



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

**MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA RECUPERACIÓN
MEJORADA DE HIDROCARBUROS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA

MAT. ALFREDO OLVERA GÓMEZ

TUTOR

INSTITUTO DE GEOFÍSICA
DR. ISMAEL HERRERA REVILLA

JURADO EXAMINADOR:

FACULTAD DE INGENIERÍA

DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO

DGSCA

DR. PEDRO GONZÁLEZ CASANOVA HENRÍQUEZ

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

DR. LUIS MIGUEL DE LA CRUZ SALAS

CENTRO DE CIENCIAS DE LA ATMÓSFERA

DR. DAVID PARRA GUEVARA

MÉXICO, D. F. MARZO 2013



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Agradecimientos | IV |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Formulación Unificada de los Modelos Matemáticos de Sistemas Continuos | 5 |
| 2.1. Los Modelos | 6 |
| 2.2. Física Microscópica y Física Macroscópica | 6 |
| 2.3. Cinemática de los Modelos de Sistemas Continuos | 7 |
| 2.4. Propiedades Intensivas y sus Representaciones | 9 |
| 2.4.1. Propiedades Extensivas | 11 |
| 2.4.2. Balance de Propiedades Extensivas e Intensivas | 13 |
| 2.5. Los Modelos de los Sistemas Continuos | 17 |
| 3. Modelos Matemáticos de Yacimientos Petroleros | 21 |
| 3.1. Flujo Bifásico | 21 |
| 3.1.1. Ecuaciones Diferenciables Básicas del Modelo Bifásico. | 21 |
| 3.2. Flujo trifásico o Modelo Beta del petróleo Negro | 24 |
| 3.2.1. Ecuaciones Diferenciables Básicas del Modelo Beta o de Petróleo Negro. | 24 |
| 3.3. Flujo Composicional | 31 |
| 3.3.1. Ecuaciones Diferenciales Básicas del Modelo Composicional | 31 |
| 3.4. Flujo Térmico | 36 |
| 3.4.1. Ecuaciones Diferenciales Básicas del Modelo de Flujo térmico | 36 |
| 4. Propiedades Roca-Fluido | 42 |
| 4.1. Propiedades de la Roca | 42 |
| 4.1.1. Saturación | 42 |
| 4.1.2. Presión Capilar | 43 |
| 4.1.3. Permeabilidad Relativa | 45 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 4.1.4. | Compresibilidad de la Roca | 51 |
| 4.2. | Propiedades de los Fluidos | 52 |
| 4.2.1. | Propiedades PVT del Agua | 52 |
| 4.2.2. | Propiedades PVT del Aceite | 55 |
| 4.2.3. | Propiedades PVT del Gas | 60 |
| 4.2.4. | Compresibilidad Total | 63 |
| 4.2.5. | Ecuaciones de Estado | 64 |
| 4.3. | Las Propiedades que Dependen de la Temperatura | 68 |
| 4.3.1. | Propiedades de la Roca | 68 |
| 4.3.2. | Propiedades de los Fluidos | 69 |
| 5. | Flujo Bifásico | 71 |
| 5.1. | Ecuaciones Diferenciales Básicas | 71 |
| 5.1.1. | Ecuaciones Diferenciales Alternativas. | 72 |
| 5.2. | IMPES Clásico e IMPES Mejorado | 79 |
| 6. | Modelo Beta o de Petróleo Negro | 83 |
| 6.1. | Ecuaciones Diferenciales Básicas | 83 |
| 6.2. | Técnicas de Solución | 89 |
| 6.2.1. | El Método de Newton-Raphson | 90 |
| 6.2.2. | Técnica de Solución Simultánea (SS) | 91 |
| 6.2.3. | Técnica Secuencial. | 104 |
| 6.2.4. | Método Iterativo IMPES | 112 |
| 6.2.5. | Pozos Acoplados | 117 |
| 7. | Conclusiones. | 120 |
| 8. | Nomenclatura | 122 |
| | Bibliografía | 128 |

Dedicado:

A mi madre y a mis hermanos.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Geofísica por darme la oportunidad de ser miembro de su comunidad, al Dr. Ismael Herrera Revilla director de tesis, maestro y tutor, le agradezco por brindarme sus conocimientos durante mi estancia en la maestría. También quiero agradecer a mis sinodales los doctores Fernando Samaniego Verduzco, Pedro González Casanova, Luis Miguel de la Cruz Salas y David Parra Guevara que sin su valioso tiempo y sugerencias no podría haber terminado el presente trabajo.

A CONACyT por otorgarme una beca para realizar mis estudios de maestría, a mi querido amigo Alberto Rosas Medina por brindarme su amistad y su ayuda durante mis estudios.

Alfredo Olvera Gómez

Capítulo 1

Introducción

La tarea de resolver un problema analítico queda siempre inconclusa. Demostrar la existencia y algunas propiedades básicas de la solución se considera, por lo general, satisfactorio, pero quedan siempre importantes preguntas por responder. Tales cuestiones, no sólo son de importancia básica desde el punto de vista teórico, también son inevitables cuando se desea aplicar el análisis a la descripción y al control de los fenómenos naturales, los cuales, pueden describirse en principio sólo de manera aproximada.

El objetivo principal del estudio de un yacimiento petrolero es predecir el comportamiento futuro de éste y encontrar caminos o medios que permitan incrementar la recuperación final. La Ingeniería de yacimientos clásica lo ofrece en un modelo básico (modelo de tanque), pero no puede explicar adecuadamente las variaciones en el yacimiento ni los parámetros de los fluidos en el espacio y en el tiempo. La simulación de Yacimientos, hecha a través de computadoras, permite estudiar, de manera detallada, el yacimiento mediante su división en cierto número de bloques (algunas veces varios miles) y la aplicación de la ecuación fundamental de flujo en medios porosos a cada bloque.

Los programas computacionales que realizan los cálculos necesarios para realizar estudios de este modelo son llamados “modelos computacionales”. Recientemente, con el avance de las computadoras, los aspectos teóricos y prácticos del análisis numérico han recibido un gran impulso. Estos aspectos son presentados en la literatura: ahora es posible escribir modelos más sofisticados que simulan algunos de los procesos

más complejos que tienen lugar en los yacimientos durante la ejecución de los planes de recuperación.

La tecnología de la simulación de yacimientos es constantemente mejorada y ampliada. Por ende, nuevos modelos para simular complejos planes de recuperación se proponen todo el tiempo. Este trabajo trata sobre la construcción de los modelos matemáticos a través del modelo físico, comenzando con el más básico (modelo bifásico) hasta el más complejo (modelo térmico). La descripción de un modelo de un yacimiento está dado en su comportamiento físico, para después expresarlo en los modelos matemáticos y darle solución con modelos numéricos.

Modelo Matemático

El modelo físico que se desea modelar, debe ser expresado en términos de las ecuaciones matemáticas apropiadas. Este proceso casi siempre implica suposiciones. Las suposiciones son necesarias desde el punto de vista práctico a fin de hacer manejable el problema tratado. Por ejemplo, cada ingeniero de yacimientos conoce que el concepto de permeabilidad relativa tiene limitaciones, pero, en esencia, no tenemos más remedio que usarlo. La formulación de un modelo matemático es considerada en el capítulo 2; esta resulta en un conjunto de ecuaciones no lineales parcialmente diferenciales con las correspondientes condiciones iniciales y de frontera.

Modelos de yacimientos

Un modelo matemático consiste en un conjunto de ecuaciones que describen el fluido en un yacimiento petrolero, junto con las apropiadas condiciones de frontera y condiciones iniciales. Los modelos matemáticos para yacimientos petroleros han sido utilizados desde 1800. El presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo de tales modelos.

El fluido en movimiento en un yacimiento petrolero es gobernado por las ecuaciones de; conservación de masa, conservación de momento y conservación de energía. En la simulación de flujo en un yacimiento, la ecuación de momento está dada por la ley de Darcy (Darcy 1856). Derivada de forma empírica, esta ley indica la relación lineal entre la velocidad relativa de los fluidos en los sólidos y el gradiente de la presión. La fiabilidad de las predicciones de un modelo de un yacimiento

petrolero dependen de como los pozos describen el campo. Para desarrollar un modelo, en general, se simplifican suposiciones necesarias, ya que los campos son demasiado complicados para poder describirlos con exactitud. Las suposiciones necesarias para resolver el modelo analítico son muy restrictivas, dado que muchas soluciones analíticas requieren que el yacimiento sea homogéneo e isotrópico. Esto es usualmente necesario para resolver un modelo matemático usando métodos numéricos. Desde 1950, cuando las computadoras digitales llegaron, los modelos numéricos han sido usados para predecir, entender y optimizar los problemas físicos de flujo de fluidos en medios porosos. Sin embargo, con el surgimiento de las nuevas técnicas de recuperación en el campo de producción petrolera, se ha enfatizado la necesidad para sofisticar las herramientas matemáticas y computacionales capaces de modelar los fenómenos físicos complicados y cambios severos entre las interfaces de los fluidos. El objetivo de este trabajo es mostrar y derivar las ecuaciones básicas del flujo de fluidos en un medio poroso y algunos de sus métodos numéricos; las propiedades roca y fluido que afectan en los parámetros; métodos numéricos y sus aplicaciones en flujo bifásico; flujo en tres fases modelo beta del petróleo negro, y flujo composicional.

El contenido del trabajo se encuentra en siguiente orden:

En el capítulo 2 se introduce la Teoría de los Medios Continuos, que no es más que la formulación de los modelos matemáticos de los sistemas continuos. Está constituida por ecuaciones de balance que son aplicables a cualquier sistema continuo de ecuaciones, independientemente de su naturaleza. A partir de la ecuación de balance global se derivan las ecuaciones de balance local, las cuales constituyen, por sí mismas, los modelos básicos de los sistemas continuos.

Luego, en el capítulo 3, se desarrollan las principales ecuaciones que describen el flujo de fluido en un medio poroso en un yacimiento petrolero a partir de la formulación de la teoría de los medios continuos. De esta formulación se desarrollan las ecuaciones básicas que gobiernan el flujo bifásico, el flujo de tipo modelo beta del petróleo negro, flujo composicional y flujo térmico.

En el capítulo 4 consideraremos las propiedades roca y fluido. En

particular, la presión capilar y la permeabilidad relativa son discutidas en las propiedades de roca; las propiedades del agua, aceite, gas, y las ecuaciones de estado se estudian para las propiedades del fluido. Para ser resueltas, las ecuaciones básicas de flujo y transporte hacen uso de las propiedades de la roca y fluido del medio, es decir, dependen de ellas. En este capítulo, se discutirán esas propiedades. En particular, la presión capilar, la permeabilidad relativa, el factor de volumen de la formación, la densidad, la solubilidad, la viscosidad, la compresibilidad y las ecuaciones de estado son usadas para los modelos bifásico, beta o petróleo negro, composicional y térmico. Las ecuaciones de estado de acuerdo con la distribución de los hidrocarburos dentro de las fases. La temperatura depende de las propiedades de la roca y el fluido, los cuales serán también estudiados para el modelo térmico.

Por otra parte, en capítulo 5 se presentan los modelos numéricos que sirven para modelar los modelos bifásicos y, petróleo negro o beta.

Capítulo 2

Formulación Unificada de los Modelos Matemáticos de Sistemas Continuos

La técnica general que se utiliza para realizar la predicción es la modelación. Es decir, en ella se construyen modelos y con ellos se predice el comportamiento del sistema que interesa. Los fundamentos de la física macroscópica los proporciona la ‘teoría de los medios continuos’. En este capítulo, con base en ella se introduce una formulación clara, general y sencilla de los modelos matemáticos de los sistemas continuos. Esta formulación es tan sencilla y tan general, que los modelos básicos de sistemas tan complicados y diversos como la atmósfera, los océanos, los yacimientos petroleros, o los geotérmicos, se derivan por medio de la aplicación repetida de una sólo ecuación diferencial: ‘la ecuación diferencial de balance’.

Dicha formulación también es muy clara, pues en el modelo general no hay ninguna ambigüedad; en particular, todas las variables y parámetros que intervienen en él, están definidos de manera unívoca. En realidad, este modelo general de los sistemas continuos constituye una realización extraordinaria de los paradigmas del pensamiento matemático. El descubrimiento del hecho de que los modelos matemáticos de los sistemas continuos, independientemente de su naturaleza y propiedades intrínsecas, pueden formularse por medio de balances, cuya idea básica no difiere mucho de los balances de la contabilidad financiera, fue el resultado de un

largo proceso de perfeccionamiento en el que concurrieron una multitud de mentes brillantes.

2.1. Los Modelos

Un modelo de un sistema es un sustituto de cuyo comportamiento es posible derivar el correspondiente al sistema original. Los modelos matemáticos, en la actualidad, son los utilizados con mayor frecuencia y también los más versátiles. En las aplicaciones específicas están constituidos por programas de cómputo cuya aplicación y adaptación a cambios de las propiedades de los sistemas es relativamente fácil. También, sus bases y las metodologías que utilizan son de gran generalidad, por lo que es posible construirlos para situaciones y sistemas muy diversos.

Los modelos matemáticos son entes en los que se integran los conocimientos científicos y tecnológicos, con los que se construyen programas de cómputo que se implementan con medios computacionales. En la actualidad, la simulación numérica permite estudiar sistemas complejos y fenómenos naturales que sería muy costoso, peligroso o incluso imposible de estudiar por experimentación directa. En esta perspectiva la significación de los modelos matemáticos en ciencias e ingeniería es clara, porque la modelación matemática constituye el método más efectivo de predecir el comportamiento de los diversos sistemas de interés. En nuestro país, ellos son usados ampliamente en la industria petrolera, en las ciencias y la ingeniería del agua y en muchas otras.

2.2. Física Microscópica y Física Macroscópica

La materia, cuando se le observa en el ámbito ultramicroscópico, está formada por moléculas y átomos. Estos a su vez, por partículas aún más pequeñas como los protones, neutrones y electrones. La predicción del comportamiento de estas partículas es el objeto de estudio de la mecánica cuántica y la física nuclear. Sin embargo, cuando deseamos predecir el comportamiento de sistemas tan grandes como la atmósfera o un yacimiento petrolero, los cuales están formados por un número extraordinariamente grande de moléculas y átomos, su estudio resulta inaccesible con esos métodos y en cambio el enfoque macroscópico es

apropiado.

Por eso en lo que sigue distinguiremos dos enfoques para el estudio de la materia y su movimiento. El primero el de las moléculas, los átomos y las partículas elementales es el enfoque microscópico y el segundo es el enfoque macroscópico. Al estudio de la materia con el enfoque macroscópico, se le llama física macroscópica y sus bases teóricas las proporciona la mecánica de los medios continuos.

Cuando se estudia la materia con este último enfoque, se considera que los cuerpos llenan el espacio que ocupan, es decir que no tienen huecos, que es la forma en que los vemos sin el auxilio de un microscopio. Por ejemplo, el agua llena todo el espacio del recipiente donde está contenida. Este enfoque macroscópico está presente en la física clásica. La ciencia ha avanzado y ahora sabemos que la materia está llena de huecos, que nuestros sentidos no perciben y que la energía también está cuantizada. A pesar de que estos dos enfoques para el análisis de los sistemas físicos, el microscópico y el macroscópico, parecen a primera vista conceptualmente contradictorio, ambos son compatibles, y complementarios, y es posible establecer la relación entre ellos utilizando a la mecánica estadística.

2.3. Cinemática de los Modelos de Sistemas Continuos

En la teoría de los sistemas continuos, los cuerpos llenan todo el espacio que ocupan. Y en cada punto del espacio físico hay una y solamente una partícula. Así, definimos como sistema continuo a un conjunto de partículas. Aún más, dicho conjunto es un subconjunto del espacio Euclidiano tridimensional. Un cuerpo es un subconjunto de partículas que en cualquier instante dado ocupa un dominio, en el sentido matemático, del espacio físico; es decir, del espacio Euclidiano tridimensional. Denotaremos por $B(t)$ a la región ocupada por el cuerpo \mathcal{B} , en el tiempo t , donde t puede ser cualquier número real.

Frecuentemente, sin embargo, nuestro interés de estudio se limitará a un intervalo finito de tiempo. Dado un cuerpo \mathcal{B} , todo subdominio $\tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$, constituye a su vez otro cuerpo; en tal caso, se dice que $\tilde{\mathcal{B}} \subset$

\mathcal{B} es un subcuerpo de \mathcal{B} . De acuerdo con lo mencionado antes, una hipótesis básica de la teoría de los sistemas continuos es que en cualquier tiempo $t \in (-\infty, \infty)$ y en cada punto $x \in \mathcal{B}$ de la región ocupada por el cuerpo, hay una y sólo una partícula del cuerpo. Como en nuestra revisión se incluye no solamente la estática (es decir, los cuerpos en reposo), sino también la dinámica (es decir, los cuerpos en movimiento), un primer problema de la cinemática de los sistemas continuos consiste en establecer un procedimiento para identificar a las partículas cuando están en movimiento en el espacio físico.

Sea $\underline{X} \in \mathcal{B}$, una partícula y $p(\underline{X}, t)$ el vector de la posición que ocupa, en el espacio físico, dicha partícula en el instante t . Una forma, pero no la única, de identificar la partícula \underline{X} es asociándole la posición que ocupa en un instante determinado. Tomaremos en particular el tiempo $t = 0$, en tal caso $p(\underline{X}, 0) \equiv \underline{X}$.

A las coordenadas del vector $\underline{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$, se les llama las coordenadas materiales de la partícula. En este caso, las coordenadas materiales de una partícula son las coordenadas del punto del espacio físico que ocupaba la partícula en el tiempo inicial, $t = 0$. Desde luego, el tiempo inicial puede ser cualquier otro, si así se desea. Sea \mathcal{B} el dominio ocupado por un cuerpo en el tiempo inicial, entonces $\underline{X} \in \mathcal{B}$ si y solamente si la partícula \underline{X} es del cuerpo. Es decir, \mathcal{B} caracteriza al cuerpo. Sin embargo, debido al movimiento, la región ocupada por el mismo cambia con el tiempo y será denotada por $B(t)$.

Formalmente, para cualquier $t \in (-\infty, \infty)$, $B(t)$ se define por

$$B(t) \equiv \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \underline{X} \in \mathcal{B} \text{ tal que } \underline{x} = p(\underline{X}, t) \} \quad (2.1)$$

el vector posición $p(\underline{X}, t)$ es función del vector tridimensional \underline{X} y del tiempo. Si fijamos el tiempo t , $p(\underline{X}, t)$ define una transformación del espacio Euclidiano \mathbb{R}^3 en si mismo y la Ec. (2.1) es equivalente a $B(t) = p(\mathcal{B}, t)$. Una notación utilizada para representar esta familia de funciones es $\underline{p}(\cdot, t)$. De acuerdo a la hipótesis de los sistemas continuos: En cualquier tiempo $t \in (-\infty, \infty)$ y en cada punto $\underline{x} \in B$ de la región ocupada por el cuerpo hay una y sólo una partícula del cuerpo \mathcal{B} para cada t fijo. Es decir, $\underline{p}(\cdot, t)$ es una función biunívoca, por lo que existe la

función inversa $\underline{p}^{-1}(\cdot, t)$.

Si se fija la partícula \underline{X} en la función $\underline{p}(\underline{X}, t)$ y se varía el tiempo t , se obtiene su trayectoria. Esto permite obtener la velocidad de cualquier partícula, la cual es un concepto central en la descripción del movimiento. Ella se define como la derivada con respecto al tiempo de la posición cuando la partícula se mantiene fija. Es decir, es la derivada parcial con respecto al tiempo de la función de posición $\underline{p}(\underline{X}, t)$. Por lo mismo, la velocidad como función de las coordenadas materiales de las partículas, está dada por

$$\underline{V}(\underline{X}, t) \equiv \frac{\partial \underline{p}}{\partial t}(\underline{X}, t). \quad (2.2)$$

2.4. Propiedades Intensivas y sus Representaciones

En lo que sigue consideraremos funciones definidas para cada tiempo, en cada una de las partículas de un sistema continuo. A tales funciones se les llama ‘propiedades intensivas’. Las propiedades intensivas pueden ser funciones escalares o funciones vectoriales. Por ejemplo, la velocidad, definida por la Ec. (2.2), es una función vectorial que depende de la partícula \underline{X} y del tiempo t .

Una propiedad intensiva con valores vectoriales es equivalente a tres escalares, correspondientes a cada una de sus tres componentes. Hay dos formas de representar a las propiedades intensivas: la representación Euleriana y la representación Lagrangiana. Los nombres son en honor a los matemáticos Leonard Euler (1707-1783) y Joseph Louis Lagrange (1736-1813), respectivamente. Frecuentemente, el punto de vista Lagrangiano es utilizado en el estudio de los sólidos, mientras que el Euleriano se usa más en el estudio de los fluidos.

Considere una propiedad intensiva escalar, la cual en el tiempo t toma el valor $\phi(\underline{X}, t)$ en la partícula \underline{X} . Entonces, de esta manera se define una función $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^1$, para cada $t \in (-\infty, \infty)$ a la que se denomina representación Lagrangiana de la propiedad intensiva considerada. Ahora, sea $\psi(\underline{x}, t)$ el valor que toma esa propiedad en la partícula que ocupa la posición \underline{x} , en el tiempo t . En este caso, para cada $t \in (-\infty, \infty)$ se define una función $\psi : B(t) \rightarrow \mathbb{R}^1$ a la cual se denomina representación Euleriana de la función considerada. Estas dos representaciones de una

misma propiedad están relacionadas por la siguiente identidad

$$\phi(\underline{X}, t) \equiv \psi(\underline{p}(\underline{X}, t), t). \quad (2.3)$$

Nótese que, aunque ambas representaciones satisfacen la Ec. (2.3), las funciones $\phi(\underline{X}, t)$ y $\psi(\underline{x}, t)$ no son idénticas. Sus argumentos \underline{X} y \underline{x} son vectores tridimensionales (es decir, puntos de \mathbb{R}^3); sin embargo, si tomamos $\underline{X} = \underline{x}$, en general

$$\phi(\underline{X}, t) \neq \psi(\underline{X}, t). \quad (2.4)$$

La expresión de la velocidad de una partícula dada por la Ec. (2.2), define a su representación Lagrangiana, por lo que utilizando la Ec. (2.3) es claro que

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\underline{X}, t) = \underline{V}(\underline{X}, t) \equiv \underline{v}(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \quad (2.5)$$

donde $\underline{v}(\underline{x}, t)$ es la representación Euleriana de la velocidad. Por lo mismo

$$\underline{v}(\underline{x}, t) \equiv \underline{V}(\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t), t). \quad (2.6)$$

Esta ecuación tiene la interpretación de que la velocidad en el punto \underline{x} del espacio físico, es igual a la velocidad de la partícula que pasa por dicho punto en el instante t . La Ec. (2.6) es un caso particular de la relación

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \phi(\underline{p}^{-1}(\underline{x}, t), t)$$

de validez general, la cual es otra forma de expresar la relación de la Ec. (2.3) que existe entre las dos representaciones de una misma propiedad intensiva.

La derivada parcial con respecto al tiempo de la representación Lagrangiana $\phi(\underline{X}, t)$ de una propiedad intensiva, de acuerdo a la definición de la derivada parcial de una función, es la tasa de cambio con respecto al tiempo que ocurre en una partícula fija. Es decir, si nos montamos en una partícula y medimos a la propiedad intensiva y luego los valores así obtenidos los derivamos con respecto al tiempo, el resultado final es $\frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial t}$. En cambio, si $\psi(\underline{x}, t)$ es la representación Euleriana de esa misma propiedad, entonces $\frac{\partial \psi(\underline{x}, t)}{\partial t}$ es simplemente la tasa de cambio con

respecto al tiempo que ocurre en un punto fijo en el espacio. Tiene interés evaluar la tasa de cambio con respecto al tiempo que ocurre en una partícula fija, cuando se usa la representación Euleriana. Derivando con respecto al tiempo a la identidad de la Ec. (2.3) y la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{\partial\phi(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t}(\underline{p}(\underline{X}, t), t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \frac{\partial p_i}{\partial t}(\underline{X}, t). \quad (2.7)$$

Se acostumbra definir el símbolo $\frac{D\psi}{Dt}$ por

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

o, más brevemente,

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla\psi \quad (2.9)$$

llamada derivada material, utilizando esta notación, se puede escribir

$$\frac{\partial\phi(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{D\psi}{Dt}(\underline{p}(\underline{X}, t)) \equiv \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla\psi \right) (\underline{p}(\underline{X}, t), t). \quad (2.10)$$

Por ejemplo, la aceleración de una partícula se define como la derivada de la velocidad cuando se mantiene a la partícula fija. Aplicando la Ec. (2.9) se tiene

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla\underline{v} \quad (2.11)$$

una expresión más transparente se obtiene aplicando la Ec. (2.9) a cada una de las componentes de la velocidad. Así, se obtiene

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla v_i. \quad (2.12)$$

Desde luego, la aceleración, en representación Lagrangiana es simplemente

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{p}(\underline{X}, t). \quad (2.13)$$

2.4.1. Propiedades Extensivas

En la sección anterior se consideraron funciones definidas en las partículas de un cuerpo, más precisamente, funciones que hacen corresponder a cada partícula y cada tiempo un número real, o un vector

del espacio Euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 . En ésta, en cambio, empezaremos por considerar funciones que a cada cuerpo \mathcal{B} de un sistema continuo, y a cada tiempo t le asocia un número real o un vector de \mathbb{R}^3 . A una función de este tipo $\mathbb{E}(\mathcal{B}, t)$ se le llama ‘propiedad extensiva’ cuando esta dada por una integral

$$\mathbb{E}(\mathcal{B}, t) \equiv \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x}. \quad (2.14)$$

Observe que, en tal caso, el integrando define una función $\psi(\underline{x}, t)$ y por lo mismo, una propiedad intensiva. En particular, la función $\psi(\underline{x}, t)$ es la representación Euleriana de esa propiedad intensiva. Además, la Ec. (2.14) establece una correspondencia biunívoca entre las propiedades extensivas y las intensivas, porqué dada la representación Euleriana $\psi(\underline{x}, t)$ de cualquier propiedad intensiva, su integral sobre el dominio ocupado por cualquier cuerpo, define una propiedad extensiva. Finalmente, la notación empleada en la Ec. (2.14) es muy explícita, pues ahí se ha escrito $\mathbb{E}(\mathcal{B}, t)$ para enfatizar que el valor de la propiedad extensiva corresponde al cuerpo \mathcal{B} . Sin embargo, en lo que sucesivo, se simplificara la notación omitiendo el símbolo \mathcal{B} es decir, se escribirá $\mathbb{E}(t)$ en vez de $\mathbb{E}(\mathcal{B}, t)$.

Hay diferentes formas de definir a las propiedades intensivas. Como aquí lo hemos hecho, es por unidad de volumen. Sin embargo, es frecuente que se le defina por unidad de masa véase (ver [14]). Es fácil ver que la propiedad intensiva por unidad de volumen es igual a la propiedad intensiva por unidad de masa multiplicada por la densidad de masa (es decir, masa por unidad de volumen), por lo que es fácil pasar de un concepto al otro, utilizando la densidad de masa.

Sin embargo, una ventaja de utilizar a las propiedades intensivas por unidad de volumen, en lugar de las propiedades intensivas por unidad de masa, es que la correspondencia entre las propiedades extensivas y las intensivas es más directa: dada una propiedad extensiva, la propiedad intensiva que le corresponde es la función que aparece como integrando, cuando aquélla se expresa como una integral de volumen. Además, del cálculo se sabe que

$$\psi(\underline{x}, t) \equiv \lim_{Vol \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(t)}{Vol} = \lim_{Vol \rightarrow 0} \frac{\int_{B(t)} \psi(\underline{\xi}, t) d\underline{\xi}}{Vol}. \quad (2.15)$$

La Ec. (2.15) proporciona un procedimiento efectivo para determinar las propiedades extensivas experimentalmente: se mide la propiedad extensiva en un volumen pequeño del sistema continuo de que se trate, se le divide entre el volumen y el cociente que se obtiene es una buena aproximación de la propiedad intensiva.

El uso que haremos del concepto de propiedad extensiva es, desde luego, lógicamente consistente. En particular, cualquier propiedad que satisface las condiciones de la definición de propiedad extensiva establecidas antes es, por ese hecho, una propiedad extensiva. Sin embargo, no todas las propiedades extensivas que se pueden obtener de esta manera son de interés en la mecánica de los medios continuos. Una razón básica por la que ellas son importantes es porque el modelo general de los sistemas continuos se formula en términos de ecuaciones de balance de propiedades extensivas, como se verá más adelante.

2.4.2. Balance de Propiedades Extensivas e Intensivas

Los modelos matemáticos de los sistemas continuos están constituidos por balances de propiedades extensivas. Por ejemplo, los modelos de transporte de solutos (los contaminantes transportados por corrientes superficiales o subterráneas, son un caso particular de estos procesos de transporte) se construyen haciendo el balance de la masa de soluto que hay en cualquier dominio del espacio físico. Aquí, el término balance se usa, esencialmente, en un sentido contable. En la contabilidad que se realiza para fines financieros o fiscales, la diferencia de las entradas menos las salidas nos da el aumento, o cambio, de capital. En forma similar, en la mecánica de los medios continuos se realiza, en cada cuerpo del sistema continuo, un balance de las propiedades extensivas en que se basa el modelo.

Ecuación de Balance Global Para realizar tales balances es necesario, en primer lugar, identificar las causas por las que las propiedades extensivas pueden cambiar. Tomemos como ejemplo de propiedad extensiva a las existencias de maíz que hay en el país. La primera pregunta es: ¿qué causas pueden motivar su variación, o cambio, de esas existencias?

Un análisis sencillo nos muestra que dicha variación puede ser debida a que se produzca o se consuma. También a que se importe o se exporte por los límites del país (fronteras o litorales). Y con esto se agotan las causas posibles; es decir, esta lista es exhaustiva. Producción y consumo son términos similares, pero sus efectos tienen signos opuestos, que fácilmente se engloban en uno solo de esos conceptos. De hecho, si convenimos en que la producción puede ser negativa, entonces el consumo es una producción negativa.

Una vez adoptada esta convención, ya no es necesario ocuparnos separadamente del consumo. En forma similar, la exportación es una importación negativa. Entonces, el incremento en las existencias $\Delta\mathbb{E}$ en un período Δt queda dado por la ecuación

$$\Delta\mathbb{E} = \mathbb{P} + \mathbb{I} \quad (2.16)$$

donde a la producción y a la importación, ambas con signo, se les ha representado por \mathbb{P} y \mathbb{I} respectivamente.

Similarmente, en la mecánica de los medios continuos, la lista exhaustiva de las causas por las que una propiedad extensiva de cualquier cuerpo puede cambiar, contiene solamente dos motivos:

- i) Por producción en el interior del cuerpo; y
- ii) Por importación (es decir, transporte) a través de la frontera.

Esto conduce a la siguiente ecuación de “balance global”, de gran generalidad, para las propiedades extensivas

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt}(t) = \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} q(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x}. \quad (2.17)$$

Donde $g(\underline{x}, t)$ es la generación en el interior del cuerpo, con signo, de la propiedad extensiva correspondiente, por unidad de volumen, por unidad de tiempo. Además, en la Ec. (2.17) se ha tomado en cuenta la posibilidad de que haya producción concentrada en la superficie $\Sigma(t)$, la cual está dada en esa ecuación por la última integral, donde $g_{\Sigma}(\underline{x}, t)$ es la producción por unidad de área. Por otra parte $q(\underline{x}, t)$ es lo que se

importa o transporta hacia el interior del cuerpo a través de la frontera del cuerpo $\partial\mathcal{B}(t)$, en otras palabras, es el flujo de la propiedad extensiva a través de la frontera del cuerpo, por unidad de área, por unidad de tiempo. Puede demostrarse, con base en hipótesis válidas en condiciones muy generales, que para cada tiempo t existe un campo vectorial $\tau(\underline{x}, t)$ tal que

$$q(\underline{x}, t) \equiv \tau(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) \quad (2.18)$$

donde $\underline{n}(\underline{x}, t)$ es normal exterior a $\partial\mathcal{B}(t)$. En vista de esta relación, la Ec. (2.17) de balance se puede escribir como

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt}(t) = \int_{\mathcal{B}(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial\mathcal{B}(t)} \tau(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(\underline{x}, t) d\underline{x}. \quad (2.19)$$

La relación (2.19) se le conoce con el nombre de “ecuación general de balance global” y es la ecuación básica de los balances de los sistemas continuos. A la función $g(\underline{x}, t)$ se le denomina generación interna y al campo vectorial $\tau(\underline{x}, t)$ el campo de flujo.

Condiciones de Balance Local Los modelos de los sistemas continuos están constituidos por las ecuaciones de balance correspondientes a una colección de propiedades extensivas. Así, a cada sistema continuo le corresponde una familia de propiedades extensivas, tal que, el modelo matemático del sistema está constituido por las condiciones de balance de cada una de las propiedades extensivas de dicha familia.

Sin embargo, las propiedades extensivas mismas no se utilizan directamente en la formulación del modelo, en su lugar se usan las propiedades intensivas asociadas a cada una de ellas. Esto es posible porque las ecuaciones de balance global son equivalentes a las llamadas condiciones de balance local, las cuales se expresan en términos de las propiedades intensivas correspondientes. Las condiciones de balance local son de dos clases: ‘las ecuaciones diferenciales de balance local’ y ‘las condiciones de salto’.

