



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

TORNEOS 2-EXISTENCIALMENTE CERRADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

YADIRA GUZMÁN MONROY



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. RITA ESTHER ZUAZUA VEGA
2012**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Guzmán Monroy Yadira
55 79 88 49
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
093337434
2. Datos del tutor
Dra. Rita Esther Zuazua Vega
3. Datos del sinodal 1
Dr. Bernardo Llano Pérez
4. Datos del sinodal 2
Dr. Juan José Montellano Ballesteros
5. Datos del sinodal 3
Dra. Mucuy Kak del Carmen Guevara Aguirre
6. Datos del sinodal 4
Mat. Ilán Abraham Goldfeder Ortiz
7. Datos del trabajo escrito
Torneos 2-existencialmente cerrados
66p
2012

Gracias Dios

Por darme la fuerza y el coraje para terminar este proyecto y poder hacer este sueño realidad.
Por guiarme e iluminar mí camino. Por cada bendición que he recibido.

A mis padres, Graciela y Humberto

Por su esfuerzo, dedicación y sacrificios.
Muchas gracias por su ejemplo, amor y apoyo incondicional.

A mi tutora, Dra. Rita

Por permitirme realizar este trabajo bajo su tutela y dirección, por su paciencia y apoyo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ciencias

Por concederme ser parte de la Máxima Casa de Estudios y por la formación recibida.

A Oscar, Adriana, Oscar Omar y Olivia Canela

Por cada risa y toda la alegría que traen a mi vida.

A Rafael

Por su amor, apoyo y comprensión.
Por motivarme e impulsarme a ser mejor día a día.
Por encender mi ilusión de vivir con su carácter y coraje para enfrentar la vida.

Índice general

Introducción.....	III
1. Capítulo 1.....	1
2. Capítulo 2.....	17
3. Capítulo 3.....	45
Bibliografía.....	66

Introducción

Sea n un entero positivo. Un torneo T es llamado **n -existencialmente cerrado** (brevemente, n -e.c.) si para cada subconjunto $S \subseteq V(T)$ de cardinalidad n y para cada subconjunto R de S , existe un vértice $x \notin S$ tal que x domina a cada vértice en R y x es dominado por cada vértice en $S \setminus R$.

En este trabajo se estudian los torneos 1 y 2 existencialmente cerrados, basados en el artículo de Anthony Bonato y Kathie Cameron [B-C] se dará una clasificación de los torneos 2-existencialmente cerrados. El resultado principal de los autores es el siguiente: para todo entero positivo $k \geq 7$ y $k \neq 8$ existe un torneo 2-e.c. con k vértices.

Dado que el Teorema de existencia de Bonato y Cameron no nos dice nada sobre la estructura de los torneos, nos preguntamos si podíamos decir algo en los casos en que un torneo sea regular. El número de torneos regulares salvo isomorfismo con k vértices crece de manera exponencial, por ejemplo el número de torneos regulares con 11 vértices es 1223 [Mc]. Por lo tanto, decidimos hacer un estudio de los torneos regulares con 9 vértices. En el trabajo de tesis de maestría de José Luis Cosme Álvarez [C], él exhibe explícitamente los quince torneos regulares no isomorfos, lo que nos permitió probar el siguiente Teorema: Salvo isomorfismo existen únicamente dos torneos regulares con 9 vértices que son 2-existencialmente cerrados.

Este trabajo está dividido de la siguiente forma: en el primer capítulo damos las definiciones básicas y estudiamos el caso de torneos 1-existencialmente cerrados. En el segundo capítulo se estudian los torneos 2-existencialmente cerrados y se demuestra su Teorema de existencia. En el tercer capítulo demostramos nuestro Teorema sobre los torneos regulares con nueve vértices que son 2-existencialmente cerrados. Finalizamos con algunos

comentarios y observaciones para el caso de los torneos 3-existencialmente cerrados.

Capítulo 1

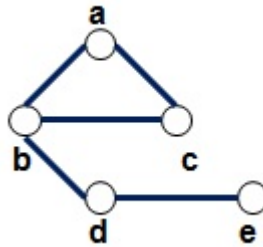
Definiciones básicas y torneos 1-existencialmente cerrados.

En este capítulo se definirán y se darán algunos ejemplos de los conceptos básicos de teoría de las gráficas; en particular de torneos, los cuales son necesarios para abordar el tema principal de la tesis. En esta primera parte del trabajo también estudiaremos los torneos 1-existencialmente cerrados.

Definición 1.1 Una **gráfica** G consiste de un conjunto $V(G)$ no vacío de elementos llamados *vértices* y un conjunto $A(G)$ de parejas no ordenadas de vértices llamadas *aristas*.

Usualmente denotaremos a una arista como $\{a, b\}$ o simplemente ab o ba y diremos que a y b son adyacentes.

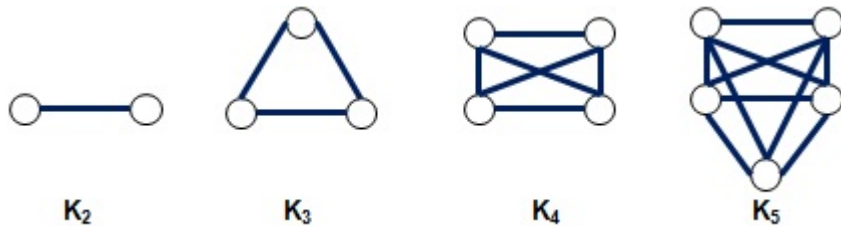
Ejemplo 1.1 Sea G la gráfica con los siguientes conjuntos de vértices y aristas: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ y $A(G) = \{ab, cb, ac, db, ed\}$. Podemos representar a la gráfica G como el siguiente dibujo:



Definición 1.2 Una gráfica G se llama **completa** si para cualesquiera dos vértices a y $b \in V(G)$, existe la arista $ab \in A(G)$.

A la gráfica completa con n vértices la denotamos como K_n .

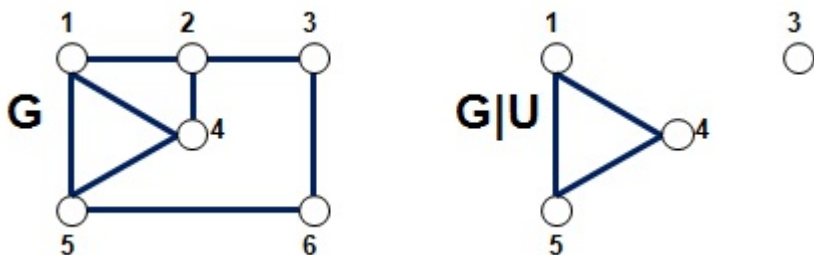
Ejemplo 1.2 Observemos K_n para $n = 2, 3, 4, 5$.



Definición 1.3 Sea G una gráfica y sea U un subconjunto de los vértices de G distinto del vacío. Decimos que $G|U$ es la **subgráfica de G inducida por U** si $V(G|U) = U$ y $xy \in A(G|U)$ si y sólo si $xy \in A(G)$ para $x, y \in U$.

Ejemplo 1.3 Sea G la gráfica con el siguiente conjunto de vértices y aristas: $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A(G) = \{12, 23, 36, 65, 51, 14, 24, 54\}$. Sea $U = \{1, 3, 4, 5\} \subset V(G)$; entonces $V(G|U) = \{1, 3, 4, 5\}$ y $A(G|U) = \{51, 14, 54\}$.

Gráficamente lo podemos ver de la siguiente forma:

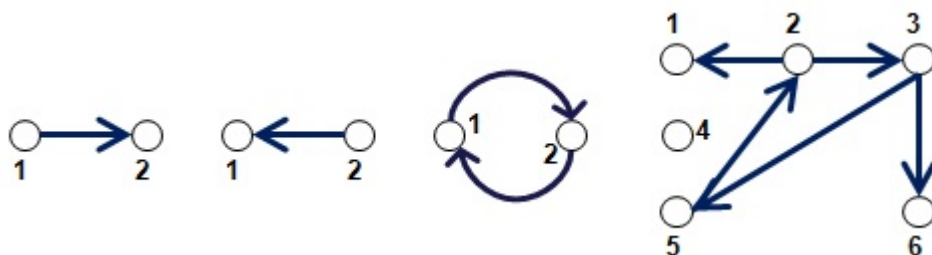


Definición 1.4 Una **digráfica** D es una gráfica en donde las aristas tienen dirección. Es decir, el conjunto de aristas está formado por parejas ordenadas.

Observamos que si D es digráfica con $a, b \in V(D)$ entonces la arista ab es diferente a la arista ba y pueden existir ambas en la digráfica. Las aristas de una digráfica son llamadas **arcos**.

Si la pareja ordenada (a, b) es un arco de una digráfica D , lo denotaremos como \vec{ab} .

Ejemplo 1.4 Todas las digráficas siguientes son diferentes.



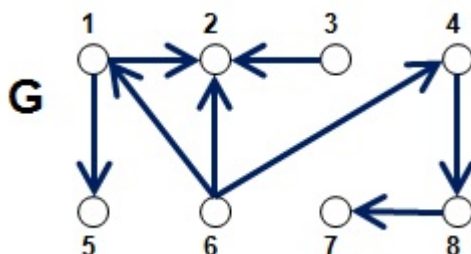
Definición 1.5 Sea G una digráfica y $x \in V(G)$, definimos los siguientes subconjuntos de vértices asociados a x :

1. El **conjunto de vértices dominados por x** o **exvecinos de x** se denota como $N_{out}(x) = N^+(x) = \{y : \overrightarrow{xy} \in A(G)\}$.
2. El **conjunto de vértices que dominan a x** o **invecinos de x** se escribe como $N_{in}(x) = N^-(x) = \{y : \overrightarrow{yx} \in A(G)\}$.

Decimos que el vértice x es un **pozo** si $N^+(x) = \emptyset$. Similarmente, decimos que el vértice x es una **fuentes** si $N^-(x) = \emptyset$.

Ejemplo 1.5 Sea G la digráfica con el siguiente conjunto de vértices y arcos:
 $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y $A(G) = \{\overrightarrow{12}, \overrightarrow{15}, \overrightarrow{32}, \overrightarrow{48}, \overrightarrow{61}, \overrightarrow{62}, \overrightarrow{64}, \overrightarrow{87}\}$.

Gráficamente tenemos,



Observando el vértice 1 tenemos que $N^+(1) = \{y : \overrightarrow{1y} \in A(G)\} = \{2, 5\}$ y $N^-(1) = \{y : \overrightarrow{y1} \in A(G)\} = \{6\}$. Además los vértices 2, 5, 7 son pozos y los vértices 3 y 6 son fuentes de la gráfica.

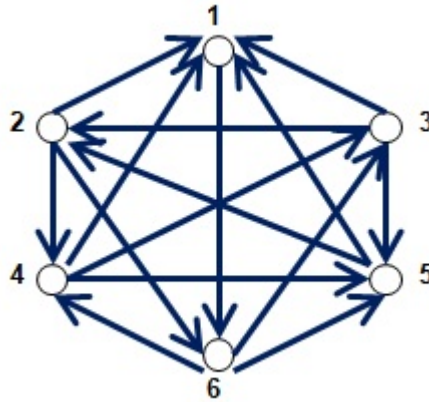
Definición 1.6 Dos digráficas D y H son **isomorfas** si existe una biyección $\theta : V(D) \rightarrow V(H)$ que conserva la relación de adyacencia; es decir si $x, y \in V(D)$ entonces $\overrightarrow{xy} \in A(D)$ si y sólo si $\overrightarrow{\theta(x)\theta(y)} \in A(H)$.

Veamos ahora la definición de una familia muy importante de digráficas que son las que nos interesan para el resto del trabajo.

Definición 1.7 Un **torneo** T es una digráfica tal que para cualesquiera dos vértices distintos a y $b \in V(T)$ existe exactamente un arco entre ellos; es decir \vec{ab} o $\vec{ba} \in A(T)$ pero no ambos.

Ejemplo 1.6 Sea T el torneo definido por $V(T) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A(T) = \{\vec{21}, \vec{24}, \vec{26}, \vec{41}, \vec{43}, \vec{45}, \vec{64}, \vec{63}, \vec{65}, \vec{52}, \vec{51}, \vec{31}, \vec{32}, \vec{35}, \vec{16}\}$.

Podemos ver el torneo T como en la siguiente figura:



Diremos que un torneo T es **regular** si para algún entero r fijo, se tiene que $|N^+(v)| = |N^-(v)| = r$ para cada $v \in V(T)$.

La siguiente definición de teoría de los números nos servirá para definir una familia muy importante de torneos regulares asociados a ciertos números primos.

Definición 1.8 Sea r un entero y p un número primo, decimos que r es un **residuo cuadrático módulo p** si r es primo con p y la congruencia $s^2 \equiv r \pmod{p}$ tiene solución.

Definición 1.9 Sea p un primo de la forma $p = 4n + 3$ con n en los naturales. Definimos el **torneo de Paley de orden p** , denotado por D_p , como el torneo que tiene como conjunto de vértices a $V(D_p) = \{0, 1, 2, 3, \dots, p-3, p-2, p-1\}$ y $\vec{xy} \in A(D_p)$ si y sólo si $x - y$ es un residuo cuadrático módulo p .

Ejemplo 1.7 Sea $p = 3 = 4(0) + 3$. Construiremos el torneo de Paley correspondiente.

Por definición $V(D_3) = \{0, 1, 2\}$ y $\vec{xy} \in A(D_3)$ si y sólo si $x - y$ es un residuo cuadrático módulo 3.

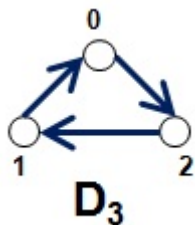
Para obtener el conjunto de residuos cuadráticos observamos que si $s \in \{1, 2\}$ entonces $s^2 \in \{1, 4\}$. Como $4 \equiv 1 \pmod{3}$ tenemos que el conjunto de residuos cuadráticos es $R = \{1\}$.

También por definición sabemos que $\vec{xy} \in A(D_3)$ si y sólo si $x - y$ es un residuo cuadrático, por lo que:

1. Si $x = 1$ y $y = 0$ entonces $1 - 0 = 1$ y $1 \in R$, por lo tanto $\vec{10} \in A(D_3)$.
2. Si $x = 1$ y $y = 2$ entonces $1 - 2 = -1$ y como $-1 \equiv 2 \pmod{3}$, $-1 \notin R$, por lo tanto $\vec{12} \notin A(D_3)$.
3. Si $x = 2$ y $y = 0$ entonces $2 - 0 = 2$ y $2 \notin R$, por lo tanto $\vec{20} \notin A(D_3)$.
4. Si $x = 2$ y $y = 1$ entonces $2 - 1 = 1$ y $1 \in R$, por lo tanto $\vec{21} \in A(D_3)$.
5. Si $x = 0$ y $y = 1$ entonces $0 - 1 = -1$ y como $-1 \equiv 2 \pmod{3}$, $-1 \notin R$, por lo tanto $\vec{01} \notin A(D_3)$.
6. Si $x = 0$ y $y = 2$ entonces $0 - 2 = -2$ y $-2 \equiv 1 \pmod{3}$, por lo tanto $\vec{02} \in A(D_3)$.

De donde concluimos que $V(D_3) = \{0, 1, 2\}$ y $A(D_3) = \{\vec{10}, \vec{02}, \vec{21}\}$.

Gráficamente tenemos la siguiente representación del torneo D_3 :



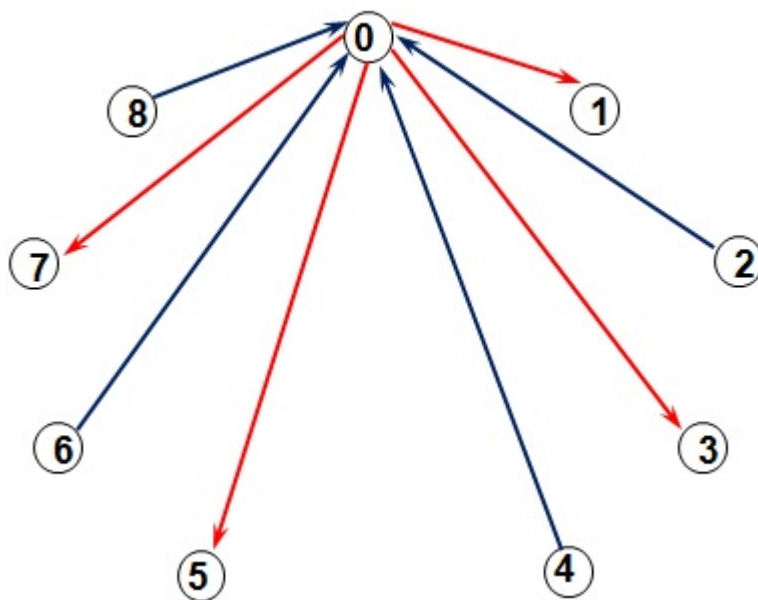
Definición 1.10 Sea \mathbb{Z}_{2m+1} el grupo cíclico de enteros módulo $2m+1$ ($m \geq 1$) y J un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}_{2m+1} \setminus \{0\}$ tal que $|\{-j, j\} \cap J| = 1$ para toda $j \in J$ (y por lo tanto $|J| = m$). Un **Torneo Circulante** $\vec{C}_{2m+1}(J)$ esta definido por $V(\vec{C}_{2m+1}(J)) = \mathbb{Z}_{2m+1}$ y $A(\vec{C}_{2m+1}(J)) = \{\vec{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_{2m+1} \text{ y } j - i \in J\}$.

Ejemplo 1.8 Sea $\mathbb{Z}_{2m+1} = \mathbb{Z}_9$ el grupo cíclico de enteros módulo $2m+1$ en donde $m = 4$ y sea $J = \{1, 3, 5, 7\} \subset \mathbb{Z}_9$, es fácil comprobar que $|\{-j, j\} \cap J| = 1$ para toda $j \in J$ ya que los inversos de los elementos del subconjunto J son $-J = \{8, 6, 4, 2\}$. Los conjuntos de vértices y arcos del torneo circulante $\vec{C}_9(J)$ se muestran a continuación:

$V(\vec{C}_9(J)) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; para calcular el conjunto $A(\vec{C}_9(J)) = \{\vec{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_9 \text{ y } j - i \in J\}$ comenzaremos analizando el vértice 0:

1. Sean $0, 1 \in \mathbb{Z}_9$ y $1 - 0 = 1 \in J$ por lo tanto $\vec{01} \in A(\vec{C}_9(J))$
2. Sean $0, 2 \in \mathbb{Z}_9$ y $2 - 0 = 2 \notin J$ por lo tanto $\vec{02} \notin A(\vec{C}_9(J))$
3. Sean $0, 3 \in \mathbb{Z}_9$ y $3 - 0 = 3 \in J$ por lo tanto $\vec{03} \in A(\vec{C}_9(J))$
4. Sean $0, 4 \in \mathbb{Z}_9$ y $4 - 0 = 4 \notin J$ por lo tanto $\vec{04} \notin A(\vec{C}_9(J))$
5. Sean $0, 5 \in \mathbb{Z}_9$ y $5 - 0 = 5 \in J$ por lo tanto $\vec{05} \in A(\vec{C}_9(J))$
6. Sean $0, 6 \in \mathbb{Z}_9$ y $6 - 0 = 6 \notin J$ por lo tanto $\vec{06} \notin A(\vec{C}_9(J))$
7. Sean $0, 7 \in \mathbb{Z}_9$ y $7 - 0 = 7 \in J$ por lo tanto $\vec{07} \in A(\vec{C}_9(J))$
8. Sean $0, 8 \in \mathbb{Z}_9$ y $8 - 0 = 8 \notin J$ por lo tanto $\vec{08} \notin A(\vec{C}_9(J))$

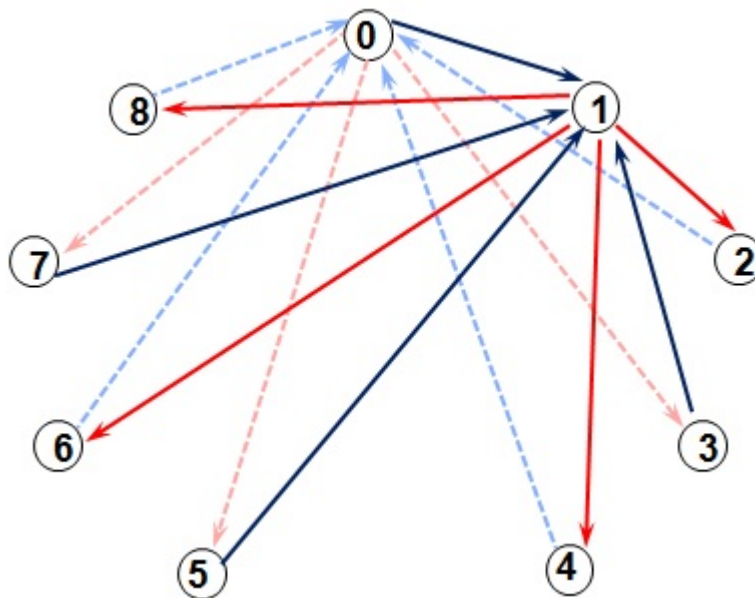
De lo anterior tenemos que $N^+(0) = J$ y por lo tanto $N^-(0) = -J$; veamos la siguiente imagen:



