



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN JUEGO DE POLICÍAS Y
LADRONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
JAIME LEDESMA PONCE

DIRECTOR DE TESIS:
CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ



2013



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno	
Apellido paterno	Ledesma
Apellido materno	Ponce
Nombre(s)	Jaime
Teléfono	442 2 83 14 24
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	408031772
2. Datos del tutor	
Grado	Dr.
Nombre(s)	César
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Cruz
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Juan José
Apellido paterno	Montellano
Apellido materno	Ballesteros
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Mat.
Nombre(s)	Laura
Apellido paterno	Pastrana
Apellido materno	Ramírez
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Mat.
Nombre(s)	Jesus
Apellido paterno	Alva
Apellido materno	Samos
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Martha Gabriela
Apellido paterno	Araujo
Apellido materno	Pardo
7. Datos del trabajo escrito.	
Título	Un Juego de Policías y Ladrones
Número de páginas	60 p.
Año	2012

Índice general

1. Conceptos que ocuparemos	1
1.1. Gráficas	1
1.2. Trayectorias y Ciclos	4
1.3. Algunos tipos especiales de gráficas	7
1.4. Coloración	8
2. El juego	11
2.1. Una cota superior para una estrategia ganadora óptima	11
2.2. ¿En qué familias de gráficas gana uno u otro jugador?	13
2.3. Dos versiones del juego	15
2.4. Trampas	16
2.5. C es una variedad	20
3. Más policías para el jugador C	23
3.1. Buenas noticias para R	24
3.2. Buenas noticias para C	31
4. La situación en las gráficas planas	37
4.1. Herramientas Preliminares	37
4.2. Tres policías son suficientes	39
5. Tiempo de captura	47
5.1. Producto de árboles: cota superior	47
5.2. Producto de árboles: cota inferior	55
6. Conclusiones	59
Bibliografía	61

Agradecimientos

Tanto en mi trayectoria universitaria como en la elaboración y conclusión del presente trabajo han habido personas que merecen las gracias, pues sin su valiosa aportación esto no hubiera sido posible, también hay quienes las merecen por su apoyo y cariño constante a lo largo de mi vida y aunque me faltarán personas quisiera escribir mi agradecimiento a las siguientes:

A César Hernández Cruz, director de la presente tesis, por la oportunidad y por su inagotable paciencia y disponibilidad en cada momento de la realización de dicho trabajo; Dr. Juan José Montellano Ballesteros, Mat. Laura Pastrana Ramírez, Mat. Jesús Alva Samos y Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo, sinodales: gracias por su apoyo y enseñanza.

A mi madre Adriana Isabel Ponce Plancarte y mi padre Jaime Ledesma Ledesma, por apoyarme siempre y por su paciencia, muchas gracias.

A mi hermana Andrea Ledesma Ponce por el apoyo moral, su amistad y porque su entrega en las cosas que hace es inspirador, gracias hermanita.

A Mariana Cisneros Ruiz por su apoyo, tiempo y cariño, me motivas a alcanzar mis metas.

Por último pero no menos importante, quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ciencias por haber sido mi casa durante todo este tiempo y darme la oportunidad de crecer.

Gracias a todas las personas que hicieron posible la culminación de esta etapa y la elaboración del presente trabajo, esta tesis es suya.

Introducción

Entre los niños es muy popular el juego de policías y ladrones (o juegos parecidos) en los que unos niños pretenden ser policías y otros ladrones, el objetivo de los policías es capturar a los ladrones y el de los ladrones huir de los policías. El presente trabajo es sobre una abstracción de varios aspectos de este juego y para comprenderlos mejor la teoría de gráficas resulta muy útil, se trabajó con los artículos *A game of cops and robbers* escrito por M. Aigner y M. Fromme y publicado en el año 1984 y *The capture time of grids* escrito por A. Mehrabian y publicado en 2010. Por la naturaleza del juego se compara a un jugador con un policía o cuerpo policiaco y al otro jugador con un ladrón que huye del primero, el juego puede pensarse como un juego de mesa en el que el tablero es una gráfica conexa y no dirigida en la cual al inicio del trabajo los dos jugadores tendrán una sola pieza, después el número de piezas del policía aumenta y las piezas se mueven de vértice en vértice via las aristas que hay entre ellos.

En el primer capítulo se recuerdan conceptos de la teoría de las gráficas que son utilizados para probar las diversas afirmaciones acerca del juego a lo largo del trabajo. Para este capítulo recurrimos a lo escrito en dos textos, ambos con el nombre de *Graph Theory* uno de autores J.A. Bondy y U.S.R. Murty y el otro escrito por Reinhard Diestel.

En el capítulo 2 se introducen conceptos especialmente relacionados con el juego, en la sección 2.1 se muestra que si el policía puede ganar el juego en una gráfica entonces lo puede ganar en menos de cierto número de turnos, número que depende del número de vértices de la gráfica. En la sección 2.2 se dan ejemplos de familias de gráficas en las cuales el policía tiene una estrategia para ganar y otras en las que el ladrón tiene una estrategia para nunca ser capturado. En la sección 2.3 se hace el comentario acerca de un ligero cambio en las reglas, que da lugar a dos versiones distintas del juego y que en algunas gráficas dependiendo con que versión se juegue puede resultar vencedor uno

u otro jugador. En la sección 2.4 se supone que el policía logra capturar al ladrón y del análisis de los movimientos que anteceden a la captura emerge una estructura a la que nombramos trampa y se colige que, en una gráfica con al menos dos vértices que no contenga dicha estructura, el ladrón debe tener una estrategia para ganar, usando ésto se da un algoritmo para descubrir si en una gráfica gana o pierde el policía. En la sección 2.5 se introduce la estructura llamada *variedad* y se demuestra que la clase de todas las gráficas en las que el policía tiene una estrategia ganadora tiene dicha estructura.

En el capítulo 3, al encontrarse que las gráficas sólo necesitan cumplir pocas y simples condiciones para garantizar una vía de escape al ladrón si sólo es perseguido por un policía, surge la pregunta de cuál es el mínimo número de policías con el que puede garantizarse la captura del ladrón en una gráfica, a éste se le da el nombre de *número de policías* de dicha gráfica. En la sección 3.1 se demuestra que para cualquier número natural n hay una gráfica cuyo número de policías es n y, por otro lado, en la sección 3.2 que si una gráfica satisface ciertas condiciones entonces son necesarios a lo más 3 policías para capturar al ladrón.

En el capítulo 4 se describe cómo se puede capturar a un ladrón en una gráfica plana cualquiera con sólo tres policías.

En el capítulo 5 se formaliza el concepto de *k-tiempo de captura* de una gráfica, se calcula 1-tiempo de captura de un árbol en función de su diámetro y el principal objetivo de este capítulo es mostrar cuál es el tiempo de captura de una gráfica que sea el producto cuadrado de dos árboles en función del diámetro de la gráfica.

Capítulo 1

Conceptos que ocuparemos

1.1. Gráficas

Una gráfica G es un par (V, E) donde $E \subseteq \binom{V}{2}$, es decir los elementos de E son parejas no ordenadas de elementos de V , supondremos además que $V \cap E = \emptyset$, a los elementos de V les llamaremos *vértices* y a los de E *aristas*. Si $u, v \in V(G)$ solemos escribir uv para referirnos a la arista $\{u, v\}$, a u y a v les llamamos los *extremos* de la arista uv . La manera usual de representar con un dibujo una gráfica es poner un punto por cada vértice y unir a los vértices u y v con una línea si $\{u, v\} \in E$.

Por ejemplo las gráficas $G_1 = (V, E)$ y $G_2 = (V', E')$ en donde $V = \{u, v, x, y\}$, $E = \{uy, vy, vx, xy\}$ y $V' = \{u, v, x, y\}$, $E' = \{uy, vy, xy\}$ están representadas en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Ejemplos de gráficas

Decimos que una arista e es *incidente* con un vértice v si $v \in e$. Si $u, v \in V(G)$ decimos que u es *vecino* de v (o que son adyacentes), si $\{u, v\} \in E(G)$. Llamamos *vecindad* de u al conjunto de todos los vecinos de u y la denotamos por $N(u)$. Decimos que dos aristas son *adyacentes* si tienen un extremo en común. Por ejemplo, algunas cosas que se podrían decir de la gráfica G_1 de la figura 1.1 son: la arista uy es incidente con u y con y , el vértice y es adyacente al resto de los vértices de la gráfica y las aristas vy y xy son adyacentes.

Una *cubierta* de una gráfica $G = (V, E)$ es un conjunto $D \subset V$ tal que cada arista de G es incidente con al menos un elemento de D . Todas las gráficas tienen al menos una cubierta, a saber, la totalidad de sus vértices. Al número de elementos de una cubierta de cardinalidad mínima de una gráfica G se le da el nombre de *número de cubierta* y la notación que usamos es $\alpha_0(G)$. Los conjuntos de vértices $\{x, u, v\}$ y $\{y, v\}$ son, cada uno, una cubierta de la gráfica G_1 de la Figura 1.1, ambos son cubiertas mínimas por contención porque si se le quita cualquier vértice a uno de estos conjuntos deja de ser una cubierta, pero la cubierta $\{y, v\}$ es la de menor cardinalidad por lo que $\alpha_0(G_1) = 1$.

Un *conjunto dominante* de una gráfica $G = (V, E)$ es un subconjunto D de V tal que todo vértice que no pertenezca a D es adyacente a al menos un elemento de D . El *número dominante* de G es el cardinal del conjunto dominante de menor cardinalidad de G y la notación que usamos es $\gamma(G)$. Los conjuntos $\{x, u\}$ y $\{y\}$ son conjuntos dominantes de la gráfica G_1 de la Figura 1.1 por lo que $\gamma(G_1) = 1$.

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Decimos que G y G' son isomorfas y escribimos $G \cong G'$ si existe $\varphi : V \rightarrow V'$ una biyección tal que $xy \in E$ si y sólo si $\varphi(x)\varphi(y) \in E'$, decimos que la función φ es un *isomorfismo* entre G y G' .

Si $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son dos gráficas y $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ decimos que G' es una subgráfica de G y escribimos $G' \subseteq G$. Hay subgráficas especiales, por ejemplo, decimos que la subgráfica G' es *inducida* por el conjunto V' si para cualquier par de vértices $x, y \in V'$ se tiene que $xy \in E'$ si y sólo si $xy \in E$; la denotaremos por $G' = G[V']$. Por otro lado, si $V = V'$ decimos que G' es una subgráfica generadora. Frecuentemente diremos que una gráfica está contenida en otra si la primera es isomorfa a una subgráfica de la última.

Sea $G = (V, E)$ y $W \subseteq V$, definimos a la gráfica $G - W$ como $G[V - W]$; si W consta de un sólo vértice p escribimos $G - p$.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica y sea $H = (V', E')$ una subgráfica de G .

Decimos que una función $\sigma : V \rightarrow V'$ es una *retracción* si $\sigma(x) = x$ para todo $x \in V'$ y para todo $x, y \in V$ si $\{x, y\} \in E$ entonces $\{\sigma(x), \sigma(y)\} \in E'$.

Por ejemplo, de las gráficas G_2 y G_3 en la Figura 1.2, donde G_2 es la misma que en la Figura 1.1 y $V(G_3) = \{u', y', v'\}$, $E(G_3) = \{u'y', y'v'\}$, podemos decir que $\sigma : V(G_2) \rightarrow V(G_3)$ es una retracción si $\sigma(u) = u'$, $\sigma(y) = y'$, $\sigma(v) = \sigma(x) = v'$.



Figura 1.2: Retracción

A continuación definimos tres productos diferentes entre dos gráficas. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$.

El *producto tache-cuadro* de G y G' , denotado $G \boxtimes G'$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V \times V'$ y $(v, v')(w, w')$ es una arista de $G \boxtimes G'$ si $v = w$, $v'w' \in E'$ o $vw \in E$, $v' = w'$ o $vw \in E$, $v'w' \in E'$.

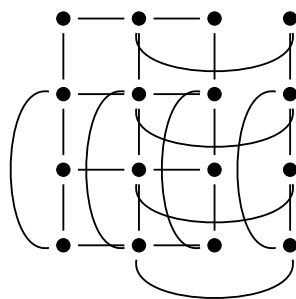
El *producto cuadro* de G y G' , denotado $G \square G'$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V \times V'$ y $(v, v')(w, w')$ es una arista de $G \square G'$ si $v = w$, $v'w' \in E'$ o $vw \in E$, $v' = w'$.

El *producto tache* de G y G' , denotado $G \times G'$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V \times V'$ y $(v, v')(w, w')$ es una arista de $G \times G'$ si $vw \in E$, $v'w' \in E'$.

Por ejemplo en la Figura 1.3 está representado el producto cuadro de las gráficas de la Figura 1.1.

La *proyección* de la gráfica $G \square H$ en G es la función $\pi_G : V(G \square H) \rightarrow V(G)$ definida como $\pi_G((x, y)) = x$. Análogamente se define π_H y la proyección para los demás productos.

Una observación que nos será útil más adelante es la siguiente: En los productos $G \square G'$ y $G \boxtimes G'$ cada vértice pertenece a los vértices de una subgráfica isomorfa a G y a los vértices de otra isomorfa a G' , a saber, si $(x, y) \in V(G \square G')$ o $(x, y) \in V(G \boxtimes G')$ a la subgráfica cuyos vértices son de la forma (z, y) con z cualquier vértice de G la denotamos $G \times \{y\}$ y es

Figura 1.3: $G_1 \square G_2$

isomorfa a G pues la proyección sobre la primera entrada es un isomorfismo. Análogamente se define $\{x\} \times G'$ que es isomorfa a G' .

Si G es una gráfica, el *grado* de un vértice u es el número de vecinos de éste, es decir, $|N(u)|$, y lo denotamos $d_G(u)$ o $d(u)$ si no hay ambigüedad. El número $\delta(G) := \min\{d(v) | v \in V(G)\}$ es el *grado mínimo* de G . El número $\Delta(G) := \max\{d(v) | v \in V(G)\}$ es el *grado máximo* de G . Si todos los vértices de una gráfica tienen el mismo grado, digamos k , entonces a dicha gráfica le llamamos *k-regular*. A una gráfica que es k -regular para alguna k también le llamamos simplemente *regular*. Por ejemplo en la Figura 1.1 $\delta(G_1) = 1$ porque $d_{G_1}(u) = 1$ y no hay un vértice con grado cero, y $\Delta(G_1) = 3$ porque $d_{G_1}(y) = 3$ y no hay un vértice con un grado mayor a tres.

1.2. Trayectorias y Ciclos

Una *trayectoria* es una gráfica $P = (V, E)$ no vacía de la siguiente forma: $V = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ en donde los vértices x_i son todos distintos entre sí. A x_0 y x_k les llamaremos extremos de P y a x_1, x_2, \dots, x_{k-1} vértices intermedios de P . Decimos que dos trayectorias P y Q son *internamente ajenas* si no tienen vértices intermedios en común.

Es común que nos refiramos a P con la sucesión natural de sus vértices $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ y decimos que P es una trayectoria entre x_0 y x_k o también que es una x_0x_k -trayectoria. La *longitud* de una trayectoria P es el número de aristas que tiene, la notación que usamos es $\ell(P) := |E(P)|$, en este caso $\ell(P) = k$.

Si $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ y $0 \leq i \leq j \leq k$ entonces usamos la siguiente

notación para referirnos a una particular subgráfica de la trayectoria $x_i P x_j := (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$.

Dadas dos trayectorias $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ y $Q = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_l)$, si $P \cup Q$ es de nuevo una trayectoria, necesariamente $x_0 = y_0$ o $x_0 = y_l$ o $x_k = y_l$ o $x_k = y_0$, supongamos sin pérdida de generalidad que $x_k = y_0$, en cuyo caso usamos la siguiente notación $x_0 P x_k Q y_l$ para referirnos a $P \cup Q$.

Cuando una gráfica de la forma $V = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\}$ $E = \{x_0 x_1, x_1 x_2, \dots, x_{k-1} x_k\}$ no cumple con el requisito para ser una trayectoria de que todos los vértices x_i sean distintos entre sí le llamamos *camino*, y a un camino al cual le añadimos la restricción de que todas las aristas sean distintas entre sí le llamamos *paseo*.

Teorema 1.2.1. *Si u y v son vértices de una gráfica G , entonces todo uv -camino contiene una uv -trayectoria.*

Demostración. Por inducción sobre el número de vértices del camino. Sean $u_0, v_0 \in V(G)$ tales que hay un $u_0 v_0$ -camino P_0 con un sólo vértice, entonces ese mismo vértice es también una $u_0 v_0$ -trayectoria.

Supongamos la afirmación válida para caminos con k vértices, y sean $u, v \in V(G)$ tales que hay un uv -camino P con $k + 1$ vértices, $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = v)$ entonces $u P x_{k-1}$ es un $u x_{k-1}$ -camino con k vértices, por hipótesis de inducción contiene una $u x_{k-1}$ -trayectoria T' . Hay dos casos: $v \in V(T')$ o $v \notin V(T')$. Si $v \in V(T')$ entonces $u T' v$ es una uv -trayectoria contenida en P ; si $v \notin V(T')$ entonces $u T' x_{k-1} \cup (x_{k-1}, v)$ es una uv -trayectoria contenida en P y si $u = v$ entonces (u) es una uv -trayectoria contenida en P . ■

Aprovechamos la definición de trayectoria para definir una función $d : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Si G es una gráfica y $u, v \in V(G)$, $d(u, v)$ es la longitud de una trayectoria de longitud mínima entre u y v , es decir $d(u, v) = \min\{\ell(P) \mid P \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}$, y la llamamos la distancia entre u y v .

Observemos que para todo $u, v, w \in V(G)$ la función así definida cumple las siguientes propiedades:

- $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$.

$$\blacksquare \quad d(u, w) + d(w, v) \geq d(u, v).$$

La última propiedad tiene el nombre de *desigualdad del triángulo*.

Demostración. Las dos primeras propiedades son consecuencia inmediata de la definición de d , para demostrar la tercera sean P_{uv}, P_{uw}, P_{wv} trayectorias de longitud mínima entre u y v , entre v y w y entre w y v respectivamente. Como $P_{uw} \cup P_{wv}$ es un camino entre u y v contiene una uv -trayectoria P , entonces $d(u, w) + d(w, v) = \ell(P_{uw}) + \ell(P_{wv}) = \ell(P_{uw} \cup P_{wv}) \geq \ell(P) \geq \ell(P_{uv}) = d(u, v)$. \blacksquare

El *diámetro* de una gráfica G o $\text{diam}(G)$ es el máximo del conjunto $\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$.

Lema 1.2.2. Si Z es una $(u_1, v_1)(u_2, v_2)$ -trayectoria en $G \square H$, entonces $\pi_G(Z)$ y $\pi_H(Z)$ son $u_1 u_2$ y $v_1 v_2$ -caminos en G y H respectivamente.

Demostración. Sea $Z = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k))$ una trayectoria, entonces $(x_i, y_i)(x_{i+1}, y_{i+1}) \in E(G \square H)$ por lo que, o bien $x_i = x_{i+1}$ y $y_i y_{i+1} \in E(H)$ o bien $x_i x_{i+1} \in E(G)$ y $y_i = y_{i+1}$. Es decir, en (x_0, x_1, \dots, x_k) sucede que $x_i x_{i+1} \in E(G)$ o $x_i = x_{i+1}$ y en (y_0, y_1, \dots, y_k) sucede que $y_i y_{i+1} \in E(H)$ o $y_i = y_{i+1}$. \blacksquare

Teorema 1.2.3. Si G y H son gráficas entonces $\text{diam}(G \square H) = \text{diam}(G) + \text{diam}(H)$.