Las primeras son ecuaciones diferenciales parciales, que se deben satisfacer en cada punto del espacio ocupado por el sistema continuo, y las segundas son ecuaciones algebraicas que las discontinuidades deben satisfacer donde ocurren; es decir, en cada punto de Σ . Cabe mencionar

que las ecuaciones diferenciales de balance local son de uso mucho más amplio que las condiciones de salto, pues estas últimas solamente se aplican cuando y donde hay discontinuidades, mientras que las primeras en todo punto del espacio ocupado por el sistema continuo.

Una vez establecidas las ecuaciones diferenciales y de salto del balance local, e incorporada la información científica y tecnológica necesaria para completar el modelo (la cual por cierto se introduce a través de las llamadas ecuaciones constitutivas'), el problema matemático de desarrollar el modelo y derivar sus predicciones se transforma en uno correspondiente a la teoría de las ecuaciones diferenciales, generalmente parciales, y sus métodos numéricos.

Las Ecuaciones de Balance Local En lo que sigue se supone que las propiedades intensivas pueden tener discontinuidades, de salto exclusivamente, a través de la superficie $\Sigma(t)$. Se entiende por 'discontinuidad de salto', una en que el límite por ambos lados de $\Sigma(t)$ existe, pero son diferentes. Se utilizará en lo que sigue los resultados matemáticos que se dan a continuación, (ver [13]).

Teorema 1 Para cada $t > 0$, sea $\mathcal{B}(t) \subset \mathbb{R}^3$ el dominio ocupado por un cuerpo. Suponga que la 'propiedad intensiva' $\psi(\underline{x}, t)$ es de clase C^1 , excepto a través de la superficie $\Sigma(t)$. Además, sean las funciones $\underline{v}(\underline{x}, t)$ y $\underline{v}_\Sigma(\underline{x}, t)$ esta última definida para $\underline{x} \in \Sigma(t)$ solamente, las velocidades de las partículas y la de $\Sigma(t)$, respectivamente. Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(t)} \psi d\underline{x} \equiv \int_{\mathcal{B}(t)} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) \right\} d\underline{x} + \int_{\Sigma} [(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) \psi] \cdot \underline{n} d\underline{x}. \quad (2.1)$$

Teorema 2 Considere un sistema continuo, entonces, la ecuación de balance global se satisface para todo cuerpo del sistema continuo si y solamente si se cumplen las condiciones siguientes:

i) La ecuación diferencial

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v}\psi) = \nabla \cdot \underline{\tau} + g \quad (2.20)$$

vale en todo punto $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, de la región ocupada por el sistema.

ii) La ecuación

$$[\psi (\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} = g_\Sigma \quad (2.21)$$

vale en todo punto $\underline{x} \in \Sigma$.

A las ecuaciones (2.20) y (2.21), se les llama ecuación diferencial de balance local y condición de salto, respectivamente.

Desde luego, el caso más general que se estudiará se refiere a situaciones dinámicas; es decir, aquéllas en que las propiedades intensivas cambian con el tiempo. Sin embargo, los estados estacionarios de los sistemas continuos son de sumo interés. Por estado estacionario se entiende uno en que las propiedades intensivas son independientes del tiempo. En los estados estacionarios, además, las superficies de discontinuidad $\Sigma(t)$ se mantienen fijas (no se mueven). En este caso $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ y $\underline{v}_\Sigma = 0$. Por lo mismo, para los estados estacionarios, la ecuación de balance local y la condición de salto se reducen a

$$\nabla \cdot (\underline{v}\psi) = \nabla \cdot \underline{\tau} + g \quad (2.22)$$

que vale en todo punto $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ y

$$[\psi \underline{v} - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} = g_\Sigma \quad (2.23)$$

que se satisface en todo punto de la discontinuidad $\Sigma(t)$ respectivamente.

2.5. Los Modelos de los Sistemas Continuos

Sistemas Continuos de una y Varias Fases Dos conceptos relacionados, utilizados en el estudio de los sistemas continuos, son el de ‘fase’ y ‘componente’. La diferencia entre mezcla y disolución (o solución), la cual es ampliamente conocida, puede ayudar a motivar estos conceptos. Por ejemplo, si disolvemos sal de mesa (cloruro de sodio) en agua pura y aumentamos la sal disuelta por encima de la concentración de saturación el exceso de sal se separa. Entonces, esa sal no disuelta puede mezclarse, por ejemplo, utilizando un mecanismo revolvedor, hasta formar una mezcla relativamente homogénea. Sin embargo, si esa mezcla se deja en reposo al poco tiempo veremos que la sal que no se disolvió se mueve hacia la base del recipiente. En este caso podemos distinguir

dos fases, la fase líquida y la fase sólida. Además, la fase líquida y la fase sólida se mueven con diferentes velocidades, pues la fase líquida está en reposo, mientras que la fase sólida (la sal no disuelta) se mueve hacia el fondo del recipiente.

Forma General de los Modelos de los Sistemas Continuos Los modelos de los sistemas continuos modelan sus procesos; por ejemplo: el transporte de solutos contenidos en un fluido. Como ya se dijo, se identifica a un conjunto finito, o familia, de propiedades extensivas (una, dos, tres, etc.). A cada una de las propiedades extensivas de esa familia se les impone la condición de satisfacer el Balance Global de la Ec.(2.17), en cada cuerpo del sistema continuo, lo cual es equivalente a la ecuación diferencial de Balance Local y a la Condición de Salto. Es interesante mencionar, que esta forma de proceder se aplica no solamente a sistemas continuos de una sola fase, sino también a sistemas de varias fases como los yacimientos petroleros y los geotérmicos.

Ecuaciones Básicas de los Modelos Continuos La discusión y resultados presentados anteriormente, se aplican a continuación para derivar una forma muy general de los sistemas de ecuaciones que gobiernan a los modelos de los sistemas continuos. Sea M el número de fases que integran a un sistema continuo. Denotaremos por N_α el número de propiedades extensivas, asociadas con la fase α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$) Suponga además, que para $\beta = 1, 2, \dots, N_\alpha$ y $\alpha = 1, 2, 3, \dots, M$, la propiedad intensiva asociada a la extensiva E_β^α es ψ_β^α de manera que

$$E_\beta^\alpha = \int_{\mathcal{B}_\alpha(t)} \psi_\beta^\alpha(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (2.24)$$

Aplicando las ecuaciones de balance, Ecs.(2.20) y (2.21) se obtiene

$$\frac{\partial \psi_\beta^\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \psi_\beta^\alpha) = \nabla \cdot \tau^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

$$\forall \beta = 1, 2, \dots, N_\alpha \text{ y } \alpha = 1, 2, 3, \dots, M$$

y las condiciones de salto

$$[\psi_\beta^\alpha (\underline{v}^\alpha - \underline{v}_\Sigma) - \tau^{\alpha\beta}] \cdot \underline{n} = g_\Sigma^{\alpha\beta} \quad (2.26)$$

$$\forall \beta = 1, 2, \dots, N_\alpha \text{ y } \alpha = 1, 2, 3, \dots, M$$

Estas son las ecuaciones básicas que gobiernan a una gran diversidad de sistemas continuos. Sin embargo, ellas no constituyen modelos completos. Decimos que el modelo de un sistema continuo es completo si define un problema bien planteado. Se dice que un problema de valores iniciales y de frontera es bien planteado si se cumple que:

- a) Existe una y sólo una solución, y
- b) Esta depende de manera continua de las condiciones iniciales y de frontera del problema.

Para obtener modelos completos, además de las ecuaciones básicas, (2.25) y (2.26), es necesario evaluar la generación interna, determinada por las funciones $g^{\alpha\beta}$ y $g_{\Sigma}^{\alpha\beta}$ y el campo de flujo, $\tau^{\alpha\beta}$ en términos de funciones conocidas de las propiedades intensivas asociadas. A través de estas funciones, llamadas “ecuaciones constitutivas”, se integra el conocimiento científico y tecnológico en los modelos matemáticos, el cual es proporcionado por las ciencias y las tecnologías. Ellas pueden ser la Física, la Química, la Biología, las Ingenierías, etc.; todo depende de la clase de procesos involucrados. Por ejemplo, al estudiar el transporte de un soluto producido por una reacción química, la rapidez con que se produce el soluto depende de la concentración de él y de las demás sustancias que participen en la reacción, por lo que el suministro externo, $g(x, t)$, sería una función de esos parámetros. En este caso, a través de esta función se integraría el conocimiento químico en el modelo. Observe que en este caso el suministro externo proviene del interior del sistema en estudio, pero se origina en alguna otra, u otras componentes que son ajenas, o externas, a aquélla a la que se le hace el balance.

En resumen, los modelos de los sistemas continuos están constituidos por:

- Una colección de propiedades intensivas o, lo que es lo mismo, extensivas;
- El conjunto de ecuaciones de balance local correspondientes (diferenciales y de salto), en cada una de las cuales la velocidad de las partículas es la de la fase correspondiente;

- Suficientes relaciones que ligen a las propiedades intensivas entre sí y que definan a, y en términos de éstas, las cuales se conocen como leyes constitutivas; y
- Condiciones iniciales y de frontera que deben satisfacer las propiedades intensivas.

Capítulo 3

Modelos Matemáticos de Yacimientos Petroleros

3.1. Flujo Bifásico

3.1.1. Ecuaciones Diferenciables Básicas del Modelo Bifásico.

En la presente sección se hace uso de la formulación de los sistemas continuos (2.20) derivaremos a continuación las ecuaciones que constituyen el modelo de flujo bifásico a través de un medio poroso.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = \nabla \cdot \underline{\tau} + g \quad (3.1)$$

Suposiciones del Modelo Bifásico.

Algunas de las hipótesis básicas de este modelo son las siguientes:

- I. Hay dos fases líquidas la del agua y la fase del aceite.
- II. El yacimiento está saturado por los fluidos.
- III. Los hidrocarburos no son solubles en el agua.
- IV. No hay procesos difusivos de masa

En la tabla siguiente se listan las masas por fases y componentes.

| Fase | Componente | Masa |
|----------------|----------------|-------|
| agua (w) | agua (w) | M_w |
| aceite (o) | aceite (o) | M_o |

Familia de Propiedades Extensivas del Modelo Bifásico

Las propiedades extensivas en que se basa el modelo bifásico, son dos:

1. La masa del agua, en la fase del agua.

$$M_w(t) \equiv \int_{B_w(t)} \phi S_w \rho_w d\underline{x},$$

2. La masa de aceite líquido.

$$M_o(t) \equiv \int_{B_o(t)} \phi S_o \rho_o d\underline{x},$$

Aquí B_w y B_o son los cuerpos de la fase agua, y la fase de aceite líquido. Para cada una de las propiedades extensivas aplicamos la ecuación general de balance global es:

$$\frac{dE}{dt}(t) \equiv \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

Observamos que para cada una de estas dos propiedades extensivas $\underline{\tau} = 0$, dado que el modelo bifásico asume de que no hay procesos difusivos, por lo tanto el balance global de las propiedades se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dM_w}{dt}(t) &\equiv \int_{B(t)} g_w d\underline{x} \\ \frac{dM_o}{dt}(t) &\equiv \int_{B(t)} g_o d\underline{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos usado una notación obvia g_α para término fuente para cada una de las propiedades extensivas. En la ingeniería petrolera, para efectos de los pozos de bombeo es frecuente usar la notación de inyección (q_α) o extracción ($-q_\alpha$). Sus velocidades respectivas son \underline{v}^w y \underline{v}^o . Las propiedades intensivas correspondientes a estas propiedades extensivas son:

$$\begin{aligned} \psi^w &= \phi S_w \rho_w \\ \psi^o &= \phi S_o \rho_o \end{aligned}$$

Las ecuaciones básicas del modelo se obtienen aplicando las Ecuaciones de Balance Local, Ecs.(2.20), a estas dos propiedades intensivas. Las ecuaciones diferenciales de balance local, Ecs.(2.20), correspondientes a las propiedades extensivas son:

$$\frac{\partial \phi S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_w \rho_w \underline{v}^w) = q_w \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \rho_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_o \rho_o \underline{v}^o) = q_o \quad (3.3)$$

Haciendo uso de la siguiente relación que vincula la velocidad de las partículas con la velocidad de Darcy en cada fase:

$$\mathbf{u}_\alpha = \phi S_\alpha \underline{v}^\alpha; \alpha = w, o \text{ y } g \quad (3.4)$$

y sustituyendo (3.4) en las ecuaciones (3.2)-(3.3) se obtiene:

$$\frac{\partial \phi S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) = q_w \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \rho_o}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}_o) = q_o \quad (3.6)$$

Hay varias leyes constitutivas que completan el modelo para el flujo multifásico, tales como la saturación, presión capilar, ley de Darcy y permeabilidad relativa, las cuales deben ser incluidas. La saturación de un fluido está definida como la fracción de volumen de los poros ocupada por las fases en un medio poroso lleno. El factor que relaciona los dos fluidos juntos es que llenan el espacio vacío de los poros, esto implica que:

$$S_w + S_o = 1, \quad (3.7)$$

donde S_w y S_o representan la fracción del volumen de los poros ocupada por las fases agua(fase mojante) y aceite(fase no mojante) respectivamente.

Las diferencias de presión, está dada por la presión capilar dada por la siguiente expresión:

$$p_c = p_o - p_w \quad (3.8)$$

Empíricamente la presión capilar está en función de la saturación S_w .

La ley Darcy para el caso de flujo multifásico se expresa como:

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{\mathbf{k}k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}); \alpha = w \text{ y } o \quad (3.9)$$

donde $\rho_\alpha \mathbf{k}$, $k_{r\alpha}$, p_α y μ_α son la aceleración gravitacional, el tensor de permeabilidad intrínseca, la permeabilidad relativa, presión y viscosidad para cada fase α , respectivamente. Sean q_α el número finito de pozos de inyección o extracción dependiendo del signo de q_α . Las densidades ρ_w y ρ_o son funciones de sus respectivas presiones. Así antes de sustituir la ecuación (3.9) en la ecuaciones (3.5) y (3.6) y usando las ecuaciones (3.7) y (3.8), podemos completar el sistema de dos ecuaciones para dos de las cuatro principales incógnitas p_α y S_α , $\alpha = w, o$.

3.2. Flujo trifásico o Modelo Beta del petróleo Negro

3.2.1. Ecuaciones Diferenciables Básicas del Modelo Beta o de Petróleo Negro.

En el presente sección se hace uso de la formulación de los sistemas continuos (ver [1]) derivaremos las ecuaciones que constituyen el modelo de flujo multifásico a través de un medio poroso, también conocidas en la literatura de ingeniería de yacimientos petroleros como modelo beta o de petróleo negro (ver [4]).

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) = \nabla \cdot \underline{\tau} + g \quad (3.10)$$

Suposiciones del Modelo Beta o de Petróleo Negro. Algunas de las hipótesis básicas de este modelo son las siguientes:

- I. Hay tres fases fluidas en el yacimiento; dos líquidas y la fase gaseosa. Las líquidas son la fase del agua y la fase del aceite líquido.
- II. El yacimiento está saturado por los fluidos.
- III. Los hidrocarburos no son solubles en el agua.
- IV. Hay dos clases de hidrocarburos: volátiles y no volátiles.

- V. La fase gaseosa está formada por hidrocarburos volátiles, exclusivamente.
- VI. La fase del aceite líquido contiene hidrocarburos volátiles y no volátiles.
- VII. Hay intercambio de hidrocarburos volátiles entre la fase del aceite líquido y la fase gaseosa.
- VIII. No hay procesos difusivos de masa.

Una de las fases líquidas, es la *fase agua* y la otra es la llamada *fase de aceite líquido*. El agua contenida en fase agua, puede contener diversas sustancias disueltas, pero no hidrocarburos, porque el aceite no es soluble en agua. La fase de aceite líquido contiene hidrocarburos que clasificaremos en dos grupos: hidrocarburos *no volátiles* y *hidrocarburos volátiles* (gas disuelto). La fase gas, está formada principalmente por hidrocarburos en estado gaseoso (cuya composición química es la misma que la del gas disuelto, consiste principalmente en metano y etano). Para reducir la confusión entre fase y componente. Usaremos subíndices en minúsculas y mayúsculas, para denotar fase y componente, respectivamente. Notemos que la fase agua consta de una sola componente. El subíndice *s* indica las condiciones estandar.

En la tabla siguiente se listan las masas por fases y componentes.

| Fase | Componente | Masa |
|---------------------|---------------------------|----------|
| agua (<i>w</i>) | agua (<i>w</i>) | M_w |
| aceite (<i>o</i>) | aceite (<i>o</i>) | M_{Oo} |
| | gas disuelto(<i>Go</i>) | M_{Go} |
| gas (<i>g</i>) | gas (<i>g</i>) | M_g |

Familia de Propiedades Extensivas del Modelo Beta del Petróleo Negro

Para poder definir apropiadamente la masa correspondiente a cada componente, es necesario tomar en cuenta la hipótesis II del modelo Beta, es decir cada componente ocupa una fracción de poro o hueco.

Las propiedades extensivas en que se basa el modelo Beta de yacimientos petroleros, son cuatro:

1. La masa del agua, en la fase del agua.

$$M_w(t) \equiv \int_{B_w(t)} \phi S_w \rho_w d\underline{x},$$

2. La masa de aceite no volátil, en la fase del aceite líquido.

$$M_{O_o}(t) \equiv \int_{B_o(t)} \phi S_o \rho_{O_o} d\underline{x},$$

3. La masa de aceite volátil (gas disuelto), en la fase del aceite líquido.

$$M_{G_o}(t) \equiv \int_{B_o(t)} \phi S_o \rho_{G_o} d\underline{x},$$

La masa de aceite volátil en la fase gaseosa

$$M_g(t) \equiv \int_{B_g(t)} \phi S_g \rho_g d\underline{x}.$$

Aquí B_w, B_o y B_g son los cuerpos de la fase agua, la fase de aceite líquido y la fase gaseosa. Para cada una de las propiedades extensivas aplicamos la ecuación general de balance global tenemos:

$$\frac{dE}{dt}(t) \equiv \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

Observamos que para cada una de estas cuatro propiedades extensivas $\underline{\tau} = 0$ dado que el modelo beta de petróleo negro asume de que no hay procesos difusivos, por lo tanto el balance global de las propiedades se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dM_w}{dt}(t) &\equiv \int_{B(t)} g_w d\underline{x} \\ \frac{dM_{O_o}}{dt}(t) &\equiv \int_{B(t)} g_o d\underline{x} \\ \frac{dM_{G_o}}{dt}(t) &\equiv \int_{B(t)} (g_o^o + g_{G_o}) d\underline{x} \\ \frac{dM_g}{dt}(t) &\equiv \int_{B(t)} (g_o^g + g_g) d\underline{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos usado una notación obvia g_α para término fuente para cada una de las propiedades extensivas. En la ingeniería petrolera, para efectos de los pozos de bombeo es frecuente usar la notación de inyección (q_α) o extracción ($-q_\alpha$).

Sus velocidades respectivas son \underline{v}^w , \underline{v}^o y \underline{v}^g . Las propiedades intensivas correspondientes a estas propiedades extensivas son:

$$\psi^w = \phi S_w \rho_w$$

$$\psi^o = \phi S_o \rho_{Oo}$$

$$\psi^{Gs} = \phi S_o \rho_{Go}$$

$$\psi^g = \phi S_g \rho_g.$$

Las ecuaciones básicas del modelo se obtienen aplicando las Ecuaciones de Balance Local, Ecs.(3.10), a estas cuatro propiedades intensivas. Las aplicaremos con $\tau^{\alpha\beta} = 0$, porque se ha supuesto que no hay difusión de las masas de las diferentes componentes. Por lo que respecta a las fuentes, $g^{\alpha\beta}$, se tomará en cuenta el término q_α . Al respecto, sin embargo, debe señalarse que en muchas aplicaciones de la Ingeniería Petrolera la extracción por pozos en el yacimiento se incorpora tomando $q^{\alpha\beta} \neq 0$.

Las ecuaciones diferenciales de balance local, Ecs.(3.10), correspondientes a las propiedades extensivas son:

$$\frac{\partial \phi S_w \rho_{Ws}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_w \rho_{Ws} \underline{v}^w) = q_w \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \rho_{Oo}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_o \rho_{Oo} \underline{v}^o) = q_o \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \rho_{Go}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_o \rho_{Go} \underline{v}^o) = (q_g^o + q_o) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \phi S_g \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_g \rho_g \underline{v}^g) = (q_o^g + q_g) \quad (3.14)$$

Haciendo uso de la siguiente relación que vincula la velocidad de las partículas con la velocidad de Darcy en cada fase

$$\mathbf{u}_\alpha = \phi S_\alpha \underline{v}^\alpha; \alpha = w, o \text{ y } g \quad (3.15)$$

y sustituyendo (3.15) en las ecuaciones (3.11) a la (3.14) se obtiene

$$\frac{\partial \phi S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) = q_w \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \rho_{Oo}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{Oo} \mathbf{u}_o) = q_o \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \rho_{G_s}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{G_s} \mathbf{u}_o) = (q_g^o + q_o) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \phi S_g \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) = (q_o^g + q_G) \quad (3.19)$$

al sumar las ecuaciones (3.18) y (3.19), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) &= q_w \\ \frac{\partial \phi S_o \rho_{Oo}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{Oo} \mathbf{u}_o) &= q_o \\ \frac{\partial (\phi (S_g \rho_{G_s} + S_g \rho_g))}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{G_s} \mathbf{u}_o + \rho_g \mathbf{u}_g) &= q_G + q_o. \end{aligned} \quad (3.20)$$

A los hidrocarburos volátiles contenidos en la fase del petróleo líquido frecuentemente se les llama *gas disuelto*. Además, la notación que se utiliza es:

$$\rho_o = \frac{m_o}{V_o} \text{ y } \rho_{G_s} = \frac{m_{G_s}}{V_{G_s}}.$$

Aquí, V_o es el volumen de la fase petróleo líquido, mientras que m_o y m_{G_s} son las masas de los hidrocarburos no volátiles y del gas disuelto (hidrocarburos volátiles), respectivamente, contenidas en la fase petróleo líquido, ρ_{Oo} y ρ_{G_s} a se les llama *densidad neta del aceite* y *densidad neta del gas disuelto*, respectivamente.

Por lo anterior, tanto la fase agua como la fase gas constan de una sola componente, mientras que la fase aceite consta de dos: los hidrocarburos no volátiles y el gas disuelto. Esto da un número total de cuatro componentes. La densidad neta del aceite (ρ_{Oo}) y la densidad neta del gas disuelto (ρ_{G_s}), son iguales a la masa por unidad de volumen de la fase del petróleo líquido de estas componentes. En particular, la densidad de la fase del petróleo líquido, $\rho_o = \text{masa total de la fase} / \text{volumen de la fase}$, satisface:

$$\rho_o = \rho_{Oo} + \rho_{G_s}.$$

Finalmente,

$$R_{so} = \frac{\rho_{Go}}{\rho_{Oo}}$$

La fracción de masa de las componentes del aceite y gas pueden ser determinadas por la solubilidad del gas, el factor R_S es igual al cociente de la masa de gas disuelto entre la de los hidrocarburos no volátiles. Este cociente, en forma un poco diferente, se utiliza ampliamente en la práctica en la Ingeniería Petrolera. En ella se define $R_s \equiv \bar{R}_s \rho_{oSTC} / \rho_{gSTC}$, donde ρ_{oSTC} y ρ_{gSTC} son, respectivamente, las densidades del aceite y del gas en las condiciones del tanque de almacenamiento (stock tank conditions).

El factor de volumen de la formación de aceite B_o es el cociente del volumen V_o de aceite medido a condiciones de yacimiento entre el volumen V_{Os} de la componente aceite medida a condiciones estandar está dado por:

$$B_o(p, T) = \frac{V_o(p, T)}{V_{Os}} \quad (3.21)$$

tenemos que V_o y V_{Os} estan expresados por la siguiente relación:

$$V_o = \frac{m_o}{\rho_o} \quad (3.22)$$

$$V_{Os} = \frac{m_o}{\rho_{Os}} \quad (3.23)$$

entonces sustituyendo las ecuaciones (3.22) y (3.23) en la ecuación (3.21) y realizando una manipulación algebraica podemos obtener:

$$\rho_o = \frac{\rho_{Os}}{B_o} \quad (3.24)$$

El factor de volumen de la formación de gas B_g es el cociente del volumen V_g de aceite medido a condiciones de yacimiento entre el volumen V_{Gs} de la componente gas medida a condiciones estandar está dado por:

$$B_g(p, T) = \frac{V_g(p, T)}{V_{Gs}} \quad (3.25)$$

de manera análoga a la del aceite podemos obtener la densidad del gas ρ_g entonces tenemos:

$$\rho_g = \frac{\rho_{Gs}}{B_g} \quad (3.26)$$

El factor de volumen de la formación de agua B_w es el cociente del volumen V_w de aceite medido a condiciones de yacimiento entre el volumen V_{W_s} de la componente gas medida a condiciones estandar está dado por:

$$B_w(p, T) = \frac{V_w(p, T)}{V_{W_s}} \quad (3.27)$$

de forma similar a la del aceite podemos obtener la densidad del agua ρ_w entonces tenemos:

$$\rho_w = \frac{\rho_{W_s}}{B_w} \quad (3.28)$$

Para el Modelo Beta del Petróleo Negro, en ocasiones es conveniente trabajar con ecuaciones de conservación en *volumen estandar*, en vez de la ecuación de conservación en *masa*.

Sustituyendo las ecuaciones (3.24), (3.26) y (3.28) en el sistema de ecuaciones (3.20), y haciendo uso del factor R_{so} obtenemos la ecuación de conservación sobre volumen estandar: Las ecuaciones (3.29)-(3.31) representan el balance sobre el volumen estandar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi \rho_{W_s}}{B_w} S_w \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{W_s}}{B_w} \mathbf{u}_w \right) = q_w \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\rho_{O_s}}{B_o} S_o \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{O_s}}{B_o} \mathbf{u}_o \right) = q_o \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{\rho_{G_s}}{B_g} S_g + \frac{R_{so} \rho_{G_s}}{B_g} S_g \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{G_s}}{B_g} \mathbf{u}_g + \frac{R_{so} \rho_{G_s}}{B_g} \mathbf{u}_g \right) = q_g. \quad (3.31)$$

La ley Darcy para el caso de flujo multifásico se puede expresar como:

$$\mathbf{u}_\alpha = - \frac{\mathbf{k} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}); \alpha = w, o \text{ y } g \quad (3.32)$$

donde \mathbf{k} es el tensor de permeabilidades absolutas, $k_{r\alpha}$ es la permeabilidad relativa de la fase α , μ_α es el coeficiente de viscosidad de la fase α , ρ_α es el peso específico de la fase α , mientras que z es la profundidad.

En lo que sigue, supondremos que estas tres fases fluidas llenan completamente los poros del yacimiento, que es la situación más frecuente en las aplicaciones a la Ingeniería Petrolera. En este caso:

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (3.33)$$

Finalmente la presión de las fases está relacionada con las presión capilar:

$$p_{cgo}(S_g) = p_g - p_o, \quad p_{cow}(S_w) = p_o - p_w \quad (3.34)$$

note que no es necesario definir la tercera presión capilar p_{cgw} está se puede definir en términos de las presiones p_{cgo} y p_{cow} . El gasto volumetrico a condiciones estandar es:

$$\begin{aligned} q_W &= \frac{q_{Ws}\rho_{Ws}}{B_w} \\ q_O &= \frac{q_{Os}\rho_{Os}}{B_o} \\ q_G &= \frac{q_{Gs}\rho_{Gs}}{B_g} + \frac{q_{Os}R_{so}\rho_{Gs}}{B_g} \end{aligned} \quad (3.35)$$

dadas las expresiones anteriores entonces ρ_{Ws} , ρ_{Os} y ρ_{Gs} son constantes se puede eliminar la densidades a condiciones estandar.

3.3. Flujo Composicional

3.3.1. Ecuaciones Diferenciales Básicas del Modelo Composicional

Suposiciones del Modelo Multifásico Composicional.

Algunas de las hipótesis básicas de este modelo son las siguientes:

- I. Hay tres fases fluidas en el yacimiento; dos líquidas y la fase gaseosa. Las líquidas son la fase del agua y la fase del aceite líquido.
- II. Tanto en la fase aceite como en la de gas; hay N_c componentes.
- III. Hay intercambio de masa entre la fase del aceite líquido y la fase gaseosa.
- IV. Los hidrocarburos no son solubles en el agua.
- V. El sistema está en equilibrio termodinámico estable.

En la tabla siguiente se listan las masas por fases y componentes.

| Fase | Componente | Masa |
|----------------|-------------------------------------|----------|
| agua (w) | agua (w) | M_w |
| aceite (o) | C_1 C_2 \vdots C_n | M_{io} |
| gas (g) | C_1 C_2 \vdots C_n | M_{ig} |

Con los símbolos ξ_{io} y ξ_{ig} representaremos la densidad molar del componente i en la fase aceite (líquido) y gas (vapor) respectivamente, $i = 1, 2, 3, \dots, N_c$, donde N_c es el número de componentes. La densidad molar esta dada por:

$$\xi_\alpha = \sum_{i=1}^{N_c} \xi_{i\alpha}, \quad \alpha = o, g \quad (3.36)$$

La fracción de mole del componente i en la fase α es

$$x_{i\alpha} = \frac{\xi_{i\alpha}}{\xi_\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c \quad \alpha = o, g \quad (3.37)$$

Familia de Propiedades Extensivas del Modelo Composicional

Las propiedades extensivas en que se basa el modelo Composicional de yacimientos petroleros, son:

1. La masa del agua, en la fase del agua.

$$M_w(t) \equiv \int_{B_w(t)} \phi S_w \xi_w d\underline{x},$$

2. Las masas de N_c componentes en la fase aceite.

$$M_{io}(t) \equiv \int_{B_o(t)} \phi S_o \xi_{io} d\underline{x} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c,$$

3. Las masas de N_c componentes en la fase gas .

$$M_{ig}(t) \equiv \int_{B_g(t)} \phi S_o \xi_{ig} d\underline{x} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c.$$

Aquí B_w, B_o y B_g son los cuerpos de la fase agua, la fase de aceite líquido y la fase gaseosa. Para cada una de las propiedades extensivas aplicamos la ecuación general de balance global:

$$\frac{dE}{dt}(t) \equiv \int_{B(t)} g(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{B(t)} \underline{\tau}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) d\underline{x}$$

Observamos que, para últimas dos propiedades extensivas $\underline{\tau} \neq 0$, dado que que hay procesos difusivos. por lo tanto el balance global de las propiedades se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dM_w}{dt}(t) &\equiv \int_{B_w} g_w d\underline{x} \\ \frac{dM_o}{dt}(t) &\equiv \int_{B_o} (g_{io}^{io} + g_o) - \nabla \cdot \underline{\tau}_{io} d\underline{x} \\ \frac{dM_g}{dt}(t) &\equiv \int_{B_g} (g_{io}^{ig} + g_g) - \nabla \cdot \underline{\tau}_{ig} d\underline{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos usado una notación obvia g_α para el término fuente para cada una de las propiedades extensivas. En la ingeniería petrolera, para efectos de los pozos de bombeo es frecuente usar la notación de inyección (q_α) o extracción ($-q_\alpha$).

Sus velocidades respectivas son \mathbf{v}^w , \mathbf{v}^o y \mathbf{v}^g . Las propiedades intensivas correspondientes a estas propiedades extensivas son:

$$\begin{aligned} \psi^w &= \phi S_w \xi_w & (3.38) \\ \psi^{io} &= \phi S_o \xi_{io} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c \\ \psi^{ig} &= \phi S_o \xi_{ig} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales de balance local, Ecs.(3.38), correspondientes a las propiedades extensivas son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi S_w \xi_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_w \xi_w \mathbf{v}^w) &= q_w, \\ \frac{\partial \phi S_o \xi_{io}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_o \xi_{io} \mathbf{v}^o) &= -\nabla \cdot \mathbf{d}_{io} - (q_{io} + q_{ig}^{io}), \\ \frac{\partial \phi S_o \xi_{ig}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_o \xi_{ig} \mathbf{v}^g) &= -\nabla \cdot \mathbf{d}_{ig} - (q_{ig} + q_{io}^{ig}), \end{aligned} \quad (3.39)$$

Haciendo uso de la siguiente relación que vincula la velocidad de las partículas con la velocidad de Darcy en cada fase:

$$\mathbf{u}_\alpha = \phi S_\alpha \mathbf{v}^\alpha; \alpha = w, o \text{ y } g \quad (3.40)$$

y sustituyendo (3.39) en el sistema ecuaciones (3.40) se obtiene:

$$\frac{\partial \phi S_w \xi_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi_w \mathbf{u}_w) = q_w \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \xi_{io}}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi_{io} \mathbf{u}_o) = -\nabla \cdot \mathbf{d}_{io} - (q_{io} + q_{ig}^{io}) \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \phi S_g \xi_{ig}}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi_{ig} \mathbf{u}_g) = -\nabla \cdot \mathbf{d}_{ig} - (q_{ig} + q_{io}^{ig}) \quad (3.43)$$

tomemos en cuenta que $(q_{io}^{ig} + q_{ig}^{io}) = 0$ entonces al sumar las ecuaciones (3.42) y (3.43), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \phi S_w \xi_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi_w \mathbf{u}_w) = q_w \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\phi (S_o \xi_{io} + S_g \xi_{ig}))}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\xi_{io} \mathbf{u}_o + \xi_{ig} \mathbf{u}_g) \\ &\quad -\nabla \cdot (\mathbf{d}_{io} + \mathbf{d}_{ig}) - (q_{ig} + q_{io}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

La masa total es conservativa para cada componente, haciendo uso de la ecuación (3.37) en la ecuación (3.45) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi S_w \xi_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi_w \mathbf{u}_w) &= q_w \\ \frac{\partial (\phi (S_o x_{io} \xi_o + S_g x_{ig} \xi_g))}{\partial t} &= -\nabla \cdot (x_{io} \xi_o \mathbf{u}_o + x_{ig} \xi_g \mathbf{u}_g) \\ &\quad -\nabla \cdot (\mathbf{d}_{io} + \mathbf{d}_{ig}) - (x_{ig} q_g + x_{io} q_o). \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde ξ_w es la densidad molar del agua, q_w y q_i son el índice de flujo molar del agua y la componente *i-esima*, respectivamente y $\mathbf{d}_{i\alpha}$ denota el flujo difusivo de la componente *i-esima* en la fase α , $\alpha = o, g$. En la ec. (3.46) la velocidad volumétrica está dada por la ley Darcy y se puede expresar como:

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{\mathbf{k} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}); \alpha = w, o \text{ y } g \quad (3.47)$$

donde \mathbf{k} es el tensor de permeabilidades absolutas, $k_{r\alpha}$ es la permeabilidad relativa de la fase α , es el coeficiente de viscosidad de la fase α , μ_α

puede ser calculado de la presión temperatura y composición (ver [33]), ρ_α es el peso específico de la fase α , mientras que z es la altura.

