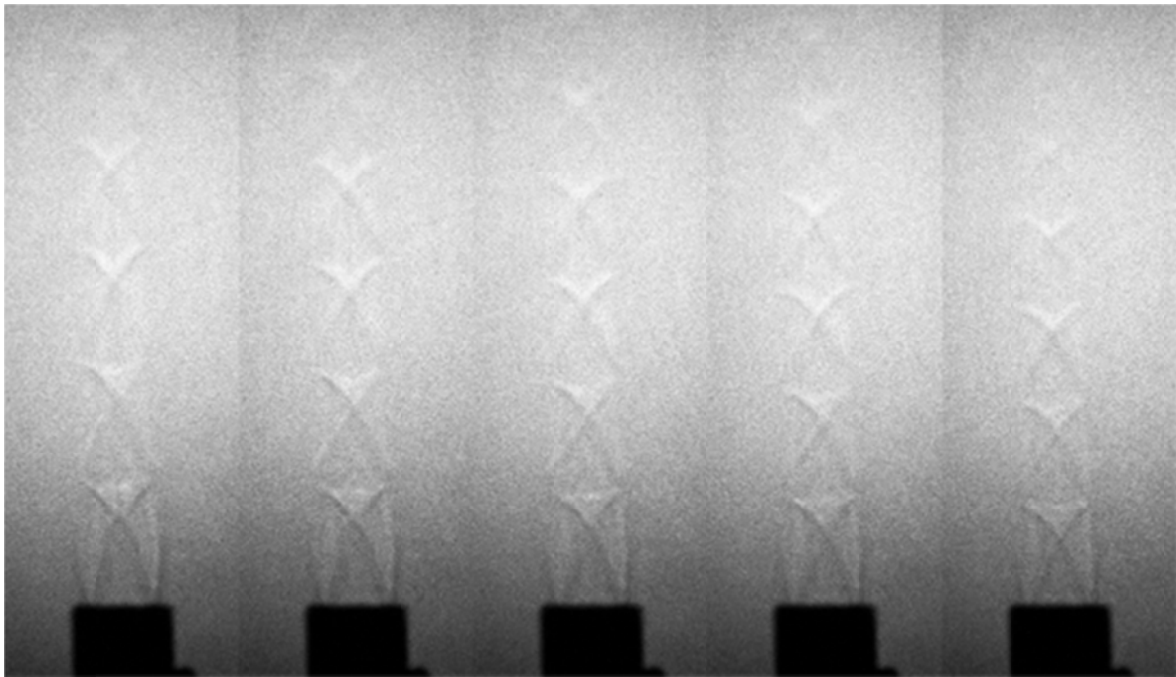


Figura 33.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1585 m de altitud y en la posición 2 para las presiones de entrada de 5.78 a 4.42 atm.

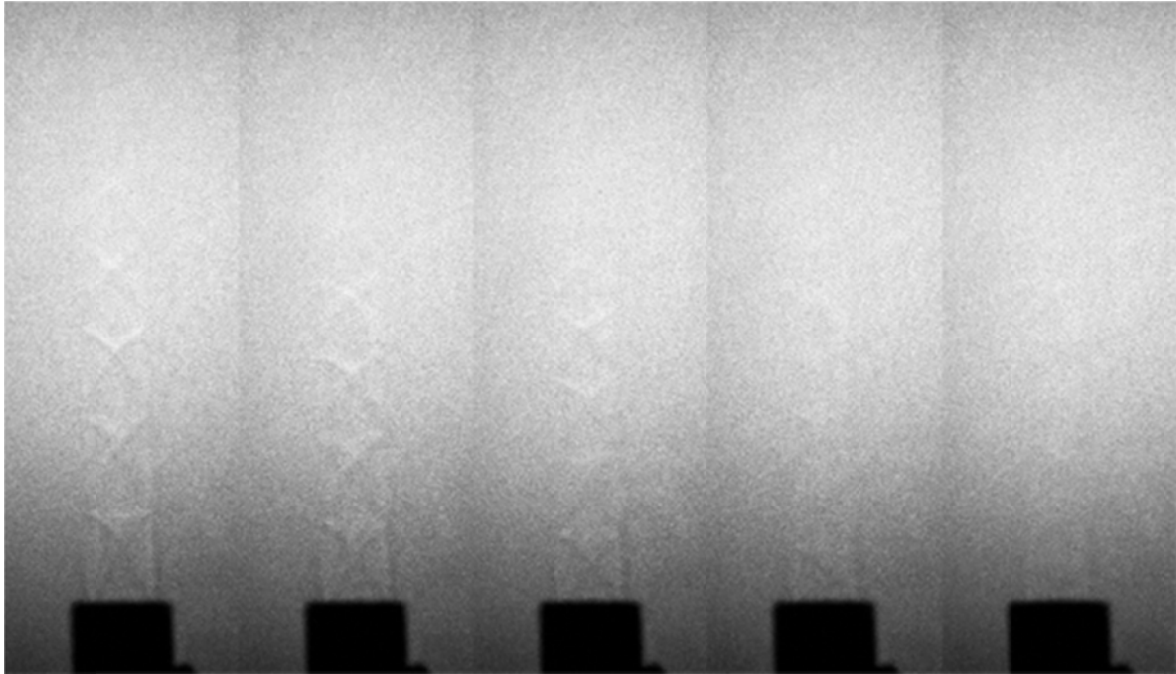


Figura 34.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1585 m de altitud y en la posición 2 para las presiones de entrada de 4.08 a 2.72 atm.

Fotografía de la posición dos, en la altitud de 1255 m.

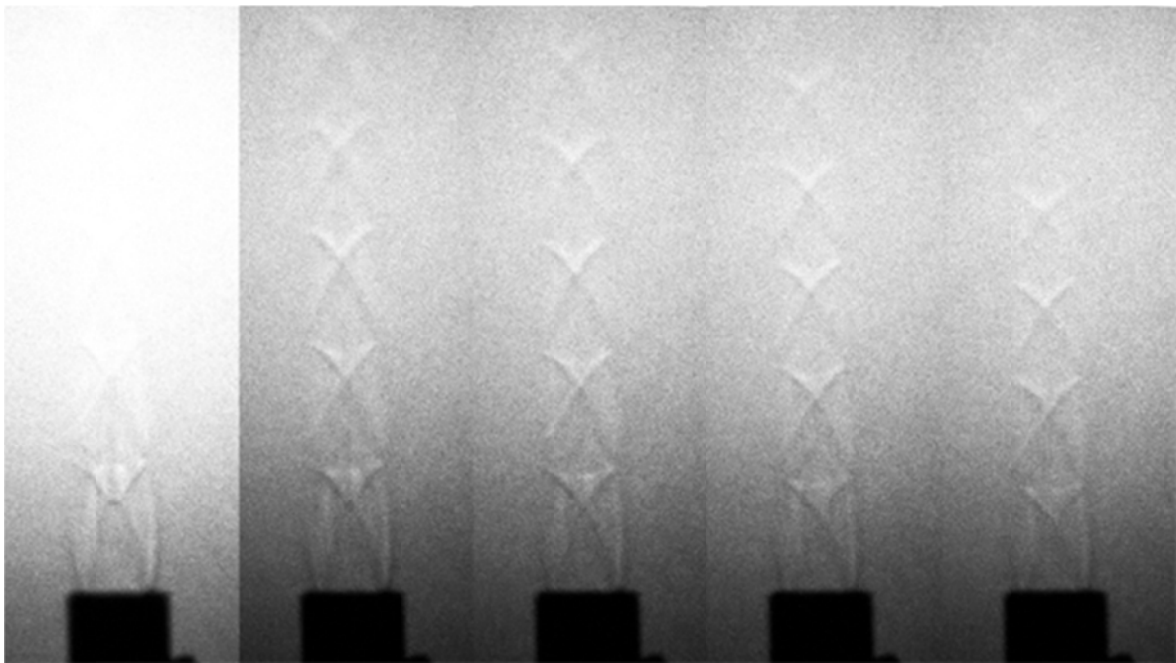


Figura 35.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1255 m de altitud y en la posición 2 para las presiones de entrada de 5.78 a 4.42 atm.

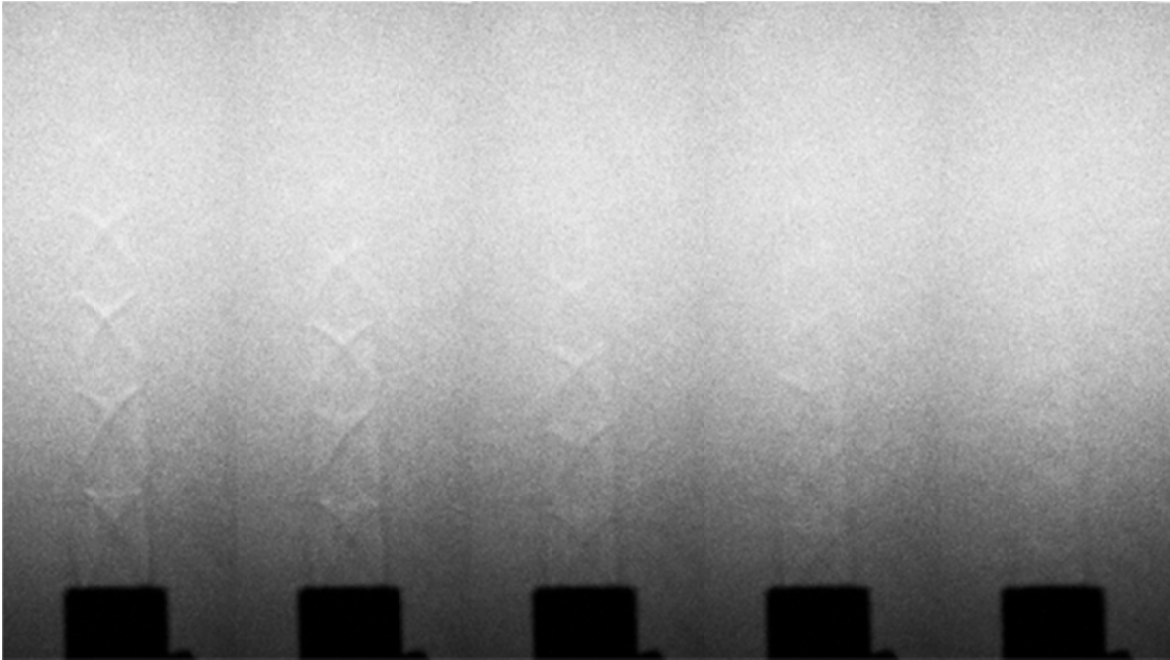


Figura 36.-Imágenes de shadowgraph de las ondas de choque, a 1255 m de altitud y en la posición 2 para las presiones de entrada de 4.08 a 2.72 atm.

5.2.1 Altitudes y presión atmosférica

Para determinar la presión atmosférica en cada lugar, lo ideal hubiese sido contar con un barómetro. Desafortunadamente no fue posible conseguir uno, por lo cual se optó por calcular la presión atmosférica utilizando la altitud de cada lugar, la cual, en una primera aproximación es:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} y} = (1 \text{ atm}) e^{-(0.117 \text{ Km}^{-1}) y}$$

Donde y es la altitud y p la presión atmosférica

Los datos de las altitudes se obtuvieron usando el programa "Google Earth", el cual permite ver lugares de la tierra y obtener su posición y altitud, entre otras cosas. El programa utiliza la base de datos de SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*), un proyecto espacial

para obtener las altitudes de la tierra en forma digital, el cual comenzó en febrero del 2000 a bordo del transbordador espacial Endeavour. Su resolución es de un arco de segundo, lo que se traduce en 90 m respecto a la posición y 30 m en la altitud.

Por lo anterior se calculan las presiones atmosféricas y se muestran en la tabla 3.

Tabla 2.- Cálculo de la presión atmosférica basada en la altitud de los tres lugares en donde se realizó el experimento.

Lugar	Altitud (± 0.030 Km)	Presión atmosférica (atm)
Ciudad de México	2.290	0.765 ± 0.0080
Cuernavaca	1.585	0.831 ± 0.0056
Temixco	1.255	0.863 ± 0.0042

5.2.2 Procesamiento de las Imágenes

En las fotos tomadas se nota que la tobera se encuentra ligeramente inclinada. Se observa también en la imagen una combinación de difracción e interferencia de la luz. Estos efectos se tomarán en cuenta para el análisis de incertidumbres. Las mediciones sobre las fotografías se hicieron con el *software* Adobe Photoshop CS4 Extended versión 11.0.

A fin de extraer información de las fotografías tomadas, primero es necesario tener una referencia con la cual calibrar las imágenes, ésta fue el diámetro exterior de la tobera, la cual se midió usando un vernier y se obtuvo un valor de 6.000 ± 0.0005 mm.

En cada imagen se midió el diámetro externo de la tobera tres veces, esto se hizo ya que se notó que a diferentes posiciones sobre la tobera se percibe una longitud y una inclinación diferente; más pequeñas conforme se desplaza hacia la parte de abajo de la tobera. Con las medidas realizadas se sacó un promedio para cada una de las series.

El promedio se tomó como la medida de referencia (6 mm) y la desviación estándar como la incertidumbre personal que se tiene para localizar un punto sobre una foto, usando el programa, los datos se encuentran en las tablas 7 y 8 del apéndice.

Dentro de las fotos de una misma serie, la tobera no se movió, por lo que su posición en la cámara no cambia; lo que varía un poco es el difuminado alrededor del borde de la tobera, por falta de nitidez en la imagen. Es importante notar que, al fotografiar, se enfocaba la onda de choque y no la tobera.

Se midieron las distancias a las cuales se forman los cruces en las ondas de choque, y en las que aparecen expansiones (regiones donde el flujo se vuelve más ancho). El objetivo era poder comparar con los datos tomados con PIV [13], y poder asociar a cada punto de la estructura de choque una velocidad media del flujo.

Para localizar los cruces y expansiones se trazaron líneas perpendiculares al. La salida de la tobera se definió como el origen. Como se ve en la figura 36, se tomaron en cuenta los ángulos agudos que forman las zonas de muy alta densidad.