Demostración. Sean $P_G = (a_1, a_2, \dots, a_g)$ y $P_H = (b_1, b_2, \dots, b_h)$ trayectorias en G y en H respectivamente, tales que $\ell(P_G) = d(a_1, a_g) = \text{diam}(G)$ y $\ell(P_H) = d(b_1, b_h) = \text{diam}(H)$. Definamos la trayectoria $Q := [(a_1, b_1)(P_G \times \{b_1\})(a_g, b_1)] \cup [(a_g, b_1)(\{a_g\} \times P_H)(a_g, b_h)]$. Notemos que $d((a_1, b_1), (a_g, b_h)) = \ell(Q)$, en efecto, porque si hubiera una trayectoria más corta entre (a_1, b_1) y (a_g, b_h) , digamos $Z = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k))$, esta tendría menos de $\text{diam}(G)$ valores distintos para la primera coordenada o menos de $\text{diam}(H)$ valores distintos para la segunda coordenada y por el Lema 1.2.2, pasaría una de las siguientes situaciones: la proyección sobre las primeras entradas de Z sería un camino que usa menos vértices que P_G entre a_1 y a_g o bien la proyección sobre las segundas entradas sería un camino que usa menos

vértices que P_H entre b_1 y b_n , lo cual sería en cualquier caso una contradicción a la elección de P_G o de P_H . Y como el diámetro de $G \square H$ es el máximo de las distancias entre los vértices de $G \square H$, entonces $\text{diam}(G) + \text{diam}(H) = \ell(P_G) + \ell(P_H) = \ell(Q) \leq \text{diam}(G \square H)$.

Por otro lado, sea P una trayectoria en $G \square H$ tal que $\ell(P) = \text{diam}(G \square H) = d(u, v)$ para algunos $u, v \in V(G \square H)$, $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ para algunos $u_1, v_1 \in V(G)$ y $u_2, v_2 \in V(H)$. Afirmamos que las proyecciones de P sobre la primera entrada y sobre la segunda son trayectorias de longitud mínima entre u_1 y v_1 y entre u_2 y v_2 respectivamente, ya que si suponemos sin pérdida de generalidad que hubiera una trayectoria más corta Q_G entre u_1 y v_1 , entonces la trayectoria $P' := (u_1, u_2)(Q_G \times \{u_2\})(v_1, u_2) \cup (v_1, u_2)(\{v_1\} \times \pi_H(P))(v_1, v_2)$ sería una trayectoria más corta que P , porque $\ell(P') = \ell(Q_G) + \ell(\pi_H(P)) < \ell(\pi_G(P)) + \ell(\pi_H(P)) = \ell(P)$ la última igualdad debido a que se suponía que P era una trayectoria de longitud mínima entre sus extremos, pero justo este hecho queda contradicho por la desigualdad $\ell(P') < \ell(P)$, por lo tanto las proyecciones mencionadas si son de longitud mínima entre sus extremos y $\text{diam}(G) + \text{diam}(H) \geq d(u_1, v_1) + d(u_2, v_2) = \ell(\pi_G(P)) + \ell(\pi_H(P)) = \ell(P) = \text{diam}(G \square H)$. ■

Si $P = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ es una trayectoria y $k \geq 3$, entonces decimos que la gráfica $G := P + x_{k-1}x_0$ es un *ciclo*. Análogamente si (x_0, x_1, \dots, x_k) es un camino o un paseo y $x_0 = x_k$ decimos que es un camino o un paseo *cerrado* respectivamente. Llamamos a $G = (V, E)$ un k -ciclo o decimos que la longitud de ciclo es k , $\ell(G) = k$, si G es un ciclo con $|E| = k$.

1.3. Algunos tipos especiales de gráficas

Con frecuencia nos referiremos a las gráficas cuyo conjunto de vértices es el conjunto vacío y a la gráfica con un sólo vértice como gráficas *triviales*. Una gráfica donde todos los vértices son adyacentes es llamada *completa*. Se denota K_n a la gráfica completa con n vértices. Una gráfica es llamada *finita* si tiene un número finito de vértices.

Decimos que una gráfica no vacía G es *conexa* si entre cualesquiera dos de sus vértices hay una trayectoria, aunque en virtud del Teorema 1.2.1 podemos decir que una gráfica es conexa si entre cualesquiera dos de sus vértices existe un camino. Llamamos *componentes conexas* de una gráfica a sus subgráficas

máximas por contención con la propiedad de ser conexas. Es decir, C es una componente conexa de G si es una subgráfica conexa de G y para ninguna subgráfica conexa C' de G se tiene $C \subsetneq C'$.

Una gráfica es llamada *bosque* si no tiene ciclo alguno como subgráfica. Si un bosque es conexo lo llamamos *árbol*.

Una gráfica G es *aplanable* si puede ser dibujada en el plano de manera que sus aristas sólo se intersecten en sus extremos, a dicho dibujo lo llamamos la *inclusión de G en el plano*. Una inclusión \tilde{G} en el plano de una gráfica G puede ser considerada como una gráfica isomorfa a G , siendo el conjunto de vértices de \tilde{G} el conjunto de puntos en el plano representando a los vértices de G y las aristas de \tilde{G} las líneas representando a las aristas de G , un vértice de \tilde{G} es incidente con todas las aristas de \tilde{G} que lo contienen. Diremos que la inclusión \tilde{G} en el plano de una gráfica G es una *gráfica plana*.

Por una *curva* queremos decir la imagen de un segmento cerrado de una línea bajo una función continua, y por una *curva cerrada* la imagen de un círculo bajo una función continua. La curva es llamada *simple* si dicha función es biyectiva.

Un subconjunto del plano es llamado *arco-conexo* si para cualesquiera dos puntos del conjunto existe una curva que esté íntegramente contenida en el conjunto y cuyos extremos sean dichos puntos.

El siguiente teorema es conocido como el teorema de la curva de Jordan:

Teorema 1.3.1. *Cualquier curva cerrada simple C en el plano divide el resto del plano en dos conjuntos abiertos y arco-conexos cuya intersección es el vacío.*

Sólo enunciamos el teorema y no escribimos su demostración porque por un lado el enunciado es intuitivo pero por otro lado su demostración requiere herramienta técnica que se desvía de la orientación de este trabajo. A los dos conjuntos abiertos que menciona el teorema los denotamos por I_C y E_C y nos referimos a ellos como la región interior y exterior que define la curva C en el plano, respectivamente.

1.4. Coloración

Una *coloración por vértices* o simplemente *coloración* de una gráfica $G = (V, E)$ es una función $c : V \rightarrow S$ y decimos que es una *buena coloración* o

una *coloración propia* si $c(v) \neq c(w)$ siempre que v y w sean adyacentes. En el presente trabajo S será un conjunto de números naturales.

Una k -coloración de una gráfica $G = (V, E)$ es una coloración propia $c : V \rightarrow S$ tal que $|S| = k$.

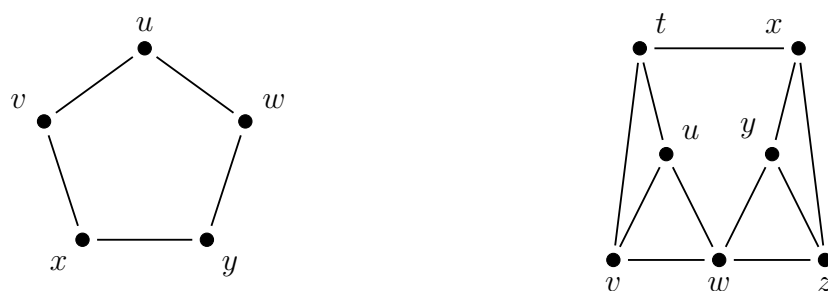
Decimos que una gráfica G es k -coloreable si tiene una k -coloración. Al menor número k tal que G tiene una k -coloración lo llamamos el *número cromático de G* y lo denotamos $\chi(G)$.

También podemos ver a una k -coloración como a una partición $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ de los vértices, donde cada V_i es el conjunto (posiblemente vacío) de vértices que tienen asignado el color i , los conjuntos V_i son llamados *clases cromáticas* de la coloración.

Por ejemplo el número cromático del ciclo C de la Figura 1.4 es 3 y el de la gráfica G a su lado es 4, esta gráfica es llamada *gráfica de Hajos*.

Podemos colorear con tres colores los vértices de C , asignándoles el color 0 a u y a x , el color 1 a v y w y el color 2 a y , es fácil observar que ésta es una coloración propia. Sólo falta ver que no se pueden colorear propiamente con sólo dos colores, intentémoslo; el vértice u se debe colorear con algún color, digamos que con el color 0, entonces para que la coloración sea propia no podemos asignarles el color 0 a los vértices v y w , por lo que se les asignará el color 1, por ser adyacentes x con v y y con w la coloración les debería asignar el color 0 a x y a y pero la coloración no sería propia porque x y y también son adyacentes.

Intentemos dar una buena coloración de los vértices de G con tres colores; observemos que la gráfica de Hajos contiene un 5-ciclo como subgráfica inducida, a saber $G[\{t, u, w, y, x\}]$ por lo que los tres colores deben ser usados en los vértices de esta subgráfica, hay varios casos dependiendo de que vértice hayamos coloreado con el color que se utilice una sólo vez en la coloración del ciclo, pero en cualquier caso o v es adyacente a tres vértices de distinto color o z es adyacente a tres vértices de distinto color, por lo cual es necesario un tercer color para que la coloración pueda ser propia. Una 4-coloración de G es $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ donde $f(t) = f(w) = 0$, $f(u) = f(y) = 1$, $f(x) = 2$ y $f(v) = f(z) = 3$.

Figura 1.4: $\chi(C) = 3, \chi(G) = 4$

Capítulo 2

El juego

Sea G una gráfica finita y conexa. Dos jugadores llamados C (policía) y R (ladrón) juegan en G de acuerdo a las siguientes reglas: primero C debe ocupar un vértice de G y después R , luego, alternadamente se moverán del vértice en que se encuentren a uno adyacente. El jugador C gana el juego si los dos jugadores ocupan el mismo vértice, y si el juego se puede prolongar indefinidamente sin que C logre ganar, entonces gana R . Damos por sentado que tanto C como R tienen la intención de ganar el juego. Decimos que C tiene una estrategia ganadora cuando para cada movimiento de R , C tiene uno en respuesta tal que, sin importar cuales sean los movimientos de R , tras un número finito de movimientos C gana el juego.

2.1. Una cota superior para una estrategia ganadora óptima

Llamaremos *estrategia ganadora óptima* a una estrategia ganadora con la cual C hace el menor número de movimientos para atrapar al ladrón de entre todos los juegos en los cuales el ladrón hace todo lo posible por prolongar su captura, es decir, por ser capturado en un mayor número de movimientos.

Proposición 2.1.1. *Sea G una gráfica, si C tiene una estrategia ganadora, entonces debe poder atrapar al ladrón en a lo más $n(n - 1) + 1$ movimientos.*

Demostración. Afirmamos que C puede lograr que las posiciones en que se encuentra el juego inmediatamente después de los movimientos del policía

sean diferentes entre sí a lo largo de todo el juego. Demostremos la afirmación: Como C tiene una estrategia ganadora, podemos suponer que C siempre hace su mejor movimiento, es decir, que con ningún otro movimiento obtiene un mejor resultado. Supongamos que, jugando C de esta manera, resulta que después de dos movimientos distintos de C a lo largo del juego, se repite una posición, a la que llamaremos θ . Llamemos θ_1 a la posición θ cuando ocurre por primera vez y θ_2 cuando ocurre por última vez (después de un movimiento de C). Si alguno de los movimientos de C puede ser mejorado, ya tendríamos una contradicción, pero si ninguno de los movimientos de C puede ser mejorado, esto querría decir que R puede repetir los movimientos que hizo entre θ_1 y θ_2 una y otra vez si C sigue jugando sus mejores movimientos y si C cambiara sus movimientos, sólo podría ser en detrimento de sus intereses (*i.e.* atrapar al ladrón), ganando así el ladrón, lo cual también es una contradicción. Por lo tanto hemos visto que, si C hace sus mejores movimientos a lo largo del juego, puede lograr que las posiciones a las que se llega después de un movimiento suyo sean distintas entre sí.

Entonces podemos asociar a cada movimiento del policía, en el juego arriba descrito, una posición del juego, a saber, la posición en la que queda el juego después de dicho movimiento, y esta asociación, por la afirmación anterior, es uno a uno. Por lo tanto, hay tantos movimientos de C en ese juego, como posiciones distintas en el mismo, y este número está acotado superiormente por el total de posiciones posibles en la que pueden estar ladrón y policía sin estar en el mismo vértice en la gráfica, más la posición en la cual el policía finalmente atrapa al ladrón, esto es: $2\binom{n}{2} + 1 = 2\frac{n!}{(n-2)!2!} + 1 = \frac{n!}{(n-2)!} + 1 = n(n-1) + 1$. ■

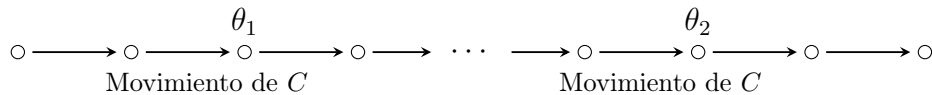


Figura 2.1: Camino dirigido que representa el juego, los vértices son la posición en que se encuentra el juego y las flechas indican de que posición del juego a que otra se pasó con el movimiento de R o de C .

2.2. ¿En qué familias de gráficas gana uno u otro jugador?

Denotemos por \mathbf{C} a la clase de las gráficas en las cuales el policía tiene una estrategia ganadora y por \mathbf{R} a la clase de las gráficas en las cuales el ladrón tiene una estrategia ganadora. Observemos que la intersección de estas dos clases es vacía. Las gráficas consideradas en el texto serán finitas, no dirigidas y conexas.

A continuación damos ejemplos de familias contenidas en \mathbf{C} y \mathbf{R} .

Lema 2.2.1. *Sean $G = (V, E)$ una gráfica regular y no completa y $c, r \in V$ vértices distintos y no adyacentes. Para todo vértice $c' \in V$ adyacente a c , existe $r' \in V$ adyacente a r que no es adyacente a c' y que $r' \neq c'$.*

Demostración. Supongamos que no es así, es decir, supongamos que existen c, c' y $r \in V$ que cumplen con las hipótesis del teorema y tales que $c' \in N(c)$ y para todo $r' \in N(r)$ se cumple que $r' \in N(c') \cup \{c'\}$. Si para ningún $r' \in N(r)$ se tuviera que $r' = c'$ esto querría decir que $N(r) \subseteq N(c')$ y como G es regular $|N(r)| = |N(c')|$ por lo que $N(r) = N(c')$ lo cual es una contradicción, ya que $c \notin N(r)$ y $c \in N(c')$.

Pero si para algún $\tilde{r} \in N(r)$ se tuviera $\tilde{r} = c'$ entonces r pertenecería a $N(c')$ y por lo tanto $N(r) \cup \{r\} \subseteq N(c') \cup \{c'\}$, por otro lado sabemos que $c \in N(c') \cup \{c'\}$ y $c \notin N(r) \cup \{r\}$ de manera que en realidad $N(r) \cup \{r\} \subsetneq N(c') \cup \{c'\}$ por lo que $|N(r) \cup \{r\}| < |N(c') \cup \{c'\}|$ entonces $|N(r)| < |N(c')|$ lo cual es una contradicción a que G es regular. ■

Teorema 2.2.2. *Toda gráfica regular que no sea completa pertenece a \mathbf{R} .*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica regular y no completa. Demostraremos que R puede evitar ser atrapado en cada movimiento suyo sin ser atrapado en el siguiente movimiento de C .

Supongamos que C se coloca en algún vértice c_1 . Como G es regular y no completa, existe un vértice r_1 en V tal que no es vecino de c_1 y que $r_1 \neq c_1$, en dicho vértice deberá colocarse R .

Supongamos que R acaba de realizar su i -ésimo movimiento y no ha sido atrapado, y que además no será capturado en el $(i + 1)$ -ésimo turno de C , C está en $c_i \in V$, R en $r_i \in V$, entonces es el turno de C , que se mueve a algún

vértice $c_{i+1} \in N(c_i)$ donde por hipótesis no se encuentra R , por el Lema 2.2.1 existe $r_{i+1} \in V$ adyacente a r_i que no es c_{i+1} ni adyacente a el, por lo que, si R se coloca en ese vértice, escapa y evita ser alcanzado en el turno $i + 2$ del policía. Por el principio de inducción matemática $G \in \mathbf{R}$. ■

Teorema 2.2.3. *Todo árbol pertenece a \mathbf{C} .*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ un árbol. A continuación describimos la estrategia de \mathbf{C} y a la par definimos una sucesión de subgráficas de G , $\{R_i\}$, de manera que se cumpla lo siguiente:

- 1.- R no pueda salir de R_i en su movimiento i -ésimo sin ser atrapado por el policía.
- 2.- $|V(R_{i+1})| < |V(R_i)|$ para cada $i \in \mathbb{N}$ (mientras R_i no sea la gráfica vacía).

Como G es una gráfica finita, R_i es la gráfica vacía para alguna $i \in \mathbb{N}$, lo cual quiere decir que el policía atrapa al ladrón.

El jugador \mathbf{C} se colocará en algún vértice v_0 , en su turno “0”, entonces definimos R_0 como $G - v_0$, luego R se coloca en algún vértice w_0 de $G - v_0$ (de lo contrario acabaría el juego) y \mathbf{C} avanza por la arista v_0v_1 en la dirección de la componente conexa de $G - v_0$ en la cual se haya colocado R y se define R_1 como la componente conexa de $G - v_1$ en la cual se encuentre R . Observemos que en su siguiente turno R no puede salir de dicha componente sin pasar por donde se encuentra \mathbf{C} .

Supongamos que \mathbf{C} está parado en un vértice v_i y R en w_i . La subgráfica R_i está definida como la componente conexa de $G - v_i$ que contenía al vértice en el cual estaba R antes de estar en w_i , y que por la observación al final del párrafo anterior es la misma en la que se encuentra w_i , para una $1 \leq i$, y es el turno de \mathbf{C} . Observemos que v_i es adyacente a sólo un vértice y de R_i (si hubiera dos y_1, y_2 como hay una y_1y_2 -trayectoria, P , en R_i , $(v_i, y_1) \cup P \cup (y_2, v_i)$ sería un ciclo en G , pero G es un árbol), entonces \mathbf{C} se mueve a y , y definimos $v_{i+1} := y$ y a R_{i+1} como la componente de $G - v_{i+1}$ donde está el vértice w_i .

Sea $x \in V(R_{i+1})$, entonces hay una w_ix -trayectoria, Q , en $G - v_{i+1}$. Supongamos que v_i es un vértice de dicho camino, (pero que $v_i \neq w_i$, pues habría terminado el juego) entonces $Q = (w_i = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{s-1}, v_i = z_s, z_{s+1}, \dots, z_{\ell(Q)} = x)$, en particular hay una w_iz_{s-1} -trayectoria en $G - v_i$, por lo que $z_{s-1} \in V(R_i)$ y es adyacente a v_i , pero $z_{s-1} \neq v_{i+1}$ y en el párrafo anterior observamos que no puede haber dos vértices en R_i adyacentes a v_i , por lo tanto $v_i \notin V(Q)$.

De manera que Q es un w_ix -camino en $G - v_i$, por lo que $x \in V(R_i)$ y así hemos visto que $V(R_{i+1}) \subseteq V(R_i)$ y como $v_{i+1} \notin V(R_{i+1})$, entonces $|V(R_{i+1})| < |V(R_i)|$. ■

2.3. Dos versiones del juego

Una importante diferencia es aquella que existe entre la versión *pasiva* y la versión *activa* del juego, en la primera el ladrón puede elegir no moverse del vértice en el que está en su turno, mientras que en la segunda es obligatorio que cambie de vértice. El policía debe moverse en cualquiera de estas versiones. Los árboles pertenecen a \mathbf{C} y las gráficas regulares no completas a \mathbf{R} en ambas versiones, pero en general en una gráfica bien podría cambiar el ganador dependiendo de con cual versión se juegue. La gráfica de la Figura 2.2 es la más pequeña en la que C tiene una estrategia ganadora jugando en la versión activa y R tiene una estrategia ganadora en la versión pasiva. El lector puede comprobar que en cada gráfica con menos de 5 vértices el ganador es el mismo en las dos versiones y lo mismo para las gráficas que resultan de remover aristas de la gráfica de la Figura 2.2.

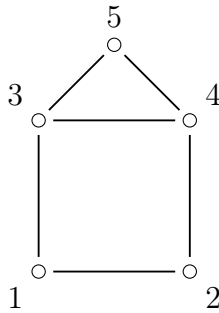


Figura 2.2: El ganador cambia dependiendo de la versión.