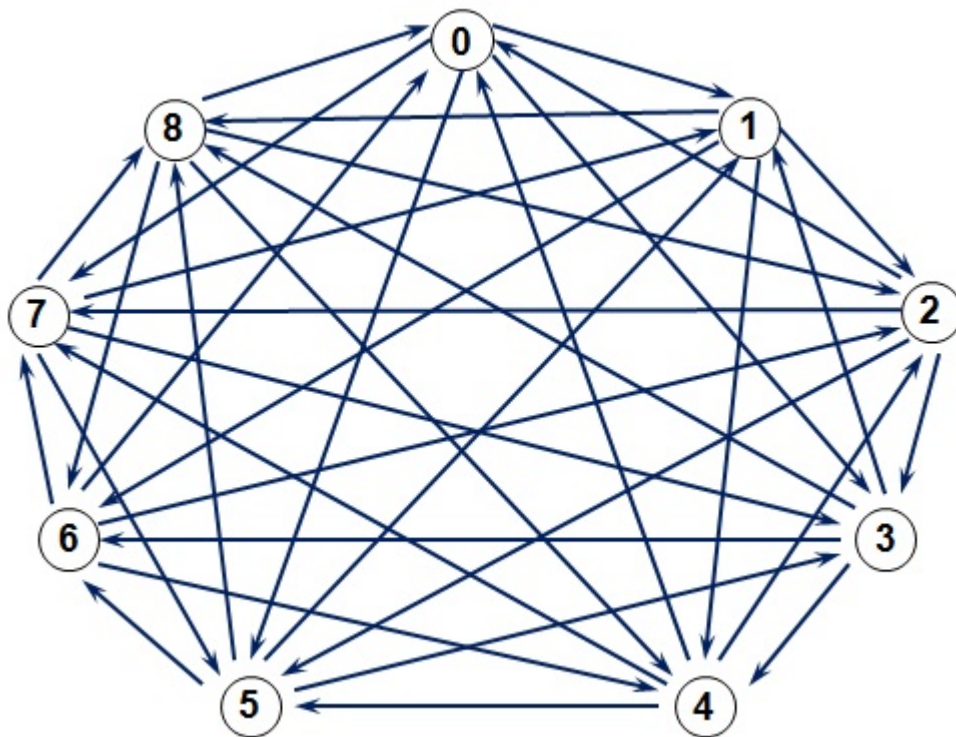
Ahora analicemos el vértice 1:

1. Sean $1, 0 \in \mathbb{Z}_9$ y $0 - 1 = 8 \notin J$ por lo tanto $\overline{10} \notin A(\overrightarrow{C}_9(J))$
2. Sean $1, 2 \in \mathbb{Z}_9$ y $2 - 1 = 1 \in J$ por lo tanto $\overline{12} \in A(\overrightarrow{C}_9(J))$
3. Sean $1, 3 \in \mathbb{Z}_9$ y $3 - 1 = 2 \notin J$ por lo tanto $\overline{13} \notin A(\overrightarrow{C}_9(J))$
4. Sean $1, 4 \in \mathbb{Z}_9$ y $4 - 1 = 3 \in J$ por lo tanto $\overline{14} \in A(\overrightarrow{C}_9(J))$
5. Sean $1, 5 \in \mathbb{Z}_9$ y $5 - 1 = 4 \notin J$ por lo tanto $\overline{15} \notin A(\overrightarrow{C}_9(J))$
6. Sean $1, 6 \in \mathbb{Z}_9$ y $6 - 1 = 5 \in J$ por lo tanto $\overline{16} \in A(\overrightarrow{C}_9(J))$
7. Sean $1, 7 \in \mathbb{Z}_9$ y $7 - 1 = 6 \notin J$ por lo tanto $\overline{17} \notin A(\overrightarrow{C}_9(J))$
8. Sean $1, 8 \in \mathbb{Z}_9$ y $8 - 1 = 7 \in J$ por lo tanto $\overline{18} \in A(\overrightarrow{C}_9(J))$

El conjunto de vértices dominados por 1 es $\{2, 4, 6, 8\} = \{1 + 1, 1 + 3, 1 + 5, 1 + 7\}$ al que podemos representar como $N^+(1) = 1 + J$ y por lo tanto $N^-(1) = 1 - J$; como se muestra a continuación:



Observamos que el comportamiento de los arcos con respecto a cada vértice es similar; por lo que podemos ver el torneo circulante $\vec{C}_9(J)$ como sigue:



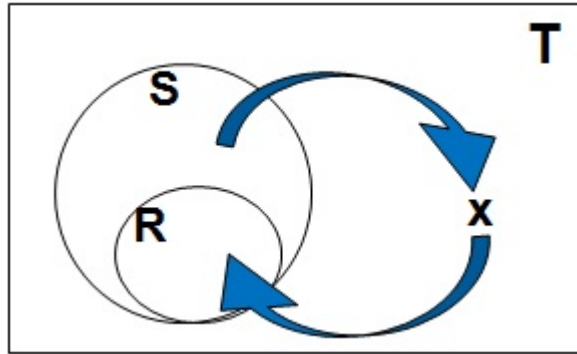
Veamos ahora la definición de torneo n -existencialmente cerrado que son los objetos de nuestro interés.

Definición 1.11 Sea n un entero positivo. Un torneo T se llama **n -existencialmente cerrado** (n -e.c.) si para cada subconjunto S de $V(T)$ con $|S| = n$ y para cada subconjunto R de S , existe un vértice $x \notin S$ el cuál domina a cada vértice en R y es dominado por cada vértice en $S \setminus R$.

En otras palabras, un torneo T es **n -existencialmente cerrado** (n -e.c.) si y sólo si para todo $S \subseteq V(T)$ con $|S| = n$ y para todo $R \subseteq S$ existe $x \notin S$ tal que:

1. $\overrightarrow{xr} \in A(T)$ para toda $r \in R$.
2. $\overrightarrow{sx} \in A(T)$ para toda $s \in S \setminus R$.

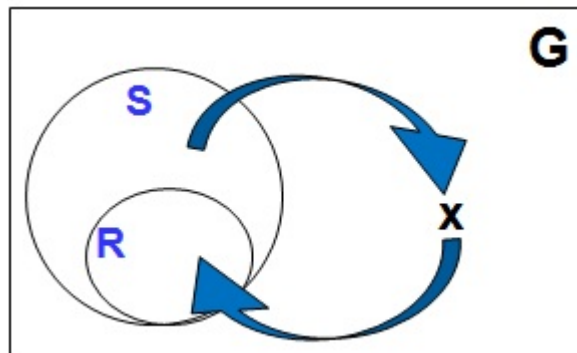
Observemos que R puede ser vacío o igual a S , gráficamente podemos verlo así:



El siguiente Lema nos será de gran utilidad en el resto del trabajo ya que nos da información sobre la estructura de la invencidad y exvecindad de un vértice en un torneo n -existencialmente cerrado.

Lema 1.1 Sea G un torneo n -e.c. con $n > 1$. Para todo vértice $v \in V(G)$ los torneos inducidos $G - v$, $G|N^-(v)$ y $G|N^+(v)$ son $(n - 1)$ -e.c.

Demostración. Veamos gráficamente el torneo G el cual es n -e.c. por hipótesis:

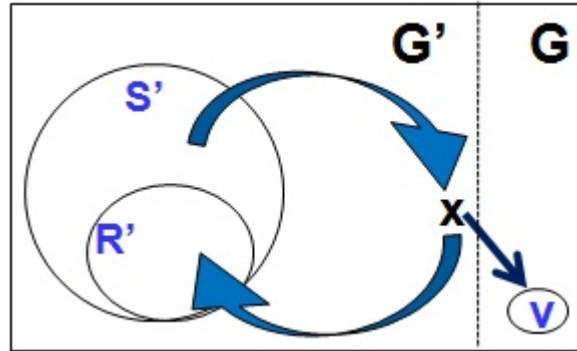


En donde $|S| = n$.

a) Sea $v \in V(G)$, por demostrar que el torneo $G - v$ es $(n - 1)$ -e.c.

Sean $G' = G - v$ y $S' \subseteq V(G')$ tales que $|S'| = n - 1$ y $R' \subseteq S'$.

Consideremos $S = S' \cup \{v\}$ y $R = R' \cup \{v\}$, por hipótesis G es n -e.c. por lo tanto existe $x \notin S = S' \cup \{v\}$ tal que para toda $r \in R = R' \cup \{v\}$, $\overrightarrow{xr} \in A(G)$ y para toda $s \in S \setminus R = (S' \cup \{v\}) \setminus (R' \cup \{v\}) = S' \setminus R'$, $\overrightarrow{sx} \in A(G)$.

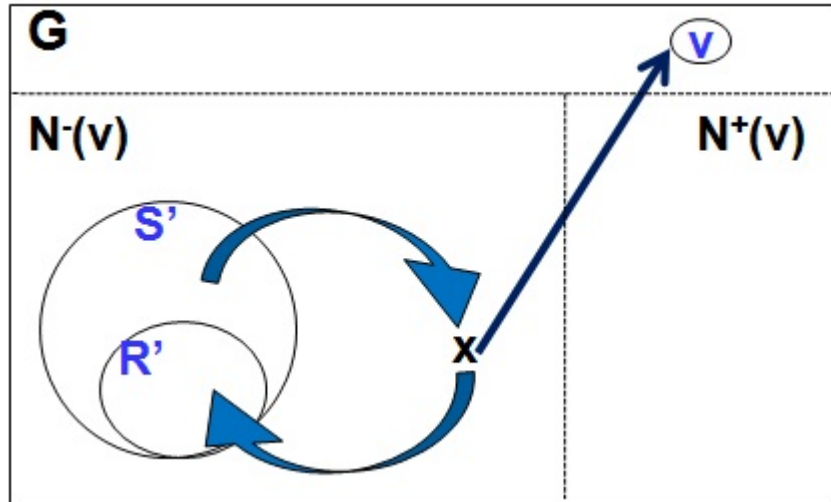


Siempre que $S = S' \cup \{v\}$ y $R = R' \cup \{v\}$.

Puede observarse claramente en la figura anterior que la misma x muestra que $G - v$ es $(n - 1)$ -existencialmente cerrado.

b) Para un vértice $v \in V(G)$, se demostrará que el torneo inducido $G|N^-(v)$ es $(n - 1)$ -e.c.

Sean $G' = G|N^-(v)$ y $S' \subseteq V(G')$ con $|S'| = n - 1$ y $R' \subseteq S'$. Por hipótesis G es n -e.c., es decir, para todo $S \subseteq V(G)$ con $|S| = n$ y para todo $R \subseteq S$, existe $x \notin S$ tal que para todo $r \in R$, $\overrightarrow{xr} \in A(G)$ y para todo $s \in S \setminus R$, $\overrightarrow{sx} \in A(G)$. En particular la hipótesis se cumple para $S = S' \cup \{v\}$ y para $R = R' \cup \{v\}$. Por lo que tenemos el siguiente diagrama:

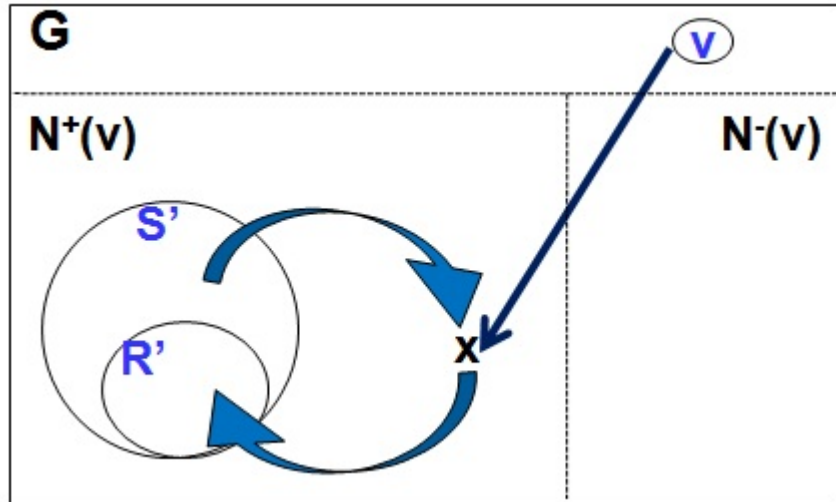


Para $S = S' \cup \{v\}$ y $R = R' \cup \{v\}$.

Es claro que x nos da la $(n - 1)$ -existencialidad cerrada de $G|N^-(v)$.

c) Finalmente veremos que para todo $v \in V(G)$ el torneo inducido $G|N^+(v)$ es $(n - 1)$ -e.c.

Sean $G' = G|N^+(v)$ y $S' \subseteq V(G')$ tales que $|S'| = n - 1$ y $R' \subseteq S'$. Por hipótesis G es n -e.c., por lo tanto para todo $S \subseteq V(G)$ con $|S| = n$ y para todo $R \subseteq S$, existe $x \notin S$ tal que para todo $r \in R$, $\overrightarrow{xr} \in A(G)$ y para todo $s \in S \setminus R$, $\overrightarrow{sx} \in A(G)$. En particular tenemos el siguiente diagrama:



Para $S = S' \cup \{v\}$ y $R = R'$ con $v \in S \setminus R$.

El cual muestra la $(n - 1)$ -existencialidad cerrada de $G|N^+(v)$.

■

A continuación, para familiarizarnos con el concepto de n -existencialmente cerrado, mostraremos algunos resultados para el caso $n = 1$.

- Definición 1.12** a) Un torneo T es n -e.c. **mínimo** si T tiene el menor número de vértices entre todos los torneos n -e.c.
 b) Un torneo T es n -e.c. **crítico** si al quitarle cualquier vértice, el torneo inducido no es n -e.c.

Como podemos ver en la siguiente observación la caracterización de los torneos 1-e.c. es muy simple.

Observación 1.1 Un torneo G es 1-e.c. si y sólo si G no tiene pozos ni fuentes.

Demostración. \implies) Sea G un torneo 1-e.c. supongamos que v es un pozo, entonces si $S = \{v\}$, para R igual al conjunto vacío no podemos encontrar ningún elemento dominado por v , por lo tanto el torneo no es 1-e.c. Similarmente si consideramos a v una fuente con $S = R = \{v\}$.

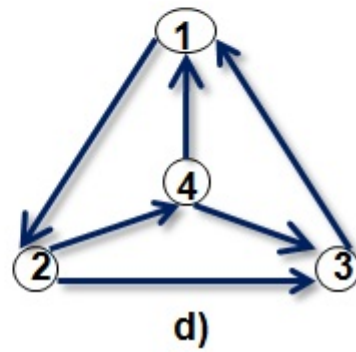
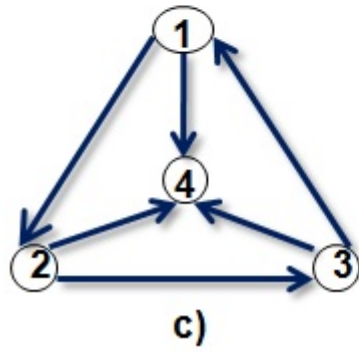
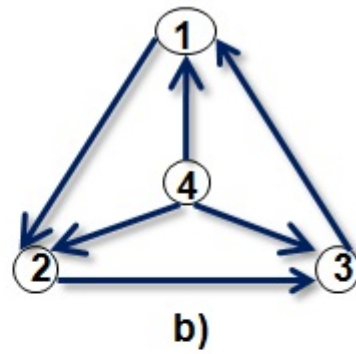
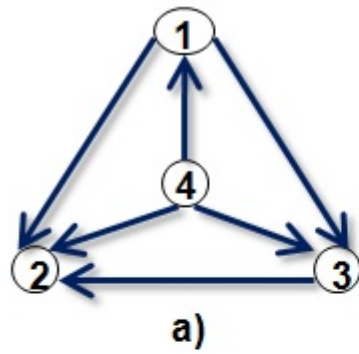
\Leftarrow) Sea G un torneo que no tiene pozos ni fuentes, por lo tanto para todo vértice $v \in V(G)$ tenemos que $N^+(v)$ y $N^-(v)$ son diferentes del vacío entonces si $S = \{v\}$, para todo subconjunto R de S existe un vértice $x \notin S$ el cuál domina a cada vértice en R y es dominado por cada vértice en $S \setminus R$. Por lo tanto por definición G es 1-e.c. ■

Observación 1.2 *Si una digráfica G tiene un ciclo hamiltoniano (es decir, un ciclo dirigido que pasa por todos los vértices de G) entonces la digráfica es 1-e.c. ya que no tiene fuentes ni pozos.*

Observación 1.3 *Salvo isomorfismo, existe un único torneo minimal 1-e.c. con tres vértices D_3 , el torneo de Paley de orden 3 o triángulo dirigido.*

Observación 1.4 *Salvo isomorfismo, sólo hay un torneo 1-e.c. de orden 4.*

Demostración. Existen únicamente cuatro torneos de orden cuatro (salvo isomorfismo), los cuales mostramos a continuación:



Por la Observación 1.1 sabemos que torneo es 1-existencialmente cerrado si y sólo si no tiene pozos ni fuentes; el único torneo de cuatro vértices que cumple esta propiedad es el torneo del caso d), por lo tanto existe un único torneo 1-e.c. de orden 4.

■

Capítulo 2

Torneos 2-existencialmente cerrados.

En este capítulo se demuestra el Teorema de existencia de los torneos 2-existencialmente cerrados probado por Bonato y Cameron.

Iniciamos con un Teorema que nos da una cota para el número mínimo de vértices de un torneo 2-e.c.

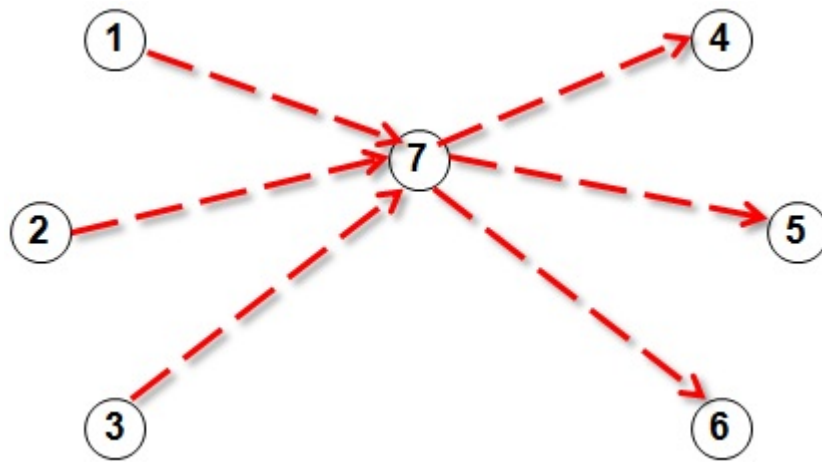
Teorema 2.1 *El torneo de Paley con siete vértices D_7 es, salvo isomorfismo, el único torneo minimal 2-existencialmente cerrado.*

Demostración.

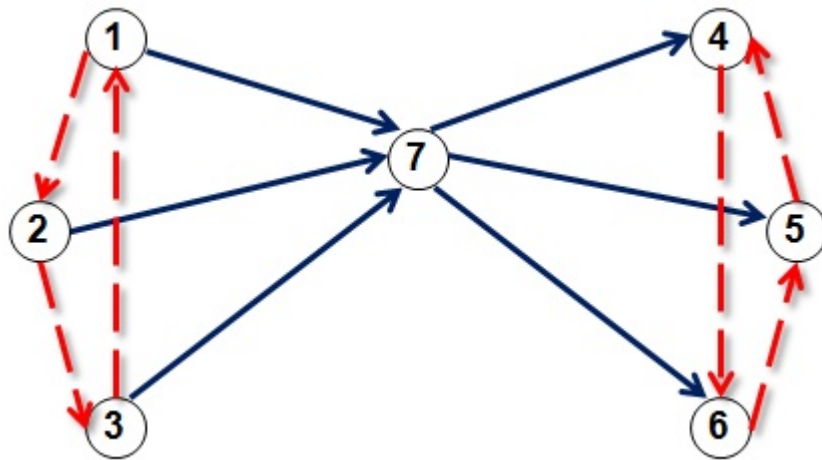
Sean G un torneo 2-e.c. y $v \in V(G)$. Por el Lema 1.1 sabemos que los torneos inducidos $G_1 = G|N^+(v)$ y $G_2 = G|N^-(v)$ son 1-e.c. además por la Observación 1.3 sabemos que cualquier torneo 1-e.c. tiene al menos tres vértices, siendo D_3 el minimal, de donde podemos concluir que $|V(G_1)| \geq 3$ y $|V(G_2)| \geq 3$. Como $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \{v\}$, si G es mínimo tiene al menos siete vértices.

Supongamos que $|V(G)| = 7$, por lo que G es un torneo regular ya que para todo $v \in V(G)$, $|N^+(v)| = |N^-(v)| = 3$.