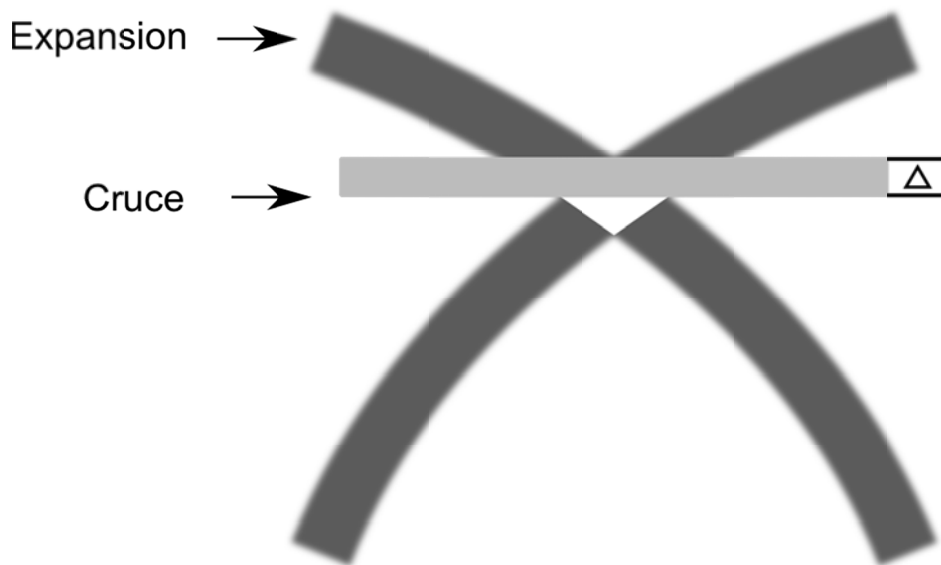


Figura 37.-Esquema de la incertidumbre al medir la posición de los cruces. Se muestra el cruce y la línea que se pinta para señalar la posición del cruce. Además se indican las posiciones representativas, que se midieron, dentro de las ondas de choque.

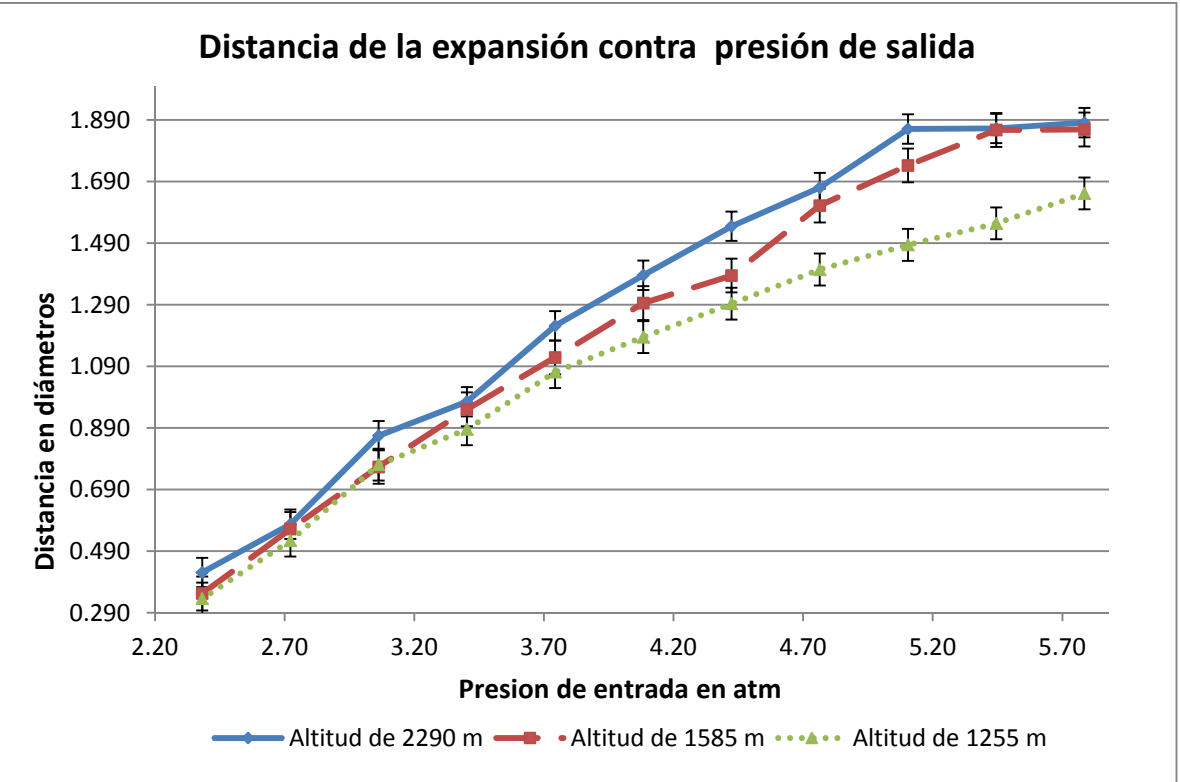
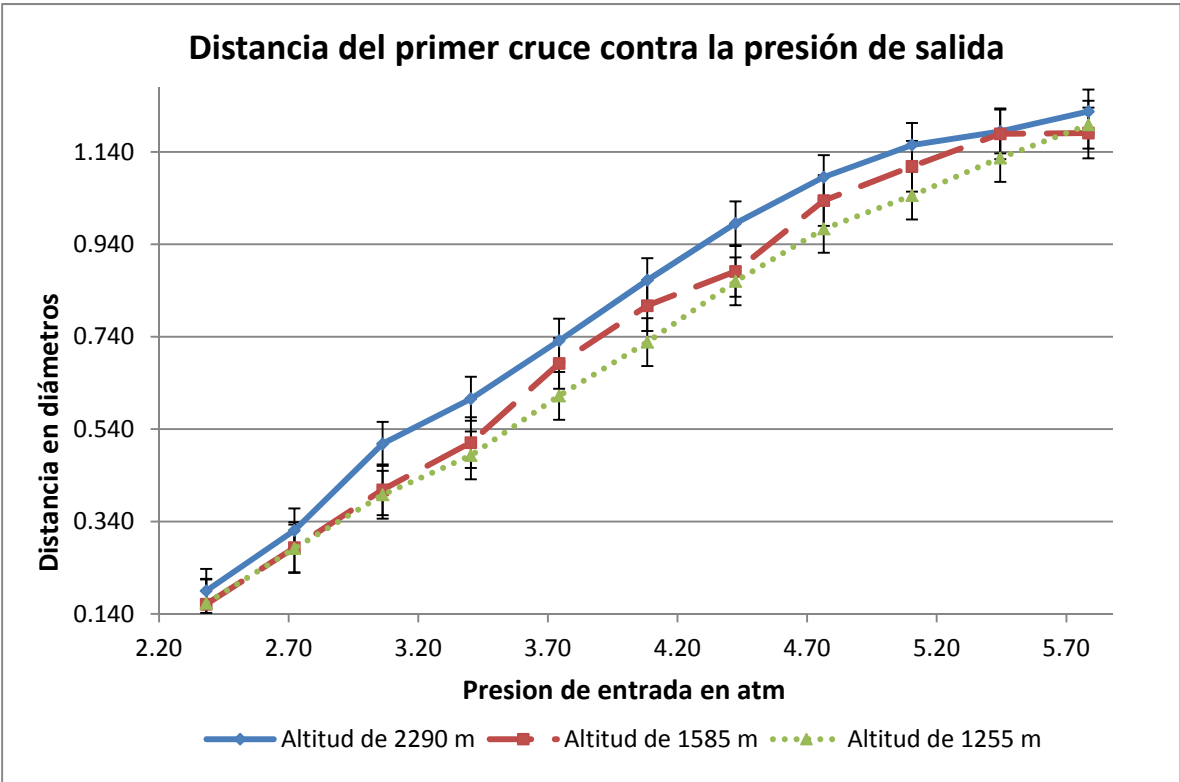
En las fotos en las que hay disco de Mach, no hay una cuña que defina la posición, por lo cual se definió como la mitad de la distancia entre la parte superior y la inferior del disco.

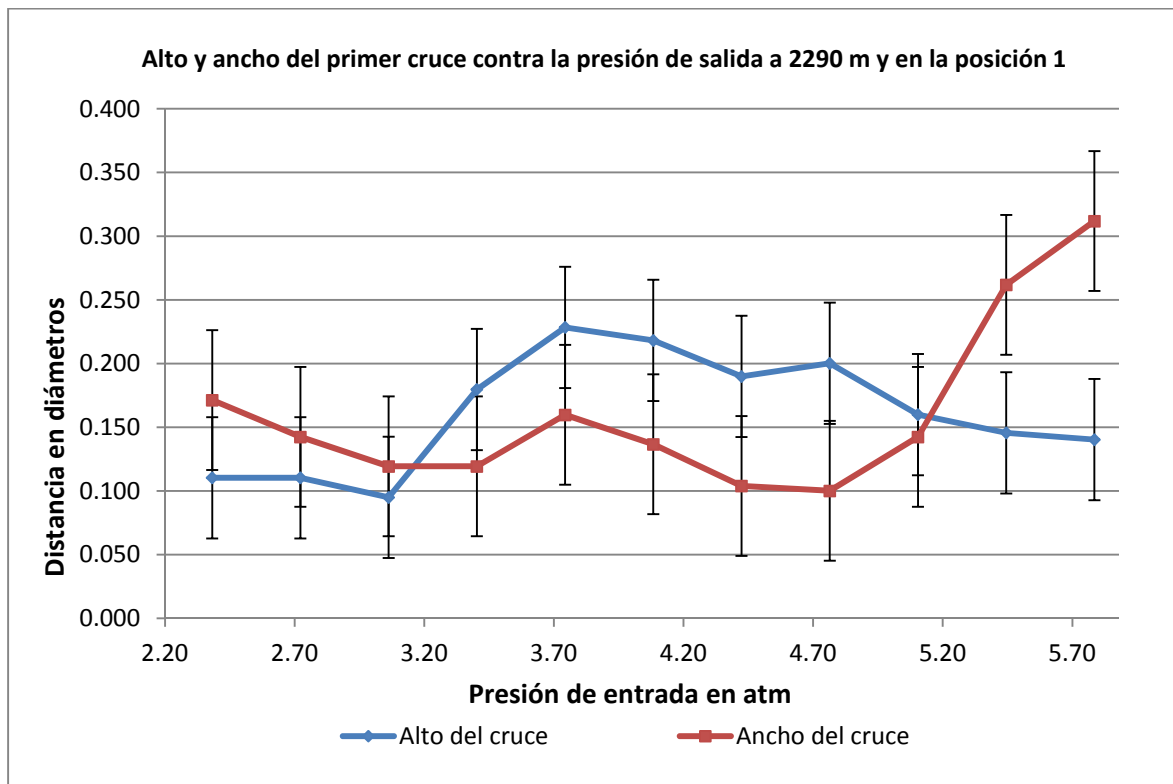
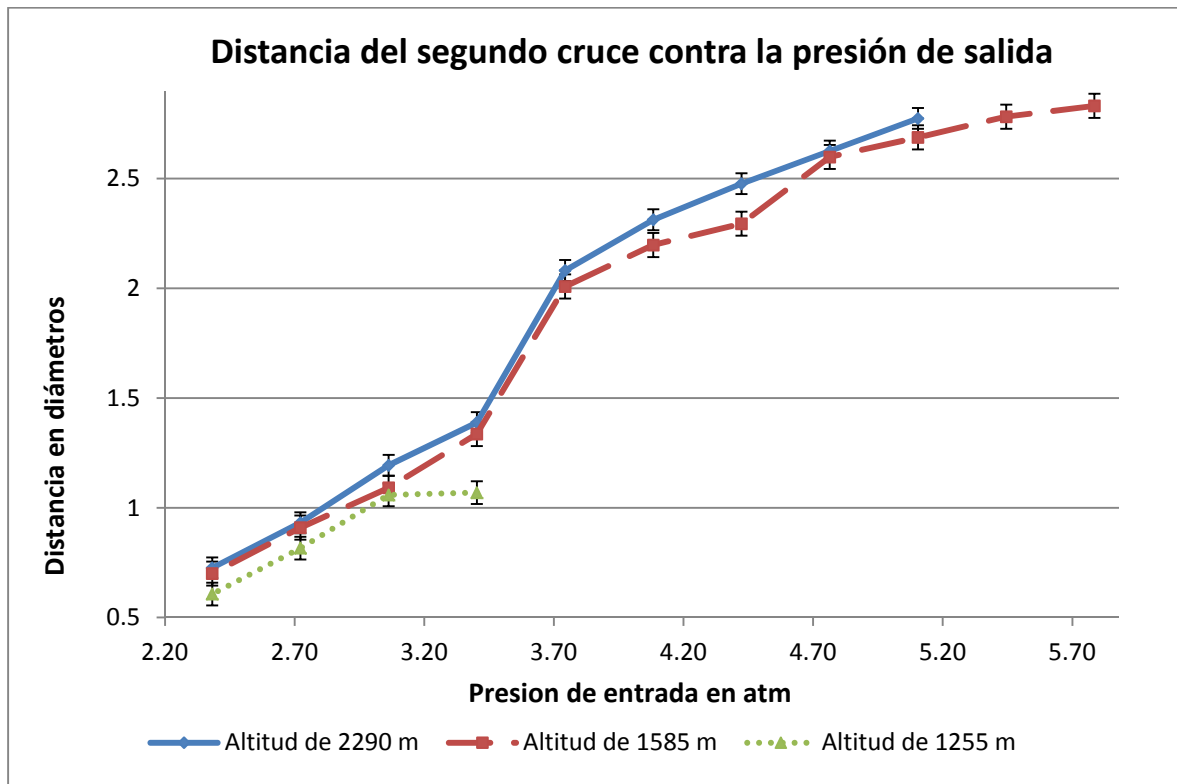
La incertidumbre que se tiene al medir sobre las imágenes es la combinación de dos factores: la incertidumbre asociada a la posición de la marca sobre cada una de las fotografías, esto es, la desviación estándar que se calculó de la calibración. La otra incertidumbre está relacionada con el espesor de la marca, que es aproximadamente de 0.054 mm para las fotos tomadas en la posición 1 del riel y de 0.190 mm para las tomadas en la posición 2 del riel. Por lo tanto la incertidumbre total es el doble de la suma de las anteriores, ya que se trazan dos rectas, una en la posición de la onda de choque y la segunda a la salida de la tobera.