La fracción de balance mole implica que:

$$\sum_{i=1}^{N_c} x_{i\alpha} = 1 \dots \alpha = o, g \quad (3.48)$$

Adicionalmente el proceso de transporte, en un medio poroso está saturado con los fluidos:

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (3.49)$$

Finalmente la presión de las fases están determinadas por la presión capilar:

$$p_{cgo}(S_g) = p_g - p_o \quad (3.50)$$

$$p_{cow}(S_w) = p_o - p_w$$

Estas presiones capilares se supone son funciones conocidas de la saturación. La permeabilidad relativa $k_{r\alpha}$ también se supone conocida en términos de la saturación y la viscosidad μ_α , la densidad de masa ξ_α es función de sus respectivas presiones según fase, $\alpha = w, o, g$.

El último término en (3.48) es que involucra el flujo difusivo $\mathbf{d}_{i\alpha}$. La relación constitutiva precisa para esas cantidades aún necesitan ser derivadas; por lo tanto desde un punto de vista práctico lo siguiente es una extensión apropiada para la fase simple de la ley de Fick para flujo multifásico. Está definida como:

$$\mathbf{d}_{i\alpha} = -\xi_\alpha \mathbf{D}_{i\alpha} \nabla x_{i\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, N_c, \quad \alpha = o, g, \quad (3.51)$$

donde $\mathbf{D}_{i\alpha}$ es el coeficiente de difusión de la componente i en la fase α . El flujo difusivo debe satisfacer:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{d}_{i\alpha} = 0, \dots \alpha = o, g$$

El intercambio de masa entre las fases está caracterizado por la variación de la distribución de masas de cada componente en la fase líquida o

gaseosa. Como es usual, esas dos fases se suponen estar la fases en equilibrio estable. Esto es físicamente razonable desde el intercambio de masa entre las fases, ocurre mucho más rápido que en el flujo de fluidos en medios porosos. Consecuentemente, la distribución de cada componente (hidrocarburo) dentro de las dos fases está sujeto a la condición de equilibrio termodinámico estable, la cual está dada por la minimización de Gibbs energía libre del sistema composicional. (ver [2], [13]):

$$f_{io}(p_o, x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{N_c o}) = f_{ig}(p_g, x_{1g}, x_{2g}, \dots, x_{N_c g}) \quad (3.52)$$

donde f_{io} y f_{ig} son funciones de la fugacidad de la i -ésima componente en la fase líquida o gas respectivamente, $i = 1, 2, \dots, N_c$.

3.4. Flujo Térmico

3.4.1. Ecuaciones Diferenciales Básicas del Modelo de Flujo térmico

Las ecuaciones diferenciales que han sido desarrolladas bajo las condiciones donde el flujo es isotérmico. Esta condición puede ser remplazada con sólo agregar la ecuación de conservación de energía. Esta ecuación introduce una variable dependiente la temperatura en el sistema. El promedio de la temperatura de un sólido y un fluido en un medio poroso puede no ser el mismo. Además el calor se puede intercambiar entre fases para simplificar usaremos que hay equilibrio termodinámico que la temperatura es la misma en todas las fases $i = 1, 2, 3, \dots, N_c$.

Suposiciones del Modelo térmico.

Algunas de las hipótesis básicas de este modelo son las siguientes:

- I. Hay tres fases fluidas en el yacimiento; dos líquidas y la fase gaseosa. Las líquidas son la fase del agua y la fase del aceite líquido.
- II. Tanto en la fase aceite como en la de gas; hay N_c componentes.
- III. Hay fuentes de energía y cambios de temperatura.
- IV. Entre las fases de aceite y gas hay intercambio de masa.
- V. El sistema está en equilibrio termodinámico estable.

VI Entre todas las fases, incluida la s33lida, hay intercambio de energ33a.

Familia de Propiedades Extensivas del Modelo t33rmico

Las propiedades extensivas en que se basa el modelo Composicional de yacimientos petroleros, son:

1. La masa del agua, en la fase del agua.

$$M_w(t) \equiv \int_{B(t)} \phi S_w \xi_w d\underline{x},$$

2. Las masas de N_c componentes en la fase aceite

$$M_{io}(t) \equiv \int_{B(t)} \phi S_o \xi_{io} d\underline{x} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c,$$

3. Las masas de N_c componentes en la fase gas

$$M_{ig}(t) \equiv \int_{B(t)} \phi S_o \xi_{ig} d\underline{x} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c.$$

4. La energ33a interna de cada una de las fases

$$E_w(t) \equiv \int_{B(t)} \phi S_w \rho_{iw} U_w d\underline{x}$$

$$E_o(t) \equiv \int_{B(t)} \phi S_o \rho_o U_o d\underline{x}$$

$$E_g(t) \equiv \int_{B(t)} \phi S_g \rho_g U_g d\underline{x}$$

$$E_s(t) \equiv \int_{B(t)} (1 - \phi) \rho_s C_s U_s d\underline{x}$$

Observamos que las tres primeras propiedades ya han sido desarrolladas en el modelo composicional, para 33ltimas cuatro propiedades extensivas $\tau \neq 0$ dado que que hay procesos difusivos. por lo tanto el balance global

de las propiedades se reduce a:

$$\begin{aligned}
\frac{dM_w}{dt}(t) &\equiv \int_{B_w} \left\{ g_E^w + \sum_{\alpha=w}^s g_{E\alpha}^w \right\} d\underline{x} \\
\frac{dM_o}{dt}(t) &\equiv \int_{B_o} \left\{ g_E^o + \sum_{\alpha=w}^s g_{E\alpha}^o \right\} d\underline{x} \\
\frac{dM_g}{dt}(t) &\equiv \int_{B_g} \left\{ g_E^g + \sum_{\alpha=w}^s g_{E\alpha}^g \right\} d\underline{x} \\
\frac{dM_s}{dt}(t) &\equiv \int_{B_g} \left\{ g_E^s + \sum_{\alpha=w}^s g_{E\alpha}^s \right\} d\underline{x} \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Por lo tanto hemos usado una notación obvia g_α para término fuente para cada una de las propiedades extensivas. En la ingeniería petrolera, para efectos de los pozos de bombeo es frecuente usar la notación de inyección (q_α) o extracción ($-q_\alpha$). Las condiciones de conservación son las siguientes

$$\begin{aligned}
g_{Eo}^w + g_{Ew}^o &= 0 \\
g_{Eg}^w + g_{Ew}^g &= 0 \\
g_{Es}^w + g_{Ew}^s &= 0 \\
g_{Eg}^o + g_{Eo}^g &= 0 \\
g_{Es}^o + g_{Eo}^s &= 0 \\
g_{Es}^g + g_{Eg}^s &= 0
\end{aligned}$$

$$g_E^w + g_E^o + g_E^g + g_E^s = q_H - q_L$$

Sus velocidades respectivas son \mathbf{v}^w , \mathbf{v}^o , \mathbf{v}^g y \mathbf{v}^s . Las propiedades intensivas correspondientes a estas propiedades extensivas son:

$$\begin{aligned}
\psi^w &= \phi S_w \boldsymbol{\xi}_w U_w \\
\psi^{io} &= \phi S_o \boldsymbol{\xi}_{io}^o U_o \\
\psi^g &= \phi S_o \boldsymbol{\xi}_{ig} U_g \\
\psi^s &= (1 - \phi) \rho_s C_s U_s
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Las ecuaciones diferenciales de balance local, Ecs.(3.54), correspondientes a las propiedades extensivas son:

$$\frac{\partial \phi S_w \boldsymbol{\xi}_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_w \boldsymbol{\xi}_w \mathbf{v}^w) = -q_w \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \boldsymbol{\xi}_{io}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_o \boldsymbol{\xi}_{io} \mathbf{v}^o) = - (q_{io} + q_{ig}^{io}) - \nabla \cdot \underline{d}_{io} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \phi S_g \boldsymbol{\xi}_{ig}}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_g \boldsymbol{\xi}_{ig} \mathbf{v}^g) = - (q_{ig} + q_{io}^{ig}) - \nabla \cdot \underline{d}_{ig} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{\alpha=w}^g \rho_\alpha S_\alpha U_\alpha + (1 - \phi) \rho_s C_s U_s \right) \\ & = q_c - q_L - \nabla \cdot \sum_{\alpha=w}^g (\rho_\alpha U_\alpha \mathbf{v}^\alpha) + \nabla \cdot (k_T \nabla T) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Haciendo uso de la siguiente relación que vincula la velocidad de las partículas con la velocidad de Darcy en cada fase:

$$\mathbf{u}_\alpha = \phi S_\alpha \mathbf{v}^\alpha; \alpha = w, o \text{ y } g \quad (3.59)$$

y sustituyendo (3.59) en las ecuaciones (3.55) a la (3.58) se obtiene:

$$\frac{\partial \phi S_w \boldsymbol{\xi}_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi}_w \mathbf{u}_w) = q_w \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \phi S_o \boldsymbol{\xi}_{io}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi}_{io} \mathbf{u}_o) = (q_{io} + q_{ig}^{io}) - \nabla \cdot \underline{d}_{io} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \phi S_g \boldsymbol{\xi}_{ig}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi}_{ig} \mathbf{u}_g) = (q_{ig} + q_{io}^{ig}) - \nabla \cdot \underline{d}_{ig} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{\alpha=w}^g \rho_\alpha S_\alpha U_\alpha + (1 - \phi) \rho_s C_s U_s \right) \\ & = q_c - q_L - \nabla \cdot \sum_{\alpha=w}^g (\rho_\alpha U_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (k_T \nabla T) \end{aligned} \quad (3.63)$$

tomemos en cuenta que $(q_{io}^{ig} + q_{ig}^{io}) = 0$ entonces al sumar las ecuaciones (3.61) y (3.62), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \phi S_w \boldsymbol{\xi}_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi}_w \mathbf{u}_w) = -q_w \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial (\phi (S_o \boldsymbol{\xi}_{io} + S_g \boldsymbol{\xi}_{ig}))}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi}_{io} \mathbf{u}_o + \boldsymbol{\xi}_{ig} \mathbf{u}_g) = - (q_{ig} + q_{io}) - \nabla \cdot (\underline{d}_{io} + \underline{d}_{ig}) .$$

La densidad molar está dado por:

$$\xi_\alpha = \sum_{i=1}^{N_c} \xi_{i\alpha}, \quad \alpha = o, g \quad (3.65)$$

La fracción de mole del componente i en la fase α es:

$$x_{i\alpha} = \frac{\xi_{i\alpha}}{\xi_\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c \quad \alpha = o, g \quad (3.66)$$

La ecuación de conservación de energía es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \sum_{\alpha=w}^g \rho_\alpha S_\alpha U_\alpha + (1 - \phi) \rho_s C_s U_s \right) \quad (3.67)$$

$$= q_c - q_L - \nabla \cdot \sum_{\alpha=w}^g (\rho_\alpha H_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (k_T \nabla T) \quad (3.68)$$

donde T es la temperatura, U_α y H_α son la energía interna y entropía de la fase α (por unidad de masa), ρ_s y C_s son la densidad y el calor específico del sólido, k_T la conductividad térmica total, q_c determina las fuentes de calor y q_L las perdidas de calor por las fronteras, la energía interna y la entropía se puede calcular como sigue:

$$U_\alpha = C_{V\alpha} T, \quad H_\alpha = C_{p\alpha} T \quad (3.69)$$

donde $C_{V\alpha}$ y $C_{p\alpha}$ representan la capacidad específica de la fase α a un volumen y presión constante, respectivamente.

La ley Darcy para el caso de flujo multifásico se puede expresar como:

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{\mathbf{k} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}); \quad \alpha = w, o \text{ y } g \quad (3.70)$$

donde \mathbf{k} es el tensor de permeabilidad absoluta, $k_{r\alpha}$ es la permeabilidad relativa de la fase α , μ_α es el coeficiente de viscosidad de la fase α , ρ_α es el peso específico de la fase α , mientras que z es la altura.

La fracción de balance mole implica que:

$$\sum_{i=1}^{N_c} x_{i\alpha} = 1 \dots \alpha = o, g \quad (3.71)$$

Adicionalmente el proceso de transporte, en un medio poroso está saturado con los fluidos:

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (3.72)$$

Finalmente la presión de las fases están determinadas por la presión capilar:

$$p_{cgo}(S_g) = p_g - p_o \quad (3.73)$$

$$p_{cow}(S_w) = p_o - p_w$$

Estas presiones capilares se supone que son funciones conocidas de la saturación. La permeabilidad relativa $k_{r\alpha}$ también se supone conocida en términos de la saturación y la viscosidad μ_α , la densidad de masa ρ_α es función de sus respectivas presiones según fase, $\alpha = w, o$ y g .

Consecuentemente, la distribución de cada componente (hidrocarburo) dentro de las dos fases está sujeto a la condición de equilibrio termodinámico estable, la cual está dada por la minimización de Gibbs energía libre del sistema composicional:

$$f_{iw}(p_w, T, x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{N_{cw}}) = f_{io}(p_o, T, x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{N_{co}}) \quad (3.74)$$

$$f_{io}(p_o, T, x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{N_{co}}) = f_{ig}(p_g, T, x_{1g}, x_{2go}, \dots, x_{N_{cg}}) \quad (3.75)$$

donde $f_{i\alpha}$ son funciones de la fugacidad de la i -ésimo componete en la fase líquida o gas respectivamente, $i = 1, 2, \dots, N_c$.

Capítulo 4

Propiedades Roca-Fluido

Este capítulo está organizado de la siguiente forma. En la sección 3.1, se analizará propiedades de la roca, presión capilar y funciones de permeabilidad relativa para dos fluido y tres fluidos. Mientras que en la sección 3.2, se revisará las propiedades de los fluidos, tales como PVT(presión,volumen y temperatura) datos para el agua, aceite y gas. En la sección 3.3. se verán las ecuaciones de estado para flujo composicional.

4.1. Propiedades de la Roca

4.1.1. Saturación

Si consideramos un volumen representativo del yacimiento petrolero, con los poros llenos de fluidos, en términos volumétricos podemos representarlo como:

$$V_{\phi} = \sum_{\alpha=1}^n V_{\alpha}.$$

donde V_{ϕ} representa el volumen del total del espacio poroso, V_{α} representa la fracción de volumen de la fase α .

La saturación S_{α} ,se define como una fracción de volumen poroso ocupado por un fluido en particular.

$$S_{\alpha} = \frac{V_{\alpha}}{V_{\phi}},$$

donde $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$ para lo cual “ n ” significa el número total de fases fluidas presentes en el medio poroso ϕ , V_{α} es el espacio que ocupa el fluido mientras V_{ϕ} es el volumen total del espacio poroso.

De tal forma que el balance para la porosidad queda de la siguiente forma:

$$\phi \equiv \frac{V_{\phi}}{V_{total}}$$

Si en un yacimiento petrolero coexisten dos fluidos (petróleo y agua, petróleo y gas, gas y agua, etc.), estos se distribuyen en el espacio poroso de acuerdo a sus características de mojabilidad.

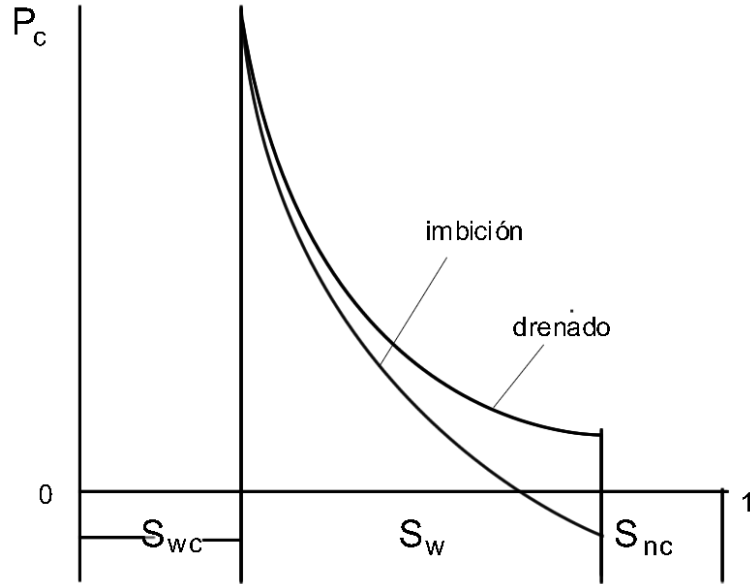
La saturación de fluidos cambia tanto en el espacio como en el tiempo, el yacimiento petrolero puede tener diferentes niveles de saturación en sentido horizontal y sentido vertical, también esta saturación cambia progresivamente de acuerdo al avance de la producción de fluidos.

4.1.2. Presión Capilar

En el flujo bifásico, la discontinuidad de la presión en un fluido ocurre a través de la interfase, entre dos fluidos inmiscibles (ejemplo agua y aceite). Esto es una consecuencia de la tensión interfaseal que existe en la interfase. La discontinuidad entre la presión de la fase no mojante (aceite), p_o y la fase mojante (agua), p_w , está se refiere a la *presión capilar*, p_c :

$$p_c = p_o - p_w, \quad (4.1)$$

donde la presión de las fases es tomada en la interfase de sus respectivos lados. La típica curva de presión capilar se muestra en la figura(4.1.2). La presión capilar depende de la fase mojante S_w (saturación) y el cambio de dirección de la saturación (drenado o imbibición). El fenómeno de dependencia de la curva en la trayectoria de la saturación es llamado histéresis. Mientras sea posible desarrollar un modelo que tome en cuenta la histéresis, como resultado de la trayectoria de la saturación (ver [8]), en la mayoría de los casos la dirección del flujo puede ser determinada, y solo es necesario tomar en cuenta un algunas presiones capilares.



Curva típica de presión capilar

El valor p_{cb} está determinado por la *presión del umbral* (ver [18]) y es necesaria para iniciar el desplazamiento. El valor de la saturación en la cual, la fase mojanete no puede tener un desplazamiento largo por la aplicación del gradiente de la presión, ésta se refiere a la *saturación irreducible*. La curva de presión capilar tiene una asíntota en la cual el valor del gradiente de la presión permanece continua en ambas fases. Cuando el valor de la saturación irreducible de la fase no mojanete está próxima, ocurre una situación análoga en el proceso de imbibición, al final de la otra curva (ver [12]).

La presión capilar se ha supuesto que depende solamente de la saturación de la fase mojanete. En general, también depende de otros factores como son: la tensión superficial σ , la porosidad ϕ , la permeabilidad k y el ángulo de contacto θ con la superficie de la roca de la fase mojanete, la cual depende de la temperatura y composición del fluido (ver [40], [6]) y se representa con la siguiente relación:

$$J(S_w) = \frac{p_c}{\sigma \cos \theta} \sqrt{\frac{k}{\phi}},$$

donde $J(S_w)$ es la *J-función*. Si el ángulo de contacto no se toma en

cuenta, esta función se transforma en:

$$J(S_w) = \frac{p_c}{\sigma} \sqrt{\frac{k}{\phi}}.$$

Usando la *J-función*, que es la curva típica para p_c , la cual se puede obtener por medio de experimentos. Esta función es la base para algunos métodos teóricos que permiten medir la permeabilidad k (ver [43]).

Para el flujo trifásico, es necesario hacer uso de las tres presiones capilares:

$$p_{cow} = p_o - p_w, \quad p_{cgo} = p_g - p_o. \quad (4.2)$$

Notemos que la presión capilar p_{cgw} , se puede encontrar a partir de p_{cow} y p_{cgo} :

$$p_{cgw} = p_g - p_w = p_{cow} + p_{cgo}.$$

La presión capilar p_{cow} y p_{cgo} , se usualmente tienen la siguiente forma (ver [32]).

$$p_{cow} = p_{cow}(S_w), \quad p_{cgo} = p_{cgo}(S_g). \quad (4.3)$$

donde S_w y S_o ; son las fases de saturación del agua y aceite respectivamente. Esas formas tienen un uso muy diverso en la ingeniería petrolera (ver [43]).

4.1.3. Permeabilidad Relativa

La permeabilidad es una propiedad del medio poroso que cuantifica la capacidad de un material para transmitir fluidos (en otras palabras es una medida de la conductividad de un medio poroso para un fluido). La permeabilidad se refiere a su capacidad de permitir el flujo de fluidos a través del sistema de poros interconectados.

Flujo Bifásico

Las medidas de las permeabilidades relativas han sido principalmente hechas para flujo bifásico. La curva típica para el sistema aceite-agua con el agua desplazando al aceite se presenta en la figura (4.1). El valor de S_w en la cual el agua comienza su flujo es llamado *saturación crítica* S_{wc} , y el valor S_{nc} en el cual el aceite suspende su flujo se denomina como *saturación residual*. Análogamente durante el drenado el ciclo S_{nc} y S_{wc} son descritos como la saturación crítica y residual, respectivamente.

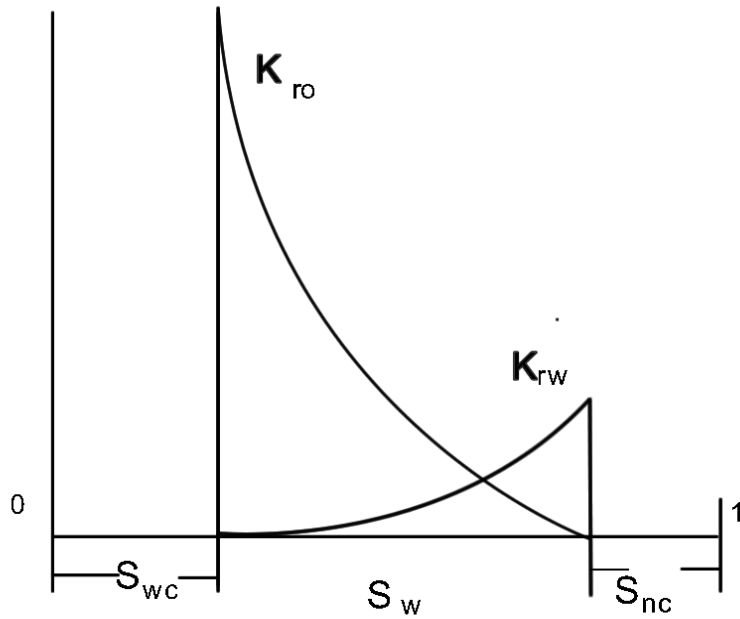


Figura 4.1: Curva típica de permeabilidad relativa.

Las pendientes de las curvas de presión capilar en la saturación irresidual deben ser finitas en una simulación numérica, esas curvas por sí mismas no pueden ser utilizadas para definir los valores de la saturación en la cual la fase de desplazamiento llega a ser inmóvil. Estos valores de la saturación se encuentran usando la saturación residual en la cual la permeabilidad relativa de esta fase es cero. La ley de Darcy implica que el flujo de la fase se detiene, por que la movilidad tiende a cero. Como resultado, no es necesario distinguir entre saturación crítica y residual.

Como la presión capilar, la permeabilidad relativa no depende solamente de la fase mojada de saturación S_w , también depende del cambio de dirección de la saturación (drenaje o imbibición). La figura (4.2) muestra el fenómeno de dependencia de la permeabilidad relativa para la fase no mojada sobre la trayectoria de la saturación. Notemos que la curva de imbibición es siempre menor que la de drenado. Para la fase mojada, la permeabilidad relativa no depende de la trayectoria de la saturación.

La mojabilidad de la roca también influye fuertemente a la permeabilidad relativa (ver [35]).

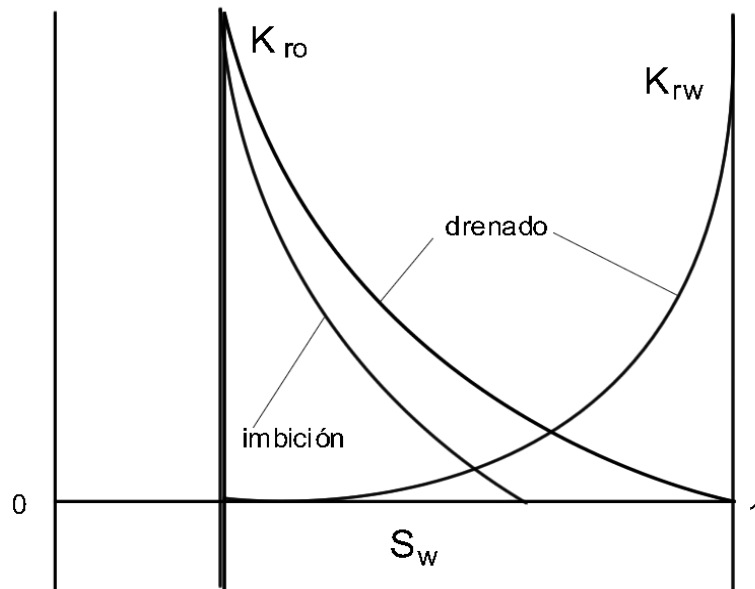


Figura 4.2: Sistema aceite-gas

La permeabilidad relativa debe ser determinada empíricamente o experimentalmente para cada medio poroso de particular interés. Sin embargo, la literatura es rica en las expresiones analíticas para las relaciones entre permeabilidad relativa y saturación de la fase mojante (ver [18]). Esas expresiones fueron usualmente obtenidas para simplificar los modelos del medio poroso.

Flujo Trifásico

En contraste al flujo bifásico, es más complicado definir la *permeabilidad relativa* para el flujo trifásico. De forma experimental hacemos uso del diagrama terciario, la relación entre la permeabilidad relativa y la saturación, donde se muestra en la figura (4.3). Este diagrama se basa sobre el nivel de la curva de la permeabilidad relativa comienza en 1% para cada fase. De esto podemos representar para una, dos o tres fases donde ocurre flujo bajo diferentes combinaciones de la saturación. En la región triangular delimitada por tres curvas de nivel, por ejemplo el flujo de tres fluidos simultáneamente.

De los trabajos de Leverett y Lewis (ver [32]), la mayoría de las

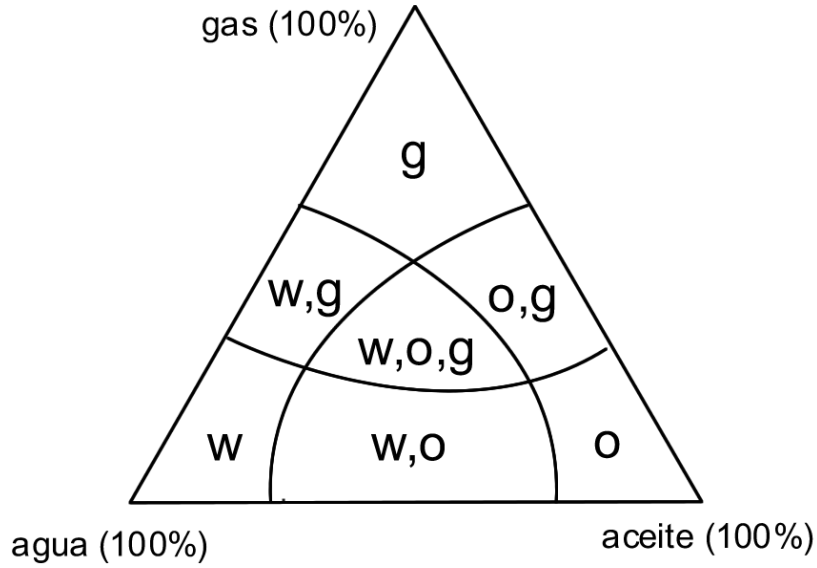


Figura 4.3: Diagrama de tres fases.

veces las medidas de las permeabilidades relativas de las tres fases han sido obtenidas de manera experimental. Esas medidas han indicado que la permeabilidad relativa para las fases mojantes y no mojantes en el sistema de tres fases son funciones de sus respectivas saturaciones como en el sistema bifásico (ver [18], [44]).

$$k_{rw} \equiv k_{rw}(S_w), \quad k_{rg} \equiv k_{rg}(S_g). \quad (4.4)$$

La permeabilidad relativa para la fase intermedia mojante está en función de dos saturaciones independientes:

$$k_{ro} \equiv k_{ro}(S_w, S_g). \quad (4.5)$$

La forma funcional se muestra en la figura (4.5). En la práctica, la estimación de la permeabilidad relativa en tres fases está basada en dos conjuntos de datos de dos fases: la permeabilidad relativa en un sistema intermedio y un sistema mojante:

$$k_{row} \equiv k_{row}(S_w), \quad (4.6)$$

y un sistema intermedio y un sistema no mojante,

$$k_{rog} \equiv k_{rog}(S_g). \quad (4.7)$$

El concepto fundamental para la fase mojante, es que ambos sistemas intermedio y un sistema no mojante actúan como el sistema no mojante de una sola fase, sin embargo para el sistema intermedio y mojante su comportamiento es como un sistema mojante de una sola fase, la figura (4.4) ilustra la típica curva de la permeabilidad relativa para el sistema agua, aceite y gas en un medio poroso isotrópico. El punto donde $k_{row} = 0$, indica la saturación máxima del agua más que la saturación crítica del aceite hasta que la saturación del aceite, la cual puede ser reducida por el incremento de la saturación del gas. Esto ha sido observado experimentalmente, así que el residuo diferente de cero (o mínimo), la saturación del aceite S_{or} existe cuando el aceite es desplazado simultáneamente por el agua y el gas. Las observaciones hechas sobre la histéresis de la permeabilidad relativa para la fase no mojante también aplica para el sistema de las tres fases.

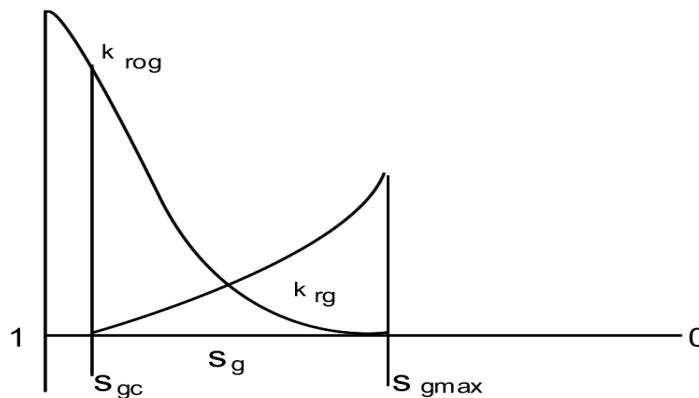


Figura 4.4: Curva de permeabilidad relativa en tres fases.

El simple proceso para determinar k_{ro} es:

$$k_{ro} = k_{row}k_{rog}. \quad (4.8)$$

Otros modelos fueron sugeridos por Stone, Corey, y Delshad y Pope. Como un ejemplo, se describe dos modelos de roca, modelo I y modelo II.

Modelo de Roca I. La saturación se normaliza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_{nw} &= \frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}}, & S_o &\geq S_{or}, \\ S_{no} &= \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}}, & S_w &\geq S_{wc}, \\ S_{ng} &= \frac{S_g}{1 - S_{wc} - S_{or}}. \end{aligned}$$

Note que:

$$S_{nw} + S_{no} + S_{ng} = 1.$$

La permeabilidad relativa del aceite está definida como:

$$k_{ro} = S_{no}\beta_w\beta_g. \quad (4.9)$$

Para determinar β_w , tomamos $S_g = S_{ng} = 0$; es decir, el sistema de tres fases, se reduce el sistema agua-aceite. En este caso $\beta_g = 1$ y $k_{ro} = k_{row}$. Entonces usando (4.9) tenemos:

$$\beta_w = \frac{k_{row}(S_w)}{1 - S_{nw}}. \quad (4.10)$$

Similarmente para determinar β_g , seleccionamos $S_w = S_{wc}$ así que $\beta_w = 1$ y $k_{ro} = k_{rog}$. Entonces usando (4.9) tenemos:

$$\beta_g = \frac{k_{rog}(S_g)}{1 - S_{ng}}. \quad (4.11)$$

Substituyendo (4.10) y (4.11) en (4.9) nos da la expresión k_{ro} para el *modelo de roca I*. Así el modelo se reduce exactamente a dos fases si las siguientes condiciones se satisfacen;

$$k_{row}(S_{wc}) = k_{rog}(S_g = 0) = 1. \quad (4.12)$$

En otro caso, la permeabilidad relativa $k_{ro}(S_w, S_g)$ proviene solamente de la aproximación de los datos de la dos fases. Un modelo que no tiene limitaciones se puede obtener, si los datos del aceite-gas son medidos en la presencia del agua irreducible. En este caso el sistema agua-aceite en S_{wc} y en el sistema aceite-gas en $S_g = 0$, es una identidad física; es decir ambos sistemas satisfacen $S_w = S_{wc}$ y $S_o = 1 - S_{wc}$. Por lo tanto de

(4.12) es equivalente a la definición de permeabilidad relativa siendo la permeabilidad efectiva del aceite en la presencia de S_{wc} .