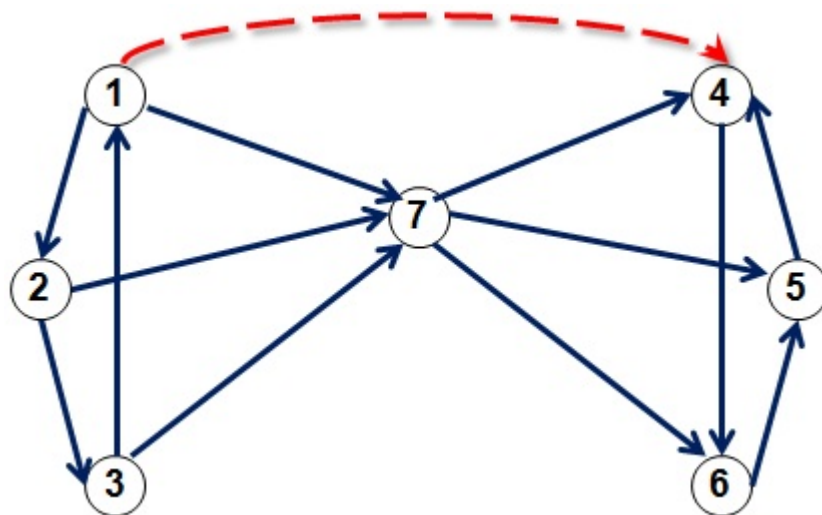
Sea $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $N^-(7) = \{1, 2, 3\}$ y $N^+(7) = \{4, 5, 6\}$, gráficamente tenemos:



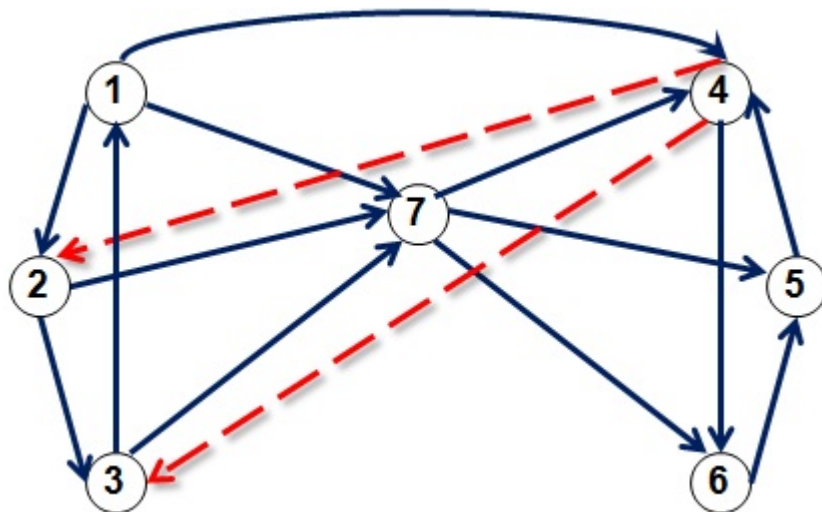
Como G_1 y G_2 son 1-e.c. y cada una de ellas tiene 3 vértices, tienen que ser copias isomorfas de D_3 , por lo que podemos suponer que tenemos los arcos $\overrightarrow{12}$, $\overrightarrow{23}$, $\overrightarrow{31}$, $\overrightarrow{65}$, $\overrightarrow{54}$, $\overrightarrow{46}$, como se muestra en la siguiente figura:



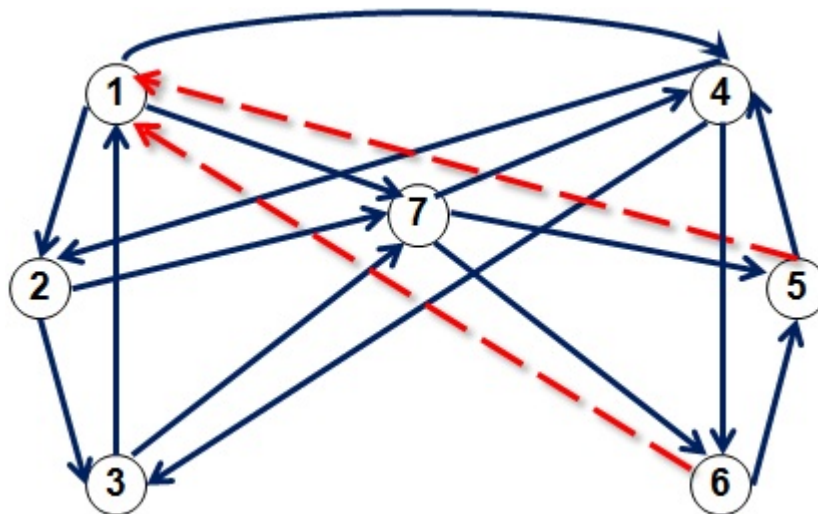
Hasta este momento el exgrado del vértice 1 es dos, pero como G es 3-regular, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\overrightarrow{14} \in A(G)$.



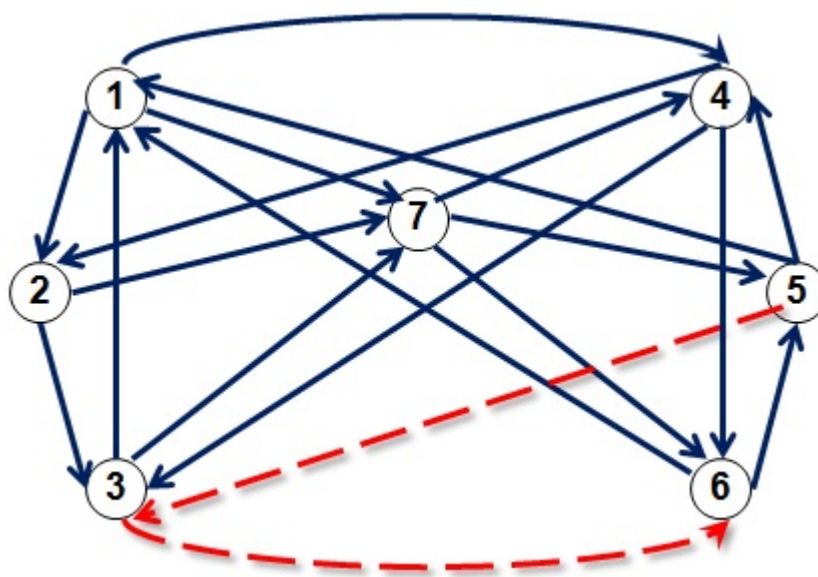
Nuevamente, por la regularidad de G sabemos que $|N^+(4)| = |N^-(4)| = 3$. Observamos que $\overrightarrow{14}$, $\overrightarrow{74}$ y $\overrightarrow{54}$ son arcos de G , por lo que $N^-(4) = \{1, 5, 7\}$, $N^+(4) = \{2, 3, 6\}$ y se tienen los arcos $\overrightarrow{42}$ y $\overrightarrow{43}$.



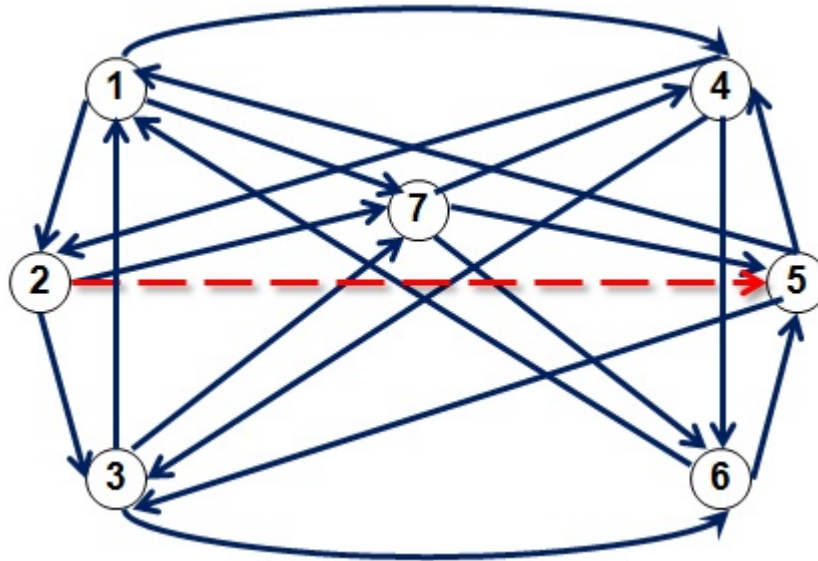
Análogamente, observamos que $N^+(1) = \{2, 4, 7\}$ por lo que tenemos los arcos $\overrightarrow{31}$, $\overrightarrow{51}$ y $\overrightarrow{61}$.



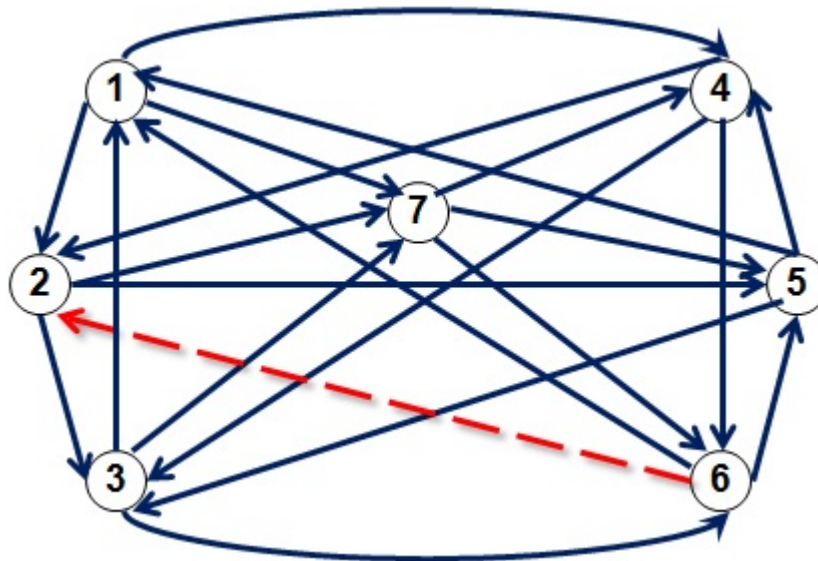
De lo anterior $N^-(1) = \{3, 5, 6\}$ y como $G|N^-(1)$ es isomorfa a D_3 , el arco $\overrightarrow{65}$ fija los arcos $\overrightarrow{53}$ y $\overrightarrow{36}$.



Similarmente, $N^-(3) = \{2, 4, 5\}$, por lo que se tiene el arco $\overrightarrow{25}$.



Finalmente, $N^-(5) = \{2, 6, 7\}$ y por lo tanto se tiene el arco $\overrightarrow{62}$, con lo que obtenemos el siguiente torneo minimal 2-existencialmente cerrado:



Para terminar la prueba, demostraremos que el torneo obtenido G es isomorfo al torneo de Paley D_7 . Definamos la siguiente función:

$$f : V(G) \longrightarrow V(D_7)$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 5$$

$$f(3) = 4$$

$$f(4) = 6$$

$$f(5) = 1$$

$$f(6) = 2$$

$$f(7) = 3$$

Claramente la función f es biyectiva. Para demostrar que tenemos un isomorfismo de digráficas debemos ver que para todo $v_1, v_2 \in V(G)$, $\overrightarrow{v_1 v_2} \in A(G)$ si y sólo si $\overrightarrow{f(v_1) f(v_2)} \in A(D_7)$.

Recordemos que $V(D_7) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\overrightarrow{ab} \in A(D_7)$ si y sólo si $a - b \in \mathbb{R} = \{1, 2, 4\}$, el conjunto de residuos cuadráticos módulo 7; es decir, si y sólo si la congruencia $x^2 \equiv a - b \pmod{7}$ tiene solución.

A continuación para todo $\overrightarrow{v_1 v_2} \in A(G)$ obtendremos $f(v_1) - f(v_2)$

1. $\overrightarrow{17} \in A(G)$ y $f(1) - f(7) = 0 - 3 = -3 \equiv 4 \pmod{7}$.
2. $\overrightarrow{27} \in A(G)$ y $f(2) - f(7) = 5 - 3 = 2$.
3. $\overrightarrow{37} \in A(G)$ y $f(3) - f(7) = 4 - 3 = 1$.
4. $\overrightarrow{74} \in A(G)$ y $f(7) - f(4) = 3 - 6 = -3 \equiv 4 \pmod{7}$.
5. $\overrightarrow{75} \in A(G)$ y $f(7) - f(5) = 3 - 1 = 2$.

6. $\vec{76} \in A(G)$ y $f(7) - f(6) = 3 - 2 = 1$.
7. $\vec{12} \in A(G)$ y $f(1) - f(2) = 0 - 5 = -5 \equiv 2 \pmod{7}$.
8. $\vec{23} \in A(G)$ y $f(2) - f(3) = 5 - 4 = 1$.
9. $\vec{31} \in A(G)$ y $f(3) - f(1) = 4 - 0 = 4$.
10. $\vec{65} \in A(G)$ y $f(6) - f(5) = 2 - 1 = 1$.
11. $\vec{54} \in A(G)$ y $f(5) - f(4) = 1 - 6 = -5 \equiv 2 \pmod{7}$.
12. $\vec{46} \in A(G)$ y $f(4) - f(6) = 6 - 2 = 4$.
13. $\vec{14} \in A(G)$ y $f(1) - f(4) = 0 - 6 = -6 \equiv 1 \pmod{7}$.
14. $\vec{42} \in A(G)$ y $f(4) - f(2) = 6 - 5 = 1$.
15. $\vec{43} \in A(G)$ y $f(4) - f(3) = 6 - 4 = 2$.
16. $\vec{51} \in A(G)$ y $f(5) - f(1) = 1 - 0 = 1$.
17. $\vec{61} \in A(G)$ y $f(6) - f(1) = 2 - 0 = 2$.
18. $\vec{53} \in A(G)$ y $f(5) - f(3) = 1 - 4 = -3 \equiv 4 \pmod{7}$.
19. $\vec{36} \in A(G)$ y $f(3) - f(6) = 4 - 2 = 2$.

20. $\overrightarrow{25} \in A(G)$ y $f(2) - f(5) = 5 - 1 = 4$.

21. $\overrightarrow{62} \in A(G)$ y $f(6) - f(2) = 2 - 5 = -3 \equiv 4 \pmod{7}$.

De lo anterior es fácil ver que toda congruencia $x^2 \equiv f(v_1) - f(v_2) \pmod{7}$ tiene solución; por lo tanto $(f(v_1) - f(v_2)) \in \mathbf{R}$ de lo anterior se concluye que si $\overrightarrow{v_1 v_2} \in A(G)$ entonces $\overrightarrow{f(v_1) f(v_2)} \in A(D_7)$.

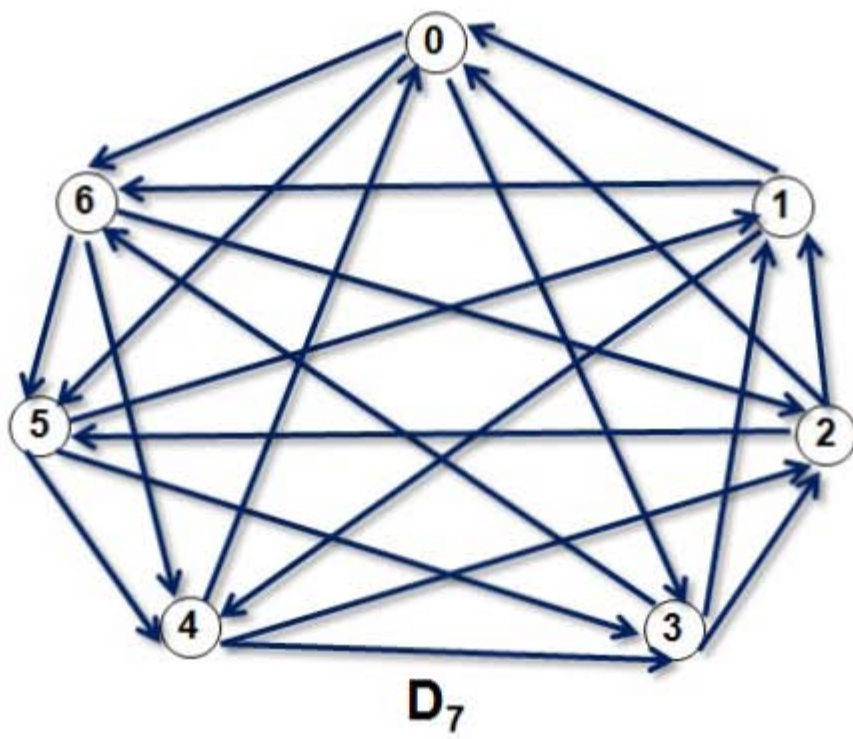
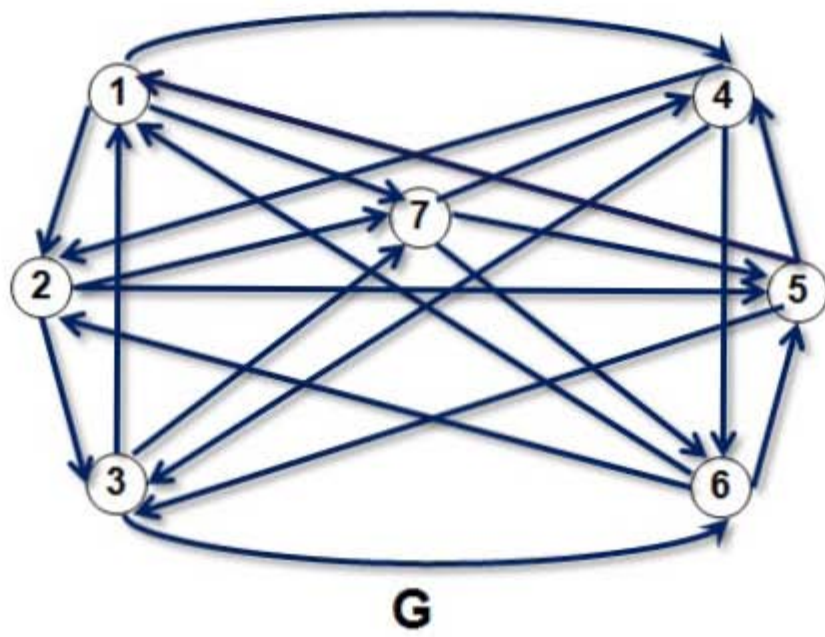
Nos falta demostrar que para todo $v_1, v_2 \in V(G)$, si $\overrightarrow{f(v_1) f(v_2)} \in A(D_7)$ entonces $\overrightarrow{v_1 v_2} \in A(G)$.

Supongamos que existe $\overrightarrow{f(v_1) f(v_2)} \in A(D_7)$ tal que $\overrightarrow{v_1 v_2} \notin A(G)$; es decir v_1 y v_2 no son adyacentes, por lo tanto G no es torneo; lo anterior es una contradicción ya que por construcción para cualquier par de vértices de G existe un arco en $A(G)$.

Con esto queda demostrado que salvo isomorfismo, el torneo de Paley D_7 es el único torneo minimal 2-existencialmente cerrado de orden siete.

■

Los torneos G y D_7 se ven gráficamente de la siguiente forma:



A continuación definiremos una operación de torneos llamada la réplica con respecto a un arco, la cual nos será de gran utilidad en la demostración del Teorema de existencia.

Definición 2.1 Sea G un torneo y sea $\vec{ab} \in A(G)$. Consideremos a' y b' dos nuevos vértices. Definimos $R(G, e)$ la **réplica de G con respecto al arco $e = \vec{ab}$** como el torneo descrito a continuación:

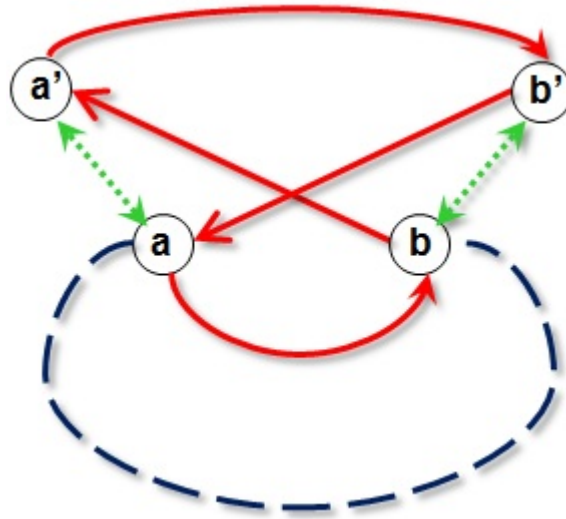
$$a) V(R(G, e)) = V(G) \cup \{a', b'\}$$

$$b) A(R(G, e)) = A(G) \cup \left\{ \vec{a'v} : v \in N^+(a) \setminus \{b\} \right\} \cup \left\{ \vec{va'} : v \in N^-(a) \right\} \\ \cup \left\{ \vec{b'v} : v \in N^+(b) \right\} \cup \left\{ \vec{vb'} : v \in N^-(b) \setminus \{a\} \right\} \\ \cup \left\{ \vec{ba'}, \vec{a'b'}, \vec{b'a} \right\} \\ \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

En donde $\mathcal{A} \subset \{ \vec{aa'}, \vec{a'a} \}$, $\mathcal{B} \subset \{ \vec{bb'}, \vec{b'b} \}$ y $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 1$.