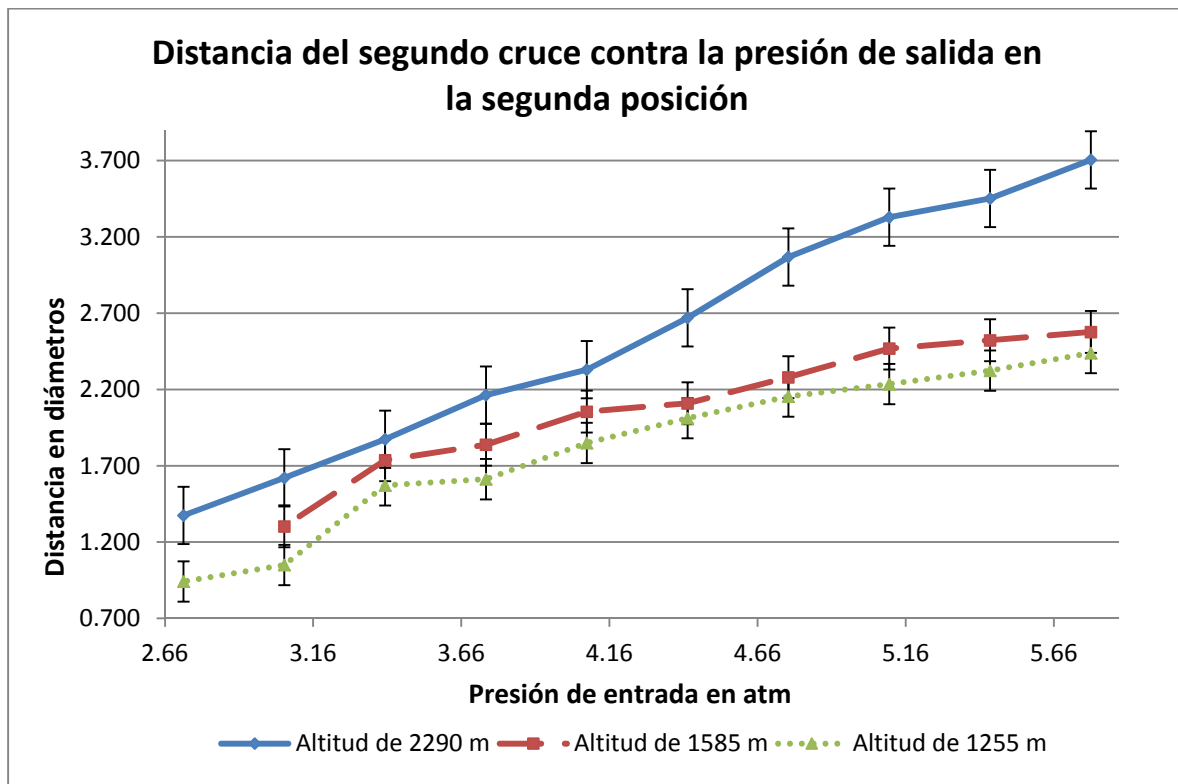
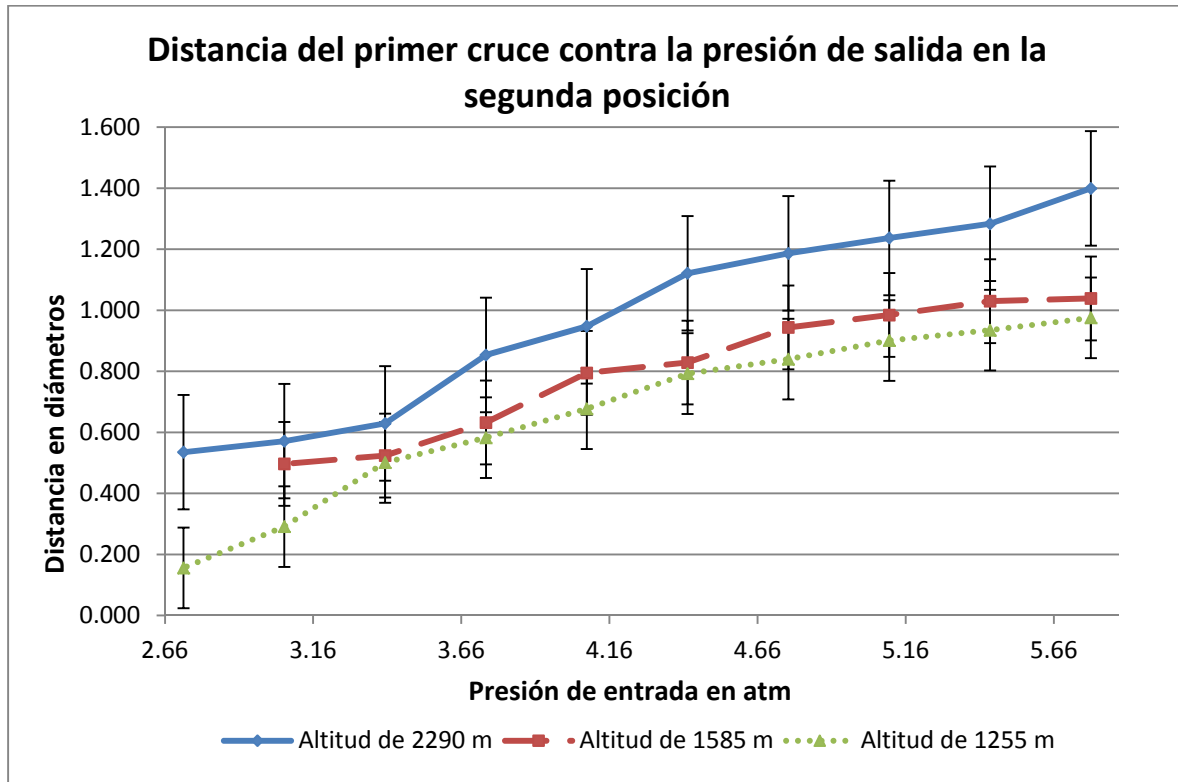
5.2.3 Determinación de la posición de las ondas de choque

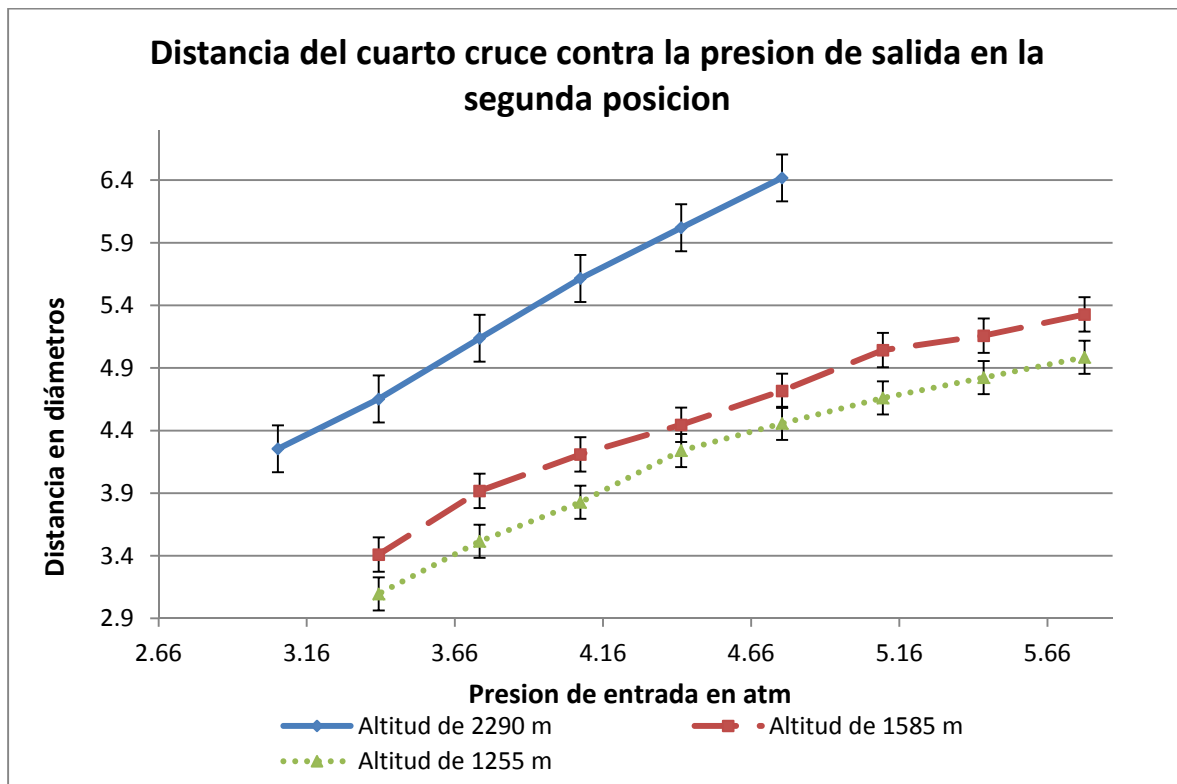
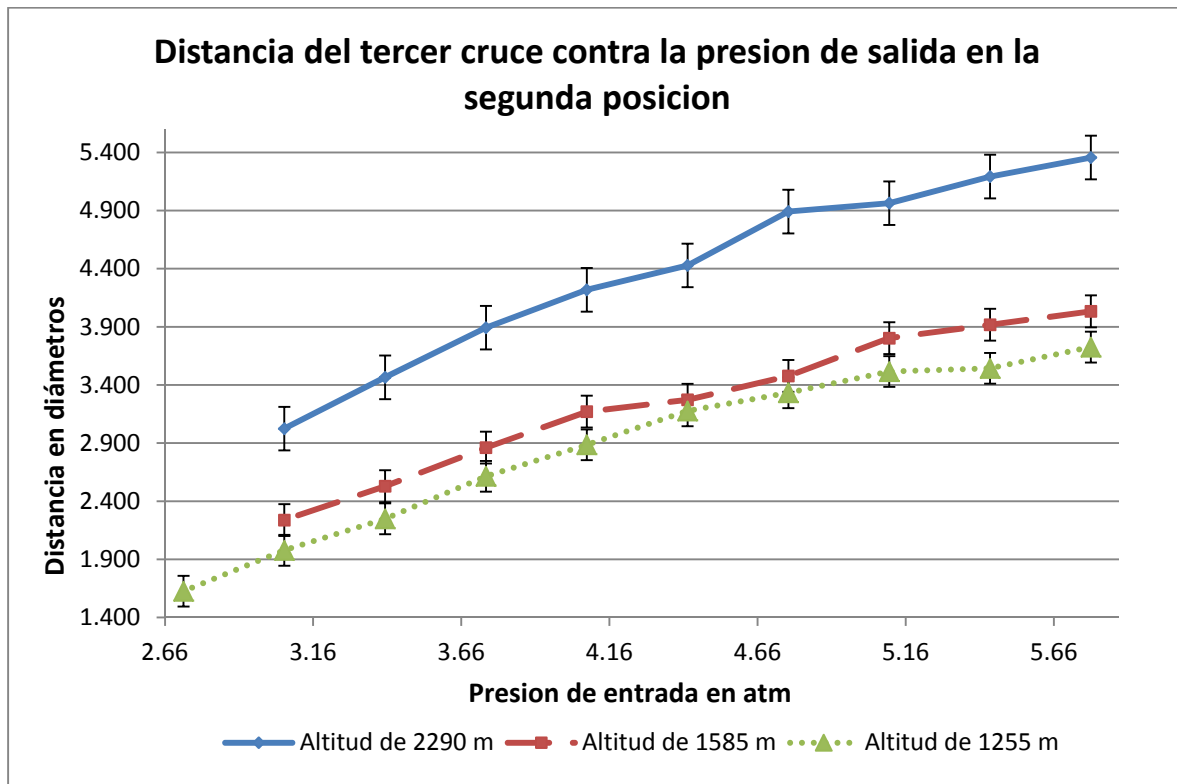
De las imágenes obtenidas se nota que en la altitud más baja, esto es, donde la presión atmosférica es más alta, la estructura requiere de mayor presión de salida para formarse. El ejemplo más claro es que a la altitud de 2290 m desde las 5.44 atm se forma la estructura del disco de Mach, en cambio a la altitud de 1585 m se alcanza a formar a las 5.78 atm y a la altitud de 1255 m ya no se forma.

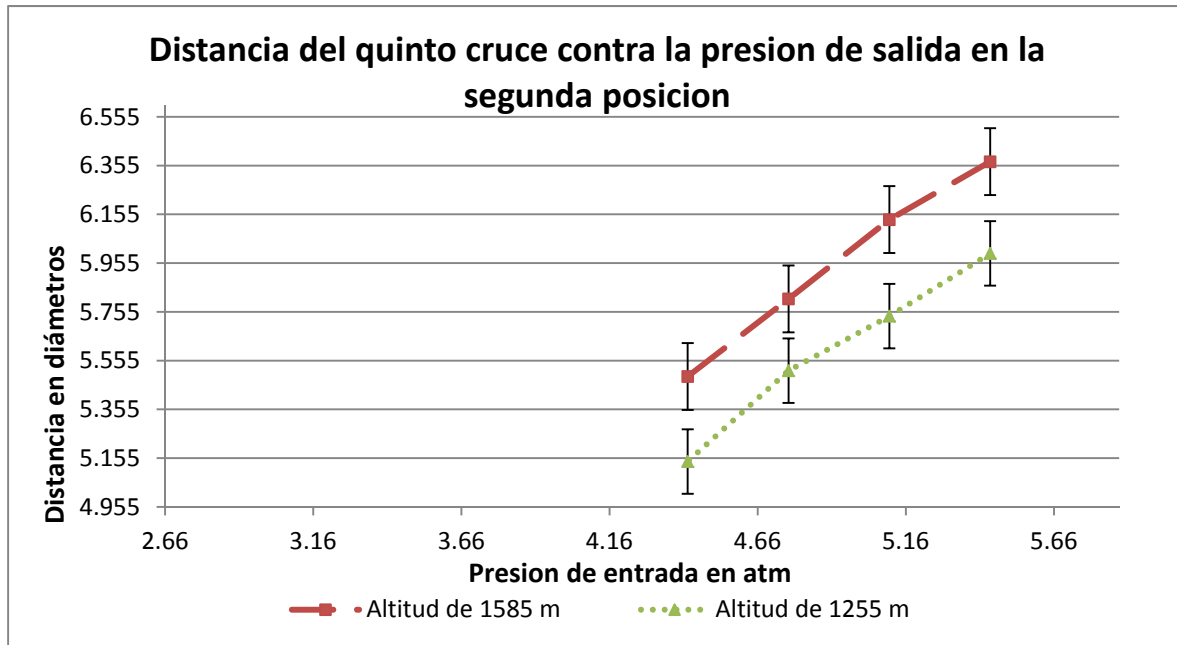
En las tablas de la 9 al 14 del apéndice, se muestran las posiciones representativas en las ondas de choque y su variación con la altitud, lo cual se aprecia en las gráficas presentadas a continuación. Las posiciones representativas se muestran en la figura 36.