El conjunto

$$k_{row}(S_{wc}) = k_{rog}(S_g = 0) = k_{rc}.$$

Entonces el modelo de roca I puede ser modificado como sigue:

$$k_{ro} = k_{rc} S_{no} \beta_w \beta_g, \quad (4.13)$$

donde,

$$\beta_w = \frac{k_{row}(S_w)}{(1 - S_{nw}) k_{rc}}, \quad \beta_g = \frac{k_{rog}(S_g)}{(1 - S_{ng}) k_{rc}}.$$

Modelo de Roca II. En la definición del modelo de roca I, S_{or} debe ser especificado. En realidad estos factores pueden predecirse de la ecuación derivada del *canal de flujo*, tenemos que:

$$k_{ro} = (k_{row} + k_{rw})(k_{rog} + k_{rg}) - (k_{rw} + k_{rg}), \quad (4.14)$$

donde $k_{ro} \geq 0$, ya que los valores negativos de k_{ro} corresponde al aceite inmóvil. El modelo de roca I, debe satisfacer (4.12), en tanto el *modelo de roca II* puede ser alterado como sigue:

$$k_{ro} = k_{rc} [(k_{row}/k_{rc} + k_{rw})(k_{rog}/k_{rc} + k_{rg}) - (k_{rw} + k_{rg})]. \quad (4.15)$$

4.1.4. Compresibilidad de la Roca

La compresibilidad de la roca está definida de la siguiente manera:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp}. \quad (4.16)$$

Después de integrar tenemos:

$$\phi = \phi^0 e^{c_R(p-p^0)}, \quad (4.17)$$

donde ϕ^0 es la porosidad en la presión de referencia p^0 . Usando la serie de Taylor, podemos observar que:

$$\phi = \phi^0 \left\{ 1 + c_R (p - p^0) + \frac{1}{2!} c_R^2 (p - p^0)^2 + \dots \right\},$$

una aproximación queda de la siguiente forma:

$$\phi \approx \phi^0 (1 + c_R (p - p^0)).$$

4.2. Propiedades de los Fluidos

Para poder realizar un análisis más preciso de las propiedades de los fluidos es necesario antes simular un yacimiento y darle una interpretación adecuada. Los ejemplos de esas propiedades incluyen los factores de volumen de la formación, densidad, solubilidad, viscosidad y compresibilidad de los fluidos. En general, una simple representación del yacimiento se obtiene y se estudia en el laboratorio, estas propiedades de los fluidos son medidas en el laboratorio. Entonces la información es usada para predecir los cambios de las fases que pueden ocurrir en el yacimiento y en la superficie del separador. Un separador es una presión de carga (horizontal o vertical) utilizada con el propósito de separar bien los fluidos dentro de los componentes líquido y gaseoso. Cuando los datos de laboratorio no están disponibles para las propiedades del fluido, estos se pueden calcular a partir de fórmulas empíricas. En esta sección se expondrán esas fórmulas.

En flujo trifásico (módulo beta del petróleo negro), cuando todo el gas está disuelto en la fase aceite, no hay gas presente: es decir, $S_g = 0$. En este caso se dice que el yacimiento se encuentra en estado *bajo-saturado*. Si las tres fases coexisten, el yacimiento se encuentra en *estado saturado*. El punto de burbuja se define como el estado en el cual el flujo total del sistema está compuesto de líquidos (agua y aceite), y la presión del yacimiento en está en la *presión de punto de burbuja*. Alguna reducción en la presión (o incremento en el volumen) a una temperatura fija produce gas.

4.2.1. Propiedades PVT del Agua

Los modelos beta y volátiles requieren cuatro propiedades PVT para su simulación:

- La densidad del agua en condiciones estándar ρ_{Ws} ,
- Factor del volumen de la formación del agua B_w ,
- Compresibilidad del agua c_w ,
- Viscosidad del agua μ_w .

Cuando los datos de laboratorio no están disponibles, es necesario hacer uso de fórmulas empíricas para calcularlos, a partir de los siguientes datos:

- presión p y temperatura T del yacimiento,
- salinidad del agua S_{ALI} ,
- solución de gas/ índice de agua R_{SW}

Densidad del Agua a Condiciones Estandar

Podemos hacer uso de la siguientes datos de la correlación empírica en una interpolación líneal para la *densidad del agua* a condiciones estandar respecto al *agua salina*:

| | | | | | |
|---------------|-----|----------|----------|---------|-----------------------|
| Salinidad: | 0 | 100,000, | 200,000, | 280,000 | (ppm), |
| ρ_{Ws} : | 1.0 | 1.07300, | 1.370 | 1.18600 | (g/cm ³). |

Factor del Volumen de la Formación del Agua

El *factor del volumen de la formación del agua* B_w (RB/STB) se puede calcular a partir de fórmulas empíricas:

$$B_w = (A + Bp + Cp^2) F_{SB}, \quad (4.18)$$

donde los valores A , B y C dependen de la temperatura de la formación (T_F) y el estado de la saturación del gas, p (psia) es la presión de la formación, y F_{SB} es el *factor de la correlación de la salinidad* para B_w :

$$F_{SB} = \left\{ 5,1 \times 10^{-8}p + (5,47 \times 10^{-6} - 1,95 \times 10^{-10}p) (T_F - 60) \right. \\ \left. - (3,23 \times 10^{-8} - 8,5 \times 10^{-13}p) (T_F - 60) \right\} S_{ALI} + 1,$$

con T_F ($^{\circ}\mathbf{F}$) a temperatura de la formación y S_{ALI} el porcentaje de la salinidad (1% = 10,000 ppm). Las constantes de (4.18) pueden determinarse de la siguiente forma:

$$A = A_1 + A_2T_F + A_3T_F^2,$$

$$B = B_1 + B_2T_F + B_3T_F^2,$$

$$C = C_1 + C_2T_F + C_3T_F^2,$$

donde en el caso saturado (la fase gas existe):

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,9911, & A_2 &= 6,35 \times 10^{-5}, & A_3 &= 8,5 \times 10^{-7}, \\ B_1 &= -1,093 \times 10^{-6}, & B_2 &= -3,497 \times 10^{-9}, & B_3 &= 4,57 \times 10^{-12}, \\ C_1 &= -5 \times 10^{-11}, & C_2 &= 6,429 \times 10^{-13}, & C_3 &= 1,43 \times 10^{-15}, \end{aligned}$$

y para el caso bajo-saturado (la fase gas no existe):

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,9947, & A_2 &= 5,8 \times 10^{-6}, & A_3 &= 1,02 \times 10^{-6}, \\ B_1 &= -4,228 \times 10^{-6}, & B_2 &= 1,8376 \times 10^{-8}, & B_3 &= -6,77 \times 10^{-11}, \\ C_1 &= 1,3 \times 10^{-10}, & C_2 &= 1,3855 \times 10^{-12}, & C_3 &= 4,285 \times 10^{-15}, \end{aligned}$$

El rango para la validación para B_w es:

$$1,000 < p < 5000 \text{ psi}, \quad 100 < T < 250^\circ\mathbf{F}, \quad 0 \leq S_{ALI} \leq 25.$$

Compresibilidad Isotérmica del agua

La *compresibilidad del agua* c_w (1/psi) se calcula a partir de la salinidad, temperatura y presión con siguiente fórmula empírica:

$$c_w = \left(\hat{A} + \hat{B}T_F + \hat{C}T_F^2 \right) 10^{-6} (1 + 0,0089R_{SW}) F_{SC}, \quad (4.19)$$

donde los valores \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} , dependen de la presión de la formación:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= 3,8546 - 1,34 \times 10^{-4}p, \\ \hat{B} &= -0,01052 + 4,77 \times 10^{-7}p, \\ \hat{C} &= 3,9267 \times 10^{-5} - 8,8 \times 10^{-10}p. \end{aligned}$$

La solución de gas/índice de agua R_{SW} (SCF/STB), es cero en el estado bajo-saturado, mientras en el estado saturado

$$\begin{aligned} R_{SW} &= (A_{R_{SW}} + B_{R_{SW}}p + C_{R_{SW}}p^2) \\ &\cdot \{1 - (0,00753 - 1,73 \times 10^{-4}T_F) S_{ALI}\}, \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} A_{R_{SW}} &= 2,12 + 3,45 \times 10^{-3}T_F - 3,59 \times 10^{-5}T_F^2, \\ B_{R_{SW}} &= 0,0107 + 5,26 \times 10^{-5}T_F + 1,48 \times 10^{-7}T_F^2, \\ C_{R_{SW}} &= -8,75 \times 10^{-7} + 3,9 \times 10^{-9}T_F - 1,02 \times 10^{-11}T_F^2. \end{aligned}$$

Finalmente, el factor de la correlación de la salinidad es:

$$F_{SC} = \{-0,52 + 2,7 \times 10^{-4}T_F - 1,14 \times 10^{-6}T_F^2 + 1,121 \times 10^{-9}T_F^3\} S_{ALI}^{0,7} + 1.$$

El rango para la validación para la salinidad, la presión y la temperatura de c_w es:

$$1,000 < p < 6000 \text{ psi}, \quad 80 < T < 250^\circ\text{F}, \quad 0 \leq S_{ALI} \leq 25.$$

Viscosidad del Agua

La viscosidad del agua μ_w (cp) se calcula a partir de la salinidad, la temperatura y la presión por:

$$\mu_w = 0,02414 \times 10^{2478/(T_k-140)} F_{SV} F_{PV}. \quad (4.20)$$

donde T_k es la temperatura de la formación en $^\circ\mathbf{K}$; que es $T_k = 273,15 + T_C$, con $T_C = (T_F - 32) / 1,8^\circ\text{C}$. El factor de la correlación F_{SV} para μ_w es:

$$F_{SV} = 1 - 1,87 \times 10^{-3} S_{ALI}^{1/2} + 2,18 \times 10^{-4} S_{ALI}^{2,5} + \left(T_F^{1/2} - 0,0135 T_F\right) \left(2,76 \times 10^{-3} S_{ALI} - 3,44 \times 10^{-4} S_{ALI}^{1,5}\right)$$

y el factor de correlación para la presión es:

$$F_{PV} = 1 + 1,35 \times 10^{-12} p^2 (T_F - 40).$$

El rango para la validación para c_w es:

$$32 < T < 572^\circ\text{F}, \quad 0 \leq S_{ALI} \leq 25.$$

4.2.2. Propiedades PVT del Aceite

Para el aceite tenemos cinco propiedades PVT, debido a la presión de punto de burbuja (p_b), éstas son necesarias para los modelos beta y aceite volátil:

- Índice de gas disuelto en el aceite R_{so} ,
- Factor del volumen de la formación del aceite B_o ,

- Compresibilidad del aceite c_o ,
- Viscosidad del aceite μ_o .
- Compresibilidad de la viscosidad del aceite c_μ ,

Nuevamente cuando los datos de laboratorio no están disponibles, es necesario hacer uso de fórmulas empíricas para calcular esas propiedades, para lo cual se hace uso de los siguientes datos:

- Presión p y temperatura T del yacimiento,
- Índice de producción de aceite/gas G_{OR} ,
- Gravedad del aceite A_{PI} ,
- Gravedad del gas crudo Y_G ,
- Presión p_{sep} y Temperatura T_{sep} en condiciones del separador

Presión Inicial del Punto de Burbuja

La presión inicial del punto de burbuja p_{bi} (psia) se puede obtener usando la siguiente fórmula empírica:

$$p_{bi} = \left(\frac{G_{OR}}{A_0 Y_{GS} \exp(C_0 A_{PI}/T_R)} \right)^{1/B_0}, \quad (4.21)$$

donde G_{OR} (SCF/STB) es el *índice de gas-aceite*, $A_{PI} = A_{PI} ({}^o A_{PI})$ es la gravedad del aceite definida por $A_{PI} = 1,41/D_{OB} - 1,31,5$, D_{OB} (g/cm³) es la densidad de la superficie de aceite a condiciones estandarizadas, Y_{GS} es la *gravedad del gas crudo* (unidades por aire), definido por:

$$Y_{GS} = Y_G \left(1 + 5,912 \times 10^{-5} A_{PI} T_{sep} \log \left(\frac{p_{sep}}{114,7} \right) \right),$$

Y_G es la gravedad del gas (unidades por aire), p_{sep} (psia) y T_{sep} (°F) es la presión y temperatura del separador, y T_R (R) es la temperatura del yacimiento ($T_R = T_F + 460$). Las constantes A_0 , B_0 y C_0 , se necesitan para calcular la presión de punto de burbuja:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,0362, & B_0 &= 1,0937, & C_0 &= 25,724, & \text{si } A_{PI} &\leq 30, \\ A_0 &= 0,0178, & B_0 &= 1,1870, & C_0 &= 23,931, & \text{si } A_{PI} &> 30. \end{aligned}$$

El rango para la validación para el punto de burbuja está estimado como:

$$30 < p_{sep} < 535 \text{ psi}, \quad 76 < T_{sep} < 150^\circ\text{F}.$$

En adición:

$$0,511 < Y_G < 1,351 \text{ si}, \quad 15,3 < A_{PI} < 30^\circ\text{API}.$$

y

$$0,53 < Y_G < 1,259 \text{ si}, \quad 30,6 < A_{PI} < 59,5^\circ\text{API}.$$

Indice de Gas Disuelto en Aceite

Para calcular el *índice de gas disuelto en aceite*, R_{so} (SCF/STB) se necesita la siguiente fórmula empírica:

$$R_{so} = A_0 Y_{GS} p_b^{B_0} \exp\left(\frac{C_0 A_{PI}}{T_R}\right). \quad (4.22)$$

Esta fórmula está expresada para buscar la relación funcional entre R_{so} y la presión de punto de burbuja p_b .

Factor de Volumen de la formación de Aceite

Para el caso saturado el *factor de volumen de la formación de aceite* B_o (RB/STB) pueden ser expresado como una función del índice de gas disuelto en aceite:

$$B_o(p_b) = 1 + \tilde{A}(T_F - 60) \frac{A_{PI}}{Y_{GS}} + \left(\tilde{B} + \tilde{C}(T_F - 60) \frac{A_{PI}}{Y_{GS}} \right) R_{so}. \quad (4.23)$$

donde las constantes \tilde{A} , \tilde{B} y \tilde{C} , tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= 1,751 \times 10^{-5}, & \tilde{B} &= 4,677 \times 10^{-4}, & \tilde{C} &= 1,811 \times 10^{-8}, & \text{si } A_{PI} \leq 30, \\ \tilde{A} &= 1,1 \times 10^{-5}, & \tilde{B} &= 4,67 \times 10^{-4}, & \tilde{C} &= 1,337 \times 10^{-9}, & \text{si } A_{PI} > 30. \end{aligned}$$

Cuando la presión p del yacimiento es más grande que la presión del punto de burbuja p_b , es decir, en el estado bajo-saturado, el factor del volumen de la formación puede ser evaluado de B_o en p_b , la compresibilidad del aceite c_o (1/psi), y presión:

$$B_o(p, p_b) = B_o(p_b) \exp(-c_o(p - p_b)), \quad (4.24)$$

o aproximadamente

$$B_o(p, p_b) \approx B_o(p_b) \exp(1 - c_o(p - p_b)). \quad (4.25)$$

El rango para la validación de temperatura y presión, para que se pueda usar las expresiones para B_o son:

$$30 < p_{sep} < 535 \text{ psi}, \quad 76 < T_{sep} < 150^\circ \text{ F}, \quad 15,3 < A_{PI} < 59,5^\circ \text{ API}.$$

En adición para el punto de burbuja superior se requiere:

$$0,511 < Y_G < 1,351 \text{ si}, \quad 111 < p < 9485 \text{ psi};$$

para el punto de burbuja inferior se requiere:

$$0,511 < Y_G < 1,351, \quad 14,7 < p < 4,542 \text{ psi}, \quad \text{si } A_{PI} < 30^\circ \text{ API},$$

y

$$0,53 < Y_G < 1,259, \quad 14,7 < p < 6,025 \text{ psi}, \quad \text{si } 30,6 < A_{PI} < 59,5^\circ \text{ API}.$$

Compresibilidad Isotérmica del aceite

La *compresibilidad del aceite* c_o (1/psi) puede ser calculado con la siguiente fórmula empírica:

$$c_o = \frac{-1,433 + 5R_{so} + 17,2T_F - 1,180Y_{GS} + 12,61A_{PI}}{100,000p_b}, \quad (4.26)$$

donde R_{so} , T_F , Y_{GS} , A_{PI} , y p_b , se definieron previamente.

Vicocidad del Aceite

La *viscocidad del aceite* μ_o (cp), se calcula usando la ecuación Beggs-Robinson (Beggs-Robinson, 1975). Esta se calcula de forma diferente para el caso saturado, que para el caso bajo-saturado. Según sea el caso, ésta se calcula a través de viscosidad del aceite (*muerta*), con la fórmula:

$$\mu_o(p_b) = \bar{A}\bar{B}\bar{\mu}_{do}, \quad (4.27)$$

donde μ_{do} (cp) es la viscosidad "*muerta*" del aceite, las constantes \bar{A} y \bar{B} están dadas por:

$$\bar{A} = 10,715 (R_{so} + 100)^{-0,515}, \text{ y } \bar{B} = 5,44 (R_{so} + 100)^{-0,338}$$

La *viscosidad muerta* μ_{do} se puede encontrar a partir de una fórmula empírica:

$$\mu_{do} = 10^{\bar{C}} - 1$$

donde las constantes \bar{C} y C' están dadas por:

$$\bar{C} = 10^{C'} T_F^{-1,163}, \quad C' = 3,0324 - 0,2023 A_{PI}$$

El rango para la presión y la temperatura sean validas las expresiones para μ_o y μ_{do} es:

$$30 < p_{sep} < 535 \text{ psi}, \quad 70 < T_{sep} < 150^\circ \text{ F.}$$

y

$$70 < T < 295^\circ \text{ F}, \quad 16 < A_{PI} < 58^\circ \text{ API.}$$

En el último caso, μ_o se calcula por:

$$\mu_o(p, p_b) = \mu_o(p_b) \left(\frac{p}{p_b} \right)^{A'}, \quad (4.28)$$

donde p es la presión del yacimiento y las constante A' está dada por:

$$A' = 2,6p^{1,187} \exp(-8,98 \times 10^{-5}p - 11,513).$$

El rango para la validación de las expresiones para presión es:

$$15,3 < A_{PI} < 59,5^\circ \text{ API}, \quad 0,511 < Y_G < 1,351, \quad 111 < p < 9,485 \text{ psi.}$$

Compresibilidad de la Viscosidad del Aceite

En el modelo beta del petróleo la *compresibilidad de la viscosidad del aceite* c_μ (1/psi) en ocasiones es usada para evaluar la viscosidad del aceite en estado bajo-saturado:

$$\mu_o(p, p_b) = \mu_o(p_b) (1 + c_\mu (p - p_b)), \quad (4.29)$$

donde las constantes c_μ y B' están dadas por:

$$c_\mu = (1 + p_b^{-1})^{B'} - 1, \\ B' = 2,6(1 + p_b)^{1,187} \exp(-8,98 \times 10^{-5}(1 + p_b) - 11,513).$$

4.2.3. Propiedades PVT del Gas

En el modelo beta del petróleo y el modelo volátil requieren de dos relaciones funcionales de las propiedades PVT del gas con respecto a la presión:

- Factor de derivación del gas Z o factor del volumen de la formación del gas B_g ,
- Viscosidad del gas μ_g .

Nuevamente cuando los datos de laboratorio no están disponibles, es necesario hacer uso de fórmulas empíricas para calcularlos, a partir de los siguientes datos:

- Presión p y temperatura T del yacimiento,
- Gravedad del gas crudo Y_G ,
- Contenido de CO_2 , H_2S , y N_2 : Y_{CO_2} , $Y_{\text{H}_2\text{S}}$, y Y_N .

Presión y Temperatura Reducidas

Antes de evaluar el factor de derivación Z , es necesario calcular las dimensiones de la presión reducida p_{red} y la temperatura reducida T_{red}

$$p_{red} = \frac{p}{p_{pc}}, \quad T_{red} = \frac{T_R}{T_{pc}}, \quad (4.30)$$

donde p (psia) es la presión de la formación, T_R es la temperatura de la formación (recordemos que $T_R = T_F + 460$) y p_{pc} (psia) y T_{pc} son la presión y la temperatura pseudocrítica del gas respectivamente, p_{pc} y T_{pc} se estiman a partir de la gravedad del gas de ambas condensaciones y diversos yacimientos de gas. Los calculos de los valores se corrigen para el gas ácido a través de la correlación Wichert-Aziz. Antes de que fueran introducida la correlación Wichert-Aziz, las siguientes fórmulas empíricas para p_{pc} y T_{pc} han sido usadas:

$$\begin{aligned} p_{pc0} &= A_{pc} + B_{pc}Y_G + C_{pc}Y_G^2, \\ T_{pc0} &= \hat{A}_{pc} + \hat{B}_{pc}Y_G + \hat{C}_{pc}Y_G^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde Y_G es la densidad del gas crudo (unidades por aire). Para la superficie del gas, las constantes en (4.31) se calcula por:

$$\begin{aligned} A &= 667, & B &= 15, & C &= -37,5, \\ \hat{A} &= 168, & \hat{B} &= 325, & \hat{C} &= -12,5, \end{aligned}$$

mientras para el gas condensado tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} A &= 706, & B &= -51,7, & C &= -11,1, \\ \hat{A} &= 187, & \hat{B} &= 330, & \hat{C} &= -71,5. \end{aligned}$$

La *correlación Wichert-Aziz* para p_{pc} y T_{pc} han sido usadas en años recientes está dado como:

$$p_{pc} = \frac{p_{pc0} (T_{pc0} - W_A)}{T_{pc0} + Y_{H_2S} (1 - Y_{H_2S}) W_A}, \quad T_{pc} = T_{pc0} - W_A,$$

donde la correlación Wichert-Aziz, el factor W_A ($^{\circ}\text{F}$) está dada por:

$$W_A = 120 \left((Y_{CO_2} + Y_{H_2S})^{0,9} - (Y_{CO_2} + Y_{H_2S})^{1,6} \right) - 15 \left(Y_{CO_2}^{0,5} - Y_{H_2S}^4 \right),$$

y Y_{H_2S} y Y_{CO_2} (decimal) son los contenidos de H_2S y CO_2 , respectivamente. Los rangos de validación de p_{pc} y T_{pc} son $0,36 < Y_G < 1,3$ para fluido condensado y $0,56 < Y_G < 1,71$ y $Y_{H_2S} + Y_{CO_2} < 0,8$ para gas variado.

Derivación del Factor del Gas Z

La derivación del factor del gas Z se calcula usando el método desarrollado por Dranchuk quien usó la ecuación de estado Benedict-Webb-Rubin adecuandola para la correlación de Z-factor Standing-Katz. El resultado es una ecuación no lineal y se resuelve por la iteración Newton-Raphson. Y el factor del gas Z se obtiene:

$$Z = \frac{0,27 p_{red}}{\rho_{gr} T_{red}}, \quad (4.32)$$

donde ρ_{gr} es la densidad del gas reducido y se evalua usando la iteración Newton-Raphson es:

$$\begin{aligned} \rho_{gr}^{i+1} &= \rho_{gr}^i - \mathcal{F}(\rho_{gr}^i) / \mathcal{F}'(\rho_{gr}^i), \\ \mathcal{F}(\rho_{gr}^i) &= A_r (\rho_{gr}^i)^6 + B_r (\rho_{gr}^i)^3 + C_r (\rho_{gr}^i)^2 + E_r \rho_{gr}^i \\ &\quad + F_r (\rho_{gr}^i)^3 \left(1 + G_r (\rho_{gr}^i)^2 \right) \exp \left(-G_r (\rho_{gr}^i)^2 \right) - H_r, \\ \mathcal{F}'(\rho_{gr}^i) &= 6A_r (\rho_{gr}^i)^5 + B_r (\rho_{gr}^i)^2 + C_r \rho_{gr}^i + E_r \\ &\quad + F_r (\rho_{gr}^i)^2 \left(3 + G_r (\rho_{gr}^i)^2 \left(3 - 2G_r (\rho_{gr}^i)^2 \right) \right) \exp \left(-G_r (\rho_{gr}^i)^2 \right), \end{aligned}$$

donde sus valores constantes son:

$$\begin{aligned}
 A_r &= 0,6423, & B_r &= -5353T_{red} - 0,6123, \\
 C_r &= 0,31151T_{red} - 1,0467 - \frac{0,5783}{T_{red}^2}, & E_r &= T_{red}, \\
 F_r &= \frac{0,6816}{T_{red}^2}, & G_r &= 0,6845 \\
 H_r &= 0,27p_{red} & \rho_{gr}^0 &= \frac{0,27p_{pres}}{T_{red}}
 \end{aligned}$$

Los procesos de convergencia es rápida para la densidad (con poco más de cinco iteraciones) teniendo un buen valor de inicio ρ_{gr}^0 . El rango para la validación de las expresiones para la fórmula (4.32) para el Z-Factor es:

$$0 < p_{rep} < 30, \quad 1,05 < T_{rep} < 3,$$

el cual cubre los rangos posibles de las condiciones del yacimiento incluyendo presión y temperatura alta.

Factor de Volumen de la Formación de Gas

El *factor de volumen del gas*, B_g (RB/SCF), el índice de volumen V_g de la fase gas medida a condiciones de yacimiento para el volumen V_{Gs} , de la componente gas medida a condiciones estandar, la cual puede ser calculada usando la derivación del factor Z de la siguiente forma:

$$B_g = \frac{0,00504ZTR}{p}, \quad (4.33)$$

donde p (psia) es la presión de la formación.

Viscosidad del Gas

La viscosidad del gas μ_g (cp), es evaluada sobre la estimación de la densidad del gas usando la ley de los gases ideales (con la correlación Z-factor). La presión y la temperatura pseudocrítica corregidas para las componentes no hidrocarburos. μ_g se calcula con la correlación Lee-González

$$\mu_g = \frac{\exp(F)\mu_c}{T_{red}}, \quad (4.34)$$

donde

$$\begin{aligned}
F &= \check{A} + \check{B}T_{red} + \check{C}T_{red}^2 + \check{D}T_{red}^3, \\
\check{A} &= \check{A}_0 + \check{A}_1p_{red} + \check{A}_2p_{red}^2 + \check{A}_3p_{red}^3, \\
\check{B} &= \check{B}_0 + \check{B}_1p_{red} + \check{B}_2p_{red}^2 + \check{B}_3p_{red}^3, \\
\check{C} &= \check{C}_0 + \check{C}_1p_{red} + \check{C}_2p_{red}^2 + \check{C}_3p_{red}^3, \\
\check{D} &= \check{D}_0 + \check{D}_1p_{red} + \check{D}_2p_{red}^2 + \check{D}_3p_{red}^3,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\check{A}_0 &= -2,4621182, & \check{A}_1 &= 2,97054714, \\
\check{A}_2 &= -0,28264054, & \check{A}_3 &= 8,05420522 \times 10^{-3}, \\
\check{B}_0 &= 2,80860949, & \check{B}_1 &= -3,49803305, \\
\check{B}_2 &= 0,36037302, & \check{B}_3 &= -1,04432413 \times 10^2, \\
\check{C}_0 &= -0,793385684, & \check{C}_1 &= 1,39643306, \\
\check{C}_2 &= -0,149144925, & \check{C}_3 &= 4,41015512 \times 10^{-3}, \\
\check{D}_0 &= 0,0839387178, & \check{D}_1 &= 0,186408848, \\
\check{D}_2 &= 0,0203367881, & \check{D}_3 &= 6,09579263 \times 10^{-4}.
\end{aligned}$$

La correlación de la viscosidad del gas μ_c (cp) en la fórmula (4.34) está definida por:

$$\begin{aligned}
\mu_c &= (1,709 \times 10^{-5} - 2,062 \times 10^{-6}Y_G) T_F \\
&+ 8,188 \times 10^{-3} - 6,15 \times 10^{-3} \log(Y_G) \\
&+ Y_{N_2} (9,59 \times 10^{-5} + 8,48 \times 10^{-3} \log(Y_G)) \\
&+ Y_{CO_2} (6,24 \times 10^{-5} + 9,08 \times 10^{-3} \log(Y_G)) \\
&+ Y_{H_2S} (3,73 \times 10^{-3} + 8,49 \times 10^{-3} \log(Y_G))
\end{aligned}$$

donde Y_{N_2} (decimal) es el contenido de N_2 , μ_c es la viscosidad de la mezcla a 14.7 psia y a temperatura del yacimiento.

4.2.4. Compresibilidad Total

Para flujo de una sola fase en un medio poroso, la compresibilidad total c_t (1/psi) es

$$c_t = c_f + \frac{\phi^o}{\phi} c_R, \quad (4.35)$$

donde c_f es la compresibilidad del fluido. Para flujo multifásico (flujo en tres fases agua, aceite y gas), la compresibilidad total c_t (1/psi) es:

$$c_t = S_w c_w + S_o c_o + S_g c_g + \frac{\phi^o}{\phi} c_R. \quad (4.36)$$

4.2.5. Ecuaciones de Estado

Hay diversas técnicas matemáticas para determinar el comportamiento de los hidrocarburos (la distribución de la cantidad química de los componentes). Lo más común se basa en: (1) la *aproximación K-valor*, (2) ecuaciones de estado y (3) una variedad de tablas empíricas de experimentos.

K-valores de Equilibrio

Sean x_{io} y x_{ig} las fracciones de mole de la i -ésima componente en las fases líquida (aceite) y gaseosa (gas), respectivamente, $i = 1, 2, \dots, N_c$ (número de componentes). El equilibrio del índice rápido de vaporación para esta componente está definido por

$$K_i = \frac{x_{ig}}{x_{io}}, \quad , N_c, \quad (4.37)$$

donde K_i es el *equilibrio (K-valores) de la componente i*. A presión baja los K-valores están dispuestos para la mezcla dada la presión y temperatura. En realidad, son fáciles de estimar con los datos de la presión del vapor de las componentes puras. A presión alta los K-valores son funciones de la composiciones globales. La introducción de las componentes dentro de la función K-valor añade considerables complejidades para los calculos (ver [16]).

Ecuaciones de Estado

Mientras la aproximación de los *K-valores* son fáciles de establecer, carecen de generalidad y puede resultar inexactos al momento de simular el yacimiento. En recientes años, las ecuaciones de estado (EOSs) han sido extensamente utilizadas porque produce más consistencia a las componentes, las densidades y el volumen molar, La más famosa EOS es la de Van der Walls. Aquí se presentarán exactamente tres EOS: Peng-Robinson, Redlich-Kwong, y Redlich- Kwong-Soave.

Ecuación de Estado de Peng-Robinson

La mezcla principal de Peng-Robinson EOS es:

$$a_\alpha = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} x_{i\alpha} x_{j\alpha} (1 - k_{ij}) \sqrt{a_i a_j},$$

$$b_\alpha = \sum_{i=1}^{N_c} x_{i\alpha} b_i, \quad \alpha = o, g,$$

donde k_{ij} es el *parámetro de interacción binaria* entre las componentes i y j , y a_i , b_j son factores empíricos de la componente i pura. La cantidad de parámetros para la interacción molecular entre dos moléculas diferentes, son las siguientes, k_{ij} es cero cuando i y j representan el mismo componente, pequeño cuando i y j representan componentes que no difieren en mucho, y largo cuando i y j representan componentes substancialmente diferentes. De ser posible k_{ij} depende de la presión y la temperatura y sobre las identidades de la componente i y j (ver [51] y [52]).

