Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

HOMOTOPÍA, HOMOLOGÍA Y BORDISMO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
VICTOR AUGUSTO SAMAYOA DONADO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO*

2013

*CON EL APOYO DEL PROYECTO PAPIIT IN101909.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Samayoa
Donado
Victor Augusto
16 75 53 85
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
301116925

2. Datos del tutor
Dr.
Carlos
Prieto
de Castro

3. Datos del sinodal 1
Dra.
María del Carmen
Gómez
Laveaga

4. Datos del sinodal 2
M. en C.
Jessica Angélica
Jaurez
Rosas

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Juan Carlos
Fernández
Morelos

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Alberto León
Kushner
Schnur

7. Datos del trabajo escrito
Homotoía, Homología y Bordismo
204
2013

Para Isabel y Angélica
con amor.

Agradecimientos

No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje; y no la posesión, sino el acto de llegar all; que concede el mayor disfrute.

Carl Friedrich Gauss

Agradezco al Dr. Carlos Prieto de Castro por el tiempo y paciencia que me tuvo durante el desarrollo de la presente tesis.

A mi familia, Angélica e Isabel, que me impulsaron a concluir está etapa de mi vida y por el tiempo que no les pude dedicar durante la realización de este trabajo.

A mis padres, que me inculcaron a tratar de entender el porque de las cosas y a no darme por vencido.

A la familia Rivera Torres, por el apoyo incondicional que me han brindado durante todos estos años y que espero poder retribuir algún día.

A mis sinodales, por las observaciones y comentarios que me hicieron para poder mejorar la tesis. En especial al M. en C. Juan Carlos Fernández Morelos, que a pesar de todos los problemas parciales que tiene en este momento y las dificultades que se le han presentado, siempre tuvo el tiempo y la disposición para hacer los comentarios pertinentes sobre esta tesis.

Y a todas las personas que me han brindado su amistad y me han enseñado algo nuevo.

Prefacio

Responder la pregunta de cuando un espacio topológico se puede deformar mediante una aplicación continua en otro ha sido es el estudio de la Topología. Y es a partir de este problema que surge la Topología Algebraica y las teorías de homología y homotopía son una parte fundamental de ésta. Dichas teorías transforman un problema topologíco en uno algebraico.

La idea de estas teorías es que a cada espacio X se le asignan grupos $H_n(X)[\pi_n(X)]$ de tal modo que si un espacio topologico Y es homeomorfo a X, entonces los grupos $H_n(Y)[\pi_n(Y)]$ son isomorfos a $H_n(X)[\pi_n(X)]$, respectivamente. Y viceversa, si los grupos no son isomorfos, entonces los espacios no son homeomorfos. Resolviendo así el problema.

A los H_n y π_n se les llama invariantes topológicos los cuales establecen una relación entre la clase de los espacios topológicos y la clase de los grupos, a dicha relación se le llama funtor. El objetivo de esta tesis es, a partir de las ideas topológicas, generalizar en lo posible dichos conceptos a otros campos de las matemáticas a través de la Teoría de Categorías.

Espero que este trabajo, en algún momento dado, sea de utilidad para alguien más y que encuentre interesante los escrito en estas páginas y le enseñe algo nuevo. Ya que yo disfrute mucho realizando este trabajo y aprendí mucho más de lo que esperaba.

México D.F.
Invierno 2013

Samayoa Donado
Victor Augusto

Índice general

Introducción

La presente tesis considera que el lector esta familiarizado con las nociones de: teoría de conjuntos, teoría de grupos y variedades diferenciales. De todas formas, si el lector no esta familiarizado con dichos temas, en la bibliografía hay libros que pueden ayudarle.

En el capítulo 1 se introducen los conceptos de categoría, funtores y transformaciones naturales, los cuales serán utilizados durante el resto de los capítulos. Se introducen también conceptos como son lo de cuadrados cartesianos y cocartesianos, categorías cocientes y funtores adjuntos, así como algunos ejemplos para observar que muchas de estas definiciones vienen de una forma "natural" de otros conceptos ya conocidos de las matemáticas. También se introduce un la idea de funtores adjuntos, cuyo concepto nació del Álgebra Homológica y ahora se ha vuelto un concepto muy importante en la Topología Algebraica. Para este capítulo se uso principalmente el libro de Mac Lane [15] el cual profundiza más en los conceptos aquí presentados.

En el capítulo 2 se continua trabajando con categorías pero se introduce el concepto de representabilidad, dicho concepto ayudara a saber si cierta categoría tiene más estructuras como son el producto (el cual viene siendo el producto cartesiano en conjuntos o el producto topológico en los espacios topológicos), coproducto (sería la suma directa en los grupos o la suma topológica en los espacios topológicos), entre otros. Y al final de dicho capítulo se hablara de los grupos en una categoría, lo que sería la abstracción del espacio de lazos o la suspención de un espacio topológico, y como dicha estructura se hereda de un objeto de una categoría en un conjunto. En este capítulo el libro de Mac Lane [15] sigue siendo una buena fuente de información, además el libro de Dold [5] viene a complementar muy bien varios de los conceptos.

En el capítulo 3 se introducen una estructura de cilindro y otra de cocilindro, y como a partir de estas estructuras se generaliza el concepto de homotopía en una categoría, así como los conceptos de fibraciones y cofibraciones para cada una de las estructuras anteriores. En la ultima sección de este capítulo, se demuestra que cuando el cilindro y cocilindro son adjuntos, entonces los conceptos de homotopía, fibración y cofibración coinciden y esto facilita en gran medida la resolución de varios problemas. La bibliografía principal para este capítulo viene siendo el libro de Kamps y Porter [13], en el cual el lector interesado puede referirse para profundizar más en estos temas.

En el capítulo 4 se estudian los complejos de cadena, ya que son una parte importante en lo que respecta a la teoría de homología. Se introduce el n-ésimo grupo de homología, que resulta ser un funtor, y el morfiso de conexión, lo cual ayuda a definir tanto teoría ordinaria como no ordinaria de homología. Se construye un ejemplo de una teoría ordinaria de homología, la cual se base en los complejos simpliciales, y es la que normalmente se ve en un curso de licenciatura de topología algebraica en la Facultad de Ciencias.Para este capítulo se uso un mosaico de todos los libros de topología algebraica citados al final de la tesis, aunque en esencia dicen lo mismo, cada uno aborda cada tema de formas distintas. En particular recomiendo el Hatcher [10] y el Greenberg [8] para el que quiere profundizar más en estos temas.

El capítulo 5 y último es dedicado a desarrolla con el mayor detalle posible un ejemplo de una teoría no ordinaria de homología, el cual no es tán conocido por los estudiantes de licenciatura. Dicha teoría se construye a partir funciones de variedades diferenciales hacia un espacio topológico y a estos morfismos se les aplica la relación de bordismo. En la primera sección se hace para variedades sin frontera, con el objetivo de empezar a trabajar la intuición y acostumbrarse a dichos conceptos. En la segunda sección se hace para variedades con frontera y se generaliza lo trabajado en la sección anterior y se termina de construir dicho ejemplo.

Capítulo 1

Transformaciones naturales

En este capítulo se hará una revisión sobre los conceptos básicos sobre teoría de categorías que se utilizarán durante la presente tesis, con el propósito de fijar notación y además para poder usarlo como referencia para los próximos capítulos.

La teoría de categorías se basa en la observación de que muchas de las propiedades matemáticas puede ser unificadas y simplificadas por una representación de diagramas conmutativos. En la teoría de conjuntos los objetos, *i.e.*, los conjuntos se representan por letras X, Y y una función f se representa usualmente por $f : X \longrightarrow Y$ junto con una regla de asignación $x \longmapsto f(x)$. Un diagrama común es:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

y es conmutativo cuando $h = g \circ f$ donde $\circ$ denota la composición usual en conjuntos. El mismo diagrama puede usarse en otros contextos matemáticos, por ejemplo, en la "categoría" de espacios topologicos las letras X, Y, Z representan espacios topológicos mientras que las letras f, g, h representan funciones continuas. Por otro lado, en la “categoría” de grupos las letras X, Y, Z representan grupos y las letras f, g, h representan homomorfismos.

1.1. Categorías

Definición 1.1.1. Decimos que $\mathscr{C}$ es una ***categoría*** si tiene lo siguiente:

1) Una ***clase de objetos*** de $\mathscr{C}$ llamado $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

2) Para todo X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ un ***conjunto de morfismos*** de X en Y llamado $\mathscr{C}(X, Y)$ y sus elementos $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ los denotamos como $f : X \longrightarrow Y$.

3) Para todo X, Y, Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y para todo $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ y $g \in \mathscr{C}(Y, Z)$ una ***ley de composición*** tal que:

   a) Existe $h \in \mathscr{C}(X, Z)$ tal que:

$$\begin{aligned} \circ : \mathscr{C}(X,Y) \times \mathscr{C}(Y,Z) &\longrightarrow \mathscr{C}(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f = h \end{aligned} \tag{1.1}$$

   b) Sean $k : W \longrightarrow X$, $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ entonces la composición es asociativa, esto es,

$$(g \circ f) \circ k = g \circ (f \circ k) \tag{1.2}$$

   c) Existen el morfismo identidad, *i.e.*, para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ existe $1_X \in \mathscr{C}(X, X)$ tal que, para cualesquiera $f : W \longrightarrow X$ y $g : X \longrightarrow Y$, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "1_X"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Notación. Al conjunto de morfismos entre X y Y se le puede encontrar en otros textos como:

$$\mathscr{C}(X,Y), \qquad Hom(X,Y), \qquad \text{ó} \qquad Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)$$

que son las notaciones más comunes, pero en el presente texto usaremos siempre $\mathscr{C}(X,Y)$.

Notación. Cada vez que hablemos de un morfismo de X a Y, usaremos cualquiera de las siguientes notaciones según se requiera:

$$f \in \mathscr{C}(X,Y) \qquad\qquad f : X \longrightarrow Y \qquad\qquad X \xrightarrow{f} Y$$

Las dos últimas las usaremos siempre que no exista confusión en qué categoría se está trabajando.

Nota. Solo se pide que $\mathscr{C}(X,Y)$ sea un conjunto, por lo que es posible que el conjunto $\mathscr{C}(X,Y) = \emptyset$, para algunas X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Nota. La motivación es que $\mathscr{C}(X,Y)$ se asemeje a las funciones de X a Y, es por eso que usamos la notación de $f : X \longrightarrow Y$ cada vez que tengamos $f \in \mathscr{C}(X,Y)$. Sin embargo esto es solamente una motivación y los elementos en $\mathscr{C}(X,Y)$ no necesariamente son funciones por el hecho de que tanto X como Y pueden no ser conjuntos.

Definición 1.1.2. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, decimos que ésta es ***pequeña*** si la clase de objetos, $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, es un conjunto.

Definición 1.1.3. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ es ***concreta*** si sus objetos son conjuntos y los morfismos respetan la estructura.

Ejemplo 1.1.4.
Ahora veremos algunos ejemplos de categorías:

1) La categoría $\mathscr{Set}$ definida de la siguiente forma:
   a) Los $\mathscr{obj}\mathscr{Set}$ son los conjuntos.
   b) Dados X y Y en $\mathscr{obj}\mathscr{Set}$ el conjunto $\mathscr{Set}(X,Y)$ es simplemente el conjunto de las funciones entre X y Y.

c) La ley de composición es la composición usual de funciones de conjuntos.

2) La categoría $\mathscr{Set}_*$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\mathscr{Set}_*$ son los conjuntos cada uno con un punto distinguido llamado punto base, es decir, un elemento de $\mathscr{obj}\mathscr{Set}_*$ lo vemos como un par $(X, *_X)$ donde $*_X$ es punto base de X.
   b) Dados $(X, *_X)$ y $(Y, *_Y)$ en $\mathscr{obj}\mathscr{Set}_*$ el conjunto $\mathscr{Set}_*(X, Y)$ es el conjunto de las funciones entre X y Y que mandan el punto base $*_X$ en el puntos base $*_Y$, esto es, $f(*_X) = *_Y \quad \forall f \in \mathscr{Set}_*$.
   c) La ley de composición es la composición usual de funciones de conjuntos.

3) La categoría $\mathscr{Top}$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\mathscr{Top}$ son los espacios topológicos.
   b) Dados X, Y en $\mathscr{obj}\mathscr{Top}$, el conjunto $\mathscr{Top}(X, Y)$ es simplemente el conjunto de las funciones continuas entre los espacios topológicos X y Y.
   c) La ley de composición es la composición usual de funciones de conjuntos.

4) La categoría $\mathscr{Top}_*$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\mathscr{Top}_*$ son los espacios topológicos cada uno con un punto distinguido llamado punto base, en otras palabras, un elemento de $\mathscr{obj}\mathscr{Top}_*$ lo vemos como un par $(X, *_X)$, donde $*_X$ es punto base de X.
   b) Dados $(X, *_X)$ y $(Y, *_Y)$ en $\mathscr{obj}\mathscr{Top}_*$, el conjunto $\mathscr{Top}_*(X, Y)$ es el conjunto de las funciones continuas entre X y Y que mandan el punto base $*_X$ en el punto base $*_Y$.
   c) La ley de composición es la composición usual de funciones de conjuntos.

5) La categoría $\mathscr{Toph}$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\,\mathscr{Toph}$ son los espacios topológicos

   b) Dados X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Toph}$, el conjunto $\mathscr{Toph}\,(X, Y)$ es el conjunto de las clases de homotopia entre X y Y.

   c) La ley de composición es la heredada por la composición en espacios topológicos, esto es, dados $[f], [g] \in \mathscr{Toph}\,(X, Y)$ entonces $[f] \circ_{\mathscr{Toph}} [g] = [f \circ_{\mathscr{Top}} g]$.

6) La categoría $\mathscr{Grp}$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\,\mathscr{Grp}$ son los grupos.

   b) Dados X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Grp}$ m el conjunto $\mathscr{Grp}\,(X, Y)$ es el conjunto de los homomorfismos de grupos entre X y Y.

   c) La ley de composición es la composición usual de funciones.

7) La categoría $\mathscr{Ab}$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\,\mathscr{Ab}$ son los grupos abelianos.

   b) Dados X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Ab}$, el conjunto $\mathscr{Ab}\,(X, Y)$ es el conjunto de los homomorfismos de grupos abelianos entre X y Y.

   c) La ley de composición es la composición usual de funciones.

8) La categoría $\mathscr{Rng}$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\,\mathscr{Rng}$ son los anillos con unitario.

   b) Dados X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Rng}$, el conjunto $\mathscr{Rng}\,(X, Y)$ es el conjunto de los morfismos de anillos que conservan la unidad entre X y Y.

   c) La ley de composición es la composición usual de funciones.

9) La categoría $\mathscr{CRng}$ definida de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\,\mathscr{CRng}$ son los anillos conmutativos con unitario.

   b) Dados X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{CRng}$, el conjunto $\mathscr{CRng}\,(X,Y)$ es el conjunto de los morfismos de anillos conmutativos que conservan la unidad entre X y Y.

   c) La ley de composición es la composición usual de morfismos de anillos conmutativos.

10) Dado un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$, se define categoría $\mathscr{Poset}_X$ de la siguiente forma:

   a) Los $\mathscr{obj}\,\mathscr{Poset}_X$ son los elementos de X.

   b) Dados x y x' en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Poset}_X$, el conjunto $\mathscr{Poset}_X(x,x')$ consiste del par ordenado (x,x') o del conjunto vacío, según sea el caso. Esto es,

$$\mathscr{Poset}_X(x,x') = \begin{cases} \{(x,x')\} & \text{si } x \leqslant x', \\ \emptyset & \text{si } x \nleqslant x'. \end{cases}$$

   c) La ley de composición es la única posible. Dados x, y y z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Poset}_X$ tales que $\mathscr{Poset}_X(x,y) = \{(x,y)\}$ y $\mathscr{Poset}_X(y,z) = \{(y,z)\}$, entonces $\mathscr{Poset}_X(x,z) = \{(x,z)\}$.

Definición 1.1.5. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías, decimos que $\mathscr{C}$ es una ***subcategoría*** de $\mathscr{D}$ si:

1) $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ es subclase de $\mathscr{obj}\,\mathscr{D}$.

2) Para todo X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ se tiene que $\mathscr{C}\,(X,Y) \subseteq \mathscr{D}\,(X,Y)$.

3) Para todo X, Y y Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y para todo $f \in \mathscr{C}\,(X,Y)$ y $g \in \mathscr{C}\,(Y,Z)$ se cumple $g \circ_{\mathscr{C}} f = g \circ_{\mathscr{D}} f$, *i.e.*, la composición en $\mathscr{C}$ debe corresponder con la composición en $\mathscr{D}$.

4) Para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, $1_X \in \mathscr{C}(X,X)$ debe ser el mismo que $1_X \in \mathscr{D}(X,X)$.

Definición 1.1.6. Sea $\mathscr{C}$ subcategoría de $\mathscr{D}$ decimos que $\mathscr{C}$ es ***plena*** si $\mathscr{C}(X,Y) = \mathscr{D}(X,Y)$ para todo X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Ejemplo 1.1.7.
Se enlistan algunos ejemplo de subcategorías indicando si son plenas o no:

1) $\mathscr{Top}$ es subcategoría de $\mathscr{Set}$, pero no es plena.

2) $\mathscr{Grp}$ es subcategoría de $\mathscr{Set}$, pero no es plena.

3) $\mathscr{Ab}$ es subcategoría de $\mathscr{Grp}$ y es plena.

4) $\mathscr{CRng}$ es subcategoría de $\mathscr{Rng}$ y es plena.

Definición 1.1.8. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea $f : X \longrightarrow Y$ decimos que f es:

1) ***monomorfismo*** si para toda W en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y para todos $g, h : W \longrightarrow X$, se tiene que $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$.

2) ***epimorfismo*** si para toda Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y para todos $g, h : Y \longrightarrow Z$, se tiene que $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$.

3) ***isomorfismo*** si existe $g \in \mathscr{C}(Y, X)$ tal que $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$.

4) ***endomorfismo*** si $X = Y$.

5) ***automorfismo*** si f es un endomorfismo e isomorfismo.

Teorema 1.1.9. *Considere una categoría $\mathscr{C}$, objetos W, X, Y, Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y un morfismo $f : X \longrightarrow Y$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1) Para toda $g : Y \longrightarrow Z$ si $g \circ f$ es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.

2) Para toda $h : W \longrightarrow X$ si $f \circ h$ es un epimorfismo, entonces f es un epimorfismo.

3) Si f es un isomorfismo, entonces f es monomorfismo y epimorfismo.

Demostración.
Se tiene que:

1) Sean $h_1, h_2 : W \longrightarrow X$ tales que $f \circ h_1 = f \circ h_2$ entonces $g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2)$ pero $g \circ f$ es un monomorfismo por lo cual $h_1 = h_2$

2) Sean $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ de esto se sigue $(g_1 \circ f) \circ h = (g_2 \circ f) \circ h$ pero $f \circ h$ es un epimorfismo de aquí que $g_1 = g_2$

3) Sea $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$ por consiguiente:

   a) Sean $h_1, h_2 : W \longrightarrow X$ tales que $f \circ h_1 = f \circ h_2$ por ende $g \circ (f \circ h_1) = g \circ (f \circ h_2)$ pero $g \circ f = 1_X$ de esto se sigue que $h_1 = h_2$.

   b) Sean $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ tales que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ en consecuencia $(g_1 \circ f) \circ g = (g_2 \circ f) \circ g$ pero $f \circ g = 1_Y$ entonces se tiene que $g_1 = g_2$.

□

Existen morfismos que son monomorfismos y epimorfismos pero NO son isomorfismos. Como se ve en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.1.10. Consideremos $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ el morfismo inclusión en $\mathscr{Rng}$ se ve que i es monomorfismo y epimorfismo de la siguiente forma.

Sean $g_1, g_2 \in \mathscr{Rng}(X, \mathbb{Z})$ tales que $i \circ g_1 = i \circ g_2$, por lo cual $\forall x \in X$ se tiene que $i(g_1(x)) = i(g_2(x))$, pero i es inyectiva por lo que $g_1(x) = g_2(x) \quad \forall x \in X$, de esto se sigue que i es un monomorfismo.

Ahora, sean $h_1, h_2 \in \mathscr{Rng}\,(\mathbb{Q}, Y)$ tales que $h_1 \circ i = h_2 \circ i$, de esto se sigue que $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ se tiene:

$$\begin{aligned} h_1(\frac{p}{q}) &= h_1(p)h_1(q)^{-1} = h_1(i(p))h_1(i(q))^{-1} = h_2(i(p))h_2(i(q))^{-1} \\ &= h_2(p)h_2(q)^{-1} = h_2(\frac{p}{q}) \end{aligned}$$

por ende i es un epimorfismo.

Ahora, supongamos que i es un isomorfismo, entonces existe $f \in \mathscr{Rng}\,(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ tal que $i \circ f = 1_{\mathbb{Q}}$ y $f \circ i = 1_{\mathbb{Z}}$. Consideramos $f(\frac{1}{2}) = m \in \mathbb{Z}$, de aqui que $\frac{1}{2} = i(f(\frac{1}{2})) = f(\frac{1}{2}) = m$, lo cual es una contradicción

Definición 1.1.11. Sea $\mathscr{C}$ una categoría:

1) Sea I en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, decimos que ***I*** es un ***objeto inicial*** si para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ existe un único $f : I \longrightarrow X$.

2) Sea T en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, decimos que ***T*** es un ***objeto terminal*** si para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ existe un único $g : X \longrightarrow T$.

3) Decimos que un objeto es ***cero*** si es un objeto inicial y terminal.

Definición 1.1.12. En una categoría $\mathscr{C}$, dados X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y dos morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$, decimos que $\mathscr{C}$ tiene ***igualador de f y g*** si existen W en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y un morfismo $e : W \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, *i.e.*, $f \circ e = g \circ e$.

Ademas el igualador tiene la siguiente:

Propiedad Universal (Igualador).

Para cualquier $h : V \longrightarrow X$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existe una única $h' : V \longrightarrow W$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ V \arrow[u, dashed, "\exists ! h'"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

conmuta.

Definición 1.1.13. En una categoría $\mathscr{C}$, dados X y Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y dos morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$ decimos que $\mathscr{C}$ tiene ***coigualador de*** f ***y*** g si existen Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y $u : Y \longrightarrow Z$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "u"] & Z \end{tikzcd}$$

conmuta, *i.e.*, $u \circ f = u \circ g$.

Ademas el coigualador tiene la siguiente:

Propiedad Universal (Coigualador).

Para cualquier $h : Y \longrightarrow Z'$ tal que $h \circ f = h \circ g$, existe una única $h' : Z \longrightarrow Z'$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & Z \arrow[d, dashed, "\exists ! h'"] \\ & & Z' \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

conmuta.

1.2. Funtores

Definición 1.2.1. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías decimos que $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un ***funtor covariante*** si satisface lo siguiente:

1) Si X está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces FX esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{D}$.

2) Si $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$ entonces $Ff : FX \longrightarrow FY$ en $\mathscr{D}$.

3) $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ en $\mathscr{C}$ entonces $F(g \circ_{\mathscr{C}} f) = Fg \circ_{\mathscr{D}} Ff$.

4) $F1_X = 1_{FX}$.

Definición 1.2.2. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías decimos que $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es un ***funtor contravariante***[1] si satisface lo siguiente:

1) Si X está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces FX esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{D}$.

2) Si $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$ entonces $Ff : FY \longrightarrow FX$ en $\mathscr{D}$.

3) $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ en $\mathscr{C}$ entonces $F(g \circ_{\mathscr{C}} f) = Ff \circ_{\mathscr{D}} Fg$.

4) $F1_X = 1_{FX}$.

Ejemplo 1.2.3.

Se enlistan a continuación algunos ejemplos de funtores:

1) Sea $U : \mathscr{Grp} \longrightarrow \mathscr{Set}$ el *funtor que olvida* es un funtor covariante definido como sigue:

   a) Si X está en $\mathscr{Grp}$ entonces $UX = X$,es decir, le quita al grupo X su estructura y solo deja el conjunto X.

   b) Si $f : X \longrightarrow Y$ entonces $Uf = f$, esto es, simplemente nos quedamos con la función entre los conjuntos X y Y.

2) Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ fijo. Definimos un funtor covariante $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ como sigue:

   a) Si Y está en $\mathscr{C}$ entonces $FY = \mathscr{C}(X, Y)$.

[1] Algunos autores le llama cofuntor

b) Si $g : Y \longrightarrow Z$ entonces:

$$\begin{aligned} Fg : \mathscr{C}(X,Y) &\longrightarrow \mathscr{C}(X,Z) \\ f &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

3) Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ fijo. Definimos un funtor cotravariante $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ como sigue:

   a) Si X esta en $\mathscr{C}$ entonces $GX = \mathscr{C}(X,Y)$.
   b) Si $h : W \longrightarrow X$ entonces:

$$\begin{aligned} Gh : \mathscr{C}(X,Y) &\longrightarrow \mathscr{C}(W,Y) \\ f &\longmapsto f \circ h \end{aligned}$$

4) Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Definimos al funtor identidad $1 : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ como sigue:

   a) Si X esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces $1X = X$.
   b) Si $f : X \longrightarrow Y$ entonces $1f = f$.

Definición 1.2.4. Dados dos funtores $T : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}$ y $S : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, definimos la ***composición de funtores*** $S \circ T$ como sigue:

1) Si X está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{B}$ entonces $(S \circ T)X = S(TX)$.

2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ entonces $(S \circ T)f = S(Tf)$.

Notación. A la composición entre funtores usualmente la denotaremos como $S \circ T = ST$.

De esta forma podemos ver que la composición de funtores es asociativa y además para toda categoría tenemos que existe el funtor identidad[2], el cual se comporta como la identidad en esta composición.

Por como se definió un funtor cuando se verifica la igualdad de funtores hay que observar lo siguiente:

1) Que ambos funtores sean covariantes (contravariantes).

2) Que ambos funtores manden objetos iguales en objetos iguales.

3) Que ambos funtores manden morfismos iguales en morfismos iguales.

por lo que muchas veces es más práctico resumir todo eso en un diagrama, por lo que se dirá que un diagrama de funtores es conmutativo si cumple los incisos anteriores, esto es, dadas categorías $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ y $\mathscr{E}$ y funtores $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{E}$, $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $H : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathscr{E} \\
\mathscr{D} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

si los dos diagramas siguientes conmutan.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F(X) = HG(X) \\
G(X), \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \xrightarrow{f} Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F(X) \xrightarrow{F(f)=HG(f)} F(Y) \\
G(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y). \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

[2] Ejemplo 4.

1.3. Transformaciónes naturales

Definición 1.3.1. Dados dos funtores covariantes $S, T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, definimos una ***transformación natural*** $\tau : S \longrightarrow T$ como sigue:

1) Para cada X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ existe un morfismo $\tau_X : SX \longrightarrow TX$.

2) Para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y para toda $\varphi : X \longrightarrow Y$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & SX \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "S\varphi"'] & TX \arrow[d, "T\varphi"] \\ Y & SY \arrow[r, "\tau_Y"'] & TY. \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Definición 1.3.2. Dados dos funtores contravariantes $S, T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, definimos una ***transformación natural*** $\sigma : S \longrightarrow T$ como sigue:

1) Para cada X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ existe un morfismo $\sigma_X : SX \longrightarrow TX$.

2) Para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y para toda $\psi : X \longrightarrow Y$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\psi"'] & SX \arrow[r, "\sigma_X"] & TX \\ Y & SY \arrow[r, "\sigma_Y"'] \arrow[u, "S\psi"] & TY. \arrow[u, "T\psi"'] \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

Nota. A $\tau_X, \tau_Y, \sigma_X, \sigma_Y$ se le llaman las *componentes* de la transformación natural τ ó σ segun el caso y esto es para toda X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Definición 1.3.3. Dada una transformacion natural τ, decimos que ésta es un ***isomorfismo natural*** si cada una de sus componentes τ_X es un isomorfismo.

Dadas dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, podemos considerar tres funtores entre ellas $R, S, T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. Ahora, consideremos dos transformaciones naturales, $\sigma : R \longrightarrow S$ y $\tau : S \longrightarrow T$. Nos podemos preguntar si podemos de alguna forma componer dichas transformaciones naturales.

Definición 1.3.4. Sean $\sigma : R \longrightarrow S$ y $\tau : S \longrightarrow T$ transformaciones naturales. Definimos la ***composición de*** σ ***con*** τ como la transformación natural $\tau \circ \sigma : R \longrightarrow T$ siguiente:

1) Para cada X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ existe una componente $(\tau \circ \sigma)_X := (\tau_X \circ \sigma_X)$, esto es, componemos las componentes de ambas transformaciones naturales.

2) Para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y para todo morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & RX \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "R\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "(\tau\circ\sigma)_X"] & SX \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "T\varphi"] & TX \arrow[d, "T\varphi"] \\ Y & RY \arrow[r, "\sigma_Y"'] \arrow[rr, bend right, "(\tau\circ\sigma)_Y"'] & SY \arrow[r, "\tau_Y"'] & TY \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

conmuta.

Nota. Que el diagrama conmute se debe a la naturalidad de σ y τ.

Por como se definió la composición entre transformaciones naturales, tenemos también que dicha composición es asociativa. Más aun para cada funtor T existe la transformación natural $1_T : T \longrightarrow T$ cuyos componentes son $(1_T)_X = 1_{TX}$ para toda X.

Definición 1.3.5. Dadas dos categorías pequeñas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, definimos una nueva categoría $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$, llamada la ***categoría de funtores***, de la siguiente forma:

1) Los $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ son todos los funtores covariantes (contravariantes) $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$.

2) Dados F, G en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$ los morfismos entre los funtores $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}(F, G)$ son las transformaciones naturales entre F y G.

3) La ley de composición es la definida en 1.3.4.

Notación. A los morfismos de esta categoría usualmente se les denotan como $Nat(F, G)$.

1.4. Conjuntos de morfismos

Recordemos dos funtores dados en el ejemplo 1.2.3, los cuales serán usados frecuentemente durante todo este texto.

Definición 1.4.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea X en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ fijo, definimos al funtor covariante $\mathscr{C}(X, \_) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ como sigue:

1) Si Y está en $\mathscr{C}$ entonces $\mathscr{C}(X, \_)Y = \mathscr{C}(X, Y)$.

2) Si $g : Y \longrightarrow Z$ entonces $\mathscr{C}(X, \_)g = \mathscr{C}(X, g)$ dado por

$$\mathscr{C}(X, g) : \mathscr{C}(X, Y) \longrightarrow \mathscr{C}(X, Z)$$

$$f \longmapsto g \circ f$$

Nota. Si el contexto es claro, se puede omitir el objeto X y entonces simplemente escribimos g_* en vez de $\mathscr{C}(X, g)$, esto es, $g_* f := \mathscr{C}(X, g)(f) = g \circ f$.

Definición 1.4.2. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea Y en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ fijo, definimos al funtor contravariante $\mathscr{C}(\_, Y) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ como sigue:

1) Si X está en $\mathscr{C}$ entonces $\mathscr{C}(\_, Y)X = \mathscr{C}(X, Y)$.

2) Si $h : W \longrightarrow X$ entonces $\mathscr{C}(\_, Y)h = \mathscr{C}(h, Y)$ está dado por:

$$\mathscr{C}(h, Y) : \mathscr{C}(X, Y) \longrightarrow \mathscr{C}(W, Y)$$

$$f \longmapsto f \circ h$$

Nota. Si el contexto es claro, se puede omitir el objeto Y y entonces simplemente escribimos h^* en vez de $\mathscr{C}(h, Y)$, *i.e.*, $h^* f := \mathscr{C}(h, Y) = f \circ h$.

Los conjuntos de morfismos son un importante ejemplo de funtores covariantes y contravariantes.

Además, dadas $g : X \longrightarrow X'$ y $k : Y \longrightarrow Y'$ se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}(X', Y) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "k_*"'] & \mathscr{C}(X, Y) \arrow[d, "k_*"] \\ \mathscr{C}(X', Y') \arrow[r, "g^*"'] & \mathscr{C}(X, Y') \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

es conmutativo.

Estos funtores juegan un papel importante en la teoría de categorías, como lo veremos más adelante en el capítulo 2.

1.5. Producto de categorías

Definición 1.5.1. Dadas dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ podemos construir una nueva categoría $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ llamada el ***producto de*** $\mathscr{C}$ ***y*** $\mathscr{D}$ como sigue:

1) Los $\mathscr{obj}(\mathscr{C} \times \mathscr{D})$ los denotamos como un par $< X, Y >$ donde X está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y Y esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{D}$.

2) Los morfismos de $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ los denotamos como un par:

$$< f, g > : < X, Y > \longrightarrow < X', Y' >,$$

donde $f : X \longrightarrow X'$ y $g : Y \longrightarrow Y'$.

3) La regla de composición entre dos morfismos:

$$< X, Y > \xrightarrow{<f,g>} < X', Y' > \xrightarrow{<f',g'>} < X'', Y'' >,$$

está dada en términos de la composición en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ como sigue:

$$< f', g' > \circ < f, g >=< f' \circ f, g' \circ g >,$$

donde la composición del lado izquierdo es la de $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, mientras que las composiciones del lado derecho son de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ respectivamente.

4) EL morifsmo identidad está dado por $1_{<X,Y>} =< 1_X, 1_Y >$.

Dadas dos categorías siempre podemos obtener su producto. A continuación definimos dos funtores que conciernen al producto de categorías.

Definición 1.5.2. Dado el producto de dos categorías $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ definimos dos funtores covariantes P y Q llamados la ***proyección en*** $\mathscr{C}$ ***y*** $\mathscr{D}$ respectivamente, de la siguiente forma:

1) Dado $< X, Y >$ en $\mathscr{obj}(\mathscr{C} \times \mathscr{D})$ definimos

$$\mathscr{C} \xleftarrow{P} \mathscr{C} \times \mathscr{D} \xrightarrow{Q} \mathscr{D}$$

con la regla de correspondencia

$$X \longleftarrow\!\dashv < X, Y > \longmapsto Y \tag{1.10}$$

2) Dado $< f, g >:< X, Y > \longrightarrow < X', Y' >$ definimos

$$P < f, g >= f, \qquad Q < f, g >= g$$

Los funtores proyección tiene la siguiente

Propiedad Universal (Proyección).

Dada una categoría $\mathscr{B}$ y dos funtores:

$$\mathscr{C} \xleftarrow{R} \mathscr{B} \xrightarrow{T} \mathscr{D}$$

existe un único funtor $F : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}\times\mathscr{D}$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{B} \arrow[dl, "R"'] \arrow[d, dashed, "\exists! F"] \arrow[dr, "T"] & \\ \mathscr{C} & \mathscr{C}\times\mathscr{D} \arrow[l, "P"] \arrow[r, "Q"'] & \mathscr{D}\,. \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

Definición 1.5.3. Dados dos funtores $U : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ y $V : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ podemos definir un ***funtor producto*** $U \times V : \mathscr{C}\times\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}'\times\mathscr{D}'$ de la siguiente forma:

1) Dados C, D en $\mathscr{O}bj\,(\mathscr{C}\times\mathscr{D})$ se define

$$\begin{gathered} U \times V : \mathscr{C}\times\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}' \times \mathscr{D}' \\ \text{como} \\ < C, D > \longmapsto < UC, VD > \end{gathered} \tag{1.12}$$

2) Dadas $f \in \mathscr{C}(W, X)$ y $g \in \mathscr{D}(Y, Z)$ se tiene que:

$$(U \times V) < f, g >=< Uf, Vg >$$

El funtor producto tiene la siguiente

Propiedad Universal (Funtor Producto).

Dados dos funtores $U:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}'$ y $V:\mathscr{D}\longrightarrow\mathscr{D}'$, existe un único funtor $U\times V$ tal que hace al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[d, "U"'] & \mathscr{C}\times\mathscr{D} \arrow[l, "P"'] \arrow[r, "Q"] \arrow[d, dashed, "\exists! U\times V"] & \mathscr{D} \arrow[d, "V"] \\
\mathscr{C}' & \mathscr{C}'\times\mathscr{D}' \arrow[l, "P'"] \arrow[r, "Q'"'] & \mathscr{D}'
\end{tikzcd} \tag{1.13}$$

conmutar, donde P, Q, P', Q' son las proyecciones respectivas.

Nota. Funtores de un producto de categorías a otra categoría cualquiera, *i.e.*, $S : \mathscr{C}\times\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{B}$ se lé llaman *bifuntores* (en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$). Además, si se fija uno de los objetos, entonces el bifuntor se vuelve un funtor y el bifuntor queda definido completamente por esos dos funtores.

Nota. Para construir el producto de dos funtores no es necesario que ambos sean covariantes (o contravariantes), como lo muestra el ejemplo siguiente.

Para eso, necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.5.4. *Sean $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías y para cualesquiera B y C, objetos en $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ respectivamente, sean*

$$F_C : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{D} \qquad y \qquad G_B : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

funtores tales que $F_C(B) = G_B(C)$. Entonces existe un bifuntor $S : \mathscr{B}\times\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que $S(\_, C) = F_C$, para toda C en $\mathscr{C}$, $S(B, \_) = G_B$, para toda B en $\mathscr{B}$, y para cualesquiera par de morfismos $f : B_1 \longrightarrow B_2$ y $g : C_1 \longrightarrow C_2$ se tiene que

$$G_{B_2}g \circ F_{C_1}f = F_{C_2}f \circ G_{B_1}g$$

además la igualdad dada anteriormente es el morfismo $S(f, g)$ en $\mathscr{D}$.

Demostración.

Sabemos que $S(\_, C) = F_C$ para toda C en $\mathscr{C}$ y $S(B, \_) = G_B$ para toda B en $\mathscr{B}$, de aquí que al aplicar el funtor S a la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} < 1_{B_2}, g > \circ < f, 1_{C_1} > &=< 1_{B_2} \circ f, g \circ 1_{C_1} >=< f, g > \\ &=< f \circ 1_{B_1}, 1_{C_2} \circ g > \\ &=< f, 1_{C_2} > \circ < 1_{B_1}, g > \end{aligned}$$

se tiene que $S(1_{B_2}, g)S(f, 1_{C_1}) = S(f, 1_{C_2})S(1_{B_1}, g)$, en un diagrama conmutativo se ve de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} S(B_1, C_1) \arrow[r, "S(1_{B_1},g)"] \arrow[d, "S(f,1_{C_1})"'] & S(B_1, C_2) \arrow[d, "S(f,1_{C_2})"] \\ S(B_2, C_1) \arrow[r, "S(1_{B_2},g)"'] & S(B_2, C_2) \end{tikzcd}$$

en otras palabras se tiene que $S(B_2, g)S(f, C_1) = S(f, C_2)S(B_1, g)$, por ende $G_{B_2}g \circ F_{C_1}f = F_{C_2}f \circ G_{B_1}g$. □

Ejemplo 1.5.5.