Observemos que para cada arco $e = \vec{ab}$, existen cuatro réplicas diferentes $R(G, e)$, las cuales se obtienen al elegir alguno de los arcos $\vec{aa'}$ o $\vec{a'a}$ y $\vec{bb'}$ o $\vec{b'b}$.

En la siguiente gráfica se muestra como se relacionan los vértices a, a', b y b' en la réplica $R(G, e)$.



La línea punteada azul marino representa los vértices y arcos de la gráfica G ; recordemos que por cada arco que caiga o que salga del vértice a , existe un arco que cae o sale respectivamente del vértice a' ; análogamente para los vértices b y b' .

Los arcos punteados de color verde representan las cuatro opciones posibles entre los arcos $\overrightarrow{aa'}$, $\overrightarrow{a'a}$, $\overrightarrow{bb'}$ y $\overrightarrow{b'b}$. Finalmente tenemos el arco \overrightarrow{ab} y los nuevos arcos definidos $\overrightarrow{ba'}$, $\overrightarrow{a'b'}$ y $\overrightarrow{b'a}$ de color rojo.

El siguiente Teorema juega un papel fundamental en este capítulo ya que nos muestra que la réplica con respecto a un arco es una operación de digráficas que preserva en un torneo la propiedad de ser 2-existencialmente cerrado.

Teorema 2.2 *Sea G un torneo 2-existencialmente cerrado, entonces para cada arco $e \in A(G)$ toda réplica $R(G, e)$ es nuevamente un torneo 2-existencialmente cerrado.*

Demostración. Sean $e = \overrightarrow{ab} \in A(G)$ y $R(G, e)$ cualquiera de las cuatro réplicas de G asociadas al arco e con $V(R(G, e)) = V(G) \cup \{a', b'\}$. Demostraremos por casos que para cada par de vértices $\{u, v\} \in V(R(G, e))$ se tiene que $N^\alpha(u) \cap N^\beta(v) \neq \emptyset$ para toda permutación de $\alpha, \beta \in \{+, -\}$.

Recordemos que por la definición de réplica $a \in N^+(b') \cap N^-(b)$, $b \in N^+(a) \cap N^-(a')$, $a' \in N^-(b') \cap N^+(b)$ y $b' \in N^+(a') \cap N^-(a)$.

Caso I Sean $u, v \in V(G)$. Como G es 2-existencialmente cerrado, la propiedad se conserva para cualesquiera dos vértices de G .

Caso II Sean $u, a' \in V(R(G, e))$ con $u \neq a, b$.

Como G es 2-existencialmente cerrado existe $w \in N^+(u) \cap N^+(a)$. Si $w \neq b$ entonces $w \in N^+(u) \cap N^+(a')$ y si $w = b$ entonces $b' \in N^+(u) \cap N^+(a')$.

Para todo $w \in N^+(u) \cap N^-(a)$ se tiene que $w \in N^+(u) \cap N^-(a')$.

Sea $w \in N^-(u) \cap N^+(a)$, si $w \neq b$ entonces $w \in N^-(u) \cap N^+(a')$, si $w = b$ entonces $b' \in N^-(u) \cap N^+(a')$.

Finalmente, para todo $w \in N^-(u) \cap N^-(a)$ se tiene que $w \in N^-(u) \cap N^-(a')$.

Caso III Sean $u, b' \in V(R(G, e))$ con $u \neq a, b$.

Observemos que por definición de réplica, para todo $w \in N^+(u) \cap N^+(b)$ se tiene que $w \in N^+(u) \cap N^+(b')$. Similarmente, para todo $w \in N^-(u) \cap N^+(b)$ tenemos que $w \in N^-(u) \cap N^+(b')$.

Por otro lado, si $w \in N^+(u) \cap N^-(b)$ tenemos dos opciones; si $w \neq a$ entonces $w \in N^+(u) \cap N^-(b')$ y si $w = a$ entonces $a' \in N^+(u) \cap N^-(b')$.

Para terminar este caso, si $w \in N^-(u) \cap N^-(b)$ y $w \neq a$ entonces $w \in N^-(u) \cap N^-(b')$ y si $w = a$ entonces $a' \in N^-(u) \cap N^-(b')$.

Caso IV Para la pareja de vértices a, a' tenemos por definición que los conjuntos $N^+(a) \cap N^+(a')$ y $N^-(a) \cap N^-(a')$ son distintos del vacío.

Además, $b \in N^+(a) \cap N^-(a')$ y $b' \in N^-(a) \cap N^+(a')$.

Caso V Para la pareja de vértices a, b' es fácil ver que para cualquier $w \in N^\alpha(a) \cap N^\beta(b)$ se tiene que $w \in N^\alpha(a) \cap N^\beta(b')$ con $\alpha, \beta \in \{+, -\}$.

Caso VI Para la pareja de vértices b, b' tenemos que los conjuntos $N^+(b) \cap N^+(b')$ y $N^-(b) \cap N^-(b')$ son distintos del vacío.

Además, $a \in N^-(b) \cap N^+(b')$ y $a' \in N^+(b) \cap N^-(b')$.

Caso VII Para la pareja de vértices b, a' es fácil ver que para cualquier $w \in N^\alpha(b) \cap N^\beta(a')$ se tiene que $w \in N^\alpha(b) \cap N^\beta(a')$ con $\alpha, \beta \in \{+, -\}$.

Caso VIII Por último si consideramos la pareja a', b' por definición de réplica tenemos que para todo $w \in N^\alpha(a') \cap N^\beta(b')$ se tiene que $w \in N^\alpha(a') \cap N^\beta(b')$ con $\alpha, \beta \in \{+, -\}$.

Con lo que hemos demostrado que $R(G, e)$ es un torneo 2-existencialmente cerrado.

■

Encaminados a demostrar el Teorema principal de este capítulo, la siguiente Proposición nos da información importante sobre los torneos de orden ocho.

Proposición 2.1 *Si G es un torneo 2-existencialmente cerrado de orden ocho, entonces tiene exactamente cuatro vértices de ingrado 3 y cuatro vértices de ingrado 4.*

Demostración. Sea G un torneo 2-existencialmente cerrado de orden ocho para todo vértice v en $V(G)$, el grado de v es siete.

Si $v \in V(G)$, por Lema 1.1, $G|N^+(v)$ y $G|N^-(v)$ son torneos 1-e.c. y como D_3 es el único torneo 1-e.c. minimal y tiene tres vértices, podemos afirmar que $|V(G|N^+(v))| \geq 3$ y $|V(G|N^-(v))| \geq 3$.

Sea x el número de vértices de ingrado 3 y y el número de vértices de ingrado 4 de G , entonces $x + y = 8$.

Como G es un torneo, el número de arcos de G es 28, con lo que tenemos una segunda ecuación en términos de x y y , $3x + 4y = 28$.

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones, tenemos que $x = y = 4$, como se quería demostrar.

■

El siguiente Teorema es fundamental para la caracterización de la existencia de torneos 2-existencialmente cerrados.

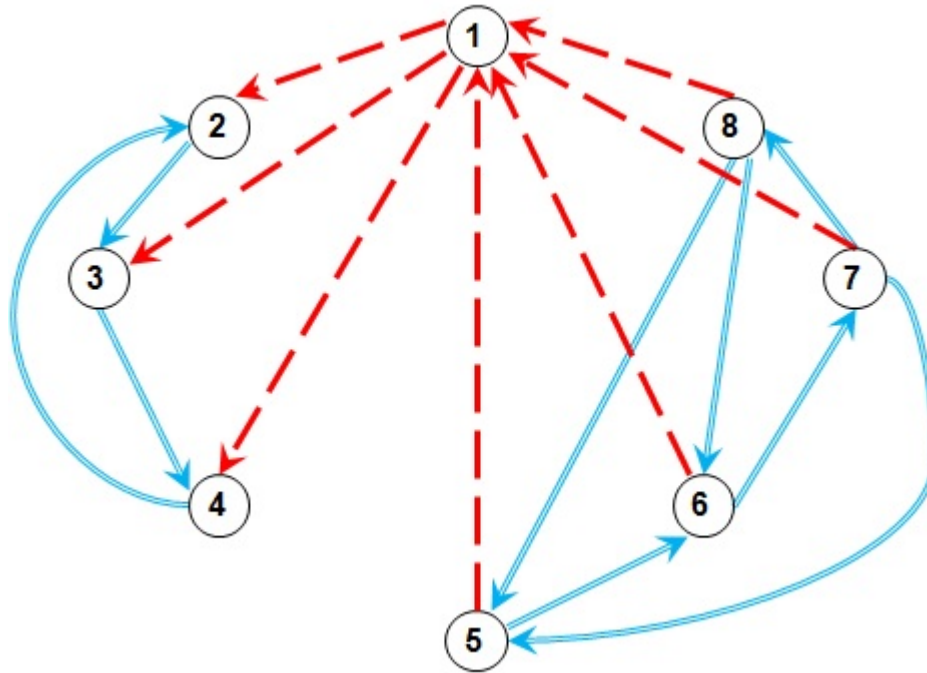
Teorema 2.3 *No existen torneos 2-existencialmente cerrados de orden 8.*

Demostración. Supongamos que G es un torneo 2-existencialmente cerrado de orden 8 y $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|N^-(1)| = 4$. Sea T el único torneo 1-existencialmente cerrado con cuatro vértices (Observación 1.4), entonces $G|N^-(1) \cong T$ y $G|N^+(1) \cong D_3$.

Sean $N^+(1) = \{2, 3, 4\}$ y $N^-(1) = \{5, 6, 7, 8\}$ supongamos $A(G|N^+(1)) = \{\overrightarrow{23}, \overrightarrow{34}, \overrightarrow{42}\}$ y $A(G|N^-(1)) = \{\overrightarrow{56}, \overrightarrow{67}, \overrightarrow{75}, \overrightarrow{85}, \overrightarrow{86}, \overrightarrow{78}\}$.

Gráficamente tenemos la siguiente situación:

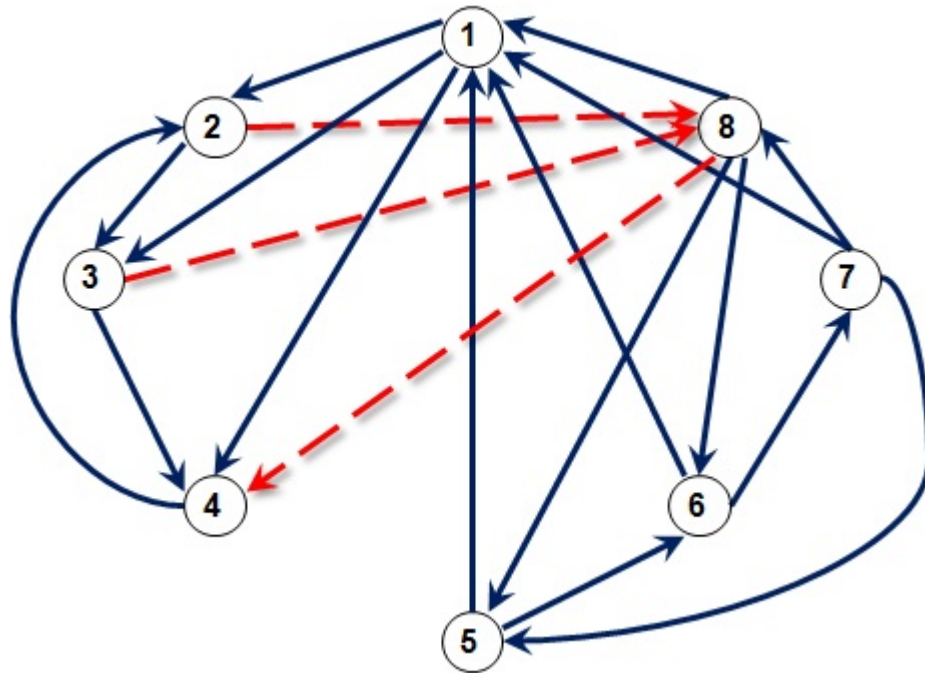


La prueba continua con los siguientes dos casos: $|N^-(8)| = 3$ o $|N^-(8)| = 4$.

Caso I Supongamos que $|N^-(8)| = 3$.

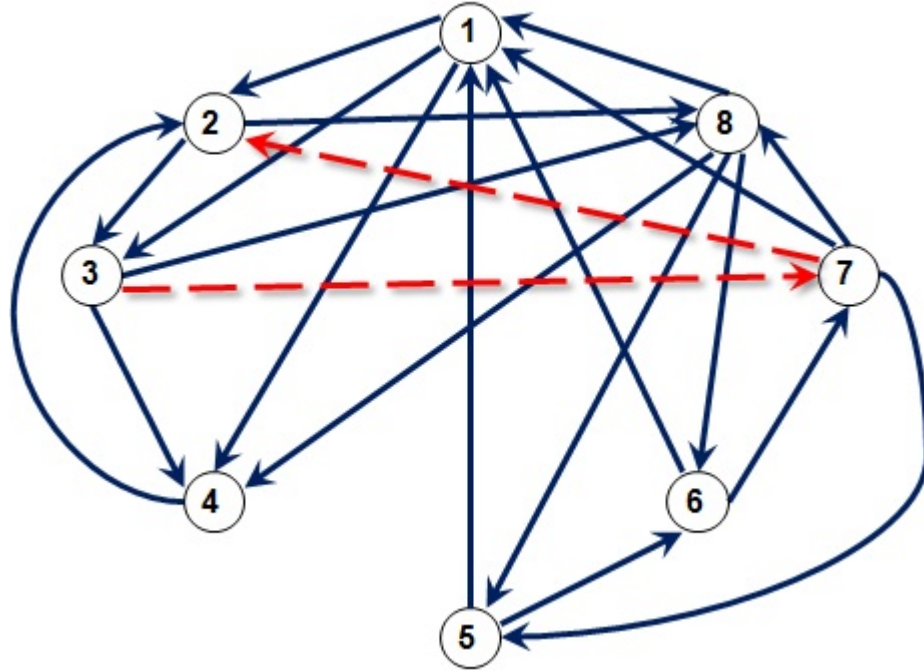
De la gráfica anterior podemos ver que $7 \in N^-(8)$ y $1, 5, 6 \in N^+(8)$; sin pérdida de generalidad, por la simetría de los vértices 2, 3 y 4, podemos suponer que $N^-(8) = \{7, 2, 3\}$ y $N^+(8) = \{1, 4, 5, 6\}$ entonces $\vec{28}, \vec{38}, \vec{84} \in V(G)$.

Ésto lo mostramos a continuación:



Por el Lema 1.1 sabemos que $G|N^-(8)$ es 1-e.c. por lo tanto, $G|N^-(8) \cong D_3$ y como $\vec{23} \in A(G|N^-(1))$, entonces los arcos $\vec{37}$ y $\vec{72}$ están en $A(G|N^-(8))$.

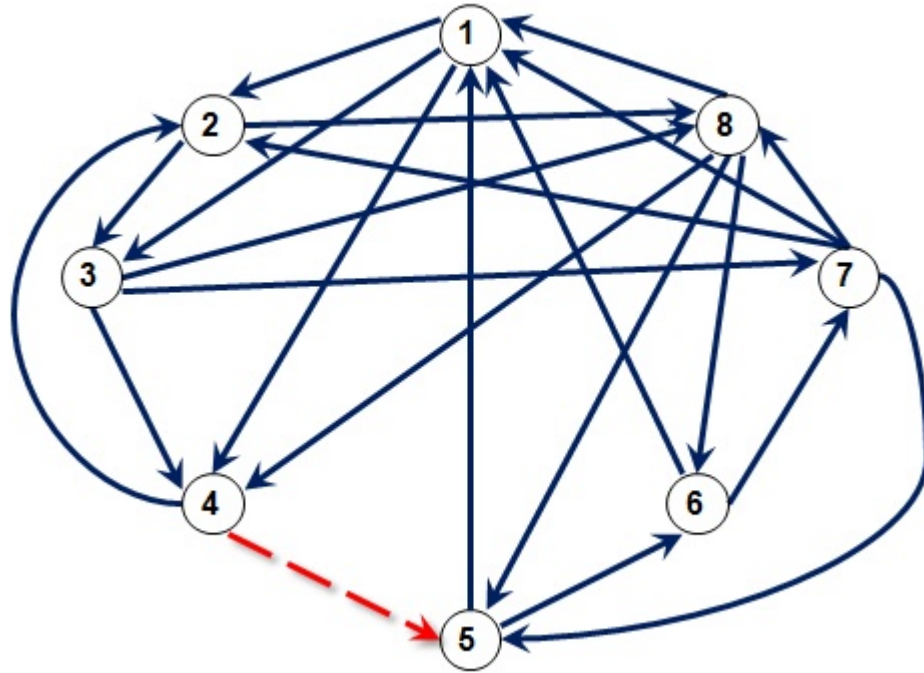
Hasta ahora tenemos la siguiente digráfica:



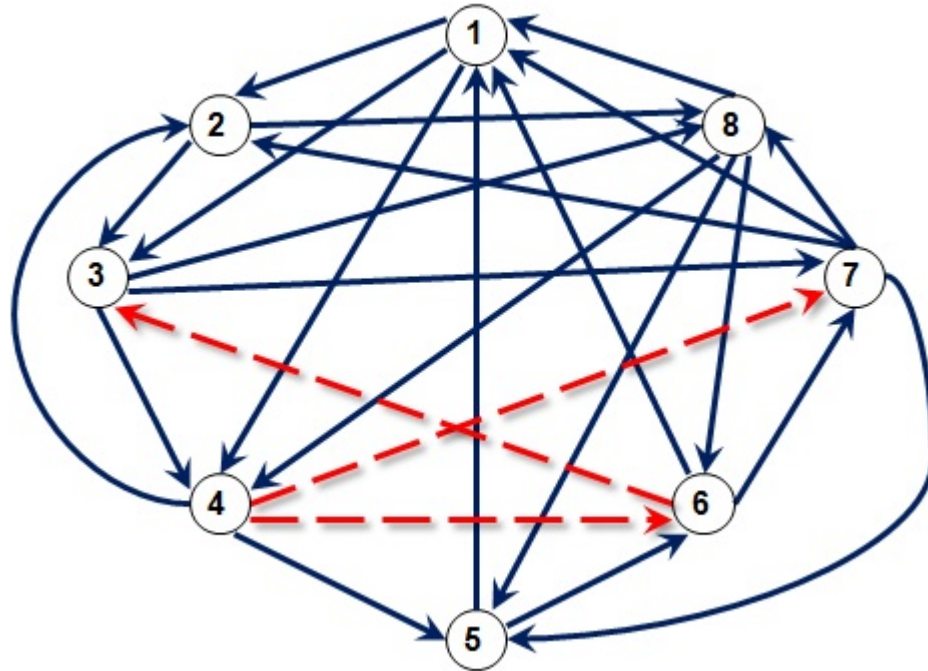
Similarmente por el Lema 1.1 sabemos que $G|N^+(8)$ es 1-existencialmente cerrado y como $|N^+(8)| = 4$ tenemos que $G|N^+(8) \cong T$.

Como $\vec{56}, \vec{61}, \vec{14}, \vec{51} \in A(G|N^+(8))$, entonces $\vec{45}$ o $\vec{54} \in A(G|N^+(8))$.

Observemos que si $\vec{54} \in A(G|N^+(8))$ el vértice 5 sería una fuente pero esto contradice el hecho de que $G|N^+(8)$ es 1-e.c., entonces $\vec{54} \notin A(G|N^+(8))$ y por lo tanto $\vec{45} \in A(G|N^+(8))$.



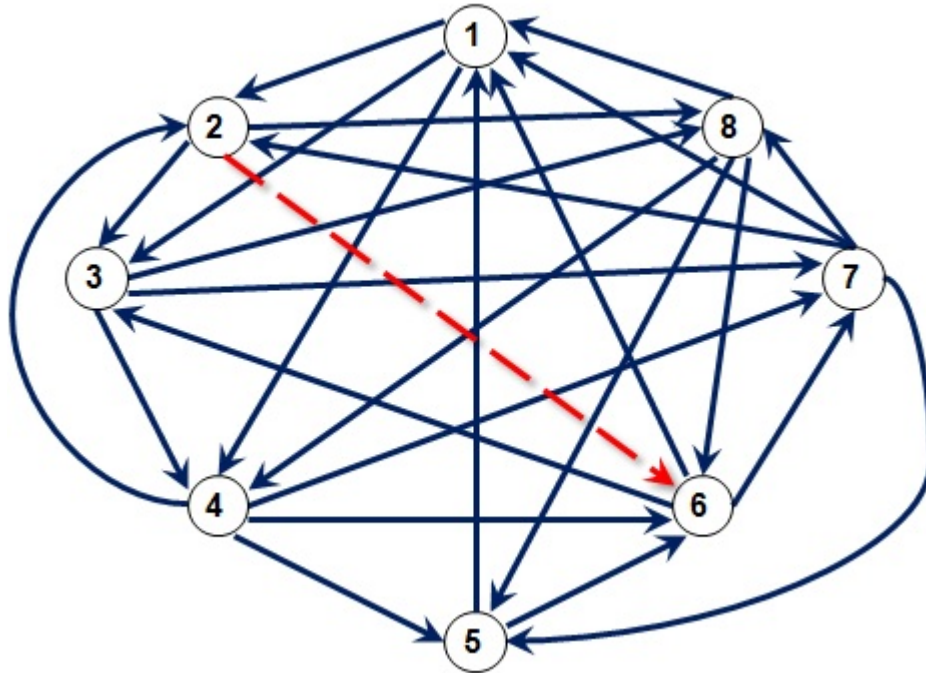
Para el vértice $v = 7$ hasta el momento tenemos que $N^+(7) = \{5, 8, 1, 2\}$, por lo tanto $N^-(7) = \{3, 4, 6\}$ y así tenemos que el arco $\overrightarrow{47} \in A(G)$ y $G|N^-(7) \cong D_3$, por lo que también tenemos los arcos $\overrightarrow{46}, \overrightarrow{63} \in A(G|N^-(7))$.