La estrategia del policía en la versión activa es colocarse en el vértice 5: si R se coloca en 3 o en 4, entonces C lo captura al siguiente movimiento. Supongamos que R se coloca en 1, entonces C se mueve a 4, como 3 y 2 son los únicos vértices adyacentes a 1 y son también adyacentes a 4, sin importar a dónde mueva el ladrón, C lo captura en su siguiente movimiento. El razonamiento si R se coloca en 2 es simétrico ya que la gráfica lo es.

La estrategia del ladrón en la versión pasiva es limitar sus movimientos a los vértices 1, 2, 3 y 4 y usar la estrategia que usará en el ciclo generado por dichos vértices suponiendo que C está en 3 cada vez que el está en 5 y R ignorará los turnos de C en los que pase de 3 a 5 o viceversa y permanecerá en su lugar, ya que si C está en 5, al suponer que está en 3, R se colocará en 2 donde no puede ser alcanzado por C , y C sólo puede mover a 3 o a 4, si mueve a 3 para R es como si no se hubiera movido y si mueve a 4 es algo que R tendría contemplado en la estrategia del ciclo.

Este trabajo está enfocado a la versión pasiva por parecernos más natural, en el sentido de que a un verdadero ladrón no habría nada que le impidiera quedarse en el mismo sitio si eso quisiera.

2.4. Trampas

Supóngase que G es una gráfica en la que C tiene una estrategia ganadora. Analizaremos cual es la situación justo antes del último movimiento de R . Como R tiene la posibilidad de quedarse quieto y estamos suponiendo que C lo atrapa al siguiente movimiento, R y C deben estar sobre vértices unidos por una arista, y como R no puede evadir a C cualquiera que sea su movimiento, todos los vecinos del vértice donde está R también deben ser vecinos del vértice donde está C .

Definición. Llamaremos *trampa* al par de vértices (p, d) junto con sus vecinos cuando se cumpla que $N(p) \cup \{p\} \subseteq N(d) \cup \{d\}$.

De la discusión anterior se sigue que si una gráfica con al menos dos vértices no tiene *trampas* entonces necesariamente pertenece a \mathbf{R} . Por ejemplo el octaedro de la Figura 2.5 pertenece a \mathbf{R} ya que no tiene *trampas*. Pero puede haber gráficas en \mathbf{R} que tengan trampas como la que presentamos en la Figura 2.4, la idea para construir una de estas gráficas es de alguna forma pegarle a una gráfica de \mathbf{R} otra que tenga trampas, pero R puede limitarse a mover sobre los vértices de la primera (en el caso de la Figura 2.4 sobre los vértices del ciclo de longitud 4).

Teorema 2.4.1. *Sea G una gráfica y (p, d) una trampa de G , y sea $\tilde{G} := G - p$. Entonces, $G \in \mathbf{C}$ si y sólo si $\tilde{G} \in \mathbf{C}$.*

Demostración. Primero supongamos que $\tilde{G} \in \mathbf{C}$ y que se juega una partida en G . Como C tiene una estrategia ganadora en \tilde{G} la usará para construir

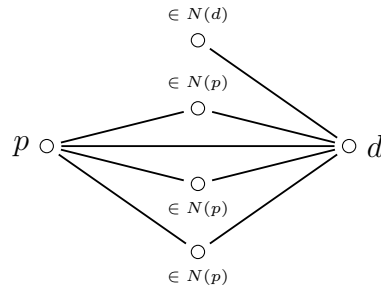
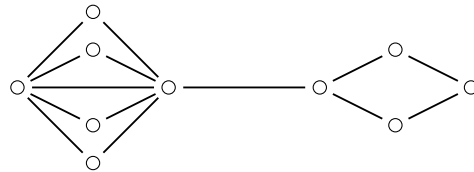


Figura 2.3: Una trampa

Figura 2.4: Tiene una trampa y pertenece a \mathbf{R}

una nueva estrategia para jugar en G , pretendiendo que R está en d cada vez que está en p y moviendo de acuerdo a su estrategia en $\tilde{G} \subseteq G$. Esto tiene sentido, ya que si R entró en p , debió haberlo hecho desde un vértice en $N(p)$ o ya haber estado ahí desde el comienzo del juego, y cada vez que sale de p lo hace hacia un vértice en $N(p)$, pero $N(p) \cup \{p\} \subseteq N(d) \cup \{d\}$ por lo cual los movimientos que C supone que hace R siguen siendo legales. Si en la estrategia de C en \tilde{G} sucede que C atrapa a R en un vértice distinto a p entonces también en la nueva estrategia, y si en la estrategia de C en \tilde{G} sucede que C atrapa a R en d cuando en realidad éste estaba en p sólo tenemos que añadir un nuevo movimiento de C pues R sólo se puede mover a un vecino de d o a d mismo que es donde se encuentra C . Por lo tanto $G \in \mathbf{C}$.

Ahora supongamos que $\tilde{G} \notin \mathbf{C}$ entonces $\tilde{G} \in \mathbf{R}$, es decir, R tiene una estrategia para nunca ser atrapado en \tilde{G} , es claro, por el párrafo anterior, que también R puede extender su estrategia a G suponiendo que C está en d cada vez que se encuentre en p . ■

Si (p, d) es una trampa de una gráfica G , diremos que removimos la trampa

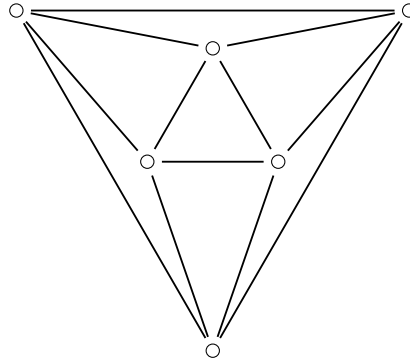


Figura 2.5: Octaedro

(p, d) si quitamos p , es decir, $G-p$ es la gráfica que resulta de quitar la trampa.

Teorema 2.4.2. $G \in \mathbf{C}$ si y sólo si quitando sucesivamente trampas (en cualquier orden) G puede ser reducida a un sólo vértice.

Demostración. El resultado anterior nos indica que es el mismo jugador el que gana en una gráfica G que el que gana en la que resulta de haberle removido una trampa, y por lo tanto de remover cualquier número de trampas. Pero si se van quitando trampas sucesivamente hasta que no haya más, sólo se puede obtener al final o bien una gráfica de un sólo vértice, gráfica que pertenece a \mathbf{C} o bien una gráfica sin trampas y con al menos dos vértices que, por una observación anterior, pertenecería a \mathbf{R} . Por lo tanto si la original pudo ser reducida a un sólo vértice es porque pertenecía a \mathbf{C} y si no pudo ser reducida a un vértice es porque pertenecía a \mathbf{R} , o lo que es lo mismo, no pertenecía a \mathbf{C} . ■

Por ejemplo, los vértices blancos en la Figura 2.6 son *trampas* en su respectiva etapa. Por el resultado anterior la gráfica pertenece a \mathbf{C} .

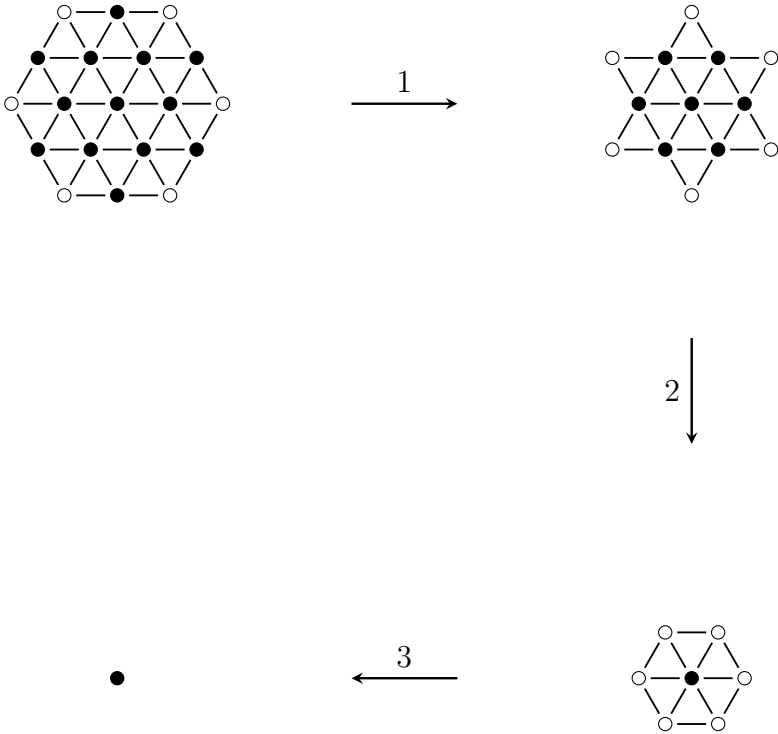


Figura 2.6: Removiendo trampas en distintas etapas

2.5. C es una variedad

Entenderemos por *variedad*, una clase cuyos elementos son gráficas y que es cerrada bajo las operaciones producto \boxtimes finito y retracción. A continuación demostraremos que C es una variedad. Esto resulta interesante, pues una familia de gráficas caracterizada únicamente a través de un juego resulta tener ciertas propiedades algebraicas.

Teorema 2.5.1. *Si $G, G' \in C$, entonces $G \boxtimes G' \in C$.*

Demostración. Como $G, G' \in C$, C tiene una estrategia ganadora tanto en G como en G' , supongamos que C empezaría colocandose en $x_0 \in V(G)$ si jugara en G y en $y_0 \in V(G')$ si jugara en G' , entonces iniciará su juego en $G \boxtimes G'$ colocandose en (x_0, y_0) , si R se coloca en (u_0, v_0) , entonces C se mueve a (x_1, y_1) dónde x_1 es el vértice al que se movería C de acuerdo a su estrategia en G si R se pusiera en u_0 , y y_1 es el vértice al que se movería C de acuerdo a su estrategia en G' si R se pusiera en v_0 .

Así, en general, si cuando C se encuentra en un vértice (x_{p-1}, y_{p-1}) , R se mueve de un vértice (u_{p-1}, v_{p-1}) a otro (u_p, v_p) entonces pasa que: $(u_{p-1} = u_p \text{ y } \{v_{p-1}, v_p\} \in E(G'))$ o $(\{u_{p-1}, u_p\} \in E(G) \text{ y } v_{p-1} = v_p)$ o $(\{u_{p-1}, u_p\} \in E(G) \text{ y } \{v_{p-1}, v_p\} \in E(G'))$. Cualquiera de estas opciones implica que el movimiento de u_{p-1} a u_p sería un movimiento válido para el ladrón en G y que el movimiento de v_{p-1} a v_p sería un movimiento válido para el ladrón en G' para los cuales C tiene un movimiento en respuesta de acuerdo a sus estrategias tanto en G como en G' , digamos a x_p y y_p respectivamente. Pero esto quiere decir que $\{x_{p-1}, x_p\} \in E(G)$ y $\{y_{p-1}, y_p\} \in E(G')$, entonces $\{(x_{p-1}, y_{p-1}), (x_p, y_p)\} \in E(G \boxtimes G')$ por lo cual C puede moverse y se moverá al vértice (x_p, y_p) y seguirá procediendo de este modo hasta que $x_q = u_{q-1}$ o $y_q = v_{q-1}$ para alguna $q \in \mathbb{N}$. Como C está moviendo de acuerdo a sus estrategias ganadoras, llegará este momento y a partir de éste C seguirá al ladrón en la entrada en la cual "lo ha alcanzado" mientras en la restante lo alcanza usando su estrategia como se explicó arriba. Y entonces se tendrá que $x_{q'} = u_{q'-1}$ y $y_{q'} = v_{q'-1}$ para alguna $q' \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.5.2. *Sea H un retracto de G . Si $G \in C$ entonces $H \in C$.*

Demostración. Es lo mismo demostrar que: Si H es un retracto de G , entonces si $H \notin C$ pasa que $G \notin C$. Si $H \notin C$ entonces $H \in \mathbf{R}$, R tiene una estrategia ganadora en H . Sea $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ una retracción. Supongamos

que se juega en G , R pretenderá que el juego toma lugar sólo en H , suponiendo que C está en $\varphi(v) \in V(H)$ cuando esté en $v \in V(G)$ y moviendo a dónde movería según su estrategia en H , si C se mueve de $x \in V(G)$ a $y \in V(G)$ es porque existe la arista xy en G y entonces también la arista $\varphi(x)\varphi(y)$ en H , por lo que el movimiento de $\varphi(x)$ a $\varphi(y)$ sería un movimiento válido para C en H que R tendría contemplado en su estrategia en H . Supongamos que R fue capturado en algún momento habiendo jugado de esta forma y que el desarrollo del juego fue el siguiente: C en v_0 , R en w_0 luego $v_0 \xrightarrow{C} v_1, w_0 \xrightarrow{R} w_1, v_1 \xrightarrow{C} v_2, w_1 \xrightarrow{R} w_2, \dots, v_{n-2} \xrightarrow{C} v_{n-1}, w_{n-2} \xrightarrow{R} w_{n-1}, v_{n-1} \xrightarrow{C} v_n = w_{n-1}$, entonces C en $\varphi(v_0)$, R en w_0 luego $\varphi(v_0) \xrightarrow{C} \varphi(v_1), w_0 \xrightarrow{R} w_1, \varphi(v_1) \xrightarrow{C} \varphi(v_2), w_1 \xrightarrow{R} w_2, \dots, \varphi(v_{n-2}) \xrightarrow{C} \varphi(v_{n-1}), w_{n-2} \xrightarrow{R} w_{n-1}, \varphi(v_{n-1}) \xrightarrow{C} \varphi(v_n) = w_{n-1}$ sería el desarrollo de un juego en H donde R juega con su estrategia ganadora y aun así pierde, lo cual es una contradicción. Por lo tanto R no puede ser capturado si juega como hemos descrito, por lo que $G \in \mathbf{R}$ es decir $G \notin \mathbf{C}$. ■

Capítulo 3

Más policías para el jugador C

Una motivación para aumentar el número de policías que puede utilizar C es que, como hemos visto en la sección 2.2, en las gráficas regulares no completas el ladrón tiene una estrategia para evadir al policía, incluso basta con que una gráfica tenga un ciclo de longitud mayor o igual a cuatro como subgráfica inducida para que el ladrón sea el vencedor. Le daremos al jugador C una mayor oportunidad de capturar al ladrón, permitiendo que tenga a su disposición más de un policía, digamos, un conjunto $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de policías, del cual podrá mover un subconjunto no vacío en cada turno.

Definición. Se llama *número de policías* de una gráfica G al mínimo número de policías con los cuales el jugador C tiene una estrategia para atrapar al ladrón en G , y se escribe $c(G)$.

Por ejemplo, hemos visto que un policía no puede atrapar al ladrón en una gráfica que contenga un ciclo de longitud mayor o igual a cuatro como subgráfica inducida, como es el caso del producto \square de dos árboles con más de 1 vértice, pero en el siguiente teorema vemos que con dos policías se puede atrapar al ladrón en dicho producto.

Lema 3.0.3. *Si T_1 y T_2 son árboles, entonces $c(T_1 \square T_2) = 2$. Suponiendo además que tanto T_1 como T_2 tengan más de 1 vértice.*

Demostración. Sean T_1, T_2 árboles. Supongamos que se juega en $T_1 \square T_2$ y veamos que C tiene una estrategia ganadora si tiene dos policías a su disposición. Primero C_1 se coloca en $(w_0, x_0) \in V(T_1 \square T_2)$ y C_2 en $(y_0, z_0) \in V(T_1 \square T_2)$, supongamos que después de esto R se coloca en $(u_0, v_0) \in V(T_1 \square T_2)$

entonces C jugará primero moviendo a C_1 de acuerdo a su estrategia ganadora de T_1 en la copia de T_1 en $T_1 \square T_2$ en la cual se halla (i.e. $T_1 \times \{x_0\}$) y a C_2 de acuerdo a su estrategia ganadora de T_2 en la copia de T_2 en $T_1 \square T_2$ en la cual se halla (i.e. $\{y_0\} \times T_2$), el primero que termine su estrategia “hará sombra” sobre la coordenada en la cual haya alcanzado al ladrón hasta que el otro también termine, así los dos policías lograrán igualar una de sus proyecciones a la correspondiente del ladrón, entonces C_1 tendrá la proyección sobre T_1 igual a la del ladrón y C_2 la proyección sobre T_2 igual a la del ladrón. A partir de este momento R tendrá que decidir en cada turno si se mueve sobre la copia de T_1 en la que está o se mueve sobre la copia de T_2 en la que está, no puede hacer las dos cosas, entonces de alguna manera los papeles de C_1 y C_2 se invertirán, porque si R decide hacer lo primero, C_1 le hará sombra sobre la primer coordenada y C_2 moverá de acuerdo a su estrategia de T_1 sobre la copia de T_1 en la que están tanto C_2 como R , y si R decide hacer lo segundo C_2 será el que haga sombra sobre la segunda coordenada y C_1 el que mueva de acuerdo a su estrategia de T_2 sobre la copia de T_2 en la que están tanto C_1 como R , así en un número finito de turnos uno de los dos policías atrapará al ladrón. ■

3.1. Buenas noticias para R

Los siguientes resultados favorecen de alguna manera al jugador R , porque nos dicen que, para cada número de policías con que pudiera contar el jugador C existe una gráfica en la cual R resulta vencedor si C utiliza dicho número de policías. Como un paréntesis, esto es parecido a la manera en que Leonidas I de Esparta logra contrarrestar la desventaja de que su ejército es superado en número por el ejército persa, eligiendo un campo de batalla que le favorece.

Lema 3.1.1. *Sea G una gráfica con grado mínimo $\delta(G) \geq n$ para una $n \in \mathbb{N}$ y que no contiene 3 ni 4-ciclos. Entonces todo conjunto dominante de G debe tener n elementos o más, es decir, $\gamma(G) \geq n$.*

Demostración. Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ un conjunto de $n - 1$ vértices de G y $w \notin S$. Dicho w debe existir, pues no se puede tener que $\delta(G) \geq n$ en una gráfica donde sólo hubiese $n - 1$ vértices.

Supongamos sin pérdida de generalidad que la vecindad de w es el conjunto $N(w) = \{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{l-k}\}$, ya que, si en realidad fuera $N(w) =$

$\{v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}, w_1, \dots, w_{l-k}\}$, con la permutación $\{1, 2, \dots, n-1\} \xrightarrow{\sigma} \{1, 2, \dots, n-1\}$ podríamos indexar de nuevo el conjunto de los vértices v_i y volver a empezar. Entonces la vecindad de w es un conjunto de l vértices, por lo tanto $l \geq \delta(G) \geq n \geq 0$ y como $0 \leq k \leq n-1$ se tiene que $l-k \geq n-(n-1) = 1$, es decir, S no es una cubierta.

Afirmamos que $N(w_i) \cap N(w_j) = \{w\}$ siempre que $i \neq j$. Por definición de vecindad $w \in N(w_i)$ para toda $1 \leq i \leq l-k$, por lo tanto $\{w\} \subseteq N(w_i) \cap N(w_j)$ para toda $1 \leq i, j \leq l-k$. Además, si $x \in N(w_i) \cap N(w_j)$ para algún $i, j \in \{1, 2, \dots, l-k\}, i \neq j$ entonces x no puede ser otro que w , porque si suponemos que $x \neq w$ entonces (w, w_i, x, w_j, w) es un 4-ciclo, lo cual es una contradicción porque estamos suponiendo que G no contiene 3 ni 4-ciclos, por lo tanto $x = w$ y $\{w\} = N(w_i) \cap N(w_j)$.

Así, si S fuera un conjunto dominante de G , cada $N(w_i)$, $1 \leq i \leq l-k$, debería contener al menos un v_j y además con $j \geq k+1$ ya que si $j \leq k$ entonces (w, w_i, v_j, w) sería un 3-ciclo y estamos suponiendo que G no contiene 3-ciclos. Dichos vértices junto con $\{v_1, \dots, v_k\}$ suman en total $(l-k) + k = l$ vértices v_i , pero como $l \geq n$ esto es una contradicción, pues sólo eran $n-1$ vértices v_i . ■

Teorema 3.1.2. *Sea G una gráfica con grado mínimo $\delta(G) \geq n$ y que no contiene 3 ni 4-ciclos. Entonces $c(G) \geq n$.*

Demostración. Supongamos que C tiene $n-1$ policías a su disposición.