Un ejemplo común de un bifuntor es el funtor Hom, esto es, dada una categoría $\mathscr{C}$ tenemos un bifuntor definido de la siguiente forma:

$$\mathscr{C}(\_, \_) : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et$$

$$< X, Y > \longmapsto \mathscr{C}(X, Y)$$

$$< f, g > \longmapsto \mathscr{C}(f, g)$$

por la conmutatividad del diagrama (1.9) y el lema 1.5.4 se tiene que $\mathscr{C}(f, g)$ queda definido por el valor de la igualdad de $\mathscr{C}(X_2, g)\mathscr{C}(f, Y_1) = \mathscr{C}(f, Y_2)\mathscr{C}(X_1, g)$.

Pero si se fija la primer entrada, es decir, X fijo, obtenemos un funtor covariante:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(X,\_) : \mathscr{C}\times\mathscr{C} &\longrightarrow \mathscr{S}et \\ Y &\longmapsto \mathscr{C}(X,Y) \\ g &\longmapsto \mathscr{C}(X,g) \end{aligned}$$

Y ahora si se fija la segunda entrada, esto es, dado Y fijo, obtenemos un funtor contravariante:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(\_,Y) : \mathscr{C}\times\mathscr{C} &\longrightarrow \mathscr{S}et \\ X &\longmapsto \mathscr{C}(X,Y) \\ f &\longmapsto \mathscr{C}(f,Y) \end{aligned}$$

Dado que el producto de dos categorías es otra categoría, esto significa que podemos formar el producto no sólo de dos, sino de tres o más categorías para formar una nueva, procedemos de manera análoga al producto de dos.

1.6. Cuadrados cartesianos y cocartesianos

1.6.1. Cuadrados cartesianos

Definición 1.6.1. En una categoría $\mathscr{C}$, dado el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z, \end{tikzcd}$$

decimos que la categoría $\mathscr{C}$ tiene ***cuadrado cartesiano***, si podemos completar el diagrama de forma que se vuelva un diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

conmutativo. A los morfismos α y β con el objeto W se les llama ***solución***. La solución del diagrama debe cumplir la siguiente propiedad universal:

Propiedad Universal (cuadrado cartesiano).

Dado un diagrama de cuadrado cartesiano y otra solución al diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

donde el diagrama del lado izquierdo es el cuadrado cartesiano y el diagrama del lado derecho es otra solución, entonces existe un único morfismo $h : W' \longrightarrow W$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "\beta'"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha'"'] & & \\ & W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

conmuta.

Notación. Debido a la propiedad universal del cuadrado cartesiano, tenemos que cuando exista, éste sera único salvo isomorfismos. Por ello cuando un diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

tenga cuadrado cartesiano, al objeto lo denotaremos como $X \times_Z Y$[3]. A los cuadrados cartesianos también se les conoce como pulback.

Definición 1.6.2. Dada una categoría $\mathscr{C}$, decimos que tiene ***cuadrado débilmente cartesiano*** si la solución al diagrama de cuadrado cartesiano no es única.

Nota. Dado que la solución de un cuadrado cartesiano débil no es única, dos soluciones al mismo diagrama no necesariamente serán isomorfas y por ende no se podrá usar la misma notación del cuadrado cartesiano en un cuadrado cartesiano débil.

Ejemplo 1.6.3.
Consideremos la categoría $\mathscr{Set}$. Entonces dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

tenemos que en esta categoría el cuadrado cartesiano siempre existe y está dado por $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$, junto con las proyecciones $\pi_X : X \times_Z Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times_Z Y \longrightarrow Y$.

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z. \end{tikzcd}$$

[3]Esta notación quedará más clara en la sección 2.5.

Se verifica que $X \times_Z Y$ cumple la propiedad universal del cuadrado cartesiano. En efecto, dado un conjunto W y dos morfismos $\alpha : W \longrightarrow X$ y $\beta : W \longrightarrow Y$ tales que

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z,
\end{tikzcd}$$

el diagrama conmuta. Luego, se define la función $h : W \longrightarrow X \times_Z Y$ como $h(w) = (\alpha(w), \beta(w))$ y se verifica inmediatamente que h es tal que $\pi_X \circ h = \alpha$ y $\pi_Y \circ h = \beta$. Además, se sigue que si existe otra $h' : W \longrightarrow X \times_Z Y$ tal que $\pi_X \circ h' = \alpha$ y $\pi_Y \circ h' = \beta$ entonces $h' = h$. Por lo que tal h es única. Con lo que se verifica el ejemplo.

Definición 1.6.4. Dado un funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, ya sea covariante o contravariante, decimos que F ***conserva los cuadrados cartesianos*** si cada vez que se tenga un diagrama de cuadrado cartesiano en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

se tiene otro diagrama de cuadrado cartesiano en $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd}
FW \arrow[r, "F\beta"] \arrow[d, "F\alpha"'] & FY \arrow[d, "Fg"] \\
FX \arrow[r, "Ff"'] & FZ
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
FZ \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "Fg"'] & FX \arrow[d, "F\alpha"] \\
FY \arrow[r, "F\beta"'] & FW
\end{tikzcd}$$

El diagrama de la izquierda corresponde a un funtor F covariante y el diagrama de la derecha a un funtor F contravariante.

1.6.2. Cuadrado cocartesiano

Definición 1.6.5. En una categoría $\mathscr{C}$, dado el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X, & \end{tikzcd}$$

decimos que la categoría $\mathscr{C}$ tiene ***cuadrado cocartesiano*** si podemos completar el diagrama de forma que se obtenga un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z, \end{tikzcd}$$

a los morfismos α y β con el objeto Z se le llama ***solución***. El cuadrado cocartesiano de una categoría debe cumplir la siguiente propiedad universal:

Propiedad Universal (cuadrado cocartesiano).

Dado un diagrama de cuadrado cocartesiano y otra solución al diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta'"] \\ X \arrow[r, "\alpha'"'] & Z' \end{tikzcd}$$

donde el diagrama del lado izquierdo es el cuadrado cocartesiano y el del lado derecho es la otra solución, entonces existe un único morfismo

$h : Z \longrightarrow Z'$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\beta'"] & \\ X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha'"'] & Z \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] & \\ & & Z' \end{tikzcd} \tag{1.15}$$

conmuta.

Notación. Debido a la propiedad universal del cuadrado cocartesiano, tenemos que cuando exista éste, será único salvo isomorfismos.Por ello cuando un diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

tenga cuadrado cocartesiano, único salvo isomorfismo, al objeto lo denotaremos como $X \amalg_W Y$[4]. A los cuadrados cocartesianos también se les llama cuadrado de pushout.

Definición 1.6.6. Dada una categoría $\mathscr{C}$, decimos que tiene ***cuadrado débilmente cocartesiano*** si la solución al diagrama de cuadrado cocartesiano no es única.

Nota. Dado que la solución de un cuadrado cocartesiano débil no es única dos soluciones al mismo diagrama no necesariamente serán isomorfas . Por lo anterior, no se podrá usar la misma notación del cuadrado cocartesiano en un cuadrado cocartesiano débil.

Ejemplo 1.6.7.

Consideremos la categoría $\mathscr{Set}$. Entonces dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X, & \end{tikzcd}$$

[4]Esta notación quedara más claro en la sección 2.5.

se propone como solución al diagrama el siguiente conjunto $X \amalg_W Y = (X \amalg Y)/\{f(w) \sim g(w)\}$, donde $X \amalg Y$ es la unión ajena de los conjuntos X y Y. Esto es, se define una relación de equivalencia en $X \amalg Y$ como sigue, dados $z_1, z_2 \in X \amalg Y$ se dice que

$$\begin{aligned} &z_1 \sim z_2 \text{ si y sólo si } z_1 = z_2 \text{ con } z_1, z_2 \in X \text{ ó } z_1, z_2 \in Y, \\ &z_1 \sim z_2 \text{ si y sólo si } \exists w \in W \text{ tal que } f(w) = z_i \text{ y } g(w) = z_j \\ &\qquad\qquad\qquad \text{con } z_i \in X \text{ y } z_j \in Y, \text{ tales que } i, j = 1, 2 \text{ e } i \neq j, \end{aligned}$$

junto con los morfismos $\alpha : X \longrightarrow X \amalg_W Y$ dado por $\alpha(x) = [x]$ y $\beta : Y \longrightarrow X \amalg_W Y$ dado por $\beta(y) = [y]$,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & X \amalg_W Y. \end{tikzcd}$$

Se verifica que el conjunto $X \amalg_W Y$ satisface la propiedad universal del cuadrado cocartesiano. En efecto, dada otra solución al diagrama, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\beta'"] & \\ X \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha'"'] & X \amalg_W Y & \\ & & W'. \end{tikzcd}$$

Se define la función $h : X \amalg_W Y \longrightarrow W'$ como

$$h([z]) = \begin{cases} \alpha'(z) & \text{si } z \in X, \\ \beta'(z) & \text{si } z \in Y, \end{cases}$$

y dicha función no depende del representante. En efecto, dados $z_1, z_2 \in X \amalg Y$ tales que $[z_1] = [z_2]$ en $X \amalg_W Y$. Pero por como se definió la relación de equivalencia se tiene que si $z_1, z_2 \in X$ o

$z_1, z_2 \in Y$, se sigue que $h([z_1]) = h([z_2])$. Ahora, sin pérdida de generalidad se considera que $z_1 \in X$ y $z_2 \in Y$, por lo que existe $w \in W$ tal que $f(w) = z_1$ y $g(w) = z_2$, pero por la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que $\alpha' \circ f = \beta' \circ g$ por lo que $h([z_1]) = \alpha'(f(w)) = \beta'(g(w)) = h([z_2])$. Por lo que la función h no depende del representante.

Se verifica inmediatamente que $h \circ \alpha = \alpha'$ y $h \circ \beta = \beta'$. Por último, suponiendo que existe otra función $h' : X \amalg_W Y \longrightarrow W'$ tal que $h' \circ \alpha = \alpha'$ y $h' \circ \beta = \beta'$, por como está definido h se tiene que $h = h'$. Con lo que se prueba la afirmación.

Definición 1.6.8. Dado un funtor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, ya sea covariante o contravariante, decimos que F ***conserva cuadrados cocartesianos*** si cada vez que se tenga un diagrama de cuadrado cocartesiano en $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

se tiene otro diagrama de cuadrado cocartesiano en $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd} FW \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, "Ff"'] & FY \arrow[d, "F\beta"] \\ FX \arrow[r, "F\alpha"'] & FZ, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FZ \arrow[r, "F\alpha"] \arrow[d, "F\beta"'] & FX \arrow[d, "Ff"] \\ FY \arrow[r, "Fg"'] & FW \end{tikzcd}$$

en donde el diagrama de la izquierda corresponde a F covariante y el de la derecha a F contravariante.

1.7. Categorías cocientes

Recordemos que en la definición de categoría se pidió que los morfismos de X en Y en una categoría $\mathscr{C}$ fuera un conjunto, es decir, $\mathscr{C}(X, Y)$ es un conjunto, y en los conjuntos es posible definir relaciones de equivalencia, las cuales nos inducen una partición del mismo. Con esta idea procedemos a definir lo siguiente.

Definición 1.7.1. Dados X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ decimos que una relación de equivalencia $\simeq_{X,Y}$ en $\mathscr{C}(X,Y)$ es ***compatible con la composición*** si dados $f, f' : X \longrightarrow Y$, para todo morfismo $g : W \longrightarrow X$ y todo morfismo $h : Y \longrightarrow Z$ tales que $f \simeq_{X,Y} f'$ entonces se debe dar que $f \circ g \simeq_{W,Y} f' \circ g$ y $h \circ f \simeq_{X,Z} h \circ f'$.

Definición 1.7.2. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ tiene una ***relación de equivalencia*** $\simeq$ si para cada X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ existe una relación de equivalencia $\simeq_{X,Y}$ en $\mathscr{C}(X,Y)$ que es compatible con la composición.

Notación. Dado que pedimos que cada relación de equivalencia sea compatible con la composición, entonces escribiremos $f \simeq f'$ en vez de $f \simeq_{X,Y} f'$.

Definición 1.7.3. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con relación de equivalencia $\simeq$, definimos a la ***categoría cociente*** $\pi\mathscr{C}$ como sigue:

1) Los $\mathscr{obj}\,\pi\mathscr{C}$ son los mismos de $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

2) $\pi\mathscr{C}(X,Y) = \mathscr{C}(X,Y)/\simeq$.

3) La composición en $\pi\mathscr{C}$ esta heredada por la composición en $\mathscr{C}$, *i.e.*, dadas dos clases de equivalencias $[f], [g] : X \longrightarrow Y$, se define su composición como:

$$[f] \circ' [g] = [f \circ g],$$

donde la composición $\circ'$ es la de $\pi\mathscr{C}$ y la composición $\circ$ es la de $\mathscr{C}$.

Nota. La composición definida anteriormente está bien definida ya que se pide que la relación de equivalencia sea compatible con la composición en $\mathscr{C}$.

Definición 1.7.4. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con relación de equivalencia $\simeq$, definimos al ***funtor proyección*** como sigue:

$$\pi : \mathscr{C} \longrightarrow \pi\mathscr{C}$$

1) Si X esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces $\pi(X) = X$.

2) Si $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$ entonces $\pi(f) = [f]_{\simeq}$, esto es, la clase de equivalencia de f.

Por como se definió el funtor proyección, se tiene que es un funtor covariante.

Además el funtor proyección tiene la siguiente:

Propiedad Universal (Funtor proyección).

Dadas dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, un funtor covariante $\rho : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y una relación de equivalencia $\simeq$ en $\mathscr{C}$, se tiene que existe una única $\overline{\rho} : \pi\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ tal que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathscr{D} \\ \pi\mathscr{C}. \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\rho}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

1.8. Funtores adjuntos

El concepto de adjunción fue presentado por Daniel Marinus Kan[5] y en un principio surgió como una necesidad del álgebra homológica.

Definición 1.8.1. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Una ***adjunción de*** $\mathscr{C}$ ***a*** $\mathscr{D}$ es un tercia, $< F, G, \phi >$: $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, donde F y G son funtores tales que:

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

y $\phi : \mathscr{D}(F\_, \_) \longrightarrow \mathscr{C}(\_, G\_)$ es un isomorfismo natural, en otras palabras, ϕ cumple con que $\phi_X : \mathscr{D}(FX, \_) \longrightarrow \mathscr{C}(X, G\_)$ es un isomorfismo natural para todo de X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y que $\phi_Y : \mathscr{D}(F\_, Y) \longrightarrow \mathscr{C}(\_, GY)$ es un isomorfismo natural para todo Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{D}$. Decimos que F ***es adjunto izquierdo de*** G y que G ***es adjunto derecho de*** F y a ϕ se le llama ***la adjunción de*** F ***a*** G***.***

[5]Matemático especializado en el área de la teoría de homotopía, recibió su Ph.D. en la universidad de Hebrea bajo la dirección de Samuel Eilenberg.

Observación. El que ϕ sea un isomorfismo natural para X y Y, simplemente significa que para cualesquiera $h : X \longrightarrow X'$ y $k : Y \longrightarrow Y'$, se tiene que los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"'] & \mathscr{D}(FX,Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] & \mathscr{C}(X,GY) \\ X' & \mathscr{D}(FX',Y) \arrow[u, "(Fh)^*"] \arrow[r, "\phi_{X',Y}"'] & \mathscr{C}(X',GY) \arrow[u, "h^*"'] \end{tikzcd} \tag{1.17a}$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "k"'] & \mathscr{D}(FX,Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "k_*"'] & \mathscr{C}(X,GY) \arrow[d, "(Gk)_*"] \\ Y' & \mathscr{D}(FX,Y') \arrow[r, "\phi_{X,Y'}"'] & \mathscr{C}(X,GY') \end{tikzcd} \tag{1.17b}$$

conmutan.

Notación. Si F es adjunto izquierdo de G (o bien G es adjunto derecho de F), lo denotaremos por $\phi : F \dashv G$, donde ϕ es la adjunción de F a G.

Ejemplo 1.8.2.

Consideremos las categorías $\mathscr{Top}$ y $\mathscr{Set}$, y los siguientes funtores:

1) $F : \mathscr{Set} \longrightarrow \mathscr{Top}$ a cada conjunto le asigna la topología discreta[6] y los morfismos los deja igual.

2) $G : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Set}$ a cada espacio topológico le asigna su propio conjunto[7] y los morfismos los deja igual.

3) $H : \mathscr{Set} \longrightarrow \mathscr{Top}$ a cada conjunto le asigna la topología indiscreta[8] y los morfismos los deja igual.

Entonces se definen los siguientes isomorfismos naturales:

[6] Todo subconjunto del espacio topológico es abierto.

[7] Deja el conjunto tal cual, simplemente olvida la estructura topológica.

[8] Los únicos conjuntos abiertos son el total y el $\emptyset$.

a) Sea φ como sigue:

$$\varphi_{X,Y} : \mathscr{Top}\,(FX, Y) \longrightarrow \mathscr{Set}\,(X, GY)$$

$$FX = X \xrightarrow{f_{\mathscr{Top}}} Y \longmapsto X \xrightarrow{f_{\mathscr{Set}}} GY = Y$$

donde $f_{\mathscr{Top}}$ es una función continua entre dos espacios topológicos y X tiene la topología discreta y $f_{\mathscr{Set}}$ es la misma asignación entre los conjuntos X y Y, pero sin considerar la continuidad. Aquí φ es biyectiva, ya que toda función que sale de un espacio discreto es continua.

b) Sea ψ como sigue:

$$\psi_{Y,Z} : \mathscr{Set}\,(GY, Z) \longrightarrow \mathscr{Top}\,(Y, HZ)$$

$$GY = Y \xrightarrow{g_{\mathscr{Set}}} Z \longmapsto Y \xrightarrow{g_{\mathscr{Top}}} HZ = Z$$

donde $g_{\mathscr{Set}}$ es simplemente una función entre conjuntos donde Y no tiene topología y $g_{\mathscr{Top}}$ es la misma asignación entre los conjuntos Y y Z, pero al considerar su topología se ve que es continua, ya que Z tiene la topología indiscreta. Aquí ψ es biyectiva, ya que toda función que llega a un espacio indiscreto es continua.

Ahora falta verificar que tanto φ como ψ cumplen la condición de naturalidad dada por los diagramas (1.17a) y (1.17b).

Para ϕ, se tiene que dado un morfismo $h : X \longrightarrow X'$ en $\mathscr{Set}$.

$$\begin{tikzcd}
f'_{\mathscr{Top}} \circ (Fh) = f'_{\mathscr{Top}} \circ h_{\mathscr{Top}} \arrow[r, mapsto, "\phi_{X,Y}"] & f'_{\mathscr{Set}} \circ h \\
f'_{\mathscr{Top}} \arrow[u, mapsto, "(Fh)^*"] \arrow[r, mapsto, "\phi_{X',Y}"'] & f'_{\mathscr{Set}} \arrow[u, mapsto, "h^*"']
\end{tikzcd}$$

Dado $k : Y \longrightarrow Y'$ morfismo en $\mathscr{Top}$.

$$\begin{tikzcd}
f_{\mathscr{Top}} \arrow[r, mapsto, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, mapsto, "k_*"'] & f_{\mathscr{Set}} \arrow[d, mapsto, "(Gk)_*"] \\
k \circ f_{\mathscr{Top}} \arrow[r, mapsto, "\phi_{X,Y'}"'] & k_{\mathscr{Set}} \circ f_{\mathscr{Set}} = (Gk) \circ f_{\mathscr{Set}}
\end{tikzcd}$$

Ahora, para ψ, se tiene que dado $k : Y \longrightarrow Y'$ morfismo en $\mathscr{Top}$.

$$\begin{tikzcd}
g'_{\mathscr{Set}} \circ (Gk) = g'_{\mathscr{Set}} \circ k_{\mathscr{Set}} \arrow[r, mapsto, "\psi_{Y,Z}"] & g'_{\mathscr{Top}} \circ k \\
g'_{\mathscr{Set}} \arrow[u, mapsto, "(Gk)^*"] \arrow[r, mapsto, "\psi_{Y',Z}"'] & g'_{\mathscr{Top}} \arrow[u, mapsto, "k^*"']
\end{tikzcd}$$

Dado $l : Z \longrightarrow Z'$ morfismo en $\mathscr{Set}$.

$$\begin{tikzcd}
g_{\mathscr{Set}} \arrow[r, mapsto, "\psi_{Y,Z}"] \arrow[d, mapsto, "l_*"'] & g_{\mathscr{Top}} \arrow[d, mapsto, "(Hl)_*"] \\
l \circ g_{\mathscr{Set}} \arrow[r, mapsto, "\psi_{Y,Z'}"'] & l_{\mathscr{Top}} \circ g_{\mathscr{Top}} = (Hl) \circ g_{\mathscr{Top}}
\end{tikzcd}$$

Entonces como los diagramas anteriores conmutan, se tiene que $\varphi : F \dashv G$ y $\psi : G \dashv H$, esto es, G es adjunto derecho de F y G es adjunto izquierdo de H.

En el caso de que un funtor tenga varios adjuntos izquierdos (resp. derechos) estos serán naturalmente isomorfos. Para demostrar este resultado, primero necesitamos hacer algunas consideraciones previas.

Consideremos los diagramas (1.17a) y (1.17b), en el caso particular donde $FX = Y$, entonces existe el morfismo identidad $1_{FX} : FX \longrightarrow FX$ por lo que podemos aplicarle el isomorfismo natural

$\phi_{X,FX}(1_{FX}) : X \longrightarrow GFX$. Ahora consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"'] & X \arrow[r, "\phi_{X,FX}(1_{FX})"] \arrow[d, "h"'] & GFX \arrow[d, "GFh"] \\ X' & X' \arrow[r, "\phi_{X',FX'}(1_{FX'})"'] & GFX' \end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo, ya que:

$$\begin{aligned} GFh \circ \phi_{X,FX}(1_{FX}) &\overset{(i)}{=} \phi_{X,FX'}(Fh \circ 1_{FX}) \\ &= \phi_{X,FX'}(1_{FX'} \circ Fh) \overset{(ii)}{=} \phi_{X',FX'}(1_{FX'}) \circ h \end{aligned}$$

donde (i) y (ii) están dadas por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}(FX,FX) \arrow[r, "(Fh)_*"] \arrow[d, "\phi_{X,FX}"'] & \mathscr{D}(FX,FX') \arrow[d, "\phi_{X,FX'}"] & \mathscr{D}(FX',FX') \arrow[l, "(Fh)^*"'] \arrow[d, "\phi_{X',FX'}"] \\ \mathscr{C}(X,GFX) \arrow[r, "(GFh)_*"'] & \mathscr{C}(X,GFX') & \mathscr{C}(X',GFX') \arrow[l, "h^*"] \end{tikzcd}$$

donde el diagrama de la izquierda está dado por el diagrama (1.17b) y el diagrama de la derecha está dado por el diagrama (1.17a).

Análogamente si se considera el caso donde $X = GY$, entonces existe el morfismo identidad $1_{GY} : GY \longrightarrow GY$ por lo que podemos aplicarle el isomorfismo natural $\phi^{-1}_{GY,Y}(1_{GY}) : FGY \longrightarrow Y$, ahora consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "k"'] & FGY \arrow[r, "\phi^{-1}_{GY,Y}(1_{GY})"] \arrow[d, "FGk"'] & Y \arrow[d, "k"] \\ Y' & FGY' \arrow[r, "\phi^{-1}_{GY',Y'}(1_{GY'})"'] & Y' \end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo, ya que:

$$\begin{aligned}\phi^{-1}_{GY',Y'}(1_{GY'}) \circ FGk &\overset{(i)}{=} \phi^{-1}_{GY,Y'}(1_{GY'} \circ Gk)\\ &= \phi^{-1}_{GY,Y'}(Gk \circ 1_{GY}) \overset{(ii)}{=} k \circ \phi^{-1}_{GY,Y}(1_{GY})\end{aligned}$$

donde (i) y (ii) están dadas por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(GY,GY) \arrow[r, "(Gk)_*"] \arrow[d, "\phi^{-1}_{GY,Y}"'] & \mathscr{C}(GY,GY') \arrow[d, "\phi^{-1}_{GY,Y'}"] & \mathscr{C}(GY',GY') \arrow[l, "(Gk)^*"'] \arrow[d, "\phi^{-1}_{GY',Y'}"] \\
\mathscr{D}(FGY,Y) \arrow[r, "k_*"'] & \mathscr{D}(FGY,Y') & \mathscr{D}(FGY',Y') \arrow[l, "(FGk)^*"]
\end{tikzcd}$$

donde el diagrama de la izquierda esta dado por el diagrama (1.17b) y el diagrama de la derecha esta dado por el diagrama (1.17a).

Definición 1.8.3. Dados $\phi : F \dashv G$, definimos:

1) La ***unidad*** como la transformación natural $\eta_X = \phi_{X,FX}(1_{FX})$, para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

2) La ***counidad*** como la transformación natural $\varepsilon_Y = \phi^{-1}_{GY,Y}(1_{GY})$, para toda Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{D}$.

Teorema 1.8.4. *Dados dos funtores adjuntos $\phi : F \dashv G$, se tiene que:*

1) Dada $f : X \longrightarrow Y$ morfismo, se tiene que $\phi_{X,Y}(f) = Gf \circ \eta_X$.

2) Dada $g : Y \longrightarrow Z$ morfismo, se tiene que $\phi^{-1}_{Z,Y}(g) = \varepsilon_Y \circ Fg$.

Demostración.

1) Para demostrar el primer inciso, consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & \mathscr{D}(FX,FX) \arrow[r, "\phi_{X,FX}"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathscr{C}(X,GFX) \arrow[d, "(Gf)_*"] \\
Y & \mathscr{D}(FX,Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"'] & \mathscr{C}(X,GY)
\end{tikzcd}$$

ya que ϕ es una equivalencia natural. Por lo que se tiene que:

$$\phi_{X,Y}(f) = \phi_{X,Y}(f \circ 1_{FX}) = Gf \circ \phi_{X,FX}(1_{FX}) = Gf \circ \eta_X$$

2) Para demostrar el segundo inciso, consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "g"'] & \mathscr{C}(GY, GY) \arrow[r, "\phi^{-1}_{GY,Y}"] \arrow[d, "g^*"'] & \mathscr{D}(FGY, Y) \arrow[d, "(Fg)^*"] \\ Z & \mathscr{C}(Z, GY) \arrow[r, "\phi^{-1}_{Z,Y}"'] & \mathscr{D}(FZ, Y) \end{tikzcd}$$

ya que ϕ^{-1} es equivalencia natural. Por lo que se tiene que:

$$\phi^{-1}_{Z,Y}(g) = \phi^{-1}_{Z,Y}(1_{GY} \circ g) = \phi^{-1}_{GY,Y}(1_{GY}) \circ Fg = \varepsilon_Y \circ Fg$$

□

Corolario 1.8.5. *Dados dos funtores adjuntos $\phi : F \dashv G$, se tiene que las siguientes composiciones:*

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G \qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon F} F$$

son las identidades en G y F respectivamente.

Demostración.

Simplemente se observa que si X=GY y Y=FX, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} 1_{GY} =& \phi \circ \phi^{-1}(1_{GY}) = \phi(\varepsilon_Y) \overset{(i)}{=} G\varepsilon_Y \circ \eta_{GY} \\ 1_{FX} =& \phi^{-1} \circ \phi(1_{FX}) = \phi^{-1}(\eta_X) \overset{(ii)}{=} \varepsilon_{FX} \circ F\eta_X \end{aligned}$$

donde la igualdad en (i) esta dada por la igualdad en el inciso (1) del teorema anterior y la igualdad en (ii) esta dada por la igualdad en (2) del teorema anterior. □

Ahora, ya estamos en condiciones del demostrar los siguientes teoremas que aseguran la unicidad (salvo isomorfismos) de los funtores adjuntos.

Teorema 1.8.6. *Dados funtores $F, F' : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tales que $\phi : F \dashv G$ y $\phi' : F' \dashv G$ entonces se tiene que existe un isomorfismo natural $\varphi : F \longrightarrow F'$.*

Demostración.

Se tiene que existen $\eta_X : X \longrightarrow GFX$ y $\eta'_X : X \longrightarrow GF'X$ transformaciones naturales, las cuales son las unidades de los isomorfismos naturales ϕ y ϕ' respectivamente. Ademas se definen los morfismos φ_X y ψ_X de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi_X"'] \\ F'X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta'_X"'] & GFX \arrow[d, "G\varphi_X"] \\ & GF'_X \end{tikzcd} \tag{1.18a}$$

Existe una única φ_X tal que hace conmutar el diagrama, para toda X. Y esta bien definida ya que ϕ es isomorfismo natural, por lo que se tiene que $\phi_{X,F'X}(\varphi_X) = \eta'_X$

$$\begin{tikzcd} F'X \arrow[d, dashed, "\exists! \psi_X"'] \\ FX \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta'_X"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & GF'X \arrow[d, "G\psi_X"] \\ & GFX \end{tikzcd} \tag{1.18b}$$

Existe una única ψ_X tal que hace conmutar el diagrama, para toda X. Y esta bien definida ya que ϕ' es isomorfismo natural, por lo que se tiene que $\phi'_{X,FX}(\psi_X) = \eta_X$. Ahora se verifica que φ_X y ψ_X son isomorfismos para toda X.

$$\begin{aligned} \phi_{X,FX}(\psi_X \circ \varphi_X) &\overset{(i)}{=} G(\psi_X \circ \varphi_X) \circ \eta_X = G\psi_X \circ G\varphi_X \circ \eta_X \\ &\overset{(ii)}{=} G\psi_X \circ \eta'_X \overset{(iii)}{=} \eta_X \\ \phi'_{X,F'X}(\varphi_X \circ \psi_X) &\overset{(i)}{=} G(\varphi_X \circ \psi_X) \circ \eta'_X = G\varphi_X \circ G\psi_X \circ \eta'_X \\ &\overset{(iii)}{=} G\varphi_X \circ \eta_X \overset{(ii)}{=} \eta'^X \end{aligned}$$

Donde las igualdades indicadas con (i) están dadas por el teorema 1.8.4, las igualdades indicadas con (ii) están dadas por el diagrama (1.18a) y las igualdades indicadas con (iii) están dadas por el diagrama (1.18b). Pero por la definición 1.8.3, se sabe que:

$$\phi_{X,FX}(1_{FX}) = \eta_X \qquad\qquad \phi'_{X,F'X}(1_{F'X}) = \eta'_X$$

Y nuevamente por ser ϕ y ϕ' isomorfismos, se tiene que:

$$\psi_X \circ \varphi_X = 1_{FX} \qquad\qquad \varphi_X \circ \psi_X = 1_{F'X}$$

Ahora, solo falta verificar que $\varphi : F \longrightarrow F'$ es transformación natural *i.e.* hay que verificar que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & FX \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "Ff"'] & F' \arrow[d, "F'f"] \\ Y & FY \arrow[r, "\varphi_Y"'] & F'Y \end{tikzcd}$$

conmuta, para cualesquiera X, Y en $\mathcal{Obj}\,\mathscr{C}$ y todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$. Para eso, dada la naturalidad de ϕ^{-1} se consideran los siguiente diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \mathscr{C}(X, GF'X) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X,F'X}"] \arrow[d, "(GF'f)_*"'] & \mathscr{D}(FX, F'X) \arrow[d, "(Ff)_*"] \\ Y & \mathscr{C}(X, GF'Y) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X,F'Y}"'] & \mathscr{D}(FX, F'Y) \end{tikzcd} \tag{1.19a}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \mathscr{C}(X, GF'Y) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X,F'Y}"] & \mathscr{D}(FX, F'Y) \\ Y & \mathscr{C}(Y, GF'Y) \arrow[r, "\phi^{-1}_{Y,F'Y}"'] \arrow[u, "f^*"] & \mathscr{D}(FY, F'Y) \arrow[u, "(Ff)^*"'] \end{tikzcd} \tag{1.19b}$$

Entonces de ambos diagramas se obtienen las siguientes igualdades:

$$F'f \circ \varphi_X \overset{(i)}{=} \phi^{-1}_{X,F'Y}(GF'f \circ \eta'_X) \qquad \varphi_Y \circ Ff \overset{(ii)}{=} \phi^{-1}_{X,F'Y}(\eta'_Y \circ f)$$

donde la igualdad indicada con (i) esta dada por el diagrama (1.19a) y la igualdad indicada con (ii) esta dada por el diagrama (1.19b) .Pero η' es una transformación natural, entonces se tiene que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta'_X"] \arrow[d, "f"'] & GF'X \arrow[d, "GF'f"] \\ Y \arrow[r, "\eta'_Y"'] & GF'Y \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo que se tiene que $GF'f \circ \eta'_X = \eta'_Y \circ f$. Entonces esto implica que $F'f \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ Ff$, para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y todo morfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Análogo si los funtores son contravariantes. □

Análogo al teorema anterior esta el siguiente teorema, cuya demostración no se da, por ser análoga a la anterior, la diferencia es que se usan las transformaciones naturales ε_Y y ε'_Y la cuales son las counidades de los isomorfismos naturales ϕ y ϕ' respectivamente.

Teorema 1.8.7. *Dados funtores $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $G, G' : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tales que $\phi : F \dashv G$ y $\phi' : F \dashv G'$ entonces se tiene que existe un isomorfismo natural $\varphi : G \longrightarrow G'$.*

□

Capítulo 2

Objetos universales

Si consideramos la categoría $\mathscr{Grp}$, sus objetos son grupos, mientras que si consideramos una categoría cualquiera $\mathscr{C}$ no podemos decir si sus objetos son grupos, por el simple hecho de que sus objetos podrían no ser conjuntos. El objetivo de este capítulo es poder decir cuándo a un objeto X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ le podemos asignar una estructura de grupo.

Por ejemplo, si G esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Grp}$, se tiene definida una operación llamada "producto", tal que si $a, b \in G$ entonces $a * b \in G$. Nuestro problema con el objeto X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ es que como no necesariamente es un conjunto, no podemos hablar de elementos en X y por tanto tal definición de "producto" no es factible en nuestro caso. Para eso observamos que el producto $*$ lo podemos ver como morfismo

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

En la sección 2.4 resolveremos el problema de saber cuándo una categoría tiene algo semejante a un producto de conjuntos $(G \times G)$, con lo cual ya podremos dar un paso más hacia nuestro objetivo.

La asociatividad del producto $*$, descrita en términos de nuestros elementos la podemos ver como $a*(b*c) = (a*b)*c$, pero no es claro cómo extender esta definición a cualquier categoría. Sin embargo, podemos observar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{*\times 1_G} & G\times G \\ {\scriptstyle 1_G\times *}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle *} \\ G\times G & \xrightarrow[*]{} & G. \end{array}$$

Entonces la asociatividad de $*$ es simplemente pedir que el diagrama anterior conmute. Lo cual en una categoría cualquiera es más factible pedir.

Estos y otros problemas por el estilo los solventaremos en este capítulo y al final, en la sección 2.6, usaremos todo lo desarrollado hasta el momento para hablar de un $\mathscr{C}$−grupo cuya estructura se la heredará al conjunto $\mathscr{C}(X, Y)$ el cual será de grupo.

2.1. Representabilidad

Definición 2.1.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ un funtor covariante, decimos que F es ***representable*** si existe K en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tal que para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, existe un isomorfismo natural:

$$\mathscr{C}(K, X) \xrightarrow{\tau_X} FX. \tag{2.1}$$

A K lo llamamos ***objeto universal de*** F

Definición 2.1.2. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ un funtor contravariante, decimos que F es ***representable*** si existe K en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tal que para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, existe un isomorfismo natural:

$$\mathscr{C}(X, K) \xrightarrow{\tau_X} FX \tag{2.2}$$

A K lo llamamos ***objeto universal de*** F

Teorema 2.1.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoria y sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ un funtor covariante (o contravariante) representable y sean K_1, K_2 objetos universales de F. Entonces K_1 es isomorfo a K_2.*

Demostración.

Caso 1) Si F es covariante y representable con objetos universales K_1 y K_2, se tiene que para toda X en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$ existen τ_X y σ_X isomorfismos naturales:

$$\mathscr{C}(K_1, X) \xrightarrow{\tau_X} FX \qquad \mathscr{C}(K_2, X) \xrightarrow{\sigma_X} FX$$

En particular se tiene que existen los siguientes morfismos.

$$\mathscr{C}(K_1, K_1) \xrightarrow{\tau_{K_1}} FK_1, \qquad \mathscr{C}(K_2, K_2) \xrightarrow{\sigma_{K_2}} FK_2,$$

$$\mathscr{C}(K_1, K_2) \xrightarrow{\tau_{K_2}} FK_2 \qquad \text{y} \qquad \mathscr{C}(K_2, K_1) \xrightarrow{\sigma_{K_1}} FK_1.$$

Sean $\psi : K_1 \longrightarrow K_2$ y $\varphi : K_2 \longrightarrow K_1$ definidas de la siguiente forma:

$$\psi := \tau_{K_2}^{-1} \circ \sigma_{K_2}(1_{K_2}) \qquad \varphi := \sigma_{K_1}^{-1} \circ \tau_{K_1}(1_{K_1})$$

Ahora falta verificar que $\psi \circ \varphi = 1_{K_1}$ y $\varphi \circ \psi = 1_{K_2}$. Dada la naturalidad de τ y σ, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[d, "\psi"'] \\ K_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{C}(K_1, K_1) \arrow[r, "\tau_{K_1}"] \arrow[d, "\psi_*"'] & FK_1 \arrow[d, "F\psi"] \\ \mathscr{C}(K_1, K_2) \arrow[r, "\tau_{K_2}"'] & FK_2, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{C}(K_2, K_1) \arrow[r, "\sigma_{K_1}"] \arrow[d, "\psi_*"'] & FK_1 \arrow[d, "F\psi"] \\ \mathscr{C}(K_2, K_2) \arrow[r, "\sigma_{K_2}"'] & FK_2, \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K_2 \arrow[d, "\varphi"'] \\ K_1 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{C}(K_2, K_2) \arrow[r, "\sigma_{K_2}"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & FK_2 \arrow[d, "F\varphi"] \\ \mathscr{C}(K_2, K_1) \arrow[r, "\sigma_{K_1}"'] & K_1, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathscr{C}(K_1, K_2) \arrow[r, "\tau_{K_2}"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & FK_2 \arrow[d, "F\varphi"] \\ \mathscr{C}(K_1, K_1) \arrow[r, "\tau_{K_1}"'] & FK_1. \end{tikzcd}$$

De estos cuatro diagramas se obtienen las siguientes igualdades:

$$\tau_{K_2}(\psi) = F\psi(\tau_{K_1}(1_{K_1})), \qquad \sigma_{K_1}(\varphi) = F\varphi(\sigma_{K_2}(1_{K_2})),$$
$$\sigma_{K_2}(\psi \circ \varphi) = F\psi(\sigma_{K_1}(\varphi)), \qquad \tau(\varphi \circ \psi) = F\varphi(\tau_{K_2}(\psi)).$$

Ahora, juntando la cuatro igualdades, así como las definiciones de φ y ψ, se obtiene que:

$$\tau_{K_1}(\varphi \circ \psi) = F\varphi(\tau_{K_2} \circ \psi) = F\varphi(\sigma_{K_2}(1_{K_2})) = \sigma_{K_1} \circ \varphi = \tau_{K_1}(1_{K_1})$$

Pero τ es un isomorfismo natural, por lo que τ_X es una función biyectiva para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Y en particular, se tiene que τ_{K_1} es una función biyectiva, por lo que se obtiene que $\varphi \circ \psi = 1_{K_1}$. Análogamente, se tiene que:

$$\sigma_{K_2}(\psi \circ \varphi) = F\psi(\sigma_{K_1} \circ \varphi) = F\psi(\tau_{K_1}(id_{K_1})) = \tau_{K_2} \circ \psi = \sigma_{K_2}(id_{K_2})$$

lo cual implica que $\psi \circ \varphi = 1_{K_2}$. Por lo tanto K_1 es isomorfo a K_2.
Caso 2) Si F es contravariante un argumento enteramente análogo al anterior nos da que K_1 es isomorfo a K_2. □

2.2. Lema de Yoneda

A continuación se verá un resultado que nos caracteriza las transformaciones naturales.