Para el vértice 6 tenemos que $\{4, 5, 8\} \subseteq N^-(6)$ y $\{1, 3, 7\} \subseteq N^+(6)$.

Supongamos que $|N^-(6)| = 3$, entonces $G|N^-(6) \cong D_3$ pero $\overrightarrow{85}, \overrightarrow{45} \in A(G)$ con lo que el vértice 5 sería un pozo en $G|N^-(6)$, lo cual contradice el hecho de que $G|N^-(6)$ es 1-e.c. Por lo tanto, $|N^-(6)| = 4$ y $|N^+(6)| = 3$.

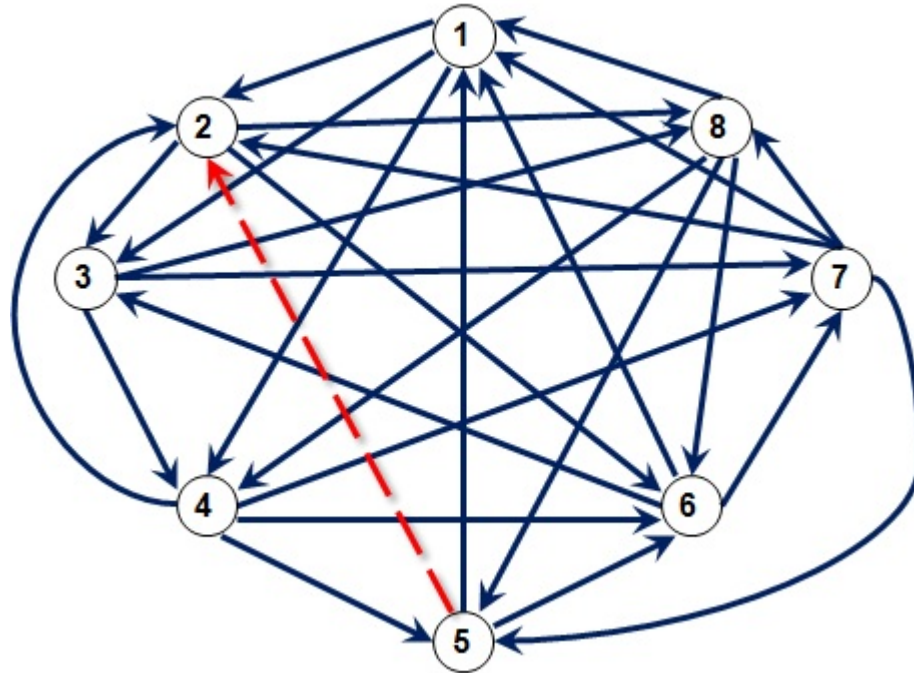
Entonces $N^-(6) = \{2, 4, 5, 8\}$ y $G|N^-(6) \cong T$ donde T es el único torneo 1-existencialmente cerrado de cuatro vértices.



Por construcción $\overrightarrow{42}, \overrightarrow{45}, \overrightarrow{85}, \overrightarrow{84}, \overrightarrow{28} \in A(G)$, por lo tanto $\overrightarrow{25}$ o $\overrightarrow{52} \in A(G)$.

Si $\overrightarrow{25} \in A(G)$ entonces $\overrightarrow{25}, \overrightarrow{85}, \overrightarrow{45} \in A(G)$ lo que implica que el vértice 5 es un pozo en $G|N^-(6)$, lo que contradice que $G|N^-(6)$ es 1-e.c.

Por lo tanto $\overrightarrow{52} \in A(G)$ y tenemos la siguiente digráfica:

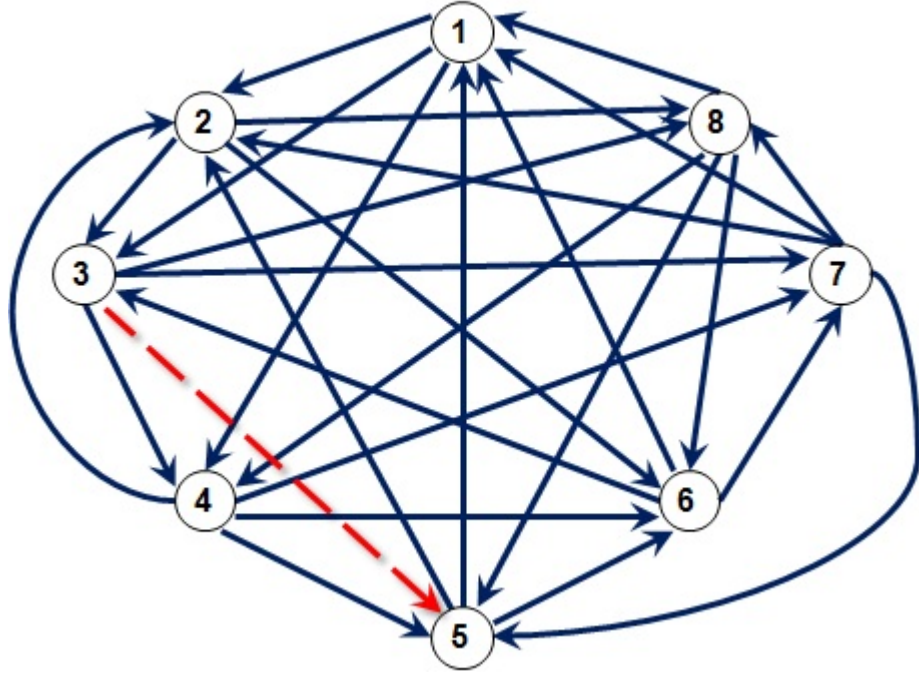


Haciendo un pequeño resumen de lo obtenido hasta ahora, tenemos que:

1. $N^+(1) = \{2, 3, 4\}$ y $N^-(1) = \{5, 6, 7, 8\}$;
2. $N^+(2) = \{3, 6, 8\}$ porque $N^-(2) = \{1, 4, 5, 7\}$ y $\overrightarrow{26} \in A(G)$;
3. Para el vértice 3 tenemos que $\{4, 7, 8\} \subseteq N^+(3)$ y $\{1, 2, 3\} \subseteq N^-(3)$, por lo tanto, $\overrightarrow{35}$ o $\overleftarrow{53} \in A(G)$;
4. $N^+(4) = \{2, 5, 6, 7\}$ y $N^-(4) = \{1, 3, 8\}$;
5. Para el vértice 5 tenemos: $\{1, 2, 6\} \subseteq N^+(5)$ y $\{4, 7, 8\} \subseteq N^-(5)$, por lo tanto, $\overrightarrow{35}$ o $\overleftarrow{53} \in A(G)$;
6. $N^+(6) = \{1, 3, 7\}$ y $N^-(6) = \{2, 4, 5, 8\}$;
7. $N^+(7) = \{1, 2, 5, 8\}$ y $N^-(7) = \{3, 4, 6\}$;
8. $N^+(8) = \{1, 4, 5, 6\}$ y $N^-(8) = \{2, 3, 7\}$.

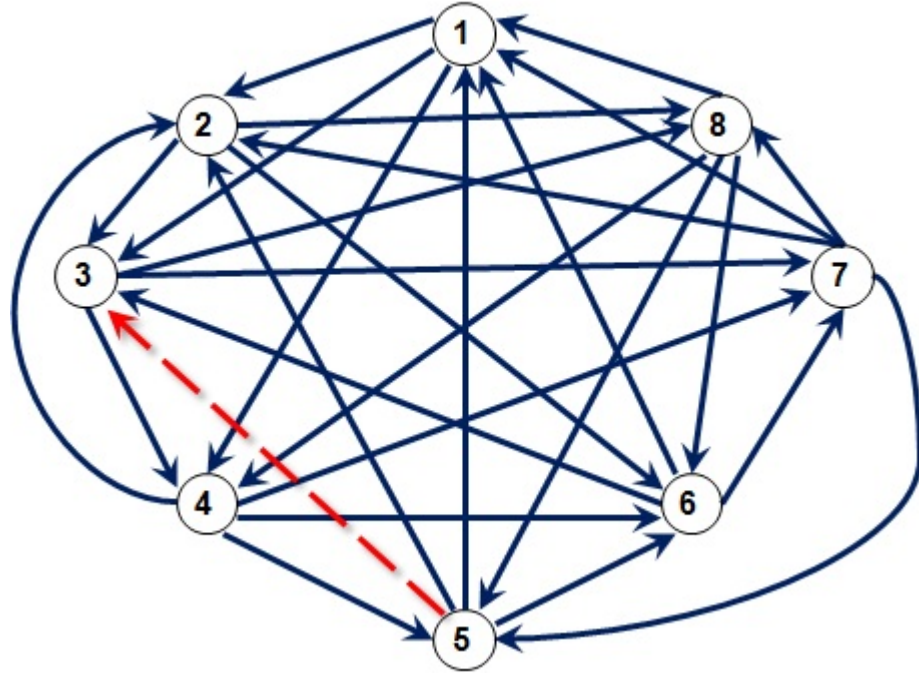
Por lo anterior sólo nos falta analizar cual de los dos arcos $\overrightarrow{35}$ o $\overleftarrow{53}$ pertenece al conjunto de arcos de G .

Supongamos que $\overrightarrow{35}$ está en $A(G)$.



Entonces $N^+(3) = \{4, 5, 7, 8\}$ y $G|N^+(3) \cong T$, como $\overrightarrow{45}, \overrightarrow{75}, \overrightarrow{85} \in A(G)$ el vértice 5 es pozo en $G|N^+(3)$ lo cual contradice que $G|N^+(3)$ es 1-e.c.

Por lo tanto $\overrightarrow{35} \notin A(G)$. Como G es un torneo, $\overrightarrow{53} \in A(G)$ y tenemos la siguiente digráfica:



Entonces $N^+(5) = \{1, 2, 3, 6\}$ y $G|N^+(5) \cong T$. Como $\vec{13}, \vec{23}, \vec{63} \in A(G)$ el vértice 3 es un pozo en $G|N^+(5)$ lo que contradice que $G|N^+(5)$ es 1-e.c.

Por lo tanto, si $|N^-(8)| = 3$ entonces G no es un torneo 2-existencialmente cerrado.

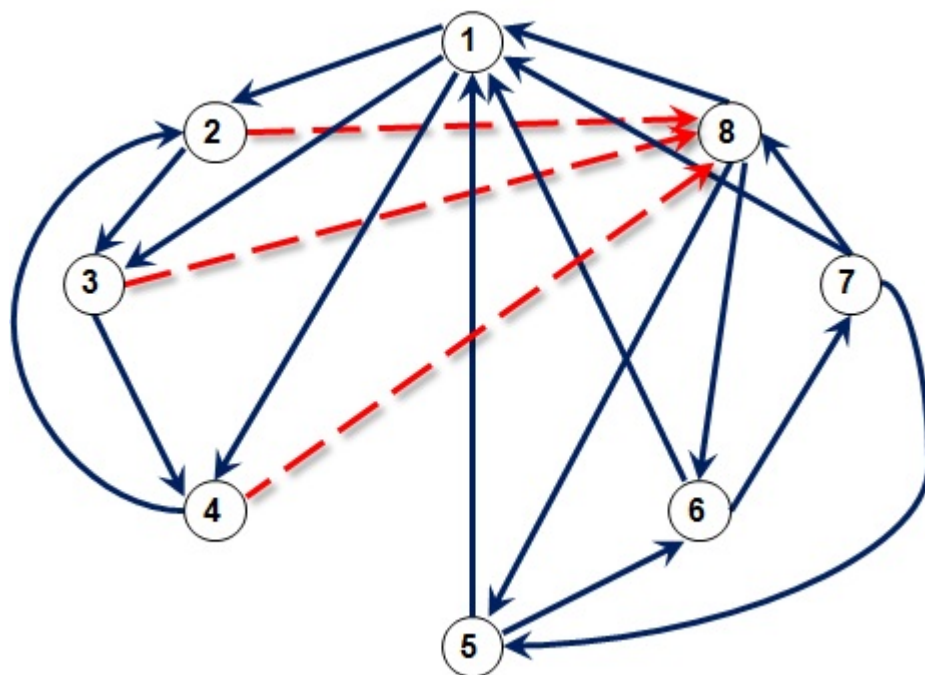
Caso II Supongamos que $|N^-(8)| = 4$.

Si $|N^-(8)| = 4$ entonces $|N^+(8)| = 3$ y por lo tanto $G|N^-(8) \cong T$ y $G|N^+(8) \cong D_3$.

Como $N^-(1) = \{5, 6, 7, 8\}$ y $\vec{85}, \vec{86}, \vec{78} \in A(G|N^-(1))$, entonces $\vec{81}, \vec{85}, \vec{86}, \vec{78} \in A(G)$.

Por lo tanto $N^+(8) = \{1, 5, 6\}$ y $N^-(8) = \{2, 3, 4, 7\}$.

Pero en $G|N^+(8)$, el vértice 1 es un pozo y el vértice 5 es una fuente, como lo mostramos a continuación:



Lo cual contradice el hecho de que $G|N^+(8)$ es 1-e.c.

Por lo tanto, no existen torneos 2-existencialmente cerrados de orden 8.

■

A continuación daremos un ejemplo de un torneo de orden diez que es 2-existencialmente cerrado.

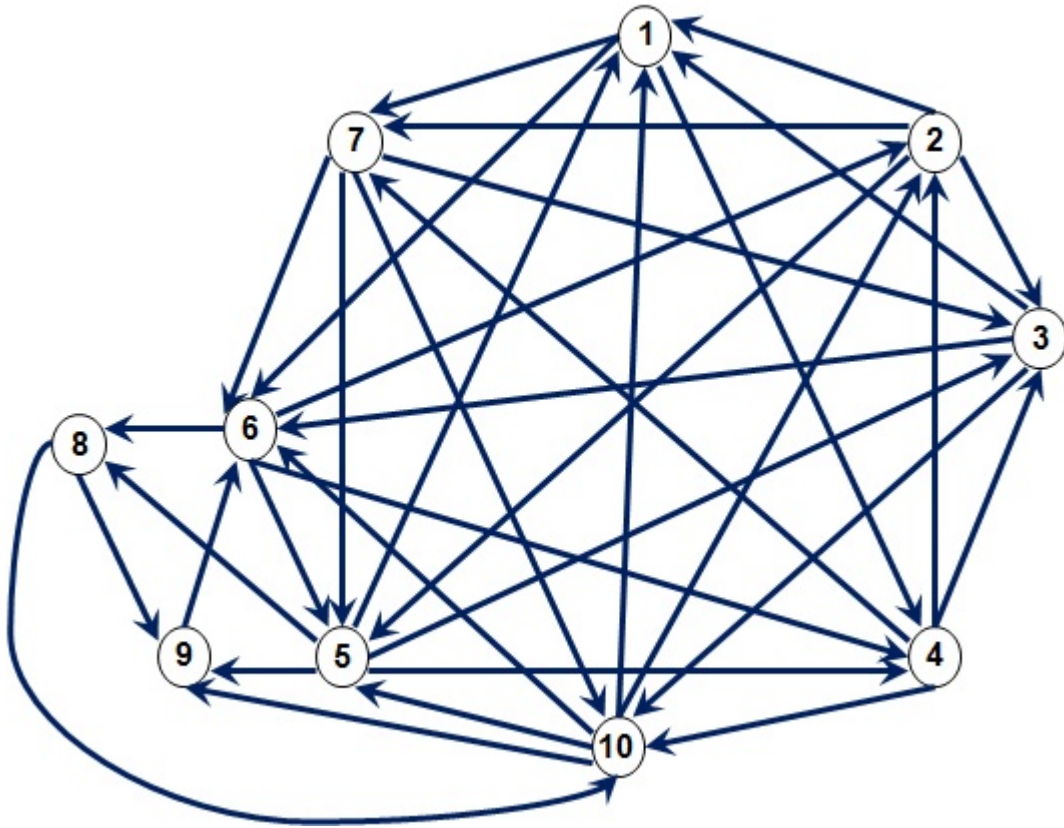
Sea $R_e = R(D_7, e)$ la réplica del torneo minimal de siete vértices D_7 con respecto al arco $e = \overrightarrow{65}$ con $\overrightarrow{66'} \in R_e$ y $\overrightarrow{55'} \in R_e$.

Renombremos los vértices $6'$ y $5'$ como 8 y 9 respectivamente.

Cambiamos el sentido del arco $\overrightarrow{32}$ para obtener el arco $\overrightarrow{23}$ y agregaremos el vértice 10 tal que $N^+(10) = \{1, 2, 5, 6, 9\}$ y $N^-(10) = \{3, 4, 7, 8\}$.

Observemos que $N^+(8) = \{2, 4, 9, 10\}$ y $N^+(9) = \{1, 3, 4, 6\}$.

Sea T el torneo que obtenemos con las especificaciones anteriores, entonces omitiendo algunas de los arcos para simplificar la imagen gráfica de T , tenemos la siguiente subgráfica de T :



Proposición 2.2 *El torneo T definido en el párrafo anterior es 2-existencialmente cerrado.*

Demostración. Con las siguientes tablas demostraremos que para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(T)$, se tiene que $N^\alpha(u) \cap N^\beta(v) \neq \emptyset$ para todas las combinaciones posibles de $\alpha, \beta \in \{+, -\}$; es decir, si $S = \{u, v\}$ entonces para cada combinación existe $x \in V(T)$ tal que $x \neq u$ y $x \neq v$ el cuál domina a cada vértice en $R \subseteq S$ y es dominado por cada vértice en $S \setminus R$; por lo tanto T es 2-existencialmente cerrado. Primero veremos las invecindades y exvecindades de cada vértice del torneo T .

v	$N^+(v)$	$N^-(v)$
1	{7, 6, 4, 8}	{2, 3, 5, 10, 9}
2	{1, 7, 5, 3, 9}	{6, 10, 4, 8}
3	{1, 6, 8, 10}	{2, 7, 5, 4, 9}
4	{3, 2, 7, 10}	{1, 6, 8, 5, 9}
5	{4, 3, 1, 8, 9}	{2, 6, 7, 10}
6	{5, 4, 2, 8}	{7, 1, 3, 10, 9}
7	{6, 5, 8, 9, 10, 3}	{1, 2, 4}
8	{10, 9, 2, 4}	{6, 5, 7, 1, 3}
9	{6, 1, 3, 4}	{8, 5, 7, 2, 10}
10	{1, 2, 5, 6, 9}	{3, 4, 7, 8}

Ahora veremos el comportamiento del vértice 10 con respecto al resto de los vértices.

v	$N^+(10) \cap N^+(v)$	$N^+(10) \cap N^-(v)$	$N^-(10) \cap N^+(v)$	$N^-(10) \cap N^-(v)$
1	{6}	{2, 5, 9}	{4, 7, 8}	{3}
2	{1, 5, 9}	{6}	{7, 3}	{4, 8}
3	{1, 6}	{2, 5, 9}	{8}	{4, 7}
4	{2}	{1, 6, 5, 9}	{3, 7}	{8}
5	{1, 9}	{2, 6}	{3, 4, 8}	{7}
6	{5, 2}	{1, 9}	{4, 8}	{7, 3}
7	{5, 6, 9}	{1, 2}	{8, 3}	{4}
8	{2, 9}	{6, 5, 1}	{4}	{3, 7}
9	{1, 6}	{5, 2}	{3, 4}	{8, 7}
10	{1, 2, 5, 6, 9}	\emptyset	\emptyset	{3, 4, 7, 8}

También analizaremos el comportamiento de los vértices 2 y 3, ya que es el arco que cambió de sentido.

v	$N^+(2) \cap N^+(v)$	$N^+(2) \cap N^-(v)$	$N^-(2) \cap N^+(v)$	$N^-(2) \cap N^-(v)$
1	{7}	{3, 5, 9}	{4, 6, 8}	{10}
2	{1, 7, 5, 3, 9}	\emptyset	\emptyset	{4, 6, 8, 10}
3	{1}	{7, 5, 9}	{6, 8, 10}	{4}
4	{3, 7}	{1, 5, 9}	{10}	{6, 8}
5	{1, 3, 9}	{7}	{4, 8}	{6, 10}
6	{5}	{1, 3, 7, 9}	{4, 8}	{10}
7	{3, 5, 9}	{1}	{6, 8, 10}	{4}
8	{9}	{1, 3, 5, 7}	{4, 10}	{6}
9	{1, 3}	{5, 7}	{4, 6}	{8, 10}
10	{1, 5, 9}	{3, 7}	{6}	{4, 8}

v	$N^+(3) \cap N^+(v)$	$N^+(3) \cap N^-(v)$	$N^-(3) \cap N^+(v)$	$N^-(3) \cap N^-(v)$
1	{6, 8}	{10}	{4, 7}	{2, 5, 9}
2	{1}	{6, 8, 10}	{7, 5, 9}	{4}
3	{1, 6, 8, 10}	\emptyset	\emptyset	{2, 4, 5, 7, 9}
4	{10}	{1, 6, 8}	{2, 7}	{5, 9}
5	{1, 8}	{6, 10}	{4, 9}	{2, 7}
6	{8}	{1, 10}	{2, 4, 5}	{7, 9}
7	{6, 8, 10}	{1}	{5, 9}	{2, 4}
8	{10}	{1, 6}	{2, 4, 9}	{5, 7}
9	{1, 6}	{8, 10}	{4}	{2, 5, 7}
10	{1, 6}	{8}	{2, 5, 9}	{4, 7}

Recordemos que el torneo T se construyó a partir de la réplica del torneo minimal de siete vértices $R(D_7, \vec{65})$ el cual es 2-existencialmente cerrado; por lo tanto no es necesario revisar el comportamiento de todos los vértices; es decir, con las tablas anteriores y por como definimos el torneo queda demostrado que T es 2-existencialmente cerrado.