Por lo tanto, tras el primer movimiento de C , colocando sus $n-1$ policías en, digamos, los vértices $\{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\}$, por el Lema 3.1.1, existe un vértice r tal que $r \neq c_i$ y r no es adyacente a c_i para toda $1 \leq i \leq n-1$ y así R se puede colocar en dicho vértice sin ser atrapado al siguiente movimiento de C .

Supongamos que R ha logrado evitar ser atrapado hasta su movimiento número m y sin peligro de que C lo atrape en su movimiento número $m+1$, supongamos que C colocó los policías en los vértices $\{c'_1, c'_2, \dots, c'_{n-1}\}$ y que la vecindad del vértice donde está R en ese momento es $N(r_m) := \{u_1, \dots, u_s\}$, recordemos que $s \geq \delta(G) \geq n$.

La única forma de que R no pudiera evitar ser atrapado al siguiente movimiento de C es que cada u_i estuviera ocupado por al menos un policía o fuera adyacente a al menos un vértice ocupado por un policía.

Observemos que, en la posición en que se encuentra el juego justo antes de que R haga su movimiento $m+1$, para cada policía se cumple que si

está en un vértice $c'_p, p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ adyacente a algún u_i , éste no puede ser adyacente a algún otro u_j con $i \neq j$, porque $(r_m, u_i, c'_p, u_j, r_m)$ sería un 4-ciclo, y si un policía se encuentra sobre un vértice u_i éste no puede ser adyacente a algún u_j con $i \neq j$ porque (r_m, u_i, u_j, r_m) sería un 3-ciclo.



Figura 3.1: vecindad de r_m

Por lo tanto cada c'_i puede ser adyacente a lo más a un vértice de la vecindad de r_m o estar sobre, a lo más, un vértice de la vecindad de r_m y además no ambas cosas a la vez; como hay $n-1$ policías y al menos n vértices en la vecindad de r_m forzosamente hay un vértice en la vecindad de r_m que no es adyacente a algún vértice ocupado por un policía y tampoco está ocupado por uno, por lo que R puede moverse a ese vértice en su turno $m+1$ con la seguridad de no ser atrapado por C en el movimiento $m+2$ de éste. Por el principio de inducción matemática R puede escapar en cada movimiento suyo, sin que pueda atraparlo C en el siguiente turno. Es decir, $c(G) \geq n$. ■

Teorema 3.1.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una gráfica n -regular sin 3 ni 4-ciclos. Y por lo tanto, para cada n hay una gráfica G con $c(G) \geq n$.*

Demostración. Para $n=1$, K_2 cumple las condiciones, es 1-regular sin 3 o 4-ciclos. Para $n=2$, C_5 cumple las condiciones, es 2-regular y sin 3 ni 4-ciclos, además C_5 es 3-coloreable. Entonces, probaremos por inducción sobre n que existe una gráfica n -regular, 3-coloreable y sin 3 ni 4-ciclos.

Ya hemos probado la base de la inducción ($n=2$). Supongamos que es cierto para algún $k \in \mathbb{N}$ y sean G la gráfica k -regular, 3-coloreable y sin 3 ni 4-ciclos que existe, G_1, G_2 y G_3 tres gráficas isomorfas a G y $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ una buena 3-coloración.

Notemos que dada la coloración f de los vértices de G , se puede inducir una coloración en una gráfica isomorfa a G , digamos G' , como sigue, si $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ es un isomorfismo, definimos la coloración g como: $g(v) = j$ si y sólo si $f(\varphi^{-1}(v)) = j$.

Sean $\varphi_i : V(G) \rightarrow V(G_i)$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ isomorfismos, coloreemos cada G_i con la coloración inducida de esta forma por f y la respectiva φ_i . En lo sucesivo llamaremos a estas coloraciones $f_i : V(G_i) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. También definimos $f_0 := f$ y $G_0 := G$.

Ahora construyamos una gráfica H donde

$V(H) = V(G) \cup V(G_1) \cup V(G_2) \cup V(G_3)$ y si $u, v \in V(H)$, entonces $uv \in E(H)$ si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se satisface (ver Figura 3.2.).

- I. $\left\{ \begin{array}{l} u \in V(G), v \in V(G_1), f(u) = 1 \text{ y } \varphi_1(u) = v \text{ o} \\ u \in V(G_2), v \in V(G_3), f(\varphi_2^{-1}(u)) = 1 \text{ y } \varphi_3(\varphi_2^{-1}(u)) = v \end{array} \right\}$
- II. $\left\{ \begin{array}{l} u \in V(G), v \in V(G_2), f(u) = 2 \text{ y } \varphi_2(u) = v \text{ o} \\ u \in V(G_3), v \in V(G_1), f(\varphi_3^{-1}(u)) = 2 \text{ y } \varphi_1(\varphi_3^{-1}(u)) = v \end{array} \right\}$
- III. $\left\{ \begin{array}{l} u \in V(G), v \in V(G_3), f(u) = 3 \text{ y } \varphi_3(u) = v \text{ o} \\ u \in V(G_1), v \in V(G_2), f(\varphi_1^{-1}(u)) = 3 \text{ y } \varphi_2(\varphi_1^{-1}(u)) = v \end{array} \right\}$
- IV. $uv \in (E(G) \cup E(G_1) \cup E(G_2) \cup E(G_3))$

Las coloraciones f_i a su vez inducen una coloración de los vértices de H , a saber, $\bar{f} := \bigcup f_i : V(H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, sobra decir que esta coloración no tiene por que ser propia.

Dado que las funciones φ_i son isomorfismos, I, II y III dicen que en H cada vértice de color 1, 2, y 3 respectivamente es adyacente a un único vértice del mismo color en una copia distinta de G , el cual es imagen del vértice bajo alguno de los isomorfismos definidos o sus inversos, y IV dice que las aristas originales de G están copiadas en cada copia de G , y como G es k -regular entonces H es $(k + 1)$ -regular. Además, dada una copia de G en H , todas las aristas cuyos extremos son de un determinado color salen a otra única copia de G en H , por ejemplo para la copia de G_2 en H , las aristas cuyos extremos son de color 1 inciden en los vértices de la copia de G_3 , las aristas cuyos extremos son de color 2 inciden en los vértices de la copia de G_0 y las aristas cuyos extremos son de color 3 inciden en los vértices de la copia de G_1 .

Ahora veamos que en H no hay 3 ni 4-ciclos, por comodidad denotaremos G_H al conjunto de las copias de G, G_1, G_2, G_3 en H .

Veamos que no puede haber un 3-ciclo, supongamos que hay un 3-ciclo (a, b, c, a) .

No pueden estar los tres vértices del ciclo en los vértices de la misma $G_\alpha \in G_H$ porque por hipótesis de inducción en G no hay 3-ciclos y cada G_i es isomorfa a G .

No puede haber un 3-ciclo tal que 2 de sus vértices, a, b , están en los vértices de $G_\alpha \in G_H$ y el otro, c , en los de $G_\beta \in G_H$ con $G_\alpha \neq G_\beta$ porque si existiera tal ciclo, por la definición de H existiría un isomorfismo $\Phi : V(G_\alpha) \rightarrow V(G_\beta)$ tal que $\Phi(a) = c = \Phi(b)$ con $a \neq b$ lo cual es absurdo.

No puede haber un 3-ciclo con cada uno de sus vértices en los vértices de distintos elementos de G_H , digamos $a \in V(G_\alpha), b \in V(G_\beta)$ y $c \in V(G_\gamma)$, porque por un lado esto quiere decir que por estar en vértices de diferentes elementos de G_H y estar unidos por una arista a, b y c tienen el mismo color asignado por las coloraciones inducidas por f , por otro lado los vértices de una gráfica G_δ en G_H de un determinado color se unieron a vértices del mismo color, pero de una única gráfica en G_H distinta de G_δ . Entonces tenemos que $G_\alpha = G_\beta$ o $G_\beta = G_\gamma$ o $G_\gamma = G_\alpha$ pero esto es una contradicción, pues estamos suponiendo que son distintas entre sí.

Como ningún caso es posible, no puede haber 3-ciclos.

Veamos que no puede haber un 4-ciclo, pues si hubiera uno, digamos (a, b, c, d, a) .

No pueden estar los cuatro vértices en un mismo elemento de G_H porque por hipótesis de inducción en G no hay 4-ciclos y cada G_i es isomorfa a G .

No pueden estar tres de sus vértices en un elemento de G_H y el cuarto en otro distinto, porque si supusieramos sin pérdida de generalidad que $a, b, c \in V(G_\alpha), G_\alpha \in G_H$ y $d \in V(G_\beta), G_\beta \in G_H, G_\alpha \neq G_\beta$, por la definición de H esto querría decir que bajo un isomorfismo $\Phi : V(G_\alpha) \rightarrow V(G_\beta), a \neq c$ y $\Phi(a) = d = \Phi(c)$ lo cual es una contradicción.

No pueden estar dos de sus vértices en los vértices de un elemento y dos en los de otro elemento de G_H , porque si fuera así tendríamos dos casos posibles: que los vértices que están en los vértices de un mismo elemento de G_H sean adyacentes en el ciclo o que no lo sean. En el primer caso podríamos suponer sin pérdida de generalidad que $a, b \in V(G_\alpha)$ y que $c, d \in V(G_\beta)$, pero como estamos suponiendo que las aristas $\{b, c\}, \{a, d\} \in E(H)$ esto querría decir que las coloraciones inducidas por f asignan el mismo color a todos los vértices del ciclo lo cual es una contradicción ya que las aristas

$\{a, b\} \in E(G_\alpha)$ y $\{c, d\} \in E(G_\beta)$. En el segundo caso podríamos suponer sin pérdida de generalidad que $a, c \in V(G_\alpha)$ y que $b, d \in V(G_\beta)$ pero esto sólo podría pasar si para un isomorfismo $\Phi : V(G_\alpha) \rightarrow V(G_\beta)$ se tuviera que $\Phi(a) = b = d = \Phi(c)$ lo cual es absurdo.

No pueden estar dos de sus vértices en los vértices de un mismo elemento de G_H y otros dos en los de otros dos distintos, porque si así fuera, habría dos casos, que los vértices que están en los vértices de un mismo elemento sean adyacentes en el ciclo o que no lo sean. En el primer caso podríamos suponer sin pérdida de generalidad que $a \in V(G_\alpha), b \in V(G_\beta)$ y $c, d \in V(G_\gamma)$, pero esto sólo podría pasar si a y b tuvieran el mismo color, d y a tuvieran el mismo color y b y c tuvieran el mismo color, es decir, si todos los vértices del ciclo tuvieran el mismo color asignado por las coloraciones inducidas por f , sin embargo esto no puede suceder puesto que la arista $\{c, d\} \in E(G_\alpha)$ en donde la coloración inducida por f es propia. En el segundo caso podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \in V(G_\alpha), c \in V(G_\beta)$ y $b, d \in V(G_\gamma)$ pero esto sólo podría suceder si para el isomorfismo $\Phi : V(G_\alpha) \rightarrow V(G_\gamma)$ se tuviera que $\Phi(a) = d$ y $\Phi(a) = b$, lo cual es absurdo, pues $d \neq b$.

No pueden estar cada vértice en los vértices de un elemento distinto G_H , digamos $a \in V(G_\alpha), b \in V(G_\beta), c \in V(G_\gamma)$ y $d \in V(G_\delta)$ porque esto querría decir que a, b y d tienen el mismo color asignado por la coloración inducida por f pues $\{a, d\}, \{a, b\} \in E(H)$ pero entonces G_β y G_δ deberían de ser la misma gráfica, lo cual sería una contradicción.

Siendo estas todas las posibles distribuciones de los vértices del ciclo en los vértices de los elementos de G_H , podemos concluir que no hay 4-ciclos en H .

Ahora daremos una 3-coloración propia de los vértices de H aprovechando la coloración \bar{f} que tenemos inducida por f . Para lo cual introduciremos las permutaciones cuya expresión en ciclos ajenos es la siguiente: $\sigma_0 = (1)(2)(3), \sigma_1 = (1\ 3)(2), \sigma_2 = (1\ 2)(3), \sigma_3 = (2\ 3)(1)$. Entonces definiremos la coloración $h : V(H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ como $h(v) = \sigma_i(f_i(v))$ si v pertenece a los vértices de la copia de G_i en H . Veamos que esta nueva coloración es propia.

Si $v, w \in V(H)$ son tales que $vw \in E(H)$, hay varios casos. Si v y w son vértices de una misma $G_\alpha \in G_H$ como las coloraciones f_i son coloraciones propias y σ_i sólo intercambia de color dos clases cromáticas, es claro que $h(v) \neq h(w)$. Si $v \in V(G_\alpha)$ y $w \in V(G_\beta)$ con $G_\alpha \neq G_\beta$, observemos que por la definición de h sólo el color de uno de los dos vértices ha cambiado respecto al que tenía asignado por la coloración $\bigcup f_i$, ver Figura 3.2, por otro

lado como v y w son adyacentes en H y pertenecen a vértices de distintos elementos de G_H reciben el mismo color en la coloración $\bigcup f_i$, por lo cual reciben distinto color en la coloración h . Por lo tanto h es una 3-coloración propia de H .

Luego, por el principio de inducción matemática queda probado el teorema. ■

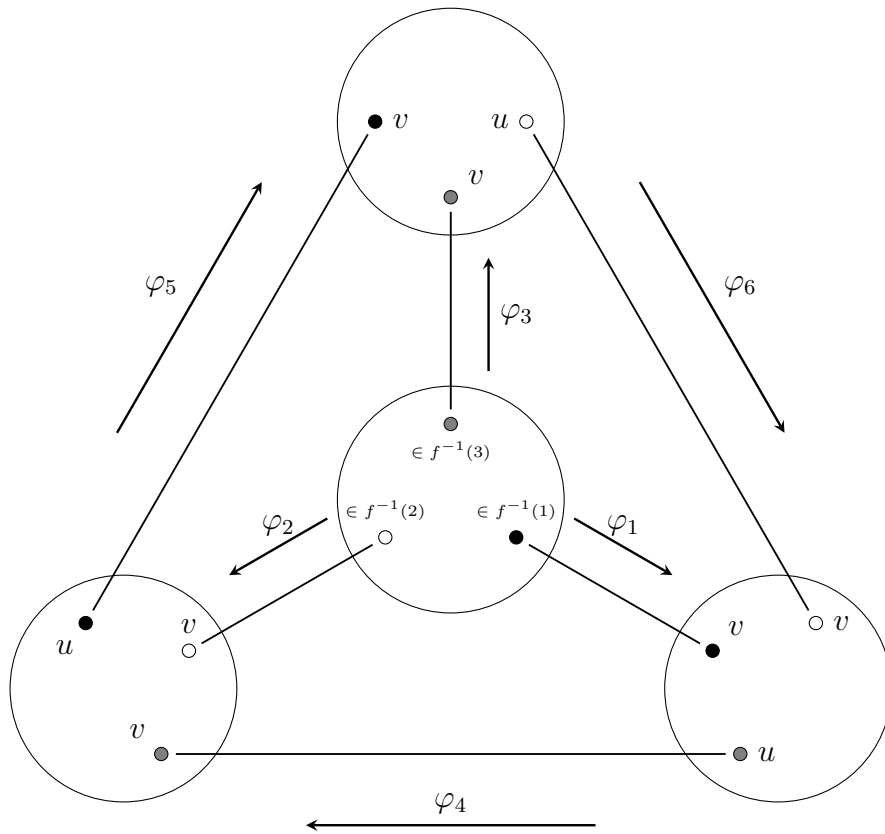


Figura 3.2: Construcción de la gráfica H .

3.2. Buenas noticias para C

Los siguientes teoremas son buenas noticias para C en el sentido de que hay algunas gráficas en las que puede economizar personal, pues basta con tres o menos policías para poder capturar al ladrón.

Sea G una gráfica con $\Delta(G) \leq 3$. Supongamos que después de un movimiento de C los policías C_1, C_2 y C_3 ocupan los vértices x_1, x_2 y x_3 y el ladrón ocupa el vértice r , como la gráfica es conexa, existen caminos de cada vértice x_i a cada uno de los vecinos de r , por lo cual existe al menos una terna de caminos P_i , $i = 1, 2, 3$ que van de x_i a r y tales que cada arista incidente en r es la última arista de algún P_i . Llamemos $P(x_1, x_2, x_3, r)$ al conjunto de todas las ternas de caminos tales que cada arista incidente en r es la última arista de algún camino de la terna.

Si $P_1, P_2, P_3 \in P(x_1, x_2, x_3, r)$ es una terna de caminos tal que la suma de sus longitudes es la mínima de entre todas las sumas de las longitudes de todas las ternas de caminos en $P(x_1, x_2, x_3, r)$ definimos $l(x_1, x_2, x_3, r) := l_1 + l_2 + l_3$, donde $l_i := \ell(P_i)$.

Lema 3.2.1. *Sea G una gráfica con $\Delta(G) \leq 3$ y supongamos que cualesquiera dos aristas adyacentes están contenidas en un ciclo cuya longitud es a lo más 5. Si después de un turno de C los policías C_1, C_2, C_3 están colocados en los vértices c_1, c_2, c_3 respectivamente y el ladrón ocupa el vértice r , entonces para cualquier $r' \in N(r) \cup \{r\}$ se tiene que $l(c'_1, c'_2, c'_3, r') < l(c_1, c_2, c_3, r)$ para algunos $c'_i \in N(c_i)$.*

Demostración. Por brevedad haremos $l := l(c_1, c_2, c_3, r)$ y $l' := l(c'_1, c'_2, c'_3, r')$. Sean $P_1, P_2, P_3 \in P(x_1, x_2, x_3, r)$ caminos tales que $l = l_1 + l_2 + l_3$ donde $l_i = \ell(P_i)$.

Caso 1. Supongamos que r es adyacente a tres vértices a_1, a_2, a_3 con $P_1 = (c_1 = x_1, x_2, \dots, a_1 = x_{\alpha-1}, x_\alpha = r)$, $P_2 = (c_2 = y_1, y_2, \dots, a_2 = y_{\beta-1}, y_\beta = r)$, $P_3 = (c_3 = z_1, z_2, \dots, a_3 = z_{\gamma-1}, z_\gamma = r)$. Entonces los únicos posibles movimientos de R son quedarse en el mismo vértice o moverse hacia algún a_i . En cualquier caso C moverá c_1 a x_2 , c_2 a y_2 y c_3 a z_2 , así si:

Caso 1.1. R permanece en el mismo vértice, definimos $P'_1 := (c'_1 = x_2, x_3, \dots, a_1 = x_{\alpha-1}, x_\alpha = r)$, $P'_2 := (c'_2 = y_2, y_3, \dots, a_2 = y_{\beta-1}, y_\beta = r)$, $P'_3 := (c'_3 = z_2, z_3, \dots, a_3 = z_{\gamma-1}, z_\gamma = r)$. Como estos son caminos que van de los vértices c'_i al vértice donde está R y ocupan entre los tres caminos cada una de las aristas incidentes en el vértice donde está R tenemos que $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + (l_3 - 1) < l$.

Caso 1.2. R se mueve a alguno de sus vecinos, podemos realizar nuestro análisis suponiendo sin pérdida de generalidad que R se mueve a a_1 ahora tenemos 2 subcasos:

Caso 1.2.1. $l_1 < 2$ entonces, si $l_1 = 0$, entonces C ya ha atrapado a R , y si $l_1 = 1$, $P_1 = (c_1, r)$, es decir, $c_1 = a_1$ y por lo tanto R se entregó.

Caso 1.2.2. Si $l_1 \geq 2$ entonces de nuevo tenemos casos:

Caso 1.2.2.1. Que $d_G(a_1) = 1$, pero esto quiere decir que $\{r, a_1\}$ sería la única arista incidente en a_1 y en consecuencia $P_1 = (a_1, r)$ estaríamos en el caso 1.2.1, lo cual es una contradicción, por lo tanto este caso no se puede dar.