Lema 2.2.1 (Yoneda)**.** *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ un funtor covariante y sea Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ fijo. Entonces existe una biyección:*

$$\mathcal{Y} : Nat(\mathscr{C}(Z, \_), F) \longrightarrow FZ$$

dada por

$$\tau \longmapsto \tau_Z(1_Z). \tag{2.3}$$

Demostración.
La demostración la dividiremos en 2 partes:

1) Primero se verificará que $\mathcal{Y}$ es inyectiva. Para esto, sean τ y σ dos transformaciones naturales:

$$\tau, \sigma : \mathscr{C}(Z, \_) \longrightarrow F$$

tales que $\mathcal{Y}(\tau) = \mathcal{Y}(\sigma)$. Entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "\varphi"'] \\ X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C}(Z,Z) \arrow[r, "\tau_Z"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & FZ \arrow[d, "F\varphi"] \\ \mathscr{C}(Z,X) \arrow[r, "\tau_X"'] & FX, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C}(Z,Z) \arrow[r, "\sigma_Z"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & FZ \arrow[d, "F\varphi"] \\ \mathscr{C}(Z,X) \arrow[r, "\sigma_X"'] & FX, \end{tikzcd}$$

para todo morfismo $\varphi : Z \longrightarrow X$.

De los cuales se obtienen las siguientes igualdades:

$$\tau_X(\varphi) = F\varphi(\tau_Z(1_Z))\text{y} \qquad \sigma_X(\varphi) = F\varphi(\sigma_Z(1_Z)$$

para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Pero $\tau_Z(1_Z) = \mathcal{Y}(\tau) = \mathcal{Y}(\sigma) = \sigma_Z(1_Z)$, por lo que se tiene que:

$$\tau_X(\varphi) = F\varphi(\tau_Z(1_Z)) = F\varphi(\sigma_Z(1_Z) = \sigma_X(\varphi)$$

Y como esto sucede para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, se concluye que $\tau = \sigma$ y que $\mathcal{Y}$ es inyectiva.

2) Ahora se verificará que $\mathcal{Y}$ es suprayectiva.

Dado $u \in FZ$, se define la siguiente transformación natural, para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$,

$$\tau_X^u : \mathscr{C}(Z,X) \longrightarrow FX$$

dada por

$$\varphi \longmapsto F\varphi(u)$$

Hay que verificar que en efecto es una transformación natural, *i.e*, hay que verificar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{C}(Z,X) \arrow[r, "\tau_X^u"] \arrow[d, "f_*"'] & FX \arrow[d, "Ff"] \\ \mathscr{C}(Z,Y) \arrow[r, "\tau_Y^u"'] & FY, \end{tikzcd}$$

para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y cualquier morfismo $F : X \longrightarrow Y$. Sea $\varphi : Z \longrightarrow X$ entonces se tiene que:

$$\tau_Y^u(f \circ \varphi) = F(f \circ \varphi)(u) = (Ff \circ F\varphi)(u) = Ff(F\varphi(u)),$$

ya que F es un funtor covariante. Por lo tanto τ^u es transformación natural. Y además

$$\mathcal{Y}(\tau) = \tau_Z^u(1_Z) = F1_Z(u) = 1_{FZ}(u) = u,$$

nuevamente por ser F un funtor. Por lo tanto $\mathcal{Y}$ es una biyección entre $Nat(\mathscr{C}(Z, \_), F)$ y FZ.

$\square$

El lema de Yoneda sugiere que en vez de investigar la categoría (pequeña) $\mathscr{C}$, podemos estudiar la categoría de todos los funtores desde $\mathscr{C}$ a la categoría $\mathscr{Set}$.

También hay una versión para funtores contravariantes, se enuncia a continuación, pero se omite su demostración al ser análoga a la anterior.

Lema 2.2.2 (Yoneda)**.** *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ un funtor contravariante y sea Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ fijo. Entonces existe una biyeccion:*

$$\mathcal{Y} : Nat(\mathscr{C}(\_, Z), F) \longrightarrow FZ$$

dada por

$$\tau \longmapsto \tau_Z(1_Z). \tag{2.4}$$

$\square$

2.3. Objeto inicial y objeto final

Definición 2.3.1. Sea $\{*\}$ un conjunto cuyo único elemento es $*$ definimos al ***funtor constante*** $1 : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$ de la siguiente mantera:

1) Sea X en $\mathcal{O}bj\,\mathscr{C}$ entonces $1X = \{*\}$

2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ donde X, Y están en $\mathcal{O}bj\,\mathscr{C}$ entonces $1f = 1_{\{*\}}$

Observemos que, dados cualesquiera X, Y en $\mathcal{O}bj\,\mathscr{C}$ se tiene que $1X = \{*\} = 1Y$ entonces si $f : X \longrightarrow Y$, al aplicar el funtor se tiene que $1f : 1X \longrightarrow 1Y$ (aquí seria el funtor 1 covariante). Pero también $1f : 1Y \longrightarrow 1X$ (aquí el funtor 1 seria contravariante). Por lo que el funtor constante 1 lo podemos ver como funtor covariante o como funtor contravariante según sea el caso.

Definición 2.3.2.

1) Si el funtor covariante constante 1 es representable denotamos como $\boldsymbol{I}$ a su objeto universal asociado.

2) Si el funtor contravariante constante 1 es representable denotamos como $\boldsymbol{T}$ a su objeto universal asociado.

En virtud del teorema 2.1.3 si 1 es representable entonces cualquier otro objeto universal de 1 va a ser isomorfo a I (ó a T, según sea el caso), por lo que, tanto I como T son únicos, salvo isomorfismo. A continuación, damos un teorema que caracteriza la representabilidad del funtor constante.

Teorema 2.3.3.

1) El funtor covariante constante 1 *es representable si y sólo si* I *es un objeto inicial.*

2) El funtor contravariante constante 1 *es representable si y sólo si* T *es un objeto terminal.*

Demostración.

Caso 1) Cuando el funtor 1 es covariante.

Suponemos que el funtor 1 es representable. Entonces existe su objeto universal I y un isomorfismo natural τ_X para todo X en $\mathcal{O}bj\,\mathscr{C}$:

$$\tau_X : \mathscr{C}(I, X) \longrightarrow 1X$$

Pero τ_X es biyectiva, entonces los conjuntos $1X$ y $\mathscr{C}(I,X)$ tienen la misma cardinalidad. Ademas se sabe que $1X = \{*\}$, *i.e*, $1X$ tiene un único elemento. Por lo que se tiene que existe una única $f_X : I \longrightarrow X$ para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Ahora, se supone que la categoría $\mathscr{C}$ tiene objeto inicial I. Sea $\varphi_X : I \longrightarrow X$ la única función para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Se define la siguiente función entre conjuntos:

$$\begin{aligned} \tau_X : \mathscr{C}(I,X) &\longrightarrow 1X \\ \varphi_X &\longmapsto * \end{aligned}$$

Ahora, hay que verificar que τ_X es un isomorfismo natural para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. La biyectividad es inmediata, dado que tanto $\mathscr{C}(I,X)$ y $1X$ tienen un solo elemento. Para ver que τ es una transformación natural, hay que verificar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{C}(I,X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & 1X \arrow[d, "1\varphi"] \\ Y & \mathscr{C}(I,Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & 1Y, \end{tikzcd}$$

para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y $\varphi : X \longrightarrow Y$. Se verifica que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \varphi_X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & * \arrow[d, mapsto] \\ \varphi \circ \varphi_X = \varphi_Y \arrow[r, mapsto] & * \end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que τ_X es una transformación natural para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Caso 2) Si el funtor 1 contravariante. Se demuestra análogo al **Caso 1**. $\square$

2.4. Productos y coproductos

2.4.1. Producto

Definición 2.4.1. Dados L, M en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, definimos un ***producto finito, de*** L ***y*** M***,*** como un objeto $L \times M$ en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, junto con morfismos

$$L \xleftarrow{\pi_L} L \times M \xrightarrow{\pi_M} M$$

tales que cumplen la siguiente

Propiedad Universal (Producto)*.*

Para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y dados morfismos $f_L : X \longrightarrow L$ y $f_M : X \longrightarrow M$, existe un único morfismo $f : X \longrightarrow L \times M$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_L"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_M"] & \\ L & L \times M \arrow[l, "\pi_L"] \arrow[r, "\pi_M"'] & M \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

conmuta.

Notación. Al morfismo f lo denotaremos por (f_L, f_M).

Definición 2.4.2. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ tiene productos finitos si cualesquiera par de objetos en ésta tienen producto finito.

Definición 2.4.3. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sean L, M en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ fijos. Definimos al funtor contravariante:

$$\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$$

como sigue:

1) Sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces:

$$\Big(\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M)\Big) X = \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M)$$

2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ donde X, Y están en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, luego:

$$f^* \times f^* := \Big(\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M) \Big) f = \mathscr{C}(f, L) \times \mathscr{C}(f, M)$$

donde:

$$f^* \times f^* : \mathscr{C}(Y, L) \times \mathscr{C}(Y, M) \longrightarrow \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M)$$

está dado por

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (\varphi \circ f, \psi \circ f)$$

Nota. Observe que el producto $\mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M)$ es el producto usual de conjuntos cuyos elementos son de la forma $(\varphi, \psi) \in \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M)$.

A continuación se verá una caracterización para el producto finito en una categoría $\mathscr{C}$.

Teorema 2.4.4. *En una categoría $\mathscr{C}$ los objetos L, M en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tienen producto finito si y sólo si el funtor $\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M)$ es representable.*

Demostración.

Supongamos que la categoría $\mathscr{C}$ tiene producto finito. Sean L, M en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Entonces existe $L \times M$ en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ junto con morfismos $\pi_L : L \times M \longrightarrow L$ y $\pi_M : L \times M \longrightarrow M$. Se propone a $L \times M$ como objeto universal de $\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M)$. Es suficiente verificar que existe un isomorfismo natural entre los funtores $\mathscr{C}(\_, L \times M)$ y $\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M)$. Se define a τ como sigue:

$$\tau_X : \mathscr{C}(X, L \times M) \longrightarrow \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M)$$

$$f \longmapsto (\pi_L \circ f, \pi_M \circ f)$$

Primero, para verificar que τ_X es biyectiva, se dará su función inversa. Se define la función σ_X como:

$$\begin{aligned}\sigma_X : \mathscr{C}(X,L) \times \mathscr{C}(X,M) &\longrightarrow \mathscr{C}(X, L \times M)\\ (g_L, g_M) &\longmapsto g\end{aligned}$$

Donde la g viene dada por la propiedad universal del producto finito, por lo que σ_X está bien definida. Ahora hay que verificar que:

1) $\tau_X \circ \sigma_X = 1_{\mathscr{C}(X,L)\times\mathscr{C}(X,M)}$.

2) $\sigma_X \circ \tau_X = 1_{\mathscr{C}(X,L\times M)}$.

Para (1) se tiene que:

$$\tau_X \circ \sigma_X(f_L, f_M) = \tau_X(f) = (\pi_L \circ f, \pi_M \circ f) \overset{(i)}{=} (f_L, f_M)$$

La igualdad indicada con (i) viene dada por la conmutatividad del diagrama del producto finito. Por lo tanto se tiene que $\tau_X \circ \sigma_X = id_{\mathscr{C}(X,L)\times\mathscr{C}(X,M)}$.

Para (2) se tiene que:

$$\sigma_X \circ \tau_X(f) = \sigma_X(\pi_L \circ f, \pi_M \circ f) \overset{(ii)}{=} f$$

La igualdad marcada con (ii) viene dada por la propiedad universal del producto finito y por la unicidad de una f tal. Por lo que se tiene que $\sigma_X \circ \tau_X = id_{\mathscr{C}(X,L\times M)}$.

Juntando ambos resultados se obtiene que τ_X es biyectiva. Ahora falta verificar la naturalidad de τ_X, eso se hará verificando que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{C}(Y, L\times M) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \mathscr{C}(Y,L) \times \mathscr{C}(Y,M) \arrow[d, "\varphi^*\times\varphi^*"] \\
Y & \mathscr{C}(X, L\times M) \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathscr{C}(X,L) \times \mathscr{C}(X,M),
\end{tikzcd}$$

para cualesquiera X, Y en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ y cualquier morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$. En efecto, sea $f \in \mathscr{C}(Y, L \times M)$, entonces

$$\tau_X(f \circ \varphi) = (\pi_L \circ (f \circ \varphi), \pi_M \circ (f \circ \varphi)) \overset{(iii)}{=} ((\pi_L \circ f) \circ \varphi, (\pi_M \circ f) \circ \varphi)$$

donde la igualdad marcada con (iii) viene dada por la asociatividad de funciones entre conjuntos. Entonces se tiene que el diagrama conmuta, por lo que τ_X es una transformación natural para todo X en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ y τ_X es un isomorfismo natural para todo X en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$.

Ahora se supone que $\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M)$ es representable. Entonces se tiene que existe $K_{L,M}$ en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ tal que es su objeto universal. Sea X en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $\tau_X : \mathscr{C}(X, K_{L,M}) \longrightarrow \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M)$ isomorfismo natural asociado a X.

En particular, existe $\tau_{K_{L,M}} : \mathscr{C}(K_{L,M}, K_{L,M}) \longrightarrow \mathscr{C}(K_{L,M}, L) \times \mathscr{C}(K_{L,M}, M)$. Se definen π_L y π_M con la propiedad universal del producto en $\mathscr{S}et$, el cual sabemos que siempre existe. Esto es,

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C}(K_{L,M}, K_{L,M}) \arrow[dl, "\pi_1 \circ \tau_{K_{L,M}}"'] \arrow[d, "\tau_{K_{L,M}}"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ \tau_{K_{L,M}}"] & \\ \mathscr{C}(K_{L,M}, L) & \mathscr{C}(K_{L,M}, L) \times \mathscr{C}(K_{L,M}, M) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & \mathscr{C}(K_{L,M}, M) \end{tikzcd}$$

por lo que, para el morfismo identidad $1_{K_{L,M}} : K_{L,M} \longrightarrow K_{L,M}$ se tiene

$$\begin{tikzcd} & 1_{K_{L,M}} \arrow[dl, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ \pi_1 \circ \tau_{K_{L,M}}(1_{K_{L,M}}) & \tau_{K_{L,M}}(1_{K_{L,M}}) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \pi_2 \circ \tau_{K_{L,M}}(1_{K_{L,M}}) \end{tikzcd}$$

Se definen los morfismos proyecciones π_L y π_M como

$$\pi_L := \pi_1 \circ \tau_{K_{L,M}}(1_{K_{L,M}}) \quad \text{y} \quad \pi_M := \pi_2 \circ \tau_{K_{L,M}}(1_{K_{L,M}}) \tag{2.6}$$

Veamos que la categoría $\mathscr{C}$ tiene la propiedad universal del producto finito, *i.e*, sea X en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ y sean $f_L : X \longrightarrow L$ y $f_M : X \longrightarrow M$, probaremos que existe $f : X \longrightarrow K_{L,M}$ único tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_L"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_M"] & \\ L & K_{L,M} \arrow[l, "\pi_L"] \arrow[r, "\pi_M"'] & M \end{tikzcd}$$

Para demostrar la existencia de f, se procede como sigue:

Dada $(f_L, f_M) \in \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M)$, al ser τ_X un isomorfismo natural, sabemos que τ_X^{-1} es equivalencia natural. Definimos a $f := \tau_X^{-1}(f_L, f_M)$, la cual es única dada la biyectividad de τ_X^{-1}. Sólo falta verificar la conmutatividad del diagrama. Dada la naturalidad de τ_X se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & \mathscr{C}(K_{L,M}, K_{L,M}) \arrow[r, "\tau_{K_{L,M}}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathscr{C}(K_{L,M}, L) \times \mathscr{C}(K_{L,M}, M) \arrow[d, "f^* \times f^*"] \\ K_{L,M} & \mathscr{C}(X, K_{L,M}) \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M) \end{tikzcd}$$

de donde se obtiene la igualdad

$$\tau_X(f) = (f_L, f_M) = (\pi_L \circ f, \pi_M \circ f)$$

la cual está dada por la definición de π_L y π_M en la ecuación (2.6) y por como se definió f.

Por lo que se obtienen las siguientes igualdades:

$$\pi_L \circ f = f_L \quad \text{y} \quad \pi_M \circ f = f_M$$

□

Notación. En virtud de los teoremas 2.1.3 y 2.4.4, tenemos que cada vez que el funtor $\mathscr{C}(\_, L) \times \mathscr{C}(\_, M)$ sea representable, su objeto universal sera $L \times M$ y viceversa.

Ejemplo 2.4.5.

Sea una categoría $\mathscr{C}$ tal que tiene objeto final T. Entonces $T \times X \cong X \times T \cong X$ para cualquier X en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$. Basta considerar los siguientes dos diagramas.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f_T"] & \\ X & X \arrow[l, "id_X"] \arrow[r, "g_T"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f_T"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \arrow[dr, "f"] & \\ T & X \arrow[l, "g_T"] \arrow[r, "id_X"'] & X \end{tikzcd}$$

donde $f_T : Y \longrightarrow T$ y $g_T : X \longrightarrow T$ son los únicos morfismos, debido a que T es un objeto terminal.

Por lo que X cumple la propiedad universal del producto para $(X \times T, (id_x, G_T))$ y $(T \times X, (g_T, id_x))$.

Generalicemos ahora el producto para cualquier cantidad de objetos.

Definición 2.4.6. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia indexada, donde X_λ esta en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Se define un ***producto*** como un objeto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$, junto con morfismos

$$\pi_{X_\lambda} : \textstyle\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow X_\lambda$$

tales que cumplen la siguiente

Propiedad Universal (Producto).

Para cualquier Y en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ y dadas $f_\lambda : Y \longrightarrow X_\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$ entonces existe una única $f : Y \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f_\lambda"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ X_\lambda & \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \arrow[l, "\pi_{X_\lambda}"] \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

conmuta.

Definición 2.4.7. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ tiene producto si cualesquiera objetos en ésta tienen producto.

Definición 2.4.8. Dada una familia indexada, $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, de objetos de $\mathscr{C}$, se define al funtor contravariante:

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(\_, X_\lambda) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et$$

como sigue:

1) Sea Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces:

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(\_, X_\lambda)\right) Y := \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(Y, X_\lambda)$$

2) Sea $g : Y \longrightarrow Z$ donde Y, Z están en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, entonces:

$$\prod g^* := \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(\_, X_\lambda)\right) g = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(g, X_\lambda)$$

Donde:

$$\prod g^* : \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(Z, X_\lambda) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(Y, X_\lambda)$$

está dada por

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda \longmapsto \prod_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda \circ g)$$

Análogamente se tiene un teorema que caracteriza el producto generalizado en una categoria $\mathscr{C}$.

Teorema 2.4.9. *Dada $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, una familia indexada de objetos, en $\mathscr{C}$. Entonces $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene producto si y sólo si el funtor $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(\_, X_\lambda)$ es representable.*

Demostración.

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 2.4.4 y basta verificar que existe un isomorfismo natural entre:

$$\mathscr{C}(Y, \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(Y, X_\lambda)$$

$\square$

2.4.2. Coproducto

Definición 2.4.10. Dados L, M en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$, definimos un ***coproducto finito, de L y M,*** como un objeto $L \amalg M$ en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$, junto con morfismos

$$L \xrightarrow{\iota_L} L \amalg M \xleftarrow{\iota_M} M$$

tales que cumplen la siguiente

Propiedad Universal (Coproducto).

Para cualquier X en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ y dados $f_L : L \longrightarrow X$ y $f_M : M \longrightarrow X$, existe un único $f : L \amalg M \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[dr, "f_L"'] & L \amalg M \arrow[d, dashed, "\exists ! f"] & M \arrow[l, "\iota_M"'] \arrow[dl, "f_M"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

conmuta.

Definición 2.4.11. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ tiene coproducto finito si cualesquiera par de objetos en ésta tienen coproducto finito.

Definición 2.4.12. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sean L, M en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ fijos. Definimos al funtor covariante:

$$\mathscr{C}(L, \_) \times \mathscr{C}(M, \_)$$

como sigue:

1) Sea X en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ entonces:

$$\Big(\mathscr{C}(L, \_) \times \mathscr{C}(M, \_) \Big) X = \mathscr{C}(L, X) \times \mathscr{C}(M, X)$$

2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ donde X, Y están en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ entonces:

$$f^* \times f^* := \Big(\mathscr{C}(L, \_) \times \mathscr{C}(M, \_) \Big) f = \mathscr{C}(L, f) \times \mathscr{C}(M, f)$$

Donde:

$$f_* \times f_* : \mathscr{C}(L, X) \times \mathscr{C}(M, X) \longrightarrow \mathscr{C}(L, Y) \times \mathscr{C}(M, Y)$$

está dado por

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (f \circ \varphi, f \circ \psi).$$

A continuación se verá una caracterización para el coproducto finito en una categoría $\mathscr{C}$.

Teorema 2.4.13. *En una categoría $\mathscr{C}$ los objetos L, M en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tienen coproducto finito si y sólo si el funtor $\mathscr{C}(L, \_) \times \mathscr{C}(M, \_)$ es representable.*

Demostración.
Suponemos que la categoría $\mathscr{C}$ tiene coproducto finito.Entonces se tiene que $(L \amalg M, (\iota_L, \iota_M))$ está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Se propone a $L \amalg M$ como objeto universal de $\mathscr{C}(L, \_) \times \mathscr{C}(M, \_)$. Es suficiente verificar que existe un isomorfismo natural entre los funtores $\mathscr{C}(L \amalg M, \_)$ y $\mathscr{C}(L, \_) \times \mathscr{C}(M, \_)$. Se define a τ componente a componente como

$$\tau_X : \mathscr{C}(L \amalg M, X) \longrightarrow \mathscr{C}(L, X) \times \mathscr{C}(M, X),$$

$$f \longmapsto (f \circ \iota_L, f \circ \iota_M).$$

Primero, para verificar que τ_X es biyectiva, se dará su función inversa. Se define la función σ_X como:

$$\sigma_X : \mathscr{C}(L, X) \times \mathscr{C}(M, X) \longrightarrow \mathscr{C}(L \amalg M, X)$$

$$(g_L, g_M) \longmapsto g,$$

donde la g viene dada por la propiedad universal del coproducto finito, por lo que σ_X esta bien definida. Ahora hay que verificar que:

1) $\tau_X \circ \sigma_X = id_{\mathscr{C}(X,L)\times\mathscr{C}(X,M)}$

2) $\sigma_X \circ \tau_X = id_{\mathscr{C}(L\amalg M,X)}$

Para (1) se tiene:

$$\tau_X \circ \sigma_X(f_L, f_M) = \tau_X(f) = (f \circ \iota_L, f \circ \iota_M) \overset{(i)}{=} (f_L, f_M)$$

La igualdad marcada con (i) viene dada por la existencia del coproducto finito y se tiene que $\tau_X \circ \sigma_X = id_{\mathscr{C}(X,L)\times\mathscr{C}(X,M)}$.

Para (2) se tiene:

$$\sigma_X \circ \tau_X(f) = \sigma_X(f \circ \iota_L, f \circ \iota_M) \overset{(ii)}{=} f$$

La igualdad marcada con (ii) viene dada por la propiedad universal del coproducto finito y se sigue que $\sigma_X \circ \tau_X = id_{\mathscr{C}(L\amalg M,X)}$. Juntando ambas igualdades se obtiene que τ_X es biyectiva. Ahora falta verificar la naturalidad de τ_X, eso se hará verificando que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{C}(L\amalg M, X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \mathscr{C}(L,X)\times\mathscr{C}(M,X) \arrow[d, "\varphi_*\times\varphi_*"] \\ Y & \mathscr{C}(L\amalg M, Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & \mathscr{C}(L,Y)\times\mathscr{C}(M,Y) \end{tikzcd}$$

para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y $\varphi : X \longrightarrow Y$. En efecto, sea $f \in \mathscr{C}(L\amalg M, X)$

$$\tau_Y(\varphi \circ f) = ((\varphi \circ f) \circ \iota_L, (\varphi \circ f) \circ \iota_M) \overset{(iii)}{=} (\varphi \circ (f \circ \iota_L), \varphi \circ (f \circ \iota_M))$$

donde la igualdad indicada con (iii) viene dada por la asociatividad de funciones en conjuntos. Entonces el diagrama conmuta y τ_X es una transformación natural para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Por lo tanto τ_X es un isomorfismo natural para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Ahora, se supone que $\mathscr{C}(L,\_)\times\mathscr{C}(M,\_)$ es representable. Entonces se tiene que existe $K^{L,M}$ en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tal que es su objeto universal.

Sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $\tau_X : \mathscr{C}(K^{L,M}, X) \longrightarrow \mathscr{C}(L, X) \times \mathscr{C}(M, X)$ la equivalencia natural asociada a X.

En particular, existe $\tau_{K^{L,M}} : \mathscr{C}(K^{L,M}, K^{L,M}) \longrightarrow \mathscr{C}(L, K^{L,M}) \times \mathscr{C}(M, K^{L,M})$. Se definen ι_L e ι_M con la propiedad universal del producto en $\mathscr{Set}$, el cual sabemos que siempre existe. Esto es,

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{C}(K^{L,M}, K^{L,M}) \arrow[dl, "\pi_1\circ\tau_{K^{L,M}}"'] \arrow[d, "\tau_{K^{L,M}}"] \arrow[dr, "\pi_2\circ\tau_{K^{L,M}}"] & \\
\mathscr{C}(L, K^{L,M}) & \mathscr{C}(L, K^{L,M}) \times \mathscr{C}(M, K^{L,M}) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & \mathscr{C}(M, K^{L,M})
\end{tikzcd}$$

por lo que, para el morfismo identidad $1_{K^{L,M}} : K^{L,M} \longrightarrow K^{L,M}$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
 & 1_{K^{L,M}} \arrow[dl, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
\pi_1 \circ \tau_{K^{L,M}}(1_{K^{L,M}}) & \tau_{K^{L,M}}(1_{K^{L,M}}) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \pi_2 \circ \tau_{K^{L,M}}(1_{K^{L,M}})
\end{tikzcd}$$

Se definen los morfismos proyecciones ι_L y ι_M como

$$\iota_L := \pi_1 \circ \tau_{K^{L,M}}(1_{K^{L,M}}) \quad \text{y} \quad \iota_M := \pi_2 \circ \tau_{K^{L,M}}(1_{K^{L,M}}) \tag{2.9}$$

Ahora se vera que la categoría $\mathscr{C}$ tiene la propiedad universal del coproducto finito, *i.e* sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sean $f_L : L \longrightarrow X$ y $f_M : M \longrightarrow X$ entonces existe $f : K^{L,M} \longrightarrow X$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[dr, "f_L"'] & K^{L,M} \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & M \arrow[l, "\iota_M"'] \arrow[dl, "f_M"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Para demostrar la existencia de f, se procede como sigue:

Dada $(f_L, f_M) \in \mathscr{C}(L, X) \times \mathscr{C}(M, X)$ y al ser τ_X un isomorfismo natural, sabemos que τ_X^{-1} es isomorfismo natural. Definimos a $f := \tau_X^{-1}(f_L, f_M)$, la cual es única dada la biyectividad de τ_X^{-1}.

Ahora, solo falta verificar la conmutatividad del diagrama, dada la naturalidad de τ_X se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} K^{L,M} \arrow[d, "f"] & \mathscr{C}(K^{L,M}, K^{L,M}) \arrow[r, "\tau_{K^{L,M}}"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathscr{C}(K^{L,M}, L) \times \mathscr{C}(K^{L,M}, M) \arrow[d, "f_* \times f_*"] \\ X & \mathscr{C}(X, K^{L,M}) \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathscr{C}(X, L) \times \mathscr{C}(X, M) \end{tikzcd}$$

de donde se obtiene la igualdad

$$\tau_X(f) = (f_L, f_M) = (f \circ \iota_L, f \circ \iota_M)$$

la cual está dada por la definición de ι_L e ι_M en la ecuación (2.9) y por como se definió f.

Por lo que se obtienen las siguientes igualdades:

$$f \circ \iota_L = f_L \quad \text{y} \quad f \circ \iota_M = f_M$$

$\square$

Notación. En virtud de los teoremas 2.1.3 y 2.4.13, tenemos que cada vez que el funtor $\mathscr{C}(L, \_) \times \mathscr{C}(M, \_)$ sea representable, su objeto universal sera $L \amalg M$ y viceversa.

Ejemplo 2.4.14.

Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto inicial I. Entonces para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, $I \amalg X \cong X \amalg I \cong X$. Para ver esto, basta considerar los siguientes dos diagramas:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & I \arrow[l, "g_I"'] \arrow[dl, "f_I"] \\ & Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[r, "g_I"] \arrow[dr, "f_I"'] & X \arrow[d, dashed, "\exists! f"] & X \arrow[l, "id_X"'] \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

donde $f_I : I \longrightarrow Y$ y $g_I : I \longrightarrow X$ son los únicos morfismos debido a que I es objeto inicial.

Por lo que X cumple la propiedad universal del coproducto para $(X \amalg I, (id_x, g_I))$ y $(I \amalg X, (g_I, id_X))$.

Ahora, se generalizara el coproducto para cualquier cantidad de objetos.

Definición 2.4.15. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia indexada, donde X_λ esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Se define un ***coproducto*** como un objeto $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, junto con morfismos

$$\iota_{X_\lambda} : X_\lambda \longrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

tales que cumplen la siguiente

Propiedad Universal (Coproducto).

Para cualquier Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y dadas $f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y$ para toda $\lambda \in \Lambda$ entonces existe una única $f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "\iota_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & Y \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

conmuta.

Definición 2.4.16. Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ tiene coproducto si cualesquiera objetos en ésta tienen coproducto.

Definición 2.4.17. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia indexada, donde X_λ esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ para toda $\lambda \in \Lambda$. Definimos al funtor covariante:

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, \_) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$$

como sigue:

1) Sea Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces:

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, \_)\right) Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, Y)$$

2) Sea $g : Y \longrightarrow Z$ donde Y, Z están en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$, entonces:

$$\prod_{\lambda\in\lambda} g_* := \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, \_)\right) g = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, g)$$

Donde

$$\textstyle\prod_{\lambda\in\Lambda} g_* : \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, Y) \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, Z)$$

está dado como sigue

$$\textstyle\prod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda \longmapsto \prod_{\lambda\in\Lambda}(g \circ f_\lambda)$$

Análogamente se tiene un teorema que caracteriza el coproducto generalizado en una categoria $\mathscr{C}$.

Teorema 2.4.18. *Dada $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, una familia indexada de objetos, en $\mathscr{C}$. Entonces $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tiene coproducto si y sólo si el funtor $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, \_)$ es representable.*

Demostración.

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 2.4.13 y basta verificar que existe un isomorfismo natural entre:

$$\textstyle\mathscr{C}(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, Y) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{C}(X_\lambda, Y).$$

□

2.5. Producto fibrado y coproducto fibrado

2.5.1. Producto fibrado

Definición 2.5.1. Dados X, Y, A en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ y morfismos $f : X \longrightarrow A$ y $g : Y \longrightarrow A$, decimos que el quinteto(X, Y, A, f, g) tiene ***producto fibrado*** si existe la solución al diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

en otras palabras, los objetos X, Y, A en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, junto con los morfismos f y g, tienen producto fibrado si se puede construir su cuadrado cartesiano.

Notación. Como vimos en la sección 1.6, al ser el producto fibrado la solución del cuadrado cartesiano, lo denotaremos como $X \times_A Y$.

Definición 2.5.2. Decimos que una categoría tiene ***producto fibrado*** si para cualquier quinteto dado, se puede construir su cuadrado cartesiano.

El siguiente teorema nos dará una forma de saber si existe el producto fibrado en una categoría.

Teorema 2.5.3. *Dada una categoría $\mathscr{C}$, si ésta tiene igualadores y producto entonces tiene producto fibrado.*

Demostración.
Sea $\mathscr{C}$ una categoría con igualadores y producto. Sean X, Y, A en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y morfismos $f : X \longrightarrow A$, $g : Y \longrightarrow A$, tales que se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Al tener la categoría producto, entonces se tiene que $X \times Y$ esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, y ademas existen morfismos $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$, entonces se puede componer

$$X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X \xrightarrow{f} A \qquad\qquad X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y \xrightarrow{g} A$$

por lo cual obtenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, shift left, "f\circ\pi_X"] \arrow[r, shift right, "g\circ\pi_Y"'] & A \end{tikzcd}$$

Pero la categoría tiene igualadores, entonces existen W en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y un morfismo $e : W \longrightarrow X \times Y$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "e"] & X \times Y \arrow[r, shift left, "f\circ\pi_X"] \arrow[r, shift right, "g\circ\pi_Y"'] & A. \end{tikzcd}$$

Por lo anterior, se tiene que el cuadrado exterior conmuta.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, bend left, "\pi_Y\circ e"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_X\circ e"'] & & \\ & X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Entonces se propone a $X \times_A Y := W$ para completar el cuadrado cartesiano. Falta ver que el siguiente diagrama es de cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} X \times_A Y \arrow[r, "\pi_Y\circ e"] \arrow[d, "\pi_X\circ e"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Para eso, sean Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y $\alpha : Z \longrightarrow X$ y $\beta : Z \longrightarrow Y$ tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Por consiguiente $f \circ \alpha = g \circ \beta$, lo cual implica que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[dr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "\pi_Y \circ e"'] \arrow[d, "\pi_X \circ e"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Verifiquemos que existe una única $h : Z \longrightarrow X \times_A Y$ que haga conmutar todo el diagrama. Para esto, se considera que existe un único morfismo $\varphi : Z \longrightarrow X \times Y$ tal que hace conmutar al diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, dashed, "\exists! \varphi"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

ya que la categoría tiene producto. Entonces se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \times_A Y \arrow[r, "e"] & X \times Y \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_X"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_Y"'] & A \\
Z \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Pero $X \times_A Y$, junto con $e : X \times_A Y \longrightarrow X \times Y$, es el igualador de $f \circ \pi_X$ y $g \circ \pi_Y$, entonces por la propiedad universal de los igualadores, se tiene que existe una única $h : Z \longrightarrow X \times_A Y$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \times_A Y \arrow[r, "e"] & X \times Y \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_X"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_Y"'] & A \\
Z \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Dicha h es la que sirve para que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\exists! h"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& X \times_A Y \arrow[r, "\pi_Y \circ e"'] \arrow[d, "\pi_X \circ e"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmute, dado que usando el diagrama del producto se tiene

$$(\pi_X \circ e) \circ h = \pi_X \circ \varphi = \alpha$$
$$(\pi_Y \circ e) \circ h = \pi_Y \circ \varphi = \beta$$

□

Hay un teorema que nos dará una caracterización sobre la existencia del producto fibrado en una categoría, pero antes, recordando el ejemplo 1.6.3, en $\mathscr{Set}$ el producto fibrado $X \times_A Y$ siempre existe, esto es, dado el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

el cuadrado cartesiano siempre existe y esta dado por $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$, junto con las proyecciones $\pi_X : X \times_Z Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times_Z Y \longrightarrow Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Se hace énfasis en que el producto fibrado depende tanto de los objetos como de los morfismos, en este caso $(X \times_Z Y, f, g)$ denota el producto fibrado para el diagrama (2.11). Por lo que si un objeto y/o morfismo cambian, entonces también lo hará el producto fibrado. Con esto en mente, se procede a definir el siguiente funtor.

Definición 2.5.4. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sean L, M, A en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ fijos, sean $\lambda : L \longrightarrow A$ y $\mu : M \longrightarrow A$, definimos al funtor contravariante:

$$\mathscr{C}(\_, L) \times_{\mathscr{C}(\_,A)} \mathscr{C}(\_, M) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$$

como sigue:

1) Sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces:

$$\Big(\mathscr{C}(\_, L) \times_{\mathscr{C}(\_,A)} \mathscr{C}(\_, M)\Big) X = \mathscr{C}(X, L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X, M)$$

con los morfismos $\lambda_* : \mathscr{C}(X, L) \longrightarrow \mathscr{C}(X, A)$ y $\mu_* : \mathscr{C}(X, M) \longrightarrow \mathscr{C}(X, A)$.

2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ donde X, Y están en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, entonces

$$\begin{aligned} f^* \times_A f^* :&= \Big(\mathscr{C}(\_, L) \times_{\mathscr{C}(\_,A)} \mathscr{C}(\_, M)\Big) f \\ &= \mathscr{C}(f, L) \times_{\mathscr{C}(f,A)} \mathscr{C}(f, M) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(Y, L) \times_{\mathscr{C}(Y,A)} \mathscr{C}(Y, M) & \xrightarrow{f^* \times_A f^*} & \mathscr{C}(X, L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X, M) \\ (\varphi_L, \varphi_M) & \longmapsto & (\varphi_L \circ f, \varphi_M \circ f) \end{array}$$

Lema 2.5.5. *El funtor*

$$\mathscr{C}(\_, L) \times_{\mathscr{C}(\_,A)} \mathscr{C}(\_, M) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$$

está bien definido.

Demostración.

Dado X en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$, por el ejemplo 1.6.3, se tiene que $\mathscr{C}(X,L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X,M)$ está en $\mathit{obj}\,\mathscr{S}et$ debido a que $\mathscr{C}(X,L)$, $\mathscr{C}(X,A)$ y $\mathscr{C}(X,M)$ están en $\mathit{obj}\,\mathscr{S}et$.

Sabemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(Y,L) \times_{\mathscr{C}(Y,A)} \mathscr{C}(Y,M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_L"'] & \mathscr{C}(Y,M) \arrow[d, "\mu_*"] \\
\mathscr{C}(Y,L) \arrow[r, "\lambda_*"'] & \mathscr{C}(Y,A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo que, si consideramos $(\varphi_L, \varphi_M) \in \mathscr{C}(Y,L) \times_{\mathscr{C}(Y,A)} \mathscr{C}(Y,M)$, se tiene que

$$\lambda \circ \varphi_L = \lambda_*(\varphi_L) = \mu_*(\varphi_M) = \mu \circ \varphi_M$$

entonces, dado el morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{C}$, al aplicar el funtor $f^* \times_A f^*$ se obtiene

$$(f^* \times_A f^*)(\varphi_L, \varphi_M) = (f^*(\varphi_L), f^*(\varphi_M)) = (\varphi_L \circ f, \varphi_M \circ f)$$

ahora, del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(X,L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X,M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_L"'] & \mathscr{C}(X,M) \arrow[d, "\mu_*"] \\
\mathscr{C}(X,L) \arrow[r, "\lambda_*"'] & \mathscr{C}(X,A)
\end{tikzcd}$$

se observa que,

$$\begin{aligned}
\lambda_*(\varphi_L \circ f) = \lambda \circ (\varphi_L \circ f) &= (\lambda \circ \varphi_L) \circ f \\
&= (\mu \circ \varphi_M) \circ f = \mu \circ (\varphi_M \circ f) = \mu_*(\varphi_M \circ f)
\end{aligned}$$

es decir, $(\varphi_L \circ f, \varphi_M \circ f) \in \mathscr{C}(X,L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X,M)$. $\square$

Teorema 2.5.6. *Los objetos L, M, A en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tienen producto fibrado si y sólo si el funtor $\mathscr{C}(\_, L) \times_{\mathscr{C}(\_,A)} \mathscr{C}(\_, M)$ es representable.*

Demostración.

Supongamos que los objetos L, M, A en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tienen producto fibrado. Entonces se tiene que $L \times_A M$ está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Se propone a $L \times_A M$ como objeto universal de $\mathscr{C}(\_, L) \times_{\mathscr{C}(\_,A)} \mathscr{C}(\_, M)$. Es suficiente verificar que existe un isomorfismo natural entre los funtores $\mathscr{C}(\_, L \times_A M)$ y $\mathscr{C}(\_, L) \times_{\mathscr{C}(\_,A)} \mathscr{C}(\_, M)$. Se define a τ como sigue:

$$\begin{aligned} \tau_X : \mathscr{C}(X, L \times_A M) &\longrightarrow \mathscr{C}(X, L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X, M) \\ f &\longmapsto (\pi_L \circ f, \pi_M \circ f) \end{aligned}$$

donde se cumple que $\lambda_*(\pi_L \circ f) = \mu_*(\pi_M \circ f)$.

Primero, para verificar que τ_X es biyectiva, se dará su función inversa. Se define la función σ_X como:

$$\begin{aligned} \sigma_X : \mathscr{C}(X, L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X, M) &\longrightarrow \mathscr{C}(X, L \times_A M) \\ (g_L, g_M) &\longmapsto g \end{aligned}$$

donde g está dada por la propiedad universal del cuadrado cartesiano, por lo que σ_X está bien definida.

Ahora hay que verificar que:

1) $\tau_X \circ \sigma_X = 1_{\mathscr{C}(X,L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X,M)}$.

2) $\sigma_X \circ \tau_X = 1_{\mathscr{C}(X, L \times_A M)}$.

Para (1) se tiene que:

$$\tau_X \circ \sigma_X(g_L, g_M) = \tau_X(g) = (\pi_L \circ g, \pi_M \circ g) \overset{(i)}{=} (g_L, g_M)$$

la igualdad indicada con (i) viene dada por la conmutatividad del cuadrado cartesiano. Por lo tanto se tiene que

$$\tau_X \circ \sigma_X = id_{\mathscr{C}(X,L)\times_{\mathscr{C}(X,A)}\mathscr{C}(X,M)}.$$

Para (2) se tiene que:

$$\sigma_X \circ \tau_X(f) = \sigma_X(\pi_L \circ f, \pi_M \circ f) \overset{(ii)}{=} f$$

La igualdad marcada con (ii) viene dada por la propiedad universal del cuadrado cartesiano y por la unicidad de una f tal. Por lo que se tiene que $\sigma_X \circ \tau_X = id_{\mathscr{C}(X,L\times_A M)}$.

Juntando ambos resultados se obtiene que τ_X es biyectiva. Ahora falta verificar la naturalidad de τ_X, eso se hará verificando que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{C}(Y, L\times_A M) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \mathscr{C}(Y,L)\times_{\mathscr{C}(Y,A)}\mathscr{C}(Y,M) \arrow[d, "\varphi^*\times_A\varphi^*"] \\
Y & \mathscr{C}(X, L\times_A M) \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathscr{C}(X,L)\times_{\mathscr{C}(X,A)}\mathscr{C}(X,M),
\end{tikzcd}$$

para cualesquiera X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y cualquier morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$. En efecto, sea $f \in \mathscr{C}(Y, L\times_A M)$, entonces

$$\tau_X(f\circ\varphi) = (\pi_L \circ (f\circ\varphi), \pi_M \circ (f\circ\varphi)) \overset{(iii)}{=} ((\pi_L\circ f)\circ\varphi, (\pi_M\circ f)\circ\varphi)$$

donde la igualdad marcada con (iii) viene dada por la asociatividad de funciones entre conjuntos. Entonces se tiene que el diagrama conmuta, por lo que τ_X es una transformación natural para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y τ_X es un isomorfismo natural para todo X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Ahora se supone que $\mathscr{C}(\_, L)\times_{\mathscr{C}(\_,A)}\mathscr{C}(\_, M)$ es representable. Entonces se tiene que existe $K^A_{L,M}$ en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ tal que es su objeto universal. Sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $\tau_X : \mathscr{C}(X, K^A_{L,M}) \longrightarrow$

$\mathscr{C}(X,L)\times_{\mathscr{C}(X,A)}\mathscr{C}(X,M)$ la equivalencia natural asociada a X. En particular, existe

$$\mathscr{C}(K^A_{L,M},K^A_{L,M})\xrightarrow{\tau_{K^A_{L,M}}}\mathscr{C}(K^A_{L,M},L)\times_{\mathscr{C}(K^A_{L,M},A)}\mathscr{C}(K^A_{L,M},M)$$

Se definen π_L y π_M con la propiedad universal del cuadrado cartesiano en $\mathscr{Set}$, el cual sabemos que siempre existe. Esto es,

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(K^A_{L,M},K^A_{L,M}) \arrow[d, "\tau_{K^A_{L,M}}"] & \\
\mathscr{C}(K^A_{L,M},L)\times_{\mathscr{C}(K^A_{L,M},A)}\mathscr{C}(K^A_{L,M},M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathscr{C}(K^A_{L,M},M) \arrow[d, "\mu_*"] \\
\mathscr{C}(K^A_{L,M},L) \arrow[r, "\lambda_*"'] & \mathscr{C}(K^A_{L,M},A)
\end{tikzcd}$$

por lo que, para el morfismo identidad $1_{K^A_{L,M}}:K^A_{L,M}\longrightarrow K^A_{L,M}$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
1_{K^A_{L,M}} \arrow[d, mapsto] & \\
\tau_{K^A_{L,M}}(1_{K^A_{L,M}}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \pi_2\circ\tau_{K^A_{L,M}}(1_{K^A_{L,M}}) \arrow[d, mapsto] \\
\pi_1\circ\tau_{K^A_{L,M}}(1_{K^A_{L,M}}) \arrow[r, mapsto] & \begin{array}{l}\lambda_*(\pi_1\circ\tau_{K^A_{L,M}}(1_{K^A_{L,M}}))=\\=\mu_*(\pi_2\circ\tau_{K^A_{L,M}}(1_{K^A_{L,M}}))\end{array}
\end{tikzcd}$$

Se definen los morfismos proyecciones π_L y π_M como

$$\pi_L:=\pi_1\circ\tau_{K^A_{L,M}}(1_{K^A_{L,M}})\quad \text{y}\quad \pi_M:=\pi_2\circ\tau_{K^A_{L,M}}(1_{K^A_{L,M}})\tag{2.12}$$

Veamos que el objeto $K^A_{L,M}$ tiene la propiedad universal del producto fibrado, *i.e*, sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sean $f_L:X\longrightarrow L$ y

$f_M : X \longrightarrow M$ tales que $\lambda \circ f_L = \mu \circ f_M$, probaremos que existe $f : X \longrightarrow K^A_{L,M}$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] \arrow[drr, bend left, "f_M"] \arrow[ddr, bend right, "f_L"'] & & \\
& K^A_{L,M} \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "\pi_L"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
& L \arrow[r, "\lambda"'] & A
\end{tikzcd}$$

Para demostrar la existencia de f, se procede como sigue:

Dada $(f_L, f_M) \in \mathscr{C}(X, L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X, M)$, al ser τ_X un isomorfismo natural, sabemos que τ_X^{-1} es equivalencia natural. Definimos a $f := \tau_X^{-1}(f_L, f_M)$, la cual es única dada la biyectividad de τ_X^{-1}. Sólo falta verificar la conmutatividad del diagrama. Dada la naturalidad de τ_X se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & \mathscr{C}(K^A_{L,M}, K^A_{L,M}) \arrow[r, "\tau_{K^A_{L,M}}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathscr{C}(K^A_{L,M}, L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(K^A_{L,M}, M) \arrow[d, "f^* \times_A f^*"] \\
K^A_{L,M} & \mathscr{C}(X, K^A_{L,M}) \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathscr{C}(X, L) \times_{\mathscr{C}(X,A)} \mathscr{C}(X, M)
\end{tikzcd}$$

de donde se obtiene la igualdad

$$\tau_X(f) = (f_L, f_M) = (\pi_L \circ f, \pi_M \circ f)$$

la cual está dada por la definición de π_L y π_M en la ecuación (2.12) y por como se definió f.

Por lo que se obtienen las siguientes igualdades:

$$\pi_L \circ f = f_L \quad \text{y} \quad \pi_M \circ f = f_M$$

y por ende

$$\lambda \circ f_L = \lambda \circ (\pi_L \circ f) \quad \text{y} \quad \mu \circ f_M = \mu \circ (\pi_M \circ f)$$

$\square$

2.5.2. Coproducto fibrado

Definición 2.5.7. Dados X, Y, A en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$ y morfismos $f : A \longrightarrow X$ y $g : A \longrightarrow Y$, decimos que el quinteto (X, Y, A, f, g) tiene ***coproducto fibrado*** si existe la solución al diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

en otros términos, los objetos X, Y, A en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$, junto con los morfismos f y g, tienen coproducto fibrado si se puede construir su cuadrado cocartesiano.

Notación. Como vimos en la sección 1.6, al ser el coproducto fibrado solución del cuadrado cocartesiano, lo denotaremos como $X \amalg_A Y$.

Definición 2.5.8. Decimos que una categoría tiene ***coproducto fibrado*** si para cualquier quinteto dado, se puede construir su cuadrado cocartesiano.

El siguiente teorema nos dará una forma de saber si existe el coproducto fibrado en una categoría.

Teorema 2.5.9. *Dada una categoría $\mathscr{C}$, si ésta tiene coigualadores y coproducto entonces tiene coproducto fibrado.*

Demostración.
Sea $\mathscr{C}$ una categoría con coigualadores y coproducto. Sean X, Y, A en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$ y morfismos $f : A \longrightarrow X$, $g : A \longrightarrow Y$, tales que se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

Al tener la categoría coproducto, entonces se tiene que $X \amalg Y$ esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, y ademas existen los morfismos $\iota_X : X \longrightarrow X \amalg Y$ y $\iota_Y : Y \longrightarrow X \amalg Y$. Luego, podemos hacer las composiciones

$$A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\iota_X} X \amalg Y \qquad\qquad Y \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{\iota_Y} X \amalg Y$$

esto es, $\iota_X \circ f$, $\iota_Y \circ g$ y obtener el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\iota_X \circ f"] \arrow[r, shift right, "\iota_Y \circ g"'] & X \amalg Y \end{tikzcd}$$

Dado que la categoría tiene coigualadores, existen Z en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y un morfismo $u : X \amalg Y \longrightarrow Z$, tales que el cuadrado exterior conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\iota_X \circ f"] \arrow[r, shift right, "\iota_Y \circ g"'] & X \amalg Y \arrow[r, "u"] & Z \end{tikzcd}$$

Por lo anterior, se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \arrow[ddr, bend left, "u \circ \iota_Y"] & \\ X \arrow[r, "\iota_X"'] \arrow[drr, bend right, "u \circ \iota_X"'] & X \amalg Y \arrow[dr, "u"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Entonces se propone a $X \amalg_A Y := Z$, para completar el cuadrado cocartesiano. Falta ver que el siguiente diagrama es de cuadrado cocartesiano:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "u \circ \iota_Y"] \\ X \arrow[r, "u \circ \iota_X"'] & X \amalg_A Y \end{tikzcd}$$

Para eso, sean W en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y $\alpha : X \longrightarrow W$ y $\beta : Y \longrightarrow W$, tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & W \end{tikzcd}$$

entonces se tiene que $\alpha \circ f = \beta \circ g$, *i.e.*, se tiene que el cuadrado exterior del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "u \circ \iota_Y"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ X \arrow[r, "u \circ \iota_X"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & X \amalg_A Y & \\ & & W \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Verificamos que existe una única $h : X \amalg_A Y \longrightarrow W$ que haga conmutar todo el diagrama. Para esto, se considera que existe un único morfismo $\psi : X \amalg Y \longrightarrow W$ tal que hace conmutar al diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[dr, "\alpha"'] & X \amalg Y \arrow[d, dashed, "\exists ! \psi"] & Y \arrow[l, "\iota_Y"'] \arrow[dl, "\beta"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

ya que la categoría tiene coproducto. Entonces se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\iota_X \circ f"] \arrow[r, shift right, "\iota_Y \circ g"'] & X \amalg Y \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\psi"'] & X \amalg_A Y \\ & & W \end{tikzcd}$$

Pero $X \amalg_A Y$, junto con $u : X \amalg Y \longrightarrow X \amalg_A Y$, es el coigualador de $\iota_X \circ f$ y $\iota_Y \circ g$, entonces por la propiedad universal de los coigualadores, se tiene que existe una única $h : X \amalg_A Y \longrightarrow W$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\iota_X \circ f"] \arrow[r, shift right, "\iota_Y \circ g"'] & X \amalg Y \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\psi"'] & X \amalg_A Y \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] \\ & & W \end{tikzcd}$$

conmuta. Dicha h es la que sirve para que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "u \circ \iota_Y"'] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ X \arrow[r, "u \circ \iota_X"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & X \amalg_A Y \arrow[dr, dashed, "\exists ! h"] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

conmute. Dado que, usando el diagrama del coproducto se tiene que

$$h \circ (u \circ \iota_X) = \psi \circ \iota_X = \alpha$$
$$h \circ (u \circ \iota_Y) = \psi \circ \iota_Y = \beta$$

$\square$

De la misma manera que en producto fibrado, existe un resultado que nos dará una caracterización sobre la existencia del coproducto fibrado en una categoría. Se procede a definir el siguiente funtor.

Definición 2.5.10. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sean L, M, A en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ fijos, sean $\lambda : A \longrightarrow L$ y $\mu : A \longrightarrow M$, definimos al funtor covariante:

$$\mathscr{C}(L, \_) \times_{\mathscr{C}(A,\_)} \mathscr{C}(M, \_) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$$

como sigue:

1) Sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces:

$$\Big(\mathscr{C}(L, \_) \times_{\mathscr{C}(A,\_)} \mathscr{C}(M, \_)\Big) X = \mathscr{C}(L, X) \times_{\mathscr{C}(A,X)} \mathscr{C}(M, X)$$

con los morfismos $\lambda^* : \mathscr{C}(L, X) \longrightarrow \mathscr{C}(A, X)$ y $\mu^* : \mathscr{C}(M, X) \longrightarrow \mathscr{C}(A, X)$.

2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ donde X, Y están en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} f_* \times_A f_* &:= \Big(\mathscr{C}(L, \_) \times_{\mathscr{C}(A,\_)} \mathscr{C}(M, \_) \Big) f \\ &= \mathscr{C}(L, f) \times_{\mathscr{C}(A,f)} \mathscr{C}(M, f) \end{aligned}$$

Donde

$$\mathscr{C}(L, X) \times_{\mathscr{C}(A,X)} \mathscr{C}(M, X) \xrightarrow{f_* \times_A f_*} \mathscr{C}(L, Y) \times_{\mathscr{C}(A,Y)} \mathscr{C}(M, Y)$$

$$(\psi_L, \psi_M) \longmapsto (f \circ \psi_L, f \circ \psi_M)$$

Lema 2.5.11. *El funtor*

$$\mathscr{C}(L, \_) \times_{\mathscr{C}(A,\_)} \mathscr{C}(M, \_) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Set}$$

está bien definido.

Demostración.
La demostración es análoga a la del lema 2.5.5. □

Teorema 2.5.12. *Los objetos L, M, A en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$ tienen coproducto fibrado si y sólo si el funtor $\mathscr{C}(L, \_) \times_{\mathscr{C}(A,\_)} \mathscr{C}(M, \_)$ es representable.*

Demostración.
Es enteramente análoga a las demostraciones de los teorema 2.4.13 y 2.5.6. □

2.6. Grupo en una categoría

Definición 2.6.1. Dada una categoría $\mathscr{C}$ y un objeto G en $\mathcal{obj}\,\mathscr{C}$, decimos que G tiene una ***multiplicación***, si $\mathscr{C}$ tiene producto y existe un morfismo $\mu : G \times G \longrightarrow G$.

En la definición anterior, al pedir que exista $G \times G$, es equivalente a pedir que el funtor $\mathscr{C}(\_, G) \times \mathscr{C}(\_, G)$ sea representable[1] y por el lema de Yoneda[2] se tiene que existe $\overline{\mu}$ en $Nat(\mathscr{C}(\_, G) \times \mathscr{C}(\_, G), \mathscr{C}(\_, G))$ tal que $\mathcal{Y}(\overline{\mu}) = \mu$, ademas, para cada X en $\mathscr{Obj}\,\mathscr{C}$ se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}(X,G) \times \mathscr{C}(X,G) \arrow[r, "\overline{\mu}_X"] \arrow[d, "\tau_X^{-1}"'] & \mathscr{C}(X,G) \\ \mathscr{C}(X, G \times G) \arrow[ur, "\mathscr{C}(X,\mu)"'] & \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

donde τ_X es el isomorfismo natural obtenido de la representabilidad de $\mathscr{C}(\_, G) \times \mathscr{C}(\_, G)$.

Definición 2.6.2. Dada una multiplicación $\mu : G \times G \longrightarrow G$, decimos que es ***asociativa***, si el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mu \times 1_G"] \arrow[d, "1_G \times \mu"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

es conmutativo.

Definición 2.6.3. Dada una multiplicación $\mu : G \times G \longrightarrow G$, decimos que G tiene ***neutro***, si $\mathscr{C}$ tiene un objeto terminal T y un morfismo $\eta : T \longrightarrow G$ tal que, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\eta_G, 1_G)"] \arrow[dr, "1_G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "(1_G, \eta_G)"'] \arrow[dl, "1_G"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{2.15}$$

[1]Ver el teorema 2.4.4

[2]Ver lema 2.2.2

conmuta. El morfismo $\eta_G : G \longrightarrow G$, viene dado por la composición

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, dashed, "\eta_G"'] & T \arrow[d, "\eta"] \\ & G \end{tikzcd}$$

donde ω es el único morfismo ya que T es objeto terminal. Entonces η_G es el morfismo que hace conmutar el diagrama.

Definición 2.6.4. Dada una multiplicación $\mu : G\times G \longrightarrow G$, decimos que G tiene ***inverso***, si G tiene neutro y existe $\iota : G \longrightarrow G$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(\iota,1_G)"] \arrow[dr, "\eta_G"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"] & G \arrow[l, "(1_G,\iota)"'] \arrow[dl, "\eta_G"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{2.16}$$

conmuta.

Definición 2.6.5. Dada una multiplicación $\mu : G\times G \longrightarrow G$, decimos que es ***abeliana***, si el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "\mathcal{T}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

conmuta. Donde el morfismo $\mathcal{T}$ viene dado por la propiedad universal del producto:

$$\begin{tikzcd} & G \times G \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\mathcal{T}"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ G & G \times G \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & G, \end{tikzcd}$$

esto es, $\mathcal{T}$ intercambia el orden.

Definición 2.6.6. Dada una categoría $\mathscr{C}$ y un objeto G en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, decimos que G es un ***$\mathscr{C}$-grupo*** si:

1) Tiene multiplicación asociativa.

2) Tiene neutro.

3) Tiene inverso.

Definición 2.6.7. Dada una categoría $\mathscr{C}$ y un objeto G en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, decimos que G es un ***$\mathscr{C}$-grupo abeliano***, si G es un $\mathscr{C}$-grupo y ademas la multiplicación es abeliana.

Teniendo ya las definiciones necesarias, se enuncia a continuación el teorema principal de este capítulo.

Teorema 2.6.8. *Sea una categoría, $\mathscr{C}$, con producto y objeto terminal T. Entonces un objeto G es un $\mathscr{C}$-grupo si y sólo si $\mathscr{C}(X, G)$ tiene una estructura natural de grupo[3], para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.*

Ahora se verán tres lemas que ayudaran con la demostración del teorema anterior.

Lema 2.6.9. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces un objeto G tiene una multiplicación $\mu : G \times G \longrightarrow G$ asociativa si y sólo si se puede definir una transformación natural $\overline{\mu} : \mathscr{C}(\_, G) \times \mathscr{C}(\_, G) \longrightarrow \mathscr{C}(\_, G)$, tal que $\overline{\mu}$ es una operación asociativa.*

Demostración.

Suponemos que $\mathscr{C}$ tiene un objeto G con una multiplicación μ tal que es asociativa Dado X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, se define

$$\overline{\mu}_X : \mathscr{C}(X, G) \times \mathscr{C}(X, G) \longrightarrow \mathscr{C}(X, G)$$

dado por

$$(f, g) \longmapsto \overline{\mu}_X(f, g) = \mu \circ (f, g)$$

[3]Note que $\mathscr{C}(X, G)$ es un conjunto, por lo que tiene sentido darle una estructura de grupo

Se ve que $\overline{\mu}_X$ es asociativa. En efecto, sean $f, g, h : X \longrightarrow G$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_X(\overline{\mu}_X(f,g),h) &= \mu \circ (\overline{\mu}_X(f,g),h) = \mu \circ (\mu \circ (f,g),h) \\
&= \mu \circ (\mu \times 1_G) \circ (f,g,h) \overset{(i)}{=} \mu \circ (1_G \times \mu) \circ (f,g,h) \\
&= \mu \circ (f, \mu \circ (g,h)) = \mu \circ (f, \overline{\mu}_X(g,h)) = \\
&= \overline{\mu}_X(f, \overline{\mu}_X(g,h))
\end{aligned}$$

donde la igualdad en (i) viene dada por la conmutatividad del diagrama (2.14). Más aun, por el lema de Yoneda, y la observación echa al inicio de la sección, se tiene que $\overline{\mu}$ es una transformación natural.

Suponemos que existe una transformación natural $\overline{\mu}_X : \mathscr{C}(X,G) \times \mathscr{C}(X,G) \longrightarrow \mathscr{C}(X,G)$ tal que $\overline{\mu}_X$ es asociativa, para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Se define a $\mu : G \times G \longrightarrow G$ como $\mu := \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1, \pi_2)$, donde π_1 y π_2 son las proyecciones. Considerando la naturalidad de $\overline{\mu}$ y el morfismo $1_G \times \mu : G \times G \times G \longrightarrow G \times G$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(G \times G \times G, G) \times \mathscr{C}(G \times G \times G, G) \arrow[r, "\overline{\mu}_{G\times G\times G}"] & \mathscr{C}(G \times G \times G, G) \\
\mathscr{C}(G \times G, G) \times \mathscr{C}(G \times G, G) \arrow[r, "\overline{\mu}_{G\times G}"'] \arrow[u, "(1_G\times\mu)^* \times (1_G\times\mu)^*"] & \mathscr{C}(G \times G, G) \arrow[u, "(1_G\times\mu)^*"']
\end{tikzcd}$$

Entonces se tiene la siguiente igualdad.

$$\mu \circ (1_G \times \mu) = \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_1 \circ (1_G \times \mu), \pi_2 \circ (1_G \times \mu)) \tag{2.18}$$

En lo que sigue, consideraremos los subíndices en las $G_{i's}$ únicamente de forma indicativa, en el sentido de que nos dicen la posición de la G a la que se le considera su proyección, ya que sin eso se volvería algo confuso la demostración.

Ahora, usando la propiedad universal del producto, se tiene que

$$\overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_1 \circ (1_G \times \mu), \pi_2 \circ (1_G \times \mu)) = \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_{G_1}, \mu \circ (\pi_{G_2}, \pi_{G_3}))$$

Pero por como esta definido μ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\pi_{G_2}, \pi_{G_3}) &= \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1, \pi_2) \circ (\pi_{G_2}, \pi_{G_3}) \\
&\overset{(i)}{=} \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_1 \circ (\pi_{G_2}, \pi_{G_3}), \pi_2 \circ (\pi_{G_2}, \pi_{G_3})) \\
&= \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_{G_2}, \pi_{G_3})
\end{aligned}$$

donde la igualdad indicada con (i) esta dada por la naturalidad de $\overline{\mu}$. Entonces se sustituye esta igualdad en la ecuación anterior y se obtiene:

$$\overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_{G_1}, \mu \circ (\pi_{G_2}, \pi_{G_3})) = \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_{G_1}, \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_{G_2}, \pi_{G_3})) \tag{2.19}$$

Por otro lado, considerando nuevamente la naturalidad de $\overline{\mu}$ y ahora el morfismo $\mu \times 1_G : G \times G \times G \longrightarrow G \times G$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(G\times G\times G, G) \times \mathscr{C}(G\times G\times G, G) \arrow[r, "\overline{\mu}_{G\times G\times G}"] & \mathscr{C}(G\times G\times G, G) \\
\mathscr{C}(G\times G, G) \times \mathscr{C}(G\times G, G) \arrow[r, "\overline{\mu}_{G\times G}"'] \arrow[u, "(\mu\times 1_G)^*\times(\mu\times 1_G)^*"] & \mathscr{C}(G\times G, G) \arrow[u, "(\mu\times 1_G)^*"']
\end{tikzcd}$$

Entonces se tiene la siguiente igualdad.

$$\mu \circ (\mu \times 1_G) = \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_1 \circ (\mu \times 1_G), \pi_2 \circ (\mu \times 1_G)) \tag{2.20}$$

Ahora, usando la propiedad universal del producto, se tiene que:

$$\overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_1 \circ (\mu \times 1_G), \pi_2 \circ (\mu \times 1_G)) = \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\mu \circ (\pi_{G_1}, \pi_{G_2}), \pi_{G_3})$$

Pero por como esta definido μ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\pi_{G_1}, \pi_{G_2}) &= \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1, \pi_2) \circ (\pi_{G_1}, \pi_{G_2}) \\
&\overset{(ii)}{=} \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_1 \circ (\pi_{G_1}, \pi_{G_2}), \pi_2 \circ (\pi_{G_1}, \pi_{G_2})) \\
&= \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_{G_1}, \pi_{G_2})
\end{aligned}$$

donde la igualdad indicada con (ii) esta dada por la naturalidad de $\overline{\mu}$. Entonces sustituyendo esta igualdad en la ecuación anterior se tiene:

$$\overline{\mu}_{G\times G\times G}(\mu\circ(\pi_{G_1},\pi_{G_2}),\pi_{G_3}) = \overline{\mu}_{G\times G\times G}(\overline{\mu}_{G\times G\times G}(\pi_{G_1},\pi_{G_2}),\pi_{G_3}) \tag{2.21}$$

Pero $\overline{\mu}_{G\times G\times G}$ es asociativa, entonces se obtiene que las ecuaciones (2.19) y (2.21) son iguales, eso implica que las ecuaciones en (2.18) y (2.20) son iguales, entonces se obtiene que $\mu\circ(1_G\times\mu) = \mu\circ(\mu\times 1_G)$. □

Lema 2.6.10. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto terminal T. Entonces un objeto G con una multiplicación μ tiene neutro si y sólo si $\overline{\mu}_X$ tiene neutro en para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.*

Demostración.

Suponemos que $\mathscr{C}$ tiene un objeto G con una multiplicación μ con neutro η_G. Sea X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, entonces se define al neutro de $\overline{\mu}_X$ como el morfismo $\eta_X := f\circ\eta_G$, donde $f : X \longrightarrow G$ es un morfismo cualquiera y ω es el único morfismo dado por el objeto terminal T. Entonces η_X es el morfismo que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\omega"] \arrow[rr, bend left, dashed, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[r, "\eta"] & G \\
& G \arrow[u, "\omega"'] \arrow[ur, "\eta_G"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.22}$$

Se verifica que η_X se comporta como el neutro de $\overline{\mu}_X$:

$$\overline{\mu}_X(f,\eta_X) = \mu\circ(f,\eta_X) \overset{(i)}{=} \mu\circ(1_G,\eta_G)\circ f \overset{(ii)}{=} 1_G\circ f = f$$
$$\overline{\mu}_X(\eta_X,f) = \mu\circ(\eta_X,f) \overset{(i)}{=} \mu\circ(\eta_G,1_G)\circ f \overset{(ii)}{=} 1_G\circ f = f$$

donde las igualdades indicadas con (i) están dadas por la definición de η_X, mientras que las igualdades indicadas con (ii) están dadas por la conmutatividad del diagrama (2.15). Por lo tanto η_X es neutro.

Suponemos que $\overline{\mu}_X$ tiene neutro para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. En particular se tiene que existe $\eta_G : G \longrightarrow G$ tal que $\overline{\mu}_G(f, \eta_G) = f = \overline{\mu}_G(\eta_G, f)$. Se propone a η_G como el neutro de μ. Falta verificar que η_G hace conmutar el diagrama (2.15). Efectivamente, recordamos la definición de μ a través de $\overline{\mu}_{G\times G}$.

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\eta_G, 1_G) &= \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1, \pi_2) \circ (\eta_G, 1_G) \\
&\overset{(iii)}{=} \overline{\mu}_G(\pi_1 \circ (\eta_G, 1_G), \pi_2 \circ (\eta_G, 1_G)) \\
&= \overline{\mu}_G(\eta_G, 1_G) = 1_G \\
\mu \circ (1_G, \eta_G) &= \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1, \pi_2) \circ (1_G, \eta_G) \\
&\overset{(iii)}{=} \overline{\mu}_G(\pi_1 \circ (1_G, \eta_G), \pi_2 \circ (1_G, \eta_G)) \\
&= \overline{\mu}_G(1_G, \eta_G) = 1_G
\end{aligned}$$

donde las igualdades indicadas con (iii) están dadas por la conmutatividad del siguiente diagrama, debido a la naturalidad de $\overline{\mu}$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "(\eta_G, 1_G)"'] & \mathscr{C}(G,G) \times \mathscr{C}(G,G) \arrow[r, "\overline{\mu}_G"] & \mathscr{C}(G,G) \\
G \times G & \mathscr{C}(G\times G,G) \times \mathscr{C}(G\times G,G) \arrow[u, "(\eta_G,1_G)^* \times (\eta_G,1_G)^*"] \arrow[r, "\overline{\mu}_{G\times G}"'] & \mathscr{C}(G\times G,G) \arrow[u, "(\eta_G,1_G)^*"']
\end{tikzcd}$$

Por lo que μ tiene neutro. □

Lema 2.6.11. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces un objeto G con una multiplicación μ tiene inverso si y sólo si todo morfismo tiene inverso respecto a $\overline{\mu}_X$, para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.*

Demostración.

Suponemos que $\mathscr{C}$ tiene un objeto G que cuenta con una multiplicación μ con inverso. Dado que μ tiene inverso, entonces también tiene neutro, y por el lema 2.6.10 se tiene que $\overline{\mu}_X$ tiene neutro, para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Así que solo falta verificar que también tiene inverso.

Sea X en $\operatorname{obj}\mathscr{C}$ y sea $f : X \longrightarrow G$ un morfismo cualquiera entonces se define al inverso[4] de f respecto a $\overline{\mu}_X$ como $f^{-1} := \iota_*(f) = \iota \circ f$. Se verifica que se comporta como el inverso de f respecto a $\overline{\mu}_X$:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_X(f, f^{-1}) &= \mu \circ (f, f^{-1}) = \mu \circ (f, \iota(f)) = \mu \circ (1_G, \iota) \circ f \\
&\overset{(i)}{=} \eta_G \circ f \overset{(ii)}{=} \eta_X \\
\overline{\mu}_X(f^{-1}, f) &= \mu \circ (f^{-1}, f) = \mu \circ (\iota(f), f) = \mu \circ (\iota, 1_G) \circ f \\
&\overset{(i)}{=} \eta_G \circ f \overset{(ii)}{=} \eta_X
\end{aligned}$$

donde las igualdades indicadas con (i) están dadas por la conmutatividad del diagrama (2.16) y las indicadas con (ii) están dadas por la definición de η_X en el diagrama (2.22).

Suponemos que $f : X \longrightarrow G$ tiene inverso f^{-1} respecto a $\overline{\mu}_X$, para cualquier morfismo y cualquier X en $\operatorname{obj}\mathscr{C}$. Se considera $1_G : G \longrightarrow G$ entonces existe $1_G^{-1} : G \longrightarrow G$ tal que $\overline{\mu}_G(1_G, 1_G^{-1}) = \eta_G = \overline{\mu}_G(1_G^{-1}, 1_G)$, se define $\iota := 1_G^{-1}$. Falta verificar que ι hace conmutar el diagrama (2.16).

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\iota, 1_G) &= \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1, \pi_2) \circ (\iota, 1_G) \overset{(iii)}{=} \overline{\mu}_G(\pi_1 \circ (\iota, 1_G), \pi_2 \circ (\iota, 1_G)) \\
&= \overline{\mu}_G(\iota, 1_G) = \eta_G \\
\mu \circ (1_G, \iota) &= \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1, \pi_2) \circ (1_G, \iota) \overset{(iii)}{=} \overline{\mu}_G(\pi_1 \circ (1_G, \iota), \pi_2 \circ (1_G, \iota)) \\
&= \overline{\mu}_G(1_G, \iota) = \eta_G
\end{aligned}$$

donde las igualdades indicadas con (iii) están dadas por la conmutatividad del siguiente diagrama, debido a la naturalidad de $\overline{\mu}$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "{(\iota,1_G)}"'] & \mathscr{C}(G,G) \times \mathscr{C}(G,G) \arrow[r, "\overline{\mu}_G"] & \mathscr{C}(G,G) \\
G \times G & \mathscr{C}(G\times G,G) \times \mathscr{C}(G\times G,G) \arrow[u, "{(\iota,1_G)^* \times (\iota,1_G)^*}"] \arrow[r, "\overline{\mu}_{G\times G}"'] & \mathscr{C}(G\times G,G) \arrow[u, "{(\iota,1_G)^*}"']
\end{tikzcd}$$

Por lo que μ tiene inverso. □

[4]Observe que f^{-1} no es el morfismo cuya composición con f da la identidad, es más bien el inverso en el sentido de la operación $\overline{\mu}_X$.

Demostración del teorema 2.6.8.

Juntando los lemas 2.6.9, 2.6.10 y 2.6.11 se obtiene la demostración. □

Corolario 2.6.12. *Sea $\mathscr{C}$ una una categoría con producto finito y objeto terminal T. Entonces un objeto G es un $\mathscr{C}$-grupo abeliano si y sólo si $\mathscr{C}(X,G)$ tiene una estructura natural de grupo abeliano, para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.*

Demostración.

Por el teorema anterior se tiene que G es un $\mathscr{C}$-grupo si y sólo si $\mathscr{C}(X,G)$ tiene una estructura natural de grupo. Sólo falta verificar que μ es conmutativa si y sólo si $\mathscr{C}(X,G)$ es abeliano, para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Suponemos que μ es conmutativa, entonces el diagrama (2.17) conmuta, esto es, $\mu \circ \mathcal{T} = \mu$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_2,\pi_1) &\overset{(i)}{=} \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1\circ\mathcal{T},\pi_2\circ\mathcal{T}) \overset{(ii)}{=} \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1,\pi_2)\circ\mathcal{T} \\ &= \mu\circ\mathcal{T} = \mu = \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1,\pi_2) \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde la igualdad indicada con (i) está dada por la definición de $\mathcal{T}$ por el diagrama (2.6.5) y la indicada con (ii) está dada por la naturalidad de $\overline{\mu}$.

Hay que verificar que $\overline{\mu}_X(f,g) = \overline{\mu}_X(g,f)$ para cualesquier par de morfismos $f,g : X \longrightarrow G$ y para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_X(f,g) = \mu\circ(f,g) = \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_1,\pi_2)\circ(f,g) &\overset{(iii)}{=} \overline{\mu}_{G\times G}(\pi_2,\pi_1)\circ(f,g) \\ &\overset{(iv)}{=} \overline{\mu}_X(\pi_2\circ(f,g),\pi_1\circ(f,g)) = \overline{\mu}_X(g,f) \end{aligned}$$

donde la igualdad indicada con (iii) esta dada por la ecuación (2.23) y la indicada con (iv) está dada por la naturalidad de $\overline{\mu}$. □

2.7. Cogrupo en una categoría

Básicamente esta sección dualiza todo lo hecho en la sección 2.6.

Definición 2.7.1. Dada una categoría $\mathscr{C}$ y un objeto Q en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, decimos que Q tiene una ***comultiplicación*** si $\mathscr{C}$ tiene coproducto y existe un morfismo $\nu : Q \longrightarrow Q \amalg Q$.

Definición 2.7.2. Dada una comultiplicación $\nu : Q \longrightarrow Q \amalg Q$, decimos que es ***coasociativa***, si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "\nu"] \arrow[d, "\nu"'] & & Q \amalg Q \arrow[d, "\nu \amalg 1_Q"] \\ Q \amalg Q \arrow[rr, "1_Q \amalg \nu"'] & & Q \amalg Q \amalg Q \end{tikzcd} \tag{2.24}$$

es conmutativo.

Definición 2.7.3. Dada una comultiplicación $\nu : Q \longrightarrow Q \amalg Q$, decimos que Q tiene ***coneutro*** si $\mathscr{C}$ tiene objeto inicial I, con morfismo correspondiente $\omega : I \longrightarrow Q$, y un morfismo $\zeta : Q \longrightarrow I$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Q & Q \amalg Q \arrow[l, "(\zeta_Q, 1_Q)"'] \arrow[r, "(1_Q, \zeta_Q)"] & Q \\ & Q \arrow[ul, "1_Q"] \arrow[u, "\nu"'] \arrow[ur, "1_Q"'] & \end{tikzcd} \tag{2.25}$$

conmuta. Donde el morfismo $\zeta_Q : Q \longrightarrow Q$ es aquel que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr, dashed, "\zeta_Q"'] & I \arrow[d, "\omega"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

es decir, $\zeta_Q = \omega \circ \zeta$.

Definición 2.7.4. Dada una comultiplicación $\nu : Q \longrightarrow Q \amalg Q$, decimos que Q tiene ***coinverso*** si Q tiene coneutro y existe κ :

$Q \longrightarrow Q$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Q & Q \amalg Q \arrow[l, "(\kappa{,}1_Q)"'] \arrow[r, "(1_Q{,}\kappa)"] & Q \\ & Q \arrow[ul, "\zeta_Q"] \arrow[u, "\nu"'] \arrow[ur, "\zeta_Q"'] & \end{tikzcd} \tag{2.26}$$

conmuta.