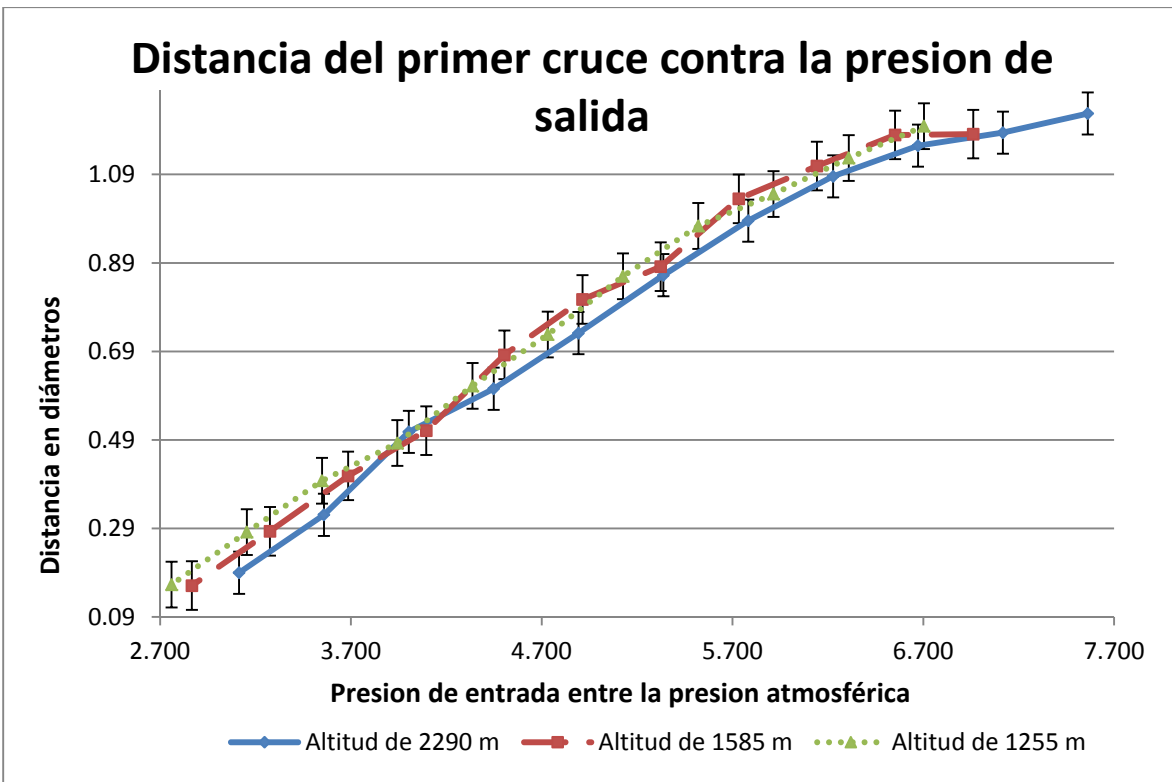








Si se adimensiona la presión con la presión atmosférica local las tres gráficas colapsan en una sola, como se ve en la siguiente gráfica. Lo mismo sucede para las demás



5.2.4 Determinación del número de Mach con base en las fotografías

Hay una expresión que permite conocer el número de Mach en un flujo supersónico a partir del ángulo que forma la onda de choque, justo al salir de la tobera, con una línea imaginaria paralela a la tobera [7]:

$$M = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$$

donde el ángulo α se mide desde una línea imaginaria, prolongación de la tobera, con la onda de choque que se produce por el flujo supersónico, esto se muestra en la figura 37,.

Sin embargo, resulta difícil medir ángulos en las imágenes tomadas, ya que, en algunas fotos, el contraste es pobre en esta zona y es difícil establecer un criterio para marcar el ángulo. Por lo anterior se realiza la siguiente aproximación: como se conoce, de los datos anteriores, la distancia al cruce y el radio de la boquilla, entonces por trigonometría se encuentra el ángulo, como se muestra en la figura 37, aunque en la práctica es más cómodo encontrar la cotangente.

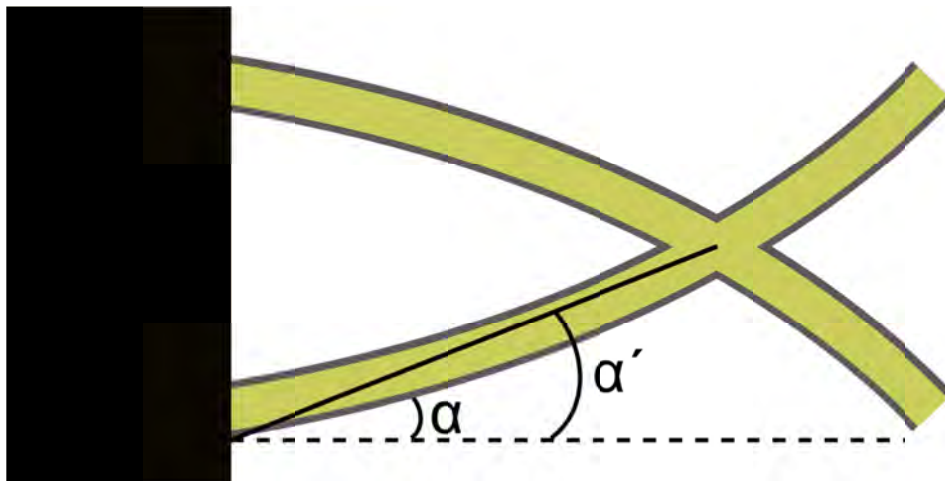


Figura 38.- Aproximación realizada en las ondas de choque, α es el ángulo que se debe obtener para poder calcular el número de Mach y α' es la aproximación que se usa.

A continuación, en la tabla 10 se muestran los resultados de calcular el número de Mach con ésta aproximación.

Tabla 3.- Números de Mach para las diferentes presiones de salida de las tres altitudes.

	Altitud de 2290 m	Altitud de 1585 m	Altitud de 1255 m
Presión (± 0.017 atm)	Número de Mach	Número de Mach	Número de Mach
5.79	2.65 \pm 0.125	2.56 \pm 0.136	2.60 \pm 0.130
5.44	2.57 \pm 0.125	2.56 \pm 0.136	2.47 \pm 0.131
5.10	2.52 \pm 0.124	2.43 \pm 0.137	2.32 \pm 0.131
4.76	2.39 \pm 0.123	2.30 \pm 0.136	2.19 \pm 0.130
4.42	2.21 \pm 0.125	2.03 \pm 0.131	1.99 \pm 0.126
4.08	1.99 \pm 0.123	1.90 \pm 0.133	1.77 \pm 0.128
3.74	1.77 \pm 0.115	1.69 \pm 0.131	1.58 \pm 0.123
3.40	1.57 \pm 0.111	1.43 \pm 0.123	1.39 \pm 0.109
3.06	1.43 \pm 0.111	1.29 \pm 0.094	1.28 \pm 0.104
2.72	1.19 \pm 0.080	1.15 \pm 0.072	1.15 \pm 0.078
2.38	1.07 \pm 0.054	1.05 \pm 0.047	1.05 \pm 0.040

Como se muestra en la figura 37, la aproximación para determinar el ángulo, no es tan precisa, debido a que las ondas de choque no son rectas, aun cuando en la bibliografía se supone que así es, por esto se tiene un ángulo más grande de lo que es en realidad, lo cual se traduce en números de Mach más grandes. Esta discrepancia es más grande con las presiones más altas que en las bajas en donde las líneas son más rectas.

5.3 Cambios en la estructura de choque debidos a las partículas sembradas en el flujo

En el video tomado se aprecia claramente como los cruces de las líneas de choque se forman más cerca de la salida cuando el flujo se encuentra sembrado. En las figuras 38-41 se muestran tres cuadros sucesivos del video en los que se aprecian las diferencias del flujo supersónico con partículas y en ausencia de ellas, la línea negra indica la posición del primer cruce. En la tabla 11 se muestran los cambios registrados en el número de Mach.

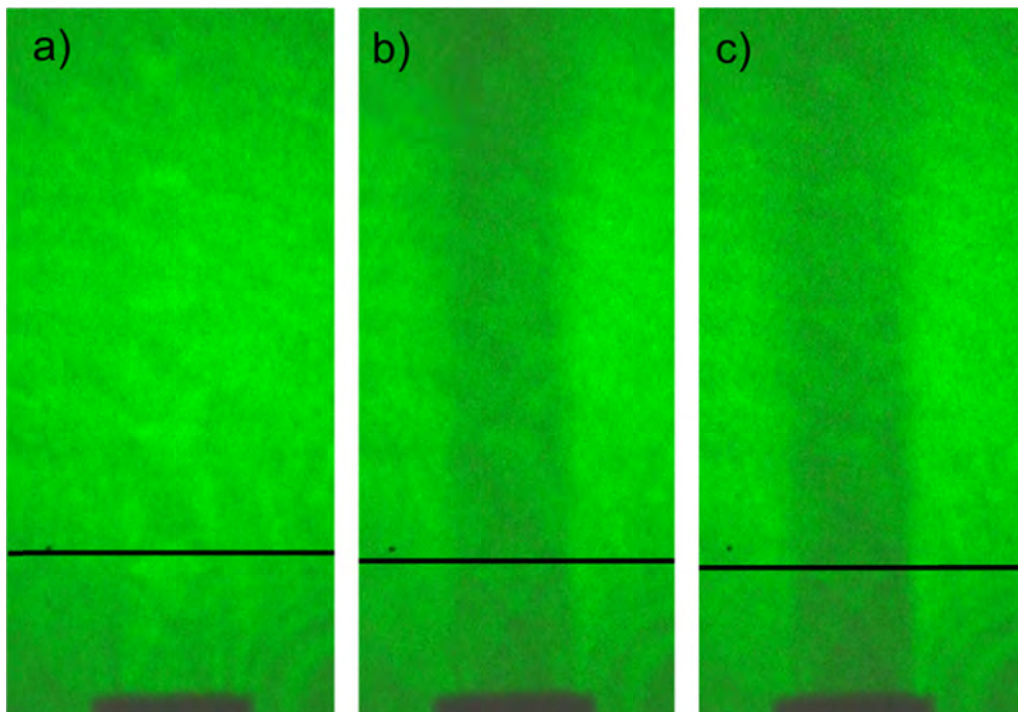


Figura 39.-Fotogramas consecutivos del video tomado de shadowgraph, con partículas trazadoras de dióxido de titanio y con una presión de 5.78 atm.

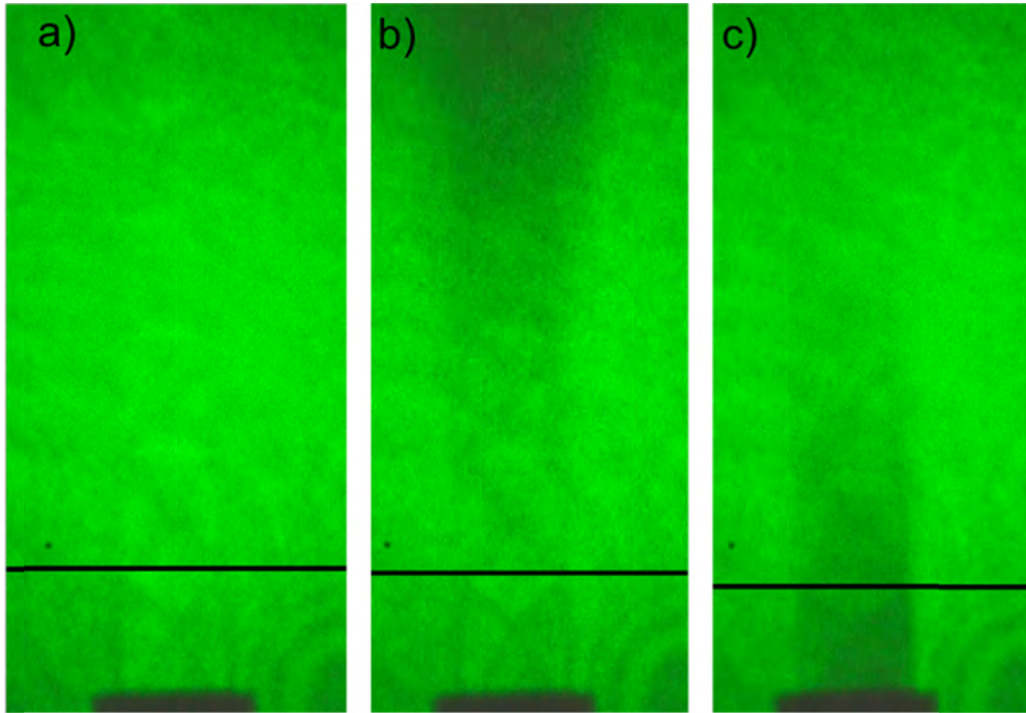


Figura 40.-Fotogramas consecutivos del video tomado de shadowgraph, con partículas trazadoras de dióxido de titanio y con una presión de 5.44 atm.

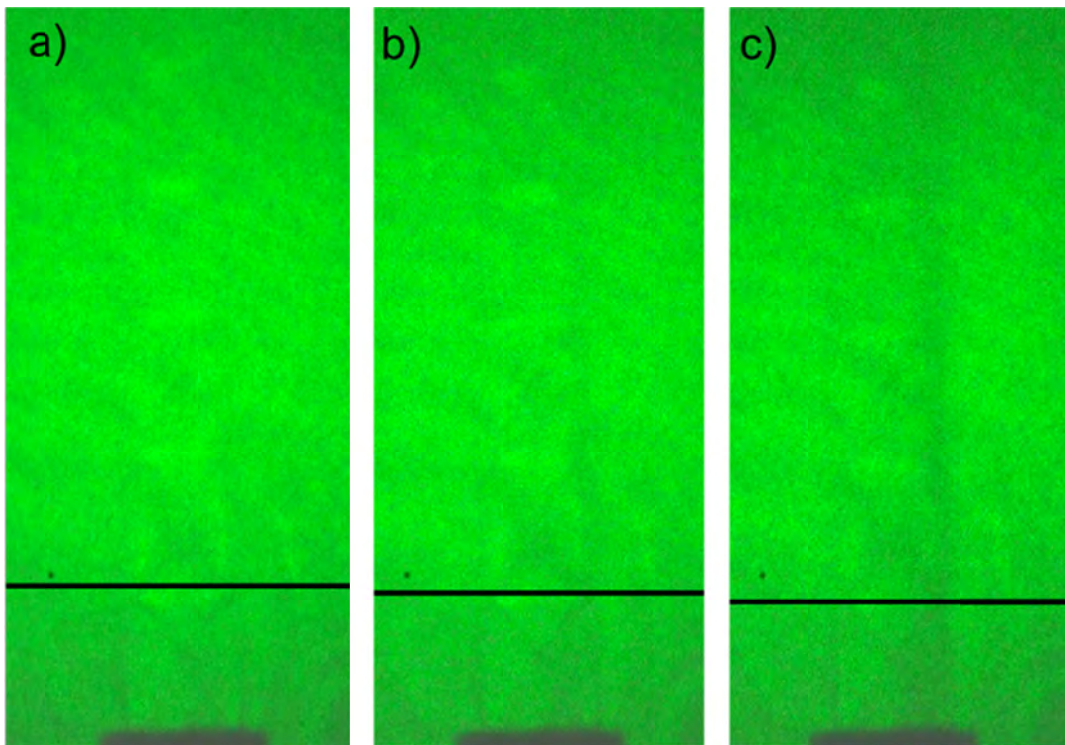


Figura 41.-Fotogramas consecutivos del video tomado de shadowgraph, con partículas trazadoras de talco y con una presión de 5.78 atm.