Caso 1.2.2.2. Si $d_G(a_1) = 2$, definimos los caminos: $P'_1 := (c'_1 = x_2, x_3, \dots, x_{\alpha-2}, a_1 = x_{\alpha-1})$, $P'_2 := (c''_2 = y_2, y_3, \dots, a_2 = y_{\beta-1}, r = y_{\beta}, a_1)$, $P'_3 := (c'_3 = z_2, z_3, \dots, a_3 = z_{\gamma-1}, r = z_{\gamma}, a_1)$, observemos que $x_{\alpha-2}$ es distinto de r ya que lo contrario contradiría la elección de $\{P_1, P_2, P_3\}$, entonces $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + l_2 + l_3 < l$.

Caso 1.2.2.3. Si $d_G(a_1) = 3$, sea u el vértice adyacente a a_1 en G que no es adyacente a a_1 en P_1 . Por hipótesis el camino (r, a_1, u) está contenido en un ciclo de longitud menor o igual a 5. Como $d_G(r) \leq \Delta(G) = 3$, a dicho ciclo debe pertenecer la arista $\{r, a_2\}$ o la arista $\{r, a_3\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es la arista $\{r, a_2\}$. Llamaremos S al ciclo. La longitud de S puede ser 3, 4 ó 5.

Si $\ell(S) = 3$, como $\{r, a_1\}$ y $\{r, a_2\}$ pertenecen al ciclo, necesariamente $\{a_1, a_2\}$ debe ser la tercera arista del ciclo, entonces definimos $P'_1 := c'_1 P_1 a_1$, $P'_2 := c'_2 P_2 a_2 \cup \{a_2, a_1\}$, $P'_3 := c'_3 P_3 r \cup \{r, a_1\}$. Estos caminos usan todas las aristas incidentes a a_1 , que es donde se encuentra R , entonces, $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + (l_2 - 1) + l_3 < l$.

Si $\ell(S) = 4$, $\{u, a_1\}$, $\{a_1, r\}$, $\{r, a_2\}$ son aristas del ciclo, por lo tanto $\{a_2, u\}$ debe ser la cuarta arista del ciclo, entonces definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 a_1)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 a_2) \cup (a_2, u, a_1)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 r) \cup (r, a_1)$ que son tres trayectorias que usan las 3 aristas incidentes en el vértice donde se encuentra R , por lo tanto $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + l_2 + l_3 < l$.

Si $\ell(S) = 5$ sabemos que las aristas $\{u, a_1\}$, $\{a_1, r\}$, $\{r, a_2\}$ pertenecen al ciclo, sea v el quinto vértice del ciclo, adyacente obviamente a a_2 y u , entonces los caminos $P'_1 := c'_1 P_1 a_1$, $P'_2 := c'_2 P_2 a_2 \cup (a_2, v, u, a_1)$, $P'_3 := c'_3 P_3 r \cup \{r, a_1\}$ ocupan las tres aristas incidentes en a_1 , por lo tanto $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + (l_2 + 1) + l_3 < l$.

Caso 2. Supongamos que r es adyacente a sólo dos vértices a_1, a_2 , entonces dos de los tres caminos llegan a r por una misma arista, supongamos sin pérdida de generalidad que es por $\{a_2, r\}$, con $P_1 = (c_1 = x_1, x_2, \dots, a_1 = x_{\alpha-1}, x_\alpha = r)$, $P_2 = (c_2 = y_1, y_2, \dots, a_2 = y_{\beta-1}, y_\beta = r)$, $P_3 = (c_3 = z_1, z_2, \dots, a_2 = z_{\gamma-1}, z_\gamma = r)$ y de nuevo C moverá c_1 a x_2 , c_2 a y_2 y c_3 a z_2 en cualquiera de los siguientes casos:

Caso 2.1. R permanece en el mismo vértice, entonces definimos $P'_1 := (c'_1 = x_2, x_3, \dots, a_1 = x_{\alpha-1}, x_\alpha = r)$, $P'_2 := (c'_2 = y_2, y_3, \dots, a_2 = y_{\beta-1}, y_\beta = r)$, $P'_3 := (c'_3 = z_2, z_3, \dots, a_2 = z_{\gamma-1}, z_\gamma = r)$ que por la elección de P_1, P_2 , y P_3 ocupan las dos aristas incidentes en r , por lo tanto $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + (l_3 - 1) < l$.

Caso 2.2. R se mueve a algún vecino de r , ahora debemos analizar los dos casos:

Caso 2.2.1. R se mueve a a_1 .

Caso 2.2.1.1. Si $l_1 < 2$, el razonamiento es análogo al del caso 1.2.1.

Caso 2.2.1.2. Si $l_1 \geq 2$ tenemos de nuevo casos:

Caso 2.2.1.2.1. Que $d_G(a_1) = 1$, aquí el razonamiento es el mismo que en 1.2.2.1.

Caso 2.2.1.2.2. Que $d_G(a_1) = 2$, ahora definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 a_1)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 r) \cup (r, a_1)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 r) \cup (r, a_1)$, análogamente al caso 1.2.2.2 se tiene que $r \neq x_{\alpha-2}$ por lo que $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + l_2 + l_3 < l$.

Caso 2.2.1.2.3. O que $d_G(a_1) = 3$, sea u el vértice adyacente a a_1 en G que no es adyacente a a_1 en P_1 . Entonces (u, a_1, r) debe estar contenido en un ciclo, S , de longitud menor o igual que 5.

Si $\ell(S) = 3$, entonces $u = a_2$ pues r ya es adyacente a a_1, a_2 y $d_G(r) = 2$, entonces a_1 es adyacente a a_2 , definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 a_1)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 a_2) \cup (a_2, a_1)$ y $P'_3 := (c'_3 P_3 r) \cup (r, a_1)$ y se tiene que $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + (l_2 - 1) + l_3 < l$.

Si $\ell(S) = 4$, hay dos posibilidades: que $y_{\beta-2} = z_{\gamma-2}$, por lo que podemos definir $P'_1 := (c'_1 P_1 a_1)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 a_2) \cup (a_2, u, a_1)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 a_2) \cup (a_2, r, a_1)$ y así $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + l_2 + l_3 < l$.

O si $y_{\beta-2} \neq z_{\gamma-2}$ que u sea el vértice $y_{\beta-2}$ o $z_{\gamma-2}$, suponemos sin perder generalidad que $u = y_{\beta-2}$ y definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 a_1)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 u) \cup (u, a_1)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 r) \cup (r, a_1)$ por lo que se tiene que $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + (l_2 - 2) + l_3 < l$.

Si $\ell(S) = 5$, a_2, r, a_1 y u pertenecen al ciclo, llamemos v al quinto vértice del ciclo, entonces hay dos casos similares a los del caso anterior: o bien $y_{\beta-2} = z_{\gamma-2}$, definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 a_1)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 a_2) \cup (a_2, v, u, a_1)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 r) \cup (r, a_1)$ y así $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + (l_2 + 1) + l_3 < l$.

O bien $y_{\beta-2} \neq z_{\gamma-2}$ pero v es $y_{\beta-2}$ o $z_{\gamma-2}$, suponemos sin pérdida de generalidad que $v = y_{\beta-2}$ y definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 a_1)$, $P'_2 := (c'_2 P_1 v) \cup (v, u, a_1)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 r) \cup (r, a_1)$ y así $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = (l_1 - 2) + (l_2 - 1) + l_3 < l$.

Caso 2.2.2. R se mueve a a_2 .

Caso 2.2.2.1. Si $l_2 < 2$ o $l_3 < 2$ el ladrón ya había sido atrapado o se entregó al moverse a a_2 .

Caso 2.2.2.2. Si $l_2 \geq 2$ y $l_3 \geq 2$, dependiendo del grado de a_2 tenemos los siguientes casos:

Caso 2.2.2.2.1. Si $d_G(a_2) = 1$ se tiene el caso 2.2.2.1.

Caso 2.2.2.2.2. Si $d_G(a_2) = 2$ entonces a_2 sólo es adyacente a $y_{\beta-2} = z_{\gamma-2}$ y a r y definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 r) \cup (r, a_2)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 a_2)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 a_2)$ por lo que $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = l_1 + (l_2 - 2) + (l_3 - 2) < l$.

Caso 2.2.2.2.3. Si $d_G(a_2) = 3$ y $y_{\beta-2} \neq z_{\gamma-2}$ entonces a_2 es adyacente sólo a $r, y_{\beta-2}$ y $z_{\gamma-2}$ y definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 r) \cup (r, a_2)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 a_2)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 a_2)$ por lo que $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = l_1 + (l_2 - 2) + (l_3 - 2) < l$.

Caso 2.2.2.2.4. Si $d_G(a_2) = 3$ y $y_{\beta-2} = z_{\gamma-2}$ sea u el vértice que es adyacente a a_2 y no es r ni $z_{\gamma-2}$, por hipótesis la trayectoria $(u, a_2, z_{\gamma-2})$ está contenida en un ciclo S de longitud menor o igual que 5.

Si $\ell(S) = 3$, definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 r) \cup (r, a_2)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 z_{\gamma-2}) \cup (z_{\gamma-2}, u, a_2)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 a_2)$, entonces $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = l_1 + (l_2 - 1) + (l_3 - 2) < l$.

Si $\ell(S) = 4$, entonces el cuarto vértice del ciclo puede ser $y_{\beta-3}$ o $z_{\gamma-3}$, si suponemos sin pérdida de generalidad que es $y_{\beta-3}$ definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 r) \cup (r, a_2)$, $P'_2 := (c'_2 P_2 y_{\beta-3}) \cup (y_{\beta-3}, u, a_2)$, $P'_3 := (c'_3 P_3 a_2)$ entonces $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = l_1 + (l_2 - 2) + (l_3 - 2) < l$.

Si $\ell(S) = 5$, llamemos v y w a los otros vértices del ciclo, estos vértices no pueden ser ni $y_{\beta-i}$ ni $z_{\gamma-i}$ para $i > 3$ porque contradiría la elección de P_2 o P_3 ya que se podría encontrar una terna de trayectorias que utilizaran las aristas incidentes en r y cuyas longitudes sumasen menos.

Lo que puede suceder si $y_{\beta-3} \neq z_{\gamma-3}$ es que uno de los vértices, digamos v , no pertenezca a $V(P_2) \cup V(P_3)$ lo que forzaría a w a ser o bien $y_{\beta-3}$ o bien $z_{\gamma-3}$, suponemos sin perder generalidad que $w = y_{\beta-3}$ y definimos $P'_1 :=$

$(c'_1 P_1 r) \cup (r, a_2), P'_2 := (c'_2 P_2 y_{\beta-3}) \cup (y_{\beta-3}, v, u, a_2), P_3 := (c'_3 P_3 a_2)$, entonces $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = l_1 + (l_2 - 1) + (l_3 - 2) < l$.

También si $y_{\beta-3} \neq z_{\gamma-3}$, puede suceder que uno de los vértices del ciclo sea $y_{\beta-3}$ y el otro $z_{\gamma-3}$, sin pérdida de generalidad suponemos que u es adyacente a $y_{\beta-3}$ en el ciclo y definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 r) \cup (r, a_2), P'_2 := (c'_2 P_2 y_{\beta-3}) \cup (y_{\beta-3}, u, a_2), P_3 := (c'_3 P_3 a_2)$, entonces $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = l_1 + (l_2 - 2) + (l_3 - 2) < l$.

Si $y_{\beta-3} = z_{\gamma-3}$ el único caso posible es que el ciclo sea $(a_2, r, a_1 = v, w, y_{\beta-2}, a_2)$ y como $d_G(a_1) \leq 3$ se debe tener que $a_1 = c_1$, definimos $P'_1 := (c'_1 P_1 r) \cup (r, a_2), P'_2 := (c'_2 P_2 a_2), P_3 := (c'_3 P_3 y_{\beta-2}) \cup (y_{\beta-2}, w, a_1, u, a_2)$, entonces $l' \leq \ell(P'_1) + \ell(P'_2) + \ell(P'_3) = l_1 + (l_2 - 2) + (l_3 + 1) < l$.

Y esos son todos los casos, porque r no puede ser adyacente a sólo un vértice, digamos a_1 , a menos de que G fuera sólo la arista $\{r, a_1\}$, porque si $d_G(a_1) > 1$ entonces existe un vértice x tal $\{a_1, x\} \in E(G)$, pero esto quiere decir que hay un ciclo que contiene ese par de aristas adyacentes y por lo tanto $d_G(r) \geq 2$. ■

Teorema 3.2.2. *Sea G una gráfica con $\Delta(G) \leq 3$ y supongamos que cualesquiera dos aristas adyacentes están contenidas en un ciclo cuya longitud es a lo más 5. Entonces $c(G) \leq 3$.*

Demostración. Veamos que con tres policías es suficiente para atrapar al ladrón. Supongamos que C coloca sus policías C_1, C_2 y C_3 en los vértices c_1^0, c_2^0 y c_3^0 y el ladrón ocupa el vértice r^0 , diremos cuales serán los vértices a los que se irá moviendo en cada turno C de manera inductiva, supongamos que después de un movimiento de C los policías C_1, C_2 y C_3 están colocados en c_1^i, c_2^i y c_3^i respectivamente y R en r^i , y supongamos que R se mueve a r^{i+1} , por el Lema 3.2.1 existen $c_1^{i+1} \in N(c_1^i), c_2^{i+1} \in N(c_2^i)$ y $c_3^{i+1} \in N(c_3^i)$ tales que $l(c_1^{i+1}, c_2^{i+1}, c_3^{i+1}, r^{i+1}) < l(c_1^i, c_2^i, c_3^i, r^i)$, entonces estos son justamente los vértices a los que moverá C sus policías, por lo que eventualmente para algún $j \in \mathbb{N}$ se tendrá que $l(c_1^j, c_2^j, c_3^j, r^j) < 3$ lo cual quiere decir que C atrapa al ladrón. ■

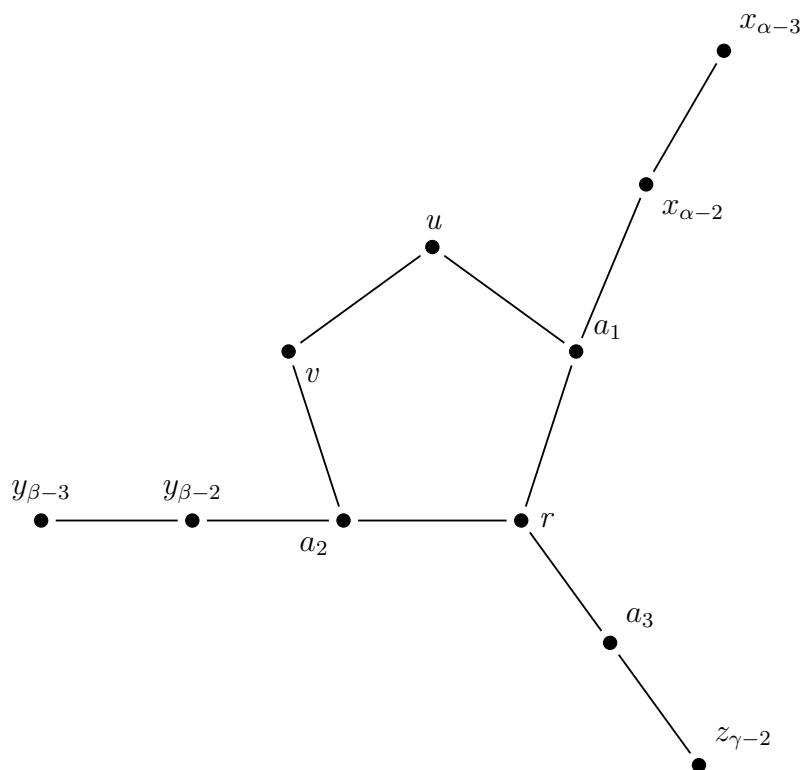


Figura 3.3: Caso $d_G(r) = 3$, $d_G(a_1) = 3$ y $\ell(S) = 5$

Capítulo 4

La situación en las gráficas planas

Las gráficas planas se han caracterizado por ser una familia donde es fácil encontrar la solución a problemas que en general resultan bastante complicados. Un ejemplo de esto es el problema de la k -coloración: si G es una gráfica arbitraria y $k \geq 4$ es un entero, determinar si una gráfica arbitraria tiene una k -coloración es, en general, un trabajo titánico. Sin embargo, el mismo problema resulta trivial para una gráfica plana, pues toda gráfica plana puede 4-colorearse. Es por este motivo que, al enfrentarnos a un problema nuevo, resulta natural preguntar la dificultad de éste en una gráfica plana.

Este capítulo está dedicado a demostrar que el jugador C puede ganar utilizando a lo más 3 policías en una gráfica plana.

4.1. Herramientas Preliminares

Proposición 4.1.1. *Sea G una gráfica y $x, y \in V(G)$. Si P es una trayectoria de longitud mínima entre x y y , yz es un vértice intermedio en la trayectoria, entonces xPz es una trayectoria de longitud mínima de x a z , y zPy es una trayectoria de longitud mínima de z a y .*

Demostración. (Por contrapositiva) Sea P una xy -trayectoria y z un vértice intermedio en la trayectoria, y supongamos que xPz o zPy no es de longitud mínima, (haremos la demostración suponiendo que xPz no es de longitud mínima, el caso en que zPy no es de longitud mínima es completamente análogo). Sea P_1 una xz -trayectoria de longitud mínima, entonces $(xP_1z) \cup (zPy)$ es una xy -trayectoria y $\ell((xP_1z) \cup (zPy)) = \ell(xP_1z) +$

$\ell(zPy) < \ell(xPz) + \ell(zPy) = \ell(P)$ por lo tanto P no es una xy -trayectoria de longitud mínima. ■

Proposición 4.1.2. *Sea G una gráfica y x, y en $V(G)$. Si P es una trayectoria de longitud mínima entre x y y , y z_1, z_2 son vértices intermedios en la trayectoria, entonces z_1Pz_2 es una trayectoria de longitud mínima.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que z_1 está entre x y z_2 , entonces por el Lema 4.1.1 xPz_2 es una trayectoria de longitud mínima, volviendo a aplicar el Lema 4.1.1 a esta trayectoria y al vértice intermedio z_1 se obtiene que $z_1(xPz_2)z_2 = z_1Pz_2$ es una trayectoria de longitud mínima. ■

Teorema 4.1.3. *Sean G una gráfica, u, v en $V(G)$ con $u \neq v$ y $P = (u, v_1, v_2, \dots, v_t = v)$ una trayectoria de longitud mínima entre u y v . Supongamos que el jugador C cuenta con al menos 2 policías, entonces uno de los policías se puede colocar en P y lograr, tras un número finito de movimientos, estar a menor o igual distancia de cada uno de los vértices de P que el ladrón. Observemos que esto en particular quiere decir que R sería atrapado en cuanto se colocara sobre un vértice de P .*

Demostración. Probaremos primero que C puede lograr, en un número finito de movimientos la siguiente desigualdad:

$$d(r, z) \geq d(c, z), \text{ para todo } z \in V(P) \quad (*)$$

donde c es el vértice donde se halle C_1 y r el vértice donde se halle R , C_1 es uno de los policías de C .

Lo primero que debe hacer C es colocar al policía C_1 sobre un vértice de P , lo cual puede hacer sin ningún problema en un número finito de movimientos, pues G es conexa. Cuando C_1 está finalmente en un vértice $c \in P$, si C_1 no está en alguno de los extremos de la trayectoria, entonces divide a la trayectoria en tres partes, a saber, lo que serían las componentes conexas de $P - c$ y c con las aristas de P incidentes en c . Si se cumple la desigualdad (*) habremos terminado. Supongamos que es el turno de C y que existe un z_0 en $V(P)$ tal que $d(r, z_0) < d(c, z_0)$, si C_1 divide a la trayectoria como hemos descrito arriba, z_0 debe estar en alguna de las componentes de $P - c$, llamemos A a dicha componente y B a la componente en la cual no está z_0 , entonces no puede haber un z_1 en los vértices de B tal que $d(r, z_1) < d(c, z_1)$,

ya que si lo hubiera $d(z_0, z_1) \leq d(z_0, r) + d(r, z_1) < d(z_0, c) + d(z_1, c)$, donde la primera desigualdad es la desigualdad del triángulo, pero por el Corolario 4.1.2 z_0Pc y cPz_1 son caminos de longitud mínima y por lo tanto $d(z_0, c) + d(z_1, c) = d(z_0, z_1)$, pero esto implica que $d(z_0, z_1) < d(z_0, z_1)$ lo cual es una contradicción. Dicho de otro modo, si hay un vértice z_0 en una de las componentes en que divide C_1 a P que cumpla $d(r, z_0) < d(c, z_0)$, entonces todos los vértices z en la otra componente cumplen $d(z, r) \geq d(z, c)$, por lo tanto C_1 puede avanzar por la trayectoria P hacia z_0 , y en cada turno, si aún hay un vértice que no cumpla la desigualdad *, avanzará en la dirección de dicho vértice.