Definición 2.7.5. Dada una comultiplicación $\nu : Q \longrightarrow Q \amalg Q$, decimos que es ***coabeliana*** si el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Q \amalg Q \arrow[rr, "\mathcal{T}"] & & Q \amalg Q \\ & Q \arrow[ul, "\nu"'] \arrow[ur, "\nu"] & \end{tikzcd} \tag{2.27}$$

conmuta. Donde el morfismo $\mathcal{T}$ viene dado por la propiedad universal del coproducto:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\iota_2"'] & Q \amalg Q \arrow[d, dashed, "\exists!\mathcal{T}"] & Q \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "\iota_1"] \\ & Q \amalg Q & \end{tikzcd}$$

es decir, $\mathcal{T}$ intercambia el orden.

Definición 2.7.6. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con un objeto Q, decimos que Q es un ***$\mathscr{C}$-cogrupo*** si:

1) Tiene comultiplicación coasociativa.

2) Tiene neutro.

3) Tiene inverso.

Definición 2.7.7. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con un objeto Q, decimos que Q es un ***$\mathscr{C}$-cogrupo abeliano***, si Q es un $\mathscr{C}$-cogrupo y ademas la comultiplicación es coabeliana.

A continuación se dara un teorema enteramente análogo al teorema 2.6.8. Observe que aunque en la categoría $\mathscr{C}$ se habla de un $\mathscr{C}$-cogrupo, el conjunto $\mathscr{C}(Q,Y)$ es un grupo, para toda Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$. Por lo que con esto, se tienen dos formas de darle estructura de grupo a un mismo conjunto.

Teorema 2.7.8. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con coproducto finito y objeto inicial I. Entonces un objeto Q es un $\mathscr{C}$-cogrupo si y sólo si $\mathscr{C}(Q,Y)$ tiene una estructura natural de grupo para cualquier Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.*

$\square$

Corolario 2.7.9. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con coproducto finito y objeto inicial I. Entonces un objeto Q es un $\mathscr{C}$-cogrupo abeliano si y sólo si $\mathscr{C}(Q,Y)$ tiene una estructura natural de grupo abeliano para cualquier Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.*

$\square$

Capítulo 3

Homotopía

En este capítulo introduciremos el concepto de homotopía en una categoría $\mathscr{C}$. En la sección 3.1 veremos el concepto de cilindro de tal forma que podamos darle una estructura a la categoría para poder hacer una categoría cociente. En la sección 3.2 definiremos algunos morfismos importantes en la teoría de homotopía que son las cofibraciones y las fibraciones. En la sección 3.3 introduciremos el concepto dual del cilindro, a saber el cocilindro y le daremos otra estructura a la categoría para poder hacer una categoría cociente. En la sección 3.4 definiremos los morfismos cofibración y fibración, pero ahora respecto al cocilindro y veremos que:

1) Una fibración respecto a un cilindro es el dual de una cofibración respecto a un cocilindro.

2) Una cofibración respecto a un cilindro es el dual de una fibración respecto a un cocilindro.

Mientras que en la sección 3.5 nos centraremos en categorías donde los cilindros y cocilindros son adjuntos y se verá que:

1) Una fibración respecto a un cilindro coincidirá con una fibración respecto a un cocilindro por medio de una adjunción.

2) Una cofibración respecto a un cilindro coincidirá con una cofibración respecto a un cocilindro por medio de una adjunción.

3) Morfismos homotopicos respecto a un cilindro serán homotopicos también respecto al cocilindro adjunto.

3.1. Cilindro

Cilindro

Definición 3.1.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, definimos el ***cilindro I en*** $\mathscr{C}$ como **I**$= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$, donde:

1) $(\ \ ) \times I : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ es un funtor covariante;

2) $e_0, e_1 : Id_{\mathscr{C}} \longrightarrow (\ \ ) \times I$ son transformaciones naturales;

3) $\sigma : (\ \ ) \times I \longrightarrow Id_{\mathscr{C}}$ es transformación natural,

y son tales que $\sigma \circ e_0 = id_{\mathscr{C}} = \sigma \circ e_1$.

Notación. Si tenemos X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ entonces denotaremos $X \times I := ((\ \ ) \times I)X$ y $f \times I := ((\ \ ) \times I)f$. Observe que $X \times I$ es puramente notación y en ningún momento indica que se esté efectuando el producto en la categoría.

Ejemplo 3.1.2.

Consideremos la categoría $\mathscr{Top}$, entonces definimos un cilindro de la siguiente manera:

1) El funtor cilindro está dado por:

$$(\ \ ) \times I : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Top}$$

$$X \longmapsto X \times [0,1]$$

y dados X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Top}$ y un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ se tiene que

$$f \times I : X \times [0,1] \longrightarrow Y \times [0,1]$$

$$(x,t) \longmapsto (f(x), t)$$

2) Las transformaciones naturales e_0 y e_1 están dadas por:

$$e_{0_X} : X \longrightarrow X \times [0,1] \qquad e_{1_X} : X \longrightarrow X \times [0,1]$$

$$e_{0_X}(x) \longmapsto (x,0) \qquad e_{1_X}(x) \longmapsto (x,1)$$

para toda X en $obj\mathscr{Top}$, respectivamente.

3) La transformación natural σ está dada por:

$$\sigma_X : X \times [0,1] \longrightarrow X$$

$$\sigma_X(x,t) \longmapsto x$$

para toda X en $obj\mathscr{Top}$.

Esto nos determina el cilindro canónico en $\mathscr{Top}$ y lo denotaremos por **T**.

Ejemplo 3.1.3.
Sea $\mathscr{C}$ una categoría cualquiera, entonces podemos definir el cilindro trivial **Id**, como sigue:

1) El funtor cilindro sera el funtor identidad en $\mathscr{C}$.

2) Las transformaciones naturales e_0 y e_1 serán la identidad.

3) La transformación natural σ sera también la identidad.

Definición 3.1.4. Sean $\mathscr{C}$ una categoría con cilindro **I**$= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$, X, Y en $obj\,\mathscr{C}$ y morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$. Decimos que f ***es homotópica a*** g si existe un morfismo $\phi : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $\phi \circ e_{0_X} = f$ y $\phi \circ e_{1_X} = g$.

A ϕ le llamamos ***homotopía entre*** f ***y*** g.

Notación. Si f es homotópica a g lo denotamos como $f \simeq g$ y si ϕ es su homotopía lo denotamos como $\phi : f \simeq g$.

Lema 3.1.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cilindro $\boldsymbol{I}= \{(\quad) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$, se tiene que:*

1) *Si $f : X \longrightarrow Y$, entonces $f \simeq f$.*

2) *Sean $h : W \longrightarrow X$, $f, g : X \longrightarrow Y$ y $k : Y \longrightarrow Z$. Si $f \simeq g$, entonces $f \circ h \simeq g \circ h$ y $k \circ f \simeq k \circ g$.*

Demostración.

1) Definimos ϕ como sigue:

$$\phi := f \circ \sigma_X : X \times I \xrightarrow{\sigma_X} X \xrightarrow{f} Y$$

entonces tenemos que:

$$\phi \circ e_{0_X} = (f \circ \sigma_X) \circ e_{0_X} = f \circ (\sigma_X \circ e_{O_X}) = f \circ id_X = f,$$
$$\phi \circ e_{1_X} = (f \circ \sigma_X) \circ e_{1_X} = f \circ (\sigma_X \circ e_{1_X}) = f \circ id_X = f.$$

por lo tanto $f \simeq f$.

2) Como $f \simeq g$, entonces existe un morfismo $\phi : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $\phi \circ e_{0_X} = f$ y $\phi \circ e_{1_X} = g$.

Definimos ψ_1 como sigue:

$$\psi_1 := \phi \circ (h \times I) : W \times I \xrightarrow{h \times I} X \times I \xrightarrow{\phi} Y$$

consideremos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "h"'] & W \arrow[r, "e_{0_W}"] \arrow[d, "h"'] & W \times I \arrow[d, "h \times I"] \\ X & X \arrow[r, "e_{0_X}"'] & X \times I, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[d, "h"'] & W \arrow[r, "e_{1_W}"] \arrow[d, "h"'] & W \times I \arrow[d, "h \times I"] \\ X & X \arrow[r, "e_{1_X}"'] & X \times I \end{tikzcd}$$

los cuales conmutan ya que e_0 y e_1 son transformaciones naturales. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \psi_1 \circ e_{0_W} &= (\phi \circ (h \times I)) \circ e_{0_W} = \phi \circ ((h \times I) \circ e_{0_W}) \\ &= \phi \circ (e_{0_X} \circ h) = (\phi \circ e_{0_X}) \circ h = f \circ h, \\ \psi_1 \circ e_{1_W} &= (\phi \circ (h \times I)) \circ e_{1_W} = \phi \circ ((h \times I) \circ e_{1_W}) \\ &= \phi \circ (e_{1_X} \circ h) = (\phi \circ e_{1_X}) \circ h = g \circ h. \end{aligned}$$

Ahora definimos ψ_2 como sigue:

$$\psi_2 := k \circ \phi : X \times I \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{k} Z$$

y análogamente se obtiene

$$\begin{aligned}\psi_2 \circ e_{0_X} &= (k \circ \phi) \circ e_{0_X} = k \circ (\phi \circ e_{0_X}) = k \circ f,\\ \psi_2 \circ e_{1_X} &= (k \circ \phi) \circ e_{1_X} = k \circ (\phi \circ e_{1_X}) = k \circ g.\end{aligned}$$

□

Definición 3.1.6. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cilindro $\mathbf{I}= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ y morfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$.

1) Si $f \circ g \simeq id_Y$ decimos que g es un ***inverso homotópico derecho*** de f.

2) Si $g \circ f \simeq id_X$ decimos que g es un ***inverso homotópico izquierdo*** de f.

Definición 3.1.7. Sean $\mathscr{C}$ una categoría con cilindro $\mathbf{I}= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ y morfismo $f : X \longrightarrow Y$. Decimos que f es una ***equivalencia homotópica*** si existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que:

$$g \circ f \simeq id_X \qquad \text{y} \qquad f \circ g \simeq id_Y.$$

En este caso, decimos que g es un ***inverso homotópico*** de f.

Aunque el lemma 3.1.5 nos asegura que la relación "ser homotópico a" es reflexiva y es compatible con la composición, aun no podemos asegurar que sea simétrica y transitiva por ende no podemos definir una categoría cociente[1] con dicha relación.

Para eso se necesita que el cilindro cumpla algunas propiedades que se enuncian a continuación.

[1]Ver sección 1.7

Definición 3.1.8. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro **I**$= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$, definimos una ***involución natural en I*** como una transformación natural

$$\iota : (\ \ ) \times I \longrightarrow (\ \ ) \times I$$

tal que:

$$\iota \circ \iota = 1, \qquad \iota \circ e_0 = e_1, \qquad \iota \circ e_1 = e_0, \qquad \text{y} \qquad \sigma \circ \iota = \sigma.$$

Ejemplo 3.1.9.

Considerando el cilindro **T** definido en el ejemplo 3.1.2, definimos una involución natural en **T**, dada por:

$$\iota_X : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$

$$\iota_X(x,t) \longmapsto (x, 1-t),$$

para toda X en $obj\mathscr{T}op$.

Se comprueba directamente que la transformación natural definida en el ejemplo anterior cumple las propiedades de una involución natural.

Lema 3.1.10. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cilindro **I**$= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$, tal que ι es una involución natural en **I**, entonces, la relación de homotopía es simétrica.*

Demostración.

Sea $\iota : (\ \ ) \times I \longrightarrow (\ \ ) \times I$ la involución natural en I y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ y $\phi : X \times I \longrightarrow Y$ tales que $\phi : f \simeq g$.

Definimos

$$\overline{\phi} := \phi \circ \iota_X : X \times I \xrightarrow{\iota_X} X \times I \xrightarrow{\phi} Y$$

entonces se tiene que:

$$\overline{\phi} \circ e_{0_X} = (\phi \circ \iota) \circ e_{0_X} = \phi \circ (\iota \circ e_{0_X}) = \phi \circ e_{1_X} = g,$$
$$\overline{\phi} \circ e_{1_X} = (\phi \circ \iota) \circ e_{1_X} = \phi \circ (\iota \circ e_{1_X}) = \phi \circ e_{0_X} = f.$$

Por lo tanto $g \simeq f$. □

Definición 3.1.11. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro **I**$= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$, definimos al ***funtor pushout*** como sigue:

1) Un funtor covariante $\mathcal{S} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$.

2) Dos transformaciones naturales $\rho, \tau : (\ \ ) \times I \longrightarrow \mathcal{S}$.

tales que si X está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{e_0}_X"] \arrow[d, "{e_1}_X"'] & X \times I \arrow[d, "\rho_X"] \\ X \times I \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathcal{S}X \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

es un diagrama de pushout.

Ejemplo 3.1.12.

Consideremos la categoría $\mathscr{Top}$ y el cilindro **T** definido en el ejemplo 3.1.2. Definimos un funtor pushout como sigue:

1) Un funtor covariante dado por:

$$\mathcal{S} : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Top}$$

$$X \longmapsto X \times [0,1]$$

2) Dos transformaciones naturales ρ y τ, dadas por:

$$\rho_X : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$

$$(x,t) \longmapsto (x, \frac{t+1}{2})$$

y

$$\tau_X : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$

$$(x,t) \longmapsto (x, \frac{t}{2})$$

para toda X en $obj\mathcal{T}op$.

Se verifica que el objeto $\mathcal{S}X = X \times [0,1]$ junto con los morfismos $\rho_X, \tau_X : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ son una solución al diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "e_{1_X}"'] & X \times [0,1] \\ X \times [0,1]. & \end{tikzcd}$$

Efectivamente, dado $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\rho_X \circ e_{0_X})(x) &= \rho_X(x,0) = \left(x, \frac{1+0}{2}\right) = \left(x, \frac{1}{2}\right) \\ (\tau_X \circ e_{1_X})(x) &= \tau_X(x,1) = \left(x, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

por lo que se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "e_{1_X}"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\rho_X"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "\tau_X"'] & \mathcal{S}X = X \times [0,1]. \end{tikzcd}$$

Para verificar que la solución al diagrama tiene la propiedad universal de un cuadrado cocartesiano, se considera otra solución al diagrama inicial, esto es, dados Y en $obj\mathcal{T}op$ y morfismos $\alpha, \beta : X \times [0,1] \longrightarrow Y$, se tiene que el cuadrado exterior

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "e_{1_X}"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\rho_X"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\ X \times [0,1] \arrow[r, "\tau_X"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & X \times [0,1] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

conmuta. Basta con demostrar que existe un único morfismo $\varphi : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que hace conmutar todo el diagrama. Se define φ como

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} \alpha(x,t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \beta(x,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

de manera que

$$(\varphi \circ \tau_X)(x,t) = \varphi\left(x, \frac{t}{2}\right) = \alpha(x,t),$$
$$(\varphi \circ \rho_X)(x,t) = \varphi\left(x, \frac{t+1}{2}\right) = \beta(x,t).$$

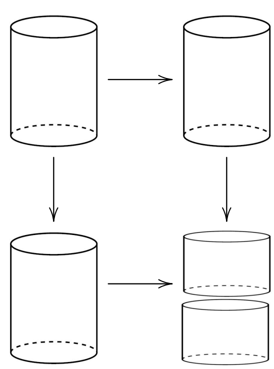
Además, el morfismo φ es único, lo cual se verifica fácilmente debido a como está definido. Con lo que se prueba la afirmación.

Definición 3.1.13. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro $\mathbf{I} = \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ y funtor pushout $\mathcal{S}$, definimos una ***subdivisión natural en I*** como una transformación natural

$$\varsigma : (\ \ ) \times I \longrightarrow \mathcal{S}$$

tal que $\varsigma \circ e_0 = \tau \circ e_0$ y $\varsigma \circ e_1 = \rho \circ e_1$.

Intuitivamente, la involución natural es aquella que nos permite componer dos homotopías, como se muestra en la siguiente figura.



Ejemplo 3.1.14.
Consideremos la categoría $\mathscr{T}\!op$ y el cilindro $\mathbf{T}$ definido en el ejemplo 3.1.2. Definimos una subdivisión natural como sigue:

$$\varsigma_X : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$

$$\varsigma_X(x) \longmapsto x$$

Se prueba directamente que la transformación natural definida anteriormente cumple las condiciones de una subdivisión natural en la categoría de $\mathscr{T}\!op$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\varsigma_X \circ e_{0_X})(x) &= \varsigma(x,0) = (x,0)\\ (\tau_X \circ e_{0_X})(x) &= \tau_X(x,0) = \left(x, \frac{0}{2}\right) = (x,0)\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}(\varsigma_X \circ e_{1_X})(x) &= \varsigma(x,1) = (x,1)\\ (\rho_X \circ e_{1_X})(x) &= \rho_X(x,1) = \left(x, \frac{1+1}{2}\right) = (x,1)\end{aligned}$$

que era lo que se quería demostrar.

Lema 3.1.15. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cilindro $\boldsymbol{I}=\{(\quad)\times I, e_0, e_1, \sigma\}$ y una subdivisión natural ς, entonces, la relación de homotopía es transitiva.*

Demostración.
Sea $\varsigma : (\quad)\times I \longrightarrow \mathcal{S}$ la subdivisión natural en $\mathbf{I}=\{(\quad)\times I, e_0, e_1, \sigma\}$.
Sean $f, g, h : X \longrightarrow Y$ y $\phi, \psi : X \times I \longrightarrow Y$ tales que:

$$\phi : f \simeq g \qquad\qquad \psi : g \simeq h$$

Consideremos el siguiente diagrama de pushout:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "e_{1_X}"'] & X \times I \arrow[d, "\rho_X"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
X \times I \arrow[r, "\tau_X"'] \arrow[drr, bend right, "\phi"'] & \mathcal{S}X \arrow[dr, dashed, "\exists ! \Phi"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo, ya que la categorá tiene un funtor de pushout.

Definimos $(\psi + \phi) := \Phi \circ \varsigma_X : X \times I \longrightarrow Y$. Entonces tenemos que

$$(\psi + \phi) \circ e_{0_X} = (\Phi \circ \varsigma_X) \circ e_{0_X} \overset{(i)}{=} (\Phi \circ \tau_X) \circ e_{0_X} = \phi \circ e_{0_X} \overset{(ii)}{=} f$$
$$(\psi + \phi) \circ e_{1_X} = (\Phi \circ \varsigma_X) \circ e_{1_X} \overset{(i)}{=} (\Phi \circ \rho_X) \circ e_{1_X} = \psi \circ e_{1_X} \overset{(iii)}{=} g$$

donde (i) es por la definición 3.1.13, (ii) es porque f es homotópica a g y (iii) puesto que g es homotópica a h. □

Ahora ya estamos en condición de enunciar un teorema que nos sera de gran utilidad más adelante.

Teorema 3.1.16. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ y un cilindro $\boldsymbol{I}$= $\{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ con una involución natural y una subdivisión natural en $\boldsymbol{I}$, la relación de homotopía es una relación de equivalencia y ademas es compatible con la composición.*

Demostración.

Por los lemas 3.1.5, 3.1.10 y 3.1.15 se obtiene dicho resultado. □

Un ejemplo de una teoría de homotopía para una categoria distinta a la de $\mathscr{Top}$ está dado en la referencia [16], donde se define lo que se entiende por morfismos homotopicos en la categoría de grupos abelianos $\mathscr{Ab}$.

3.2. Cofibración y fibración

En esta sección definiremos lo correspondiente a cofibración y fibración en una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro.

3.2.1. Cofibración.

Definición 3.2.1. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro **I**$= \{(\ \ )\times I, e_0, e_1, \sigma\}$, sean A, X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $i : A \longrightarrow X$. Decimos que i tiene la ***propiedad de extensión de homotopía (HEP)***[2] respecto a Y si para cualquier par de morfismos $\phi : A\times I \longrightarrow Y$ y $f : X \longrightarrow Y$ tales que $\phi\circ {e_0}_A = f\circ i$, existe $\Phi : X\times I \longrightarrow Y$ tal que $\Phi\circ(i\times I) = \phi$ y $\Phi\circ {e_0}_X = f$, esto es, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A\times I \arrow[dr, "i\times I"] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
A \arrow[ur, "{e_0}_A"] \arrow[dr, "i"'] & & X\times I \arrow[r, dashed, "\Phi"] & Y \\
 & X \arrow[ur, "{e_0}_X"'] \arrow[urr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

conmuta. Nótese que el cuadrado de la izquierda conmuta porque e_0 es natural.

Definición 3.2.2. Sean una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro **I**$= \{(\ \ )\times I, e_0, e_1, \sigma\}$, A, X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $i : A \longrightarrow X$. Decimos que i es una ***cofibración*** si tiene HEP respecto a Y, para todo Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Otra forma es decir esto es que $i : A \longrightarrow X$ es cofibración si y sólo si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "{e_0}_A"] \arrow[d, "i"'] & A\times I \arrow[d, "i\times I"] \\
X \arrow[r, "{e_0}_X"'] & X\times I
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cocartesiano debil[3].

Teorema 3.2.3. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro **I**$= \{(\ \ )\times I, e_0, e_1, \sigma\}$, se tiene que:*

[2]La abreviatura HEP se debe al termino en inglés Homotopy Extension Property

[3]Ver sección 1.6

1) *Todo isomorfismo es cofibración.*

2) *Composición de cofibraciónes es cofibración.*

Demostración.

1) Sea $i : A \longrightarrow X$ un isomorfismo, sean $f : X \longrightarrow Y$ y $\phi : A \times I \longrightarrow Y$ morfismos tales que $\phi \circ e_{0_A} = f \circ i$. Entonces se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \times I \arrow[dr, "i \times I"] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
A \arrow[ur, "e_{0_A}"] \arrow[dr, "i"'] & & X \times I & Y \\
 & X \arrow[ur, "e_{0_X}"'] \arrow[urr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. El cuadrado interior es por ser e_0 una transformación natural.

Como $i : A \longrightarrow X$ es isomorfismo entonces se tiene que existe un morfismo $i^{-1} : X \longrightarrow A$ tal que $i^{-1} \circ i = 1_A$ y $i \circ i^{-1} = 1_X$.

Definimos:

$$\Phi := \phi \circ (i^{-1} \times I) : X \times I \xrightarrow{i^{-1} \times I} A \times I \xrightarrow{\phi} Y$$

Nótese además que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i^{-1}"'] & X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "i^{-1}"'] & X \times I \arrow[d, "i^{-1} \times I"] \\
A & A \arrow[r, "e_{0_A}"'] & A \times I
\end{tikzcd}$$

conmuta, ya que e_0 es una transformación natural. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi \circ e_{0_X} &= (\phi \circ (i^{-1} \times I)) \circ e_{0_X} = \phi \circ ((i^{-1} \times I) \circ e_{0_X}) \\
&= \phi \circ (e_{0_A} \circ i^{-1}) = (\phi \circ e_{0_A}) \circ i^{-1} = (f \circ i) \circ i^{-1} = f \\
\Phi \circ (i \times I) &= (\phi \circ (i^{-1} \times I)) \circ (i \times I) = \phi \circ ((i^{-1} \circ i) \times I) \\
&= \phi \circ (1_A \times I) = \phi
\end{aligned}$$

Por lo tanto el diagrama conmuta y el isomorfismo i es cofibración.

2) Sean $i : A \longrightarrow X$ e $i' : X \longrightarrow X'$ cofibraciones y sean $\phi : A \times I \longrightarrow Y$ y $f' : X' \longrightarrow Y$ tales que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \times I \arrow[dr, "(i'\circ i)\times I"] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
A \arrow[ur, "e_{0_A}"] \arrow[dr, "i'\circ i"'] & & X' \times I & Y \\
& X' \arrow[ur, "e_{0_{X'}}"'] \arrow[urr, bend right, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora se considera el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& A \times I \arrow[dr, "i\times I"] \arrow[ddrrr, bend left, "\phi"] & & & \\
A \arrow[ur, "e_{0_A}"] \arrow[dr, "i"'] & & X \times I \arrow[dr, "i'\times I"] \arrow[drr, dashed, "\phi'"] & & \\
& X \arrow[ur, "e_{0_X}"'] \arrow[dr, "i'"'] & & X' \times I \arrow[r, dashed, "\Phi'"'] & Y \\
& & X' \arrow[ur, "e_{0_{X'}}"'] \arrow[urr, bend right, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo y $\phi' : X \times I \longrightarrow Y$ existe ya que i es cofibración.

Ahora, como i' es cofibración entonces existe $\Phi' : X' \times I \longrightarrow Y$ tal que $\Phi' \circ (i' \times I) = \phi'$ y $\Phi' \circ e_{0_{X'}} = f'$.

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Phi' \circ ((i' \circ i) \times I) &= \Phi' \circ ((i' \times I) \circ (i \times I)) \\
&= (\Phi' \circ (i' \times I)) \circ (i \times I) = \phi' \circ (i \times I) = \phi \\
\Phi' \circ e_{0_{X'}} &= f'
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $i' \circ i$ es cofibración.

$\square$

Teorema 3.2.4. *Sea* $\mathscr{C}$ *una categoría con cilindro* $\boldsymbol{I}= \{(\quad) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ *tal que el funtor* $(\quad) \times I$ *conserva cuadrado cocartesianos*[4]. *Consideremos el siguiente cuadrado cocartesiano:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "\nu"'] & Z \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Entonces, si i *es cofibración se tiene que* j *es cofibración.*

Demostración.

Como el diagrama es de cuadrado cocartesiano, entonces dados dos morfismos $f' : X \longrightarrow Y$ y $g' : C \longrightarrow Y$ tales que $f' \circ i = g' \circ u$, entonces existe una única $\Phi' : Z \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, bend left, "g'"] & \\ X \arrow[r, "\nu"'] \arrow[drr, bend right, "f'"'] & Z \arrow[dr, dashed, "\exists!\Phi'"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

conmuta. Por otro lado consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "{e_0}_C"] \arrow[d, "j"'] & C \times I \arrow[d, "j\times I"] \\ Z \arrow[r, "{e_0}_Z"'] & Z \times I. \end{tikzcd}$$

[4] Ver sección 1.6

Sean $\phi : C \times I \longrightarrow Y$ y $f : Z \longrightarrow Y$ tales que $\phi \circ e_{0_C} = f \circ j$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "e_{0_C}"] \arrow[d, "j"'] & C \times I \arrow[d, "j\times I"'] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\
Z \arrow[r, "e_{0_Z}"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & Z \times I & \\
& & Y
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Ahora, considerando la naturalidad de e_0 se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "u"'] & A \arrow[r, "e_{0_A}"] \arrow[d, "u"'] & A \times I \arrow[d, "u\times I"] \\
C & C \arrow[r, "e_{0_C}"'] & C \times I
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

es conmutativo. Entonces juntando los diagramas (3.3),(3.4) y (3.5), se tiene que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[r, "e_{0_A}"] \arrow[d, "u"'] & A \times I \arrow[d, "u\times I"] \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[r, "e_{0_C}"] \arrow[d, "j"'] & C \times I \arrow[d, "\phi"] \\
X \arrow[r, "\nu"'] & Z \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta, ya que todos los cuadrados lo hacen. Luego, haciendo la composición de morfismos correspondientes se tiene el siguiente cuadrado exterior

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_{0_A}"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "\phi\circ(u\times I)"] \\
X \arrow[r, "f\circ\nu"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Pero $i : A \longrightarrow X$ es cofibración, de manera que hay un morfismo $\Phi : X \times I \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \times I \arrow[dr, "i\times I"] \arrow[drr, bend left, "\phi\circ(u\times I)"] & & \\
A \arrow[ur, "e_{0_A}"] \arrow[dr, "i"'] & & X \times I \arrow[r, dashed, "\Phi"] & Y \\
 & X \arrow[ur, "e_{0_X}"'] \arrow[urr, bend right, "f\circ\nu"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

conmuta. Por otro lado como el diagrama original

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \\
X \arrow[r, "\nu"'] & Z
\end{tikzcd}$$

es de cuadrado cocartesiano y por hipótesis el funtor $(\ \ ) \times I$ conserva cuadrado cocartesianos, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "u\times I"] \arrow[d, "i\times I"'] & C \times I \arrow[d, "j\times I"] \\
X \times I \arrow[r, "\nu\times I"'] & Z \times I
\end{tikzcd}$$

también es de cuadrado cocartesiano.

Pero por el diagrama (3.6) se tiene que $\Phi \circ (i \times I) = \phi \circ (u \times I)$, de modo existe una única $\Psi : Z \times I \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "u\times I"] \arrow[d, "i\times I"'] & C \times I \arrow[d, "j\times I"] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\
X \times I \arrow[r, "\nu\times I"'] \arrow[drr, bend right, "\Phi"'] & Z \times I \arrow[dr, dashed, "\exists!\Psi"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

conmuta. Con todo esto, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Psi \circ (j \times I) &\overset{(i)}{=} \phi, \\
\Psi \circ (e_{0_Z} \circ j) &\overset{(i)}{=} \Psi \circ ((j \times I) \circ e_{0_C}) \overset{(ii)}{=} \phi \circ e_{0_C} \overset{(ii)}{=} f \circ j, \\
\Psi \circ (e_{0_Z} \circ \nu) &\overset{(iii)}{=} \Psi \circ ((\nu \times I) \circ e_{0_X}) = \Phi \circ e_{0_X} \overset{(iv)}{=} f \circ \nu
\end{aligned}$$

donde la igualdades en (i) está dada por el diagrama (3.7), en (ii) está dada por el diagrama (3.4), en (iii) viene de la naturalidad de e_0 y la igualdad en (iv) está dada por el diagrama (3.6).

Y dado que f es el morfismo de cuadrado cocartesiano del diagrama (3.3) se tiene que es única, por lo que $\Psi \circ e_{0_Z} = f$.

Entonces se tiene que existe $\Psi : Z \times I \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "e_{0_C}"] \arrow[d, "j"'] & C \times I \arrow[d, "j \times I"'] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\
Z \arrow[r, "e_{0_Z}"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & Z \times I \arrow[dr, dashed, "\exists \Psi"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

Definición 3.2.5. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cilindro $\mathbf{I}= \{(\quad) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ y sea $f : X \longrightarrow Y$, si existe un cuadrado cocartesiano para

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \\
Y, &
\end{tikzcd}$$

decimos que f tiene ***cilindro de aplicación*** y al cuadrado cocartesiano lo denotaremos por M_f. Nótese que éste cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{e_0}_X"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"] \\ Y \arrow[r, "j_f"'] & M_f \end{tikzcd}$$

es de cuadrado cocartesiano y decimos que M_f es el ***cilindro de aplicación de*** f.

Consideremos un morfismo f con cilindro de aplicación M_f y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{e_0}_X"] \arrow[dd, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\sigma_X"] \\ & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

que es conmutativo debido a que $f \circ (\sigma_X \circ {e_0}_X) = f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$.

Ahora, como f tiene cilindro de aplicación, se tiene que existe un único morfismo $p_f : M_f \longrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{e_0}_X"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"] \arrow[ddr, bend left, "f \circ \sigma_X"] & \\ Y \arrow[r, "j_f"'] \arrow[drr, bend right, "1_Y"'] & M_f \arrow[dr, dashed, "\exists! p_f"] & \\ & & Y \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

tal que el diagrama es conmutativo.

Ahora considerando la naturalidad de e_0, se tiene que el cuadrado exterior del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"] \arrow[ddr, bend left, "f\times I"] & \\
Y \arrow[r, "j_f"'] \arrow[drr, bend right, "e_{0_Y}"'] & M_f \arrow[dr, dashed, "\exists ! s_f"] & \\
& & Y \times I
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

es conmutativo y ademas existe un único $s_f : M_f \longrightarrow Y \times I$, por ser M_f cilindro de aplicación.

El morfismo s_f nos servirá para relacionar el cilindro de aplicación con las cofibraciones. Como lo indica el teorema siguiente.

Teorema 3.2.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ morfismo con cilindro de aplicación M_f. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) f es cofibración.

2) f tiene HEP respecto a M_f.

3) existe un morfismo $r : Y \times I \longrightarrow M_f$ tal que $r \circ s_f = 1_{M_f}$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2)] Por definición de cofibración.

2) $\Rightarrow$ 3)] Suponemos que f tiene HEP respecto a M_f. Se consideran los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \\
Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "f\times I"] \\
Y \arrow[r, "e_{0_Y}"'] & Y \times I,
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"] \\
Y \arrow[r, "j_f"'] & M_f
\end{tikzcd}$$

donde el diagrama superior izquierdo conmuta por la naturalidad de e_0 y el diagrama superior derecho por ser M_f el cilindro de aplicación de f.

Ahora, por hipótesis se tiene que f tiene HEP respecto a M_f de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \times I \arrow[dr, "f\times I"] \arrow[drr, bend left, "\pi_f"] & & \\
X \arrow[ur, "e_{0_X}"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \times I \arrow[r, dashed, "\exists r"] & M_f \\
 & Y \arrow[ur, "e_{0_Y}"] \arrow[urr, bend right, "j_f"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3.10}$$

es conmutativo y existe $r : Y \times I \longrightarrow M_f$. Ahora, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"] \arrow[ddr, bend left, "\pi_f"] & \\
Y \arrow[r, "j_f"'] \arrow[drr, bend right, "j_f"'] & M_f \arrow[dr, dashed, "\exists! 1_{M_f}"] & \\
 & & M_f
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

que al ser cuadrado cocartesiano, se tiene que $1_{M_f} : M_f \longrightarrow M_f$ es el único morfismo que lo puede completar. Ahora juntando los diagramas (3.9) y (3.10) se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"'] \arrow[dr, bend left, "f\times I"] \arrow[ddrr, bend left, "\pi_f"] & & \\
Y \arrow[r, "j_f"] \arrow[drr, bend right, "e_{0_Y}"'] \arrow[ddrrr, bend right, "j_f"'] & M_f \arrow[dr, dashed, "\exists! s_f"] & & \\
 & & Y \times I \arrow[dr, dashed, "\exists r"] & \\
 & & & M_f
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

entonces se tiene que el morfismo $r \circ s_f : M_f \longrightarrow M_f$ completa asimismo el diagrama (3.11) y la unicidad del morfismo que completa al diagrama implica que $r \circ s_f = 1_{M_f}$, como se quería.

3) $\Rightarrow$ 1)] Suponemos que existe un morfismo $r : Y \times I \longrightarrow M_f$ tal que $r \circ s_f = 1_{M_f}$. Se considera el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times I \arrow[dr, "f\times I"] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
X \arrow[ur, "e_{0_X}"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \times I & W \\
 & Y \arrow[ur, "e_{0_Y}"'] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Basta verificar que existe $\Phi : Y \times I \longrightarrow W$ que hace conmutar el diagrama.

Consideramos el siguiente cuadrado cocartesiano:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_{0_X}"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"] \arrow[ddr, bend left, "\phi"] & \\
Y \arrow[r, "j_f"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & M_f \arrow[dr, dashed, "\exists ! \phi'"] & \\
 & & W.
\end{tikzcd}
$$

Entonces existe un único morfismo $\phi : M_f \longrightarrow W$ que hace conmutar el diagrama. Definimos $\Phi := \phi' \circ r : Y \times I \longrightarrow W$, entonces se tiene que:

$$
\Phi \circ (f \times I) = (\phi' \circ r) \circ (f \times I) \overset{(i)}{=} \phi' \circ \pi_f = \phi
$$
$$
\Phi \circ e_{0_Y} = (\phi' \circ r) \circ e_{0_Y} \overset{(i)}{=} \phi' \circ j_f = g
$$

donde la igualdad en (i) está dada por el diagrama (3.12). Así, existe

$\Phi : Y \times I \longrightarrow W$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times I \arrow[dr, "f\times I"] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
X \arrow[ur, "e_{0_X}"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \times I \arrow[r, dashed, "\Phi"] & W \\
 & Y \arrow[ur, "e_{0_Y}"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Y como W fue arbitraria se concluye que f es cofibración.

□

Definición 3.2.7. En una categoría con cilindro **I**$= \{(\quad) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$, dados A, X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y morfismos $i : A \longrightarrow X$, $j : A \longrightarrow Y$ y $f : X \longrightarrow Y$, decimos que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd} \tag{3.13}$$

conmuta homotópicamente si $(f \circ i) \simeq j$.

Teorema 3.2.8. *Sea* $\mathscr{C}$ *una categoría con cilindro* ***I***$= \{(\quad) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ *y consideremos el siguiente diagrama que conmuta homotopicamente*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

donde i *es cofibración. Entonces existe* $g : X \longrightarrow Y$ *tal que* $f \simeq g$ *y* $(g \circ i) = j$.

Demostración.

Sea $\phi : A \times I \longrightarrow Y$ tal que $\phi : (f \circ i) \simeq j$, esto es,

$$\phi \circ e_{0_A} = f \circ i, \qquad \phi \circ e_{1_A} = j.$$

Como $i : A \longrightarrow X$ es cofibración, entonces i tiene la HEP para toda W en $\mathscr{Alg}\,\mathscr{C}$, en particular para Y, de modo que existe $\Phi : X \times I \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A \times I \arrow[dr, "i\times I"] \arrow[drr, bend left, "\phi"] & & \\
A \arrow[ur, "e_{0_A}"] \arrow[dr, "i"'] & & X \times I \arrow[r, dashed, "\Phi"] & Y \\
 & X \arrow[ur, "e_{0_X}"'] \arrow[urr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Definimos el siguiente morfismo:

$$g := \Phi \circ e_{1_X} : X \xrightarrow{e_{1_X}} X \times I \xrightarrow{\Phi} Y$$

Luego,

$$\Phi \circ e_{0_X} = f \qquad \text{y} \qquad \Phi \circ e_{1_X} = g,$$

por lo que

$$\Phi : f \simeq g.$$

Por otro lado, dada la naturalidad de e_1 se tiene que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i"'] & A \arrow[r, "e_{1_A}"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i\times I"] \\
X & X \arrow[r, "e_{1_X}"'] & X \times I
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
g \circ i &= (\Phi \circ e_{1_X}) \circ i = \Phi \circ (e_{1_X} \circ i) = \Phi \circ ((i \times I) \circ e_{1_A}) \\
&= (\Phi \circ (i \times I)) \circ e_{1_A} = \phi \circ e_{1_A} = j
\end{aligned}$$

como se quería. $\square$

3.2.2. Fibración

Definición 3.2.9. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro $\mathbf{I}=\{(\ \ )\times I, e_0, e_1, \sigma\}$, sean B y E en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$ y sea $p: E \longrightarrow B$, decimos que p tiene la ***propiedad de levantamiento de homotopía (HLP)***[5] respecto a X si para cualquier par de morfismos $\phi: X\times I \longrightarrow B$ y $f: X \longrightarrow E$ tales que $\phi\circ e_{0_Y} = p\circ f$, existe $\Phi: X\times I \longrightarrow E$ tal que $\Phi\circ e_{0_Y} = f$ y $p\circ\Phi = \phi$, *i.e.*, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi"] & B \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

es conmutativo.