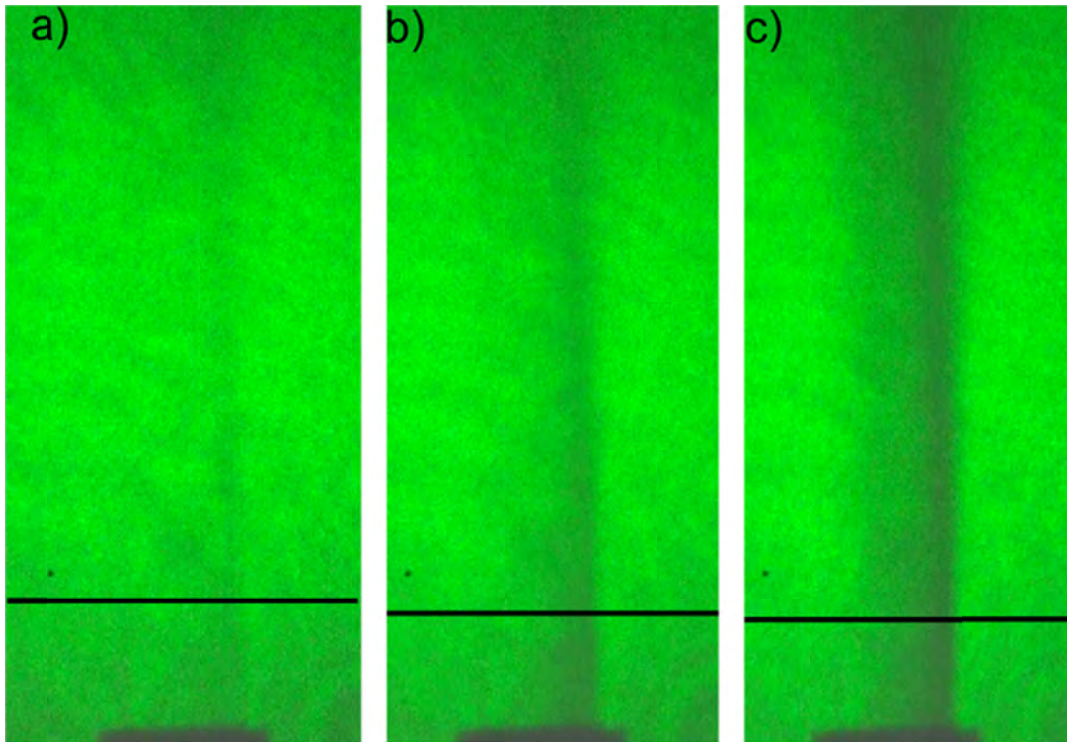


Figura 42.-Fotogramas consecutivos del video tomado de shadowgraph, con partículas trazadoras de Talco y con una presión de 5.44 atm.

Tabla 4.- Números de Mach calculados para las presiones de salida de 5.78 y 5.44 atm, de tres cuadros consecutivos en los que no hay trazadores en el cuadro a) y en los cuadros b) y c) si hay trazadores.

		Dióxido de Titanio				Talco			
		5.78		5.44		5.78		5.44	
Presión (± 0.017 atm)		5.78		5.44		5.78		5.44	
Cuadro		Número de Mach ($\pm 10\%$) / velocidad ² [m/s]							
A	(Sin trazador)	1.75	600	1.63	559	1.70	583	1.59	545
B	(Con trazador)	1.69	580	1.59	545	1.65	566	1.50	515
C	(Con trazador)	1.64	562	1.50	514	1.59	545	1.46	501

² Se toma la velocidad del sonido como 343 m/s.

5.4 Cuantificación de los cambios en el índice de refracción

Se tomaron fotografías sin flujo y para las presiones de 5.44, 4.08 y 2.38 atm, las cuales se muestran a continuación en las figuras 43-45

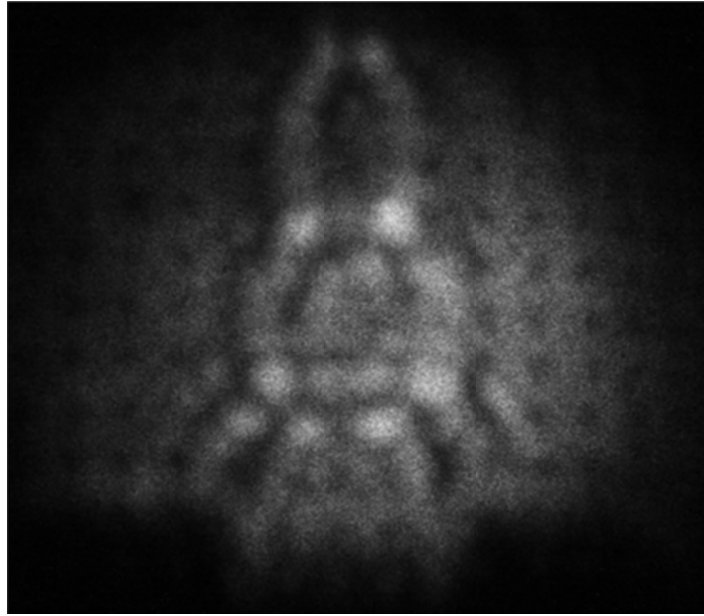


Figura 43.-Fotografía del flujo supersónico con la malla a una presión de entrada de 5.44 atm.



Figura 44.-Fotografía del flujo supersónico con la malla a una presión de entrada de 4.08 atm

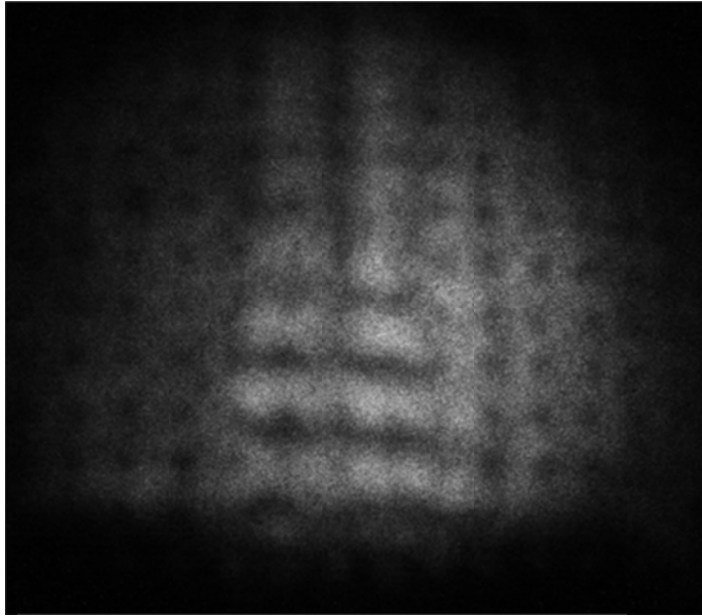


Figura 45.-Fotografía del flujo supersónico con la malla a una presión de entrada de 2.04 atm

En las fotos se ven las ondas de choque distorsionadas por la malla. Se aprecia como los puntos más alejados de la onda de choque no se alteran, los que se encuentran más cerca se mueven un poco en dirección a la onda y los que están sobre la estructura de choque se modifican mucho.

La ecuación que describe el desplazamiento de los puntos, está dada en la ecuación (III) y es la siguiente:

$$d = \frac{f z_b}{z_b + z_c - f} \int_{\Delta z} \frac{1}{n_0} \frac{\partial n}{\partial r} dz$$

Discretizando la ecuación (III) se obtiene lo siguiente:

$$d = \frac{f z_b}{z_b + z_c - f} \sum_i \frac{1}{n_0} \frac{\Delta n_i}{\Delta r_i} \Delta z_i$$

Cómo se analiza cada punto individualmente $i = 1$, el índice de refracción del aire a 0 °C y al nivel del mar es $n_0 = 1.00292$, Δz_i es el grosor el cual se aproxima al grosor de la tobera: 0.7 mm aun cuando este aumenta al alejarse de la tobera debido a la expansión del flujo. Por último $\Delta r_i = d$. Por lo tanto

$$\Delta n = \frac{n_0 (z_b + z_c - f)}{\Delta z} \frac{d^2}{f z_b}$$

Ésta ecuación indica cómo, en función del desplazamiento, cambia el índice de refracción en cada punto, como consecuencia de la presencia de las ondas de choque.

Para localizar los puntos dentro de las fotos se utilizó el programa de computadora “LoggerPro”, el cual da las coordenadas de puntos específicos, como se ve en las figuras 46-49.

Para calibrar y cuantificar la incertidumbre asociada al proceso de colocar los puntos, se toma la referencia de la imagen de la malla sin flujo supersónico. Como se supone que los puntos están equiespaciados a una distancia conocida se compara la distancia entre los puntos vecinos horizontales y verticales. La distancia promedio se toma como la referencia y la desviación estándar como la incertidumbre.

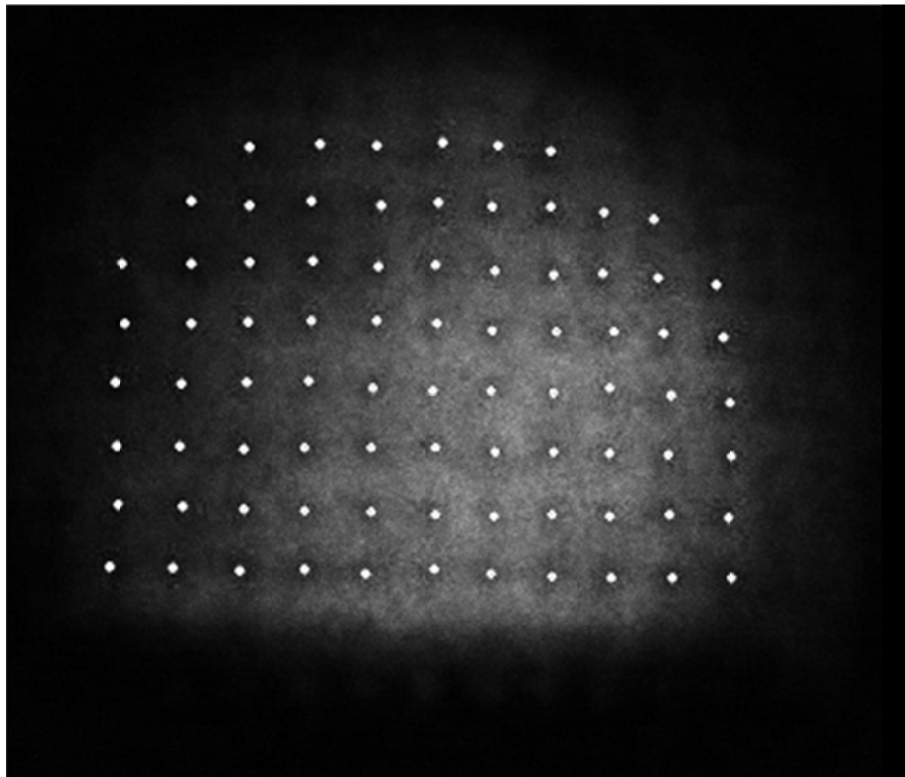


Figura 46.- Localización de los puntos en la malla, sin flujo.

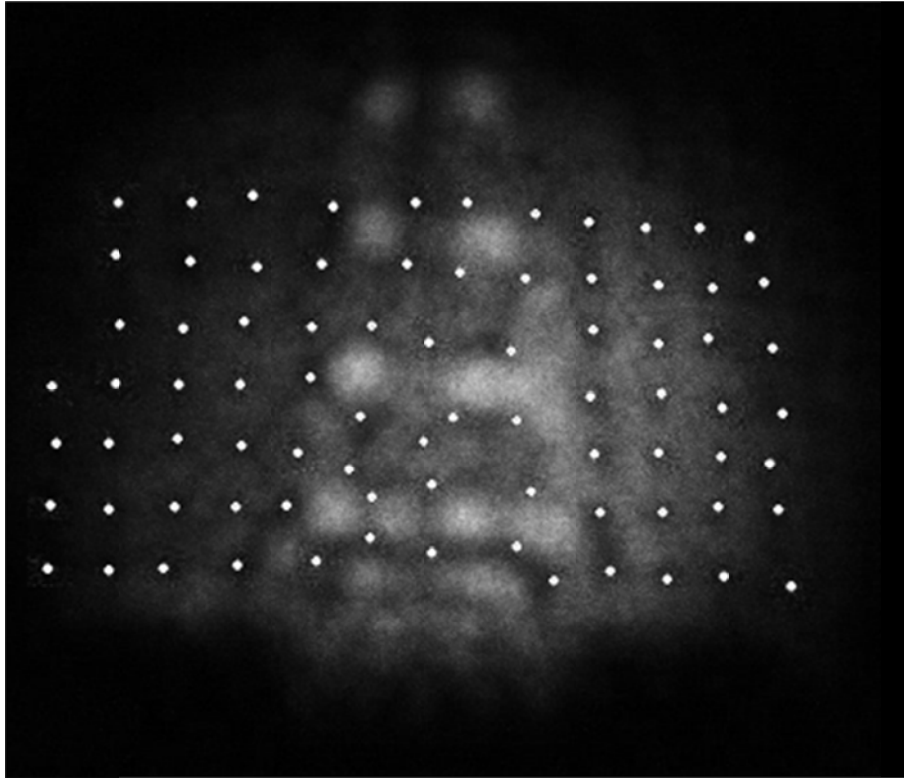


Figura 47.- Localización de los puntos desplazados a una presión de entrada de 5.44 atm.

Para cuantificar los desplazamientos se comparan las coordenadas de los puntos en la fotografía sin flujo y con los puntos en las fotografías con flujos a diferentes presiones. Los resultados de los cambios en el índice de refracción se muestran en la tabla 14 del apéndice y en las figuras 50-52 se muestra gráficamente con un campo vectorial sobrepuesto con las fotografías. La magnitud del vector indica la magnitud del cambio en el índice de refracción y la dirección es la dirección hacia donde se desplazan los puntos.

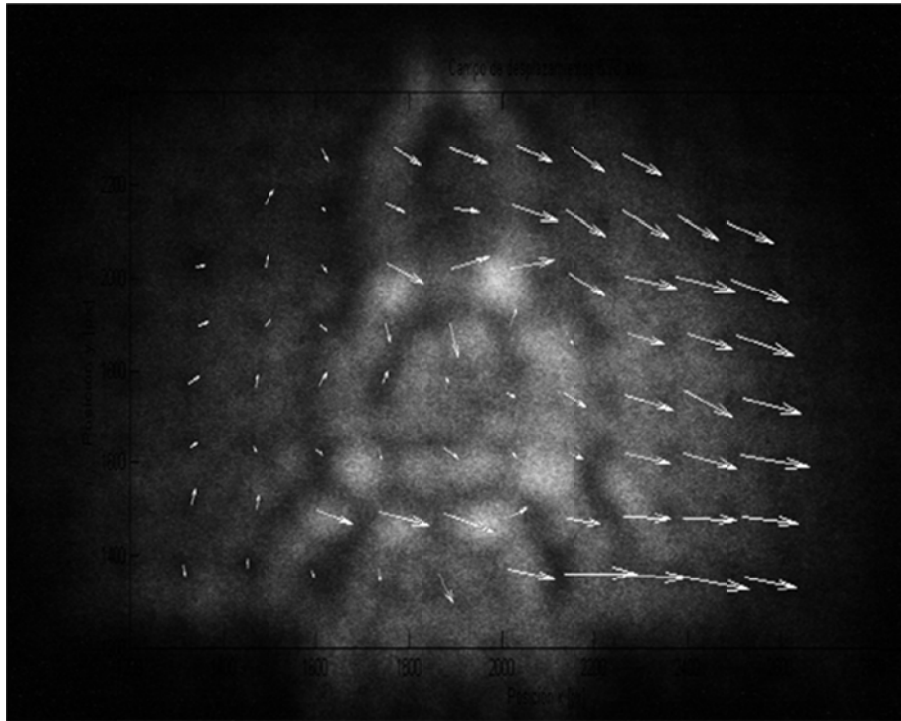


Figura 48.-Campo de desplazamiento de los puntos sobrepuesto con la imagen del flujo con presión de entrada de 5.44 atm.