■

Cerramos este capítulo con el siguiente Teorema.

Teorema 2.4 *Sea k un número entero positivo mayor o igual que siete y diferente de ocho, entonces existe un torneo 2-existencialmente cerrado de orden k .*

Demostración. Si k es igual a siete, tenemos que el Torneo de Paley de orden siete D_7 es 2-existencialmente cerrado. Por el Teorema 2.2 haciendo una réplica con respecto a cualquier arco obtenemos un torneo 2-existencialmente cerrado de orden nueve. Repitiendo el proceso tenemos un torneo 2-existencialmente cerrado para todo entero impar k mayor o igual que siete.

Por el Teorema 2.3 sabemos que no hay torneos 2-existencialmente cerrados de orden ocho.

Considerando el torneo T 2-existencialmente cerrado de orden diez de la Proposición 2.2 y aplicando repetidamente el Teorema 2.2 queda demostrado que existe un torneo 2-existencialmente cerrado para todo entero positivo par mayor o igual que diez.

■

Capítulo 3

Torneos regulares 2-existencialmente cerrados de orden nueve.

En este capítulo demostraremos que, salvo isomorfismo, existen solamente dos torneos regulares 2-existencialmente cerrados de orden nueve.

Sabemos por el trabajo de clasificación de torneos con diferentes propiedades realizado por el matemático australiano Brendan McKay [Mc] que, salvo isomorfismo, existen quince torneos regulares de orden nueve.

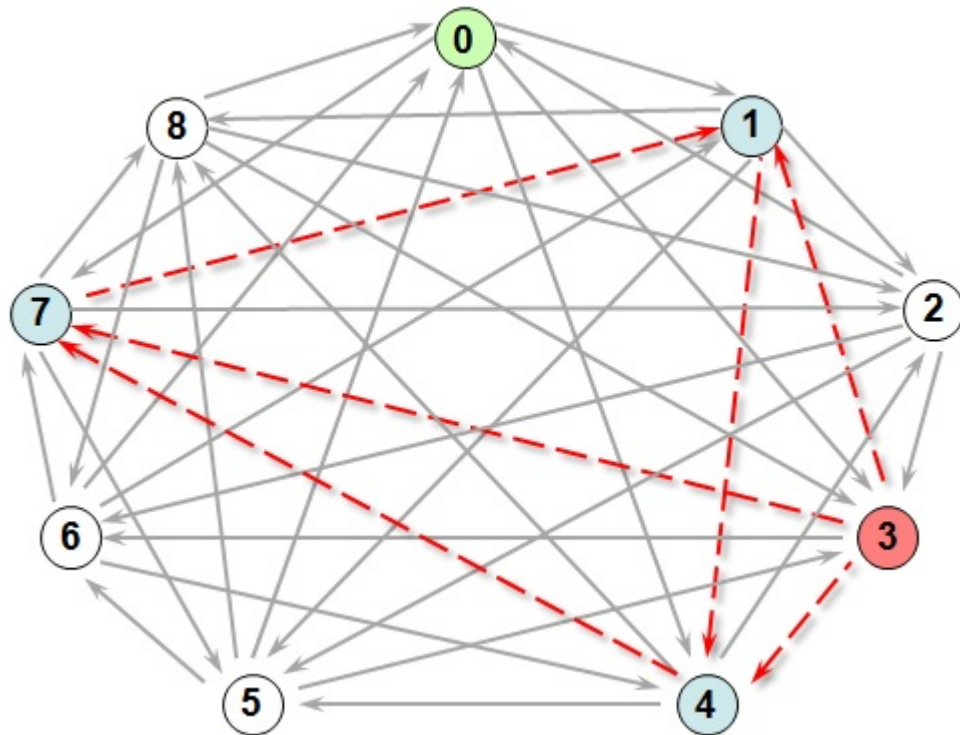
En el trabajo de tesis de maestría del matemático José Luis Cosme Álvarez [C] encontramos una gráfica de cada uno de los quince torneos regulares de orden nueve.

A continuación estudiamos cada uno de los quince torneos de manera individual y demostramos que para los primeros trece torneos T existe un vértice v tal que $T|N^+(v)$ ó $T|N^-(v)$ no son 1-existencialmente cerrados y por lo tanto el torneo T no puede ser 2-existencialmente cerrado; también demostramos explícitamente que los torneos T_9^{14} y T_9^{15} si son 2-existencialmente cerrados.

Analizamos cada uno de los quince torneos:

1. Observemos en el torneo T_9^1 que: $N^+(0) = \{1, 3, 4, 7\}$ y $N^-(0) = \{2, 5, 6, 8\}$.

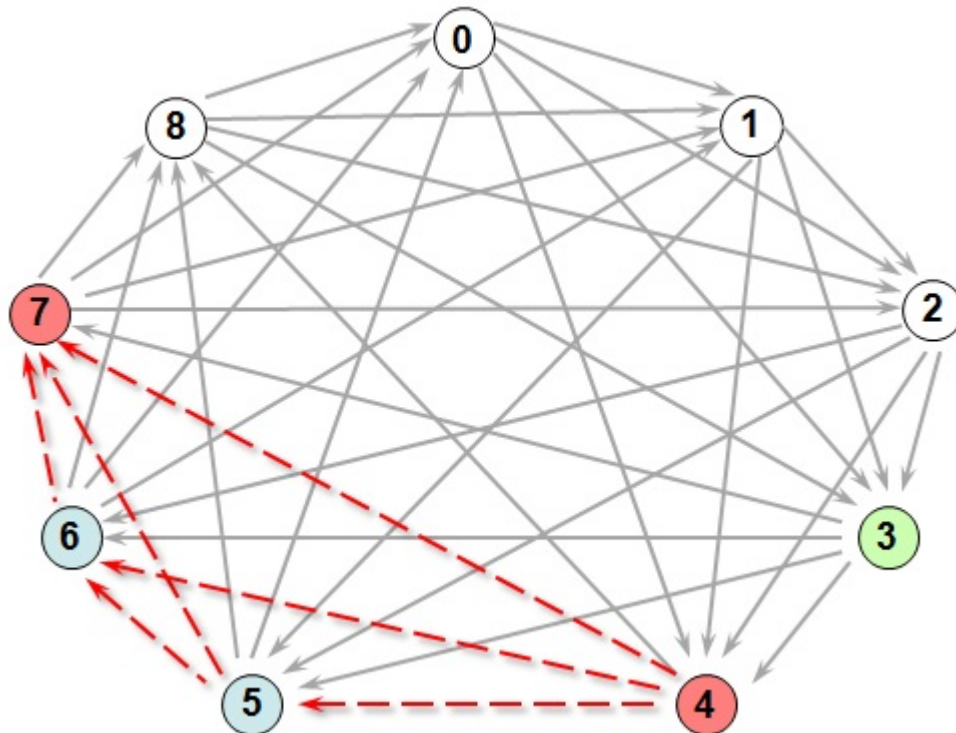
Gráficamente podemos ver a $T_9^1|N^+(0)$ de la siguiente manera:



Observemos que el torneo T_9^1 es Circulante; por otro lado podemos ver que el vértice 3 es fuente en $T_9^1|N^+(0)$ y en consecuencia $T_9^1|N^+(0)$ no es 1-e.c.

Por lo tanto T_9^1 no es 2-e.c.

2. Si observamos el vértice 3 del torneo T_9^2 nos damos cuenta que $N^+(3) = \{4, 5, 6, 7\}$ y $N^-(3) = \{0, 1, 2, 8\}$ y podemos ver a $T_9^2|N^+(3)$ de la siguiente manera:

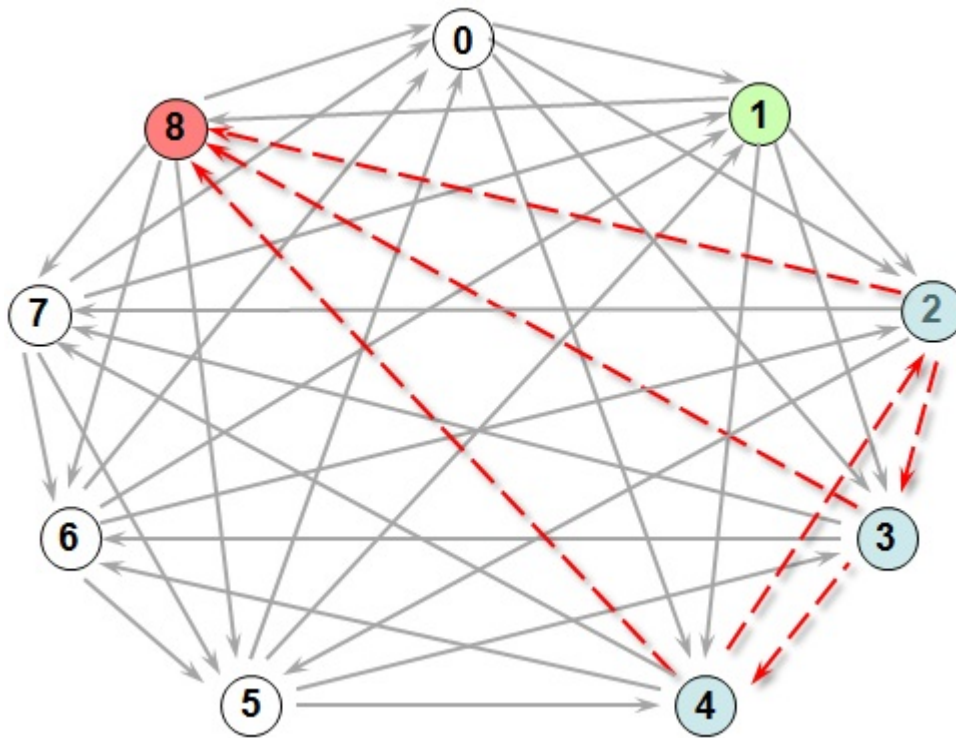


En la figura anterior podemos observar que el torneo T_9^2 es Circulante; además en $T_9^2|N^+(3)$ observamos que el vértice 4 es fuente; mientras que el vértice 7 es pozo.

Por lo tanto $T_9^2|N^+(3)$ no es 1-e.c. y por lo tanto T_9^2 no es 2-e.c.

3. En el torneo T_9^3 observamos que $N^+(1) = \{2, 3, 4, 8\}$ y $N^-(1) = \{5, 6, 7, 0\}$.

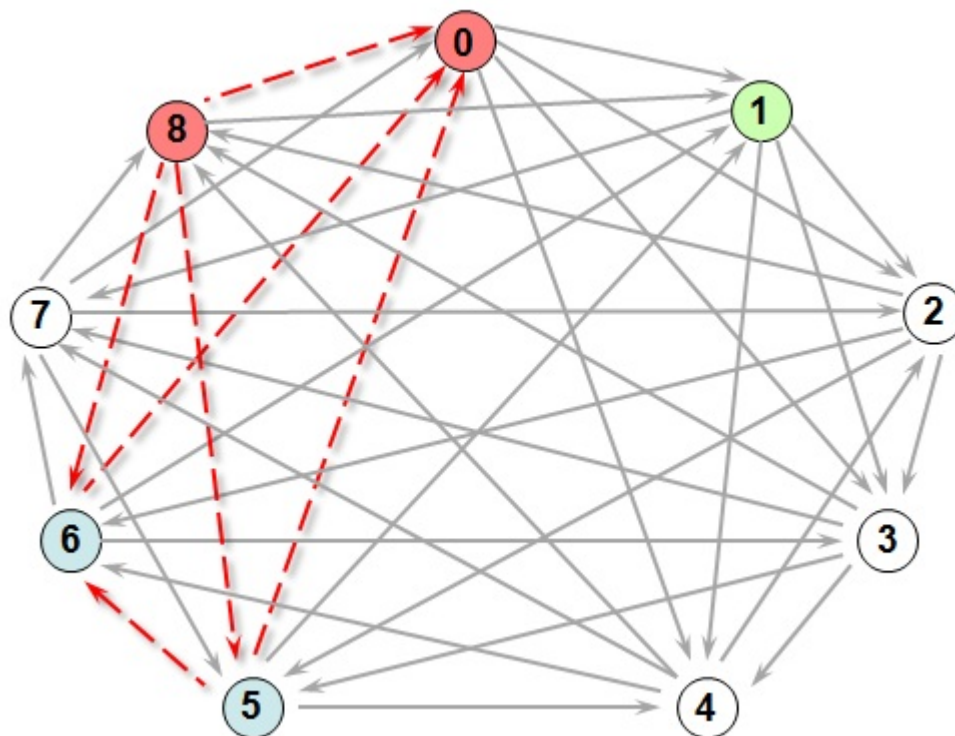
Podemos ver gráficamente a $T_9^3|N^+(1)$ de la siguiente forma:



Observamos en $T_9^3|N^+(1)$ que el vértice 8 es pozo; por lo tanto $T_9^3|N^+(1)$ no es 1-e.c. y por consiguiente T_9^3 no es 2-e.c.

4. Dado el toneo T_9^4 nos fijamos en el vértice 1 y observamos que $N^+(1) = \{2, 3, 4, 7\}$ y $N^-(1) = \{0, 5, 6, 8\}$.

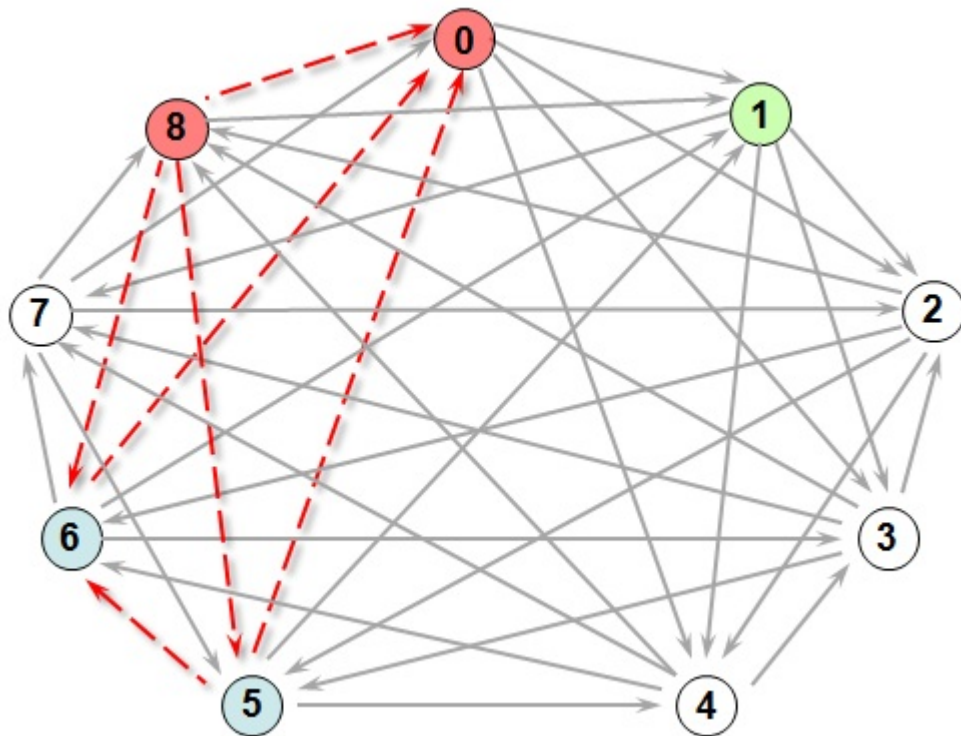
Gráficamente podemos ver a $T_9^4|N^-(1)$ como sigue:



Veamos que en $T_9^4|N^-(1)$ el vértice 0 es pozo, mientras que el vértice 8 es fuente; por lo tanto $T_9^4|N^-(1)$ no es 1-e.c. y entonces T_9^4 no es 2-e.c.

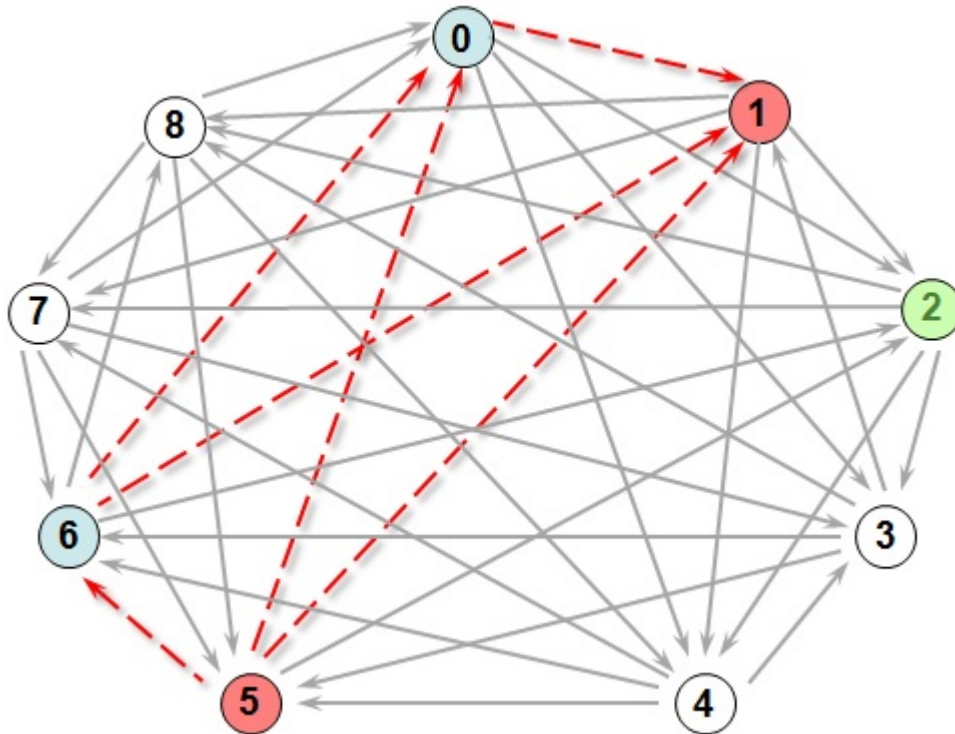
5. En el toneo T_9^5 observamos que $N^+(1) = \{2, 3, 4, 7\}$ y $N^-(1) = \{0, 5, 6, 8\}$.

Así a $T_9^5|N^-(1)$ la podemos ver gráficamente de la siguiente manera:



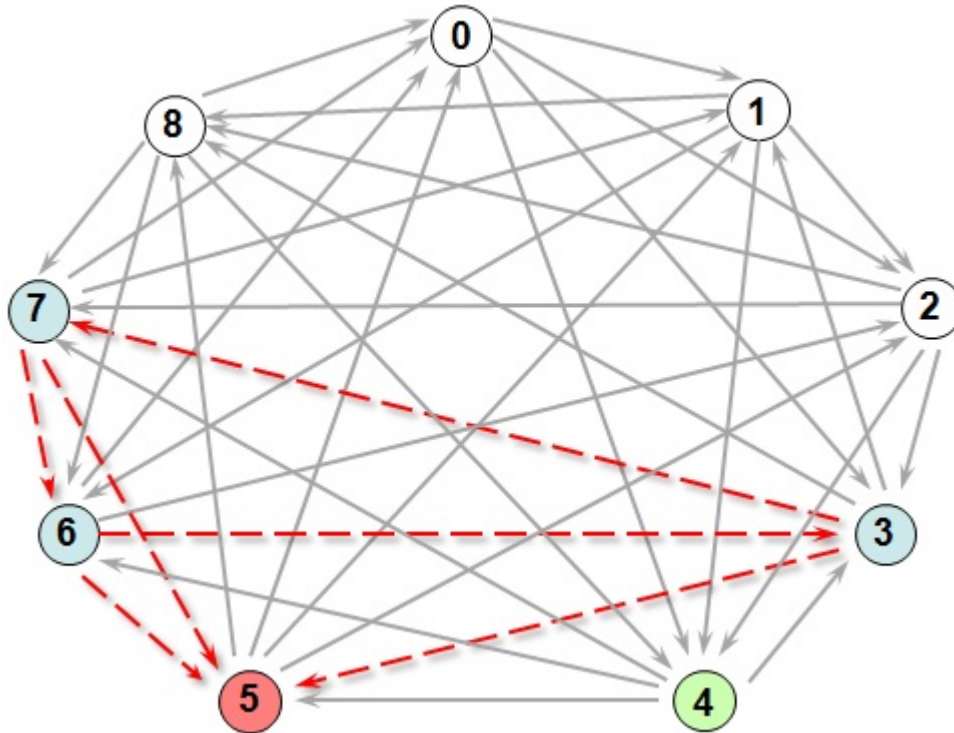
Podemos ver que en $T_9^5|N^-(1)$ el vértice 0 es pozo, mientras que el vértice 8 es fuente. Así $T_9^5|N^-(1)$ no es 1-e.c. y por lo tanto T_9^5 no es 2-e.c.