Los factores a_i y b_j pueden ser calculados como:

$$a_i = \Omega_{i\alpha} \alpha_i \frac{R^2 T_{ic}^2}{p_{ic}} \quad b_j = \Omega_{ib} \frac{R T_{ic}}{p_{ic}},$$

donde recordemos que R es la constante universal del gas, T es la temperatura, T_{ic} y p_{ci} son la temperatura y presión crítica, los parámetros de las EOS $\Omega_{i\alpha}$ y Ω_{ib} están dadas de la siguiente forma:

$$\Omega_{i\alpha} = 0,4724 \quad \Omega_{ib} = 0,077796,$$

$$\alpha_i = \left(1 - \lambda_i \left[1 - \sqrt{T/T_{ic}} \right] \right)^2,$$

$$\lambda_i = 0,37464 + 1,523\omega_i - 0,26992\omega_i^2,$$

y ω_i es el factor de la componente i acéntrico. Los factores acéntricos aproximados expresan la derivada de la forma de una molécula de la esfera definida:

$$A_\alpha = \frac{a_\alpha p_\alpha}{R^2 T^2} \quad B_\alpha = \frac{b_\alpha p_\alpha}{RT}, \quad \alpha = o, g,$$

donde la presión p_α está dada por los parámetros de la ecuación de estado de Peng-Robinson:

$$p_\alpha = \frac{RT}{V_\alpha - b_\alpha} - \frac{a_\alpha(T)}{V_\alpha(V_\alpha - b_\alpha) + b_\alpha(V_\alpha - b_\alpha)}, \quad (4.38)$$

con V_α es el volumen molar de la fase α . Introducimos la compresibilidad del factor en Z_α :

$$Z_\alpha = \frac{p_\alpha V_\alpha}{RT}, \quad \alpha = o, g.$$

La ecuación (4.38) puede ser expresada como una *ecuación cúbica* en Z_α :

$$Z_\alpha^3 - (1 - B_\alpha) Z_\alpha^2 + (A_\alpha - 2B_\alpha - 3B_\alpha^2) Z_\alpha - (A_\alpha B_\alpha - B_\alpha^2 - B_\alpha^3) = 0, \quad \alpha = o, g. \quad (4.39)$$

Esta ecuación tiene tres raíces. Cuando solamente tiene una sola raíz real, se hace uso de ella. Si hay tres raíces reales, la selección de la raíz correcta depende del dominio y de la fase líquida o gaseosa. Ahora para $i = 1, 2, \dots, N_c$ y $\alpha = o, g$, el *coeficiente de fugacidad* del componente i en la mezcla puede ser obtenido:

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{i\alpha} = & \frac{b_i}{b_\alpha} (Z_\alpha - 1) \\ & - \frac{A_\alpha}{2\sqrt{2}B_\alpha} \left(\frac{2}{a_\alpha} \sum_{j=1}^{N_c} x_{j\alpha} (1 - k_{ij}) - \frac{b_i}{b_\alpha} \right) \\ & \cdot \ln \left(\frac{Z_\alpha + (1 + \sqrt{2}B_\alpha)}{Z_\alpha - (1 - \sqrt{2}B_\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

La *fugacidad* de la componente i es:

$$f_{i\alpha} = p_\alpha x_{i\alpha} \varphi_{i\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, N_c \text{ y } \alpha = o, g.$$

finalmente, la distribución de cada componente dentro de las fase líquida y gaseosa está dada por la relación de termodinámica de equilibrio:

$$f_{io}(p_o, x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{N_c o}) = f_{ig}(p_g, x_{1g}, x_{2g}, \dots, x_{N_c g}), \quad i = 1, 2, \dots, N_c. \quad (4.41)$$

Ecuación de Estado de Redlich-Kwong

La *Redlich-Kwong dos-parámetros* EOS está dada por:

$$p_\alpha = \frac{RT}{V_\alpha - b_\alpha} - \frac{a_\alpha}{V_\alpha(V_\alpha + b_\alpha)}, \dots \alpha = o, g. \quad (4.42)$$

con $Z_\alpha = p_\alpha V_\alpha / (RT)$, está puede ser expresada como una *ecuación cúbica* en Z_α :

$$Z_\alpha^3 - Z_\alpha^2 + (A_\alpha - B_\alpha - B_\alpha^2) Z_\alpha - A_\alpha B_\alpha = 0, \quad \alpha = o, g. \quad (4.43)$$

La selección adecuada de las raíces se realiza de la misma forma como se hizo en Peng-Robinson dos-parámetros EOS. En el presente caso, los parámetros $\Omega_{i\alpha}$, Ω_{ib} y α_i son:

$$\begin{aligned} \Omega_{i\alpha} &= 0,42748 & \Omega_{ib} &= 0,08664, \\ \alpha_i &= T/T_{ic}. \end{aligned}$$

Todas las otras cantidades A_α , B_α , a_α , b_α , y b_i están definidos de la misma forma como se hizo en Peng-Robinson EOS, $i = 1, 2, \dots, N_c$, $\alpha = o, g$. El coeficiente de fugacidad de la componente i en la mezcla se puede obtener de la ecuación:

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{i\alpha} &= \frac{b_i}{b_\alpha} (Z_\alpha - 1) - \ln (Z_\alpha - B_\alpha) \\ &\quad - \frac{A_\alpha}{B_\alpha} \left(\frac{2}{a_\alpha} \sum_{j=1}^{N_c} x_{j\alpha} (1 - k_{ij}) \sqrt{a_i a_j} - \frac{b_i}{b_\alpha} \right) \\ &\quad \cdot \ln \left(\frac{Z_\alpha + B_\alpha}{Z_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ecuación de Estado de Redlich-Kwong-Soave

La modificación de Soave en Redlich-Kwong EOS, es en el parámetro α_i como:

$$\alpha_i = \left(1 - \lambda_i \left[1 - \sqrt{T/T_{ic}} \right] \right)^2.$$

donde $\lambda_i = 0,48 + 1,574\omega_i - 0,176\omega_i^2$ y ω_i es el factor acéntrico para la componente i . La definición de las otras cantidades y de los coeficientes de fugacidad son los mismos como en Redlich-Kwong EOS, Peng-Robinson y Redlich-Kwong-Soave EOSs han sido excesivamente utilizados en el mejoramiento de la predicción de recuperación de aceite (EOR).

4.3. Las Propiedades que Dependen de la Temperatura

4.3.1. Propiedades de la Roca

Las propiedades de roca para flujo térmico son similares para los modelos beta isotérmico y composicional, pero ahora esas propiedades dependen de la temperatura. En particular la presión capilar que es de la forma:

$$p_{cow}(S_w, T) = p_o - p_w, \quad p_{cgo}(S_g, T) = p_g - p_o \quad (4.45)$$

Análogamente las permeabilidades para el agua, aceite y gas son:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= k_{rw}(S_w, T), & k_{row} &= k_{row}(S_w, T) \\ k_{rg} &= k_{rg}(S_g, T), & k_{rog} &= k_{rog}(S_g, T) \\ k_{ro} &= k_{ro}(S_w, S_g, T). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Los modelos de roca I y II pueden ser adaptados para la permeabilidad relativa del aceite k_{ro} .

Por ejemplo, las funciones de permeabilidad relativa k_{rw} y k_{row} para el sistema agua-aceite pueden definirse como:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= k_{rwro}(T) \left(\frac{S_w - S_{wir}(T)}{1 - S_{orw}(T) - S_{wir}(T)} \right)^{nw}, \\ k_{row} &= k_{rocv}(T) \left(\frac{1 - S_w - S_{orw}(T)}{1 - S_{orw}(T) - S_{wc}(T)} \right)^{now}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

y k_{rg} y k_{rog} para el sistema gas aceite:

$$\begin{aligned} k_{rg} &= k_{rgro}(T) \left(\frac{S_g - S_{gr}}{1 - S_{wc}(T) - S_{oinit} - S_{gr}} \right)^{ng}, \\ k_{row} &= k_{rocv}(T) \left(\frac{1 - S_g - S_{wc}(T) - S_{org}(T)}{1 - S_{wc}(T) - S_{org}(T)} \right)^{nog}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde nw , now , ng , son números reales no negativos; S_{wc} , S_{wir} , S_{orw} , S_{org} y S_{gr} son saturación encerradas del agua, saturación irreducibles, saturación residual del agua, saturaciones residual del aceite en el sistema agua aceite, saturación residual del aceite en el sistema aceite-gas y saturación residual del gas; k_{rwro} , k_{rocv} y k_{rgro} son las permeabilidades

relativas en la saturación residual para el sistema agua-aceite, la permeabilidad relativa en la saturación del agua encerrada y la permeabilidad relativa del gas en $S_g = 1 - S_{wc}(T) - S_{oinir}$, para el sistema gas-aceite, respectivamente; y S_{oinir} es la saturación inicial del aceite, en el sistema aceite-gas. Finalmente, para las propiedades de roca uno debe considerar la conductividad térmica y la capacidad calorífica del yacimiento, sobre cargado y bajo cargado.

4.3.2. Propiedades de los Fluidos

Propiedades del Agua

Las propiedades físicas del agua y del vapor, tal como la densidad, la energía interna, y la viscosidad, se pueden buscar en la tabla agua-vapor (ver [31]). En tal tabla se dan los términos de las variables independientes: presión y temperatura. En el estado saturado del yacimiento, hay gas libre; en este caso, la presión y la temperatura son relacionadas, y solamente un término se emplea como una variable independiente.

Propiedades del Aceite

Cualquier cantidad de componentes pueden ser tratada en un sistema diferencial, como los descritos en los modelos isotérmicos y el flujo multicomponente, desarrollados en el capítulo anterior. El incremento del número de componentes significa más trabajo computacional y tiempo de proceso. En ocasiones computacionalmente es necesario agrupar varios componentes químicos similares dentro de una componente matemática. Esta forma permite bajar las componentes, es decir reduce el número de incógnitas que hace más práctico el cálculo computacional.

La fase aceite es la mezcla de los componentes, y la gama de esas componentes provienen de los componentes más ligeros y los componentes más pesados. Una forma para reducir el número componentes en cada pseudocomponente, es deducir estas propiedades físicas, tales como el peso pseudomolecular, presión y temperatura crítica, compresibilidad, densidad, viscosidad, coeficiente de expansión térmica, y calor específico. Estas propiedades físicas están en función de la presión y temperatura.

La propiedad más importante de las fases aceite y gas es la *viscosidad que depende de la temperatura*:

$$\mu_{io} = \exp(a_1 T^{b_1}) + c_1, \quad \mu_{ig} = a_2 T^{b_2},$$

donde T es la temperatura medida en grados absolutos, a_1 , b_1 , c_1 , a_2 y b_2 son parámetros empíricos que pueden ser medidos en el laboratorio, μ_{io} y μ_{ig} son las viscosidades en el i -ésima componente en la fase aceite o gas, repectivamente.

Ecuaciones de Estado

Las ecuaciones de estado (EOS's) definidas anteriormente pueden también ser usadas para definir la funciones de fugacidad $f_{i\alpha}$ para flujo térmico, la cual ahora depende de la temperatura. Porque la complejidad del flujo de este tipo, por lo tanto, el equilibrio del K-valor se introdujo en la sección anterior, en ocasiones es más usada para describir la relaciones de equilibrio:

$$x_{iw} = K_{iw}(p, T) x_{io}, \quad x_{ig} = K_{ig}(p, T) x_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, N_c. \quad (4.49)$$

Un ejemplo para evaluar las K-valores $K_{i\alpha}$ usando la fórmula empírica:

$$K_{i\alpha} = \left(k_{i\alpha}^1 + \frac{k_{i\alpha}^2}{p} + k_{i\alpha}^3 p \right) \exp \left(\frac{k_{i\alpha}^4}{T - k_{i\alpha}^5} \right), \quad (4.50)$$

donde la constante $k_{i\alpha}^j$ se obtiene en el laboratorio, $i = 1, 2, \dots, N_c$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, $\alpha = w, g$.

Capítulo 5

Flujo Bifásico

En la simulación de un yacimiento de petróleo, en ocasiones estamos interesados en simular el flujo de dos o más fluidos en un medio poroso. En este capítulo se Desarrollarán las ecuaciones básicas para flujo bifásico en un medio poroso y sus ecuaciones alternativas para su uso en diversos métodos numéricos disponibles. En esta sección consideraremos dos fluidos inmiscibles, es decir no hay intercambio de masa entre las fases. Una fase (el agua) moja el medio poroso, más que la otra fase (aceite), y es llamada la fase mojanante denotada por el subíndice w , la otra fase es llamada no mojanante denotada por el subíndice o . En general el agua es el fluido mojanante relativo al aceite y al gas, mientras el aceite es el fluido mojanante relativo al gas.

5.1. Ecuaciones Diferenciales Básicas

Describimos las ecuaciones diferenciales básicas para el flujo bifásico en un medio poroso Ω . La fase (agua) que moja al medio poroso más que la otra fase (aceite) es la fase mojanante y se indica con el subíndice w . La otra fase determina la fase no mojanante y se indica con el subíndice o .

La ecuación de conservación de masa para cada fluido es:

$$\frac{\partial \phi S_\alpha \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_\alpha \quad \alpha = w, o \quad (5.1)$$

donde ϕ representa la porosidad del medio, y para cada fase tienen su propia saturación S_α , densidad ρ_α , ley de Darcy para cada fase:

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{\mathbf{k}k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}); \alpha = w \text{ y } o \quad (5.2)$$

donde $\rho_\alpha \mathbf{k}$, $k_{r\alpha}$, p_α , z , y μ_α son la aceleración gravitacional, el tensor de permeabilidad intrínseca, la permeabilidad relativa, presión, profundidad y viscosidad para cada fase α .

La saturación de un fluido está definida como la fracción de volumen de los poros ocupada por las fases en un medio poroso lleno por la fase. El factor que relaciona los dos fluidos juntos es que llenan el espacio vacío de los poros esto implica que:

$$S_w + S_o = 1, \quad (5.3)$$

donde S_w y S_o representan la fracción del volumen de los poros ocupada por las fases agua(fase mojante) y aceite(fase no mojante) respectivamente.

Las diferencias de presión, está dada por la presión capilar dada por la siguiente expresión:

$$p_c(S_w) = p_o - p_w \quad (5.4)$$

Empíricamente la presión capilar es función de la saturación S_w .

Las funciones p_c y $k_{r\alpha}$ fueron dadas en el capítulo 3. Las ecuaciones (5.1)-(5.4) provienen de seis ecuaciones para seis incógnitas p_α , \mathbf{u}_α y S_α , $\alpha = w, o$. Estas son las variables principales usadas para formular de manera alternativa los modelos matemáticos.

5.1.1. Ecuaciones Diferenciales Alternativas.

En esta sección, derivaremos varias formulaciones alternativas de las ecuaciones diferenciales (5.1) y de las ecuaciones (5.2)-(5.4). Estas ecuaciones alternativas son de gran utilidad su forma de plantearse dependen del método de solución numérica.

Ecuación Presión.

Dividimos la ecuación (5.1) por $\frac{1}{\rho_\alpha}$ y tenemos:

$$\frac{1}{\rho_\alpha} \left(\frac{\partial \phi S_\alpha \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) - q_\alpha \right) = 0$$

desarrollando las derivadas tenemos que:

$$\sum_\alpha \left[\frac{1}{\rho_\alpha} \left(S_\alpha \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \rho_w \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \phi S_\alpha \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \rho_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \nabla \rho_\alpha \right) - q_\alpha \right] = 0 \quad (5.5)$$

Pero por la ecuación (5.3) tenemos que $\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 1$, por lo tanto $\frac{\partial S_{\alpha}}{\partial t} = 1$, realizando operaciones la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \left[\frac{1}{\rho_{\alpha}} \left(\phi S_{\alpha} \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{u}_{\alpha} \nabla \rho_{\alpha} \right) \right] - \sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \quad (5.6)$$

Sabemos que la velocidad total \mathbf{u} está definida como:

$$\sum_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \quad (5.7)$$

Aplicando la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} = \nabla \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} \quad (5.8)$$

Sustituyendo la ecuación (5.8) en (5.6) se obtienen la ecuación multifásica de la presión:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \left(\phi S_{\alpha} \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{u}_{\alpha} \nabla \rho_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \quad (5.9)$$

Tenemos que la movilidad está definida como:

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &= \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda} \\ \lambda_{\alpha} &= \lambda f_{\alpha} \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde $\lambda = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}$ es la movilidad total. Insertando la ecuación (5.10) en (5.2) se obtiene:

$$\mathbf{u} = -\lambda \mathbf{k} \left[\sum_{\alpha} f_{\alpha} \nabla p_{\alpha} - \sum_{\alpha} f_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{g} \right] \quad (5.11)$$

Con esta formulación de la velocidad total, la ecuación de presión (5.9) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \lambda \mathbf{k} \left[\sum_{\alpha} f_{\alpha} \nabla p_{\alpha} - \sum_{\alpha} f_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{g} \right] \\ & + \sum_{\alpha} \frac{1}{\rho_{\alpha}} \left[\phi S_{\alpha} \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{u}_{\alpha} \nabla \rho_{\alpha} \right] - \sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Formulación en Presión Global

Las ecuaciones de la (5.9)-(5.12) son ligeramente acopladas. Para reducir el acoplamiento, escribiremos una formulación diferencial basada en la presión global. Para simplificar vamos a suponer que la densidades son constantes; la formulación no se puede extender para la densidad de las variables (ver [13]). Introducimos la movilidad de las fases.

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \quad \alpha = w, o,$$

y la movilidad total como:

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o.$$

También definimos la función de flujo fraccional como:

$$f_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} \quad \alpha = w, o.$$

Con $S = S_w$, definimos la presión global:

$$p = \int^{p_c(S)} f_w(p_c^{-1}(\xi)) d\xi, \quad (5.13)$$

y la velocidad total como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o \quad (5.14)$$

tenemos que de las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.13) la velocidad total puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k}\lambda \left(\sum_\alpha f_\alpha \rho_\alpha \mathbf{g} \right) \quad (5.15)$$

donde \mathbf{k} es la permeabilidad efectiva. Usando esta formulación para la velocidad total, es posible deducir una ecuación para la presión global. En un sistema bifásico con una fase mojadora (agua w) y una no mojadora (aceite o), se obtiene de la ecuación (5.12), lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \lambda \mathbf{k} \left[\sum_\alpha f_\alpha \nabla p_\alpha - \sum_\alpha f_\alpha \rho_\alpha \mathbf{g} \right] \\ & + \sum_\alpha \frac{1}{\rho_\alpha} \left[\phi S_\alpha \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \nabla \rho_\alpha \right] - \sum_\alpha q_\alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Formulación de la Fase

En esta formulación se usa la presión de la fase para obtener la ecuación de presión. El uso de una presión de fase p_α tiene más significado físico que una presión global. Para obtener la ecuación de presión se sustituye la ecuación (5.11) y considerando un sistema de dos fases: (agua w) y (aceite o) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= -\lambda \mathbf{k} (f_w \nabla p_w + f_o \nabla p_o - (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \mathbf{g}) \\ \mathbf{u} &= -\lambda \mathbf{k} (\nabla p_w (f_w + f_o) + f_o \nabla p_c - (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \mathbf{g}) \\ \mathbf{u} &= -\lambda \mathbf{k} (\nabla p_w + f_o \nabla p_c - (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \mathbf{g})\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (5.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{k} f_w(S) \lambda_o(S) \left(\frac{dp_c}{dS} \nabla S + (\rho_o - \rho_w) \mathbf{g} \right) \right. \\ \left. + f_w(S) \mathbf{u} \right\} = \tilde{q}_w(p, S).\end{aligned}\quad (5.17)$$

Una vez conocidas las presiones p_w y p_o las correspondientes velocidades de fase se pueden calcular usando la ley de Darcy. También es posible usar una velocidad de fase modificada \mathbf{u}_α^* definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}_\alpha^* = -\lambda \mathbf{k} (\nabla p_\alpha - \nabla \rho_\alpha \rho \mathbf{g}) = \frac{\mathbf{u}_\alpha}{f_\alpha} \quad (5.18)$$

Esta velocidad de fase modificada muestra una forma similar a la velocidad total (5.15), y se puede dar ventaja desde el punto de vista numérico.

Ecuación de Saturación

La solución de la ecuación de presión produce la velocidad que se requiere para resolver la ecuación de saturación. En la formulación de presión de fase, la saturación puede calcularse directamente de la ecuación de balance de masa (5.1). En el caso en particular en un sistema donde se tienen dos fases: agua w y aceite o , en donde ambas fases son incompresibles y la porosidad es constante, esto reduce la ecuación de balance de masa en:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_w - q_w = 0 \quad (5.19)$$

o alternativamente

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot f_w \mathbf{u}_w^* - q_w = 0 \quad (5.20)$$

Para la formulación presión global produce la velocidad total \mathbf{u} pero no la velocidad de la fase, se debe derivar una ecuación especial para la saturación. Esta ecuación de balance de masa (5.1). Se considera un sistema de dos fases agua w y aceite o . Escribiendo la ley de Darcy para estas dos fases y usando la ecuación (5.4) se obtiene:

$$\mathbf{u}_w = -\lambda \mathbf{k} (\nabla p_w - \nabla \rho_w \mathbf{g}) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{u}_o = -\lambda \mathbf{k} (\nabla p_o - \nabla \rho_o \mathbf{g}) \quad (5.22)$$

Se despeja $\mathbf{k} \nabla p_w$ de la ecuación (5.22)

$$\mathbf{k} \nabla p_w = -\frac{\mathbf{u}_o}{\lambda} - \mathbf{k} (\nabla p_c - \rho_o \mathbf{g}) \quad (5.23)$$

Enseguida se inserta esta última relación en (5.21) lo que produce la ecuación de flujo fraccional para \mathbf{u}_w :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_w &= -\lambda_w \mathbf{k} \nabla p_w + \lambda_w \mathbf{k} \nabla \rho_w \mathbf{g} \\ \mathbf{u}_w &= -\lambda_w \left(-\frac{\mathbf{u}_o}{\lambda} - \mathbf{k} (\nabla p_c - \rho_o \mathbf{g}) \right) + \lambda_w \mathbf{k} \nabla \rho_w \mathbf{g} \\ \mathbf{u}_w &= \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \mathbf{u}_o + \lambda_w \mathbf{k} (\nabla p_c + (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

sabemos de la velocidad total que $\mathbf{u}_o = \mathbf{u} - \mathbf{u}_w$, la cual se sustituye en (5.24) y produce:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_w &= \frac{\lambda_w}{\lambda_o} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_w) + \lambda_w \mathbf{k} (\nabla p_c + (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \\ \mathbf{u}_w \frac{\lambda_o + \lambda_w}{\lambda_o} &= \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \mathbf{u} + \lambda_w \mathbf{k} (\nabla p_c + (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \\ \mathbf{u}_w &= \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \mathbf{u} + \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_o + \lambda_w} \mathbf{k} (\nabla p_c + (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ahora sustituimos \mathbf{u}_w en la ecuación de balance de masa para la fase mojadora w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi_w \rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_w \mathbf{u}_w - \rho_w q_w &= 0 \\ \frac{\partial(\phi_w \rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho_w \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \mathbf{u} + \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_o + \lambda_w} \mathbf{k} (\nabla p_c + (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \right) \right] - \rho_w q_w &= 0 \\ \frac{\partial(\phi_w \rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_w (f_w \mathbf{u} + \lambda \mathbf{k} (\nabla p_c + (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}))] - \rho_w q_w &= 0 \end{aligned}$$

Formulación en la Fase Presión y Saturación.

Usamos a ρ_o y S_w como las principales variables aplicando la ecuaciones (5.2) a la (5.4) en las ecuaciones (5.1) podemos reescribirlas como:

$$\frac{\partial \phi S_w \rho_w}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_w \frac{\mathbf{k} k_{rw}}{\mu_w} \left(\nabla p_o - \frac{\partial p_c}{\partial S_w} \nabla S_w - \rho_w \mathbf{g} \right) \right) = -q_w, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \phi (1 - S_w) \rho_o}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_o \frac{\mathbf{k} k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) \right) = -q_o \quad (5.27)$$

De las ecuaciones (5.1) y (5.2) , dividimos por ρ_w y ρ_o , respectivamente y sumamos ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot \left(\rho_w \frac{\mathbf{k} k_{rw}}{\mu_w} \left(\nabla p_o - \frac{\partial p_c}{\partial S_w} \nabla S_w - \rho_w \mathbf{g} \right) \right) \\ & + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot \left(\rho_o \frac{\mathbf{k} k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) \right) \quad (5.28) \\ & = \frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial \phi \rho_w}{\partial t} + \frac{(1 - S_w)}{\rho_o} \frac{\partial \phi \rho_o}{\partial t} - \frac{q_w}{\rho_w} - \frac{q_o}{\rho_o} \end{aligned}$$

Notemos que si la saturación S_w en la ecuación (5.28) es evaluada explícitamente, podemos usar la ecuación para resolver la presión p_o . Antes de hacer el cálculo para la presión p_o , la ecuación (5.28) puede ser usada para calcular S_w . Este es el método de *presión implícita-saturación explícita* (IMPES) y ha sido explorado extensamente para flujo en dos fases en yacimientos petroleros (ver [16]).

En el caso particular cuando las ecuaciones de flujo en dos fases: agua w y aceite o , en la formulación presión saturación, la ecuación de presión (5.12), suponiendo flujos incompresibles y porosidad constante, se tiene:

$$-\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} [f_w \nabla p_w + f_o \nabla p_o - (f_w \rho_w - f_o \rho_o) \mathbf{g}] - \sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \quad (5.29)$$

Dado que el aceite es una fase continua y consecuentemente su presión se comporta bien, se obtendra una en términos de la presión del aceite. Usando $p_c = p_{cow} = p_o - p_w$ y recordando que $(f_w + f_o) = 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} [f_w \nabla (p_o - p_c) + f_o \nabla p_o - (f_w \rho_w - f_o \rho_o) \mathbf{g}] - (q_w + q_o) = 0 \\
& -\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} [f_w \nabla p_o + f_o \nabla p_o - f_w \nabla p_c - (f_w \rho_w - f_o \rho_o) \mathbf{g}] - (q_w + q_o) = 0 \\
& -\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} [\nabla p_o (f_w + f_o) - f_w \nabla p_c - (f_w \rho_w - f_o \rho_o) \mathbf{g}] - (q_w + q_o) = 0 \\
& \quad -\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} [\nabla p_o - f_w \nabla p_c - (f_w \rho_w - f_o \rho_o) \mathbf{g}] - (q_w + q_o) = 0 \\
& \quad \quad -\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} \nabla p_o - \nabla \cdot \lambda_w \mathbf{k} \nabla p_c \\
& \quad \quad + \nabla \cdot \lambda \mathbf{k} (f_w \rho_w - f_o \rho_o) \mathbf{g} - (q_w + q_o) = 0 \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Si expresamos la presión capilar como:

$$\nabla p_c = \frac{\partial p_c}{\partial S_w} \nabla S_w \tag{5.31}$$

sustituimos la ecuación (5.31) en la ecuación (5.30) obtenemos:

$$-\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} \nabla p_o - \nabla \cdot \left(\lambda_w \mathbf{k} \frac{\partial p_c}{\partial S_w} \nabla S_w \right) + \nabla \cdot \lambda \mathbf{k} (f_w \rho_w - f_o \rho_o) \mathbf{g} - (q_w + q_o) = 0 \tag{5.32}$$

Para obtener la ecuación de la saturación haremos uso de la ecuación (5.1) en su fase agua w la cual es:

$$\begin{aligned}
& \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = q_w \\
& \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \mathbf{k} (\nabla p_w - \rho_w \mathbf{g})) = q_w \\
& \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \mathbf{k} (\nabla (p_o - p_c) - \rho_w \mathbf{g})) = q_w \\
& \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \lambda \mathbf{k} \frac{\partial p_c}{\partial S_w} \nabla S_w - \nabla \cdot (\lambda \mathbf{k} \nabla p_o) + \nabla \cdot \lambda \mathbf{k} (\rho_w \mathbf{g}) = q_w \tag{5.33}
\end{aligned}$$

En los caso de estudio para efectos de simplificar no se toman los efectos de fuerzas de gravedad, por lo tanto, la ecuación de presión (5.32) y la ecuación de saturación de saturación (5.33) se transforman como sigue:

$$-\nabla \cdot \lambda \mathbf{k} \nabla p_o - \nabla \cdot \left(\lambda_w \mathbf{k} \frac{\partial p_c}{\partial S_w} \nabla S_w \right) = (q_w + q_o) \tag{5.34}$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\lambda \mathbf{k} \frac{\partial p_c}{\partial S_w} \nabla S_w - \lambda \mathbf{k} \nabla p_o \right) = q_w \tag{5.35}$$

Formulación Cargada

Introducimos una presión que es más pequeña que la presión de la fase:

$$p = S_w p_w + S_o p_o. \quad (5.36)$$

Si la fase desaparece (es decir, S_w o S_o son cero), hay aún una variable distinta de cero p . Aplicando algo de álgebra manipulando y derivando la formulación de la fase, obtenemos

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k} \{ \lambda(S) \nabla p + (S \lambda(S) - \lambda_w(S)) \nabla p_c - \lambda(S) \nabla p_c \nabla S - (\lambda_w \rho_w - \lambda_o \rho_o) \rho \mathbf{g} \}. \quad (5.37)$$

5.2. IMPES Clásico e IMPES Mejorado

Notemos que las ecuaciones diferenciales (5.1)-(5.4) son no lineales y acopladas. Existen una gran variedad de métodos para resolver ese sistema de ecuaciones, tales como el IMPES, SS (Solución Simultánea), secuencial y el método adaptativo implícito. Cabe mencionar que el método IMPES aún es muy usado en la industria petrolera y un método muy poderoso para resolver flujo en dos fases (particularmente para fluidos incompresibles y compresibles). En particular daremos una revisión a dicho método en la siguiente sección para el modelo beta se retomara el método IMPES.

IMPES Clásico

El método IMPES fue originalmente desarrollado por Sheldon et al. (1959), Stone y Garder (1961). La idea básica de este método clásico para resolver (5.1)-(5.4) es separar la presión de la saturación. Normalmente el sistema es acoplado, es dividido dentro en una ecuación de presión y una ecuación de saturación, y las ecuaciones de presión y saturación son resueltas implícitamente y explícitamente respectivamente en una aproximación en el tiempo. Por lo tanto para que sea estable, este método clásico requiere pasos de tiempos muy pequeños para la saturación. Este requerimiento es costoso debido que si, particularmente intervalos largos de tiempo, tendremos problemas al momento de integrar y una malla pequeña tales como los problemas cónicos. En esta sección revisaremos

primero el método IMPES clásico y después introduciremos el método IMPES mejorado. Nos centraremos en el flujo incompresible.

Usaremos a la presión del aceite y la saturación del agua como *variables principales*:

$$p = p_o, \quad S = S_w. \quad (5.38)$$

Definimos la velocidad total como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o. \quad (5.39)$$

bajo la suposición de que los fluidos son incompresibles, aplicamos (5.3) y (5.39) en (5.1) y observamos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \tilde{q}(p, S) = \tilde{q}_w(p, S) + \tilde{q}_o(p, S), \quad (5.40)$$

y de la ecuación (5.4) y (5.39) en (5.2):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{k} [\lambda(S) \nabla p - \lambda_w(S) p_c - (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) \rho \mathbf{g}], \quad (5.41)$$

donde $\tilde{q}_w = q_w / \rho_w$ y $\tilde{q}_o = q_o / \rho_o$. Substituyendo (5.41) en (5.40) produce la ecuación de presión:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{k} \lambda \nabla p) = \tilde{q} - \nabla \cdot (\mathbf{k} (\lambda_w(S) p_c + (\lambda_w \rho_w + \lambda_o \rho_o) \rho \mathbf{g})), \quad (5.42)$$

La velocidad de la fase \mathbf{u}_w y \mathbf{u}_o son relacionadas con la velocidad total \mathbf{u} , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_w &= f_w \mathbf{u} + \mathbf{k} \lambda_o f_w \nabla p_c + \mathbf{k} \lambda_o f_w (\rho_w - \rho_o) \rho \mathbf{g}, \\ \mathbf{u}_o &= f_o \mathbf{u} - \mathbf{k} \lambda_w f_o \nabla p_c + \mathbf{k} \lambda_w f_o (\rho_o - \rho_w) \rho \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Similarmente, aplicando (5.4), (5.39) y (5.41) en (5.1) y (5.4) para obtener la *ecuación de saturación*:

$$\begin{aligned} &\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ \mathbf{k} f_w(S) \lambda_w(S) \left(\frac{dp_c}{dS} \nabla S + (\rho_o - \rho_w) \rho \mathbf{g} \right) \right\} \\ &+ f_w(S) \mathbf{u} \} = \tilde{q}_w(p, S), \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde por notación, suponemos que $\phi = \phi(\mathbf{x})$.

Sea $J = (0, T]$ ($T > 0$) un intervalo de tiempo, y para un entero positivo N , tal que $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = T$, es una partición de J . Para calcular la presión, en el método clásico IMPES, la saturación S en (5.42) se supone conocida, y (5.42) se resuelve implícitamente para p . Que para cada $n = 0, 1, 2, \dots, p^n$ satisfase:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{k}\lambda\nabla p) = F(p^n, S^n), \quad (5.44)$$

donde $F(p, S)$ denota el lado derecho de la ecuación (5.42), y S^n está dada. Tenemos que de la ecuación (5.43):

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S}{\partial t} = \tilde{q}_w(p, S) \\ -\nabla \cdot \left\{ \mathbf{k}f_w(S) \lambda_o(S) \left(\frac{dp_c}{dS} \nabla S + (\rho_o - \rho_w) \rho \mathbf{g} \right) + f_w(S) \mathbf{u} \right\}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

En el método IMPES, (5.45) se resuelve explícitamente la saturación S ; es decir, para cada $n = 0, 1, 2, \dots, S^{n+1}$ satisfase:

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t^{n+1}} + \phi \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{t=t+1} = G(p^n, \mathbf{u}^n, S^n), \quad (5.46)$$

donde $G(p, \mathbf{u}, S)$ representa el lado derecho de (5.43).

El método IMPES en forma resumida se aplica de la siguiente forma: Antes de de comenzar $n = 0, 1, 2, \dots$, usamos (5.44) y S^n para evaluar p^n y entonces (5.41) para evaluar \mathbf{u}^n ; a continuación utilizaremos p^n, \mathbf{u}^n, S^n y (5.46) para calcular S^{n+1} . Notamos que los paso de tiempo $\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$ deben ser suficiente pequeños para este método sea estable.

El Método IMPES Mejorado

La mayoría del cálculo en el método IMPES clásico se utiliza en el cálculo implicito de la presión. Esto se deriva por los mecanismos de flujo de fluido en un medio poroso que los cambios de presión son menos rápido en tiempo que la saturación. Además, es necesario que los pasos de tiempo sean usados principalmente en el cálculo explícito de la saturación. Por esas razones, es apropiado tomar los intervalos grandes de tiempo para la presión que para la saturación.

Nuevamente para un entero positivo N , sea $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = T$ una partición de J en subintervalos $J^n = (t^n, t^{n+1}]$ que para el

paso de tiempo $\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$. Esta partición es usada para la presión. Para la saturación cada subintervalo J^n es dividido en sub-subintervalos $J^{n,m} = (t^{n-1,m-1}, t^{n-1,m}]$:

$$t^{n-1,m} = t^{n-1} + m\Delta t_p^n / M^n, \quad m = 1, \dots, M^n.$$

La longitud de $J^{n,m}$ se denota por $\Delta t_S^{n,m} = t^{n-1,m} - t^{n-1,m-1}$, $m = 1, \dots, M^n$, $n = 0, 1, \dots$

El número de pasos, M^n , puede depender de n . Simplificando $t^{n-1,0} = t^{n-1}$ y el conjunto $v^{m,n} = v(\cdot, t^{n,m})$.