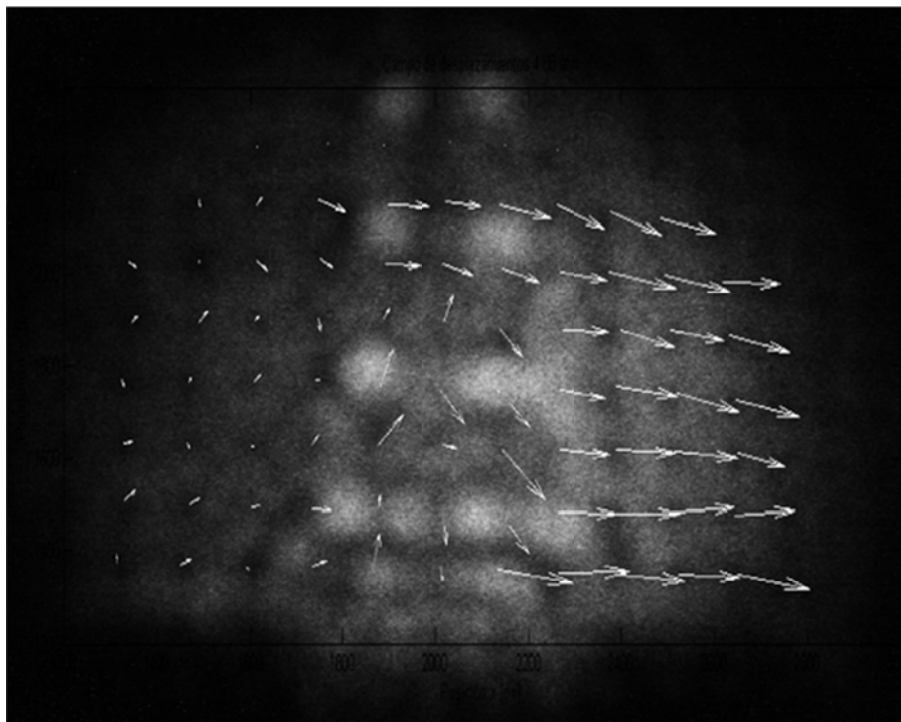


Figura 49.-Campo de desplazamiento de los puntos sobrepuesto con la imagen del flujo con presión de entrada de 4.08 atm.

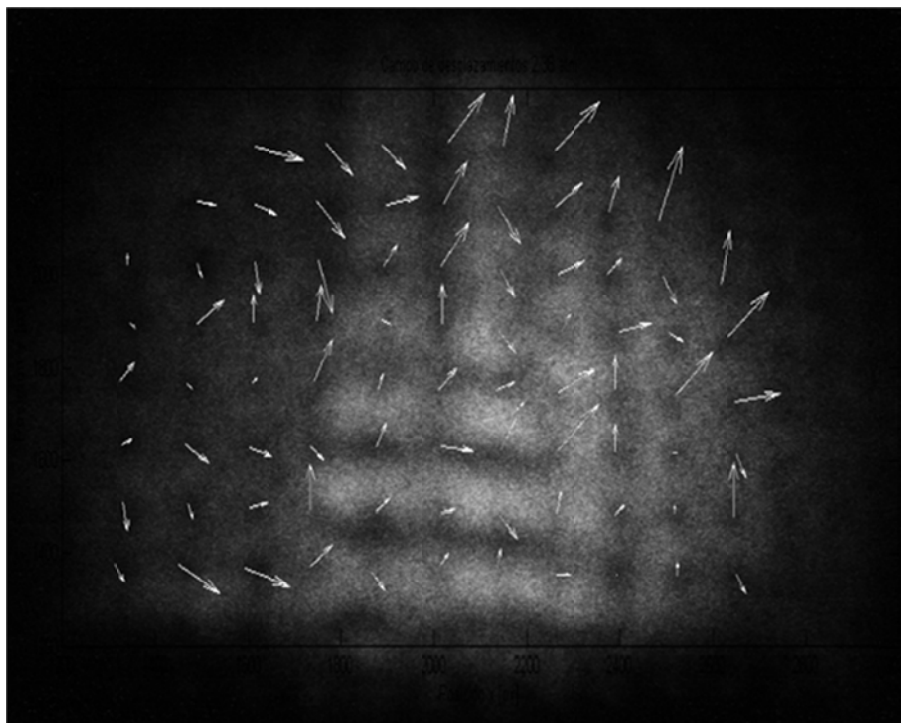


Figura 50.-Campo de desplazamiento de los puntos sobrepuesto con la imagen del flujo con presión de entrada de 2.04 atm.

6. Discusión

6.1 Explicación de lo visto con los montajes anteriores de schlieren y shadowgraph

La explicación al cambio de las zonas iluminadas y oscuras al cambiar de posición el flujo supersónico es la siguiente: la luz parte de la fuente y atraviesa al flujo supersónico, con lo cual se desvía un poco de su trayectoria original. Luego parte de esta luz llega a la primera lente, pero otra parte no logra llegar, lo que causará un déficit de luz en algunas regiones de la imagen. Al mover la posición del chorro, diferente cantidad de luz entra a las lentes; es como si las monturas de las lentes actuaran como navajas. Esto es particularmente notorio en estos arreglos de schlieren o shadowgraph en los cuales los rayos no son paralelos, debido a su inclinación de entrada se desvían aún más al pasar por la región de estudio.

Aparte de la desviación de los rayos de luz al pasar por un medio, en la formación de las regiones oscuras y brillantes también influye la difracción debido a los bordes de la tobera, y a que las ondas de choque son muy pequeñas. Además al desplazar al chorro y no tener haces paralelos se cambia el lugar de formación de la imagen, lo anterior hay que tomarlo en cuenta cuando se interprete el significado de la imagen formada.

El sistema schlieren montado con un atenuador, desde el punto de vista del autor de ésta tesis, no es tal, ya que se carece de una navaja que obstruya el paso de rayos con cierta inclinación. En la referencia [2] se justifica con el hecho de que el atenuador quita los rayos de cierta longitud de onda, pero no se menciona como cambia la expresión para el contraste con ésta configuración. Quitar rayos con cierta longitud de onda aumenta el contraste al igual que quitar rayos que se desvían una cierta distancia, pero no se sabe en qué dirección queda el gradiente del índice de refracción. En el montaje tradicional se sabe que es perpendicular a la navaja.

6.2 Discusiones de las diferencias de presión en la estructura de choque

De las fotografías tomadas a la presión atmosférica de 0.863 atm, en la posición 1, se ven menos choques debido a la posición de la tobera, la cual se encuentra más arriba.

También de inmediato salta a la vista que algunas fotografías tienen un nivel más alto de luminosidad que el resto. Lo anterior se debe a que por error al tomar las fotos se modificaron sus condiciones: a la presión atmosférica de 0.831 atm en la posición 2, aumento el tiempo de exposición de 1/500 a 1/200 y en la presión atmosférica de 0.863 atm en la posición 1, se modificó la apertura de 5.66 a 4.64 y el número f de f/7.1 a f/5.

Sin embargo el aumento en la luminosidad, de algunas imágenes, no afecta en las mediciones de la posición de las ondas de choque.

Al comparar las imágenes tomadas en las posiciones uno con las de la posición dos del riel, se nota que las posiciones de las ondas de choque no coinciden, lo anterior puede deberse a una inclinación de la tobera en la dirección del plano de iluminación, lo cual distorsiona la imagen, al tener una proyección de las ondas de choque inclinadas. En principio se puede corregir este error ajustando el giro de la tobera.

Debido a la carencia de un dispositivo que regule la presión al exterior, el arreglo experimental es una buena solución que permite transportar el experimento conservando las mismas condiciones.

El arreglo se puede mejorar al eliminar la pantalla y hacer incidir el láser directamente en la cámara, para lo cual se debe disminuir su intensidad, también debe idearse una forma de sujetar la tobera, para evitar que ésta se incline.

En la literatura se menciona que para generar un flujo supersónico es necesaria una tobera convergente-divergente. Sin embargo, la experiencia en la presente y en [11], muestra lo contrario.

Se ha demostrado en otros trabajos [14] que, en realidad, el flujo a la salida de la tobera convergente que se utiliza, no se abre en forma cónica a partir de la salida, sino que primero se angosta y después de varios diámetros se empieza a abrir.

Una interpretación de este fenómeno en la presente tesis es que, al colocar únicamente una tobera convergente se acelera el flujo hasta llegar a un régimen transónico. Al salir el flujo se encuentra con la atmósfera, la cual lo comprime mucho en la salida. La diferencia de presiones entre el flujo saliente y la atmósfera se reduce y el flujo se comporta como si pasara por una tobera divergente, es decir, el flujo tiene un comportamiento convergente-divergente debido al fluido externo estático.

Al cambiar la presión atmosférica debido a la altitud, cambia la forma de la tobera y por lo tanto, la forma de las ondas de choque. Sería interesante poder determinar la geometría del flujo en cada caso y la velocidad de salida. Para esto se requeriría complementar las imágenes con mediciones del flujo, ya sea con PIV o con detección heterodina.

La ubicación exacta, de las regiones de cruce y expansión, es complicada debido al bajo contraste en algunas regiones de la imagen.

La incertidumbre en las mediciones de las posiciones crece debido al método de medición en el cual se coloca el marcador por debajo de la línea de referencia trazada y no sobre ésta, con lo cual ésta incertidumbre se duplica.

El cálculo del número de Mach, es una primera aproximación, cuyo error aumenta con la presión suministrada debido a que las líneas se hacen curvas. Por este motivo es necesario lograr mediciones directas de la velocidad.

6.3 Comentarios del shadowgraph con partículas sembradas

El cambio en la estructura de choque al introducir las partículas trazadoras es menos clara en las fotos fijas que en las imágenes del video. Lo cual se debe a que, por un lado, el movimiento de los cuadros estimula al cerebro a buscar alteraciones en la imagen estacionaria y por otro, a que la resolución de las imágenes es menor (1080x1920 con 12Mp)

que las de la cámara Canon. Esta baja resolución también contribuye a aumentar la incertidumbre.

Al grabar las imágenes a una velocidad normal de 30 cuadros en cada segundo, hay momentos en los que el flujo evoluciona muy rápido y no se alcanzan a ver los detalles de la transición, por lo cual se sugiere realizar shadowgraph del flujo sembrado con partículas y tomar fotografías, aunque sea, en ráfaga para mejor resolución y poder asegurar cual es el cambio en la velocidad del flujo.

Queda por explorar como afecta la forma de las partículas, para lo cual se examinarán con un microscopio electrónico.

Se nota una disminución en la presión a la salida al aumentar la longitud de la tobera. Este resultado no se exploró más, pero en todos los experimentos se tuvo cuidado de utilizar siempre la misma tobera.

6.4 Propuestas para cuantificar los cambios en el índice de refracción

Los resultados obtenidos son un primer intento de cuantificar los cambios en el índice de refracción, con los inconvenientes de que las incertidumbres son muy grandes al igual que la magnitud del cambio en el índice de refracción. Los resultados no son concluyentes pero sí indicativos de que el método se puede aplicar.

La incertidumbre grande se debe, en parte, a que la resolución del experimento depende del tamaño de los puntos en comparación con el flujo, por lo cual se puede intentar disminuir el tamaño de los puntos y aumentar el tamaño del flujo.

Hay un error en las figuras 50 y 51 en donde hay un desplazamiento de los puntos hacia la derecha, en donde no debería de haber desplazamiento. Como esto ocurre en un extremo de la imagen se puede deber a una aberración en la lente o a que la malla se haya movido en ésta región debido a la succión que genera el flujo.

Para mejorar esto hay que corregir algunos problemas experimentales: uno de ellos es la forma de colocar la cámara (la cual fue montada sobre un tripié) ya que al tomar las

fotografías la cámara se mueve ligeramente, lo cual afecta el resultado. También hay que sujetar de una mejor forma la matriz de puntos para evitar posibles movimientos.

La posición de la pantalla se eligió para que se viera clara la estructura debido a la experiencia de los experimentos anteriores, en realidad es más importante que los puntos se vean bien definidos.

Solamente se obtiene el cambio en el índice de refracción en la región donde hay puntos por lo que para sacar el cambio en toda la estructura de choque se requiere de mover la posición de la malla. Sería ideal automatizar este procedimiento.

7. Conclusiones y Trabajo Futuro

7.1 Conclusiones

Al trabajar con las técnicas schlieren y shadowgraph se debe considerar que las regiones oscuras corresponden al lugar en donde los rayos no llegaron y las regiones claras a lugares donde van a parar rayos no desviados. En ambos casos el fenómeno de interferencia está presente.

La importancia de estas técnicas radica en la utilidad para estudiar fenómenos del medio continuo, que en general son complejos. Aun cuando estas técnicas se utilizan principalmente de manera cualitativa aportan información relevante del fenómeno estudiado, como la localización espacial de las regiones de choque en el flujo supersónico, para hacer estudios con la técnica PIV, en regiones específicas.

Se observó la posición de los cruces en el patrón de choque en función de la presión de salida para diferentes casos de presión externa. Como era de esperarse, la distancia varía con la presión de una manera semejante a la velocidad (ver gráfica 4).

En todos los casos se forma un patrón de ondas de choque usando una tobera convergente. Esto hace pensar que, el flujo se angosta antes de abrirse y por lo tanto se comporta como si fuera una tobera convergente divergente.

Se estudió cómo afecta el sembrado de partículas trazadoras a la estructura de choque. Con ambos tipos de partículas se notó un cambio en el sentido de una disminución en la velocidad, ya que los cruces se forman más cerca de la boquilla.

En éste trabajo también se cuantificó el cambio en el índice de refracción utilizando una malla regular de puntos y midiendo la deformación del patrón de la malla en presencia del flujo. Con la técnica propuesta para shadowgraph, se observó que los puntos se desplazan hacia las regiones más claras. Sin embargo, debido al tamaño relativamente grande de los puntos en comparación con el flujo supersónico y en particular con los

choques, la resolución de las medidas es baja. Se podría refinar el método haciendo más pequeños los puntos. En cada punto se pueden relacionar los cambios del índice de refracción con los cambios de densidad, y compararlos con los obtenidos con la detección heterodina.

Se cumplieron parte de los objetivos planteados: resolviendo problemas existentes con el flujo supersónico, al aclarar los problemas de interpretación en las imágenes por schlieren. Aunque no fue posible demostrar completamente la razón por la cual se forma un flujo supersónico con una tobera divergente se proponer una explicación plausible.

También se apoyó en la realización del PIV del flujo supersónico ubicando las regiones de alta densidad dentro del flujo, determinando la velocidad del flujo a la salida de la tobera y al estudiar las consecuencias de sembrar el flujo con partículas trazadoras.

Por otro lado, aunque se pudo cuantificar el cambio en el índice difracción, producto del incremento en la densidad, los resultados no son concluyentes debido a lo cual no fue posible comparar con los datos con los que ya se contaba en el laboratorio.