6. En T_9^6 observamos que $N^+(2) = \{3, 4, 7, 8\}$ y $N^-(2) = \{0, 1, 5, 6\}$.
 A $T_9^6|N^-(2)$ la podemos ver de la siguiente manera:



Podemos observar que en $T_9^6|N^-(2)$ el vértice 1 es pozo y el vértice 5 es fuente; por lo tanto $T_9^6|N^-(2)$ no es 1-e.c. lo que implica que T_9^6 no es 2-e.c.

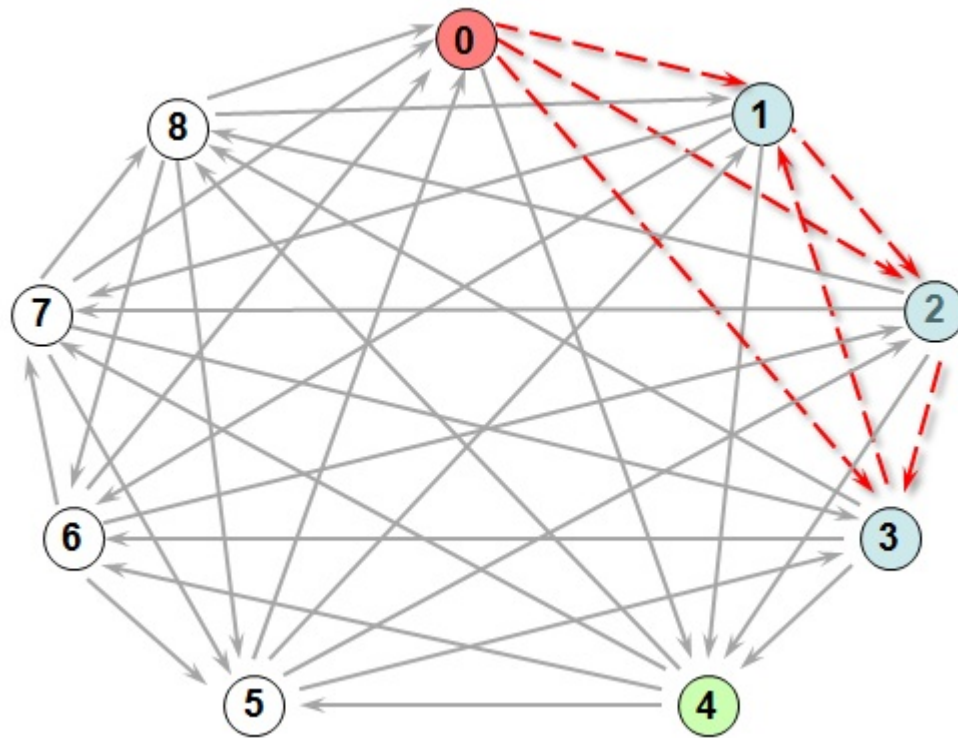
7. En el torneo T_9^7 se tiene que $N^+(4) = \{3, 5, 6, 7\}$ y $N^-(4) = \{0, 1, 2, 8\}$. Podemos ver al torneo $T_9^7|N^+(4)$ como sigue:



De aquí podemos observar que el vértice 5 es pozo en $T_9^7|N^+(4)$; lo que implica que $T_9^7|N^+(4)$ no es 1-e.c.; por lo tanto T_9^7 no es 2-e.c.

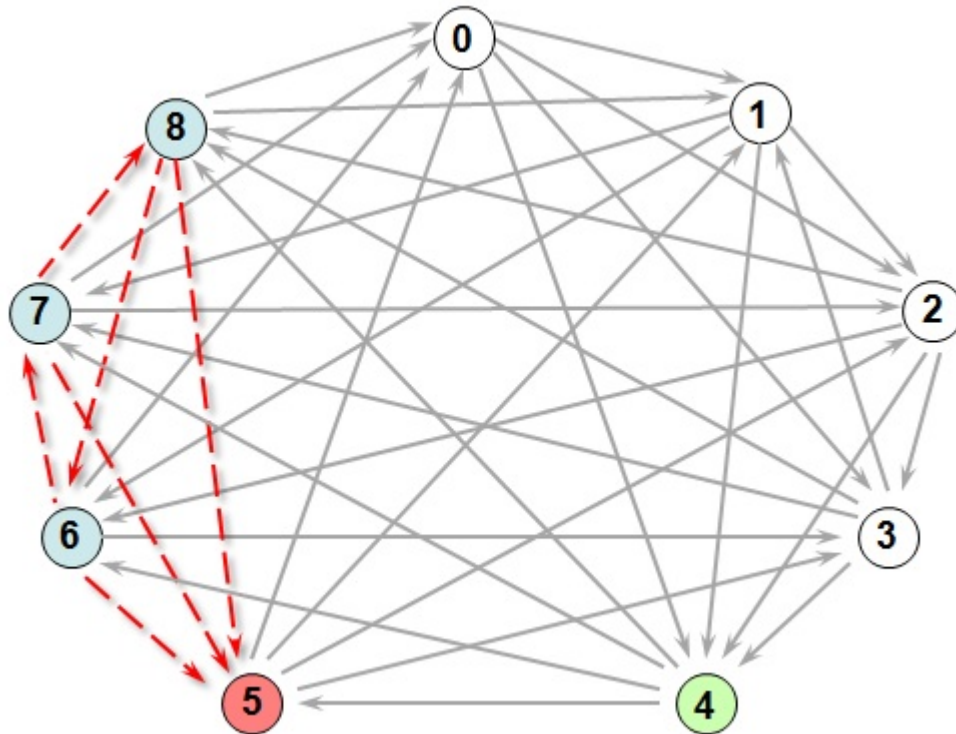
8. En el torneo T_9^8 se observa que $N^+(4) = \{5, 6, 7, 8\}$ y $N^-(4) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Podemos ver gráficamente al torneo $T_9^8|N^-(4)$ en la siguiente figura:



Aquí observamos que el vértice 0 es fuente de $T_9^8|N^-(4)$; por lo que $T_9^8|N^-(4)$ no es 1-e.c., lo que implica que T_9^8 no es 2-e.c.

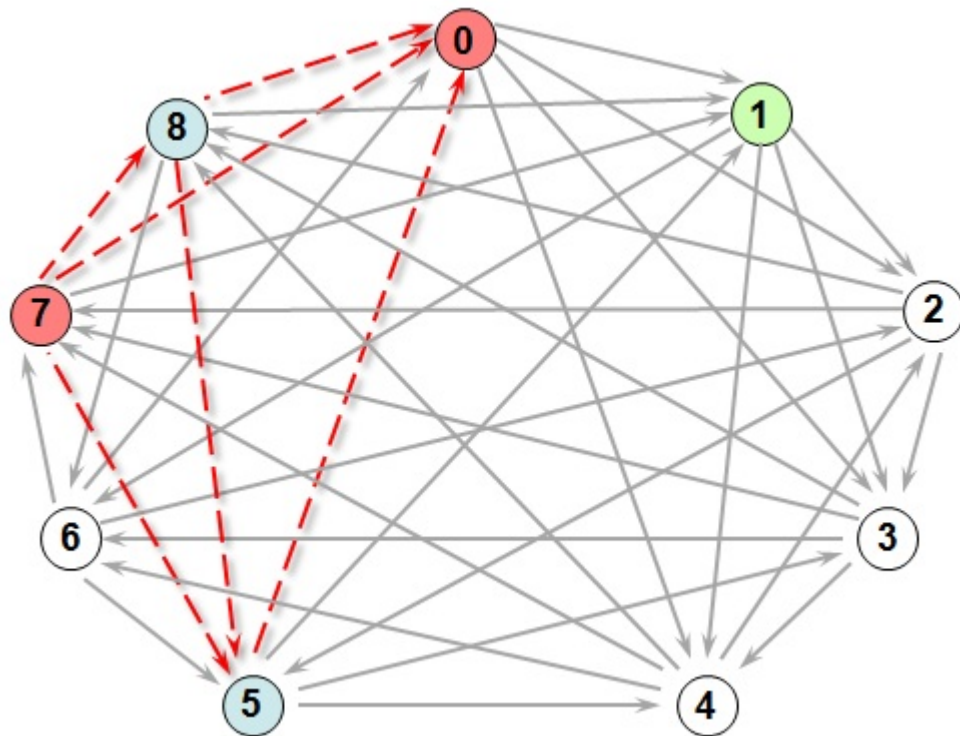
9. Observamos en T_9^9 que $N^+(4) = \{5, 6, 7, 8\}$ y $N^-(4) = \{0, 1, 2, 3\}$.
 Así podemos ver gráficamente a $T_9^9|N^+(4)$ de la siguiente forma:



Vemos que el vértice 5 es pozo de $T_9^9|N^+(4)$; por lo tanto $T_9^9|N^+(4)$ no es 1-e.c., lo que implica que T_9^9 no es 2-e.c.

10. Observemos en el torneo T_9^{10} al vértice 1; veamos que $N^+(1) = \{2, 3, 4, 6\}$ y $N^-(1) = \{0, 5, 7, 8\}$.

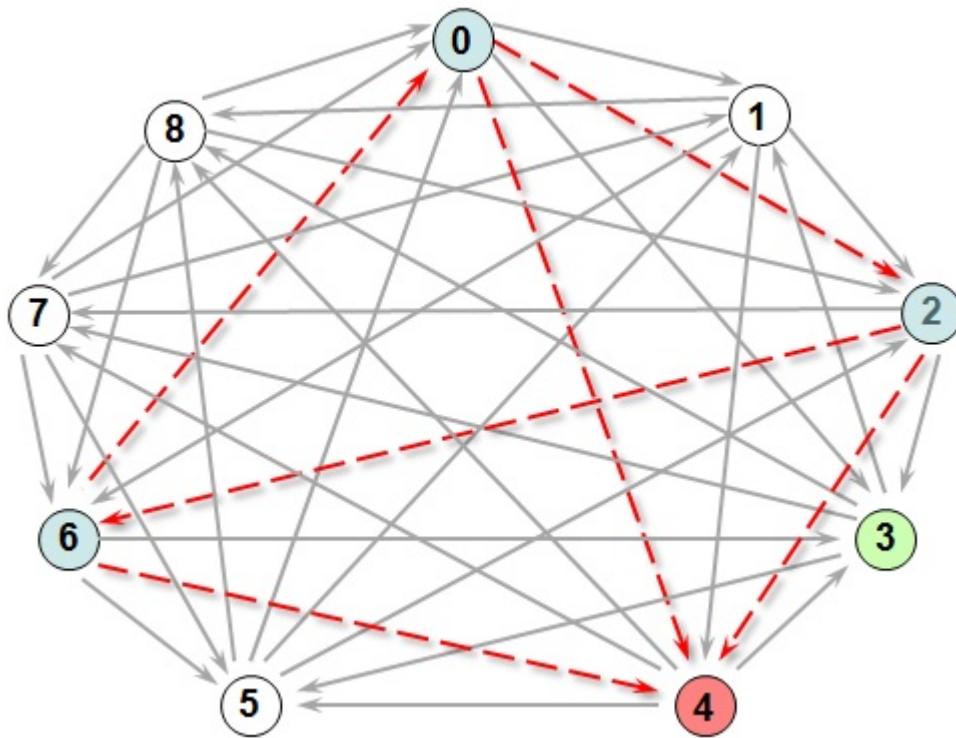
Graficando a $T_9^{10}|N^-(1)$ la podemos ver como en la siguiente figura:



Observamos que en $T_9^{10}|N^-(1)$ el vértice 7 es fuente y el vértice 0 es pozo; por lo tanto $T_9^{10}|N^-(1)$ no es 1-e.c.; esto implica que T_9^{10} no es 2-e.c.

11. Observemos al vértice 3 en el torneo T_9^{11} y veamos que $N^+(3) = \{1, 5, 7, 8\}$ y $N^-(3) = \{0, 2, 4, 6\}$.

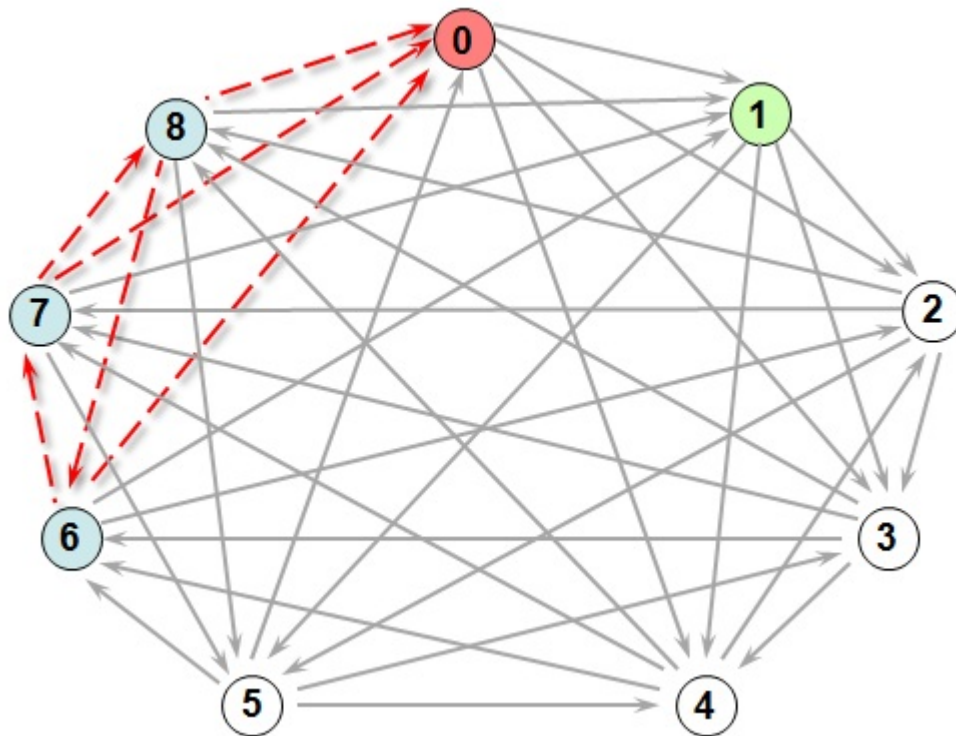
Graficando a $T_9^{11}|N^-(3)$ la podemos ver como sigue:



En esta figura podemos ver que el vértice 4 es pozo de $T_9^{11}|N^-(3)$; entonces $T_9^{11}|N^-(3)$ no es 1-e.c.; por lo tanto T_9^{11} no es 2-e.c.

12. Dado el torneo T_9^{12} ; observemos que $N^+(1) = \{2, 3, 4, 5\}$ y $N^-(1) = \{0, 6, 7, 8\}$.

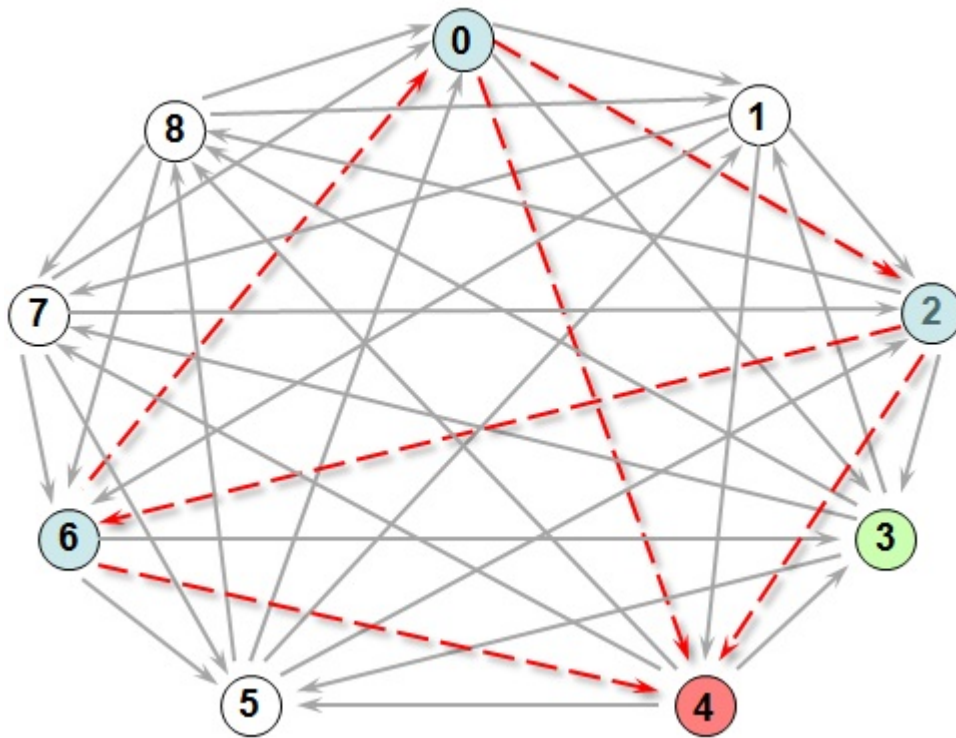
A $T_9^{12}|N^-(1)$ la podemos ver gráficamente de la siguiente manera:



Por lo que el vértice 0 en $T_9^{12}|N^-(1)$ es pozo. Entonces $T_9^{12}|N^-(1)$ no es 1-e.c. y así T_9^{12} no es 2-e.c.

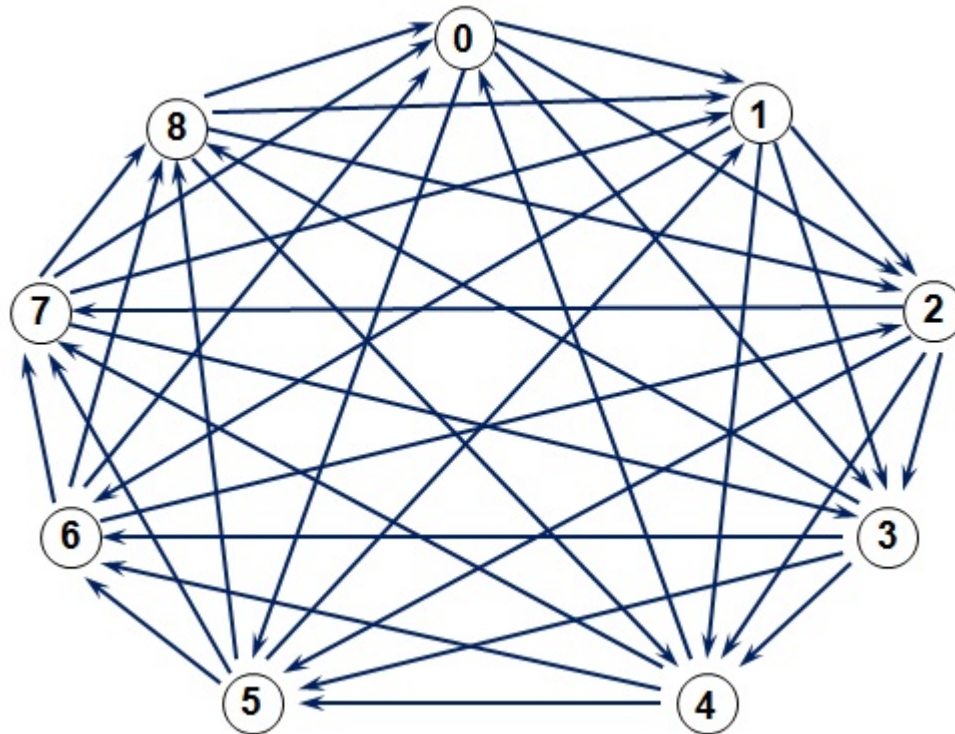
13. Finalmente en el torneo T_9^{13} podemos observar que $N^+(3) = \{1, 5, 7, 8\}$ y $N^-(3) = \{0, 2, 4, 6\}$.

Podemos ver gráficamente a $T_9^{13}|N^-(3)$ como sigue:



Aquí observamos que el vértice 4 es un pozo en $T_9^{13}|N^-(3)$, lo que implica que $T_9^{13}|N^-(3)$ no es 1-e.c. y por lo tanto T_9^{13} no es 2-e.c.