¿Podría, tras un movimiento de C , pasar de ser una a ser la otra componente en la cual hallamos vértices que no cumplen la desigualdad * ?. Si fuera así, los vértices z en $V(P)$ que no cumplen * antes del movimiento de C_1 deberán cumplir necesariamente $d(z, c) = d(z, r) + 1$ justo antes de que C_1 realice su movimiento, avanzando hacia ellos, ya que C_1 sólo puede reducir la distancia a estos vértices en una arista y no puede haber vértices que no cumplan * en las dos componentes. Es decir, si suponemos que c es el vértice donde está C_1 justo antes de dicho movimiento y c' es el vértice donde se encuentra justo después del movimiento tenemos que, si z es un vértice tal que $d(c, z) > d(r, z)$ y $d(c', z) \leq d(r, z)$, como $d(c', z) = d(c, z) - 1$ entonces $d(r, z) = d(c, z) - 1$, o sea que llega un momento en el que los únicos vértices z en $V(P)$ que no cumplen *, cumplen $d(r, z) + 1 = d(c, z)$.

Además, si hay un vértice z_2 tal que $d(z_2, c) = d(z_2, r) + 1$ en una componente (digamos en A), no sólo se tendrá $d(r, z) \geq d(c, z)$ para todo vértice z en la otra componente (B), sino $d(r, z) > d(c, z)$, ya que si hubiera un z_3 para el cual se diera la igualdad, implicaría que $d(z_2, z_3) \leq d(z_2, r) + d(r, z_3) = d(z_2, c) - 1 + d(z_3, c)$ pero nuevamente por la Proposición 4.1.1 $d(z_2, c) - 1 + d(z_3, c) = d(z_2, z_3) - 1$, y tendríamos que $d(z_2, z_3) \leq d(z_2, z_3) - 1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $d(r, z) > d(c, z)$ para todo z en los vértices de B . Lo cual quiere decir que C_1 puede avanzar sobre P en la dirección de z_2 logrando así que $d(z_2, c) = d(z_2, r)$ y los vértices en la componente donde no estaba z_2 , más el vértice que abandona C_1 , cumplan *. ■

4.2. Tres policías son suficientes

Procederemos ahora a demostrar el resultado principal del capítulo.

Teorema 4.2.1. *Para toda gráfica plana G se tiene que $c(G) \leq 3$.*

Demostración. Sea G una gráfica plana. La idea de la prueba es que a cada cierto número de movimientos del juego le llamaremos etapa i y le asignaremos una determinada subgráfica R_i que será el complemento de una gráfica cuyos vértices serán los vértices a los cuales estemos seguros, por medio de un razonamiento que describiremos, que no pueda entrar el ladrón sin pasar por un vértice ocupado por un policía, es decir, vértices t para los cuales cualquier rt -camino contenga al menos un vértice ocupado por un policía y, análogamente, sus aristas serán aquellas a las cuales sepamos, por un razonamiento que describiremos abajo, que R no pueda acceder. Luego demostraremos que $R_{i+1} \subsetneq R_i$. Por lo tanto, eventualmente una subgráfica R_j será la gráfica vacía.

Describiremos la estrategia que deberá seguir C y cual será la i -ésima etapa recursivamente.

Al inicio C colocará los tres policías en algún vértice u_0 , luego R hará su movimiento colocándose en algún otro vértice r_0 , donde termina la etapa 0, y definiremos R_0 como la componente conexa de $G - u_0$ tal que r_0 es uno de sus vértices. Si u_0 es un vértice de corte, R no puede moverse de un vértice de una componente a un vértice de una componente distinta, pues todos los caminos de uno al otro contienen al vértice u_0 .

Definimos las siguientes situaciones, suponiendo que es el turno de C :

Situación (a).- Alguno de los policías C_α está en un vértice u , R en un vértice r y R_i es la componente conexa de $G - u$ de la cual r es un vértice. Obsérvese que ésta es la situación en la etapa 0, y que de nuevo, R no puede acceder al resto de las componentes mientras haya un policía en u , porque todos los caminos que comunican una componente con otra contienen a u .

Situación (b).- Para $u, v \in V(G)$, P_1 y P_2 son dos uv -caminos tales que $\ell(P_1), \ell(P_2) \geq 1$ internamente ajenos. Por la planaridad de G y el Teorema de la Curva de Jordan, $P_1 \cup P_2$ divide a G en tres partes, a saber, $P_1 \cup P_2$, una región interior y una región exterior. El jugador R se encuentra en un vértice de la región interior, a la que denotaremos $I_{P_1 \cup P_2}$, o en un vértice de la región exterior, a la que denotaremos $E_{P_1 \cup P_2}$. Si $R \in V(E_{P_1 \cup P_2})$, P_1 es un uv -camino de longitud mínima en $P_1 \cup P_2 \cup E_{P_1 \cup P_2}$, P_2 es un uv -camino de longitud mínima entre todos los uv -caminos que son internamente ajenos con P_1 en $P_1 \cup P_2 \cup E_{P_1 \cup P_2}$, un policía C_α está en $c_1 \in V(P_1)$ y controla P_1 en el sentido del Lema 4.1.3, y otro policía C_β en $c_2 \in V(P_2)$ controla en el mismo sentido P_2 y R_i está contenida en $E_{P_1 \cup P_2}$, pues R no puede acceder a los vértices de $I_{P_1 \cup P_2}$.

Si $R \in V(I_{P_1 \cup P_2})$, P_1 es un uv -camino de longitud mínima en $P_1 \cup P_2 \cup$

$I_{P_1 \cup P_2}$, P_2 es un uv -camino de longitud mínima entre todos los uv -caminos que son internamente ajenos con P_1 en $P_1 \cup P_2 \cup I_{P_1 \cup P_2}$, un policía C_α está en $c_1 \in V(P_1)$ y controla P_1 en el sentido del Lema 4.1.3, y otro policía C_β en $c_2 \in V(P_2)$ controla en el mismo sentido P_2 y R_i está contenida en $I_{P_1 \cup P_2}$, porque R no puede acceder a los vértices de $E_{P_1 \cup P_2}$.

Veamos que estando en la situación (a) o (b) podemos llegar tras un número finito de pasos de nuevo a la situación (a) o (b).

Si en la etapa i estamos en la situación (a), tenemos los siguientes casos:

Que u tenga un único vecino $w \in V(R_i)$, entonces C_α se mueve a w . Si $r = w$ el policía ha atrapado al ladrón, de lo contrario definiremos R_{i+1} como la componente conexa de $G - w$ tal que R está sobre uno de sus vértices, con lo cual estaremos de nuevo en la situación (a). Afirmamos que en este caso $R_{i+1} \subseteq R_i - w \subsetneq R_i$. Sea $x \in V(R_{i+1})$, como R_{i+1} es una componente de $G - w$, $x \neq w$, además hay un xr -camino P_x en $G - w$ y P_x debe estar contenido en $G - u$, pues si u estuviera en los vértices de P_x , $rP_x u$ sería un ru -camino en $G - w$ por lo que el vértice anterior a u en este camino estaría en una componente de $G - u$ distinta a R_i , llamemos a dicho vértice z , pero entonces $rP_x z$ es un rz -camino en $G - w$ lo cual es una contradicción, pues, como el único vecino de u en R_i es w , todos los caminos que van de vértices de R_i (en particular de r) a vértices de componentes de $G - u$ distintas (en particular a z) pasan no sólo por u sino también por w . Por lo tanto P_x está contenido en $G - u$, es decir $x \in R_i$, y la afirmación queda probada. En particular $R_{i+1} \subsetneq R_i$.

Como segundo caso, consideremos que u tenga al menos dos vecinos a y b en $V(R_i)$. Sea P un ab -camino de longitud mínima en R_i (el cual existe, pues R_i es una componente conexa), entonces por el Lema 4.1.3, uno de los policías libres puede, en un número finito de movimientos, controlar P en el sentido del mismo lema, y así esta vez llegamos al caso (b) con $P'_1 := (a, u, b)$ y $P'_2 := P$ si $\{a, b\} \notin E(G)$, o con $P'_1 := \{a, b\} = P$ y $P'_2 := (a, u, b)$ si $\{a, b\} \in E(G)$. Como no es necesario mover a C_α de u a menos que sea para atrapar al ladrón, R no sólo no puede salir del interior o del exterior de $P'_1 \cup P'_2$ si está en el interior o exterior respectivamente, sino que tampoco puede salir de R_i , por lo tanto se define R_{i+1} como $R_i \cap I_{P'_1 \cup P'_2}$ si R está en el interior de $P'_1 \cup P'_2$ o $R_i \cap E_{P'_1 \cup P'_2}$ si R está en el exterior de $P'_1 \cup P'_2$. Claramente $R_{i+1} \subseteq R_i$ y como $a, b \in V(R_i) - V(R_{i+1})$ entonces $R_{i+1} \subsetneq R_i$.

Si en la etapa i nos encontramos en la situación (b) supondremos que $R_i = E_{P_1 \cup P_2}$ pues el otro caso es completamente análogo, tenemos que:

Si no hay otro uv -camino en $R_i \cup P_1 \cup P_2$ aparte de P_1 y P_2 , entonces R_i consiste en componentes conexas ajenas A_1, A_2, \dots, A_m cada una de las cuales se desconecta de G al remover un vértice de $P_1 \cup P_2$, uno distinto para cada componente. Supongamos que r está contenido en A_j , la componente que se desconecta de G al remover $a \in V(P_1 \cup P_2)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in V(P_1)$, entonces C mueve al policía libre C_γ al vértice a mientras que C_α y C_β controlan, en el sentido del Lema 4.1.3, P_1 y P_2 respectivamente, reduciendo así el territorio de R a $R_{i+1} := A_j$, como A_j es la componente conexa de $G - a$ sobre cuyos vértices está R , hemos regresado a la situación (a) desde donde podemos proceder como describimos anteriormente. Además $R_{i+1} = A_j \subsetneq M = R_i$ donde M es $E_{P_1 \cup P_2} \circ I_{P_1 \cup P_2}$ dependiendo de dónde se encontrara R en la etapa i .

Si hubiera más uv -caminos en $R_i \cup P_1 \cup P_2$ aparte de P_1 y P_2 , sea Z el más corto de estos caminos.

Supongamos que $V(Z) - V(P_1 \cup P_2)$ no es vacío y sea x el primer vértice de u hacia v que está en $V(P_1 \cup P_2) \cap V(Z)$ pero que el siguiente a dicho vértice en los vértices de Z no está en los vértices de $P_1 \cup P_2$, es decir, si $Z = (u = x_1, x_2, \dots, x_s = v)$ entonces $x = x_j$ para el mínimo j tal que $x_j \in V(P_1 \cup P_2) \cap V(Z)$ y $x_{j+1} \in V(Z) - V(P_1 \cup P_2)$; y sea y el siguiente vértice de Z que vuelve a estar en $V(P_1 \cup P_2)$.

Entonces tenemos varios casos: $x, y \in P_1$; $x, y \in P_2$; $x \in P_1, y \in P_2$ o $x \in P_2, y \in P_1$, los primeros dos casos son simétricos, por lo cual sólo analizaremos uno de los dos y por la misma razón sólo analizaremos uno de los dos últimos (ver Figuras 4.1 y 4.2).

En el caso en el que $x, y \in P_1$, como $xZy \cup yP_1x$ es una curva cerrada simple, por el Teorema de la curva de Jordan determina una región interior y una exterior en el dibujo de la gráfica, denotaremos a las partes de la gráfica que quedan contenidas en dichas regiones $I_{xZy \cup yP_1x}$ y $E_{xZy \cup yP_1x}$, respectivamente. Definimos los siguientes conjuntos: $A := E_{xZy \cup yP_1x} \cap E_{P_1 \cup P_2}$, $B := I_{xZy \cup yP_1x} \cap E_{P_1 \cup P_2}$. Pueden suceder dos cosas: que $I_{P_1 \cup P_2} \subseteq E_{xZy \cup yP_1x}$ o que $I_{P_1 \cup P_2} \subseteq I_{xZy \cup yP_1x}$.

Si sucede la primera de estas cosas debemos considerar si, en el momento en que a C le toca mover, R está en un vértice de A o en un vértice de B . Definimos $P_3 := uP_1x \cup xZy \cup yP_1v$ y notamos que también es un uv -camino de longitud mínima de entre los distintos a P_1 y P_2 en $R_i \cup P_1 \cup P_2$, pues $\ell(P_3) = \ell(uP_1x) + \ell(xZy) + \ell(yP_1v) \leq \ell(uZx) + \ell(xZy) + \ell(yZv) = \ell(Z)$, de hecho su longitud es igual a la de Z . Entonces, en cualquier caso, C deberá mover al policía que queda libre, C_γ , a controlar P_3 en el sentido

del Lema 4.1.3 mientras los otros dos siguen controlando P_1 y P_2 . Así, si R estaba en A , con la pareja de policías C_β y C_γ controlando P_2 y P_3 , $u' = u, v' = v$ volvemos a la situación (b) con $R_{i+1} := A$ y si R estaba en B con la pareja de policías C_α y C_γ controlando xP_1y y xP_3y , $u' = x, v' = y$ también volvemos a la situación (b). Claramente $R_{i+1} \subseteq E_{P_1 \cup P_2} = R_i$ y como $x_{j+1} \in V(R_i) - V(R_{i+1})$ entonces $R_{i+1} \subsetneq R_i$.

Si sucede la segunda, de nuevo, y por la misma razón, $P_3 := uP_1x \cup xZy \cup yP_1v$ también es un uv -camino de longitud mínima de entre los distintos a P_1 y P_2 . De nuevo C deberá mover el policía libre a controlar este camino mientras los otros dos siguen controlando P_1 y P_2 , y así, si R estaba en los vértices de A , con $u' = x, v' = y$ y la pareja de policías C_α y C_γ controlando xP_1y y xP_3y volvemos a la situación (b) con $R_{i+1} := A$, y si R estaba en los vértices de B , con $u' = u, v' = v$ y los policías C_β y C_γ controlando P_3 y P_2 regresamos a la situación (b) con $R_{i+1} := B$, de nuevo es claro que $A, B \subseteq R_i = E_{P_1 \cup P_2}$ y como $x_{j+1} \in V(R_i) - V(R_{i+1})$ entonces $R_{i+1} \subsetneq R_i$.

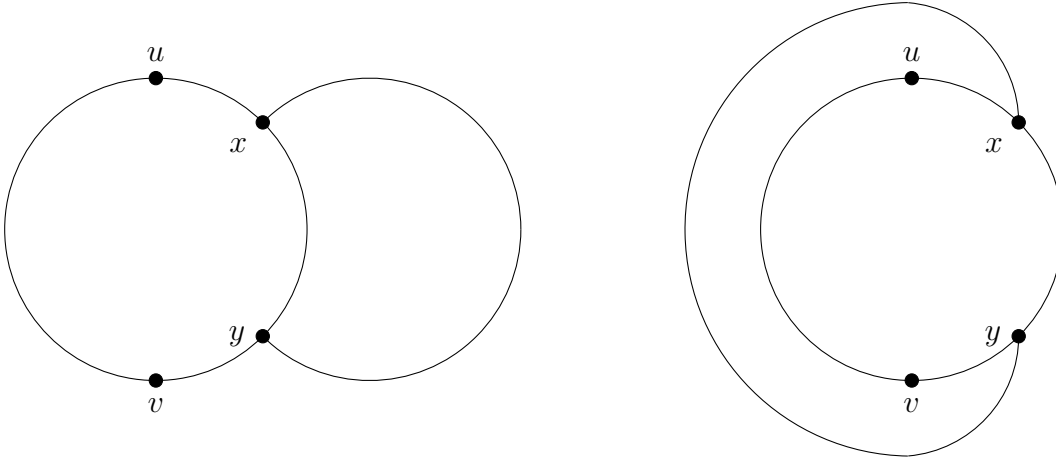


Figura 4.1: Casos en que $x, y \in P_1$.

Ahora veamos el caso en el que $x \in P_1, y \in P_2$. Esta vez como $(xP_1v) \cup (vP_2y) \cup (yZx)$ es una curva cerrada, definimos $A := E_{P_1 \cup P_2} \cap E_{(xP_1v) \cup (vP_2y) \cup (yZx)}$ y $B := E_{P_1 \cup P_2} \cap I_{(xP_1v) \cup (vP_2y) \cup (yZx)}$. Ahora también pueden suceder dos cosas: que $I_{P_1 \cup P_2} \subseteq E_{(xP_1v) \cup (vP_2y) \cup (yZx)}$ o que $I_{P_1 \cup P_2} \subseteq I_{(xP_1v) \cup (vP_2y) \cup (yZx)}$.

Si sucede la primera de éstas, igual que en el caso anterior, debemos considerar si, en el momento en que a C le toca mover, R está en un vértice de

A o en un vértice de B . Definimos $P_3 := (uP_1x) \cup (xZy) \cup (yP_2v)$ y observamos que también es un uv -camino de longitud mínima entre los distintos a P_1 y P_2 en $R_i \cup P_1 \cup P_2$, en efecto $\ell(P_3) = \ell(uP_1x) + \ell(xZy) + \ell(yP_2v) \leq \ell(uZx) + \ell(xZy) + \ell(yZv) = \ell(Z)$. Entonces, de nuevo C deberá mover al policía que queda libre C_γ a controlar P_3 en el sentido del Lema 4.1.3 mientras los otros dos siguen controlando P_1 y P_2 . Así, si R estaba en los vértices de A , con la pareja de policías C_β y C_γ controlando uP_3y y uP_2y , $u' = u, v' = y$ volvemos a la situación (b) con $R_{i+1} := A$; si R estaba en B con la pareja de policías C_α y C_γ controlando xP_1v y xP_3v , $u' = x, v' = v$ también volvemos a la situación (b) con $R_{i+1} := B$. Claramente $R_{i+1} \subseteq E_{P_1 \cup P_2} = R_i$ y como $x_{j+1} \in V(R_i) - V(R_{i+1})$ entonces $R_{i+1} \subsetneq R_i$.

Si sucede la segunda, de nuevo, y por la misma razón, $P_3 := (uP_1x) \cup (xZy) \cup (yP_1v)$ es un uv -camino de longitud mínima en R_i de entre los distintos a P_1 y P_2 y de nuevo C deberá mover al policía libre a controlar este camino mientras los otros dos siguen controlando P_1 y P_2 , y así, si R estaba en los vértices de A , con $u' = x, v' = v$ y la pareja de policías C_α y C_γ controlando xP_1v y xP_3v volvemos a la situación (b) con $R_{i+1} := A$, y si R estaba en los vértices de B , con $u' = u, v' = y$ y los policías C_β y C_γ controlando uP_2y y uP_3y regresamos a la situación (b) con $R_{i+1} := B$, de nuevo es claro que $A, B \subseteq R_i = E_{P_1 \cup P_2}$ y como $x_{j+1} \in V(R_i) - V(R_{i+1})$ entonces $R_{i+1} \subsetneq R_i$.

Supongamos ahora que $V(Z) - V(P_1 \cup P_2)$ es el conjunto vacío, entonces $V(Z) \subseteq V(P_1 \cup P_2)$, pero como $Z \neq P_1, P_2$ y por la minimalidad de P_1, P_2 debe haber una arista $\{x, y\}$ en las aristas de Z tal que $x \in P_1$ y $y \in P_2$, ya que si todas las aristas de Z estuvieran en las aristas de $P_1 \cup P_2$, entonces Z tendría que ser P_1 o P_2 y si hubiera una arista $\{x', y'\} \in E(Z) - E(P_1 \cup P_2)$ con $x', y' \in V(P_1)$ entonces P_1 tendría una arista múltiple (pero no estamos considerando gráficas con aristas múltiples) o P_1 no sería de longitud mínima. Análogamente se muestra que no se podría que los dos vértices de la arista estuvieran en $V(P_2)$.