7.2 Trabajo a futuro

Para poder mejorar los resultados obtenidos, a partir de las fotografías de las ondas de choque, será necesario desarrollar un software que compare las imágenes obtenidas al colocar el flujo con las obtenidas sin el flujo, para detectar las variaciones reales de intensidad en las imágenes. Esto permitirá localizar regiones con menor incertidumbre y con criterios objetivos.

En el software hay que hacer un algoritmo para sumar o restar imágenes, ya que, se trabaja con matrices de números enteros cuyo valor mínimo es 0 y su valor máximo es 255. Al usar una imagen para calibrar, es necesario restar los datos obtenidos sin flujo, lo que puede llevar a valores negativos. El problema es cómo definir el resultado cuando se pasa de alguno de los valores extremos. Lo que se hace en los programas es establecer un mínimo cuando aparecen valores negativos con lo cual se pierde información.

Parametrizar la forma de las ondas de choque permitirá medir mejor el ángulo formado entre ellas y así tener una mejor estimación del número de Mach del flujo. Con la parametrización y la teoría de reflexión de ondas de choque, se podría explicar la razón por la cual las ondas de choque se curvan a altas presiones.

Antes y después de la onda de choque la componente normal de la velocidad cambia, mientras que la componente tangencial se queda intacta. Basado en lo anterior, es posible cotejar la ubicación de las ondas de choque con los estudios de PIV.

Buscar tener un gradiente de densidades conocidos a fin de tener una medida conocida, con la cual calibrar en el shadowgraph y schlieren. Algunas propuestas son generar el gradiente mediante la difusión de dos líquidos miscibles, la otra es generar ondas estacionarias en aire utilizando un tubo de Kundt.

Una vez que se pueda cuantificar, los resultados se compararán con las medidas de difusión Rayleigh

Diseñar y construir un dispositivo que baje la presión externa para poder cambiar la estructura sin la necesidad de cambiar de lugar geográfico.

Para mejorar la comprensión de los sistemas schlieren y shadowgraph, se propone desarrollar un programa computacional que los simule.

8. Bibliografía

Libros:

- [1] R. J. Goldstein and T. H. Khehn. Fluid Mechanics Measurement, Segunda Edicion. Edit. Hemisphere, USA, 1996. Capitulo 7 pp. 451-476.
- [2] G. S. Settles. Schlieren and Shadowgraph Techniques, Visualizing Phenomena in Transparent Media. Edit. Springer, USA, 2001.
- [3] Wolfgang Merzkirch. Flow visualization. Edit. Academic Press, UK, 1987. Pp. 115–119, 123-126.
- [4] P. K. Panigrahi and K. Muralidhar. Schlieren and shadowgraph Methods in Heat and Mass Transfer. Edit. Springer, USA. Capítulo 2: pp. 23-45.
- [5] Robert W. Fox y Alan T. McDonald. Introducción a la mecánica de fluidos, Segunda Edición. Edit. Nueva editorial interamericana, México, 1983. pp. 485-594.
- [6] Robert Resnick, David Halliday y Kenneth S. Krane. Física Volumen 1. Cuarta Edición, Edit CECSA, México, 1993, pp. 424 y 425
- [7] C. J. Chapman. High Speed Flow, Edit. Cambridge University Press, 2000, pp 1-6, 121-132

Programas:

- [8] Google Earth

Tesis:

- [9] Azpeitia Sandoval, Carlos. Estudio experimental no intrusivo de las fluctuaciones de densidad dentro de un jet turbulento, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2004.
- [10] Aguilar Espinosa, Cesar. Diseño y construcción de un sistema de difusión Rayleigh para estudiar fluctuaciones de densidad en gases transparentes. Tesis de Licenciatura, UNAM, 2003.

[11] Carreño Rodríguez, Alejandro S. Reconstrucción de haces gaussianos para mejorar la resolución espacial en un experimento de difusión Rayleigh, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2010.

[12] Cantera Martínez, Gerardo. Análisis dinámico de una tobera para un cohete de combustible sólido, tesis de Maestría, IPN, 1998.

[13] Echeverría Arjonilla, Carlos. Velocimetría por Imágenes de Partículas de un Flujo Supersónico, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2013.

[14] Salazar Romero M. Yadira. Técnicas ópticas avanzadas aplicadas a dinámica de fluidos, Tesis de Licenciatura, UNAM, 2011.

[15] Cantera Martínez, Gerardo. Análisis dinámico de una tobera para un cohete de combustible sólido, Tesis de Maestría, IPN, 1998.

Artículos:

[16] Performance specification digital terrain elevation data (dted),

http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2_1/Documentation/MIL-PDF-89020B.pdf, 16/1/2013

[17] Gámiz E, Soriano M, Delgado G, Párraga J, Delgado R, Estudio morfológico de talcos con microscopioelectrónico de barrido (sem). Aplicaciones farmacéuticas. Ars Pharmaceutica, 43:1-2; 173-185, 2002

[18] Hileman, James and Samimy, Mo. On Turbulence Structures and the Acoustic Far-Field of a Mach 1.3 Jet. AIAA Journal, Hileman & Samimy, 2001.

[19] K.W. Tam, Christopher. Jet Noise: Since 1952. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1998.

Trabajos de Congresos:

[20] Echeverría Arjonilla, Carlos; Porta Zepeda, David y Stern Forgach, Catalina E. Effect of seeding particles on shock structure, Poster en el congreso de la APS y la DFD, Noviembre 2012

Apéndice: Tablas de datos

Tabla de datos de la calibración de las imágenes del flujo supersónico a diferentes altitudes.

Tabla 5.- Datos de la calibración de las imágenes, con Photoshop, en la posición 1 del flujo supersónico, en los tres lugares. Se midió el ángulo de giro de la foto y la distancia que se usa como referencia, i.e., el diámetro de la tobera.

Posición 1		0.765 atm (2290 m)		0.831 atm (1585)		0.863 atm (1255)	
	Presión a la salida de la Compresora (± 0.17 atm)	Ángulo	Diámetro de la tobera	Ángulo	Diámetro de la tobera	Ángulo (negativo)	Diámetro de la tobera
1	5.79	6.80	1170.17	4.30	1165.33	1.30	1138.30
2		6.30	1169.03	4.00	1174.87	1.90	1168.62
3		6.60	1177.88	3.90	1184.70	1.80	1176.55
4	5.44	5.20	1168.72	4.00	1176.86	1.20	1146.25
5		5.70	1174.34	4.10	1177.00	2.20	1167.87
6		5.80	1173.00	3.60	1184.31	1.90	1169.15
7	5.10	4.80	1184.23	4.80	1166.12	1.90	1158.66
8		4.60	1169.78	3.90	1172.73	1.80	1157.12
9		5.00	1172.45	3.00	1183.62	2.10	1163.31
10	4.76	5.50	1173.36	4.60	1159.81	1.60	1152.47
11		4.70	1165.96	4.40	1183.42	1.50	1164.43
12		3.00	1157.56	4.10	1184.98	1.60	1161.47
13	4.42	4.80	1153.13	5.00	1166.47	1.90	1155.66
14		3.50	1173.71	4.70	1181.91	2.20	1160.37
15		3.50	1169.13	4.30	1175.30	1.10	1170.22

16		5.80	1165.34	4.90	1168.27	2.00	1145.22
17	4.08	5.20	1165.73	4.60	1182.07	1.30	1147.78
18		3.20	1162.87	4.30	1173.30	1.50	1158.39
19		6.10	1163.18	4.80	1168.12	1.60	1153.93
20	3.74	5.20	1168.86	4.40	1183.43	1.60	1150.97
21		3.60	1181.38	4.70	1188.05	1.30	1158.31
22		5.00	1156.37	5.00	1178.42	2.60	1154.32
23	3.40	4.00	1165.32	4.50	1157.50	1.80	1169.10
24		2.80	1168.39	3.80	1182.58	1.20	1176.38
25		4.70	1187.51	5.20	1146.73	2.40	1159.06
26	3.06	3.10	1180.76	4.60	1173.77	2.20	1164.87
27		2.60	1175.74	3.90	1176.72	1.80	1172.05
28		4.10	1174.51	4.29	1149.22	1.70	1164.51
29	2.72	3.60	1166.32	4.80	1170.11	2.90	1163.68
30		2.90	1171.46	4.30	1181.28	1.90	1175.15
31		4.60	1163.22	4.30	1157.20	1.90	1175.14
32	2.38	3.20	1158.30	3.50	1170.22	1.80	1167.55
33		3.00	1164.04	4.80	1190.21	1.80	1172.05
34		4.60	1169.20	5.40	1159.23	1.30	1152.32
35	2.04	4.10	1177.50	4.40	1185.57	1.40	1159.85
36		2.90	1172.96	3.80	1188.56	1.00	1167.16
37		5.70	1167.77			1.20	1159.75
38	1.70	4.30	1149.22			1.70	1176.55
39		3.50	1160.23			1.10	1176.22
Promedio		4.45	1168.94	4.36	1174.11	1.72	1162.33
Desviación estándar		1.15	8.05	0.50	10.98	0.42	9.54

Tabla 6.-Datos de la calibración de las imágenes, con Photoshop, en la posición 2 del flujo supersónico, en los tres lugares. Se midió el ángulo de giro de la foto y la distancia que se usa como referencia, i.e. el diámetro de la tobera.

Posición 1		0.765 atm (2290 m)		0.831 atm (1585)		0.863 atm (1255)	
	Presión a la salida de la Compresora (± 0.17 atm)	Ángulo	Diámetro de la tobera	Ángulo	Diámetro de la tobera	Ángulo	Diámetro de la tobera
1	5.79	4.00	326.81	4.00	325.81	2.20	334.30
2		3.30	307.53	3.30	334.54	1.90	330.18
3		4.50	292.90	2.50	327.30	3.00	328.44
4	5.44	5.20	317.33	2.90	327.42	3.40	338.29
5		5.20	311.26	2.60	332.34	2.40	332.29
6		4.80	300.04	2.20	333.25	2.60	324.35
7	5.10	5.40	305.38	2.90	338.43	2.10	335.21
8		5.20	294.69	3.00	329.44	2.60	329.34
9		4.70	294.47	2.80	330.39	3.40	333.60
10	4.76	5.40	308.37	3.20	325.50	3.00	343.47
11		5.50	303.89	2.80	324.39	2.90	337.43
12		5.70	308.51	3.30	326.55	2.70	335.38
13	4.42	5.60	305.97	3.70	326.17	3.40	332.60
14		4.20	300.80	3.10	330.49	3.30	333.54
15		4.40	305.41	3.60	332.16	2.60	331.34
16	4.08	3.70	306.12	2.80	329.38	3.40	335.60
17		3.90	305.72	2.90	333.43	3.30	332.54
18		3.70	303.63	2.40	328.30	2.30	326.26
19	3.74	5.20	320.32	4.20	327.88	2.30	326.26
20		5.00	311.17	3.20	335.54	2.80	329.39
21		4.70	311.54	2.40	329.30	4.50	334.01

22	3.40	5.50	315.43	2.60	332.34	2.50	337.33
23		5.30	321.40	2.80	330.39	3.10	332.49
24		5.80	315.62	3.30	331.54	2.90	330.44
25	3.06	5.50	328.51	3.00	338.48	2.70	334.38
26		4.60	334.09	2.90	339.52	2.90	332.43
27		4.70	313.04	3.10	330.49	2.30	326.26
28	2.72	5.60	322.54	3.70	339.71	2.90	336.43
29		4.80	322.13	3.60	332.66	0.60	331.66
30		5.20	314.79	4.00	330.80	3.50	324.62
31	2.38	4.70	311.54	3.40	335.60	2.70	333.38
32		5.00	310.18	2.90	332.43	3.60	335.66
33		5.90	306.12	3.10	333.49	2.10	328.22
34	2.04	5.70	315.07	3.30	345.58	2.90	331.44
35		5.70	316.57	3.00	338.48	3.00	326.44
36		5.90	306.12	3.60	336.66	3.50	329.61
37	1.70	6.30	312.41				
38		5.30	307.32				
39		5.60	308.95				
Promedio		5.04	310.86	3.11	332.12	2.81	332.07
Desviación estándar		0.68	8.94	0.47	4.70	0.64	4.13

Tabla de datos de las distancias representativas de la onda de choque, a diferentes altitudes.

Tabla 7.- Datos de las distancias representativas de la estructura de choque, que son comparables con sus análogas a otra altitud, para diferentes presiones de salida, datos a 0.765 atm y en la posición 1.

0.765 atm posición 1							Incertidumbre ± 0.0476 diámetros
Presión relativa	Presión (± 0.017 atm)	Distancia del Primer cruce	Alto del disco de Mach o del rombo de cruce	Ancho del disco de Mach o del rombo de cruce	Expansión	Distancia del segundo cruce	
7.562	5.79	1.228	0.140	0.312	1.881		
7.117	5.44	1.184	0.146	0.262	1.863		
6.673	5.10	1.155	0.160	0.142	1.861	2.774	
6.228	4.76	1.086	0.200	0.100	1.671	2.625	
5.783	4.42	0.986	0.190	0.104	1.545	2.477	
5.338	4.08	0.862	0.218	0.137	1.386	2.312	
4.893	3.74	0.731	0.228	0.160	1.222	2.081	
4.448	3.40	0.606	0.180	0.119	0.975	1.388	
4.004	3.06	0.508	0.095	0.119	0.865	1.193	
3.559	2.72	0.321	0.110	0.142	0.577	0.932	
3.114	2.38	0.190	0.110	0.171	0.421	0.726	

Tabla 8.- Datos de las distancias representativas de la estructura de choque, que son comparables con sus análogas a otra altitud, para diferentes presiones de salida, datos a 0.831 atm y en la posición 1.

0.831 atm posición 1							Incertidumbre ± 0.0549 diámetros
Presión n	Presión (± 0.017)	Distancia del Primer	Alto del disco de Mach o del	Ancho del disco de Mach o del	Expansión n	Distancia del	

relativa	atm)	cruce	rombo de cruce	rombo de cruce		segundo cruce
6.962	5.79	1.181	0.133	0.217	1.859	2.832
6.552	5.44	1.179	0.156	0.184	1.858	2.782
6.143	5.10	1.109	0.151	0.126	1.743	2.688
5.733	4.76	1.035	0.199	0.111	1.612	2.599
5.324	4.42	0.882	0.217	0.098	1.385	2.295
4.914	4.08	0.807	0.197	0.082	1.295	2.197
4.505	3.74	0.682	0.174	0.103	1.119	2.008
4.095	3.40	0.511	0.153	0.086	0.951	1.336
3.686	3.06	0.409	0.197	0.151	0.764	1.091
3.276	2.72	0.284	0.151	0.159	0.562	0.910
2.867	2.38	0.161	0.102	0.182	0.353	0.700

Tabla 9.- Datos de las distancias representativas de la estructura de choque, que son comparables con sus análogas a otra altitud, para diferentes presiones de salida, datos a 0.863 atm y en la posición 1.