Definición 3.2.10. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro $\mathbf{I}=\{(\ \ )\times I, e_0, e_1, \sigma\}$, sean E, B en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$ y sea $p: E \longrightarrow B$, decimos que p es una ***fibración*** si tiene la HLP para todo X en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$.

Teorema 3.2.11. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro $\boldsymbol{I}=\{(\ \ )\times I, e_0, e_1, \sigma\}$, se tiene que:*

1) *Todo isomorfismo es fibración.*

2) *Composición de fibraciónes es fibración.*

Demostración.

1) Sea $p: E \longrightarrow B$ un isomorfismo y sean $f: X \longrightarrow E$ y $\phi: X\times I \longrightarrow B$ morfismos tales que $p\circ f = \phi\circ e_{0_X}$. Entonces se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "\phi"'] & B \end{tikzcd}$$

[5]La abreviatura HLP se debe al termino en inglés Homotopy Lifting Property

conmuta. Como p es isomorfismo se tiene que existe un morfismo $p^{-1}: B \longrightarrow E$ tal que $p \circ p^{-1} = id_B$ y $p^{-1} \circ p = id_E$. Definimos:

$$\Phi := p^{-1} \circ \phi : X \times I \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{p^{-1}} E$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} p \circ \Phi &= p \circ (p^{-1} \circ \phi) = (p \circ p^{-1}) \circ \phi = \phi \\ \Phi \circ e_{0_X} &= (p^{-1} \circ \phi) \circ e_{0_X} = p^{-1} \circ (\phi \circ e_{0_X}) \\ &= p^{-1} \circ (p \circ f) = (p^{-1} \circ p) \circ f = f \end{aligned}$$

Por lo tanto, todo morfismo es fibración.

2) Sean $p : E \longrightarrow B$ y $p' : B \longrightarrow B'$ fibraciónes.
Sean $f : X \longrightarrow E$ y $\phi' : X \times I \longrightarrow B'$ morfismos tales que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E \arrow[d, "p' \circ p"] \\ X \times I \arrow[r, "\phi'"'] & B' \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces se tiene que $p \circ f : X \longrightarrow B$ y esto hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p \circ f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & B \arrow[d, "p'"] \\ X \times I \arrow[r, "\phi'"'] & B'. \end{tikzcd}$$

Pero p' es fibración, de modo que existe $\Phi' : X \times I \longrightarrow B$ tal que hace el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p \circ f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & B \arrow[d, "p'"] \\ X \times I \arrow[r, "\phi'"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi'"] & B' \end{tikzcd}$$

conmutativo. De esta forma, se obtiene la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "\Phi'"'] & B' \end{tikzcd}$$

y al ser p es fibración, se sigue que existe $\Phi : X \times I \longrightarrow E$ tal que hace al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "\Phi'"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi"] & B' \end{tikzcd}$$

conmutar. Entonces se tiene que existe $\Phi : X \times I \longrightarrow E$ tal que hace al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E \arrow[d, "p' \circ p"] \\ X \times I \arrow[r, "\phi'"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi"] & B' \end{tikzcd}$$

conmutativo, por lo que $p' \circ p$ es fibración.

$\square$

Teorema 3.2.12. *Sea* $\mathscr{C}$ *una categoría con cilindro* $\boldsymbol{I}= \{(\ \ ) \times I, e_0, e_1, \sigma\}$ *y consideremos el siguiente diagrama de pullback*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "u"'] & B. \end{tikzcd}$$

Si p *es fibración entonces* q *es fibración.*

Demostración.

Sean $f : X \longrightarrow E'$ y $\phi : X \times I \longrightarrow B'$ morfismos tales que hacen conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "\phi"'] & B' \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pero como p es fibración, se tiene que existe $\Phi : X \times I \longrightarrow E$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E' \arrow[r, "v"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "\phi"'] \arrow[urr, dashed, "\Phi"] & B' \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[drr, bend left, "\Phi"] \arrow[ddr, bend right, "\phi"'] & & \\
& E' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B' \arrow[r, "u"'] & B,
\end{tikzcd}$$

que por ser de pullback, se tiene que existe un único $\Phi' : X \times I \longrightarrow E'$ tal que hace al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[drr, bend left, "\Phi"] \arrow[ddr, bend right, "\phi"'] \arrow[dr, dashed, "\Phi'"] & & \\
& E' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B' \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmutativo. Así, se tiene que existe $\Phi' : X \times I \longrightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_X}"'] & E' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi'"] & B' \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta y q es fbración. □

3.3. Cocilindro

El concepto dual al cilindro presentado en la sección 3.1 es el referente al cocilindro que en esta sección daremos las definiciones y algunos resultados omitiendo las demostraciones, al se estas sus duales a las presentadas en la sección 3.1.

Definición 3.3.1. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, definimos el ***cocilindro P en*** $\mathscr{C}$ como $\mathbf{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, donde:

1) $(\ \ )^I : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ es un funtor covariante;

2) $\varepsilon_0, \varepsilon_1 : (\ \ )^I \longrightarrow Id_{\mathscr{C}}$ son transformaciones naturales;

3) $s : Id_{\mathscr{C}} \longrightarrow (\ \ )^I$ es transformación natural,

sean tales que $\varepsilon_0 \circ s = id_{\mathscr{C}} = \varepsilon_1 \circ s$.

Notación. Si tenemos X, Y en $\mathscr{O}bj\,\mathscr{C}$ y $f : X \longrightarrow Y$ entonces denotamos $X^I := (\ \ )^I X$ y $f^I := (\ \ )^I f$.

Ejemplo 3.3.2.

Consideremos la categoría $\mathscr{T}op$, entonces definimos un cocilindro de la siguiente manera:

1) El funtor cocilindro esta dado por:

$$\begin{aligned} (\ \ )^I : \mathscr{Top} &\longrightarrow \mathscr{Top} \\ X &\longmapsto X^{[0,1]} \end{aligned}$$

y dados X, Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Top}$ y un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ se define $f^{[0,1]} : X^{[0,1]} \longrightarrow Y^{[0,1]}$ como

$$f^{[0,1]}(\omega)(t) = (f \circ \omega)(t)$$

Recordemos que $X^{[0,1]} = \{\omega : [0,1] \longrightarrow X | \text{es continua}\}$ dotado de la topología compactamente generada asociada a la compacto-abierta.

2) Las transformaciones naturales ε_0 y ε_1 están dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0_X} : X^{[0,1]} &\longrightarrow X & \qquad \varepsilon_{1_X} : X^{[0,1]} &\longrightarrow X \\ \varepsilon_{0_X}(w) &\longmapsto w(0) & \qquad \varepsilon_{1_X}(w) &\longmapsto w(1) \end{aligned}$$

para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Top}$, respectivamente.

3) La transformación natural s esta dada por:

$$\begin{aligned} s_X : X &\longrightarrow X^{[0,1]} \\ s_X(x) &\longmapsto w(t) = x \end{aligned}$$

para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{Top}$.

Esto nos determina el cocilindro canónico en $\mathscr{Top}$ y lo denotaremos por **W**.

Ejemplo 3.3.3.

Sea $\mathscr{C}$ una categoría cualquiera, entonces podemos definir el cocilindro trivial **Id**, como sigue:

1) El funtor cilindro sera el funtor identidad en $\mathscr{C}$.

2) Las transformaciones naturales e_0 y e_1 serán la identidad.

3) La transformación natural σ sera también la identidad.

Definición 3.3.4. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\mathbf{P} = \{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ y sean X, Y en $ob\mathscr{C}$ y sean $f, g : X \longrightarrow Y$. Decimos que f ***es homotópica a*** g si existe $\phi : X \longrightarrow Y^I$ tal que $\varepsilon_{0_Y} \circ \phi = f$ y $\varepsilon_{1_Y} \circ \phi = g$.

A ϕ le llamamos ***homotopía entre*** f ***y*** g.

Notación. Si f es homotópica a g lo denotamos como $f \simeq g$ y si ϕ es su homotopía lo denotamos como $\phi : f \simeq g$.

Observación. Una categoría puede tener tanto cilindros como cocilindros, si este es el caso se especificará cuando dos morfismos son homotopicos respecto a que cilindro o que cocilindro.

Lema 3.3.5. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\boldsymbol{P} = \{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, se tiene que:*

1) Si $f : X \longrightarrow Y$, entonces $f \simeq f$.

2) Sean $k : W \longrightarrow X$, $f, g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$, si $f \simeq g$, entonces $f \circ k \simeq g \circ k$ y $h \circ f \simeq h \circ g$.

□

Definición 3.3.6. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\mathbf{P} = \{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$ entonces:

1) Si $f \circ g \simeq id_Y$ decimos que g es un ***inverso homotópico derecho*** de f.

2) Si $g \circ f \simeq id_X$ decimos que g es un ***inverso homotópico izquierdo*** de f.

Definición 3.3.7. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\mathbf{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ y sea $f : X \longrightarrow Y$, decimos que f es una ***equivalencia homotópica*** si existe $g : Y \longrightarrow X$ tal que:

$$g \circ f \simeq id_X \qquad \text{y} \qquad f \circ g \simeq id_Y.$$

En tal caso, decimos que g es un ***inverso homotópico*** de f.

Aunque el lemma 3.3.5 nos asegura que la relación "ser homotópico a" es reflexiva y es compatible con la composición, aun no podemos asegurar que sea simétrica y transitiva por ende no podemos definir una categoría cociente[6] con dicha relación.

Para eso se necesita que el cocilindro, al igual que el cilindro en la sección 3.1, cumpla algunas propiedades que veremos a continuación.

Definición 3.3.8. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro $\mathbf{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, definimos una ***involución natural en P*** como una transformación natural

$$\iota : (\ \ )^I \longrightarrow (\ \ )^I$$

tal que :

$$\iota \circ \iota = 1 \qquad \varepsilon_0 \iota = \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_1 \iota = \varepsilon_0 \qquad \iota \circ s = s$$

Lema 3.3.9. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\boldsymbol{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, tal que ι es una involución natural en $\boldsymbol{P}$. Entonces, la relación de homotopía es simétrica.*

□

Definición 3.3.10. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro $\mathbf{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, definimos al ***funtor pullback*** como sigue:

1) Un funtor covariante $\mathcal{C} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$.

2) Dos transformaciones naturales $\rho, \tau : \mathcal{C} \longrightarrow (\ \ )^I$.

[6] Ver la sección 1.7

tales que si X esta en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}X \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[d, "\tau_X"'] & X^I \arrow[d, "\varepsilon_{0_X}"] \\ X^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_X}"'] & X \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

es un diagrama de pullback.

Definición 3.3.11. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro $\mathbf{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ y funtor pullback $\mathcal{C}$, definimos una ***composición natural en P*** como una transformación natural

$$\varsigma : \mathcal{C} \longrightarrow (\ \ )^I$$

tal que $\varepsilon_0 \circ \varsigma = \varepsilon_0 \circ \tau$ y $\varepsilon_1 \circ \varsigma = \varepsilon_1 \circ \rho$.

Lema 3.3.12. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\boldsymbol{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ y una composición natural ς, entonces, la relación de homotopía es transitiva.*

$\square$

Teorema 3.3.13. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ y un cocilindro $\boldsymbol{P} = \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ con una involución natural y una composición natural en* ***P****, la relación de homotopía es una relación de equivalencia y ademas es compatible con la composición.*

$\square$

3.4. Fibración y cofibración

En esta sección definiremos lo correspondiente a fibración y cofibración en una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro. Al igual que en la sección pasada, omitiremos las demostraciones, al ser las duales a las presentadas en la sección 3.2.

3.4.1. Fibración.

Definición 3.4.1. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro **P**$=\{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, sean E, B, Y en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $p : E \longrightarrow B$, decimos que p tiene la ***propiedad de levantamiento de homotopía (HLP)*** respecto a Y si para cualquier par de morfismos $\phi : Y \longrightarrow B^I$ y $f : Y \longrightarrow E$ tales que $\varepsilon_{0_B} \circ \phi = p \circ f$, existe $\Phi : Y \longrightarrow E^I$ tal que $p^I \circ \Phi = \phi$ y $\varepsilon_{0_E} \circ \Phi = f$, *i.e.*, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & B^I \arrow[dr, "\varepsilon_{0_B}"] & \\
Y \arrow[urr, bend left, "\phi"] \arrow[r, dashed, "\Phi"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & E^I \arrow[ur, "p^I"] \arrow[dr, "\varepsilon_{0_E}"'] & & B \\
 & & E \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.16}$$

conmuta.

Definición 3.4.2. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro **P**$=\{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, sean E, B en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $p : E \longrightarrow B$. Decimos que p es una ***fibración*** si tiene la HLP para todo Y en $\mathit{obj}\,\mathscr{C}$.

Equivalentemente, $p : E \longrightarrow B$ es fibración si y sólo si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E^I \arrow[r, "p^I"] \arrow[d, "\varepsilon_{0_E}"'] & B^I \arrow[d, "\varepsilon_{0_B}"] \\
E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano debil[7].

Teorema 3.4.3. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro* **P**$=\{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$*, se tiene que:*

1) Todo isomorfismo es fibración.

[7] Ver la sección 1.6

2) Composición de fibraciónes es fibración.

□

Teorema 3.4.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro* $\boldsymbol{P}=\{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ *tal que el funtor $(\ )^I$ conserva cuadrados cartesianos*[8]. *Consideremos el siguiente cuadrado cartesiano:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

tenemos que si p es fibración entonces q es fibración.

□

Definición 3.4.5. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\mathbf{P}=\{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ y sea $f : X \longrightarrow Y$. Si se puede completar el diagrama como un cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_Y}"'] & Y \end{tikzcd}$$

decimos que f tiene ***cocilindro de aplicación*** y la solución al cuadrado cartesiano la denotaremos por C_f, junto con los morfismos II_f y q_f. Nótese que éste cumple que

$$\begin{tikzcd} C_f \arrow[r, "q_f"] \arrow[d, "\mathrm{II}_f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_Y}"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un cuadrado cartesiano, o bien, decimos que C_f, junto con los morfismos II_f y q_f, es el ***cocilindro de aplicación de f***.

[8] Ver la sección 1.6

Consideremos un morfismo f con cocilindro de aplicación C_f, entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dd, "f"] \\
Y \arrow[d, "s_Y"'] & \\
Y^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_Y}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo ya que $\varepsilon_{0_Y} \circ (s_Y \circ f) = id_Y \circ f = f = f \circ id_X$.

Ahora, como f tiene cocilindro de aplicación tenemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\exists! \iota_f"] \arrow[drr, bend left, "id_X"] \arrow[ddr, bend right, "s_Y \circ f"'] & & \\
& C_f \arrow[r, "q_f"] \arrow[d, "\Pi_f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_Y}"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{3.17}$$

y ademas existe un único $\iota_f : X \longrightarrow C_f$. Ahora considerando la naturalidad de ε_0, tenemos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & X^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_X}"] \arrow[d, "f^I"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y & Y^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_Y}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

conmuta, de donde se obtiene la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X^I \arrow[dr, dashed, "r_f"] \arrow[drr, bend left, "\varepsilon_{0_X}"] \arrow[ddr, bend right, "f^I"'] & & \\
& C_f \arrow[r, "q_f"] \arrow[d, "\Pi_f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y^I \arrow[r, "\varepsilon_{0_Y}"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{3.18}$$

y la existencia de un único morfismo $r_f : X^I \longrightarrow C_f$.

Teorema 3.4.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ morfismo con cocilindro de aplicación C_f. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) f es fibración.

2) f tiene HLP respecto a C_f.

3) existe un morfismo $t : C_f \longrightarrow X^I$ tal que $r_f \circ t = id_{C_f}$.

□

Definición 3.4.7. En una categoría con cocilindro **P**$= \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, dados E, B, Y en $\mathcal{O}bj\,\mathscr{C}$ y morfismos $p : E \longrightarrow B$, $q : Y \longrightarrow B$ y $f : Y \longrightarrow E$, decimos que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\
& B &
\end{tikzcd} \tag{3.19}$$

conmuta homotópicamente si $(p \circ f) \simeq q$.

Teorema 3.4.8. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro* ***P****$=$ $\{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ y consideremos el siguiente diagrama que conmuta homotópicamente*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\
& B, &
\end{tikzcd}$$

donde p es fibración. Entonces existe $g : Y \longrightarrow E$ tal que $f \simeq g$ y $(p \circ g) = q$.

□

3.4.2. Cofibración.

Definición 3.4.9. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro $\mathbf{P}= \{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, sean A, X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $i : A \longrightarrow X$. Decimos que i tiene la ***propiedad de extension de homotopía (HEP)*** respecto a Y si para cualquier par de morfismos $\phi : A \longrightarrow Y^I$ y $f : X \longrightarrow Y$ tales que $\varepsilon_{0_Y} \circ \phi = f \circ i$, existe un morfismo $\Phi : X \longrightarrow Y^I$ tal que $\Phi \circ i = \phi$ y $\varepsilon_{0_Y} \circ \Phi = f$, esto es, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "\varepsilon_{0_Y}"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi"] & Y \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

conmuta.

Definición 3.4.10. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro $\mathbf{P}= \{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, sean A, X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ y sea $i : A \longrightarrow X$. Decimos que i es una ***cofibración*** si tiene la HEP para todo Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Teorema 3.4.11. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cocilindro $\mathbf{P}= \{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$, se tiene que:*

1) Todo isomorfismo es cofibración.

2) Composición de cofibraciónes es cofibración

□

Teorema 3.4.12. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con cocilindro $\mathbf{P}= \{(\ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$ y consideremos el siguiente cuadrado cocartesiano*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "\nu"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Entonces, si i es cofibración entonces j es cofibración.

$\square$

3.5. Cilindros y cocilindros adjuntos

En la sección 1.8 se introdujo el concepto de funtores adjuntos, ahora en esta sección abordaremos nuevamente el tema, pero en termino de los funtores cilindro y cocilindro.

Definición 3.5.1. Dada una categoría $\mathscr{C}$ con cilindro $\mathbf{I}= \{(\ \ )\times I, e_0, e_1, \sigma\}$ y cocilindro $\mathbf{P}= \{(\ \ )^I, \varepsilon_0, \varepsilon_1, s\}$. Decimos que ***(I,P) es un par cilindro/cocilindro adjunto en*** $\mathscr{C}$ si:

1) Se tiene que $\alpha : (\ \ )\times I \dashv (\ \ )^I$ *i.e.* los funtores son adjuntos[9].

2) Para cualquier homotopía $\phi : X \times I \longrightarrow Y$ respecto a $\mathbf{I}$ y cualquier morfismo $f : X \longrightarrow Y$ se tiene que:

$$\varepsilon_{i_Y} \circ \alpha_{X,Y}(\phi) = \phi \circ e_{i_X}, \text{ con } i = 0,1 \tag{3.21a}$$
$$\alpha_{X,Y}(f \circ \sigma_X) = s_Y \circ f \tag{3.21b}$$

Lema 3.5.2. *Dadas una categoría $\mathscr{C}$ con un par cilindro/cocilindro adjunto **(I,P)** y una homotopía $\psi : X \longrightarrow Y^I$ respecto a $\boldsymbol{P}$,así como un morfismo $f : X \longrightarrow Y$. Entonces, se cumple que*

$$\alpha^{-1}_{X,Y}(\psi) \circ e_{i_X} = \varepsilon_{i_Y} \circ \psi, \ \textit{con } i = 0,1 \tag{3.22a}$$
$$\alpha^{-1}_{X,Y}(s_Y \circ f) = f \circ \sigma_X \tag{3.22b}$$

Demostración.

Este lema es una implicación directa de las ecuaciones (3.21a) y (3.21b) de la definición 3.5.1. Se considera $\alpha^{-1}_{X,Y}(\psi) : X \times I \longrightarrow Y$, entonces se tiene:

$$\varepsilon_{i_Y} \circ \psi = \varepsilon_{i_Y} \circ \alpha_{X,Y}(\alpha^{-1}_{X,Y}(\psi)) = \alpha^{-1}_{X,Y}(\psi) \circ e_{i_X}, \text{ con } i = 0,1$$

$$\alpha^{-1}_{X,Y}(s_Y \circ f) = \alpha^{-1}_{X,Y}(\alpha_{X,Y}(f \circ \sigma_X)) = f \circ \sigma_X$$

[9] Para mayor referencia ver la sección 1.8

□

Teorema 3.5.3. *Dada una categoría $\mathscr{C}$ con un par cilindro/cocilindro adjunto **(I,P)** y dados morfismos $f, g : X \longrightarrow Y$, entonces se cumple que*

1) *f es homotopico a g respecto a $\boldsymbol{I}$ si y sólo si f es homotopico a g respecto a $\boldsymbol{P}$.*

2) *Dado A en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, se tiene que f es homotopico a g bajo A respecto a $\boldsymbol{I}$ si y sólo si f es homotopico a g bajo A respecto a $\boldsymbol{P}$.*

3) *Si B está en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$, entonces f es homotopico a g sobre B respecto a $\boldsymbol{I}$ si y sólo si f es homotopico a g sobre B respecto a $\boldsymbol{P}$.*

Demostración.
Sea $\alpha : (\ \ ) \times I \dashv (\ \ )^I$ una adjunción, entonces

1) Si $\phi : f \simeq g$ respecto a $\mathbf{I}$, se tiene que:

$$\alpha_{X,Y}(\phi) : X \longrightarrow Y^I,$$

ahora se procede al siguiente calculo :

$$\varepsilon_{0_Y} \circ \alpha_{X,Y}\phi) \stackrel{(i)}{=} \phi \circ e_{0_X} = f$$
$$\varepsilon_{1_Y} \circ \alpha_{X,Y}(\phi) \stackrel{(i)}{=} \phi \circ e_{1_X} = g$$

donde la igualdad (i) está dada por la ecuación (3.21a). Por lo que $\alpha_{X,Y}(\phi) : f \simeq g$ respecto a $\mathbf{P}$.

Ahora, sea $\psi : f \simeq g$ respecto a $\mathbf{P}$, se tiene que:

$$\alpha^{-1}_{X,Y}(\psi) : X \times I \longrightarrow Y$$

ahora se procede al siguiente calculo:

$$\alpha^{-1}_{X,Y}(\psi) \circ e_{0_X} \stackrel{(ii)}{=} \varepsilon_{0_X} \circ \psi = f$$
$$\alpha^{-1}_{X,Y}(\psi) \circ e_{1_X} \stackrel{(ii)}{=} \varepsilon_{1_X} \circ \psi = g$$

donde la igualdad (ii) está dada por la ecuación (3.22a). Por lo que $\alpha_{X,Y}^{-1}(\psi) : f \simeq g$ respecto a $\mathbf{I}$.

2) Sean $f, g : i' \longrightarrow i$ morfismos bajo A tales que $\phi : f \overset{A}{\simeq} g$ respecto a $\mathbf{I}$. Luego, se tiene que $\phi : f \simeq g$ en $\mathscr{C}$ respecto a $\mathbf{I}$ y además el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "i' \times I"'] & A \arrow[d, "i"] \\ X' \times I \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta. Por el inciso anterior, sabemos que $\alpha_{X',X}(\phi) : f \simeq g$ en $\mathscr{C}$ respecto a $\mathbf{P}$. Ahora sólo falta ver que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[d, "s_X"] \\ X' \arrow[r, "\alpha_{X',X}"'] & X^I \end{tikzcd}$$

Para eso, considerando la naturalidad de α, se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i'"'] & \mathscr{C}(A \times I, X) \arrow[r, "\alpha_{A,X}"] & \mathscr{C}(A, X^I) \\ X' & \mathscr{C}(X' \times I, X) \arrow[r, "\alpha_{X',X}"'] \arrow[u, "(i' \times I)^*"] & \mathscr{C}(X', X^I) \arrow[u, "i'^*"'] \end{tikzcd}$$

Y esto implica que

$$\alpha_{X',X}(\phi) \circ i' = \alpha_{A,X}(\phi \circ (i' \times I)) = \alpha_{A,X}(i \circ \sigma_A) = s_X \circ i$$

Procediendo análogo se demuestra que si f es homotópico a g bajo A respecto a $\mathbf{P}$, entonces son homotópicos bajo A respecto a $\mathbf{I}$.

3) Sean $f, g : p' \longrightarrow p$ morfismos sobre B tales que $\psi : f \underset{B}{\simeq} g$ respecto a $\mathbf{I}$. Entonces, se tiene que $\psi : f \simeq g$ en $\mathscr{C}$ respecto a $\mathbf{I}$ y además el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E' \times I \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\sigma_{E'}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E' \arrow[r, "p'"'] & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por el inciso (1) se tiene que $\alpha_{E',E}(\psi) : f \simeq g$ en $\mathscr{C}$ respecto a $\mathbf{P}$. Para verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\alpha_{E',E}(\psi)"] \arrow[d, "p'"'] & E^I \arrow[d, "p^I"] \\ B \arrow[r, "s_B"'] & B^I \end{tikzcd}$$

conmute, se considera la naturalidad de α, la cual hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] & \mathscr{C}(E' \times I, E) \arrow[r, "\alpha_{E',E}"] \arrow[d, "p_*"'] & \mathscr{C}(E', E^I) \arrow[d, "p^I_*"] \\ B & \mathscr{C}(E' \times I, B) \arrow[r, "\alpha_{E',B}"'] & \mathscr{C}(E', B^I). \end{tikzcd}$$

Luego, se tiene que:

$$p^I \circ \alpha_{E',E}(\psi) = \alpha_{E',B}(p \circ \psi) = \alpha_{E',B}(p' \circ \sigma_{E'}) = s_B \circ p'$$

De una manera enteramente análoga, se demuestra que si f es homotopico a g sobre B respecto a $\mathbf{P}$, entonces son homotópicos sobre B respecto a $\mathbf{I}$.

$\square$

Teorema 3.5.4. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría con un par cilindro/cocilindro adjunto **(I,P)**. Entonces, se cumple que*

1) $i : A \longrightarrow X$ es cofibracion respecto a $\boldsymbol{I}$ si y sólo si es cofibracion respecto a $\boldsymbol{P}$.

2) $p : E \longrightarrow B$ es fibracion respecto a $\boldsymbol{I}$ si y sólo si es fibracion respecto a $\boldsymbol{P}$.

Demostración.

1) Sean $i : A \longrightarrow X$ cofibracion respecto a $\mathbf{I}$, $\psi : A \longrightarrow Y^I$ homotopía en $\mathbf{P}$ y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo, tales que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "\varepsilon_{0_Y}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Considerando $\alpha^{-1}_{A,Y}(\psi) : A \times I \longrightarrow Y$, se tiene que

$$\alpha^{-1}_{A,Y}(\psi) \circ e_{0_A} \overset{(i)}{=} \varepsilon_{0_Y} \circ \psi = f \circ i,$$

donde la igualdad en (i) está dada por el lema 3.5.2. Por lo tanto el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \times I \arrow[dr, "i \times I"] \arrow[drr, bend left, "\alpha^{-1}_{A,Y}(\psi)"] & & \\ A \arrow[ur, "e_{0_A}"] \arrow[dr, "i"'] & & X \times I \arrow[r, dashed, "\exists \Phi"] & Y \\ & X \arrow[ur, "e_{0_X}"] \arrow[urr, bend right, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, por ser $i : A \longrightarrow X$ cofibracion respecto a $\mathbf{I}$. Ahora, considerando la naturalidad de α se tiene que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i"'] & \mathscr{C}(A \times I, Y) \arrow[r, "\alpha_{A,Y}"] & \mathscr{C}(A, Y^I) \\
X & \mathscr{C}(X \times I, Y) \arrow[r, "\alpha_{X,Y}"'] \arrow[u, "(i\times I)^*"] & \mathscr{C}(X, Y^I) \arrow[u, "i^*"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Luego, junto con $\alpha_{X,Y}(\Phi) : X \longrightarrow Y^I$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\alpha_{X,Y}(\Phi) \circ i &\overset{(i)}{=} \alpha_{A,Y}(\Phi \circ (i \times I)) = \alpha_{A,X}(\alpha^{-1}_{A,Y}(\psi)) = \psi \\
\varepsilon_{0_Y} \circ \alpha_{X,Y}(\Phi) &= \Phi \circ e_{0_X} = f,
\end{aligned}
$$

donde la igualdad (i) está dada por la naturalidad de α.

Por otro lado, si $i : A \longrightarrow X$ es cofibracion respecto a $\mathbf{P}$, se procede análogo para verificar que $i : A \longrightarrow X$ es cofibracion respecto a $\mathbf{I}$.

2) Sea $p : E \longrightarrow B$ fibracion respecto a $\mathbf{I}$.

Sean $\psi : Y \longrightarrow B^I$ homotopía en $\mathbf{I}$ y $f : Y \longrightarrow E$ morfismo, tales que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & B^I \arrow[dr, "\varepsilon_{0_B}"] & \\
Y \arrow[urr, bend left, "\psi"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & E^I \arrow[ur, "p^I"] \arrow[dr, "\varepsilon_{0_E}"'] & & B \\
 & & E \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Considerando $\alpha^{-1}_{Y,B}(\psi) : Y \times I \longrightarrow B$, se tiene

$$
\alpha^{-1}_{Y,B}(\psi) \circ e_{0_Y} \overset{(i)}{=} \varepsilon_{0_B} \circ \psi = p \circ f,
$$

donde la igualdad en (i) está dada por la definición 3.5.1. Luego, el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_{0_Y}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "\alpha_{Y,B}^{-1}(\psi)"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\Phi"] & B, \end{tikzcd}$$

por ser $p : E \longrightarrow B$ fibracion respecto a $\mathbf{I}$. Ahora, dad la naturalidad de α, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] & \mathscr{C}(Y \times I, E) \arrow[r, "\alpha_{Y,E}"] \arrow[d, "p_*"'] & \mathscr{C}(Y, E^I) \arrow[d, "p_*^I"] \\ B & \mathscr{C}(Y \times I, B) \arrow[r, "\alpha_{Y,B}"'] & \mathscr{C}(Y, B^I). \end{tikzcd}$$

Y, junto con $\alpha_{Y,E}(\Phi) : Y \longrightarrow E^I$, se verifica que

$$\begin{aligned} p^I \circ \alpha_{Y,E}(\Phi) &\overset{(i)}{=} \alpha_{Y,B}(p \circ \Phi) = \alpha_{Y,B}(\alpha_{Y,B}^{-1}(\psi)) = \psi \\ \varepsilon_{0_E} \circ \alpha_{Y,E}(\Phi) &= \Phi \circ e_{0_Y} = f, \end{aligned}$$

donde la igualdad (i) está dada por la naturalidad de α.

Ahora, dada una fibración $p : E \longrightarrow B$ respecto a $\mathbf{P}$, se procede de manera análoga para demostrar que $p : E \longrightarrow B$ es fibracion respecto a $\mathbf{I}$.

$\square$

Otra forma demostrar los regresos del teorema anterior es hacer la dualización de lo demostrado en el inciso (1) y se obtiene el regreso del inciso (2). Luego, hacer la dualización de lo demostrado en el inciso (2) y se obtiene el regreso del inciso (1).

Capítulo 4

Homología

En este capitulo se darán algunas definiciones así como algunos resultados sobre álgebra homológica. En la sección 4.1 se definirá la categoría de los complejos de cadena (sobre grupos abelianos) y se verá que muchas de las construcciones que se pueden hacer en la categoría $\mathscr{Ab}$ también existen en está nueva categoría. En la sección 4.2 se definirá el n-ésimo grupo de homología el cual es un grupo abeliano y se demostrará que es un funtor, además se definirá la homotopía entre morfismos de cadena y se demostrarán algunas propiedades que relacionan a la homología con la homotopía. En la sección 4.3 se demostrarán varios resultados sobre secuencias exactas de cadena y al final se definirá un morfismo conector el cual nos dará una relación entre grupos de homología. En la sección 4.4 se demostraran dos resultados importantes acerca del morfismo conector d_n. Por último en la sección 4.5 se verá como se puede construir el n-ésimo grupo de homología en cualquier categoría $\mathscr{C}$ y cuándo dicha construcción será una teoría ordinaria de homología y se construirá un ejemplo para la categoría $\mathscr{Top}_2$.

4.1. Complejos de cadena

Definición 4.1.1. Se define un ***complejo de cadena*** $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la sucesión:

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{4.1}$$

donde K_n es un grupo abeliano, ∂_n es un morfismo de grupos y cumplen que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Al homomorfismo ∂_n lo llamamos ***diferenciación de grado n*** y al grupo abeliano K_n lo llamamos el ***término de grado n***.

Cuando no haya confusión sobre los grupos y homomorfismos correspondientes a cada complejo de cadena, simplemente se denotarán por K. Además observemos que dos complejos de cadena $(K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $(K'_n, \partial'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ son iguales si y sólo si $K_n = K'_n$ y $\partial_n = \partial'_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

La condición $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ implica que $\mathrm{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y no necesariamente se da la igualdad. Para complejos de cadena que cumplen la igualdad se tiene la siguiente definición.

Definición 4.1.2. Dado un complejo de cadena K se dice que es ***exacto*** si se tiene que $\mathrm{im}(\partial_{n+1}) = \ker(\partial_n)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.1.3. Dado dos complejos de cadena $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{K'}$ se define un ***morfismo entre complejos de cadena*** como una colección $f = \{f_n : K'_n \longrightarrow K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde cada f_n es un morfismo de grupos de modo que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & K'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & K'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "f_n"'] & K'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
K & \cdots \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & K_n \arrow[r, "\partial_n"'] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Esto es, $\partial_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ \partial'_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.1.4. Dados dos morfismos de complejos de cadena $f' : K'' \longrightarrow K'$ y $f : K' \longrightarrow K$, se define la ***composición entre morfismos de complejos de cadena*** $f' \circ f$ como el morfismo tal que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
K'' \arrow[d, "f'"'] & \cdots \arrow[r] & K''_{n+1} \arrow[r, "\partial''_{n+1}"] \arrow[d, "f'_{n+1}"'] & K''_n \arrow[r, "\partial''_n"] \arrow[d, "f'_n"'] & K''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f'_{n-1}"] & \cdots \\
K' \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & K'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & K'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "f_n"'] & K'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
K & \cdots \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & K_n \arrow[r, "\partial_n"'] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

es decir que $f'' = f \circ f' = \{f''_n = f_n \circ f'_n : K''_n \longrightarrow K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Con esto se puede observar que los complejos de cadena cumplen las propiedades para ser una categoría, lo que nos lleva la siguiente definición.

Definición 4.1.5. Se define la ***categoría de los complejos de cadena*** $\mathscr{CAb}$ cuyos objetos son los complejos de cadena K y los morfismos están dado por el conjunto $\mathscr{CAb}(K', K)$ dado en la definición 4.1.3 y la regla de composición está dada por la definición 4.1.4.

La categoría $\mathscr{CAb}$ es muy parecida a la categoría $\mathscr{Ab}$ dado que hay análogos a subgrupos, kernel, imagen, grupo cociente, los teorema de isomorfismos, suma directa, entre otros en $\mathscr{CAb}$. A continuación se darán algunas definiciones para los complejos de cadena.

Definición 4.1.6. Dados dos complejos de cadena $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $K' = (K'_n, \partial'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se dice que K' es un ***subcomplejo de cadena*** de K si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[d, "i"'] & \cdots \arrow[r] & K'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "i_{n+1}"'] & K'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "i_n"'] & K'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{n-1}"] & \cdots \\
K & \cdots \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & K_n \arrow[r, "\partial_n"'] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

donde $i = \{i_n : K'_n \hookrightarrow K_n\}$ es el homomorfismo inclusión. Es decir, si cada K'_n es subgrupo de K_n y además se tiene que $\partial'_n = \partial_n|_{K'_n}$.

Definición 4.1.7. Si K' es un subcomplejo de cadena de K entonces se define el ***complejo cociente*** K/K' como el siguiente complejo de cadena:

$$\cdots \longrightarrow K_{n+1}/K'_{n+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} K_n/K'_n \xrightarrow{\bar{\partial}_n} K_{n-1}/K'_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{4.5}$$

donde $\bar{\partial}_n : k_n + K'_n \mapsto \partial_n(k_n) + K'_{n-1}$ y esto es para toda $n \in \mathbb{Z}$.

El homomorfismo $\bar{\partial}_n$ esta bien definido dado que $\partial'_n = \partial_n|_{K'_n}$ y por ende $\partial_n(K'_n) \subseteq K'_{n-1}$.

Definición 4.1.8. Dado un morfismo de complejos $f : K'' \longrightarrow K$ se define el ***kernel de f*** como el subcomplejo de K'' dado por:

$$\cdots \longrightarrow \ker(f_{n+1}) \xrightarrow{\partial'_{n+1}} \ker(f_n) \xrightarrow{\partial'_n} \ker(f_{n-1}) \longrightarrow \cdots \tag{4.6}$$

donde $\partial'_n = \partial''_n|_{\ker(f_n)}$. A dicho subcomplejo lo denotaremos por $\ker(f)$.

Definición 4.1.9. Dado un morfismo de complejos $f : K'' \longrightarrow K$ se define la ***imagen de f*** como el subcomplejo de K dado por:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{im}(f_{n+1}) \xrightarrow{\Delta'_{n+1}} \mathrm{im}(f_n) \xrightarrow{\Delta'_n} \mathrm{im}(f_{n-1}) \longrightarrow \cdots \tag{4.7}$$

donde $\Delta'_n = \partial_n|_{\mathrm{im}(f_n)}$. A dicho subcomplejo lo denotaremos por $\mathrm{im}(f)$.

Definición 4.1.10. Dada una familia indexada de complejos de cadena $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\mathscr{CAb}$, se define el ***producto directo*** como el complejo de cadenas $\prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$ dado como la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda_n \xrightarrow{\partial_n} \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda_{n-1} \longrightarrow \cdots \tag{4.8}$$

es decir, que $(\prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda)_n := \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda_n$ es el producto directo usual de grupos abelianos y donde $\partial_n := \prod_{\lambda\in\Lambda} \partial^\lambda_n$ es el producto directo de homomorfismos, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.1.11. *En la categoría $\mathscr{CAb}$ el producto directo de complejos cumple la propiedad universal del producto de categorías.*

Demostración.

Dada una familia indexada de complejos de cadena $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, hay que demostrar que para cualquier Y en $\mathscr{obj}\,\mathscr{CAb}$ y dadas $f^\lambda : Y \longrightarrow K^\lambda$ para toda $\lambda \in \Lambda$, existe una única $f : Y \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f^\lambda"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ K^\lambda & \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda \arrow[l, "\pi_{K^\lambda}"] \end{tikzcd}$$

conmuta. Donde los morfismos $\pi_{K^\lambda} : \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda \longrightarrow K^\lambda$ son las proyecciones de complejos de cadena, esto es, $\pi_{K^\lambda} := \{\pi_{K_n^\lambda} : \prod_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda \longrightarrow K_n^\lambda\}$.