Denotaremos el lado derecho de la ecuación (5.41) por $\mathbf{H}(p, S)$. Ahora el método IMPES mejorado está definido: para cada $n = 0, 1, \dots$ buscamos p^n tal que:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{k}\lambda(S^n) \nabla p^n) = F(p^n, S^n), \quad (5.47)$$

y \mathbf{u}^n tal que:

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{H}(p^n, S^n). \quad (5.48)$$

para $m = 1, \dots, M^n$, $n = 0, 1, \dots$, buscamos S^{n+1} tal que:

$$\phi \frac{\partial S^{n+1,m}}{\partial t} = G(p^n, \mathbf{u}^n, S^{n+1,m-1}). \quad (5.49)$$

El paso de tiempo $\Delta t_S^{n+1,m}$ en (5.49) es elegida como:

$$\left(\frac{\partial S^{n+1,m}}{\partial t} \right)_{\text{máx}} = \left(\frac{G(p^n, \mathbf{u}^n, S^{n+1,m-1})}{\phi} \right)_{\text{máx}}, \quad (5.50)$$

por la tanto el cálculo es:

$$\Delta t_S^{n+1,m} = \frac{DS_{\text{máx}}}{\left(\frac{\partial S^{n+1,m}}{\partial t} \right)_{\text{máx}}}, \quad m = 1, \dots, M^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.51)$$

Capítulo 6

Modelo Beta o de Petróleo Negro

6.1. Ecuaciones Diferenciales Básicas

Las ecuaciones diferenciales básicas para el modelo beta en un medio poroso Ω fueron desarrolladas en el capítulo dos. Sean ϕ y \mathbf{k} la porosidad y la permeabilidad respectivamente de un medio poroso $\Omega \subset \mathbf{R}^3$; S_α , μ_α , p_α , \mathbf{u}_α , B_α , y $k_{r\alpha}$ son la saturación, viscosidad, presión, velocidad volumétrica, factor de formación de volumen, y permeabilidad relativa de la fase $\alpha = w, o, y g$ respectivamente; R_{so} es la solubilidad del gas disuelto en el aceite y $\rho_{\beta s}$ y q_β es la densidad y el índice de flujo volumétrico β componente, $\beta = W, O$ y G . Las ecuaciones de conservación de masa en volumen estandar son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi \rho_{Ws} S_w}{B_w} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{Ws} \mathbf{u}_w}{B_w} \right) = q_W \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\rho_{Os} S_o}{B_o} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{Os} \mathbf{u}_o}{B_o} \right) = q_O \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{\rho_{Gs} S_o}{B_o} + \frac{R_{so} \rho_{Gs} S_g}{B_g} \right) \right] + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_{Gs} \mathbf{u}_o}{B_o} + \frac{R_{so} \rho_{Gs} \mathbf{u}_g}{B_g} \right) = q_G \quad (6.3)$$

La ley Darcy para el caso de flujo multifásico se puede expresar como:

$$\mathbf{u}_\alpha = - \frac{\mathbf{k} k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}); \alpha = w, o \text{ y } g \quad (6.4)$$

donde \mathbf{k} es el tensor de permeabilidades absolutas, $k_{r\alpha}$ es la permeabilidad relativa de la fase α , μ_α es el coeficiente de viscosidad de la fase α ,

ρ_α es el peso específico de la fase α , mientras que g es la gravedad. La saturación obligatoria es:

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (6.5)$$

Finalmente la presión de las fases está relacionada con las presión capilar dada como:

$$p_{cgo}(S_g) = p_g - p_o, \quad p_{cow}(S_w) = p_o - p_w \quad (6.6)$$

note que no es necesario definir la tercera presión capilar p_{cgw} , está se puede definir en términos de las presiones p_{cgo} y p_{cow} . El gasto volumetrico a condiciones estandar es:

$$\begin{aligned} q_w &= \frac{q_{Ws}\rho_{Ws}}{B_w} \\ q_o &= \frac{q_{Os}\rho_{Os}}{B_o} \\ q_g &= \frac{q_{Gs}\rho_{Gs}}{B_g} + \frac{q_{Os}R_{so}\rho_{Gs}}{B_g} \end{aligned} \quad (6.7)$$

dadas las expresiones anteriores entonces ρ_{Ws} , ρ_{Os} y ρ_{Gs} son constantes se puede eliminar la densidades a condiciones estandar. Introducimos el potencial como:

$$\Phi_\alpha \equiv p_\alpha - \rho_\alpha z \quad \alpha = w, o \text{ y } g, \quad (6.8)$$

y la transmisibilidad la definimos de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_\alpha \equiv \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha B_\alpha} \mathbf{k} \quad \alpha = w, o \text{ y } g. \quad (6.9)$$

Subtituyedo las ecuaciones (6.7)-(6.9) en las ecuaciones (6.1)-(6.3), despresiando la variación de ρ_α en el espacio, y dividiendo el resultado por ρ_{Ws} , ρ_{Os} y ρ_{Gs} respectivamente obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) &= \nabla \cdot (\mathbf{T}_w \nabla \Phi_w) + \frac{q_w}{B_w} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) &= \nabla \cdot (\mathbf{T}_o \nabla \Phi_o) + \frac{q_o}{B_o} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right) &= \nabla \cdot (\mathbf{T}_g \nabla \Phi_g + R_{so} \mathbf{T}_w \nabla \Phi_o) \\ &\quad + \frac{\rho_{Gs}}{B_g} + \frac{R_{so} \rho_{Os}}{B_o}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Las ecuaciones básicas del modelo beta del petróleo negro están dadas por la ecuaciones (6.1)-(6.3). Para escojer las principales incognitas dependen del estado del Yacimiento, es decir, En estado saturado o en estado bajo-saturado, el cual se discutirá más adelante.

El índice de flujo volumétrico en el pozo (a condiciones estandar) está dado por (ver [37]):

$$\begin{aligned}
q_{Ws} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \frac{2\pi \Delta L^{(j,m)}}{\ln \left(r_e^{(j,m)} / r_w^{(j)} \right)} \frac{\bar{k} k_{ro}}{\mu_w} \left[p_{bh}^{(j)} - p_w - \rho_w \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \\
&\quad \cdot \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\
q_{Os} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \frac{2\pi \Delta L^{(j,m)}}{\ln \left(r_e^{(j,m)} / r_w^{(j)} \right)} \frac{\bar{k} k_{ro}}{\mu_o} \left[p_{bh}^{(j)} - p_o - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \\
&\quad \cdot \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\
q_{Gs} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \frac{2\pi \Delta L^{(j,m)}}{\ln \left(r_e^{(j,m)} / r_w^{(j)} \right)} \frac{\bar{k} k_{rg}}{\mu_g} \left[p_{bh}^{(j)} - p_g - \rho_g \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \\
&\quad \cdot \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right),
\end{aligned}$$

donde $\delta(\mathbf{x})$ es la función delta de Dirac, N_w es el número total de pozos, $M_{w,j}$, es el número total de zonas perforadas del j -esimo pozo, $\Delta L^{(j,m)}$ y $\mathbf{x}^{(j,m)}$ son la longitud de los segmentos y la locación central de la m -esima zona de perforación del j -esimo pozo, la cantidad \bar{k} es el promedio de \mathbf{k} en los pozos, $r_w^{(j)}$ es el radio de la perforación del pozo del j -esimo pozo, $r_e^{(j,m)}$, es el radio de avatimiento del j -esimo pozo en la malla en la cual $\mathbf{x}^{(j,m)}$ está localizado, y $p_{bh}^{(j)}$, es la presión inferior del j -esimo pozo, en el pozo dato. $z_{bh}^{(j)}$. Introducimos el índice del pozo:

$$\mathbf{WI}^{(j,m)} = \frac{2\pi \bar{k} \Delta L^{(j,m)}}{\ln \left(r_e^{(j,m)} / r_w^{(j)} \right)}$$

El índice de flujo volumétrico en el pozo puede ser rescrito como:

$$\begin{aligned}
q_{Ws} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \left[p_{bh}^{(j)} - p_w - \rho_w \rho (z_{bh}^{(j)} - z) \right] \\
&\quad \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \\
q_{Os} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}}{\mu_o} \left[p_{bh}^{(j)} - p_o - \rho_o \rho (z_{bh}^{(j)} - z) \right] \\
&\quad \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \\
q_{Gs} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rg}}{\mu_g} \left[p_{bh}^{(j)} - p_g - \rho_g \rho (z_{bh}^{(j)} - z) \right] \\
&\quad \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)})
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Las típicas expresiones de p_{cow} , p_{cog} y $k_{r\alpha}$ son funciones de la saturación fueron introducidas en el capítulo 3. Las ecuaciones (6.5)-(6.6) y (6.10) provienen de seis incógnitas Φ_α , S_α , $\alpha = w, o, g$. Si en la presión del fondo $p_{bh}^{(j)}$, no está dada, los terminos de fuentes y sumideros definen esta presión e introducen una o más incógnitas (*i.e.*, $p_{bh}^{(j)}$). Con las apropiadas condiciones de frontera y condiciones iniciales, define un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales para esas incógnitas. Las ecuaciones diferenciales alternativas también se pueden desarrollar como en el flujo bifásico.

Propiedades de la Roca

La presión del aceite es una de las principales variables para ser usada:

$$p = p_o. \tag{6.12}$$

Mientras la presión capilar este definida como en la ecuación (6.6), para la programación es conveniente hacer uso de la siguientes definiciones:

$$p_{cw} = p_w - p, \quad p_{cg} = p_g - p; \tag{6.13}$$

es decir, $p_{cw} = -p_{cow}$ y $p_{cg} = -p_{cgo}$. Además por notación, sea $p_{co} = 0$. La presión capilar p_{cw} y p_{cg} se suponen funciones de la saturación solamente:

$$p_{cw} = p_{cw}(S_w), \quad p_{cg} = p_{cg}(S_g). \tag{6.14}$$

La permeabilidad relativa del agua y gas se asumen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= k_{rw}(S_w), & k_{row} &= k_{row}(S_w), \\ k_{rg} &= k_{rg}(S_g), & k_{rog} &= k_{rog}(S_w). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Finalmente la porosidad ϕ tiene la siguiente forma:

$$\phi = \phi^o (1 + c_R (p - p^o)), \quad (6.16)$$

donde ϕ^o es la porosidad en una presión de referencia p^o y c_R es la compresibilidad de la roca.

Propiedades de los Fluidos

La densidad del agua ρ_{W_s} en condiciones estandar se determina usando agua salina, mientras la densidad de la fase del agua ρ_w está determinada por:

$$\rho_w = \frac{\rho_{W_s}}{B_{wi}} \phi^o (1 + c_w (p - p^o)), \quad (6.17)$$

donde B_{wi} es el factor de volumen de agua en la formación a presión inicial p_o en la formación y c_w es la compresibilidad del agua. La viscosidad del agua μ_w se toma como constante.

El modelo beta del petróleo negro involucra tres componentes; agua, aceite y gas. Las relaciones entre las fases y componentes son las siguientes; la componente del agua está en toda la fase del agua con densidad ρ_w , la componente aceite existe solamente en la fase aceite con densidad ρ_{O_o} , y la componente del gas está dividida en dos fases: una es la fase gaseosa que es llamada gas libre, con densidad ρ_g , y la otra parte en la fase de aceite líquido, que está determinada como gas disuelto con densidad ρ_{G_o} . Así la fase aceite con densidad ρ_o está dada como:

$$\rho_o = \rho_{O_o} + \rho_{G_o}. \quad (6.18)$$

La densidad de la componente ρ_{O_o} se evalúa de la siguiente forma:

$$\rho_{O_o} = \frac{\rho_{O_o}}{B_o} \quad (6.19)$$

donde el factor de volumen de aceite en la formación B_o es:

$$B_o = B_{ob}(p_b) (1 - c_o (p - p_b)), \quad (6.20)$$

con B_{ob} siendo el factor de volumen de la formación en la presión de punto de burbuja p_b y c_o la compresibilidad del aceite. La densidad del gas disuelto ρ_{Go} está dado de la siguiente forma:

$$\rho_{Go} = \frac{R_{so}\rho_{Gs}}{B_o}. \quad (6.21)$$

La densidad de gas libre ρ_g está definida por:

$$\rho_g = \frac{\rho_{Gs}}{B_g}, \quad (6.22)$$

donde

$$\rho_{Gs} = Y_G\rho_{air}, \quad B_g = \frac{ZT}{p} \frac{p_s}{T_s}, \quad (6.23)$$

donde Y_G es la densidad de gas crudo, ρ_{air} es la densidad del aire, Z es la derivación del factor del gas, T es la temperatura, y p_s y T_s es la presión y temperatura a condiciones estandar.

La viscosidad del aceite μ_o está dada:

$$\mu_o = \mu_{ob}(p_b) (1 + c_\mu (p - p_b)), \quad (6.24)$$

donde μ_{ob} es la viscosidad del aceite en el p_b y c_μ es la compresibilidad de la viscosidad del aceite. La viscosidad del gas μ_g está en función de a presión p :

$$\mu_g = \mu_g(p). \quad (6.25)$$

Estado de las Fases

En la recuperación secundaria, si la presión está por encima de la presión del punto de burbuja de la fase aceite, es flujo es bifásico; si la presión cae debajo de la presión del punto de burbuja, entonces el flujo es de tipo petróleo negro. Ya que la frecuencia de inyección y producción en un yacimiento varia la presión de punto de burbuja. Si las tres fases coexisten, el yacimiento se refiere a un *estado saturado*. Si todo el gas está disuelto en la fase aceite, y no hay gas presente (no hay gas libre); es decir, $S_g = 0$. En este caso, el yacimiento es llamado en el *estado bajo-saturado*. La región crítica en la cual el estado saturado se transforma en estado bajo-saturado o inversamente es la presión en el punto de burbuja. En el estado saturado, $S_g \neq 0$ y $p = p_b$; la densiad y la viscosidad dependen solamente de la presión p :

$$\begin{aligned}\rho_{O_o}(p) &= \frac{\rho_{O_s}}{B_{ob}(p)}, & \rho_{G_o}(p) &= \frac{R_{so}(p)\rho_{G_s}}{B_{ob}(p)}, \\ \rho_g(p) &= \frac{\rho_{G_s}}{B_g(p)}, & \mu_o &= \mu_o(p) & \mu_g &= \mu_g(p).\end{aligned}\quad (6.26)$$

En el estado bajo-saturado $S_g = 0$ y $p < p_b$. Las densidades y viscosidades en la fase aceite dependen sobre ambas presiones p y p_b :

$$\begin{aligned}\rho_{O_o}(p, p_b) &= \frac{\rho_{O_s}}{B_{ob}(p_b)} (1 + c_o(p - p_b)), \\ \rho_{G_o}(p, p_b) &= \frac{R_{so}(p_b)\rho_{G_s}}{B_{ob}(p)} (1 + c_o(p - p_b)), & \rho_g(p, p_b) &= \frac{\rho_{G_s}}{B_g(p)}, \\ \mu_o(p, p_b) &= \mu_o(p_b) (1 + c_o(p - p_b)), & \mu_g &= \mu_g(p).\end{aligned}\quad (6.27)$$

Para encontrar la mejor solución numérica del modelo beta del petróleo, es conveniente identificar las incógnitas principales, de tal manera que éstas dependen del estado del yacimiento. En el estado saturado, $p = p_o$, S_w y S_o son las principales incógnitas; en el estado bajo-saturado, $p = p_o$, p_b y S_w son las principales incógnitas. Consecuentemente las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}, 0) &= p^0(\mathbf{x}), & S_w(\mathbf{x}, 0) &= S_w^0(\mathbf{x}), \\ S_o(\mathbf{x}, 0) &= S_o^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \Omega\end{aligned}\quad (6.28)$$

o

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}, 0) &= p^0(\mathbf{x}), & S_w(\mathbf{x}, 0) &= S_w^0(\mathbf{x}), \\ p_b(\mathbf{x}, 0) &= p_b^0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in \Omega\end{aligned}\quad (6.29)$$

dependiendo del estado inicial del yacimiento.

6.2. Técnicas de Solución

La selección de las técnicas de solución es crucial para acoplar el sistema de ecuaciones diferenciales. En esta sección, se discutirán las técnicas de solución que son actualmente usadas en la simulación de flujo multifásico. Esas técnicas están incluidas solución simultánea (SS),

secuencial, presión implícita-saturación explícita (IMPES) o IMPES iterativo, implícito adaptativo y técnicas paralelas. IMPES fue tratado en la sección anterior para flujo bifásico en la presente sección se hará para el caso del modelo beta del petróleo negro.

6.2.1. El Método de Newton-Raphson

Considere en general un sistema de ecuaciones diferenciables no lineales:

$$\mathcal{L}_m \{F_m [p(\mathbf{x})]\} = f_m(\mathbf{x}), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.30)$$

donde \mathcal{L}_m denota un operador diferencial lineal, $F_m(\cdot)$ es una función no lineal, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_M)^T$ es un vector de variables dependientes, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_M)$ es un vector dado, y M es el número total de ecuaciones. La iteración de Newton-Raphson para resolver la ec. (6.30), establece iterar el sistema de ecuaciones. La expansión de la serie de Taylor para $F_m(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p})$ es:

$$F_m(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) = F_m(\mathbf{p}) + \nabla F_m(\mathbf{p}) \cdot \delta\mathbf{p} + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{p}|^2), \quad (6.31)$$

donde $|\delta\mathbf{p}|$ es la norma euclidiana de $\delta\mathbf{p}$. Si los términos de alto orden son truncados entonces tenemos $\mathcal{O}(|\delta\mathbf{p}|^2)$, $F_m(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p})$ puede ser aproximado como:

$$F_m(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}) \approx F_m(\mathbf{p}) + \nabla F_m(\mathbf{p}) \cdot \delta\mathbf{p}. \quad (6.32)$$

Si se sustituye (6.32) en ec. (6.30), obtenemos las ecuaciones iterativas:

$$\mathcal{L}_m \{F_m(\mathbf{p}^l) + \nabla F_m(\mathbf{p}^l) \cdot \delta\mathbf{p}^l\} = f_m(\mathbf{x}), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.33)$$

donde \mathbf{p}^l es la l -ésima solución iterativa de \mathbf{p} y $\nabla F_m(\mathbf{p}^l)$ es el $\nabla F_m(\mathbf{p})$ en $\mathbf{p} = \mathbf{p}^l$, con una solución inicial \mathbf{p}^0 . En el sistema de ecuación iterativa (6.33), el vector de correlación $\delta\mathbf{p}^l$ es desconocido. El sistema puede ser reescrito como:

$$\mathcal{L}_m [\nabla F_m(\mathbf{p}^l) \cdot \delta\mathbf{p}^l] = g_m(\mathbf{x}), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.34)$$

donde $g_m(\mathbf{x}) = f_m(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_m [F_m(\mathbf{p}^l)]$, $F_m(\mathbf{p}^l)$ y $\nabla F_m(\mathbf{p}^l)$ son tratados como fijos. Ahora tomemos a (6.34) como un sistema lineal para \mathbf{p}^l , y

se puede aplicar la variación de los métodos numéricos. Un nuevo vector \mathbf{p}^{l+1} se obtiene sumando el vector correlación $\delta\mathbf{p}^l$ con el vector solución iterativo:

$$\mathbf{p}^{l+1} = \mathbf{p}^l + \delta\mathbf{p}^l.$$

Esta iteración procede hasta que la norma Euclidiana de $\delta\mathbf{p}^l$ es muy pequeña para un valor dado.

6.2.2. Técnica de Solución Simultánea (SS)

La técnica de solución más natural para el sistema (6.10) es resolver tres ecuaciones simultaneamente, la cual se sugiere por solución simultánea (SS). Esta técnica fue inicialmente introducida por Douglas en 1959 y es aún es muy usada en la simulación de yacimientos.

Sea $n > 0$ un entero que indica un paso de tiempo. Para alguna función v de tiempo, usamos $\bar{\delta}v$ para denotar el incremento de tiempo en el n -ésimo paso:

$$\bar{\delta}v = v^{l+1} - v^l.$$

Una aproximación implícita del tiempo para el sistema (6.10) puede ser definida como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \bar{\delta} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) &= \nabla \cdot (T_w^{n+1} \nabla \Phi_w^{n+1}) + \frac{q_{Ws}^{n+1}}{B_w^{n+1}}, \\ \frac{1}{\Delta t} \bar{\delta} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) &= \nabla \cdot (T_o^{n+1} \nabla \Phi_o^{n+1}) + \frac{q_{Os}^{n+1}}{B_o^{n+1}} \\ &\frac{1}{\Delta t} \bar{\delta} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] \\ &= \nabla \cdot (T_g^{n+1} \nabla \Phi_g^{n+1} + R_{so}^{n+1} T_o^{n+1} \nabla \Phi_o^{n+1}) \\ &\quad + \frac{q_{Gs}^{n+1}}{B_{gw}^{n+1}} + \frac{q_{Os}^{n+1} R_{so}^{n+1}}{B_o^{n+1}}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

donde $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. El sistema (6.35) es no lineal con las incógnitas Φ_α^{n+1} y S_α^{n+1} , $\alpha = w, o$ y g , que se puede linealizar vía la Newton-Rapson. Para esto, escribimos:

$$\Phi_\alpha^{n+1, l+1} = \Phi_\alpha^{n+1, l} + \delta\Phi_\alpha, \quad S_\alpha^{n+1, l+1} = S_\alpha^{n+1, l} + \delta S_\alpha \quad \alpha = w, o \text{ y } g.$$

donde l denota el número de iteraciones de Newton-Rapson donde $\delta\Phi_\alpha$ y δS_α representan el incremento del potencial y la saturación respecti-

vamente, en el paso de iteración. Notemos que para alguna función v de tiempo,

$$v^{n+1,l+1} \approx v^{n+1,l+1} = v^{n+1,l} + \delta v,$$

así que

$$\bar{\delta}v \approx v^{n+1,l} - v^{nl} + \delta v.$$

Usando esta aproximación para el sistema (6.35) tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^{n+1,l} - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n + \delta \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \right] \\ &= \nabla \cdot (T_w^{n+1,l+1} \nabla \Phi_w^{n+1,l+1}) + \frac{q_{W_s}^{n+1,l+1}}{B^{n+1,l+1}} \\ & \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^{n+1,l} - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + \delta \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \\ &= \nabla \cdot (T_o^{n+1,l+1} \nabla \Phi_o^{n+1,l+1}) + \frac{q_{O_s}^{n+1,l+1}}{B_o^{n+1,l+1}} \\ & \frac{1}{\Delta t} \bar{\delta} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^{n+1,l} + \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^n \quad (6.36) \\ & + \delta \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] \\ &= \nabla \cdot (T_g^{n+1,l+1} \nabla \Phi_g^{n+1,l+1} + R_{so}^{n+1,l+1} T_o^{n+1,l+1} \nabla \Phi_o^{n+1,l+1}) \\ & + \frac{q_{G_s}^{n+1,l+1}}{B_{gw}^{n+1,l+1}} + \frac{q_{O_s}^{n+1,l+1} R_{so}^{n+1,l+1}}{B_o^{n+1,l+1}}. \end{aligned}$$

En este sistema el incremento $\delta\Phi_\alpha$ y δS_α son incógnitas, para $\alpha = w, o$ y g . Cuando no hay ambigüedad, reemplazamos $v^{n+1,l+1}$ y $v^{n+1,l}$ por v^{l+1} y v^l , respectivamente (es decir el super índice $n+1$ es omitido).

En el estado saturado, las principales incógnitas son:

$$\delta p, \quad \delta S_w \quad \delta S_o,$$

y para el estado bajo saturado tenemos:

$$\delta p, \quad \delta S_w \quad \delta p_b.$$

En el primer caso, $\delta S_g = -\delta S_w - \delta S_w$, y en el último caso, $\delta S_g = 0$ y $\delta S_o = -\delta S_w$. De conformidad el lado izquierdo del sistema (6.36) puede ser desarrollado de la siguiente forma. Para la componente del agua:

$$\delta \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = c_{wp} \delta p + c_{wS_w} S_w, \quad (6.37)$$

donde

$$c_{wp} = \phi^o c_R \left(\frac{S_w}{B_w} \right)^l + \left(\phi S_w \frac{dB_w^{-1}}{dp} \right)^l, \quad c_{wS_w} = \left(\frac{\phi}{B_w} \right)^l.$$

Para la componente aceite en el estado saturado:

$$\delta \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = c_{op} \delta p + c_{oS_o} S_o, \quad (6.38)$$

donde,

$$c_{op} = \phi^o c_R \left(\frac{S_o}{B_o} \right)^l + \left(\phi S_o \frac{dB_o^{-1}}{dp} \right)^l, \quad c_{oS_o} = \left(\frac{\phi}{B_o} \right)^l.$$

y en el estado bajo-saturado tenemos:

$$\delta \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = c_{op} \delta p + c_{oS_o} S_o + c_{op_b} \delta p_b, \quad (6.39)$$

donde,

$$c_{op} = \phi^o c_R \left(\frac{S_o}{B_o} \right)^l + \left(\phi S_o \frac{dB_o^{-1}}{dp} \right)^l, \quad c_{oS_o} = \left(\frac{\phi}{B_o} \right)^l, \\ c_{op_b} = \left(\phi S_o \frac{dB_o^{-1}}{dp_b} \right)^l.$$

Para la componente gas en el estado saturado:

$$\delta \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] = c_{gp} \delta p + c_{gS_w} S_w + c_{gS_o} S_o, \quad (6.40)$$

donde,

$$c_{gp} = \phi^o c_R \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right)^l + \left[\phi \left(S_g \frac{dB_g^{-1}}{dp} + S_o \frac{d}{dp} \left(\frac{R_{so}}{B_o} \right) \right) \right]^l, \\ c_{gS_w} = - \left(\frac{\phi}{B_o} \right)^l, \quad c_{gS_o} = \left(- \left(\frac{\phi}{B_o} \right)^l + \left(\frac{\phi R_{so}}{B_o} \right)^l \right)^l,$$

en el estado bajo-saturado tenemos:

$$\delta \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so}S_o}{B_o} \right) \right] = c_{gp}\delta p + c_{gS_w}S_w + c_{gp_b}\delta p_b, \quad (6.41)$$

donde,

$$\begin{aligned} c_{gp} &= \phi^o c_R \left(\frac{R_{so}S_o}{B_o} \right)^l + \left(\phi S_o \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{R_{so}}{B_o} \right) \right)^l, \\ c_{gS_w} &= - \left(\frac{\phi R_{so}}{B_o} \right)^l, \quad c_{gp_b} = \left(\phi S_o \frac{\partial}{\partial p_{p_b}} \left(\frac{R_{so}}{B_o} \right) \right)^l. \end{aligned}$$

El desarrollo del lado derecho del sistema (6.36) en términos de las incógnitas principales dependen de la técnica de solución.

En el método SS, el potencial de las fases es evaluado por:

$$\Phi_\alpha^{l+1} = p^{l+1} + p_{c\alpha}^{l+1} + p_{c\alpha}^{l+1} - p_{c\alpha}^{l+1} \rho z, \quad \alpha = w, o \quad \text{y } g. \quad (6.42)$$

similarmente la transmisibilidad es calculada de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_\alpha^{l+1} = \frac{k_{c\alpha}^{l+1}}{\mu_{c\alpha}^{l+1} B_{c\alpha}^{l+1}} \mathbf{k}, \quad \alpha = w, o \quad \text{y } g. \quad (6.43)$$

donde $\mu_{c\alpha}^{l+1} = \mu_w$. El índice de flujo en lo pozos está determinado por:

$$\begin{aligned} q_{W_s} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^l - p^{l+1} - p_{cw}^{l+1} - p_w^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \rho_w^{l+1} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{O_s} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \frac{k_{ro}}{\mu_o} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^l - p^{l+1} - p_{co}^{l+1} - p_o^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \rho_o^{l+1} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{G_s} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \frac{k_{rg}}{\mu_g} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^l - p^{l+1} - p_{cg}^{l+1} - p_g^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \rho_g^{l+1} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Ahora desarrollamos los potenciales, la transmisibilidades, y el índice de flujo de los pozos en términos de las principales incógnitas: δp , δS_w y δp_o

en el estado saturado, y δp , δS_w y δp_b en el estado bajo-saturado. Para la componente agua:

$$\Phi_w^{l+1} = \Phi_w^l + d_{wp}\delta p + d_{wS_w}\delta S_w, \quad (6.45)$$

donde,

$$d_{wp} = 1 - \left(\frac{d\rho_w}{dp}\right)^l \rho z, \quad d_{wS_w} = \left(\frac{dp_{cw}}{dS_w}\right)^l.$$

Para la componente aceite en el estado saturado se tiene:

$$\Phi_o^{l+1} = \Phi_o^l + d_{op}\delta p, \quad (6.46)$$

donde,

$$d_{op} = 1 - \left(\frac{d\rho_o}{dp}\right)^l \rho z,$$

y en el estado bajo-saturado,

$$\Phi_o^{l+1} = \Phi_o^l + d_{op}\delta p + d_{op_b}\delta p_b, \quad (6.47)$$

donde

$$d_{wp} = 1 - \left(\frac{d\rho_o}{dp}\right)^l \rho z, \quad d_{op_b} = \left(\frac{dp_o}{dp_p}\right)^l \rho z.$$

Para la componente gas en el estado saturado tenemos:

$$\Phi_g^{l+1} = \Phi_g^l + d_{gp}\delta p + d_{gS}(\delta S_w + \delta S_o), \quad (6.48)$$

donde,

$$d_{gp} = 1 - \left(\frac{d\rho_g}{dp}\right)^l \rho z, \quad d_{gS} = -\left(\frac{dp_{cg}}{dS_g}\right)^l.$$

La transmisibilidad puede ser expresada en forma similar. Para la componente agua:

$$\mathbf{T}_w^{l+1} = \mathbf{T}_w^l + \mathbf{E}_{wp}\delta p + \mathbf{E}_{wS_w}\delta S_w, \quad (6.49)$$

donde,

$$\mathbf{E}_{wp} = \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{dB_w^{-1}}{dp}\right)^l \mathbf{k}, \quad \mathbf{E}_{wS_w} = \left(\frac{dk_{rw}}{dS_w} \frac{1}{\mu_w B_w}\right)^l \mathbf{k}.$$

Para la componente aceite en el estado saturado:

$$\mathbf{T}_o^{l+1} = \mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op}\delta p + \mathbf{E}_{oS_w}\delta S_w + \mathbf{E}_{oS_o}\delta S_o, \quad (6.50)$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{op} &= \left(k_{ro} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\mu_o B_o} \right) \right)^l \mathbf{k}, & \mathbf{E}_{oS_o} &= \left(\frac{dk_{ro}}{dS_g} \frac{1}{\mu_o B_o} \right)^l \mathbf{k}, \\ \mathbf{E}_{oS_w} &= \left(\left(\frac{dk_{ro}}{dS_w} - \frac{dk_{ro}}{dS_g} \right) \frac{1}{\mu_o B_o} \right)^l \mathbf{k},\end{aligned}$$

y en el estado bajosaturado:

$$\mathbf{T}_o^{l+1} = \mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p + \mathbf{E}_{oS_w} \delta S_w + \mathbf{E}_{op_b} \delta p_b, \quad (6.51)$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{op} &= \left(k_{ro} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\mu_o B_o} \right) \right)^l \mathbf{k}, & \mathbf{E}_{oS_w} &= \left(\frac{dk_{ro}}{dS_w} \frac{1}{\mu_o B_o} \right)^l \mathbf{k}, \\ \mathbf{E}_{op_b} &= \left(k_{ro} \frac{\partial}{\partial p_b} \left(\frac{1}{\mu_o B_o} \right) \right)^l \mathbf{k},\end{aligned}$$

Para la componente gas en el estado saturado:

$$\mathbf{T}_g^{l+1} = \mathbf{T}_g^l + \mathbf{E}_{gp} \delta p + \mathbf{E}_{gS} (\delta S_w + \delta S_o), \quad (6.52)$$

donde,

$$\mathbf{E}_{gp} = \left(k_{rg} \frac{d}{dp_b} \left(\frac{1}{\mu_g B_g} \right) \right)^l \mathbf{k}, \quad \mathbf{E}_{gS} = \left(\frac{dk_{rg}}{dS_g} \frac{1}{\mu_g B_g} \right)^l \mathbf{k}.$$

El índice de flujo en los pozos se desarrolla de manera similar. Para la componente agua:

$$q_{Ws}^{l+1} = q_{Ws}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p + e_{wS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{wp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}), \quad (6.53)$$

donde,

$$\begin{aligned}e_{wp}^{(j)} &= \frac{1}{\mu_w} \left[k_{rw} \left(1 + \frac{d\rho_w}{dp} \rho_w \rho (z_{bh}^{(j)} - z) \right) \right]^l, & e_{ep_{bh}}^{(j)} &= \frac{k_{rw}^l}{\mu_w}, \\ e_{wS_w}^{(j)} &= \frac{1}{\mu_w} \left[\frac{dk_{rw}}{dS_w} (p_{bh}^{(j)} - p - p_{cw} - \rho_w \rho (z_{bh}^{(j)} - z)) - k_{rw} \frac{dp_{cw}}{dS_w} \right]^l.\end{aligned}$$