Sea $\{x, y\}$ la primera arista de éste tipo que aparece de u a v por P_1 . Definimos $P_3 := (uP_1x) \cup (xZy) \cup (yP_2v)$ que, por un argumento idéntico al de párrafos atrás, es un uv -camino de longitud mínima entre los distintos a P_1 y P_2 . Entonces C deberá mover al policía que queda libre a dominar P_3 en el sentido del Lema 4.1.3 mientras C_α y C_β siguen dominando P_1 y P_2 .

De nuevo hay dos subcasos: que $I_{P_1 \cup P_2} \subseteq I_{(uP_1x) \cup (xZy) \cup (yP_2v)}$ o que $I_{P_1 \cup P_2} \subseteq E_{(uP_1x) \cup (xZy) \cup (yP_2v)}$.

En cada uno de estos subcasos debemos de considerar si R está en un vér-

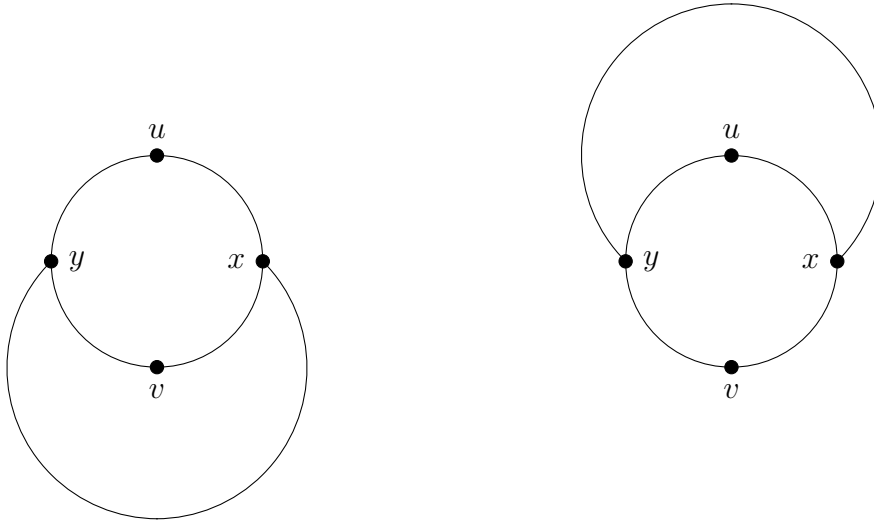


Figura 4.2: Casos en que $x \in P_1, y \in P_2$.

tice de $A := E_{(uP_1x) \cup (xZy) \cup (yP_2u)} \cap E_{P_1 \cup P_2}$ o en uno de $B := I_{(uP_1x) \cup (xZy) \cup (yP_2u)} \cap E_{P_1 \cup P_2}$. La situación sería como en la Figura 4.2.

En el primer subcaso, si R está en un vértice de A , la pareja de policías C_γ, C_β dominan en el sentido del Lema 4.1.3 los caminos uP_3y y uP_2y respectivamente, por lo cual estamos nuevamente en la situación (b) con $R_{i+1} := A$, y si está en un vértice de B , la pareja de policías C_γ, C_α dominan xP_3v y xP_1v , llegando de nuevo a la situación (b), ahora con $R_{i+1} := B$. En ambos casos se tiene trivialmente que $R_{i+1} \subseteq R_i$ y como la arista $\{x, y\} \in E(R_i) - E(R_{i+1})$ entonces $R_{i+1} \subsetneq R_i$. ■

Capítulo 5

Tiempo de captura

A las gráficas G con $c(G) \leq k$ las llamamos gráficas *k-policía-ganador*. En una gráfica *k-policía-ganador* ¿cuántos turnos les toma a k policías atrapar al ladrón? Diremos que el *round* t está formado por los turnos t -ésimos del ladrón y el policía y que la *longitud* de un juego en el cual gana el policía es t si el ladrón es capturado en el round t , y que su longitud es infinita si gana el ladrón.

Recordemos que llamamos *estrategia óptima* a una estrategia ganadora de C si con esa estrategia la longitud del juego es la mínima sobre todos los juegos, suponiendo que en cada juego el ladrón trata de prolongar el mayor tiempo posible su captura.

Definición. El *k-tiempo de captura* de una gráfica G (que abreviamos como $\text{capt}_k(G)$) es la longitud de un juego en el cual C juega con una estrategia óptima.

Se puede ver al tiempo de captura como la contraparte temporal del número de policías de una gráfica, y su definición en parte es motivada porque en el caso real, cuando se tienen recursos limitados, no sólo el número de elementos necesarios para la captura es de importancia práctica sino también el tiempo requerido para completarla.

5.1. Producto de árboles: cota superior

Consideremos la siguiente modificación en las reglas del juego: en cada round posterior al primer round, el ladrón mueve antes que el policía. Se

puede definir el tiempo de captura para estas nuevas reglas exactamente como se definió para las originales. Si $c(G) \leq k$ llamamos a un elemento $(c_1, c_2, \dots, c_k) \in (V(G))^k$ una k -ada central cuando k policías tienen una estrategia óptima empezando en esos vértices.

Proposición 5.1.1. *Sea G una gráfica. Entonces la anterior modificación en las reglas del juego no altera el tiempo de captura de G .*

Demostración. Sea t el tiempo de captura de G con las reglas originales y t' el tiempo de captura de G con las reglas modificadas.

Supongamos que C empieza el juego con las nuevas reglas colocando a sus policías en los vértices $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0k}$ y R elige el vértice v_0 para comenzar. De acuerdo a las nuevas reglas R inicia el siguiente round y hay dos casos: que R decida permanecer en el mismo vértice o que cambie de vértice en este movimiento.

En el primer caso, C encuentra el juego, antes de su primer movimiento, en la misma posición en que estaría con las reglas originales antes de su primer movimiento, por lo cual C puede jugar con la misma estrategia óptima que usará con las reglas originales, y así, después del j -ésimo movimiento de C , el juego estará en la misma posición que después del j -ésimo movimiento de C con las reglas originales, y como la captura del ladrón ocurre justamente con un movimiento de C , pues estamos suponiendo que éste no se entregaría, C captura al ladrón en el mismo round, es decir en el round t , por lo tanto $t \geq t'$.

En el segundo caso llamemos v_1 al vértice al cual se ha movido R . Sabemos que R no se movería a donde el número de rounds en que es capturado pudiera reducirse, por lo tanto debe haber un juego con las reglas originales en el cual R empieza en v_1 , y por la definición del tiempo de captura, también en este juego R sería atrapado en t rounds. Por otro lado la duración del juego con las nuevas reglas es el mismo si R empieza en v_0 y al siguiente turno se mueve a v_1 o si empieza directamente en v_1 y en el siguiente turno permanece en v_1 porque C encuentra en la misma posición al juego antes de su primer movimiento, pero esta es justo la situación del caso anterior, en el cual ya vimos que $t \geq t'$.

Para ver la otra desigualdad supongase que se juega en G con las reglas originales y C empezará colocando a sus policías en los vértices $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0k}$, dónde $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0k}$ es una k -ada central para la cual C tiene una estrategia óptima con las reglas modificadas, y R se colocará en v_0 . Si C juega

con la estrategia que tiene para las reglas modificadas cuando C comienza $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0k}$ y R comienza en algún vértice y en su primer movimiento se mueve a v_0 , gana la partida en t o menos rounds, es decir $t' \geq t$.

Por lo tanto $t = t'$. ■

Teorema 5.1.2. *Para cada árbol T se tiene que $\text{capt}_1(T) = \lceil \text{diam}(T)/2 \rceil$.*

Demostración. Sean $D = \text{diam}(T)$, $t = \text{capt}_1(T)$, $P = (a_1, a_2, \dots, a_{D+1})$ una trayectoria de longitud máxima en T , y v una 1-ada central, que existe por el Teorema 2.2.3. Se debe tener que $d(v, a_1) \leq t$, ya que sin importar si el ladrón empieza colocándose en a_1 y se queda ahí durante todo el juego, es capturado en t rounds y en cada round el policía reduce su distancia al ladrón en una arista, por un razonamiento análogo se debe tener también $d(v, a_{D+1}) \leq t$. De esto se sigue que $D = d(v, a_1) + d(v, a_{D+1}) \leq 2t$ entonces $t \geq D/2$ y como t es un entero $t \geq \lceil D/2 \rceil$.

Por otra parte, consideremos $u := a_{1+\lceil D/2 \rceil}$. Afirmamos que un policía que empieza colocándose en u puede capturar al ladrón en a lo más $\lceil D/2 \rceil$ rounds. Notemos que la distancia de u a cualquier vértice de la gráfica es a lo más $\lceil D/2 \rceil$, ya que si hubiera un vértice w que estuviera a distancia mayor que $\lceil D/2 \rceil$ podríamos tomar una trayectoria Q de longitud mínima entre u y w , luego fijarnos en el primer vértice x de esta trayectoria que pertenezca a P ; si x pertenece a la segunda mitad de P , entonces $D \leq \lceil D/2 \rceil + \lceil D/2 \rceil < \ell((a_1 P u) \cup (u Q w))$, lo cual es una contradicción. Análogamente, si x pertenece a la primera mitad de P , obtendremos $D < \ell((w Q u) \cup (u P a_{D+1}))$ que es también una contradicción. Entonces en cada turno el policía avanza en dirección al vértice que está ocupando el ladrón, y así, en cada turno de C la distancia de C a u aumenta en una arista, por lo tanto en a lo más $\lceil D/2 \rceil$ rounds el ladrón es capturado. ■

Sea T un árbol y $s \in V(G)$, diremos que T está *enraizado* en s cuando consideremos el orden parcial que s induce en los vértices de T de la siguiente forma: si $x, y \in V(T)$, $x \leq y$ si x es un vértice de la única sy -trayectoria que hay en T , y decimos que y es *descendiente* de x (cada vértice es un descendiente de sí mismo). Por ir hacia arriba o hacia abajo en T nos referiremos a ir hacia s o alejarse de s , respectivamente. La *altura* de un vértice v se escribe $h(v)$ y se define así: $h(v) := \max\{d(v, x) \mid x \text{ es una hoja y es descendiente de } v\}$.

Lema 5.1.3. Sean T_1, T_2 dos árboles enraizados. Supongamos que $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ y (r_1, r_2) son los vértices de $T_1 \square T_2$ en los que se encuentran C_1, C_2 y R respectivamente y que además se cumplen las siguientes condiciones:

- I. r_i es descendiente de u_i y de v_i para $i \in \{1, 2\}$,
- II. $d(v_1, r_1) = 1 + d(u_1, r_1)$,
- III. $u_2 = v_2$,
- IV. $d(u_2, r_2) \in \{d(u_1, r_1), d(v_1, r_1)\}$.

Entonces, si es el turno de R , los policías pueden capturar al ladrón en m rounds o menos a partir de ese momento, donde $m = \lfloor (h(u_1) + h(v_1) + h(u_2) + h(v_2))/2 \rfloor$.

Demostración. La demostración es por inducción sobre m .

Si $m = 0$, como $u_2 = v_2$ entonces $h(u_2) = h(v_2)$ y las dos alturas deben ser cero, ya que si fueran 1 o más entonces m tendría que ser al menos 1 lo cual sería una contradicción. En particular u_2 es una hoja de T_2 y como r_2 es un descendiente de u_2 debe suceder que $r_2 = u_2 = v_2$. Por lo anterior, y por IV, $d(u_1, r_1) = 0$ o $d(v_1, r_1) = 0$ lo cual quiere decir que uno de los policías ya está en el mismo vértice que el ladrón, o sea que no se necesitó ningún round adicional para atrapar al ladrón.

Supongamos que se cumple para k con $0 \leq k < m$. Es el turno del ladrón, sus opciones son moverse en la primera coordenada sobre la copia de T_1 hacia arriba o hacia abajo, moverse en la segunda coordenada hacia arriba o hacia abajo en la copia de T_2 o no moverse, en total son 5 casos, analicemos cada uno.

Si el ladrón se mueve hacia arriba en la copia de T_1 : hay dos casos $r_1 = u_1$ o $r_1 \neq u_1$, en el primer caso supondremos que $d(u_2, r_2) > 0$ ya que de otra forma el ladrón ya habría sido atrapado por C_1 , entonces $d(u_2, r_2) > 0 = d(u_1, r_1)$ y por IV tenemos que $d(u_2, r_2) = d(v_1, r_1)$ además $d(v_1, r_1) = 1 + d(u_1, r_1) = 1$ por lo que $d(u_2, r_2) = 1$ y como $u_2 = v_2$ se tiene que $d(v_2, r_2) = 1$.

Por otro lado, como r_1 también es descendiente de v_1 y $d(v_1, r_1) = 1$ cuando mueve R hacia arriba en T_1 su primera coordenada será v_1 , es decir, $r'_1 = v_1$ por lo que C no tiene más que mover a C_2 sobre la copia de T_2 de (v_1, v_2) a (v_1, r_2) y ya estará en las mismas coordenadas que el ladrón, no le llevó más que un round y $1 \leq m$.

En el segundo caso ($r_1 \neq u_1$), C moverá la segunda coordenada de ambos policías en dirección de r_2 , justamente porque $r_1 \neq u_1$ y $d(v_1, r_1) =$

$d(u_1, r_1) + 1$, r'_1 seguirá siendo descendiente tanto de u_1 como de v_1 y como la segunda coordenada de R sigue siendo r_2 y ambas policías se movieron hacia ésta, se sigue cumpliendo la condición I para las nuevas coordenadas de R y de C .

Como r'_1 sigue siendo descendiente de u_1 y v_1 se tiene que $d(v_1, r_1) = d(v_1, r'_1) + 1$ y $d(u_1, r_1) = d(u_1, r'_1) + 1$ por lo que $d(v_1, r'_1) = d(v_1, r_1) - 1 = d(u_1, r_1) = d(u_1, r'_1) + 1$, es decir, se cumple la segunda condición para las nuevas coordenadas de R y de C .

La tercera condición se cumple trivialmente para las nuevas coordenadas, ya que $u_2 = v_2$ y los policías movieron sus segundas coordenadas en la misma dirección, por lo tanto $u'_2 = v'_2$.

Para la cuarta y última condición, si se tenía que $d(u_2, r_2) = d(u_1, r_1)$, como es el caso en que $r_1 \neq u_1$ entonces también $r_2 \neq u_2$ y ambas distancias disminuyeron en uno, por lo tanto $d(u'_2, r_2) = d(u_1, r'_1)$. Si se tenía que $d(u_2, r_2) = d(v_1, r_1)$ entonces el razonamiento es análogo al anterior para llegar a $d(u'_2, r_2) = d(v_1, r'_1)$.

No sólo se cumplen las cuatro condiciones para las nuevas coordenadas sino que, como en cualquier caso las segundas coordenadas de los dos policías se deben mover hacia abajo en T_2 , tenemos que $h(u'_2) = h(u_2) - 1$ y $h(v'_2) = h(v_2) - 1$, suponiendo que $h(u_2) = h(v_2) \neq 0$ ya que para ese caso es repetir el mismo razonamiento usado en la base de la inducción, se tiene que $h(u_1) + h(v_1) + h(u'_2) + h(v'_2) = h(u_1) + h(v_1) + h(u_2) + h(v_2) - 2$ por lo que $\lfloor (h(u_1) + h(v_1) + h(u'_2) + h(v'_2))/2 \rfloor = \lfloor (h(u_1) + h(v_1) + h(u_2) + h(v_2))/2 \rfloor - 1$ y si escribimos $m' = \lfloor (h(u_1) + h(v_1) + h(u'_2) + h(v'_2))/2 \rfloor$ se tiene $m - 1 = m'$ por hipótesis de inducción a partir de éste momento sólo le toma al policía m' rounds o menos atrapar al ladrón, sumándole el round utilizado para mover a C_1 de (u_1, u_2) a (u_1, u'_2) y a C_2 de (v_1, v_2) a (v_1, v'_2) al número de rounds utilizados, sigue siendo menor o igual a m .

Si el ladrón se mueve hacia abajo en la copia de T_1 , entonces ambos policías deberán seguir a R en su respectiva copia de T_1 , moviendo también hacia abajo en ésta. Así, se sigue cumpliendo la primera condición para las nuevas coordenadas de R y de C y como $d(v'_1, r'_1) = d(v_1, r_1)$, $d(u'_1, r'_1) = d(u_1, r_1)$ y $d(v_1, r_1) = d(u_1, r_1) + 1$ entonces $d(v'_1, r'_1) = d(u'_1, r'_1) + 1$, como $u'_2 = u_2$, $v'_2 = v_2$ y $u_2 = v_2$ tenemos $u'_2 = v'_2$, y finalmente $d(u'_2, r'_2) = d(u_2, r_2) \in \{d(u_1, r_1), d(v_1, r_1)\} = \{d(u'_1, r'_1), d(v'_1, r'_1)\}$. Es decir, se cumplen las condiciones restantes para las nuevas coordenadas de R y de C . Además, como la altura de la primera coordenada los policías disminuyó, volvemos a tener que $\lfloor (h(u'_1) + h(v'_1) + h(u'_2) + h(v'_2))/2 \rfloor = \lfloor (h(u_1) + h(v_1) + h(u_2) + h(v_2))/2 \rfloor -$

1 y por un razonamiento idéntico al caso anterior C captura a R en m rounds o menos.

Si el ladrón se mueve hacia arriba en la copia de T_2 y $r'_2 = u_2$ es porque $d(r_2, u_2) = 1$ y como se cumple la condición IV, hay dos casos. El primero es que $d(u_1, r_1) = 1$, en cuyo caso C_1 atrapa a R moviéndose de (u_1, r'_2) a $(r_1 = r'_1, r'_2)$; el otro caso es que $d(v_1, r_1) = 1$, pero por la segunda condición esto querría decir que $u_1 = r_1$ por lo que C_1 ya estaría sobre el mismo vértice que R . Si $r'_2 \neq u_2$ entonces $d(r_1, u_1), d(r_1, v_1) > 0$ por lo cual, si C_1 y C_2 se mueven sobre la copia de T_1 hacia r_1 , se seguirá cumpliendo la primera condición para las nuevas coordenadas, y como $d(u'_1, r_1) + 1 = d(u_1, r_1)$, $d(v'_1, r_1) + 1 = d(v_1, r_1)$, $d(u_2, r'_2) + 1 = d(u_1, r_1)$ se cumplen las condiciones restantes para las nuevas coordenadas. Adicionalmente $\lfloor (h(u'_1) + h(v'_1) + h(u_2) + h(v_2))/2 \rfloor = \lfloor (h(u_1) + h(v_1) + h(u_2) + h(v_2))/2 \rfloor - 1$. Utilizando el razonamiento usado en los casos anteriores concluimos que el ladrón es atrapado en m rounds o menos.

Si el ladrón se mueve hacia abajo en la copia de T_2 , entonces los policías se moverán hacia abajo en su respectiva copia de T_2 , el argumento es simétrico al caso en que el ladrón mueve hacia abajo en T_1 para ver que la hipótesis de inducción implica que en este caso R también es capturado en a lo más m rounds.

Por último, está el caso en que R no se mueve. Si $d(u_2, r_2) = d(u_1, r_1)$ los policías se moverán hacia abajo en su respectiva copia de T_1 , por lo que $d(u_2, r_2) = d(u_1, r_1) = d(u_1, r'_1) + 1 = d(v_1, r'_1)$ y si $d(u_2, r_2) = d(v_1, r_1)$ los policías se moverán hacia abajo en su respectiva copia de T_2 , por lo que $d(u'_2, r_2) = d(u_2, r_2) - 1 = d(v_1, r_1) - 1 = d(u_1, r_1)$ de manera que se cumple la condición IV en ambos casos para las nuevas coordenadas. En el primer caso $d(u_1, r_1) > 0$, ya que de lo contrario C_1 ya habría capturado al ladrón, y en el segundo caso $d(u_2, r_2) > 0$ pues de lo contrario lo habría capturado C_2 , por lo tanto se sigue cumpliendo la condición I para las nuevas coordenadas en ambos casos. Es evidente que también se siguen cumpliendo las condiciones II y III y como se reducen las alturas de las primeras o las segundas coordenadas de los policías, como en los casos anteriores, por la hipótesis de inducción, R es capturado en m rounds o menos.