Pero para la existencia de $f : Y \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$ hay que verificar la existencia de $f_n : Y_n \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y eso se reduce a que el siguiente diagrama conmuta para toda $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} & Y_n \arrow[dl, "f_n^\lambda"'] \arrow[d, dashed, "\exists! f_n"] \\ K_n^\lambda & \prod_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda. \arrow[l, "\pi_{K_n^\lambda}"] \end{tikzcd}$$

Pero sabemos que dicho f_n existe que hace conmutar el diagrama porque en $\mathscr{Ab}$ el producto directo cumple la propiedad universal del producto, por lo que $f := \{f_n\}$ es el morfismo de cadena que buscamos y además en único debido a la unicidad de cada uno de los f_n. $\square$

Definición 4.1.12. Dada una familia indexada de complejos de cadena $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $\mathscr{CAb}$, se define la ***suma directa*** como el complejo de cadenas $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$ dado como la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_{n+1}^\lambda \xrightarrow{\partial_{n+1}} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda \xrightarrow{\partial_n} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_{n-1}^\lambda \longrightarrow \cdots \tag{4.9}$$

es decir, que $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda)_n := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda$ es la suma directa usual de grupos abelianos y donde $\partial_n := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \partial_n^\lambda$ es la suma directa de los morfismos, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.1.13. *En la categoría $\mathscr{CAb}$ la suma directa de complejos cumple la propiedad universal del coproducto de categorás.*

Demostración.

Dada una familia indexada de complejos de cadena $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, hay que demostrar que para cualquier Y en $\mathscr{Obj}\,\mathscr{CAb}$ y dadas $f^\lambda : K^\lambda \longrightarrow Y$ para toda $\lambda \in \Lambda$, existe una única $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K^\lambda \arrow[r, "\iota^\lambda"] \arrow[dr, "f^\lambda"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

conmuta. Donde los morfismos $\iota^\lambda : K^\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$ son las inclusiones de complejos de cadenas, en otras palabras, $\iota^\lambda := \{\iota_n^\lambda : K_n^\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda\}$

Pero para la existencia de $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda \longrightarrow Y$ hay que verificar la existencia de $f_n : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda \longrightarrow Y_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y eso se reduce a que el siguiente diagrama conmuta para toda $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} K_n^\lambda \arrow[r, "\iota_n^\lambda"] \arrow[dr, "f_n^\lambda"'] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda \arrow[d, dashed, "\exists! f_n"] \\ & Y_n. \end{tikzcd}$$

Sabemos que existe f_n que hace conmutar dicho diagrama porque en $\mathscr{Ab}$ la suma directa cumple la propiedad universal del coproducto, por lo que $f := \{f_n\}$ es el morfismo de cadena que buscamos y además es único debido a la unicidad de cada uno de los f_n. $\square$

Con esto ya tenemos que en la categoría de $\mathscr{CAb}$ existe el producto y el coproducto, además por los teoremas 2.4.9 y 2.4.18 se tiene que los funtores $\prod \mathscr{CAb}(\_, K^\lambda)$ y $\prod \mathscr{CAb}(K^\lambda, \_)$ son representables y además se tiene que $\prod \mathscr{CAb}(Y, K^\lambda) \cong \mathscr{CAb}(Y, \prod_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda)$ y $\prod \mathscr{CAb}(K^\lambda, Y) \cong \mathscr{CAb}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda, Y)$

Teorema 4.1.14. *Dada una familia de complejos $\{K^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que Λ es finita entonces se tiene que $\prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda$.*

Demostración.

Sabemos que $(\prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda)_n = \prod_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda$ y $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda)_n = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda$. Pero en la categoría $\mathscr{Ab}$ se cumple que $\prod_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K_n^\lambda$ cuando Λ es finita, entonces se tiene que $(\prod_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda)_n = (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K^\lambda)_n$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, por definición se tiene que $\partial_n = \prod_{\lambda\in\Lambda} \partial_n^\lambda$ y $\partial'_n = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \partial_n^\lambda$. Pero nuevamente en la categoría $\mathscr{Ab}$ se tiene que $\prod_{\lambda\in\Lambda} \partial_n^\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \partial_n^\lambda$, para toda $n \in \mathbb{Z}$ cuando Λ es finita. $\square$

Las ultimas dos definiciones dan pie a la siguiente propiedad sobre los complejos de cadena, la cual es muy interesante. Básicamente asegura que todo complejo de cadena es tanto un $\mathscr{CAb}$-grupo como un $\mathscr{CAb}$-cogrupo y además ambos son abelianos.

Teorema 4.1.15. *Dados complejos de cadena K y K' se tiene que el conjunto $\mathscr{CAb}(K', K)$ tiene estructura de grupo abeliano.*

Demostración.

Se define la operación $+$ como sigue:

$$+ : \mathscr{CAb}(K', K) \times \mathscr{CAb}(K', K) \longrightarrow \mathscr{CAb}(K', K)$$

$$(f, g) \longmapsto (f + g) := \{f_n +_{K_n} g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

donde $(f_n +_{K_n} g_n)(k_n)$ es la función tal que para toda $k_n \in K_n$ la operación $f_n(k_n) +_{K_n} g_n(k_n)$ es en el grupo abeliano K_n.

Primero se demostrara que $+$ es asociativa, para eso sean $f, g, h : K' \longrightarrow K$ por lo que:

$$\begin{aligned}(f + g) + h &= \{(f_n +_{K_n} g_n) +_{K_n} h_n\} \overset{(i)}{=} \{(f_n +_{K_n} (g_n +_{K_n} h_n)\} \\ &= f + (g + h)\end{aligned}$$

donde (i) está dada por la asociatividad de $+_{K_n}$.

Para demostrar la existencia del neutro se propone al morfismo cero $0 : K' \longrightarrow K$ como el neutro.

$$f + 0 = \{f_n +_{K_n} 0_n\} \overset{(ii)}{=} \{f_n\} = f$$
$$0 + f = \{0_n +_{K_n} f_n\} \overset{(ii)}{=} \{f_n\} = f$$

donde (ii) se cumple porque $0_n(k'_n) = 0_n$ manda todos los elementos de K'_n al neutro de K_n.

Dada $f : K' \longrightarrow K$ se propone $-f : K' \longrightarrow K$ como $-f = \{-f_n\}$[1] entonces se tiene que:

$$f + (-f) = \{f_n +_{K_n} (-f_n)\} \overset{(iii)}{=} \{0_n\} = 0$$
$$(-f) + f = \{-f_n +_{K_n} f_n\} \overset{(iii)}{=} \{0_n\} = 0$$

donde (iii) se cumple porque $-f_n(k'_n)$ es el inverso de $f_n(k'_n)$ respecto a $+_{K_n}$ en K_n.

Por último se verifica que $+$ es conmutativo:

$$f + g = \{f_n +_{K_n} g_n\} \overset{(iv)}{=} \{g_n +_{K_n} f_n\} = g + f$$

donde (iv) está dada por la conmutatividad de $+_{K_n}$. □

Lema 4.1.16. *La categoría $\mathscr{CAb}$ tiene objetos inicial, terminal y cero.*

Demostración.

Se propone al complejo 0 donde todos sus términos son el grupo trivial $K_n = 0$ y su diferenciación son los morfismos de grupos que mandan el neutro en el neutro $\partial_n = 0$ por lo que se tiene que:

1) Es objeto inicial ya que el único morfismo de cadena $0 \longrightarrow K$ es el que manda el cero de 0_n en el neutro de K_n, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

[1] La notación se refiere a que se considera el inverso de $f_n(k'_n)$ respecto a $+_{K_n}$.

2) Es objeto terminal ya que el único morfismo de cadena $K \longrightarrow 0$ es el que manda a todos los elementos de K_n en el cero de 0_n, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

3) Es objeto cero ya que es objeto inicial y objeto terminal.

$\square$

Corolario 4.1.17. *Todo complejo de cadena es tanto un $\mathscr{CAb}$-grupo abeliano como un $\mathscr{CAb}$-cogrupo abeliano.*

Demostración.
Del teorema anterior se tiene que $\mathscr{CAb}(K', K)$ es un grupo abeliano y por los teoremas 2.6.8, 2.7.8 junto con sus corolarios se tiene que K es un $\mathscr{CAb}$-grupo abeliano y K' es un $\mathscr{CAb}$-cogrupo abeliano. Pero esto es para cualquier complejo de cadena. $\square$

4.2. Homología y homotopía

Definición 4.2.1. Dado un complejo de cadena K se definen:

1) El ***n-ésimo grupo de ciclos*** como $Z_n(K) = \ker(\partial_n)$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

2) El ***n-ésimo grupo de fronteras*** como $B_n(K) = \operatorname{im}(\partial_{n+1})$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

3) El ***n-ésimo grupo de homología*** como

$$H_n(K) = \frac{Z_n(K)}{B_n(K)} \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{4.10}$$

Cuando no haya confusión respecto a qué complejo de cadena se refiera, simplemente se denotaran como; Z_n, B_n y H_n. Además observe que el n-ésimo grupo de homología mide la falta de exactitud del término de grado n, ya que si el grupo de homología es trivial para toda $n \in \mathbb{Z}$ entonces el complejo de cadena seria exacto. Esto último es la afirmación del siguiente lema.

Lema 4.2.2. *Un complejo de cadena K es exacto si y sólo si $H_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración.

K es exacto si y sólo si $Z_n = \ker(\partial_n) = \operatorname{im}(\partial_{n+1}) = B_n$ si y sólo si $H_n = Z_n/B_n = 0$. $\square$

Lema 4.2.3. *Dado un morfismo de complejos de cadenas $f : K' \longrightarrow K$, se tiene que $f_n(Z_n(K')) \subseteq Z_n(K)$ y $f_n(B_n(K')) \subseteq B_n(K)$*

Demostración.

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
K' \arrow[d, "f"'] & \cdots \arrow[r] & K'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & K'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "f_n"'] & K'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
K & \cdots \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & K_n \arrow[r, "\partial_n"'] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Del diagrama de la derecha se obtiene que para toda $z'_n \in Z_n(K')$ se tiene que $(\partial_n \circ f_n)(z'_n) = f_{n-1}(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, con lo que se obtiene que $f_n(Z_n(K')) \subseteq Z_n(K)$.

Del diagrama de la izquierda se tiene que para toda $b'_n \in B_n(K')$ existe $k'_{n+1} \in K'_{n+1}$ tal que $\partial'_{n+1}(k'_{n+1}) = b'_n$ y además $f_n(b'_n) = (\partial_{n+1} \circ f_{n+1})(k'_{n+1})$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y con esto se obtiene $f_n(B_n(K')) \subseteq B_n(K)$. $\square$

Definición 4.2.4. Dado $z_n \in Z_n$ se define la ***clase de homología de*** z_n como $[z_n] = z_n + B_n \in H_n$.

Teorema 4.2.5. *El n-ésimo grupo de homología es un funtor.*

Demostración.

$H_n : \mathscr{CAb} \longrightarrow \mathscr{Ab}$ ya que si K es un complejo de cadena entonces $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$ es un grupo abeliano, ya que K_n es abeliano y por ende $Z_n(K)$ y $B_n(K)$ son grupos abelianos, más aun, son subgrupos normales.

Dado $f : K' \longrightarrow K$, luego, $H_n(f)$ está dada por:

$$H_n(f) : H_n(K') \longrightarrow H_n(K)$$

$$[z'_n] \longmapsto [f_n(z'_n)],$$

la cual está bien definida ya que por el lema 4.2.3 se tiene que si $z'_n \in Z'_n$ entonces $f_n(z'_n) \in Z_n$ y $[f_n(z'_n)] \in H_n(K)$. Ahora, falta verificar que no depende del representante: sean $z'_{1_n}, z'_{2_n} \in Z_n(K)$ tales que $[z'_{1_n}] = [z'_{2_n}]$. Entonces sabemos que $[0] = [z'_{1_n}] - [z'_{2_n}] = [z'_{1_n} - z'_{2_n}]$ por lo que:

$$\begin{aligned} [0] &\overset{(i)}{=} H_n(f)[0] = H_n(f)[z'_{1_n} - z'_{2_n}] = [f_n(z'_{1_n} - z'_{2_n})] \\ &\overset{(i)}{=} [f_n(z'_{1_n}) - f_n(z'_{2_n})] = [f_n(z'_{1_n})] - [f_n(z'_{2_n})] \\ &= H_n(f)[z'_{1_n}] - H_n(f)[z'_{2_n}] \end{aligned}$$

donde la igualdad (i) está dada por ser f_n un morfismo de grupos. Con esto se tiene que $H_n(f)[z'_{1_n}] = H_n(f)[z'_{2_n}]$, por lo que $H_n(f)$ no depende del representante.

Ahora hay que demostrar que $H_n(f)$ es un morfismo de grupos, pero la demostración es análoga a la anterior, sean $[x], [y] \in H_n(K)$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} H_n(f)([x] + [y]) &= [f_n(x + y)] = [f_n(x) + f_n(y)] = [f_n(x)] + [f_n(y)] \\ &= H_n(f)[x] + H_n(f)[y]. \end{aligned}$$

Con esto se obtiene que para todo $f \in \mathscr{CAb}(K', K)$, se tiene que $H_n(f) \in \mathscr{Ab}(H_n(K'), H_n(K))$.

Ahora, sean $f' : K'' \longrightarrow K'$ y $f : K' \longrightarrow K$ dos morfismos de complejos de cadenas. Hay que demostrar que $H_n(f \circ f') = H_n(f) \circ H_n(f')$. Sea $[z''_n] \in H_n(K'')$ por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} H_n(f \circ f')([z''_n]) &= [(f \circ f')_n(z''_n)] \overset{(ii)}{=} [(f_n \circ f'_n)(z''_n)] = [f_n(f'_n(z''_n))] \\ &\overset{(iii)}{=} H_n(f)([f'_n(z''_n)]) = H_n(f) \circ H_n(f')[(z''_n)] \end{aligned}$$

donde la igualdad indicada por (ii) es debido a la definición de composición entre morfismos de complejos de cadenas y la indicada por (iii) está dada por el lema 4.2.3.

Por último falta verificar que $H_n(1_K) = 1_{H_n(K)}$. Sea $[z_n] \in H_n(K)$ entonces se tiene que:

$$H_n(1_K) \overset{(iv)}{=} [1_{K_n}(z_n)] = [z_n] = 1_{H_n(K)}[z_n]$$

la igualdad en (iv) está dada por el morfismo $1_K = \{1_{K_n} : K_n \longrightarrow K_n\}$. $\square$

Definición 4.2.6. Dados dos morfismos de complejos de cadenas $f, g : K' \longrightarrow K$, se dice que f y g son ***homotópicos (de cadena)*** si existe una colección de morfismos $\varphi = \{\varphi_n : K'_n \longrightarrow K_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que se da la igualdad $\partial_{n+1}\varphi_n + \varphi_{n-1}\partial'_n = f_n - g_n$, para toda $n \in \mathbb{Z}$. En un diagrama

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[d, "f-g"'] & \cdots \arrow[r] & K'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & K'_n \arrow[r, "\partial'_n"] \arrow[d, "f_n-g_n"] \arrow[dl, dashed, "\varphi_n"'] & K'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "\varphi_{n-1}"'] & \cdots \\
K & \cdots \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & K_n \arrow[r, "\partial_n"'] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

A la sucesión $\varphi = \{\varphi_n\}$ se le llama ***homotopía de cadena*** y se denota como $\varphi : f \simeq g$.

Definición 4.2.7. Dado un morfismo de complejos de cadenas $f : K' \longrightarrow K$, se dice que f es una ***equivalencia homotópica de cadena*** si existe $g : K \longrightarrow K'$ tal que $g \circ f \simeq 1_{K'}$ y $f \circ g \simeq 1_K$. En este caso se dice que K' y K son ***complejos de cadena equivalentes***.

Teorema 4.2.8. *La relación de homotopía de cadena*[2] *es una relación de equivalencia.*

[2]La relación es sobre el conjunto de morfismos de complejos de cadenas.

Demostración.

El morfismo de cadena $0 = \{0_n : K'_n \longrightarrow K_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es tal que $\partial_{n+1}0_n + 0_{n-1}\partial'_n = 0 = f_n - f_n$, por lo que es reflexiva.

Dado $\varphi : f \simeq g$, se propone que $-\varphi : g \simeq f$. Para verificarlo se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(-\varphi_n) + (-\varphi_{n-1})\partial'_n &= -\partial_{n+1}\varphi_n - \varphi_{n-1}\partial'_n = -(f_n - g_n)\\ &= g_n - f_n,\end{aligned}$$

por lo que es simétrica.

Dados $\varphi : f \simeq g$ y $\psi : g \simeq h$ entonces se propone que $\varphi+\psi : f \simeq h$. En efecto:

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(\varphi+\psi) + (\varphi+\psi)\partial'_n &= \partial_{n+1}\varphi + \partial_{n+1}\psi + \varphi\partial'_n + \psi\partial'_n\\ &= f_n - g_n + g_n - h_n = f_n - h_n,\end{aligned}$$

por lo que la relación es transitiva. □

Teorema 4.2.9. *La relación de homotopía de cadena es compatible con la composición de complejos de cadena, i.e., dados morfismos de cadena $f', g' : K'' \longrightarrow K'$ y $f, g : K' \longrightarrow K$ tales que $\varphi : f \simeq g$ y $\psi : f' \simeq g'$ se cumple que $ff' \simeq gg'$.*

Demostración.

Consideremos morfismos de cadena $f', g' : K'' \longrightarrow K'$ y $f, g : K' \longrightarrow K$ tales que $\varphi : f \simeq g$ y $\psi : f' \simeq g'$, entonces

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(f_{n+1}\psi_n) + (f_n\psi_{n-1})\partial''_n &\overset{(i)}{=} f_n\partial'_{n+1}\psi_n + f_n\psi_{n-1}\partial''_n\\ &= f_n(\partial'_{n+1}\psi_n + \psi_{n-1}\partial''_n)\\ &= f_n(f'_n - g'_n) = f_nf'_n - f_ng'_n\end{aligned}$$

donde la igualdad en (i) está dada por la propiedad de los morfismos de cadena $\partial_{n+1}f_{n+1} = f_n\partial'_{n+1}$. Mientras que $\varphi g' : fg' \simeq gg'$ ya que:

$$\begin{aligned}\partial_{n+1}(\varphi_n g'_n) + (\varphi_{n-1}g'_{n-1})\partial''_n &\overset{(ii)}{=} \partial_{n+1}\varphi_n g'_n + \varphi_{n-1}\partial'_n g'_n\\ &= (\partial_{n+1}\varphi_n + \varphi_{n-1}\partial'_n)g'_n\\ &= (f_n - g_n)g'_n = f_ng'_n - g_ng'_n\end{aligned}$$

donde la igualdad en (ii), análogo a la anterior, está dada por la propiedad de los morfismos de cadena $\partial'_n g'_n = g'_{n-1}\partial''_n$.

Finalmente, por la propiedad transitiva, se tiene que $f\psi + \varphi g'$: $ff' \simeq gg'$. □

Con esto se puede definir una nueva categoría, la categoría cociente, como se definió en la sección 1.7.

Definición 4.2.10. Se define la categoría $\mathscr{HAb}$ como la categoría cociente de $\mathscr{CAb}$ por medio de la relación de homotopía.

Con esta nueva categoría se pueden demostrar algunas propiedades sobre homología, las cuales se ven a continuación.

Teorema 4.2.11. *Dados dos morfismos de cadena $f, g : K' \longrightarrow K$, tales que $\varphi : f \simeq g$, entonces se tiene que $H_n(f) = H_n(g) : H_n(K') \longrightarrow H_n(K)$, es decir, morfismos de cadena homotópicos inducen los mismos morfismos en homología.*

Demostración.

Dado $[z'_n] \in H_n(K')$ se tiene que:

$$\begin{aligned} H_n(f)[z'_n] - H_n(g)[z'_n] &= [f_n(z'_n) - g_n(z'_n)] \\ &= [\partial_{n+1}\varphi_n(z'_n) + \varphi_{n-1}\partial'_n(z'_n)] \\ &\overset{(i)}{=} [\partial_{n+1}\varphi_n(z'_n)] \overset{(ii)}{=} [0] \end{aligned}$$

Donde la igualdad en (i) es porque $[z'_n] \in H_n(K')$ implica que $z'_n \in Z_n(K')$ y $\partial'_n(z'_n) = 0$, mientras que la igualdad en (ii) se da ya que $\partial_{n+1}\varphi_n(z'_n) \in B_n(K)$ implica que $[\partial_{n+1}\varphi_n(z'_n)] = [0]$. □

Corolario 4.2.12. *Dado un morfismo de cadena $f : K' \longrightarrow K$ tal que es una equivalencia homotópica, se tiene que $H_n(f) : H_n(K') \longrightarrow H_n(K)$ es un isomorfismo.*

Demostración.

Como f es una equivalencia homotopíca entonces existe $g : K \longrightarrow K'$ tal que $gf \simeq 1_{K'}$ y $fg \simeq 1_K$ y en virtud del teorema anterior se tiene que:

$$H_n(g)H_n(f) = H_n(gf) = H_n(1_{K'}) = 1_K$$
$$H_n(f)H_n(g) = H_n(fg) = H_n(1_K) = 1_{K'}$$

□

El teorema 4.2.11 se puede escribir como el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{CAb} \arrow[rr, "H_n"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{Ab} \\ & \mathscr{HAb}, \arrow[ur, "H'_n"'] & \end{tikzcd} \tag{4.12}$$

donde π es el funtor proyección y H'_n es el funtor dado por la propiedad universal del funtor proyección[3].

4.3. Sucesiones exactas de homología

Una propiedad fundamental de los funtores de homología $H_{n's}$ es que están conectados entre ellos. Para esto se necesita ver primero la relación entre el funtor de homología y las sucesiones exactas.

Definición 4.3.1. Dada una familia indexada de complejos de cadena $(K^\lambda, f^\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Z}}$, se define una ***sucesión exacta de complejos*** como una sucesión de la forma

$$\cdots \longrightarrow K^{\lambda+1} \xrightarrow{f^{\lambda+1}} K^\lambda \xrightarrow{f^\lambda} K^{\lambda-1} \longrightarrow \cdots, \tag{4.13}$$

donde $\mathrm{im}(f^{\lambda+1}) = \ker(f^\lambda)$, para toda $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.3.2. Se define una ***sucesión exacta corta de complejos*** como la sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0 \tag{4.14}$$

donde 0 es el complejo de cadena cuyo termino de grado n es el grupo trivial 0, y esto es para toda $n \in \mathbb{Z}$.

[3]Ver sección 1.7.

Lema 4.3.3. *Una sucesión de complejos de cadena* $K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} K''$ *es exacta en* $\mathscr{CAb}$ *si y sólo si* $K'_n \xrightarrow{f_n} K_n \xrightarrow{g_n} K''_n$ *es exacta en* $\mathscr{Ab}$ *para toda* $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
K'_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "\partial'_{n+1}"'] & K_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}"'] & K''_{n+1} \arrow[d, "\partial''_{n+1}"'] \\
K'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\partial'_n"'] & K_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & K''_n \arrow[d, "\partial''_n"'] \\
K'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & K_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & K''_{n-1} \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd} \tag{4.15}$$

donde las columnas son las sucesiones que definen a los complejos de cadena.

Ahora, recordemos que dado un morfismo de complejos $f : K'' \longrightarrow K$ el kernel de f es un subcomplejo de cadena de K'' dado por $\ker(f) = \big(\ker(f_n), \partial''_n|_{\ker(f_n)}\big)$. Y, la imagen de f es un subcomplejo de cadena de K definido como $\operatorname{im}(f) = \big(\operatorname{im}(f_n), \partial_n|_{\operatorname{im}(f_n)}\big)$.

Se tiene que $K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} K''$ es exacta en $\mathscr{CAb}$ si y sólo si $\big(\operatorname{im}(f_n), \partial_n|_{\operatorname{im}(f_n)}\big)_{n\in\mathbb{Z}} = \operatorname{im}(f) = \ker(g) = \big(\ker(g_n), \partial''_n|_{\ker(g_n)}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ si y sólo si $\operatorname{im}(f_n) = \ker(g_n)$ y $\partial_n|_{\operatorname{im}(f_n)} = \partial''_n|_{\ker(g_n)}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $K'_n \xrightarrow{f_n} K_n \xrightarrow{g_n} K''_n$ es exacta en $\mathscr{Ab}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Teorema 4.3.4. *Si* $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces la sucesión* $H_n(K') \xrightarrow{H_n(i)} H_n(K) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(K')$ *es una sucesión exacta.*

Demostración.

Por el lema 4.3.3 tenemos que $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i_n} K \xrightarrow{p_n} K'' \longrightarrow 0$ es exacta para toda $n \in \mathbb{Z}$, por lo que que $\mathrm{im}(i_n) = \ker(p_n)$. Así, se tiene que $p_n i_n = 0$ y por consiguiente

$$H_n(p)H_n(i) = H_n(pi) = [p_n i_n] = [0].$$

Esto implica que $\mathrm{im}(H_n(i)) \subseteq \ker(H_n(p))$.

Ahora, sea $[z_n] \in \ker(H_n(p)) \subseteq H_n(K)$ entonces se tiene que $[0] = H_n(p)[z_n] = [p_n(z_n)]$ por lo que $p_n(z_n) \in B_n(K'')$. Luego existe $k''_{n+1} \in K''_{n+1}$ tal que $p_n(z_n) = \partial''_{n+1}(k''_{n+1})$, pero aplicando el lema 4.3.3 a la sucesión $K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ se tiene que $K_{n+1} \xrightarrow{p_{n+1}} K''_{n+1} \longrightarrow 0$ es exacta, por lo que $\mathrm{im}(p_{n+1}) = \ker(0_{n+1}) = K''_{n+1}$. De esta forma existe $k_{n+1} \in K_{n+1}$ tal que $p_{n+1}(k_{n+1}) = k''_{n+1}$ y se tiene que:

$$\begin{aligned} p_n(z_n - \partial_{n+1}(k_{n+1})) &= p_n(z_n) - p_n\partial_{n+1}(k_{n+1}) \\ &\overset{(i)}{=} p_n(z_n) - \partial''_{n+1}p_{n+1}(k_{n+1}) \\ &= \partial''_{n+1}(k''_{n+1}) - \partial''_{n+1}p_{n+1}(k_{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

donde la igualdad en (i) está dada por ser p un morfismo de cadenas. Por lo que se tiene que $z_n - \partial_{n+1}(k_{n+1}) \in \ker(p_n) = \mathrm{im}(i_n)$ ya que por el lema 4.3.3 la sucesión es exacta. Por ende, existe $z'_n \in K'_n$ tal que $i_n(z'_n) = z_n - \partial_{n+1}(k_{n+1})$, por lo que se obtiene que:

$$\begin{aligned} i_{n-1}\partial'_n(z'_n) &\overset{(ii)}{=} \partial_n i_n(z'_n) = \partial_n(z_n - \partial_{n+1}(k_{n+1})) \\ &= \partial_n(z_n) - \partial_n\partial_{n+1}(k_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

donde la igualdad en (ii) está dada por ser i un morfismo de cadenas. Ahora aplicando el lema 4.3.3 en la sucesión $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K$ se tiene que $0 \longrightarrow K'_n \xrightarrow{i_n} K_n$ es exacta, por lo que $\mathrm{im}(0_n) = \ker(i_n)$. Esto último implica que $i_n(k'_n) = 0$ si y sólo si $k'_n = 0$ por lo que $\partial'_n(z'_n) = 0$. Por ultimo se tiene que:

$$H_n(i)[z'_n] = [i_n(z'_n)] = [z_n - \partial_{n+1}(k_{n+1})] = [z_n] - [\partial_{n+1}(k_{n+1})] \overset{(iii)}{=} [z_n]$$

donde la igualdad en (iii) se da ya que $[\partial_{n+1}(k_{n+1})] = [0]$ al estar $\partial_{n+1}(k_{n+1}) \in B_n(K)$. Esto implica que $\ker(H_n(p)) \subseteq \operatorname{im}(H_n(i))$ y que la sucesión es exacta. $\square$

Teorema 4.3.5. *Si* $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existe un homomorfismo*

$$\partial_* : H_n(K'') \longrightarrow H_{n-1}(K')$$

dado por

$$[z_n''] \longmapsto [i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(z_n'')] \tag{4.16}$$

Demostración.

Primeramente veamos que está bien definido. Sea $[z_n''] \in H_n(K'')$, entonces $z_n'' \in Z_n(K'')$, sabemos que $\partial_n''(z_n'') = 0$ y además, usando el lema 4.3.3, se tiene que $\operatorname{im}(p_n) = \ker(0_n) = K_n''$, por lo que existe $z_n \in K_n$ tal que $p_n(z_n) = z_n''$. Ahora, por ser p morfismo de cadenas, se obtiene que:

$$0 = \partial_n'' p_n(z_n) = p_{n-1}\partial_n(z_n),$$

esto implica que $\partial_n(z_n) \in \ker(p_{n-1}) = \operatorname{im}(i_{n-1})$, debido al lema 4.3.3. Luego existe $z_{n-1}' \in K_{n-1}'$ tal que $i_{n-1}(z_{n-1}') = \partial_n(z_n)$ por lo que $\partial_*([z_n'']) = [z_{n-1}'] = [i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(z_n'')]$.

Ahora, supongamos que dado $[z_n''] \in H_n(K'')$ existe otro $x_n \in K_n$ tal que $p_n(x_n) = z_n''$, esto puede ser posible ya que p_n no es necesariamente inyectiva.

Entonces, realizando una construcción análoga a la anterior, se obtiene que $i_{n-1}(x_{n-1}') = \partial_n(x_n)$. Pero por otro lado, sabemos que:

$$0 = z_n'' - z_n'' = p_n(z_n) - p_n(x_n) = p_n(z_n - x_n)$$

por lo que $z_n - x_n \in \ker(p_n) = \operatorname{im}(i_n)$, por el lema 4.3.3. Entonces existe $k_n' \in K_n'$ tal que $i_n(k_n') = z_n - x_n$ y, usando la conmutatividad del diagrama (4.15), se obtiene que:

$$\begin{aligned} i_{n-1}\partial'_n(k'_n) &= \partial_n i_n(k'_n) = \partial_n(z_n - x_n) = \partial_n(z_n) - \partial_n(x_n) \\ &= i_{n-1}(z'_{n-1}) - i_{n-1}(x'_{n-1}) = i_{n-1}(z'_{n-1} - x'_{n-1}) \end{aligned}$$

esto implica que:

$$\begin{aligned} 0 &= i_{n-1}\partial'_n(k'_n) - i_{n-1}(z'_{n-1} - x'_{n-1}) \\ &= i_{n-1}(\partial'_n(k'_n) - (z'_{n-1} - x'_{n-1})) \end{aligned}$$

pero nuevamente, por el lema 4.3.3, se tiene que $\mathrm{im}(0_{n-1}) = \ker(i_{n-1})$ por lo que $i_{n-1}(k'_{n-1}) = 0$ si y sólo si $k'_{n-1} = 0$, entonces $\partial'_n(k'_n) - (z'_{n-1} - x'_{n-1}) = 0$, es decir, $\partial'_n(k'_n) = z'_{n-1} - x'_{n-1}$. Por lo tanto $z'_{n-1} - x'_{n-1} \in B_{n-1}(K')$ y esto implica que $[z'_{n-1}] = [x'_{n-1}]$, con esto se ve que sólo una parte de que está bien definido.

Para ver que no depende del representante se consideran clases $[z''_{1_n}], [z''_{2_n}] \in H_n(K'')$ tales que $[0] = [z''_{1_n}] - [z''_{2_n}]$ y se demuestra de una manera enteramente análoga a lo hecho anteriormente que $\partial_*[z''_{1_n}] = \partial_*[z''_{2_n}]$.

Por ultimo, para demostrar que es un homomorfismo de grupos se hace uso del lema de la Serpiente[4], como se puede revisar en [15].

Finalmente, con todos estos resultados juntos, se tiene que ∂_* está bien definido. □

Definición 4.3.6. El morfismo ∂_* dado en el teorema 4.3.5 se llama ***homomorfismo de conexión***.

4.4. Algunas propiedades de ∂_*

A continuación veremos algunas propiedades del homomorfismo de conexión.

Teorema 4.4.1 (Triángulo exacto). *Si* $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ *es un sucesión exacta corta, entonces existe una sucesión exacta*

[4]Mejor conocido como “Snake lemma”.

larga dada por:

$$\cdots \longrightarrow H_n(K') \xrightarrow{H_n(i)} H_n(K) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(K'') \xrightarrow{\partial_*}$$

$$H_{n-1}(K') \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(K) \xrightarrow{H_{n-1}(p)} H_{n-1}(K'') \longrightarrow \cdots \tag{4.17}$$

Demostración.

Por el teorema 4.3.4 sabemos que si $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, luego $H_n(K)' \xrightarrow{H_n(i)} H_n(K) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(K)'$ es una sucesión exacta, para toda $n \in \mathbb{Z}$. Ahora sólo falta verificar que $\operatorname{im}(H_n(p)) = \ker(\partial_*)$ y que $\operatorname{im}(\partial_*) = \ker(H_{n-1}(i))$. Para el primero, se procede como sigue.

Sea $[z_n] \in H_n(K)$, entonces se tiene que:

$$\partial_* H_n(p)[z_n] = \partial_*[p_n(z_n)] = [i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(p_n(z_n))]$$

pero en la demostración del teorema 4.3.5 se vio que ∂_* no depende del elemento que se tome para $p_n^{-1}(p_n(z_n))$ por lo que elegimos $z_n \in p_n^{-1}(p_n z_n)$.Se tiene entonces que:

$$i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(p_n(z_n)) = i_{n-1}^{-1}\partial_n(z_n) \overset{(i)}{=} 0$$

donde la igualdad en (i) se da al estar $z_n \in Z_n(K)$. Luego se tiene que $\partial_* H_n(p)[z_n] = [0]$, esto es, $\operatorname{im}(H_n(p)) \subseteq \ker(\partial_*)$.

Ahora, sea $[z_n''] \in \ker(\partial_*)$. Se tiene que

$$\partial_*[z_n''] = [i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(z_n'')] = [0].$$

Esto implica que $z_{n-1}' = i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(z_n'') \in B_{n-1}(K')$, por lo que $z_{n-1}' = \partial_n'(k_n')$, para algún $k_n' \in K_n'$. Por la conmutatividad de los diagramas se tiene que:

$$\partial_n p_n^{-1}(z_n'') = i_{n-1}(z_{n-1}') = i_{n-1}\partial_n'(k_n') = \partial_n i_n(k_n'),$$

y esto implica que $\partial_n(p_n^{-1}(z_n'') - i_n(k_n')) = 0$, es decir, que $p_n^{-1}(z_n'') - i_n(k_n') \in Z_n(K)$. De este modo:

$$\begin{aligned} H_n(p)[p_n^{-1}(z_n'') - i_n(k_n')] &= [p_n(p_n^{-1}(z_n'') - i_n(k_n'))] \\ &= [p_n p_n^{-1}(z_n'') - p_n i_n(k_n')] \overset{(ii)}{=} [z_n''] \end{aligned}$$

donde la igualdad en (ii) está dada por ser $\operatorname{im}(i_n) = \ker(p_n)$. Así, se tiene que $[z_n''] \in \operatorname{im}(H_n(p))$ y se da la primera igualdad de conjuntos.

Por ultimo, para verificar que $\operatorname{im}(\partial_*) = \ker(H_{n-1}(i))$, se hace de la siguiente forma:

Sea $[z_n''] \in H_n(K'')$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} H_{n-1}(i)\partial_*[z_n''] = H_{n-1}(i)[i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(z_n'')] &= [i_{n-1}(i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1}(z_n''))] \\ \overset{(iii)}{=} [\partial_n p_n^{-1}(z_n'')] \overset{(iv)}{=} [0], \end{aligned}$$

donde la igualdad en (iii) está dada porque $\operatorname{im}(0_{n-1}) = \ker(i_{n-1})$. Y la igualdad en (iv) se da debido a que $\partial_n p_n^{-1}(z_n'') \in B_{n-1}(K)$. Esto implica que $H_{n-1}(i)\partial_*[z_n''] = [0]$ y que $\operatorname{im}(\partial_*) \subseteq \ker(H_{n-1}(i))$.

Ahora, sea $[z_{n-1}'] \in \ker(H_{n-1}(i))$. Entonces se tiene que

$$H_{n-1}(i)[z_{n-1}'] = [i_{n-1}(z_{n-1}')] = [0];$$

esto implica que $[i_{n-1}(z_{n-1}')] \in B_{n-1}(K)$, es decir, que $i_{n-1}(z_{n-1}') = \partial_n(k_n)$, para algún $k_n \in K_n$. Luego por la conmutatividad de los diagramas se tiene que:

$$\partial_n'' p_n(k_n) = p_{n-1}\partial_n(k_n) = p_{n-1}i_{n-1}(z_{n-1}') = 0,$$

ya que $\operatorname{im}(i_{n-1}) = \ker(p_{n-1})$, por lo que $p_n(k_n) \in Z_n(K'')$. Pero se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_*[p_n(k_n)] = [i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1} p_n(k_n)] &\overset{(v)}{=} [i_{n-1}^{-1}\partial_n(k_n)] = [i_{n-1}^{-1} i_{n-1}(z_{n-1}')] \\ \overset{(vi)}{=} [(z_{n-1}')] \end{aligned}$$

donde la igualdad en (v) está dada porque ∂_* no depende de la elección de $k_n = p_n^{-1}p_n(k_n)$ y la igualdad en (vi) está dada por ser $\operatorname{im}(0_{n-1}) = \ker(i_{n-1})$. Por lo tanto, se tiene que $[z_{n-1}'] \in \operatorname{im}(\partial_*)$ y por ende $\operatorname{im}(\partial_*) = \ker(H_{n-1}(i))$. □

El teorema 4.4.1 se llama del triángulo exacto ya que se puede recordar mediante el siguiente diagrama nemotecnico:

$$\begin{tikzcd} H(K') \arrow[rr, "H(i)"] & & H(K) \arrow[dl, "H(p)"] \\ & H(K'') \arrow[ul, "\partial_*"] & \end{tikzcd} \tag{4.18}$$

Simplemente hay que recordar que de d baja una "dimensión".

Teorema 4.4.2. *El homomorfismo de conexión $\partial_* : H_n(K'') \longrightarrow H_{n-1}(K')$ es "natural"*[5]*, es decir, dado el siguiente diagrama conmutativo de complejos de cadenas, donde cada sucesión es exacta.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & K \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & K'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "j"'] & L \arrow[r, "q"'] & L'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{4.19}$$

Entonces se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(K') \arrow[r, "H_n(i)"] \arrow[d, "H_n(f')"'] & H_n(K) \arrow[r, "H_n(p)"] \arrow[d, "H_n(f)"'] & H_n(K'') \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "H_n(f'')"'] & H_{n-1}(K') \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f')"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(L') \arrow[r, "H_n(j)"'] & H_n(L) \arrow[r, "H_n(q)"'] & H_n(L'') \arrow[r, "d'_n"'] & H_{n-1}(L') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{4.20}$$

es conmutativo para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración.