0.863 atm posición 1			Incertidumbre ± 0.0517 diámetros			
Presión relativa	Presión (± 0.017 atm)	Distancia del Primer cruce	Alto del disco de Mach o del rombo de cruce	Ancho del disco de Mach o del rombo de cruce	Expansión	Distancia del segundo cruce
6.703	5.79	1.199	0.193	0.130	1.651	
6.309	5.44	1.127	0.183	0.138	1.554	
5.915	5.10	1.046	0.178	0.124	1.485	
5.521	4.76	0.973	0.178	0.160	1.405	
5.126	4.42	0.860	0.225	0.124	1.294	
4.732	4.08	0.728	0.160	0.113	1.185	

4.338	3.74	0.612	0.163	0.088	1.072	
3.943	3.40	0.483	0.157	0.077	0.886	1.069
3.549	3.06	0.398	0.101	0.083	0.771	1.059
3.155	2.72	0.282	0.075	0.127	0.524	0.816
2.760	2.38	0.163	0.098	0.188	0.336	0.607

Tabla 10.- Datos de las distancias representativas de la estructura de choque, que son comparables con sus análogos a otra altitud, para diferentes presiones de salida, datos a 0.765 atm y en la posición 2.

0.765 atm posición 2		Incertidumbre ± 0.1876 diámetros				
Presión relativa	Presión (± 0.017 atm)	Distancia del primer cruce	Distancia segundo cruce	Distancia del tercer cruce	Distancia del cuarto cruce	Distancia del quinto cruce
7.562	5.79	1.399	3.705	5.356		
7.117	5.44	1.284	3.451	5.192		
6.673	5.10	1.237	3.328	4.963		
6.228	4.76	1.186	3.068	4.891	6.418	
5.783	4.42	1.121	2.670	4.428	6.020	
5.338	4.08	0.948	2.330	4.218	5.615	
4.893	3.74	0.854	2.163	3.893	5.137	
4.448	3.40	0.629	1.874	3.466	4.652	
4.004	3.06	0.571	1.621	3.024	4.254	
3.559	0.535	0.535	1.375			

Tabla 11.- Datos de las distancias representativas de la estructura de choque, que son comparables con sus análogos a otra altitud, para diferentes presiones de salida, datos a 0.831 atm y en la posición 2.

0.831 atm posición 2		Incertidumbre ± 0.1373 diámetros				
Presión relativa	Presión (± 0.017 atm)	Distancia del primer cruce	Distancia del segundo cruce	Distancia del tercer cruce	Distancia del cuarto cruce	Distancia del quinto cruce
6.962	5.79	1.039	2.577	4.033	5.327	
6.552	5.44	1.030	2.523	3.918	5.158	6.371
6.143	5.10	0.985	2.468	3.803	5.043	6.134
5.733	4.76	0.944	2.280	3.478	4.717	5.808
5.324	4.42	0.829	2.109	3.272	4.446	5.490
4.914	4.08	0.795	2.055	3.171	4.209	
4.505	3.74	0.632	1.838	2.861	3.918	
4.095	3.40	0.524	1.737	2.529	3.410	
3.686	3.06	0.497	1.303	2.238		
6.962	2.72					

Tabla 12.- Datos de las distancias representativas de la estructura de choque, que son comparables con sus análogos a otra altitud, para diferentes presiones de salida, datos a 0.863 atm y en la posición 2.

0.863 atm posición 2		Incertidumbre ± 0.1322 diámetros				
Presión relativa	Presión (± 0.017 atm)	Distancia del primer cruce	Distancia del segundo cruce	Distancia del tercer cruce	Distancia del cuarto cruce	Distancia del quinto cruce
6.703	5.79	0.975	2.439	3.726	4.985	
6.309	5.44	0.935	2.323	3.543	4.823	5.995
5.915	5.10	0.901	2.235	3.516	4.660	5.737
5.521	4.76	0.840	2.154	3.333	4.457	5.514
5.126	4.42	0.793	2.012	3.177	4.240	5.141

4.732	4.08	0.677	1.849	2.886	3.827	
4.338	3.74	0.583	1.612	2.615	3.516	
3.943	3.40	0.501	1.571	2.249	3.096	
3.549	3.06	0.291	1.050	1.978		
3.155	2.72	0.156	0.942	1.626		

Tabla de datos de la propuesta para cuantificar el cambio en el índice de refracción

Tabla 13.-Cambio en el índice de refracción por renglón.

fila	Posición ±0.066 mm		Distancia para cada presión 0.0933 ± mm			Cambio en el índice de refracción		
	x	y	5.44 atm	4.08 atm	2.38 atm	5.44 atm	4.08 atm	2.38 atm
1	-3.2	2.2	0.141	0.116	0.104	0.090 ± 0.083	0.061 ± 0.069	0.048 ± 0.061
2	-3.1	3.2	0.237	0.197	0.141	0.252 ± 0.140	0.174 ± 0.116	0.090 ± 0.083
3	-3.1	4.1	0.116	0.118	0.052	0.061 ± 0.069	0.063 ± 0.070	0.012 ± 0.031
4	-3.1	5.2	0.181	0.096	0.116	0.148 ± 0.107	0.041 ± 0.057	0.061 ± 0.069
5	-3.0	6.2	0.156	0.098	0.033	0.109 ± 0.092	0.044 ± 0.058	0.005 ± 0.019
6	-3.0	7.1	0.118	0.116	0.046	0.063 ± 0.070	0.061 ± 0.069	0.010 ± 0.027
1	-2.2	2.1	0.139	0.156	0.251	0.087 ± 0.082	0.109 ± 0.092	0.283 ± 0.148
2	-2.0	3.1	0.187	0.135	0.073	0.157 ± 0.111	0.082 ± 0.080	0.024 ± 0.043
3	-2.1	4.1	0.073	0.073	0.149	0.024 ± 0.043	0.024 ± 0.043	0.099 ± 0.088
4	-2.0	5.2	0.187	0.073	0.033	0.157 ± 0.111	0.024 ± 0.043	0.005 ± 0.019
5	-1.9	6.2	0.131	0.181	0.181	0.078 ± 0.078	0.148 ± 0.107	0.148 ± 0.107
6	-1.9	7.1	0.191	0.023	0.073	0.165 ± 0.113	0.002 ± 0.014	0.024 ± 0.043
7	-1.9	8.2	0.251	0.096	0.096	0.283 ± 0.148	0.041 ± 0.057	0.041 ± 0.057
1	-1.1	2.1	0.096	0.033	0.250	0.041 ± 0.057	0.005 ± 0.019	0.281 ± 0.148

2	-1.0	3.1	0.565	0.118	0.096	1.436 ± 0.334	0.063 ± 0.070	0.041 ± 0.057
3	-1.0	4.1	0.116	0.023	0.125	0.061 ± 0.069	0.002 ± 0.014	0.070 ± 0.074
4	-1.0	5.2	0.219	0.131	0.033	0.216 ± 0.129	0.078 ± 0.078	0.005 ± 0.019
5	-0.9	6.2	0.131	0.066	0.139	0.078 ± 0.078	0.019 ± 0.039	0.087 ± 0.082
6	-0.9	7.2	0.116	0.197	0.164	0.061 ± 0.069	0.174 ± 0.116	0.121 ± 0.097
7	-0.9	8.1	0.052	0.116	0.125	0.012 ± 0.031	0.061 ± 0.069	0.070 ± 0.074
8	-0.9	9.1	0.208		0.265	0.194 ± 0.123		0.315 ± 0.156
1	0.0	2.1	0.187	0.220	0.164	0.157 ± 0.111	0.218 ± 0.130	0.121 ± 0.097
2	0.0	3.1	0.788	0.279	0.232	2.793 ± 0.466	0.351 ± 0.165	0.242 ± 0.137
3	0.0	4.1	0.191	0.167	0.098	0.165 ± 0.113	0.126 ± 0.099	0.044 ± 0.058
4	0.1	5.2	0.198	0.046	0.229	0.177 ± 0.117	0.010 ± 0.027	0.235 ± 0.135
5	0.1	6.2	0.310	0.164	0.187	0.431 ± 0.183	0.121 ± 0.097	0.157 ± 0.111
6	0.1	7.2	0.633	0.200	0.287	1.804 ± 0.374	0.179 ± 0.118	0.371 ± 0.170
7	0.1	8.2	0.302	0.405	0.232	0.409 ± 0.178	0.739 ± 0.240	0.242 ± 0.137
8	0.3	9.1	0.470		0.214	0.993 ± 0.278		0.206 ± 0.126
1	1.0	2.0	0.488	0.519	0.116	1.071 ± 0.288	1.211 ± 0.307	0.061 ± 0.069
2	1.1	3.0	0.793	0.187	0.098	2.829 ± 0.469	0.157 ± 0.111	0.044 ± 0.058
3	1.1	4.1	0.251	0.544	0.125	0.283 ± 0.148	1.330 ± 0.321	0.070 ± 0.074
4	1.1	5.1	0.210	0.543	0.073	0.199 ± 0.124	1.327 ± 0.321	0.024 ± 0.043
5	1.2	6.2	0.523	0.156	0.052	1.233 ± 0.309	0.109 ± 0.092	0.012 ± 0.031
6	1.2	7.1	0.609	0.488	0.135	1.669 ± 0.360	1.071 ± 0.288	0.082 ± 0.080
7	1.3	8.1	0.374	0.580	0.169	0.630 ± 0.221	1.516 ± 0.343	0.128 ± 0.100
8	1.2	9.1	0.603		0.164	1.637 ± 0.357		0.121 ± 0.097
1	2.1	2.1	0.710	0.210	0.084	2.267 ± 0.420	0.199 ± 0.124	0.031 ± 0.049
2	2.2	3.0	0.280	0.443	0.073	0.354 ± 0.166	0.884 ± 0.262	0.024 ± 0.043
3	2.2	4.1	0.167	0.191	0.164	0.126 ± 0.099	0.165 ± 0.113	0.121 ± 0.097
4	2.1	5.0	0.125	0.599	0.149	0.070 ± 0.074	1.613 ± 0.354	0.099 ± 0.088
5	2.2	6.2	0.287	0.389	0.209	0.371 ± 0.170	0.681 ± 0.230	0.196 ± 0.123

6	2.2	7.1	0.683	0.457	0.251	2.098 ± 0.404	0.940 ± 0.270	0.283 ± 0.148
7	2.2	8.1	0.712	0.492	0.239	2.279 ± 0.421	1.090 ± 0.291	0.257 ± 0.141
8	2.3	9.1	0.582	23.46 7	0.316	1.524 ± 0.344		0.448 ± 0.187
1	3.1	2.0	1.114	1.060	0.118	5.581 ± 0.658	5.060 ± 0.627	0.063 ± 0.070
2	3.1	3.0	0.519	0.682	0.149	1.211 ± 0.307	2.095 ± 0.403	0.099 ± 0.088
3	3.1	4.0	0.250	0.939	0.280	0.281 ± 0.148	3.965 ± 0.555	0.354 ± 0.166
4	3.1	5.0	0.406	0.692	0.104	0.741 ± 0.240	2.156 ± 0.409	0.048 ± 0.061
5	3.1	6.0	0.219	0.511	0.149	0.216 ± 0.129	1.175 ± 0.302	0.099 ± 0.088
6	3.1	7.0	0.645	0.543	0.156	1.870 ± 0.381	1.327 ± 0.321	0.109 ± 0.092
7	3.1	8.1	0.721	0.743	0.219	2.337 ± 0.426	2.483 ± 0.439	0.216 ± 0.129
8	3.2	9.1	0.618		0.259	1.717 ± 0.365		0.303 ± 0.153
1	4.1	2.0	0.928	0.998	0.070	3.878 ± 0.549	4.481 ± 0.590	0.022 ± 0.041
2	4.1	3.0	0.696	0.836	0.118	2.182 ± 0.412	3.141 ± 0.494	0.063 ± 0.070
3	4.1	4.0	0.692	0.725	0.312	2.156 ± 0.409	2.366 ± 0.429	0.438 ± 0.185
4	4.1	5.0	0.756	0.660	0.219	2.570 ± 0.447	1.959 ± 0.390	0.216 ± 0.129
5	4.1	6.0	0.551	0.650	0.104	1.368 ± 0.326	1.901 ± 0.384	0.048 ± 0.061
6	4.1	7.0	0.783	0.683	0.156	2.756 ± 0.463	2.098 ± 0.404	0.109 ± 0.092
7	4.0	8.1	0.812	0.747	0.181	2.965 ± 0.480	2.512 ± 0.442	0.148 ± 0.107
8	4.0	9.0	0.665		0.345	1.989 ± 0.393		0.535 ± 0.204
1	5.1	2.0	0.992	0.933	0.000	4.428 ± 0.586	3.914 ± 0.551	0.000 ± 0.000
2	5.0	3.0	0.813	0.882	0.066	2.977 ± 0.481	3.498 ± 0.521	0.019 ± 0.039
3	5.0	4.0	0.838	0.813	0.139	3.163 ± 0.496	2.977 ± 0.481	0.087 ± 0.082
4	5.0	5.1	0.841	0.870	0.162	3.180 ± 0.497	3.403 ± 0.514	0.119 ± 0.096
5	5.1	6.0	0.712	0.785	0.169	2.279 ± 0.421	2.773 ± 0.464	0.128 ± 0.100
6	4.9	7.0	0.912	0.962	0.098	3.740 ± 0.539	4.168 ± 0.569	0.044 ± 0.058
7	4.9	8.0	0.696	0.768	0.191	2.182 ± 0.412	2.655 ± 0.454	0.165 ± 0.113
1	6.1	2.0	0.783	0.860	0.070	2.756 ± 0.463	3.326 ± 0.508	0.022 ± 0.041

2	6.0	3.0	0.843	0.815	0.046	3.200 ± 0.499	2.989 ± 0.482	0.010 ± 0.027
3	6.0	4.0	1.038	0.886	0.023	4.844 ± 0.613	3.536 ± 0.524	0.002 ± 0.014
4	6.0	5.0	0.896	0.896	0.279	3.609 ± 0.529	3.609 ± 0.529	0.351 ± 0.165
5	5.9	6.0	0.910	0.755	0.084	3.725 ± 0.538	2.567 ± 0.447	0.031 ± 0.049
6	5.8	6.9	0.918	0.934	0.156	3.791 ± 0.543	3.926 ± 0.552	0.109 ± 0.092
7	5.8	7.9	0.759	0.794	0.389	2.589 ± 0.448	2.834 ± 0.469	0.681 ± 0.230
1	7.0	2.0		1.019	0.104		4.675 ± 0.603	0.048 ± 0.061
2	7.0	2.9		0.838	0.278		3.161 ± 0.496	0.349 ± 0.165
3	7.0	4.0		0.676	0.125		2.054 ± 0.399	0.070 ± 0.074
4	7.0	4.9		0.912	0.237		3.740 ± 0.539	0.252 ± 0.140
5	6.9	5.9		0.867	0.312		3.381 ± 0.512	0.438 ± 0.185
6	6.8	6.8		0.812	0.282		2.970 ± 0.480	0.358 ± 0.167