Para la componente aceite en el estado saturado:

$$\begin{aligned}q_{Os}^{l+1} &= q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{oS_o}^{(j)} \delta S_o \right. \\ &\quad \left. + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}),\end{aligned} \quad (6.54)$$

donde,

$$\begin{aligned}
e_{op}^{(j)} &= \left\{ k_{ro} \left[\frac{d\mu_o^{-1}}{dp} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\mu_o} \left(1 + \frac{d\rho_o}{dp} \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right] \right\}^l, \\
e_{oS_w}^{(j)} &= \left[\frac{1}{\mu_o} \left(\frac{dk_{ro}}{dS_w} - \frac{dk_{ro}}{dS_g} \right) \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right]^l, \\
e_{oS_o}^{(j)} &= \left[\frac{dk_{ro}}{dS_g} \frac{1}{\mu_o} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right]^l, \\
e_{op_{bh}}^{(j)} &= \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right)^l.
\end{aligned}$$

y en el estado bajo-saturado:

$$\begin{aligned}
q_{Os}^{l+1} &= q_{Os}^l \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{op_b}^{(j)} \delta p_b + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \\
&\quad \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \tag{6.55}
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
e_{op}^{(j)} &= \left\{ k_{ro} \left[\frac{d\mu_o^{-1}}{dp} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\mu_o} \left(1 + \frac{d\rho_o}{dp} \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right] \right\}^l, \\
e_{oS_w}^{(j)} &= \left[\frac{1}{\mu_o} \frac{dk_{ro}}{dS_w} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right]^l, \quad e_{op_{bh}}^{(j)} = \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right)^l, \\
e_{op_b}^{(j)} &= \left\{ k_{ro} \left[\frac{d\mu_o^{-1}}{dp_b} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) - \frac{1}{\mu_o} \frac{d\rho_o}{dp_b} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \right\}^l.
\end{aligned}$$

Para la componente gas en el estado saturado,

$$\begin{aligned}
q_{Gs}^{l+1} &= q_{Gs}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{gp}^{(j)} \delta p + e_{gS}^{(j)} (\delta S_w + \delta S_o) \right. \\
&\quad \left. + e_{gp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \tag{6.56}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
e_{gp}^{(j)} &= \left\{ k_{rg} \left[\frac{\partial \mu_g^{-1}}{\partial p} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_g \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\mu_g} \left(1 + \frac{d\rho_g}{dp} \rho_g \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right] \right\}^l, \\
e_{gS}^{(j)} &= \left[\frac{1}{\mu_g} \left(\frac{\partial k_{rg}}{\partial S_g} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_g \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) - k_{rg} \frac{\partial p_{cg}}{\partial S_g} \right) \right]^l, \\
e_{gp_{bh}}^{(j)} &= \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g} \right)^l.
\end{aligned}$$

Finalmente, desarrollando R_{so}^l y B_α en (6.36), $\alpha = w, o$ y g . En el estado saturado:

$$\begin{aligned}
R_{so}^{l+1} &= R_{so}^l + r_{sp} \delta p, \\
B_\alpha^{l+1} &= B_\alpha^l (1 - b_{\alpha p} \delta p), \quad \alpha = w, o \text{ y } g,
\end{aligned} \tag{6.57}$$

donde,

$$r_{sp} = \left(\frac{dR_{so}}{dp} \right)^l, \quad b_{\alpha p} = - \left(\frac{1}{B_\alpha} \frac{dB_\alpha}{dp} \right)^l \quad \alpha = w, o \text{ y } g.$$

y en el estado bajo-saturado:

$$\begin{aligned}
R_{so}^{l+1} &= R_{so}^l + r_{sp} \delta p + r_{sp_b} \delta p_b, \\
B_o^{l+1} &= B_o^l (1 - b_{op} \delta p - b_{op_b} \delta p_b), \quad \alpha = w, o \text{ y } g,
\end{aligned} \tag{6.58}$$

donde,

$$\begin{aligned}
r_{sp} &= \left(\frac{\partial R_{so}}{\partial p} \right)^l, & r_{sp_b} &= \left(\frac{\partial R_{so}}{\partial p_b} \right)^l \\
b_{op} &= \left(\frac{1}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial p} \right)^l, & b_{op_b} &= - \left(\frac{1}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial p_b} \right)^l.
\end{aligned}$$

Estado Saturado

Substituyendo (6.37)-(6.58) en (6.36) se transforma en un sistema lineal en términos de sus principales incógnitas. Por la forma de este caso las principales incógnitas son δp , δS_w , y δS_o . Para la componente del agua, sustituimos (6.37), (6.45), (6.49), (6.53), y (6.57) en la primera

ecuación de (6.36) e ignorando el término de orden mayor δp y δS_w , produce lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^l - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n + c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w \right] \\
= & \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_w^l + \mathbf{E}_{wp} \delta p + \mathbf{E}_{wS_w} \delta S_w) \nabla \Phi_w^l \right) \\
& + \nabla \cdot (\mathbf{T}_w^l \nabla (d_{wp} \delta p)) + \nabla \cdot (\mathbf{T}_w^l \nabla (d_{wS_w} \delta S_w)) \tag{6.59} \\
& + \frac{1}{B_w^l} \left\{ q_{Ws}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p + e_{wS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{wpbh}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& + \frac{b_{wp} q_{Ws}^l}{B_w^l} \delta p.
\end{aligned}$$

Para la componente aceite en el estado saturado, substituyendo (6.38), (6.46), (6.50), (6.54) y (6.57) dentro de la segunda ecuación de (6.36) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + c_{op} \delta p + c_{oS_o} \delta S_o \right] \\
= & \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p + \mathbf{E}_{oS_w} \delta S_w + \mathbf{E}_{oS_o} \delta S_o) \nabla \Phi_o^l \right) \\
& + \nabla \cdot (\mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p)) \tag{6.60} \\
& + \frac{1}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{oS_o}^{(j)} \delta S_o \right. \right. \\
& \left. \left. + e_{opbh}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& + \frac{b_{op} q_{Os}^l}{B_o^l} \delta p.
\end{aligned}$$

Para la componente gas en el estado saturado, substituyendo (6.40), (6.48), (6.52), (6.56) y (6.57) dentro de la tercera ecuación de (6.36)

nos da:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left\{ \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^l \right. \\
& \left. - \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^n + c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gS_o} \delta S_o \right\} \\
= & \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_g^l + \mathbf{E}_{gp} \delta p + \mathbf{E}_{gS} (\delta S_w + \delta S_o)) \nabla \Phi_g^l \right) \\
& + \nabla \cdot (\mathbf{T}_g^l \nabla (d_{gp} \delta p)) + \nabla \cdot (\mathbf{T}_g^l \nabla (d_{gS} (\delta S_w + \delta S_o))) \\
& + \nabla \cdot \left[(R_{so}^l (\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p + \mathbf{E}_{oS_w} \delta S_w + \mathbf{E}_{oS_o} \delta S_o + r_{sp} \mathbf{T}_o^l \delta p) \nabla \Phi_o^l) \right] \\
& + \nabla \cdot R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p) \\
& + \frac{1}{B_g^l} \left\{ q_{Gs}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{gp}^{(j)} \delta p + e_{gS}^{(j)} (\delta S_w + \delta S_o) \right. \right. \\
& \left. \left. + e_{gp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \quad (6.61) \\
& + \frac{R_{so}^l}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{oS_o}^{(j)} \delta S_o \right. \right. \\
& \left. \left. + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& + \frac{b_{gp} q_{Gs}^l}{B_g^l} \delta p + \frac{q_{Os}^l}{B_o^l} (R_{so}^l b_{op} + r_{sp}) \delta p.
\end{aligned}$$

En cada nodo de la malla hay tres ecuaciones diferenciales (6.59)-(6.61) que deben ser resueltas simultaneamente con la técnica SS. Notemos que $\delta p_{bh}^{(j)}$ aparece en esas ecuaciones y pueden ser desconocidos. Cuando la presión inferior del pozo está dada en el j -ésimo pozo, $\delta p_{bh}^{(j)} = 0$. Cuando el índice de flujo está dado, $\delta p_{bh}^{(j)}$ es desconocida, se requiere una ecuación adicional para complementar (6.59)-(6.61). Así en este caso dado en índice de flujo esas tres ecuaciones y la ecuación del pozo de control debe ser resuelta simultaneamente, para el pozo tratado.

Estado bajo-saturado

Para el estado bajo saturado, análogamente como el caso anterior, las ecuaciones se pueden obtener a partir de las principales incógnitas, δp , δS_w y δp_b . La ecuación (6.59) del agua permanece igual como en el caso saturado. Para la componente aceite en el estado bajo saturado,

substituyendo (6.39), (6.47), (6.51), (6.55) y (6.58) dentro de la segunda ecuación (6.36) produce los siguiente:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + c_{op} \delta p + c_{oS_w} \delta S_w + c_{op_b} \delta p_b \right] \\
& = \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p + \mathbf{E}_{oS_w} \delta S_w + \mathbf{E}_{op_b} \delta p_b) \nabla \Phi_o^l \right) \\
& \quad + \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p) \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op_b} \delta p_b) \right) \\
& \quad + \frac{1}{B_o^l} \left\{ q_{O_s}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{op_b}^{(j)} \delta p_b \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& \quad + \frac{q_{O_s}^l}{B_o^l} (b_{op} \delta p + b_{op_b} \delta p_b).
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Para la componente gas en el estado bajo saturado, substituyendo (6.41), (6.47), (6.51), (6.55) y (6.58) dentro de la segunda ecuación (6.36) produce:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^n + c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gp_b} \delta p_b \right] \\
& = \nabla \cdot \left[(R_{so}^l (\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p + \mathbf{E}_{oS_w} \delta S_w + \mathbf{E}_{op_b} \delta p_b) \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{T}_o^l (r_{sp} \delta p + r_{sp_b} \delta p_b) \right) \nabla \Phi_o^l \right] + \nabla \cdot \left(R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p + d_{op_b} \delta p_b) \right) \\
& \quad + \frac{R_{so}^l}{B_o^l} \left\{ q_{O_s}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{op_b}^{(j)} \delta p_b \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& \quad + \frac{q_{O_s}^l}{B_o^l} \left[(R_{so}^l b_{op} + r_{sp}) \delta p + (R_{so}^l b_{op_b} \delta p_b + r_{sp_b}) \delta p_b \right].
\end{aligned} \tag{6.63}$$

nuevamente, tres ecuaciones diferenciales (6.59), (6.62) y (6.63) en cada nodo de la malla, juntas con las ecuaciones de control, se deben resolver simultaneamente.

Finalización de la Iteración Newton-Raphson.

Para terminar la iteración Newton-Raphson, deben ser considerados los siguientes factores. Primero que el número de iteraciones deben ser menor que un número máximo dado. Segundo, en la iteración el valor

de las incógnitas y el vector del lado derecho del sistema de ecuaciones lineales para ser resuelto hay que usar una condición de finalización. La iteración absoluta los valores del incremento de la presión, la saturación del agua, la saturación del aceite (respectivamente la presión del punto de burbuja), y la presión más baja en el pozo debe ser menor que sus respectivos límites máximos. Tercero el radio de la norma al infinito del vector del lado derecho del sistema de ecuaciones lineales para el máximo del valor absoluto de la suma de las componentes aceite y gas el índice de flujo de las zonas perforadas de los pozos, deben ser menores que un cierto límite dado. Los errores en el balance de masa no son usados como condición de finalización de la iteración Newton-Raphson pero debe ser monitoreado durante la simulación.

Tratamiento de los Problemas de punto de Burbuja.

Es muy importante tratar apropiadamente con el problema de punto de burbuja para controlar la convergencia de la iteración Newton-Raphson. El estado del yacimiento puede cambiar del estado saturado al estado bajo-saturado o viceversa. Determinar el estado adecuado durante la transición es el *problema del punto de burbuja* es muy importante para la simulación numérica. Si el problema de punto de burbuja puede ser puntualmente reconocido, las incógnitas pueden ser seleccionadas según el estado en que se encuentre el yacimiento y la convergencia de la iteración Newton-Raphson. puede ser monitoreada.

Para tratar apropiadamente el problema de punto de burbuja, debemos figurarnos fuera del "salto" que es la causa de la transición de los estados del yacimiento, usando la máquina de estado (ver [9]) podemos observar el estado de manera adecuada. Una locación en el yacimiento puede quedarse cerca del estado saturado o el estado bajo-saturado. Sin embargo, para la l -ésima para $(l+1)$ -ésima iteración en Newton-Raphson en el $(n+1)$ -ésimo paso de tiempo, la localización puede quedarse en algún estado o en la transferencia de otro estado. La limitación de las condiciones y el "salto" son distintos en diferentes estados. En el estado

bajo-saturado, las limitaciones de las condiciones son:

$$\begin{aligned} S_w^{n+1,l} + S_o^{n+1,l} &= 1, \\ p^{n+1,l} &> p_b^{n+1,l}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

En el otro caso, en el estado saturado las condiciones son:

$$\begin{aligned} S_w^{n+1,l} + S_o^{n+1,l} + S_g^{n+1,l} &= 1, \\ p^{n+1,l} &= p_b^{n+1,l}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

El *salto* que causa la transición del estado bajo-saturado al estado saturado es:

$$p^{n+1,l} + \delta p_b = p_b^{n+1,l+1}, \quad (6.66)$$

y el salto que causa la transición del estado saturado al bajosaturado es:

$$S_g^{n+1,l+1} < 0. \quad (6.67)$$

Para un trato adecuado con el problema del punto de burbuja, debemos observar la ubicación de los saltos en el yacimiento, si permanece en el estado anterior o se transfiere a un nuevo estado. Entonces hay que tomar las incógnitas que satisfacen las condiciones correspondientes a cada estado. Cuando la presión del yacimiento en una localización en el yacimiento bajo la presión de punto de burbuja, entonces tenemos que la variable $(p_b)^{n+1,l} + \delta p_b > p_b^{n+1,l+1}$, el gas disuelto deja de ser parte de la fase aceite, y la saturación del aceite decrece. El salto del estado de transferencia del estado bajo-saturado al estado saturado en esta localización. El orden para entrar al nuevo estado, δS_o es un conjunto pequeño de valores negativos que la saturación del gas es más grande que cero y el gas disuelto está libre. Cuando el yacimiento en esa localización está en estado saturado, las incógnitas correspondientes para los puntos de la malla, de la localización se actualizan para satisfacer las condiciones (6.65). Similarmente, si la presión del yacimiento en una localización aumenta en el punto donde todo el gas se disuelve, dentro de la fase aceite, entonces el estado cambia del estado saturado al estado bajo-saturado en esta localización y $S_g^{n+1,l+1} < 0$, en el cual el estado de transferencia del estado saturado al estado bajo-saturado. El orden para

garantizar que la presión de la fase aceite sea más grande que la presión del punto de burbuja en el nuevo estado, δp_b es un conjunto pequeño de valores negativos. Antes de que el yacimiento en la localización entre en el nuevo estado, las incógnitas se deben actualizar, para conocer las condiciones (6.64) en el estado bajo-saturado.

6.2.3. Técnica Secuencial.

La *técnica de solución secuencial* es similar para la de técnica de SS discutida en la sección anterior. La diferencia es que las tres ecuaciones en el sistema (6.36) son resueltas separadamente y de forma secuencial.

En la técnica secuencial, todas las funciones de la saturación k_{rw} , k_{ro} , k_{rg} , p_{cw} y p_{cg} usan previamente los valores de la saturación en la iteración Newton-Raphson; es decir, las fases de los potenciales y las transmisibilidades son:

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha^{l+1} &= p^{l+1} + p_{c\alpha}^l - p_\alpha^{l+1} \rho z \\ \mathbf{T}_\alpha^{l+1} &= \frac{k_{r\alpha}^l}{\mu_\alpha^{l+1} B_\alpha^{l+1}} \mathbf{k} \quad \alpha = w, o \text{ y } g\end{aligned}\quad (6.68)$$

el índice de flujo en los pozos está dado por:

$$\begin{aligned}q_{Ws}^{l+1} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^{l+1} - p^{l+1} - p_{cw}^l \right. \\ &\quad \left. - \rho_w^{l+1} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{Os}^{l+1} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \frac{k_{ro}}{\mu_o} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^{l+1} - p^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{Gs}^{l+1} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \frac{k_{rg}}{\mu_g} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^{l+1} - p^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \rho_g^{l+1} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right).\end{aligned}\quad (6.69)$$

Por lo tanto, los potenciales son desarrollados para las tres componentes:

$$\Phi_\alpha^{l+1} = \Phi_\alpha^l + d_{\alpha p} \delta p, \quad d_{\alpha p} = 1 - \left(\frac{d_\alpha}{dp} \right) \rho z, \quad \alpha = w, o \text{ y } g, \quad (6.70)$$

y la transmisibilidad se desarrolla de manera análoga:

$$\mathbf{T}_\alpha^{l+1} = \mathbf{T}_\alpha^{l+1} + \mathbf{E}_{\alpha p} \delta p, \quad \mathbf{E}_{\alpha p} = \left(k_{r\alpha}^l \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\mu_\alpha B_\alpha} \right) \right)^l \mathbf{k} \quad \alpha = w, o \text{ y } g. \quad (6.71)$$

El índice de flujo en los pozos se desarrolla. Para la componente agua:

$$q_{Ws}^{l+1} = q_{Ws}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p - e_{wpbh} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}), \quad (6.72)$$

donde

$$e_{wp}^{(j)} = -\frac{1}{\mu_w} \left[k_{rw} \left(1 + \frac{d\rho_w}{dp} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right]^l, \quad e_{wpbh} = \frac{k_{rw}^l}{\mu_w}.$$

Para la componente aceite:

$$q_{Os}^{l+1} = q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p - e_{opbh} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}), \quad (6.73)$$

donde,

$$e_{op}^{(j)} = \left\{ k_{ro} \left[\frac{d\mu_o^{-1}}{dp} \left(p_{bh}^{(j)} - p - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) - \frac{1}{\mu_o} \left(1 + \frac{d\rho_o}{dp} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right] \right\}^l, \\ e_{opbh} = \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right)^l.$$

Para la componente gas:

$$q_{Gs}^{l+1} = q_{Gs}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{gp}^{(j)} \delta p - e_{gpbh} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}), \quad (6.74)$$

donde,

$$e_{gp}^{(j)} = \left\{ k_{rg} \left[\frac{d\mu_g^{-1}}{dp} \left(p_{bh}^{(j)} - p - p_{cg} - \rho_g \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) - \frac{1}{\mu_g} \left(1 + \frac{d\rho_g}{dp} \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right) \right] \right\}^l, \\ e_{gpbh} = \left(\frac{k_{rg}}{\mu_g} \right)^l.$$

La ecuación (6.57) aún se mantiene para la técnica secuencial.

Estado Saturado

Substituyendo (6.37)-(6.41) y (6.70)-(6.74) dentro de (6.36) nos lleva a un sistema líneal en términos de las principales incógnitas en la técnica secuencial. Para la componente agua, substituyendo (6.37), (6.70)-(6.72), y (6.57) dentro de la primera ecuación de (6.36) e ignorando el término de orden mayor en δp produce:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^l - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n + c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w \right] \\
&= \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_w^l + \mathbf{E}_{wp} \delta p) \nabla \Phi_w^l \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_w^l \nabla d_{wp} \delta p \right) \\
&+ \frac{1}{B_w^l} \left\{ q_{Ws}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p + e_{wpbh}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \right. \\
&\quad \left. \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
&+ \frac{b_{wp} q_{Ws}^l}{B_w^l} \delta p.
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Para la componente aceite, substituyendo (6.38), (6.70), (6.71), y (6.73) dentro de la segunda ecuación de (6.36) produce:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + c_{op} \delta p + c_{oS_o} \delta S_o \right] \\
&= \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p) \nabla \Phi_o^l \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p) \right) \\
&+ \frac{1}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{opbh}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \right. \\
&\quad \left. \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
&+ \frac{b_{op} q_{Os}^l}{B_o^l} \delta p.
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Para la componente gas, substituyendo (6.40), (6.70), (6.71), y (6.74) dentro de la segunda ecuación de (6.36) produce:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left\{ \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^l \right. \\
& \left. - \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^n + c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gS_o} \delta S_o \right\} \\
& = \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_g^l + \mathbf{E}_{gp} \delta p) \nabla \Phi_g^l \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_g^l \nabla (d_{gp} \delta p) \right) \\
& + \nabla \cdot \left[(R_{so}^l (\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p) + r_{sp} \delta p) \nabla \Phi_o^l \right] \\
& + \nabla \cdot R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p) \\
& + \frac{1}{B_g^l} \left\{ q_{Gs}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{gp}^{(j)} \delta p + e_{gp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \right. \\
& \left. \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& + \frac{R_{so}^l}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \right. \\
& \left. \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& + \frac{b_{gp} q_{Gs}^l}{B_g^l} \delta p + \frac{q_{Os}^l}{B_o^l} (R_{so}^l b_{op} + r_{sp}) \delta p.
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Las ecuaciones (6.75)-(6.77) se pueden obtener de (6.59)-(6.61) por $\delta S_w = 0$ y $\delta S_o = 0$ en los lados derechos.

Multiplicando (6.75)-(6.77) por Δt y reescribiendo los resultados respectivos en las ecuaciones como:

$$\begin{aligned}
c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w &= F_w (\delta p, \delta p_{bh}), \\
c_{op} \delta p + c_{oS_o} \delta S_o &= F_o (\delta p, \delta p_{bh}), \\
c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gS_o} \delta S_o &= F_g (\delta p, \delta p_{bh}).
\end{aligned} \tag{6.78}$$

De la primera y segunda ecuación de (6.78), observamos que:

$$\begin{aligned}
\delta S_w &= \frac{1}{c_{wS_w}} (F_w (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{wp} \delta p), \\
\delta S_o &= \frac{1}{c_{oS_o}} (F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p).
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Substituyendo las dos ecuaciones en la tercera ecuación de (6.78) tenemos:

$$\begin{aligned} & \left(c_{gp} - \frac{c_g S_w c_{wp}}{c_w S_w} - \frac{c_g S_o c_{op}}{c_o S_o} \right) \delta p \\ &= F_g (\delta p, \delta p_{bh}) + \frac{c_g S_w}{c_w S_w} (F_w (\delta p, \delta p_{bh})) - \frac{c_g S_o}{c_o S_o} (F_o (\delta p, \delta p_{bh})), \end{aligned} \quad (6.80)$$

la cual es la ecuación de presión y se resuelve implícitamente en la técnica secuencial. En el caso cuando se da el índice de flujo en un pozo, esta ecuación y las ecuaciones de control de pozo deben ser resueltas simultaneamente para δp y δp_{bh} .

Para calcular δS_w y δS_o , usamos las mismas ecuaciones como en el caso de la técnica de SS (6.59):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^l - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n + c_{wp} \delta p + c_w S_w \delta S_w \right] \\ &= \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_w^l + \mathbf{E}_{wp} \delta p + \mathbf{E}_{wS_w} \delta S_w) \nabla \Phi_w^l \right) \\ &+ \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_w^l \nabla d_{wp} \delta p + \nabla \cdot \mathbf{T}_w^l \nabla (d_{wS_w} \delta S_w) \right) \quad (6.81) \\ &+ \frac{1}{B_w^l} \left\{ q_{Ws}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p + e_{wS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{wp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \right. \\ &\left. \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\ &+ \frac{b_{wp} q_{Ws}^l}{B_w^l} \delta p. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + c_{op} \delta p + c_o S_o \delta S_o \right] \\ &= \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p + \mathbf{E}_{oS_w} \delta S_w + \mathbf{E}_{oS_o} \delta S_o) \nabla \Phi_o^l \right) \\ &+ \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p) \right) \quad (6.82) \\ &+ \frac{1}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{oS_o}^{(j)} \delta S_o \right. \right. \\ &\left. \left. + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\ &+ \frac{b_{op} q_{Os}^l}{B_o^l} \delta p. \end{aligned}$$

Ahora las ecuaciones (6.80)-(6.82) en cada nodo de la malla se resuelve secuencialmente; cada ecuación se resuelve implícitamente.

Estado bajo-Saturado

Marcando $\delta S_w = 0$ y $\delta p_b = 0$ en el lado derecho de (6.62) y (6.63), obtenos las ecuaciones de presión y la saturación para la técnica secuencial:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + c_{op} \delta p + c_{oS_w} \delta S_w + c_{op_b} \delta p_b \right] \\
& = \nabla \cdot \left((\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p) \nabla \Phi_o^l \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p) \right) \\
& + \frac{1}{B_o^l} \left\{ q_{O_s}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \right. \\
& \quad \left. \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& + \frac{b_{op} q_{O_s}^l}{B_o^l} \delta p.
\end{aligned} \tag{6.83}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^n + c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gp_b} \delta p_b \right] \\
& = \nabla \cdot \left[(R_{so}^l (\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p) + r_{sp} \mathbf{T}_o^l \delta p) \nabla \Phi_o^l \right] \\
& + \nabla \cdot \left(R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p + d_{op_b} \delta p_b) \right) \\
& + \frac{R_{so}^l}{B_o^l} \left\{ q_{O_s}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W}\mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& + \frac{q_{O_s}^l}{B_o^l} (R_{so}^l b_{op} + r_{sp}) \delta p.
\end{aligned} \tag{6.84}$$

La ecuación (6.75) para la componente agua permanece igual.

Multiplicando (6.75), (6.83) y (6.84) por Δt y escribiendo el resultado respectivo de las ecuaciones.como:

$$\begin{aligned}
c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w & = F_w (\delta p, \delta p_{bh}), \\
c_{op} \delta p + c_{oS_w} \delta S_w + c_{op_p} \delta p_p & = F_o (\delta p, \delta p_{bh}), \\
c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gp_b} \delta p_p & = F_g (\delta p, \delta p_{bh}).
\end{aligned} \tag{6.85}$$

De las últimas dos ecuaciones de (6.85) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} c_{oS_w} \delta S_w + c_{op_p} \delta p_p &= F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p, \\ c_{gS_w} \delta S_w + c_{gp_b} \delta p_p &= F_g (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p. \end{aligned} \quad (6.86)$$

El conjunto

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} c_{oS_w} & c_{op_p} \\ c_{gS_w} & c_{gp_b} \end{vmatrix} = c_{oS_w} c_{gp_b} - c_{op_p} c_{gS_w}, \\ D_S &= \begin{vmatrix} F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p & c_{op_p} \\ F_g (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p & c_{gp_b} \end{vmatrix} \\ &= (F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p) c_{gp_b} - (F_g (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p) c_{op_p}, \\ D_p &= \begin{vmatrix} c_{oS_w} & F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p \\ c_{gS_w} & F_g (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p \end{vmatrix} \\ &= c_{oS_w} (F_g (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p) - c_{gS_w} (F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p). \end{aligned}$$

De (6.86) tenemos:

$$\delta S_w = \frac{D_S}{D}, \quad \delta p_p = \frac{D_p}{D},$$

la cual se substituye en la primera ecuación de (6.85) para obtener la ecuación de presión en el estado bajo-saturado:

$$c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \frac{D_S}{D} (\delta p, \delta p_{bh}) = F_w (\delta p, \delta p_{bh}). \quad (6.87)$$

La ecuación (6.87) se resuelve implícitamente para δp . La ecuación (6.81) es usada para obtener δS_w , y la ecuación (6.61) para la componente gas

es empleada para calcular δp_{bh} :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} \right)^n \right]^l \right. \\
& \quad \left. + c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gp_b} \delta p_b \right\} \\
& = \nabla \cdot \left[\left(R_{so}^l (\mathbf{T}_o^l + \mathbf{E}_{op} \delta p + \mathbf{E}_{oS_w} \delta S_w + \mathbf{E}_{op_b} \delta p_b) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{T}_o^l (r_{sp} \delta p + r_{sp_b} \delta p_b) \right) \nabla \Phi_o^l \right] \\
& \quad + \nabla \cdot R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla (d_{op} \delta p + d_{op_b} \delta p_b) \tag{6.88} \\
& \quad + \frac{R_{so}^l}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{W} \mathbf{I}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{op_b}^{(j)} \delta p_b \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \\
& \quad + \frac{q_{Os}^l}{B_o^l} \left[(R_{so}^l b_{op} + r_{sp}) \delta p + (R_{so}^l b_{op_b} + r_{sp_b}) \delta p_b \right].
\end{aligned}$$

De nuevo tres ecuaciones (6.87), (6.81) y (6.88) en cada nodo de la malla que se resuelve implícitamente y secuencialmente.

Selección de pasos de tiempo

El problema de punto de burbuja en la técnica secuencial puede ser tratado en la misma vía como en el método SS. Comparado la técnica de SS, las implicaciones de las técnicas secuenciales son menores. Seleccionando razonablemente los pasos de tiempo son la clave para controlar la convergencia de la iteración Newton-Raphson y la velocidad del proceso de la simulación. Si los pasos de tiempo son pequeños, el tiempo de cómputo será consumido; si son muy largos, la iteración Newton-Raphson podría diverger.

Para seleccionar adecuadamente los pasos de tiempo, debido a Chen (ver [14]), se deben tomar en cuenta las siguientes reglas empíricas:

- Dado un máximo paso de tiempo $\Delta t_{\text{máx}}$, el paso de tiempo Δt debe satisfacer $0 < \Delta t \leq \Delta t_{\text{máx}}$.
- En el estado saturado, Δt está delimitado por:

$$\Delta t \leq \Delta t^n \min \left\{ 3, \frac{(dp)_{\text{máx}}}{(\delta p)_{\text{máx}}^n}, \frac{(dS_w)_{\text{máx}}}{(\delta S_w)_{\text{máx}}^n}, \frac{(dS_o)_{\text{máx}}}{(\delta S_o)_{\text{máx}}^n} \right\}, \tag{6.89}$$

donde Δt^n es el previo tamaño de paso de tiempo; $(dp)_{\text{máx}}$, $(dS_w)_{\text{máx}}$ y $(dS_o)_{\text{máx}}$ son los los valores máximos permitidos del incremento de la presión, de la saturación del agua y de la saturación del aceite en el n -ésimo paso de tiempo. En el estado bajo-saturado (6.89) se transforma en:

$$\Delta t \leq \Delta t^n \text{mín} \left\{ 3, \frac{(dp)_{\text{máx}}}{(\delta p)_{\text{máx}}^n}, \frac{(dS_w)_{\text{máx}}}{(\delta S_w)_{\text{máx}}^n}, \frac{(dp_b)_{\text{máx}}}{(\delta p_b)_{\text{máx}}^n} \right\}, \quad (6.90)$$

donde (dp_b) son los los valores máximos permitidos del incremento de la presión de punto de burbuja.

- Para un período de tiempo Δt debe garantizar que el tiempo de simulación alcance el período de tiempo.

Con esas reglas, el paso de tiempo Δt puede ser autoáticamente seleccionado. Esta selección se debe tomar en cuenta en la convergencia de la iteración Newton-Raphson. Si el número de iteraciones es más larga que el número máximo dado cuando Δt es seleccionado adecuadamente para esas reglas, entonces la selección del paso de tiempo podría ser muy largo y debe de ser reducido. Entonces la fase aceite y la presión del punto de burbuja y la saturación del aceite y agua en el n -ésimo paso de tiempo son tomados como la primer valor de la iteración Newton-Raphson en el $(n+1)$ -ésimo paso de tiempo.

6.2.4. Método Iterativo IMPES

El método iterativo IMPES fue presentado en el flujo bifásico y es una técnica muy usada, para el flujo de este tipo. Particularmente, la improvisación de IMPES es una herramienta muy poderosa para resolver flujo bifásico. Ahora se discutirá el método IMPES para el modelo beta del petróleo. Cuando IMPES es usado dentro de la iteración Newton-Raphson, esta es llamada *IMPES iterativo*. En el método iterativo IMPES, la ecuación de presión se calculada implícitamente, y las otras dos (saturación y presión punto de burbuja) ecuaciones son evaluadas explícitamente.