14. Sea T_9^{14} el siguiente torneo de orden nueve:



Veamos la siguiente tabla en la cual se muestran las invecindades y exvecindades de todos los vértices de T_9^{14} .

v	$N^+(v)$	$N^-(v)$
0	{1, 2, 3, 5}	{4, 6, 7, 8}
1	{2, 3, 4, 6}	{5, 7, 8, 0}
2	{3, 4, 5, 7}	{6, 8, 0, 1}
3	{4, 5, 6, 8}	{0, 1, 2, 7}
4	{5, 6, 7, 0}	{1, 2, 3, 8}
5	{6, 7, 8, 1}	{0, 2, 3, 4}
6	{7, 8, 0, 2}	{1, 3, 4, 5}
7	{8, 0, 1, 3}	{2, 4, 5, 6}
8	{0, 1, 2, 4}	{3, 5, 6, 7}

Las siguientes tablas nos muestran que efectivamente el torneo de orden nueve T_9^{14} es 2-existencialmente cerrado.

Sean u y v vértices de T_9^{14} , la primer tabla muestra las intersecciones del tipo $N^+(u) \cap N^+(v)$:

\cap	$N^+(0)$	$N^+(1)$	$N^+(2)$	$N^+(3)$	$N^+(4)$	$N^+(5)$	$N^+(6)$	$N^+(7)$	$N^+(8)$
$N^+(0)$	{1, 2, 3, 5}	{2, 3}	{3, 5}	{5}	{5}	{1}	{2}	{1, 3}	{1, 2}
$N^+(1)$	{2, 3}	{2, 3, 4, 6}	{3, 4}	{4, 6}	{6}	{6}	{2}	{3}	{2, 4}
$N^+(2)$	{3, 5}	{3, 4}	{3, 4, 5, 7}	{4, 5}	{5, 7}	{7}	{7}	{3}	{4}
$N^+(3)$	{5}	{4, 6}	{4, 5}	{4, 5, 6, 8}	{5, 6}	{6, 8}	{8}	{8}	{4}
$N^+(4)$	{5}	{6}	{5, 7}	{5, 6}	{5, 6, 7, 0}	{6, 7}	{7, 0}	{0}	{0}
$N^+(5)$	{1}	{6}	{7}	{6, 8}	{6, 7}	{6, 7, 8, 1}	{7, 8}	{8, 1}	{1}
$N^+(6)$	{2}	{2}	{7}	{8}	{7, 0}	{7, 8}	{7, 8, 0, 2}	{8, 0}	{0, 2}
$N^+(7)$	{1, 3}	{3}	{3}	{8}	{0}	{8, 1}	{8, 0}	{8, 0, 1, 3}	{0, 1}
$N^+(8)$	{1, 2}	{2, 4}	{4}	{4}	{0}	{1}	{0, 2}	{0, 1}	{0, 1, 2, 4}

Aquí podemos observar lo que sucede con $N^+(u) \cap N^-(v)$:

\cap	$N^-(0)$	$N^-(1)$	$N^-(2)$	$N^-(3)$	$N^-(4)$	$N^-(5)$	$N^-(6)$	$N^-(7)$	$N^-(8)$
$N^+(0)$	\emptyset	{5}	{1}	{1, 2}	{1, 2, 3}	{2, 3}	{1, 3, 5}	{2, 5}	{3, 5}
$N^+(1)$	{4, 6}	\emptyset	{6}	{2}	{2, 3}	{2, 3, 4}	{3, 4}	{2, 4, 6}	{3, 6}
$N^+(2)$	{4, 7}	{5, 7}	\emptyset	{7}	{3}	{3, 4}	{3, 4, 5}	{4, 5}	{3, 5, 7}
$N^+(3)$	{4, 6, 8}	{5, 8}	{6, 8}	\emptyset	{8}	{4}	{4, 5}	{4, 5, 6}	{5, 6}
$N^+(4)$	{6, 7}	{5, 7, 0}	{6, 0}	{7, 0}	\emptyset	{0}	{5}	{5, 6}	{5, 6, 7}
$N^+(5)$	{6, 7, 8}	{7, 8}	{6, 8, 1}	{7, 1}	{8, 1}	\emptyset	{1}	{6}	{6, 7}
$N^+(6)$	{7, 8}	{7, 8, 0}	{8, 0}	{7, 0, 2}	{8, 2}	{0, 2}	\emptyset	{2}	{7}
$N^+(7)$	{8}	{8, 0}	{8, 0, 1}	{0, 1}	{8, 1, 3}	{0, 3}	{1, 3}	\emptyset	{3}
$N^+(8)$	{4}	{0}	{0, 1}	{0, 1, 2}	{1, 2}	{0, 2, 4}	{1, 4}	{2, 4}	\emptyset

En la siguiente tabla tenemos las intersecciones de $N^-(u)$ y $N^+(v)$:

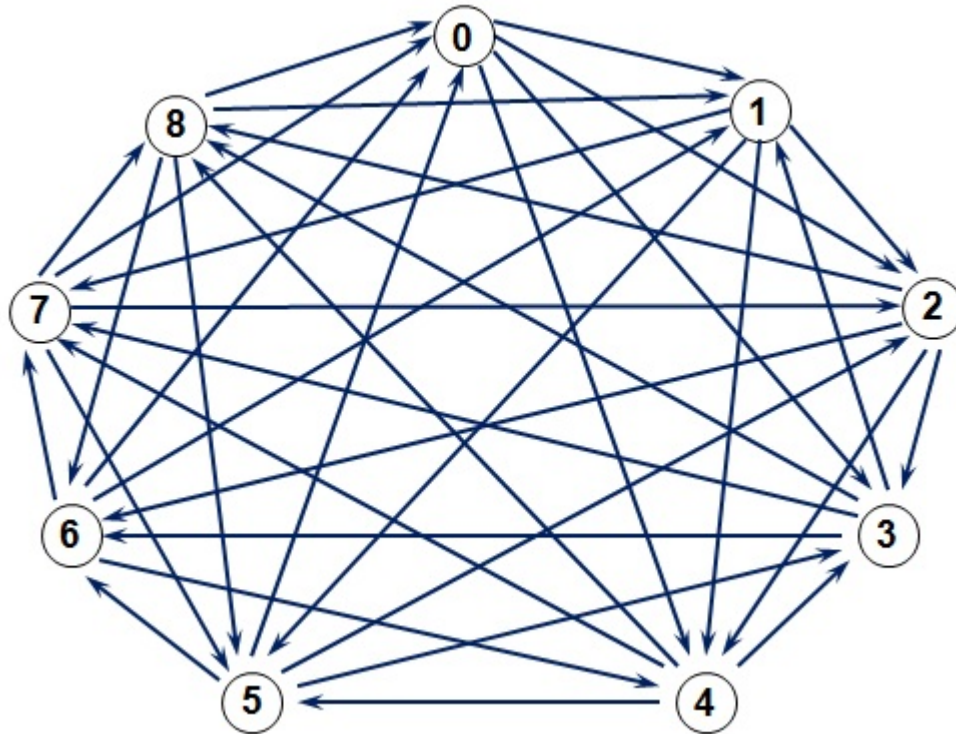
\cap	$N^+(0)$	$N^+(1)$	$N^+(2)$	$N^+(3)$	$N^+(4)$	$N^+(5)$	$N^+(6)$	$N^+(7)$	$N^+(8)$
$N^-(0)$	\emptyset	{4, 6}	{4, 7}	{4, 6, 8}	{6, 7}	{6, 7, 8}	{7, 8}	{8}	{4}
$N^-(1)$	{5}	\emptyset	{5, 7}	{5, 8}	{5, 7, 0}	{7, 8}	{7, 8, 0}	{8, 0}	{0}
$N^-(2)$	{1}	{6}	\emptyset	{6, 8}	{6, 0}	{6, 8, 1}	{8, 0}	{8, 0, 1}	{0, 1}
$N^-(3)$	{1, 2}	{2}	{7}	\emptyset	{7, 0}	{7, 1}	{7, 0, 2}	{0, 1}	{0, 1, 2}
$N^-(4)$	{1, 2, 3}	{2, 3}	{3}	{8}	\emptyset	{8, 1}	{8, 2}	{8, 1, 3}	{1, 2}
$N^-(5)$	{2, 3}	{2, 3, 4}	{3, 4}	{4}	{0}	\emptyset	{0, 2}	{0, 3}	{0, 2, 4}
$N^-(6)$	{1, 3, 5}	{3, 4}	{3, 4, 5}	{4, 5}	{5}	{1}	\emptyset	{1, 3}	{1, 4}
$N^-(7)$	{2, 5}	{2, 4, 6}	{4, 5}	{4, 5, 6}	{5, 6}	{6}	{2}	\emptyset	{2, 4}
$N^-(8)$	{3, 5}	{3, 6}	{3, 5, 7}	{5, 6}	{5, 6, 7}	{6, 7}	{7}	{3}	\emptyset

Y finalmente mostramos las intersecciones de $N^-(u)$ y $N^-(v)$:

\cap	$N^-(0)$	$N^-(1)$	$N^-(2)$	$N^-(3)$	$N^-(4)$	$N^-(5)$	$N^-(6)$	$N^-(7)$	$N^-(8)$
$N^-(0)$	{4, 6, 7, 8}	{7, 8}	{6, 8}	{7}	{8}	{4}	{4}	{4, 6}	{6, 7}
$N^-(1)$	{7, 8}	{5, 7, 8, 0}	{8, 0}	{7, 0}	{8}	{0}	{5}	{5}	{5, 7}
$N^-(2)$	{6, 8}	{8, 0}	{6, 8, 0, 1}	{0, 1}	{8, 1}	{0}	{1}	{6}	{6}
$N^-(3)$	{7}	{7, 0}	{0, 1}	{0, 1, 2, 7}	{1, 2}	{0, 2}	{1}	{2}	{7}
$N^-(4)$	{8}	{8}	{8, 1}	{1, 2}	{1, 2, 3, 8}	{2, 3}	{1, 3}	{2}	{3}
$N^-(5)$	{4}	{0}	{0}	{0, 2}	{2, 3}	{0, 2, 3, 4}	{3, 4}	{2, 4}	{3}
$N^-(6)$	{4}	{5}	{1}	{1}	{1, 3}	{3, 4}	{1, 3, 4, 5}	{4, 5}	{3, 5}
$N^-(7)$	{4, 6}	{5}	{6}	{2}	{2}	{2, 4}	{4, 5}	{2, 4, 5, 6}	{5, 6}
$N^-(8)$	{6, 7}	{5, 7}	{6}	{7}	{3}	{3}	{3, 5}	{5, 6}	{3, 5, 6, 7}

Con lo anterior vemos que para $u \neq v$ y para todas las combinaciones posibles de $\alpha, \beta \in \{+, -\}$, se tiene que $N^\alpha(u) \cap N^\beta(v) \neq \emptyset$; lo que implica que T_9^{14} es 2-existencialmente cerrado. Cabe mencionar que el torneo T_9^{14} es Circulante.

15. Sea T_9^{15} el siguiente torneo de orden nueve:



Las invecindades y exvecindades de todos los vértices de T_9^{15} se muestran a continuación.

v	$N^+(v)$	$N^-(v)$
0	{1, 2, 3, 4}	{5, 6, 7, 8}
1	{2, 4, 5, 7}	{3, 6, 8, 0}
2	{3, 4, 6, 8}	{5, 7, 0, 1}
3	{6, 7, 8, 1}	{4, 5, 0, 2}
4	{5, 7, 8, 3}	{6, 0, 1, 2}
5	{6, 0, 2, 3}	{7, 8, 1, 4}
6	{7, 0, 1, 4}	{8, 2, 3, 5}
7	{8, 0, 2, 5}	{1, 3, 4, 6}
8	{0, 1, 5, 6}	{2, 3, 4, 7}

Análogamente al torneo anterior, demostraremos con las siguientes tablas que el torneo de orden nueve T_9^{15} es 2-existencialmente cerrado. Sean u y v vértices de T_9^{15} ; observemos las intersecciones de $N^+(u) \cap N^+(v)$:

\cap	$N^+(0)$	$N^+(1)$	$N^+(2)$	$N^+(3)$	$N^+(4)$	$N^+(5)$	$N^+(6)$	$N^+(7)$	$N^+(8)$
$N^+(0)$	{1, 2, 3, 4}	{2, 4}	{3, 4}	{1}	{3}	{2, 3}	{1, 4}	{2}	{1}
$N^+(1)$	{2, 4}	{2, 4, 5, 7}	{4}	{7}	{5, 7}	{2}	{7, 4}	{2, 5}	{5}
$N^+(2)$	{3, 4}	{4}	{3, 4, 6, 8}	{6, 8}	{8, 3}	{6, 3}	{4}	{8}	{6}
$N^+(3)$	{1}	{7}	{6, 8}	{6, 7, 8, 1}	{7, 8}	{6}	{7, 1}	{8}	{1, 6}
$N^+(4)$	{3}	{5, 7}	{8, 3}	{7, 8}	{5, 7, 8, 3}	{3}	{7}	{8, 5}	{5}
$N^+(5)$	{2, 3}	{2}	{6, 3}	{6}	{3}	{6, 0, 2, 3}	{0}	{0, 2}	{0, 6}
$N^+(6)$	{1, 4}	{7, 4}	{4}	{7, 1}	{7}	{0}	{7, 0, 1, 4}	{0}	{0, 1}
$N^+(7)$	{2}	{2, 5}	{8}	{8}	{8, 5}	{0, 2}	{0}	{8, 0, 2, 5}	{0, 5}
$N^+(8)$	{1}	{5}	{6}	{1, 6}	{5}	{0, 6}	{0, 1}	{0, 5}	{0, 1, 5, 6}

Ahora veamos las intersecciones de $N^+(u) \cap N^-(v)$:

\cap	$N^-(0)$	$N^-(1)$	$N^-(2)$	$N^-(3)$	$N^-(4)$	$N^-(5)$	$N^-(6)$	$N^-(7)$	$N^-(8)$
$N^+(0)$	\emptyset	{3}	{1}	{2, 4}	{1, 2}	{1, 4}	{2, 3}	{1, 4}	{2, 3, 4}
$N^+(1)$	{5}	\emptyset	{5, 7}	{2, 4, 5}	{2}	{4, 7}	{2, 5}	{4}	{2, 4, 7}
$N^+(2)$	{6, 8}	{3, 6, 8}	\emptyset	{4}	{6}	{8, 4}	{8, 3}	{3, 4, 6}	{3, 4}
$N^+(3)$	{6, 7, 8}	{6, 8}	{7, 1}	\emptyset	{6, 1}	{7, 1, 8}	{8}	{1, 6}	{7}
$N^+(4)$	{5, 7, 8}	{8, 3}	{5, 7}	{5}	\emptyset	{7, 8}	{8, 3, 5}	{3}	{3, 7}
$N^+(5)$	{6}	{6, 3, 0}	{0}	{0, 2}	{6, 0, 2}	\emptyset	{2, 3}	{3, 6}	{2, 3}
$N^+(6)$	{7}	{0}	{7, 0, 1}	{0, 4}	{0, 1}	{7, 1, 4}	\emptyset	{1, 4}	{4, 7}
$N^+(7)$	{7, 5}	{8, 0}	{0, 5}	{3, 2, 5}	{0, 2}	{8}	{8, 2, 5}	\emptyset	{2}
$N^+(8)$	{5, 6}	{6}	{0, 1, 5}	{0, 5}	{0, 1, 6}	{1}	{5}	{1, 6}	\emptyset

En la siguiente tabla mostramos las intersecciones de $N^-(u)$ y $N^+(v)$:

\cap	$N^+(0)$	$N^+(1)$	$N^+(2)$	$N^+(3)$	$N^+(4)$	$N^+(5)$	$N^+(6)$	$N^+(7)$	$N^+(8)$
$N^-(0)$	\emptyset	{5}	{6, 8}	{6, 7, 8}	{5, 7, 8}	{6}	{7}	{8, 5}	{5, 6}
$N^-(1)$	{3}	\emptyset	{3, 6, 8}	{6, 8}	{8, 3}	{6, 3, 0}	{0}	{8, 0}	{6}
$N^-(2)$	{1}	{5, 7}	\emptyset	{7, 1}	{5, 7}	{0}	{7, 0, 1}	{0, 5}	{0, 1, 5}
$N^-(3)$	{2, 4}	{2, 4, 5}	{4}	\emptyset	{5}	{0, 2}	{0, 4}	{0, 2, 5}	{0, 5}
$N^-(4)$	{1, 2}	{2}	{6}	{6, 1}	\emptyset	{6, 0, 2}	{0, 1}	{0, 2}	{0, 1, 6}
$N^-(5)$	{1, 4}	{4, 7}	{8, 4}	{7, 1, 8}	{7, 8}	\emptyset	{7, 1, 4}	{8}	{1}
$N^-(6)$	{2, 3}	{2, 5}	{8, 3}	{8}	{8, 3, 5}	{2, 3}	\emptyset	{8, 2, 5}	{5}
$N^-(7)$	{1, 4}	{4}	{3, 4, 6}	{1, 6}	{3}	{3, 6}	{1, 4}	\emptyset	{1, 6}
$N^-(8)$	{2, 3, 4}	{2, 4, 7}	{3, 4}	{7}	{3, 7}	{2, 3}	{4, 7}	{2}	\emptyset

Y finalmente $N^-(u) \cap N^-(v)$:

\cap	$N^-(0)$	$N^-(1)$	$N^-(2)$	$N^-(3)$	$N^-(4)$	$N^-(5)$	$N^-(6)$	$N^-(7)$	$N^-(8)$
$N^-(0)$	{5, 6, 7, 8}	{6, 8}	{5, 7}	{5}	{6}	{7, 8}	{8, 5}	{6}	{7}
$N^-(1)$	{6, 8}	{3, 6, 8, 0}	{0}	{0}	{6, 0}	{8}	{8, 3}	{3, 6}	{3}
$N^-(2)$	{5, 7}	{0}	{5, 7, 0, 1}	{5, 0}	{0, 1}	{7, 1}	{5}	{1}	{7}
$N^-(3)$	{5}	{0}	{5, 0}	{4, 5, 0, 2}	{0, 2}	{4}	{5, 2}	{4}	{4, 2}
$N^-(4)$	{6}	{6, 0}	{0, 1}	{0, 2}	{6, 0, 1, 2}	{1}	{2}	{1}	{2}
$N^-(5)$	{7, 8}	{8}	{7, 1}	{4}	{1}	{7, 8, 1, 4}	{8}	{1, 4}	{7, 4}
$N^-(6)$	{8, 5}	{8, 3}	{5}	{5, 2}	{2}	{8}	{8, 2, 3, 5}	{3}	{2, 3}
$N^-(7)$	{6}	{3, 6}	{1}	{4}	{1}	{1, 4}	{3}	{1, 3, 4, 6}	{3, 4}
$N^-(8)$	{7}	{3}	{7}	{4, 2}	{2}	{7, 4}	{2, 3}	{3, 4}	{2, 3, 4, 7}

Por lo tanto si $u \neq v$ se tiene que $N^\alpha(u) \cap N^\beta(v) \neq \emptyset$ para todas las combinaciones posibles de $\alpha, \beta \in \{+, -\}$; es decir T_9^{15} es 2-existencialmente cerrado.

Como vimos en las tablas de los puntos 14 y 15, para cualquier combinación de $\alpha, \beta \in \{+, -\}$ no existen intersecciones $N^\alpha(u) \cap N^\beta(v) = \emptyset$; por lo que queda demostrado el siguiente Teorema:

Teorema 3.1 *Los torneos T_9^{14} y T_9^{15} son salvo isomorfismo los únicos torneos regulares de orden nueve 2-existencialmente cerrados.*

El trabajo más reciente que conocemos sobre torneos n -existencialmente cerrados con n mayor o igual que tres es de [B-G-P] en donde se demuestra computacionalmente que existe un único torneo de orden diecinueve que es 3-existencialmente cerrado y que no hay de orden 20, 21 y 22. También demuestran que no hay torneos 4-existencialmente cerrados de orden 47 y 48.

Por otro lado, Llano y Zuazua [LL-Z] estudian las condiciones para que una familia especial de torneos; a decir la familia de torneos circulantes, sea 2-existencialmente cerrado.

Bibliografía

- [BJ-G] Bang-Jensen, J., Gutin, G., *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Londres, Springer, (2008).
- [B-C] Bonato Anthony, Cameron Kathie, *On an adjacency property of almost all tournaments*, Contributions to Discrete Mathematics, Vol 306, pages 2327-2335, Canada, (2006).
- [B-G-P] Bonato Anthony, Gordinowicz Przemyslaw, Pralat Pawel, *Bounds and constructions for n -e.c. tournaments*, Contributions to Discrete Mathematics, Vol 5, No 2, pages 52-56, (2010).
- [B-M] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., *Graph Theory*, USA, Springer, (2008).
- [C] Cosme José Luis, *Solución a un problema de Víctor Neumann-Lara sobre la inconexión acíclica de torneos*, Departamento de Matemáticas, UAM Iztapalapa, (2008).
- [LL-Z] Llano Bernardo, Zuazua Rita, *2- and 3- existentially closed circulant tournaments*. (En preparación).
- [Mc] Brendan McKay, *Regular and Semi-regular Tournaments*, <http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/digraphs.html>, Australian National University.