Por el principio de inducción matemática la proposición es verdadera para toda $m \in \mathbb{N}$

■

Teorema 5.1.4. *Si T_1 y T_2 son árboles con diámetros $2m + 1$ y $2n$, respectivamente, entonces $\text{capt}_2(T_1 \square T_2) \leq m + n$*

Demostración. Daremos una estrategia ganadora para los policías que dure $m + n$ rounds o menos.

Sean P_1 y P_2 trayectorias en T_1 y T_2 respectivamente, con $\ell(P_i) = \text{diam}(T_i)$, $i \in \{1, 2\}$ y que su longitud sea la distancia entre sus extremos. Etiquetemos los vértices de $P_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{2m+2})$ de manera que $d(r_1, a_{m+1}) < d(r_1, a_{m+2})$ y los de $P_2 = (b_1, b_2, \dots, b_{2n+1})$ con cualquiera de las dos numeraciones naturales. Los policías comenzarán en $(u_1, u_2) = (a_{m+1}, b_{n+1})$ y $(v_1, v_2) = (a_{m+2}, b_{n+1})$ y llamemos al vértice en donde R comienza (r_1, r_2) . Observemos que si seleccionamos a v_1 como raíz de T_1 y a v_2 como raíz de T_2 , como a_1, a_{2m+2}, b_1 y b_{2n+1} son hojas (ya que si no lo fueran habría dos vértices a mayor distancia que el diámetro) y además en T_1 a_1 y a_{2m+2} son las hojas más alejadas de a_{m+1} , pero aunque a_{2m+2} es aún más lejana, no es descendiente de a_{m+1} , por lo cual $h(u_1) = d(a_{m+1}, a_1) = m$, análogamente en T_2 sucede que b_1 y b_{2n+1} son las hojas más alejadas de b_{n+1} por lo cual $h(u_2) = d(b_1, b_{n+1}) = d(b_{2n+1}, b_{n+1}) = n$ y análogamente $h(v_1) = d(a_{m+2}, a_1) = m + 1$ y $h(v_2) = d(b_1, b_{n+1}) = d(b_{2n+1}, b_{n+1}) = n$.

Observemos que debido a la elección de las raíces de T_1 y T_2 se cumplen las primeras cuatro condiciones de la hipótesis del Lema 5.1.3. Si también se cumpliera la cuarta condición estaríamos en condiciones de aplicar el lema, es decir el ladrón puede ser capturado en $\lfloor (m + (m + 1) + n + n)/2 \rfloor = \lfloor (m + n) + 1/2 \rfloor = m + n$ rounds o menos, si no se cumpliera la cuarta condición podría ser porque $d(u_2, r_2) < d(u_1, r_1)$ o porque $d(u_2, r_2) > d(v_1, r_1)$.

En el primer caso C_1 y C_2 descenderían en la primera coordenada hacia r_1 hasta lograr $d(u_2, r_2) = d(u_1, r_1)$, ¿podría hacer algo el ladrón para evitar esto? No, no importa cuanto tratase de acercarse en la segunda coordenada a u_2 o alejarse en la primera coordenada de u_1 para hacer crecer $d(u_1, r_1) - d(u_2, r_2)$; en la segunda coordenada podría reducir $d(u_2, r_2)$ a cero, pero en la primera coordenada eventualmente se toparía con una hoja de T_1 y sería alcanzado por los policías.

En el segundo caso C_1 y C_2 descenderían en la segunda coordenada hacia r_2 hasta lograr $d(u_2, r_2) = d(v_1, r_1)$, si el ladrón llegara a cruzar la arista $u_1 v_1$ antes de que los policías logaran la igualdad, los papeles de los dos policías tendrían que cambiar, es decir, T_1 se consideraría enraizado en la primera coordenada del otro policía para que r_1 siguiera siendo su descendiente, pero los nombres que dimos a los vértices de los policías deberán

también intercambiarse para que no haya necesidad de mover las primeras coordenadas de los policías y las condiciones I, II y III se sigan cumpliendo igual que en el Lema 5.1.3. Como en el caso anterior, el ladrón se toparía eventualmente con una hoja de T_2 y el policía logrará la igualdad deseada.

Haber logrado una de las anteriores igualdades como se describió consistiría entonces en una primera etapa de la estrategia, ahora se cumple la cuarta condición del Lema 5.1.3 y observemos que no se dejó de cumplir ninguna de las otras condiciones que ya se cumplían para lograr esto: en el primer caso porque la segunda coordenada de los policías no se movió de la raíz de T_2 y todo vértice de T_2 es descendiente de esta y en la primera coordenada ambos policías descendían simultáneamente pero sin pasar de donde se encontrara el ladrón. En el segundo caso, se arregla que se siga cumpliendo la primera condición sin necesidad de que los policías se muevan en la primera coordenada, y en la segunda coordenada descienden simultáneamente hacia la segunda coordenada del ladrón, pero sin pasar de ésta.

En cualquier caso, si esta primera etapa dura s rounds, como los policías disminuyeron en 2 la altura de sus primeras coordenadas o sus segundas coordenadas y como al inicio de la primera etapa la suma de las alturas de las coordenadas de los policías era $2m + 2n + 1$, entonces al finalizar la primera etapa dicha suma es $2m + 2n + 1 - 2s$. El Lema 5.1.3 nos dice que los policías pueden atrapar al ladrón en $\lfloor (2m + 2n + 1 - 2s)/2 \rfloor$ rounds o menos a partir de ese momento, por lo que contando ambas etapas el ladrón será atrapado en $s + \lfloor (2m + 2n + 1 - 2s)/2 \rfloor$ o menos, en otras palabras:

$$\text{capt}_2(T_1 \square T_2) \leq s + \lfloor (2m + 2n + 1 - 2s)/2 \rfloor = \lfloor (2m + 2n + 1)/2 \rfloor = m + n.$$

■

Lema 5.1.5. Sean T_1 y T_2 dos árboles y sea T'_1 un árbol que se obtiene a partir de T_1 al unir un nuevo vértice w a algún vértice u de T_1 , de manera que T'_1 es un árbol y w es una hoja de T'_1 . Entonces $\text{capt}_2(T'_1 \square T_2) \geq \text{capt}_2(T_1 \square T_2)$.

Demostración. Como $d_{T_1}(u) \geq 1$ existe v adyacente en T'_1 a u y distinto a w , consideremos la retracción $\sigma : V(T'_1) \rightarrow V(T_1)$ definida a continuación: $\sigma(x) = x$ si $x \neq w$ y $\sigma(x) = v$ si $x = w$, esta retracción induce una retracción σ' de $V(T'_1 \square T_2)$ a $V(T_1 \square T_2)$ a saber, $\sigma'((x, y)) = (\sigma(x), y)$. Llamemos “ E ” a una estrategia ganadora del policía en $T'_1 \square T_2$ que dure $\text{capt}_2(T'_1 \square T_2)$ rounds. Supongamos que se juega en $T_1 \square T_2$, entonces C utilizará la estrategia “ E ” suponiendo que R se limita a los vértices de $T_1 \square T_2$ y si C tuviera que colocar

a sus policías C_1 en (c_1^1, c_2^1) y C_2 en (c_1^2, c_2^2) según la estrategia “ E ”, entonces los colocará en $(\sigma(c_1^1), c_2^1)$ y en $(\sigma(c_1^2), c_2^2)$ respectivamente, ya que al ser σ' una retracción todo vértice adyacente a (c_1^i, c_2^i) en $T_1 \square T_2$ también es adyacente a $(\sigma(c_1^i), c_2^i)$ en $T_1 \square T_2$ y por lo tanto, jugando de esta manera, en $\text{capt}_2(T_1 \square T_2)$ rounds C habrá capturado a R en $T_1 \square T_2$. ■

Corolario 5.1.6. *Si T_1 y T_2 son árboles, entonces*

$$\text{capt}_2(T_1 \square T_2) \leq \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1 \square T_2)}{2} \right\rfloor.$$

Demostración. Por el Teorema 1.2.3, $\text{diam}(T_1 \square T_2) = \text{diam}(T_1) + \text{diam}(T_2)$. Si los diámetros de T_1 y T_2 son de distinta paridad, el resultado se sigue directamente del Teorema 5.1.4.

Si ambos diámetros son pares, digamos $\text{diam}(T_1) = 2m$ y $\text{diam}(T_2) = 2n$, entonces podemos añadir una hoja a una trayectoria de longitud máxima en T_1 para obtener un árbol T_1' con diámetro $2m + 1$. Por el Lema 5.1.5 $\text{capt}_2(T_1 \square T_2) \leq \text{capt}_2(T_1' \square T_2)$. Por el Teorema 5.1.4, se tiene que $\text{capt}_2(T_1' \square T_2) \leq m + n = \left\lfloor \frac{2m+1+2n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1) + \text{diam}(T_2)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1 \square T_2)}{2} \right\rfloor$.

Análogamente, si ambos diámetros son impares, digamos $\text{diam}(T_1) = 2m + 1$ y $\text{diam}(T_2) = 2n + 1$, podemos añadir una hoja a una trayectoria de longitud máxima en T_1 para obtener un árbol T_1' con diámetro $2(m + 1)$. Aplicando nuevamente el Teorema 5.1.4 y el Lema 5.1.5 obtenemos $\text{capt}_2(T_1 \square T_2) \leq \text{capt}_2(T_1' \square T_2) \leq (m + 1) + n = \left\lfloor \frac{2m+1+2n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1) + \text{diam}(T_2)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1 \square T_2)}{2} \right\rfloor$. ■

5.2. Producto de árboles: cota inferior

Lema 5.2.1. *Sea G una gráfica 2-policía-ganador, u un vértice de G contenido en un ciclo inducido B de longitud 4 con la propiedad de que para cada vértice $v \in V(G)$ se tiene que $|N(v) \cap V(B)| \leq 2$. Si (c_1, c_2) es una 2-ada central, entonces*

$$d(u, c_1) + d(u, c_2) \leq 2\text{capt}_2(G) + 1.$$

Demostración. Si suponemos que hay un vértice $u \in V(B)$ tal que existe otro vértice $w \in V(G)$ con $N[u] \subseteq N[w]$ (una trampa), como u pertenece al

ciclo B se tiene que $|N[u] \cap V(B)| = 3$ y, como $N[u] \subseteq N[w]$, también se tiene que $|N[w] \cap V(B)| \geq 3$ por lo cual, si $w \notin V(B)$, $|N(w) \cap V(B)| \geq 3$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis se cumple $|N(v) \cap V(B)| \leq 2$ para todo $v \in V(G)$, y si $w \in V(B)$, sabemos que u y w son vecinos, sea a el otro vecino de u que se encuentra también en el ciclo B , como $a \in N[u] \subseteq N[w]$ se tiene que $aw \in E(G)$, lo cual contradice que B sea un ciclo inducido de longitud 4. Por lo tanto ningún vértice de B es una trampa y, por la observación hecha en el capítulo referente a las trampas, un sólo policía no puede capturar a R incluso si R se limita a moverse sobre los vértices de B . Sea $d_1 = (c_1, u)$, $d_2 = (c_2, u)$ y $t = \text{capt}_2(G)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d_1 \leq d_2$. Como R sería capturado en a lo más t rounds si empezara en u y permaneciera ahí durante todo el juego tenemos que $d_1 \leq t$.

Si $d_1 = t$, entonces R podría empezar en u y no moverse en los primeros $t - 1$ rounds, entonces tras esos $t - 1$ rounds C_1 debería haber llegado a un vértice x adyacente a u y como u no es una esquina, tiene un vecino $y \notin N[x]$, de hecho el único con esta característica, por lo cual si R decide moverse a y en su turno número t , será capturado inmediatamente por C_2 . Por lo anterior $d_2 \leq t + 1$, entonces $d_1 + d_2 \leq 2t + 1$.

Si $d_1 < t$, como C_1 no puede atrapar el sólo a R si R se limita a moverse sobre los vértices de B , C_2 debe poder llegar a B en a lo más t turnos de C , y como la distancia de cualquier vértice de B a u es 2, $d_2 \leq t + 2$ y $d_1 + d_2 \leq t - 1 + t + 2 = 2t + 1$. ■

Lema 5.2.2. *Si T_1 y T_2 son árboles, entonces $T_1 \square T_2$ no tiene ciclos de longitud 3.*

Demostración. Supongamos que T_1 y T_2 son árboles y $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)$ forman un ciclo en $T_1 \square T_2$, para esto tendría que cumplirse necesariamente que

$$(u_2u_3 \in E(T_1) \quad \text{y} \quad v_2 = v_3) \quad \text{o} \quad (u_2 = u_3 \quad \text{y} \quad v_2v_3 \in E(T_2))$$

y

$$(u_1u_2 \in E(T_1) \quad \text{y} \quad v_1 = v_2) \quad \text{o} \quad (u_1 = u_2 \quad \text{y} \quad v_1v_2 \in E(T_2))$$

y

$$(u_1u_3 \in E(T_1) \quad \text{y} \quad v_1 = v_3) \quad \text{o} \quad (u_1 = u_3 \quad \text{y} \quad v_1v_3 \in E(T_2)).$$

En el caso de que $u_1 = u_2 = u_3$ se tendría que v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3 son aristas de T_2 por lo cual T_2 no sería un árbol, análogamente el caso en que $v_1 = v_2 = v_3$ implica que T_1 no es un árbol.

Por simetría los casos restantes son similares al siguiente caso: ($v_1 = v_2$ y $u_1u_2 \in E(T_1)$) y ($v_1v_3 \in E(T_2)$ y $u_1 = u_3$), en éste caso no se podrá tener la primera de las condiciones necesarias antes enunciadas porque $u_1u_2 \in E(T_1), v_1v_3 \in E(T_2)$ implica que $u_2 \neq u_1 = u_3$ y $v_3 \neq v_1 = v_2$. ■



Figura 5.1: casos para los ciclos de longitud tres

Teorema 5.2.3. *Para todo par de árboles T_1, T_2 se cumple $\text{capt}_2(T_1 \square T_2) \geq \lfloor \text{diam}(T_1 \square T_2)/2 \rfloor$.*

Demostración. Sean P_1, P_2 trayectorias en T_1 y T_2 respectivamente, con $\ell(P_i) = \text{diam}(T_i), i = 1, 2$, $P_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{m+1}), P_2 = (b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$. Sean $u = (a_1, b_1)$ y $v = (a_{m+1}, b_{n+1})$. El vértice u está contenido en el ciclo de longitud 4 formado por los vértices $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)$ y (a_2, b_1) . Ningún vértice de $T_1 \square T_2$ es adyacente a tres o más vértices de dicho ciclo porque se formaría un ciclo de longitud tres, lo cual, por el Lema 5.2.2, no puede ser. Por lo tanto, u y el ciclo formado por los vértices $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)$ y (a_2, b_1) cumplen con las hipótesis del Lema 5.2.1; también v y el mismo ciclo cumplen con las hipótesis del Lema 5.2.1. Sea (c_1, c_2) una 2-ada central, por el Lema 5.2.1 y la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} 2\text{diam}(T_1 \square T_2) &= 2d(u, v) \\ &\leq d(c_1, u) + d(c_1, v) + d(c_2, u) + d(c_2, v) \\ &\leq 4\text{capt}_2(T_1 \square T_2) + 2, \end{aligned}$$

entonces, dividiendo entre 4:

$$\lfloor \text{diam}(T_1 \square T_2)/2 \rfloor \leq \lfloor \text{capt}_2(T_1 \square T_2) + (1/2) \rfloor = \text{capt}_2(T_1 \square T_2).$$

La última igualdad se debe a que $\text{capt}_2(T_1 \square T_2)$ es un número entero. ■

Teorema 5.2.4. *Si T_1 y T_2 son árboles cualesquiera, entonces*

$$\text{capt}_2(T_1 \square T_2) = \lfloor \text{diam}(T_1 \square T_2)/2 \rfloor.$$

Demostración. Por el Teorema 5.2.3 se tiene $\text{capt}_2(T_1 \square T_2) \geq \lfloor \text{diam}(T_1 \square T_2)/2 \rfloor$, y por el Corolario 5.1.6 $\lfloor \text{diam}(T_1 \square T_2)/2 \rfloor \geq \text{capt}_2(T_1 \square T_2)$. ■

Teorema 5.2.5. *Si T_1 y T_2 son árboles, entonces*

$$\text{capt}_1(T_1) + \text{capt}_1(T_2) - 1 \leq \text{capt}_2(T_1 \square T_2) \leq \text{capt}_1(T_1) + \text{capt}_1(T_2).$$

Demostración. Por el Teorema 5.2.4 $\text{capt}_2(T_1 \square T_2) = \lfloor \text{diam}(T_1 \square T_2)/2 \rfloor$ y por Teorema 1.2.3 $\text{diam}(T_1 \square T_2) = \text{diam}(T_1) + \text{diam}(T_2)$, por otro lado $\left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_2)}{2} \right\rfloor - 1 \leq \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1)}{2} + \frac{\text{diam}(T_2)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_1)}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\text{diam}(T_2)}{2} \right\rfloor$. ■

Una *rejilla* de $m \times n$ donde $m, n \in \mathbb{N}$ se define como el producto cuadro de una trayectoria de m vértices con otra de n vértices.

Corolario 5.2.6. *El 2-tiempo de captura de una rejilla de $m \times n$ es $\lfloor \frac{m+n}{2} \rfloor - 1$*

Demostración. Una rejilla es el producto cuadro de una trayectoria de longitud $m - 1$ por una de longitud $n - 1$ y por el Teorema 1.2.3 tiene diámetro $m + n - 2$. ■

Capítulo 6

Conclusiones

El principal objetivo del trabajo fue revisar, completar y explicar lo mejor posible las demostraciones expuestas en los artículos *A game of cops and robbers* y *The capture time of grids* dichos artículos abarcan los dos principales conceptos que surgen de manera muy natural con el juego de policías y ladrones: el número de policías y el k -tiempo de captura de una gráfica.

Es interesante como un problema que encuentra su motivación en una parte de la realidad, se hace más y más abstracto hasta el punto de mostrarnos propiedades algebraicas y topológicas de algunos objetos. Como lo fue que la clase de las gráficas en las que el policía tuviera una estrategia ganadora resultase cerrada bajo la retracción y una multiplicación o que bastasen tres policías para atrapar al ladrón en cualquier gráfica para la cual exista una inclusión en el plano.

Quedan muchos temas por investigar respecto a este juego, por ejemplo, del último punto del párrafo anterior surge la pregunta de cuántos policías se necesitarán para atrapar al ladrón en una gráfica para la cual halla una inclusión en el toro, en otra superficie orientable de mayor género o incluso en una superficie no orientable.

El estudio de ésta versión del juego da pauta a interesarse por algunas variaciones del mismo, por ejemplo en la versión del juego desarrollada en el trabajo los dos jugadores tienen conocimiento de la ubicación en la gráfica de su contrincante en todo momento, una variación en este sentido sería que uno permitiera a los jugadores esta información sólo cuando estuvieran a una distancia de a lo más $d \in \mathbb{N}$, lo cual se puede interpretar como que C y R pudieran tener contacto visual hasta esa distancia, otra variación sería que no supieran en ningún momento la ubicación de su contrincante entrando así

en el terreno de los juegos de búsqueda.

En el artículo *The capture time of grids* se reporta que se han encontrado buenas cotas para el tiempo de captura del producto cuadro de tres árboles $(T_1 \square T_2 \square T_3)$ y otras cotas más débiles para el producto de más de tres árboles. La idea era sólo introducir el concepto de k -tiempo de captura, por supuesto quedan muchas familias de gráficas para las cuales éste se podría calcular y en algunos casos ya se ha calculado en otros artículos.

Bibliografía

- [1] M. Aigner y M. Fromme. *A Game of Cops and Robbers*. Discrete Applied Mathematics (8)(1984) 1-12.
- [2] A. Mehrabian. *The Capture Time of Grids*. Discrete Mathematics (311) (2011) 102-105.
- [3] J. A Bondy y U. S. R. Murty. *Graphs Theory with Applications*. North Holland. New York (1976).
- [4] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag Heidelberg. New York (2005)