En IMPES iterativo, todas las funciones de saturación k_{rw} , k_{ro} , k_{rg} , p_{cw} y p_{cg} son evaluadas en los valores de la saturación de los previos pasos

de tiempo en la iteración Newton-Raphson, los fluidos en la formación del factor de volumen y las viscosidades en la trasmisibilidad, el potencial de la fase, y los términos de los pozos son calculados usando los valores previos a la iteración Newton-Raphson. Así que el potencial de las fases son:

$$\Phi_\alpha^{l+1} = p^{l+1} + p_{c\alpha}^l - \rho_\alpha^l \rho z, \quad \alpha = w, o \text{ y } g, \quad (6.91)$$

y las transmisibilidades son:

$$\mathbf{T}_\alpha^{l+1} = \frac{k_{r\alpha}^n}{\mu_\alpha^l B_\alpha^l} \mathbf{k}, \quad \alpha = w, o \text{ y } g. \quad (6.92)$$

Además, el índice de flujo en los pozos es:

$$\begin{aligned} q_{W_s}^{l+1} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rw}^n}{\mu_w} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^{l+1} - p^{l+1} - p_{cw}^n \right. \\ &\quad \left. - \rho_w^l \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{O_s}^{l+1} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}^n}{\mu_o} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^{l+1} - p^{l+1} \right. \\ &\quad \left. - \rho_o^l \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{G_s}^{l+1} &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rg}^n}{\mu_g} \left[\left(p_{bh}^{(j)} \right)^{l+1} - p^{l+1} - p_{cg}^n \right. \\ &\quad \left. - \rho_g^l \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right). \end{aligned} \quad (6.93)$$

Así que los potenciales para las tres componentes se pueden desarrollar:

$$\Phi_\alpha^{l+1} = \Phi_\alpha^l + \delta p, \quad \alpha = w, o \text{ y } g, \quad (6.94)$$

y el índice de flujo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} q_{W_s}^{l+1} &= q_{W_s}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rw}^n}{\mu_w} \left[\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{O_s}^{l+1} &= q_{O_s}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}^n}{\mu_o^l} \left[\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \\ q_{G_s}^{l+1} &= q_{G_s}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rg}^n}{\mu_g^l} \left[\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right). \end{aligned} \quad (6.95)$$

Estado Saturado

Subtituyendo (6.37)-(6.41), (6.94) y (6.95) dentro de (6.36) lleva a un sistema de ecuaciones l neales en términos de las principales incógnitas en IMPES iterativo. Para la componente agua, sustituyendo (6.37), (6.94) y (6.95) dentro de la primera ecuación (6.36) y despreciando el término de orden mayor δp , tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^l - \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)^n + c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w \right] \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{T}_w^l \nabla \Phi_w^l) + \nabla \cdot (\mathbf{T}_w^l \nabla (\delta p)) \\ &+ \frac{1}{B_w^l} \left\{ q_{Ws}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rw}^n}{\mu_w} [\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Para la componente aceite en el estado saturado, sustituyendo (6.38), (6.94) y (6.95) dentro de la segunda ecuación (6.36) y despreciando el término de orden mayor δp nos da:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + c_{op} \delta p + c_{oS_o} \delta S_o \right] \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{T}_o^l \nabla \Phi_o^l) + \nabla \cdot (\mathbf{T}_o^l \nabla (\delta p)) \\ &+ \frac{1}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}^n}{\mu_o^l} [\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Para la componente aceite en el estado saturado, sustituyendo (6.38), (6.94) y (6.95) dentro de la segunda ecuación (6.36) y despreciando el

término de orden mayor δp nos da:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left\{ \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^l - \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right]^n \right. \\
& \left. + c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gS_o} \delta S_o \right\} \\
& = \nabla \cdot (\mathbf{T}_g^l \nabla \Phi_g^l) + \nabla \cdot (\mathbf{T}_g^l \nabla (\delta p)) \\
& \quad + \nabla \cdot (R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla \Phi_o^l) + \nabla \cdot (R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla (\delta p)) \\
& \quad + \frac{1}{B_g^l} \left\{ q_{Gs}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rg}^n}{\mu_g^l} [\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\} \quad (6.98) \\
& \quad + \frac{R_{so}^l}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}^n}{\mu_o^l} [\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\}.
\end{aligned}$$

Multiplicando (6.96)-(6.98) por Δt y escribiendo el resultado respectivo de cada ecuación como:

$$\begin{aligned}
c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w &= F_w (\delta p, \delta p_{bh}), \\
c_{op} \delta p + c_{oS_o} \delta S_o &= F_o (\delta p, \delta p_{bh}), \quad (6.99) \\
c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gS_o} \delta S_o &= F_g (\delta p, \delta p_{bh}).
\end{aligned}$$

De la primera y segunda ecuación de (6.99), observamos que:

$$\begin{aligned}
\delta S_w &= \frac{1}{c_{wS_w}} (F_w (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{wp} \delta p), \\
\delta S_o &= \frac{1}{c_{oS_o}} (F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p). \quad (6.100)
\end{aligned}$$

Substituyendo las dos ecuaciones en la tercera ecuación de (6.99) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \left(c_{gp} - \frac{c_{gS_w} c_{wp}}{c_{wp}} - \frac{c_{gS_o} c_{op}}{c_{oS_o}} \right) \delta p \\
& = F_g (\delta p, \delta p_{bh}) + \frac{c_{gS_w}}{c_{wS_w}} (F_w (\delta p, \delta p_{bh})) - \frac{c_{gS_o}}{c_{oS_o}} (F_o (\delta p, \delta p_{bh})) \quad (6.101)
\end{aligned}$$

la cual es la ecuación de presión y se resuelve, junto con la ecuación de control, implícitamente. Después se resuelve para δp y δp_{bh} , estas son sustituidas dentro de la ecuación (6.100) para poder calcular δS_w y δS_o .

Estado bajo-Saturado

Usando $\delta S_w = 0$ y $\delta p_b = 0$ en el lado derecho de la ecuación (6.62) y (6.63), obtenemos las ecuaciones presión y saturación para la técnica secuencial:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^l - \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right)^n + c_{op} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w + c_{op_b} \delta p_b \right] \\ = & \nabla \cdot (\mathbf{T}_o^l \nabla \Phi_o^l) + \nabla \cdot (\mathbf{T}_o^l \nabla (\delta p)) \\ & + \frac{1}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l + \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}^n}{\mu_o^l} [\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.102)$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left\{ \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right)^l \right] - \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} \right)^l - \left(\frac{R_{so} S_o}{B_o} \right)^n \right] \right. \\ & \left. + c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gS_o} \delta S_o \right\} \\ = & \nabla \cdot (\mathbf{T}_g^l \nabla \Phi_g^l) + \nabla \cdot (\mathbf{T}_g^l \nabla (\delta p)) \\ & + \nabla \cdot (R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla \Phi_o^l) + \nabla \cdot (R_{so}^l \mathbf{T}_o^l \nabla (\delta p)) \\ & + \frac{R_{so}^l}{B_o^l} \left\{ q_{Os}^l \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}^n}{\mu_o^l} [\delta p_{bh}^{(j)} - \delta p] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.103)$$

La ecuación (6.96) para la componente agua permanece igual sin ningún cambio. Multiplicando (6.96), (6.102) y (6.103) por Δt y escribiendo el resultado respectivo de las ecuaciones. De las últimas dos ecuaciones de (6.85) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \delta S_w &= F_w (\delta p, \delta p_{bh}), \\ c_{op} \delta p + c_{oS_w} \delta S_w + c_{op_p} \delta p_p &= F_o (\delta p, \delta p_{bh}), \\ c_{gp} \delta p + c_{gS_w} \delta S_w + c_{gp_b} \delta p_p &= F_g (\delta p, \delta p_{bh}). \end{aligned} \quad (6.104)$$

De las últimas dos ecuaciones de (6.104) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_{oS_w} \delta S_w + c_{op_p} \delta p_p &= F_o (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p, \\ c_{gS_w} \delta S_w + c_{gp_b} \delta p_p &= F_g (\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Definimos los determinantes:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} c_{oS_w} & c_{op_p} \\ c_{gS_w} & c_{gp_b} \end{vmatrix} = c_{oS_w} c_{gp_b} - c_{op_p} c_{gS_w}, \\
D_S &= \begin{vmatrix} F_o(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p & c_{op_p} \\ F_g(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p & c_{gp_b} \end{vmatrix} \\
&= (F_o(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p) c_{gp_b} - (F_g(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p) c_{op_b}, \\
D_p &= \begin{vmatrix} c_{oS_w} & F_o(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p \\ c_{gS_w} & F_g(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p \end{vmatrix} \\
&= c_{oS_w} (F_g(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{gp} \delta p) - c_{gS_w} (F_o(\delta p, \delta p_{bh}) - c_{op} \delta p).
\end{aligned}$$

De (6.86) tenemos:

$$\delta S_w = \frac{D_S}{D}, \quad \delta p_p = \frac{D_p}{D}, \quad (6.106)$$

la cual sustituimos dentro de la ecuación (6.104) para obtener la ecuación de la presión en el estado bajo-saturado:

$$c_{wp} \delta p + c_{wS_w} \frac{D_S}{D} (\delta p, \delta p_{bh}) = F_w(\delta p). \quad (6.107)$$

La ecuación (6.107) y la ecuación de control se resuelve implícitamente para δp y δp_{bh} . Después de los cálculos, se sustituyen dentro de (6.106) para obtener δS_w y $\delta p_b = \delta p_b$.

Como en la técnica secuencial, las funciones de saturación k_{rw} , k_{ro} , k_{rg} , p_{cw} y p_{cg} pueden ser usadas previamente a la iteración Newton-Raphson para valorar la saturación, en cambio a los pasos previos de tiempo para valuar la saturación. El problema del punto de burbuja en el método IMPES iterativo puede ser tratado como en SS y los pasos de tiempo pueden ser controlados en forma similar a la técnica secuencial. La mejora de IMPES con respecto al modelo bifásico puede ser extendido para IMPES iterativo para el modelo de petróleo negro. En particular los pasos de tiempo pueden ser diferentes para la presión que para la saturación.

6.2.5. Pozos Acoplados

Varios pozos delimitados necesitan ser tomados en cuenta. Dos tipos de pozos delimitados son usados para pozos de inyección.

Cualquier presión inferior de los pozos p_{bh} es dada, o el índice de inyección es fijo. En el primer caso:

$$p_{bh}^{(j)} = P_{bh}^{(j)}, \quad (6.108)$$

donde j es el número de pozos con este tipo de pozo de control y $P_{bh}^{(j)}$ está dada la presión inferior en este pozo. En este caso:

$$p_{bh}^{(j)} = 0. \quad (6.109)$$

En el último caso, seguido de (6.11) el índice de control de inyección para los pozos de inyección del agua y el gas son:

$$Q_{W_s}^{(j)} = \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rw} \text{máx}}{\mu_w} \left[p_{bh}^{(j)} - p_w - \rho_w \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \quad (6.110)$$

y

$$Q_{G_s}^{(j)} = \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rg} \text{máx}}{\mu_w} \left[p_{bh}^{(j)} - p_g - \rho_g \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \quad (6.111)$$

donde $Q_{W_s}^{(j)}$ y $Q_{G_s}^{(j)}$ son los índices de inyección dados para el agua y el gas, respectivamente, en el j -ésimo pozo y $k_{r\alpha}^{\text{máx}}$ es el máximo valor de la permeabilidad relativa de la α -fase, $\alpha = w, g$. El método de iteración Newton-Raphson puede ser usado para resolver la ecuación de pozo de control (6.110) y (6.111). Por ejemplo, en la técnica SS, siguiendo de (6.53) y (6.56) la iteración aplicada para (6.110) y (6.111) da lo siguiente:

$$Q_{W_s}^{(j)} = \left(q_{W_s}^{(j)} \right)^l + \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p + e_{wS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{wp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \quad (6.112)$$

y

$$Q_{G_s}^{(j)} = \left(q_{G_s}^{(j)} \right)^l + \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{gp}^{(j)} \delta p + e_{gS}^{(j)} (\delta S_w + \delta S_o) + e_{gp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)}) \quad (6.113)$$

donde $Q_{W_s}^{(j)} = \left(q_{W_s}^{(j)}\right)^{l+1}$, $Q_{G_s}^{(j)} = \left(q_{G_s}^{(j)}\right)^{l+1}$, y los coeficientes en esas dos ecuaciones son determinados como en (6.53) y (6.56). Para la técnica secuencial e IMPES iterativo, el término de índice de flujo puede ser desarrollado como técnica secuencial.

Para el pozo de producción, hay tres tipos de pozos delimitados por; la presión constante en el inferior del pozo, el índice de producción total del líquido constante, y el índice de flujo total constante. La presión constante inferior del pozo delimitado de la forma (6.108) y (6.109). El índice de producción total del líquido constante de control toma la forma:

$$\begin{aligned}
Q_{L_s}^{(j)} = & \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{rw}}{\mu_w} \left[p_{bh}^{(j)} - p_w - \rho_w \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right) \\
& + \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \frac{k_{ro}}{\mu_o} \left[p_{bh}^{(j)} - p_o - \rho_o \rho \left(z_{bh}^{(j)} - z \right) \right] \\
& \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \tag{6.114}
\end{aligned}$$

donde $Q_{L_s}^{(j)}$ es el índice de producción total del líquido en el j -ésimo pozo. La taza del agua, definida como el índice de producción de agua para la suma del agua y producción de aceite, en la zona perforada de un pozo con este tipo de pozo delimitado debe ser menor que un cierto límite; otra vez este límite, que es la zona perforada debe ser cerrada. Los índices de control de flujo total delimitados pueden ser definidos similarmente; en este caso, la producción de gas se suman:

$$\begin{aligned}
Q_{L_s}^{(j)} = & \left(q_{L_s}^{(j)}\right)^l + \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{wp}^{(j)} \delta p + e_{wS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{wp_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right) \\
& + \sum_{m=1}^{M_{wj}} \mathbf{WI}^{(j,m)} \left[e_{op}^{(j)} \delta p + e_{oS_w}^{(j)} \delta S_w + e_{oS_o}^{(j)} \delta S_o \right. \\
& \left. + e_{op_{bh}}^{(j)} \delta p_{bh}^{(j)} \right] \delta \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(j,m)} \right), \tag{6.115}
\end{aligned}$$

donde $Q_{L_s}^{(j)} = \left(q_{L_s}^{(j)}\right)^{l+1}$ son fijos y los coeficientes en esta ecuación pueden ser determinados en (6.53) y (6.54). En SS en el estado bajo-saturado, la técnica secuencial e IMPES iterativo, $Q_{L_s}^{(j)}$ puede ser desarrollado como SS e IMPES iterativo.

Capítulo 7

Conclusiones.

La simulación de yacimientos es una herramienta que permite al Ingeniero de petróleos obtener un mayor conocimiento sobre los mecanismos que se involucran en la recuperación de éstos. La simulación de yacimientos, si se utiliza adecuadamente, puede ser una herramienta muy valiosa para obtener información sobre él . Sin embargo, la complejidad varia con respecto al número de variables que se desea considerar, tomar en cuenta las variables necesarias para su simulación es esencial para la realización de todos los estudios de éste. Además, no todos los yacimientos requieren un modelo de estudio sofisticado y en muchos casos estudios de yacimientos convencionales o estudios de modelos computacionales extremadamente simples, éstos pueden responder a las preguntas que se plantean. Es fácil generar datos numéricos de un modelo computacional; en la mayoría de los casos la interpretación correcta de los números, requiere un análisis cuidadoso, este análisis requiere de alguien quien entienda el modelo físico, matemático, numérico y computacional.

En el presente trabajo se ha mostrado la importancia que tiene la formulación de los sistemas continuos. Esta teoría permite construir las ecuaciones diferenciales básicas de los modelos bifásico, trifásico y composicional, de forma sistemática y simple. Esta metodología permite desarrollar las ecuaciones diferenciales a partir de las propiedades intensivas y extensivas, las cuales son usadas para llegar a la ecuación de balance global. Una vez desarrolladas las ecuaciones diferenciales, con las condiciones de frontera e iniciales, es importante entender la mecánica que tiene el yacimiento, es decir, conocer y entender las propiedades

de roca y fluido, hacer uso de las correlaciones adecuadas tiene una gran importancia en la modelación de yacimientos. Estas correlaciones nos permiten utilizar las mejores aproximaciones para las variables; permeabilidad, porosidad, viscosidad, compresibilidad y las propiedades de presión, volumen y temperatura de los fluidos.

Cuando se tienen el modelo matemático junto con las leyes constitutivas, el siguiente paso es realizar el modelo discreto el cual puede ser resuelto por medio de los métodos de diferencias finitas, elemento finito o volumen finito. En la industria petrolera los métodos más usados son el IMPES (presión implícita saturación explícita) y SS (solución simultánea). Sin embargo en la mayoría de los modelos nos encontramos con sistemas de ecuaciones no acopladas y no lineales, lo cual dificulta su solución, dada éstas complejidades se debe hacer uso del método de Newton-Rapson.

En este trabajo sólo se mostraron los métodos de solución para los diferentes modelos de yacimientos petroleros, es posible adaptar la metodología usada en este trabajo en su estudio computacional donde cada uno de ellos puede ser adaptado a los diferentes métodos numéricos que se deseen aplicar. Permitiendo de esta manera tener un grupo de herramientas que pueden ser usadas en múltiples problemas escogiendo la que ofrezca mayores ventajas computacionales, pero las ventajas y desventajas deberán de ser deducidas al implementarse en un problema particular.

Capítulo 8

Nomenclatura

Los símbolos y abreviaturas usadas a lo largo del presente trabajo están definidas en la siguiente tabla:

Subíndices

- f Fase del fluido
- g Fase gas
- i Componente o índice de coordenadas
- o Fase aceite
- s Fase sólida o condiciones estandar
- t cantidad total
- w Fase agua
- α Índice de la fase

Cantidades Base

| Símbolo | Cantidad base | Unidad |
|----------------|----------------------|---------------|
| L | Longitud | m |
| M | Masa | kg |
| T | Temperatura | °K |
| t | Tiempo | seg |

| Símbolo | Significado | Unidad |
|----------------|--|---------------|
| A | Área | L^2 |
| A_{PI} | Gravedad del aceite | $^{\circ}API$ |
| a | Aceleración | L/t^2 |
| B | Factor de Volumen de la Formación | |
| B_{α} | Factor de Volumen de la Formación en la fase α | |
| C_i | Compresibilidad de la componente i | $L^2/(Tt^2)$ |
| $C_{V\alpha}$ | Capacidad calorífica en la fase α en volumen constante | $L^2/(Tt^2)$ |
| $C_{p\alpha}$ | Capacidad calorífica en la fase α en presión constante | $L^2/(Tt^2)$ |
| c | Concentración de masa | |
| c_f | Compresibilidad del fluido | Lt^2/M |
| c_g | Compresibilidad del gas | Lt^2/M |
| c_o | Compresibilidad del aceite | Lt^2/M |
| c_w | Compresibilidad del agua | Lt^2/M |
| c_i | Concentración de la componente i | |
| $c_{i\alpha}$ | Concentración de la componente i en la fase α | |
| c_R | Compresibilidad de la roca | Lt^2/M |
| c_{SE} | Salinidad efectiva | |
| c_t | Compresibilidad toal | Lt^2/M |
| D | Tensor de dispersión o difusión | L^2/t |
| $D_{i\alpha}$ | Tensor de dispersión o difusión de la componente i en la fase α | L^2/t |
| $d_{i\alpha}$ | Flujo difusivo de la componente i en la fase α | $M/(L^2t)$ |
| E | Flujo de energía | M/t^3 |
| E | Energía | L^2M/t^2 |
| $f_{i\alpha}$ | Función de fugacidad e la componente i en la fase α | M/Lt^2 |
| f_{α} | Fujo fraccional en la fase α | |
| H_{α} | Entropía de la fase α | L^2/t^2 |
| I | Tensor identidad | |
| $J = (0, T]$ | Intervalo de tiempo | t |
| J^n | Subintervalo en el tiempo $(t^{n-1}, t^n]$ | t |

| | | |
|---------------------|--|------------|
| K_i | K -valor de equilibrio de la componente i | |
| \mathbf{k} | Tensor de permeabilidad | L^2 |
| $k_{i,i}$ | Permeabilidad en la dirección i | L^2 |
| \mathbf{k}_α | Permeabilidad efectiva en la fase α | L^2 |
| $k_{r\alpha}$ | Permeabilidad relativa de la fase α | |
| k_{row} | Permeabilidad relativa en el sistema agua-aceite | |
| k_{rog} | Permeabilidad relativa en el sistema aceite-gas | |
| L | Fracción de masa del aceite | |
| N_c | Número de componentes | |
| N_w | Número de pozos | |
| p | Presión | $M/(Lt^2)$ |
| p_b | Presión al punto de burbuja | $M/(Lt^2)$ |
| p_α | Presión en la fase α | $M/(Lt^2)$ |
| p_{pc} | Presión pseudocrítica | $M/(Lt^2)$ |
| p_c | Presión capilar | $M/(Lt^2)$ |
| p_c^* | Presión capilar crítica | |
| p_{ic} | Presión crítica de la componente i | $M/(Lt^2)$ |
| $p_{c\alpha 1}$ | Presión capilar | $M/(Lt^2)$ |
| p_{cow} | Presión capilar $p_o - p_w$ | $M/(Lt^2)$ |
| p_{cgo} | Presión capilar $p_g - p_o$ | $M/(Lt^2)$ |
| p_{cw} | Presión capilar $= -p_{cow}$ | $M/(Lt^2)$ |
| p_{cg} | Presión capilar $= p_{cgo}$ | $M/(Lt^2)$ |
| p_{bh} | Presión inferior | $M/(Lt^2)$ |
| P_{bh} | Presión inferior dada | $M/(Lt^2)$ |
| p^o | Presión de referencia | $M/(Lt^2)$ |
| Q | Índice de producción | L^3/t |
| Q_α | Índice de producción en la fase α | L^3/t |
| \mathbf{q}_c | Flujo de conducción de calor | M/t^3 |
| \mathbf{q}_r | Flujo de radiación de calor | $M/(L^3t)$ |
| q^i | Índice de producción/inyección en el pozo i | $M/(L^3t)$ |

| | | |
|---------------------|---|--------------------------------|
| q_α | Fuente/sumidero en la fase α | M/(L ³ t) |
| q_H | Término fuente de entropía | M/(Lt ³) |
| q_L | Calor perdido | M/(Lt ³) |
| R | Constante universal del gas | $R \approx 0,8205$ |
| R_{so} | Índice de gas disuelto en aceite | |
| r_e | Radio equivalente | L |
| r_w | Radio del pozo perforado | L |
| S_α | Saturación de la fase α | |
| $S_{n\alpha}$ | Saturación normalizada de la fase α | |
| S_{oc} | Saturación crítica del aceite | |
| S_{ow} | Saturación crítica del agua | |
| S_{nc} | Saturación residual | |
| S_{or} | Saturación residual del aceite | |
| $S_{\alpha r}$ | Saturación residual de la fase α | |
| S_{wf} | Saturación del agua en el avance frontal | |
| \mathbf{T}_α | Tranmisibilidad de la fase α | L ³ t/M |
| T | Temperatura | T |
| T_c | Temperatura pseudocrítica | T |
| T_{ob} | Temperatura superior del yacimiento | T |
| T_{pc} | Temperatura pseudocrítica | T |
| U | Energía interna específica | L ² /t ² |
| U_α | Energía interna específica de la fase α | L ² /t ² |
| \mathbf{u} | Velocidad de Darcy | L/t |
| \mathbf{u}_α | Velocidad de Darcy de la fase α | L/t |
| V | Volumen | L ³ |
| W | Peso molecular | M/mole |
| W_i | Peso molecular de la componente i | M/mole |
| WI | Índice del pozo | L ³ |
| \mathbf{x} | Variable espacial | L |
| $\mathbf{x}^{(i)}$ | Localización del pozo | L |
| $x_{i\alpha}$ | Fracción de mole de la componente i en la fase α | |
| Y_G | Gravedad del gas | |
| Z | Compresibilidad del gas o factor de derivación | |
| Z_α | Factor de Compresibilidad de la fase α | |
| z | profundidad | L |
| z_i | Fracción de mole total | |
| z_{bh} | Dato de nivel de profundidad | L |

Símbolos Griegos

| Símbolo | Descripción | unidad |
|-------------------------|--|--------------|
| $\bar{\alpha}$ | Factor de dimención | |
| β | Factor de turbulencia o inercia | L^3 |
| Ω | Dominio | L^3 |
| Ω_i | Subdominio <i>i-esimo</i> | L^3 |
| Ω_0 | Soporte de φ_0 | |
| $\partial\Omega$ | Frontera del dominio | L^2 |
| $\partial/\partial t$ | Derivada parcial en tiempo | t^{-1} |
| $\partial/\partial x_i$ | Derivada parcial en espacio | L^{-1} |
| ∇ | Operador gradiente | L^{-1} |
| $\nabla\cdot$ | Operador de divergencia | L^{-1} |
| Δ | Operador Laplaciano | L^{-2} |
| ΔL | Longitud del pozo en la malla | L |
| Δp_α | Gradiente de presión através del bloque de la matriz | $M/(L^2t^2)$ |
| Φ | Potencial | $M/(Lt^2)$ |
| Φ_α | Potencial en la fase α | $M/(Lt^2)$ |
| Φ^0 | Potencial de referencia | $M/(Lt^2)$ |
| Φ^l | Pseudopotencial | L |
| ϕ | Porosidad | |
| ϕ^0 | Potencial de referencia | |
| $\varphi_{i\alpha}$ | Coefficiente de fugacidad de la componente i en la fase α | |
| ψ | Propiedad intensiva | |
| μ | Viscosidad | M/Lt |
| μ_α | Viscosidad en la fase α | M/Lt |
| ρ | Densidad | M/L^3 |
| ρ_α | Densidad en la fase α | M/L^3 |
| ρ^0 | Densidad de referencia | M/L^3 |
| ρ_{Go} | Densidad parcial de la componente gas en aceite | M/L^3 |
| ρ_{Oo} | Densidad parcial de la componente aceite en aceite | M/L^3 |

| | | |
|--------------------|---|--------------|
| ρ | Aceleración gravitacional | L/t^2 |
| δ | Función delta de Dirac | $1/L^3$ |
| δv^l | Incremento de v en el l -ésimo paso de Newton-Raphson | |
| $\bar{\delta} v^n$ | Incremento de tiempo de v en el n -ésimo paso | |
| σ | Tensión superficial | M/t^3 |
| σ_{aw} | Tensión interfacial agua-aire | M/t^3 |
| σ_{ow} | Tensión interfacial agua-aceite | M/t^3 |
| λ_α | Movilidad en la fase α | L^3t/M |
| λ | Movilidad total | L^3t/M |
| $\xi_{i\alpha}$ | Densidad molar en la componente i en la fase α | Mole/L |
| ξ_α | Densidad molar en la fase α | Mole/L |
| θ | Ángulo de contacto | |
| ω_i | Factor acéntrico | |
| γ_α | Peso específico de la fase | $M/(L^2t^2)$ |
| $\gamma_{i\alpha}$ | Peso específico de la componente i en la fase α | $M/(L^2t^2)$ |
| γ_i^0 | Peso específico de referencia de la componente i | $M/(L^2t^2)$ |

References

- [1] P. Allen and J. Allen (1990), Basin Analysis: Academic Press, New York
- [2] Allen, Herrera y Pinder “Numerical modeling in science and engineering”, John Wiley, 1988
- [3] Ashford (1969), Computed relative permeability drainage and imbibition, SPE 2582, 44TH Annual Meeting Denver.
- [4] Aziz, K., and Settari, A., Petroleum Reservoir Simulation, Ed. Aplied Science Publishers Ltd, London, 1979.
- [5] Bear (1972), Dynamics of Fluids in Porus Media, Dover Newyork
- [6] Bear and Y. Bachman (1991), Intrduccion to Modeling of Transport Phenomena in Porus Media, Kluwer Academic Plublishers, Dordrech, The Netherlends
- [7] Beggs and J. R. Robinson (1975), Estimativg the viscosity of crude oil systens, JPT
- [8] Bedrikovsetsky, D. Marchesin, and P. r. Ballin (1996), Mathematical model for immiscible displasament honoring hysteresis, SPE 36132, in Fourth Latin America and Caribebean Petroleum Engineering Conference, Port-of-spanish, Trinidad & Tobago, 557-573.
- [9] G. Booch, J. Rumbaugh, and I, Jacobson (1998), The Unifed language Use Guid, Addison-Wesley, Boston.
- [10] C. L. Brooks and A. T. Corey (1964), Hydraulic properties of porus media, hydrology Papers, Colorado state University, For Collins, CO, 1964.
- [11] Butlher, Thermal Recovery of Heavy Oil, 1990 (Stream Inyection)
- [12] D. A. Calhum, Jr., M. Lewis, Jr. and R. C. Newman (1949), Experiments on the capillary properties of porus solids, Trans. SPE AIME 186, 180-196
- [13] Chen, Z., (2000): Formulations and Numerical Methods of the Black Oil Model in Porous Media, SIAM J. NUMER. ANAL. Vol. 38, No. 2, pp. 489–514.
- [14] Chen, Z., G. Huan, and b. Li et al., (2004A): And improved IMPES method for two.phases flow in porus media, Transp. porus media 54, 361-367.

- [15] Chen, Z., et al., (2005): Finite Element Methods and their application, Springer-Verlag, Heidelberg, New York.
- [16] Chen, Z., et al., (2006): Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media, SIAM, Philadelphia, USA.
- [17] Chen, Z., et al., (2007): Reservoir Simulation Mathematical Techniques in Oil Recovery, SIAM, Philadelphia, USA.
- [18] Corey (1986), Mechanics of Immiscible Fluids in porous Media, Water Resources Publications, Littleton, CO.
- [19] R. Courant (1943), Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. soc. 49, 1-23.
- [20] Dake, L.P. "Fundamentals of Reservoir Engineering", Developments in Petroleum Sciences 8 Elsevier, Amsterdam-Oxford-NewYork 443 p., 1978.
- [21] M. Delshad. G. A.Pope, and K. Sepehrnoori (2000), UTCHEM Version-9.0, Technical Documentation, center for Petroleum and Geosystem Engineering, The University of Texas at Austin, TX.
- [22] J. Douglas, Jr. (1961), A survey of numerical Methods for parabolic differential equations, in Advances in Computers, Vol. 3, F.L. Alt, ed., Academic Press, New York, 1-54.
- [23] J. Douglas, Jr.D. W. Peaceman and H. H. Rachford, Jr. (1959), A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement, trans SPE AIME 216, 297-306.
- [24] M. Dranchuck, R. A. Purvis, and D. B. Robinson (1974). Computer calculation of nature gas compressibility factors using the standing and K-correlation, Institute of Petroleum Technical Series, No. Ip 74-008.
- [25] R. E. Ewing (1983), The Mathematics of Reservoir Simulation, SIAM, Philadelphia.
- [26] Fanchi, J.R. "Principles of Applied Reservoir Simulation", Second Edition Gulf Professional Publishing imprint of Elsevier, U.S.A., 335 p.2001(with CD-Rom)
- [27] Helming, R. (1997): Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface, A Contribution to the modeling of Hydrosystems, Germany: Springer - Verlag Berlin Heidelberg.

- [28] Herrera y Pinder “Fundamentals of mathematical and computational modelling”, John Wiley, To be published
- [29] Herrera A. Galindo and R. Camacho. , Shock Modelling in Petroleum Engineering, Chaper 7 of the book Computational Methods for Moving Boundary Problems in Heat and Fluid Flow, L.C. Wrobel Ed, Computational Mechanics publications, 1993.
- [30] Hoteit Hussein & Firoozabadi Abbas, (2008): Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures, *Advances in Water Resources*, 31, 56–73.
- [31] L. W. Lake (1989), *Enhanced Oil Recovery*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [32] M. C. Levetrett and W. Lewis, (1941), steady flow of gas-oil-water mixtures through unconsolidated sands, *trans. SPE AIME* 142, 107-116.
- [33] J. Lohrenz, B. G. Bray, and C. R. Clark (1964), Calculating viscosities of reservoir fluids from their compositions, *J. Pet. Tech.*, 1171–1176; *Trans. AIME* 23.
- [34] R. C. MacDonald and K. H. Coats (1970), Methods for numerical simulation of water and gas coning, *Trans. SPE AIME* 249, 425–436.
- [35] Mattax, C.C. and R.L. Dalton (1990): *Reservoir Simulation*, SPE Monograph #13, Richardson, TX: Society of Petroleum Engineers.
- [36] W.W. Owens and D. L. Archer (1971), The effect of rock wettability on oil-water relative permeability relations, *Trans. SPE AIME* 251, 873–878.
- [37] D.W. Peaceman (1991), Presentation of a horizontal well in numerical reservoir simulation, SPE 21217, The 11th SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, CA.
- [38] Peaceman, D.W. (1997): *Fundamental of Numerical Reservoir Simulation*, New York: Elsevier Scientific, 1977 .
- [39] D.-Y. Peng and D. B. Robinson (1976), A new two-constant equation of state, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals* 15, 59–64.
- [40] S.W. Poston, S. C. Ysrael, A. K. Hossain, E. F. Montgomery, and H. J. Ramey, Jr. (1970), The effect of temperature on irreducible

- water saturation and relative permeability of unconsolidated sands, Trans. SPE AIME 249, 171–180.
- [41] W. H. Reed and T. R. Hill (1973), Triangular mesh methods for the neutron transport equation, Technical Report, LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NV.
- [42] J. W. Sheldon, B. Zondek, and W.T. Cardwell (1959), One-dimensional, incompressible, non-capillary, two-phase fluid flow in a porous medium, Trans. SPE AIME 216, 290–296.
- [43] N. D. Shutler (1969), Numerical three-phase simulation of the linear steamflood process, Trans. SPE AIME 246, 232–246.
- [44] R.W. Snell (1962), Three-phase relative permeability in unconstituted sand, J. Inst. Petrol. 84, 80–88.
- [45] M. B. Standing (1977), Volumetric and phase behavior of oil field hydrocarbon systems, SPE Reprint, 8th ed., 124–125.
- [46] H. L. Stone (1973), Estimation of three-phase relative permeability and residual oil data, J. Can. Petrol. Technol. 12, 53–61.
- [47] H. L. Stone and A. O. Garder, Jr. (1961), Analysis of gas-cap or dissolved-gas reservoirs, Trans. SPE AIME 222, 92–104.
- [48] Thomas, G.W. (1982): Principles of Hydrocarbon Reservoir Simulation, Boston: International Human Resource Development Corporation.
- [49] M. Th. van Genuchten (1980), A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity in soils, Soil Sci. Soc. Am. J. 44, 892–898.
- [50] M. Vasquez and H. D. Beggs (1980), Correlations for fluid physical property predictions, J. Pet. Tech., June, 968–970.
- [51] E. Wichert and K. Aziz (1972), Calculate Z's for sour gases, Hydrocarbon Processing, May, 51–119.
- [52] C. H. Whitson (1982), Effect of physical properties estimation on equation of state predictions, SPE 11200, in The 57th Annual Fall Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, New Orleans, LA.
- [53] D. Zudkevitch and J. Joffe (1970), Correlation and prediction of vapor-liquid equilibria with the Redlich–Kwong equation of state,

American Institute of Chemical Engineers J. 16, 112–199.