Los primeros dos cuadrados conmutan por ser H_n un funtor. Para el ultimo cuadrado se procede como sigue.

[5] No es precisamente una transformación natural entre funtores H_n y H_{n-1} ya que ambos funtores se aplican a objetos distintos, pero aun así hace conmutar los diagramas.

Denotamos a $K = (K_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $L = (L_n, \Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Sea $[z_n''] \in H_n(K'')$, entonces como $\mathrm{im}(p_n) = \ker(0_n) = K''$ se tiene que existe $k_n \in K_n$ tal que $p_n(k_n) = z_n''$. Se obtiene que:

$$\begin{aligned}
H_{n-1}(f')\partial_*[z_n''] &= H_{n-1}(f')\partial_*[p_n(k_n)] = H_{n-1}(f')[i_{n-1}^{-1}\partial_n p_n^{-1} p_n(k_n)] \\
&= H_{n-1}(f')[i_{n-1}^{-1}\partial_n(k_n)] = [f'_{n-1} i_{n-1}^{-1}\partial_n(k_n)] \\
&\overset{(*)}{=} [j_{n-1}^{-1} f_{n-1}\partial_n(k_n)] \overset{(**)}{=} [j_{n-1}^{-1}\Delta_n f_n(k_n)] \\
&= [j_{n-1}^{-1}\Delta_n q_n^{-1} 1_n f_n(k_n)] = d_n'[q_n f_n(k_n)] \\
&\overset{(*)}{=} d_n'[f_n'' p_n(k_n)] = d_n' H_n(f'')[p_n(k_n)] = d_n' H_n(f'')[z_n'']
\end{aligned}$$

donde la igualdad indicada con $(*)$ se da por la conmutatividad del diagrama (4.19) y la igualdad indicada con $(**)$ se da por ser f un morfismo de cadenas. Por lo tanto el diagrama (4.20) es conmutativo. $\square$

4.5. Teoría de homología

Ya teniendo algunos resultados sobre complejos de cadenas se procede a generalizar la teoría de homología para cualquier categoría $\mathscr{C}$.

Definición 4.5.1. Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ tiene un ***funtor de cadena*** $\mathcal{S}$ si existe un funtor $\mathcal{S} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}\mathscr{A}\!\mathscr{b}$ tal que es una sucesión de funtores y transformaciones naturales $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_n, \partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ con las siguientes propiedades:

1) $\mathcal{S}_n : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{A}\!\mathscr{b}$ es un funtor, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

2) Las transformaciones naturales son tales que $\partial_n : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{S}_{n-1}$ y para cualquier X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ se tiene que $\partial_{n+1_X} \circ \partial_{n_X} = 0_X$, es decir, obtenemos la transformación natural 0 para toda X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$.

Entonces, en virtud de la definición 4.5.1 se tiene que para cada X en $\mathscr{obj}\,\mathscr{C}$ el funtor $\mathcal{S}$ construye la siguiente sucesión

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{S}_{n+1}X \xrightarrow{\partial_{n+1_X}} \mathcal{S}_n X \xrightarrow{\partial_{n_X}} \mathcal{S}_{n-1}X \longrightarrow \cdots$$

la cual es un complejo de cadenas. Así, por la naturalidad de ∂_n se cumplen todos los resultados obtenidos en las secciones anteriores de este capítulo.

Dada una categoría $\mathscr{C}$ con un funtor de cadena $\mathcal{S}$ se puede construir un complejo de cadena para cada X, por lo que se puede reconstruir toda la teoría hecha en este capitulo y asignarle un n-ésimo grupo de homología a la sucesión, esto se hace componiendo ambos funtores

$$\mathcal{H}_n^{\mathcal{S}} = H_n \circ \mathcal{S} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Ab} \tag{4.21}$$

$$X \longmapsto H_n(\mathcal{S}(X)),$$

es decir, con el funtor de cadena $\mathcal{S}$ se obtiene un complejo de cadena para cada objeto X de $\mathscr{C}$ y luego se le aplica el funtor del n-ésimo grupo de homología.

De esta manera se pueden asociar grupos de homología a un objeto X de una categoría arbitraria $\mathscr{C}$, pero para poder obtener más información se necesita que el funtor $\mathcal{H}_n^{\mathcal{S}}$ cumpla algunas propiedades.

Recordemos que la categoría $\mathscr{Top}_2$ tiene como objeto a los pares (X, A) donde X es un espacio topológico y A es un subespacio topológico de X, los morfismos están dados por $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ tal que $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua tal que $f(A) \subseteq B$. Además las categorías $\mathscr{Top}$ y $\mathscr{Top}_*$ son subcategorías de $\mathscr{Top}_2$, ya que $(X, \emptyset)$ se identifica con X y $(X, \{x_0\})$ es un caso particular de los pares (X, A).

Definición 4.5.2. Dada una subcategoría $\mathscr{C}$ de $\mathscr{Top}_2$ se dice que tiene una ***teoría ordinaria (no reducida) de homolgía*** $\mathcal{H}_*$ con coeficientes en un grupo abeliano L si existe una familia de funtores covariantes $\mathcal{H}_n : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Ab}$ y un homomorfismo de conexión $\partial_* : \mathcal{H}_n(X, A) \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}(A)$ que cumplen las siguientes propiedades:

1) **Axioma de homotopía:** Dados dos morfismos $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ homotópicos, se tiene que:

$$\mathcal{H}_n(f) = \mathcal{H}_n(g) : \mathcal{H}_n(X, A) \longrightarrow \mathcal{H}_n(Y, B), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.22}$$

2) **Axioma de exactitud:** Si $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \hookrightarrow (X, A)$ son las inclusiones respectivas, entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}(X,A) \xrightarrow{d_{n+1}} \mathcal{H}_n(A) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(i)} \mathcal{H}_n(X)$$

$$\mathcal{H}_n(X) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(j)} \mathcal{H}_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \mathcal{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \tag{4.23}$$

3) **Axioma de escisión:** Si (X, A) es un objeto de $\mathscr{Top}_2$ y $\bar{U} \subset A^\circ$ entonces la inclusión $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo

$$\mathcal{H}_n(i) : \mathcal{H}_n(X - U, A - U) \longrightarrow \mathcal{H}_n(X, A), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.24}$$

4) **Axioma de dimensión:** Si $*$ denota un espacio de un sólo punto entonces:

$$\mathcal{H}_n(*) = \begin{cases} L & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

A continuación se da un ejemplo de cómo se construye una teoría ordinaria de homología.

Ejemplo 4.5.3. En este ejemplo se dara únicamente un bosquejo de las construcciones mas no se adentrará totalmente en las cuentas debido a que para eso se necesitaría definir nuevos conceptos y esto nos desviaría del objetivo principal. Para un desarrolo completo ver [8].

Sea $\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=0}^n x_i = 1 \text{ y } x_i \geqslant 0, \text{ para toda } i\}$, el n-simplejo estandar. Sea X un espacio topológico en $\mathscr{Top}$. Definimos el funtor $S_n : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Set}$ como:

$$S_n(X) = \{\alpha : \Delta^n \longrightarrow X | \alpha \text{ es continua}\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Y dada una función continua $f : X \longrightarrow Y$, el funtor se aplica de la siguiente forma:

$$S_n(f) : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y),$$

$$\alpha \longmapsto f \circ \alpha$$

Ahora, dado un grupo abeliano fijo L con la topología discreta, se define el siguiente funtor:

$$F(\_, L) : \mathscr{Set}_* \longrightarrow \mathscr{Ab}$$

$$X \longmapsto F(X, L),$$

donde $F(X, L) = \{u : X \to L | u(x_0) = 0$ y $sop(u)$ es finito$\}$ y $sop(u) = \{x \in X | u(x) \neq 0\}$. Además, dado $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, se define

$$F(f, L) : F(X, L) \longrightarrow F(Y, L)$$

$$u \longmapsto F(f, L)(u)(y) = \sum_{\{x \in X | f(x) = y\}} u(x)$$

la cual está bien definida ya que al ser el $sop(u)$ finito entonces la suma es finita.

Hay que demostrar que efectivamente $F(\_, L)$ es un funtor. Primero, verificamos que $F(X, L)$ tiene estructura de grupo abeliano:

1) Dados $u, v \in F(X, L)$ se define la suma como $(u + v)(x) = u(x) +_L v(x)$.

2) El neutro en $F(X, L)$ está dado por el morfismo constante cero, es decir, $0(x) = 0_L$.

3) Dado $u \in F(X, L)$ se define su inverso $(-u)(x) = -_L u(x)$.

por lo que en efecto se tiene que el conjunto $F(X, L)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Segundo, se tiene que el $sop(F(f, L)(u))$ es finito y además, dados $u, v \in F(X, L)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}F(f, L)(u+v)(y) &= \sum_{\{x \in X \mid f(x)=y\}} (u+v)(x) = \sum_{\{x \in X \mid f(x)=y\}} (u(x)+v(x)) \\ &= \sum_{\{x \in X \mid f(x)=y\}} u(x) + \sum_{\{x \in X \mid f(x)=y\}} v(x) \\ &= F(f, L)(u)(y) + F(f, L)(v)(y)\end{aligned}$$

por lo que se tiene que $F(f, L)$ es un homomorfismo de grupos. Con esto se verifica que $F(\_, L) : \mathscr{Set}_* \longrightarrow \mathscr{Ab}$ es un funtor.

Luego, tomando la composición de los dos funtores anteriores se tiene un nuevo funtor $\mathcal{S}_n(\_, L) : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Ab}$ tal que $\mathcal{S}_n(\_, L)X = \mathcal{S}_n(X, L) = F(S_n(X), L)$ y dada $f : X \longrightarrow Y$ continua se tiene que $\mathcal{S}(f, L) : \mathcal{S}_n(X, L) \longrightarrow \mathcal{S}_n(Y, L)$ está dada por $\mathcal{S}_n(f, L)(\alpha) = F(S_n(f)(\alpha), L)$. Con esto se define el siguiente funtor:

$$\mathcal{S}_n(\_, L) : \mathscr{Top}_2 \longrightarrow \mathscr{Ab}$$

$$(X, A) \longmapsto \mathcal{S}_n(X, L)/\mathcal{S}_n(A, L)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y dada $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ continua, se define

$$\mathcal{S}_n(f, L) : \mathcal{S}_n((X, A), L) \longrightarrow \mathcal{S}_n((Y, B), L)$$

$$[\alpha] \longmapsto [F(S_n(f)(\alpha), L)].$$

Observe que en el caso particular de $(X, \emptyset)$ se tiene que $\mathcal{S}((X, \emptyset), L) = \mathcal{S}(X, L)$.

Recordemos también que $e_i = (0, \ldots, \overbrace{1}^{\substack{\text{i-ésima} \\ \text{entrada}}}, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, es el i-ésimo vector canonico. Así, un elemento en $v \in \Delta^n$, $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$

y entonces cualquier morfismo se aplica linealmente, es decir, $f(v) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

Procedemos a definir los siguientes morfismos particulares de Δ:

Primero, la función $\delta_n^i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ dada por

$$\delta_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i \\ e_{j+1} & \text{si } j \geqslant i \end{cases}$$

extendiéndola afínmente. A δ_n^i se llama *la i-ésima cara del simplejo* Δ^n.

La función anterior cumple que $\delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j = \delta_n^j \circ \delta_{n-1}^{i-1}$ si $j < i$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j(e_k) &= \begin{cases} e_k & \text{si } k < j, \\ e_{k+1} & \text{si } j \leqslant k, k+1 < i, \\ e_{k+2} & \text{si } j \leqslant k, k+1 \geqslant i, \end{cases} \\ &= \begin{cases} e_k & \text{si } k < j, \\ e_{k+1} & \text{si } j \leqslant k < i-1, \\ e_{k+2} & \text{si } k \geqslant i-1, \end{cases} \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} \delta_n^j \circ \delta_{n-1}^{i-1}(e_k) &= \begin{cases} e_k & \text{si } k < i-1, k < j, \\ e_{k+1} & \text{si } k < i-1, k \geqslant j, \\ e_{k+2} & \text{si } k \geqslant i-1, k+1 \geqslant j, \end{cases} \\ &= \begin{cases} e_k & \text{si } k < j, \\ e_{k+1} & \text{si } j \leqslant k < i-1, \\ e_{k+2} & \text{si } k \geqslant i-1, \end{cases} \end{aligned}$$

comprobándose la igualdad.

El segundo, $d_i(\alpha) = \alpha \circ \delta_n^i : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$ llamado la *i-ésima cara de X*.

Se definen las siguientes transformaciones naturales:

$$\partial_{n_{(X,A)}} : \mathcal{S}_n((X,A),L) \longrightarrow \mathcal{S}_{n-1}((X,A),L)$$

$$[\alpha] \longmapsto [\textstyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i(\alpha)].$$

Entonces hay que verificar que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Para eso se considera lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i \left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j d_j(\alpha)\right) &= \sum_{i=0,j=0}^{n,n+1}(-1)^{i+j} d_i d_j(\alpha) \\ &= \sum_{i<j}(-1)^{i+j} d_i d_j(\alpha) + \sum_{i\geqslant j}^{n}(-1)^{i+j} d_i d_j(\alpha) \\ &= \sum_{i<j}(-1)^{i+j} d_{j-1} d_i(\alpha) + \sum_{i\geqslant j}^{n}(-1)^{i+j} d_i d_j(\alpha) \\ &= \sum_{j-1\geqslant i}(-1)^{j-1+i+1} d_{j-1} d_i(\alpha) + \sum_{i\geqslant j}^{n}(-1)^{i+j} d_i d_j(\alpha) \\ &= 0\end{aligned}$$

donde las igualdades se dan por la propiedad $\delta_n^i \circ \delta_{n-1}^j = \delta_n^j \circ \delta_{n-1}^{i-1}$ si $j < i$ y por como se define d_i. Entonces, se tiene que $\partial_n \partial_{n+1}([\alpha]) = [0]$.

Pero $\mathcal{S}(X, A) = (\mathcal{S}_n(X, A), \partial_{n_(X,A)})_{n\in\mathbb{N}}$ es sólo la "mitad" de la estructura de un complejo de cadena. Podemos extenderlo a todo $n \in \mathbb{Z}$ simplemente agregando $\mathcal{S}_{-n}(X, A) = 0$ se obtiene ya el complejo de cadena. Entonces es posible construir el funtor $\mathcal{H}_n^{\mathcal{S}}$ dado en la ecuación (4.21). Y esta es la teoría ordinaria de homología para $\mathscr{Top}_2$. Para verificar que cumple los axiomas de la definición 4.5.2 se necesita construir un poco más de herramientas, lo que nuevamente nos desviaría del objetivo principal. Se refiere al lector a [8] para los detalles.

Definición 4.5.4. Dada una subcategoría $\mathscr{C}$ de $\mathscr{Top}_2$ se dice que tiene una ***teoría no ordinaria (no reducida) de homolgía*** $\mathcal{H}_*$ con coeficientes en un grupo abeliano L si existe una familia de funtores covariantes $\mathcal{H}_n : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{Ab}$ y un homomorfismo de conexión $\partial_* : \mathcal{H}_n(X, A) \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}(A)$ tal que:

1) Cumple el axioma de homotopía.

2) Cumple el axioma de exactitud.

3) Cumple el axioma de escisión

4) No cumple el axioma de dimensión, es decir, si $*$ denota un espacio de un solo punto entonces:

$$\mathcal{H}_n(*) = L \text{ p.a. } n \neq 0 \qquad \text{ó} \qquad \mathcal{H}_n(*) = 0 \text{ si } n = 0$$

Un ejemplo de una teoría no ordinaria de homología se dara en el siguiente capitulo.

Capítulo 5

Bordismo

En el capítulo anterior se dieron los axiomas que debe de cumplir una teoría ordinaria de homología y haciendo uso de los complejos de cadena se construyó un ejemplo de dicha teoría. También se mencionó lo que es una teoría no ordinaria de homología la cual únicamente difiere de la anterior en el axioma de dimensión.

En este capítulo se darán las herramientas necesarias para construir una teoría no ordinaria de homología y además dicha construcción no dependerá de los complejos de cadena, en el sentido que no se construirá un complejo de cadena para después calcular el n-ésimo grupo de homología, sino que se construirá un grupo abeliano a partir de una relación a la cual llamaremos *bordismo*.

En la sección 5.1 se recordarán algunos conceptos sobre variedades topológicas así como variedades diferenciables; después se definirá lo que es una variedad singular en un espacio topológico arbitrario X y se trabajará para construir los grupos de bordismo de X. En la sección 5.2 se generalizará lo hecho en la sección anterior pero para una pareja de espacios (X, A) en $\mathscr{Top}_2$ y se construirán los grupos de bordismo para la pareja (X, A), observando que cuando $A = \emptyset$ dicha construcción coincidirá con la anterior. Al final de la sección 5.2 se demostrará que los grupos de bordismo cumplen los primeros tres axiomas de una teoría no ordinaria de homología. Por último se mencionará un resultado debido a René Thom, el cual clasificará dichos grupos con lo que obtendremos que estos no cumplirán el axioma de dimensión, teniendo así una teoría no ordinaria de homología.

5.1. Bordismo no orientado

En esta sección se recordaran algunos conceptos básicos sobre variedades topológicas y variedades diferenciables.

Recordemos que $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geqslant 0\}$ por lo que $\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$ e $\operatorname{int}\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$, con esto en mente se dan las siguientes definiciones.

Definición 5.1.1. Dado un espacio topológico M, decimos que es una ***variedad topológica n-dimensional sin frontera***, denotado por M^n si:

1) Todo punto de M tiene una vecindad homeomorfa a un abierto en $\mathbb{R}^n$, esto es, dado $p \in M$ existe una vecindad V de p y un abierto U de $\mathbb{R}^n$ tal que existe un homeomorfismo $\varphi : V \longrightarrow U$.

2) Es un espacio segundo numerable.

3) Es un espacio Hausdorff.

Definición 5.1.2. Dado un espacio topológico M, decimos que es una ***variedad topológica m-dimensional con frontera*** M^n si:

1) Todo punto de M tiene una vecindad homeomorfa a un abierto en $\mathbb{H}^n$, es decir, dado $p \in M$ existe una vecindad V de p y un abierto U de $\mathbb{H}^n$ tal que existe un homeomorfismo $\varphi : V \longrightarrow U$.

2) Es un espacio segundo numerable.

3) Es un espacio Hausdorff.

Observación. La dimensión de una variedad topológica está bien definida debido al teorema de invariancia del dominio. Una prueba completa de este resultado puede verse en [14].

Definición 5.1.3. Dada una variedad topológica con frontera M^n se define:

1) La ***frontera*** de M^n como $\partial M^n = \{p \in M | \varphi(p) \in \partial \mathbb{H}^n$ p.a. $\varphi : V \to U \subseteq \mathbb{H}^n\}$, y si $p \in \partial M^n$, se dice que es un ***punto frontera***.

2) El ***interior*** de M^n como $\operatorname{int} M^n = \{p \in M | \varphi(p) \in \operatorname{int} \mathbb{H}^n$ p.a. $\varphi : V \to U \subseteq \mathbb{H}^n\}$, y si $p \in \operatorname{int} M^n$, se dice que es un ***punto interior***.

Observación. La frontera de M^n está bien definida en virtud del teorema de invariancia de la frontera. Se refiere al lector a [14] para una prueba completa de este resultado.

Ahora nos interesa brindarle un poco más de estructura a una variedad topológica y ahí es donde entran en juego las variedades diferenciables.

Definición 5.1.4. Dada una variedad topológica M^n se dice que tiene un ***atlas*** $\mathcal{A} = \{(V_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ de clase $r \geqslant 0$, donde V_λ es un abierto en M^n y $\varphi_\lambda : V_\lambda \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ es diferenciable de clase C^r, si cumple que:

1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = M$.

2) Dados $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ y $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son diferenciables.

Definición 5.1.5. Dada una variedad topológica M^n y un atlas $\mathcal{A}$ para M^n de clase r, se dice que el par $(M^n, \mathcal{A})$ es una ***variedad diferenciable de dimensión*** n ***y orden*** r si $\mathcal{A}$ es un atlas maximal.

Observación. La variedad diferenciable $(M^n, \mathcal{A})$ puede ser sin frontera o con frontera según sea el caso.

Notación. Por lo general a una variedad diferenciable $(M^n, \mathcal{A})$ simplemente se le denotara por M^n, siempre que no haya confusión sobre la variedad con estructura diferenciable de la que se habla y no solo de la variedad topológica.

Definición 5.1.6. Dado X en $\mathscr{Top}$, se define una ***variedad singular de dimensión*** n ***sobre*** X como un morfismo continuo $f : M^n \longrightarrow X$, donde M^n es una variedad diferenciable, sin frontera, de clase C^∞ y compacta.

Observación. El conjunto vacío $\emptyset$ cumple la definición de variedad diferenciable de dimensión n (para toda $n \in \mathbb{N}$), sin frontera, de clase C^∞. Por lo que $\emptyset : \emptyset \longrightarrow X$ es una variedad singular de dimensión n sobre X, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 5.1.7. Dado X en $\mathscr{Top}$ y dos variedades singulares de dimensión n sobre X, $f : M^n \longrightarrow X$ y $g : N^n \longrightarrow X$, se dice que $h : M^n \longrightarrow N^n$ es un ***morfismo entre variedades singulares sobre*** X si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & N^n \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

es conmutativo. También se dice que $h : M^n \longrightarrow N^n$ es un ***morfismo diferenciable sobre*** X.

Con esto es posible definir un funtor de $\mathscr{Top}$ a $\mathscr{Set}$. A los conjuntos así obtenidos podemos darle una estructura de grupo de la siguiente manera.

Definición 5.1.8. Dado $n \geqslant 0$ se define el siguiente funtor:

$$Var^n : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Set} \tag{5.2}$$

$$X \longmapsto Var^n(X),$$

donde $Var^n(X) = \{f | f \text{ es una variedad singular de dimensión } n \text{ sobre } X\}$. Y dado un morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{Top}$, se define

$$Var^n(\varphi) : Var^n(X) \longrightarrow Var^n(Y)$$

como

$$M^n \xrightarrow{f} X \longmapsto M^n \xrightarrow{\varphi\circ f} Y. \tag{5.3}$$

Observación. Es inmediato de la definición que Var^n cumple las propiedades de un funtor covariante.

Recordemos que en la categoría $\mathscr{Top}$ existe el coproducto, el cual es la suma topológica, de manera que al conjunto $Var^n(X)$ se le puede definir una operación por medio del coproducto: dados $f : M^n \longrightarrow X$ y $g : N^n \longrightarrow X$ en $Var^n(X)$, se define $f+g := f\amalg g : M^n \amalg N^n \longrightarrow X$.

En general $Var^n(X)$ no será un grupo con dicha estructura. Lo que se hace es generar una relación de equivalencia y el conjunto de las clases con la suma heredada sera siempre un grupo abeliano. A continuación se desarrolla dicha idea.

Definición 5.1.9. Dadas dos variedades singulares en $Var^n(X)$, $f : M^n \longrightarrow X$ y $g : N^n \longrightarrow X$, se dice que f y g son ***bordantes*** si existe una variedad diferenciable L^{n+1}, compacta, con frontera ∂L^{n+1} y un morfismo continuo $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ tal que $F|_{\partial L^{n+1}} = f + g$. En otras palabras, se pide que la existencia de una variedad L^{n+1} tal que $\partial L^{n+1} \cong M^n \amalg N^n$ y $F|_{M^n} = f$ y $F|_{N^n} = g$.

Definición 5.1.10. En $Var^n(X)$ se dice que dos variedades singulares sobre X están relacionadas, $f \sim g$, si y sólo si f y g son bordantes. A dicha relación se le llama ***bordismo***.

Teorema 5.1.11. *La relación de bordismo es una relación de equivalencia.*

Demostración.

1) **Reflexiva**: Sea $f : M^n \longrightarrow X$ una variedad singular de dimensión n sobre X. Sabemos que en particular M^n está en $\mathscr{Top}$ y en dicha categoría existe tanto el producto como el coproducto, por lo que $M^n \times I$ está en $\mathscr{Top}$ y además es una variedad diferenciable cuya frontera es $\partial(M^n \times I) = (M^n \times \{0\}) \amalg (M^n \times \{1\}) \cong M^n \amalg M^n$. Se define $F : M^n \times I \longrightarrow X$ como $F := f \circ \pi$ donde $\pi : M^n \times I \longrightarrow M^n$ es la proyección. Así se tiene que $F|_{M^n\times\{0\}} = f$ y $F|_{M^n\times\{1\}} = f$ y con esto se prueba que $f \sim f$.

2) **Simétrica**: Sean $f : M^n \longrightarrow X$ y $g : N^n \longrightarrow X$ variedades singulares sobre X tales que $f \sim g$; esto significa que existe una variedad diferenciable L^{n+1} compacta, con frontera ∂L^{n+1} y un morfismo continuo $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ tal que $\partial L^{n+1} \cong M^n \amalg N^n$ y $F|_{M^n} = f$ y $F|_{N^n} = g$. Por otro lado definimos un difeomorfismo $\varphi : M^n \amalg N^n \longrightarrow N^n \amalg M^n$, dado por la propiedad universal del coproducto, es decir, es el morfismo en $\mathscr{Top}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\iota_2"'] & M^n \amalg N^n \arrow[d, dashed, "\exists ! \varphi"] & N^n \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "\iota_1"] \\ & N^n \amalg M^n. & \end{tikzcd}$$

Obtenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M^n \amalg N^n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f+g"'] & & N^n \amalg M^n \arrow[dl, "g+f"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Con esto se tiene que $\partial L^{n+1} \cong M^n \amalg N^n \cong N^n \amalg M^n$ y ya sabíamos que $F|_{N^n} = g$ y $F|_{M^n} = f$, lo que prueba que si $f \sim g$ entonces $g \sim f$.

3) **Transitiva**: Sean $f_i : M_i^n \longrightarrow X$, $i = 1, 2, 3$, variedades singulares sobre X tales que $f_1 \sim f_2$ y $f_2 \sim f_3$. Entonces se tiene que existen variedades diferenciables compactas con frontera L_{12}^{n+1} y L_{23}^{n+1} tales que $\partial L_{12}^{n+1} \cong M_1^n \amalg M_2^n$ y $\partial L_{23}^{n+1} \cong M_2^n \amalg M_3^n$, y morfismos continuos $F_{12} : L_{12}^{n+1} \longrightarrow X$ y $F_{23} : L_{23}^{n+1} \longrightarrow X$ tales que $F_{12}|_{M_1} = f_1$, $F_{12}|_{M_2} = f_2$, $F_{23}|_{M_2} = f_2$ y $F_{23}|_{M_3} = f_3$. Luego L_{12}^{n+1} y L_{23}^{n+1} tienen una parte de sus fronteras en común y podemos definir una nueva variedad diferenciable compacta con frontera $L^{n+1} = L_{12}^{n+1} \cup_{id_{M_2}} L_{23}^{n+1}$.

Recordemos que dadas dos variedades de dimensión n con frontera tales que $\partial X \cong \partial Y$ y si $\varphi : \partial X \longrightarrow \partial Y$ es algún homeomorfismo, podemos contruir $X \cup_\varphi Y$ como el resultado de identificar en la suma topológica $X \amalg Y$ cada punto $x \in \partial X$ con el punto $\varphi(x) \in \partial Y$.

De esta manera se tiene que $\partial(L^{n+1}) = M_1 \amalg M_3$. Ahora se define $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ como

$$F(x) = \begin{cases} F_{12}(x) & \text{si } x \in M_1, \\ F_{23}(x) & \text{si } x \in M_3, \end{cases}$$

para simplificar la notación, hacemos $(F_{12}, F_{23})(x) := F(x)$ así definida. Con lo cual se sigue que se tiene que:

$$F|_{M_1} = (F_{12}, F_{23})|_{M_1} = F_{12}|_{M_1} = f_1,$$
$$F|_{M_3} = (F_{12}, F_{23})|_{M_3} = F_{23}|_{M_3} = f_3$$

Esto se prueba que si $f_1 \sim f_2$ y $f_2 \sim f_3$ entonces $f_1 \sim f_3$.

□

Definición 5.1.12. Al conjunto de clases de equivalencia de las variedades singulares bajo la relación de equivalencia de bordismo se le denota por $\eta_n(X) = Var^n(X)/\sim$, y $[M^n, f]$ denota a la clase de equivalencia de $f : M^n \longrightarrow X$.

Lema 5.1.13. *La operación en $\eta_n(X)$ dada por $[M^n, f] + [N^n, g] = [M^n \amalg N^n, f \amalg g]$ está bien definida.*

Demostración.

Consideremos dos representantes de la misma clase de equivalencia, $[M_1^n, f_1] = [M_2^n, f_2]$ y $[N_1^n, g_1] = [N_2^n, g_2]$. Se tiene que

$$[M_1^n, f_1] + [N_1^n, g_1] = [M_1^n \amalg N_1^n, f_1 \amalg g_1] \text{ y}$$
$$[M_2^n, f_2] + [N_2^n, g_2] = [M_2^n \amalg N_2^n, f_2 \amalg g_2]$$

Al ser $[M_1^n, f_1] = [M_2^n, f_2]$ y $[N_1^n, g_1] = [N_2^n, g_2]$, existen L_M^{n+1} y L_N^{n+1}, así como morfismos $F_M : L_M^{n+1} \longrightarrow X$ y $F_N : L_N^{n+1} \longrightarrow X$ tales que $\partial L_M^{n+1} \cong M_1^n \amalg M_2^n$, $\partial L_N^{n+1} \cong N_1^n \amalg N_2^n$, $F_M|_{M_1^n} = f_1$, $F_M|_{M_2^n} = f_2$, $F_N|_{N_1^n} = g_1$ y $F_N|_{N_2^n} = g_2$.

Se define $L^{n+1} = L_M^{n+1} \amalg L_N^{n+1}$, por lo que se tiene que $\partial L^{n+1} \cong (M_1^n \amalg N_1^n) \amalg (M_2^n \amalg N_2^n)$ y se define $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ como $F = F_M \amalg F_N$. Entonces se tiene que $F|_{M_1^n \amalg N_1^n} = f_1 \amalg g_1$ y $F|_{M_2^n \amalg N_2^n} = f_2 \amalg g_2$, lo que demuestra que la operación está bien definida. $\square$

Lema 5.1.14. *Dados X en $\mathscr{Top}$ y $n \geqslant 0$ se tiene que $\eta_n(X)$, con la operación dada en el lema 5.1.13, es un grupo abeliano.*

Demostración.

1) **Cerradura** Dadas $[M^n, f], [N^n, g] \in \eta_n(X)$ entonces se tiene que $f : M^n \longrightarrow X$ y $g : N^n \longrightarrow X$ son variedades singulares, por lo que $f \amalg g : M^n \amalg N^n \longrightarrow X$ también es una variedad singular, ya que $M^n \amalg N^n$ es una variedad diferenciable sin frontera y $f \amalg g$ es un morfismo continuo (con la topología inducida por el coproducto). Por ende se tiene que $[M^n, f] + [N^n, g] = [M^n \amalg N^n, f \amalg g] \in \eta_n(X)$.

2) **Asociatividad** Dadas $[M_i^n, f_i] \in \eta_n(X)$ con $i = 1, 2, 3$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
([M_1^n, f_1] + [M_2^n, f_2]) \\
+[M_3^n, f_3] &= [M_1^n \amalg M_2^n, f_1 \amalg f_2] + [M_3, f_3] \\
&= [(M_1^n \amalg M_2^n) \amalg M_3, (f_1 \amalg f_2) \amalg f_3] \\
&\overset{(i)}{=} [M_1^n \amalg (M_2^n \amalg M_3), f_1 \amalg (f_2 \amalg f_3)] \\
&= [M_1^n, f_1] + [M_2^n \amalg M_3, f_2 \amalg f_3] \\
&= [M_1^n, f_1] + ([M_2^n, f_2] + [M_3^n, f_3]).
\end{aligned}$$

donde la igualdad en (i) se debe a que $(M_1^n \amalg M_2^n) \amalg M_3 \cong M_1^n \amalg (M_2^n \amalg M_3)$ y lo análogo para los morfismos.

3) **Neutro** Sabemos que $\emptyset : \emptyset \longrightarrow X$ es una variedad singular de dimensión n sobre X, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $[\emptyset, \emptyset] \in \eta_n(X)$. Considérese $[M^n, f] \in \eta_n(X)$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
&[M^n, f] + [\emptyset, \emptyset] = [M^n \amalg \emptyset, f \amalg \emptyset] = [M^n, f] \text{ y} \\
&[\emptyset, \emptyset] + [M^n, f] = [\emptyset \amalg M^n, \emptyset \amalg f] = [M^n, f].
\end{aligned}$$

4) **Inverso** Sea $[M^n, f] \in \eta_n(X)$ entonces, usando el mismo argumento para la demostración de la reflexividad en el teorema 5.1.11, se tiene que:

$$[M^n, f] + [M^n, f] = [M^n \amalg M^n, f \amalg f] = [\emptyset, \emptyset]$$

5) **Conmutatividad** Sean $[M^n, f], [N^n, g] \in \eta_n(X)$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}[M^n, f] + [N^n, g] &= [M^n \amalg N^n, f \amalg g] = [N^n \amalg M^n, g \amalg g] \\ &= [N^n, g] + [M^n, f]\end{aligned}$$

por lo visto en la demostración de simetría del teorema 5.1.11.

$\square$

Definición 5.1.15. Dados X en $\mathscr{Top}$ y $n \geqslant 0$, al grupo abeliano $\eta_n(X)$ se le llama el ***grupo de bordismo no orientado de*** X ***de dimensión*** n.

Definición 5.1.16. Dado $n \geqslant 0$ se define el siguiente funtor

$$\eta_n : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Ab} \tag{5.4}$$

$$X \longmapsto \eta_n(X),$$

y para un morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{Top}$ se define

$$\eta_n(\varphi) : \eta_n(X) \longrightarrow \eta_n(Y) \tag{5.5}$$

$$[M^n, f] \longmapsto [M^n, \varphi \circ f]$$

Lema 5.1.17. *$\eta_n(\varphi) : \eta_n(X) \longrightarrow \eta_n(Y)$ está bien definido y es un homomorfismo de grupos.*

Demostración.

Sean $[M^n, f] = [N^n, g] \in \eta_n(X)$. Entonces existe $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ tal que $F|_{M^n} = f$ y $F|_{N^n} = g$, de esto se sigue que $\varphi \circ F : L^{n+1} \longrightarrow Y$ es tal que $(\varphi F)|_{M^n} = \varphi \circ f$ y $(\varphi F)|_{N^n} = \varphi \circ g$. Así,

$$\eta_n(\varphi)[M^n, f] = [M^n, \varphi \circ f] = [N^n, \varphi \circ g] = \eta_n(\varphi)[N^n, g],$$

lo que prueba que está bien definido.

Ahora, para ver que es un homomorfismo de grupos, considérense $[M^n, f], [N^n, g] \in \eta_n(X)$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\eta_n(\varphi)([M^n, f] + [N^n, g]) &= \eta_n(\varphi)[M^n \amalg N^n, f \amalg g] \\
&= [M^n \amalg N^n, \varphi \circ (f \amalg g)] \\
&\overset{(i)}{=} [M^n \amalg N^n, (\varphi \circ f) \amalg (\varphi \circ g)] \\
&= [M^n, \varphi \circ f] + [N^n, \varphi \circ g] \\
&= \eta_n(\varphi)[M^n, f] + \eta_n(\varphi)[N^n, g]
\end{aligned}$$

donde la igualdad en (i) está dada porque $\varphi \circ (f \amalg g) = (\varphi \circ f) \amalg (\varphi \circ g)$. □

Con esto, las otras dos propiedades para ser funtor son inmediatas de la definición.

Entonces, tenemos una familia de funtores $\eta_* := \{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\eta_n : \mathscr{Top} \longrightarrow \mathscr{Ab}$, por lo que ya se tiene un candidato para una teoría no ordinaria de homología. Para esto, nos hace falta desarrollar un poco más de herramienta, lo que se hará a lo largo de este capítulo. Sin embrago, sí podemos demostrar fácilmente que η_* cumple con el axioma de homotopía.

Teorema 5.1.18. *η_* cumple el axioma de homotopía, es decir, dados dos morfismos $\varphi, \phi : X \longrightarrow Y$ en $\mathscr{Top}$ homotópicos, $H : \varphi \simeq \phi$, se tiene que:*

$$\eta_n(\varphi) = \eta_n(\phi) : \eta_n(X) \longrightarrow \eta_n(Y)$$

Demostración.

Sea $[M^n, f] \in \eta_n(X)$ y considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M^n \times I \arrow[r, dashed, "H'"] \arrow[d, "f\times id"'] & Y \\ X \times I, \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

donde H es la homotopía entre φ y ϕ. haciendo $H' = H \circ (f \times id)$ se vuelve conmutativo, esto es, se cumple que $H'|_{M^n \times \{0\}} = \varphi \circ f$ y $H'|_{M^n \times \{1\}} = \phi \circ f$. Dado $p \in M^n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} H'|_{M^n \times \{0\}}(p) &= H'(p,0) = H \circ (f \times id)(p,0) = H(f(p),0) \\ &= (\varphi \circ f)(p) \\ H'|_{M^n \times \{1\}}(p) &= H'(p,1) = H \circ (f \times id)(p,1) = H(f(p),0) \\ &= (\phi \circ f)(p) \end{aligned}$$

luego, se tiene $\eta_n(\varphi)[M^n, f] = \eta_n(\phi)[M^n, f]$ y se cumple para cualquier $[M^n, f] \in \eta_n(X)$, por lo que $\eta_n(\varphi) = \eta_n(\phi)$ □

5.2. Bordismo de parejas no orientado

En esta sección se darán definiciones análogas a las dadas en la sección 5.1 pero para parejas de espacios topológicos, por lo que solo se enunciaran los resultados ya que las demostraciones son análogas.

Definición 5.2.1. Sean $n \geqslant 0$ y (X, A) en $\mathscr{Top}_2$, se define una ***variedad singular con frontera de dimensión*** n ***sobre*** (X, A) como un morfismo continuo $f : (M^n, \partial M^n) \longrightarrow (X, A)$, donde M^n es una variedad diferenciable, con frontera, de clase C^∞ y compacta.

Definición 5.2.2. Sean $n \geqslant 0$, (X, A) en $\mathscr{Top}_2$ y dos variedades singulares de dimensión n con frontera sobre (X, A), $f : (M^n, \partial M^n) \longrightarrow (X, A)$ y $g : (N^n, \partial N^n) \longrightarrow (X, A)$, se dice que $h : (M^n, \partial M^n) \longrightarrow (N^n, \partial N^n)$ es un ***morfismo entre variedades singulares de di-***

mensión n ***con frontera sobre*** (X, A) si el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M^n, \partial M^n) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & (N^n, \partial N^n) \arrow[dl, "g"] \\
& (X, A) &
\end{tikzcd} \tag{5.6}$$

es conmutativo. También se dice que $h : (M^n, \partial M^n) \longrightarrow (N^n, \partial N^n)$ es un ***morfismo diferenciable sobre*** (X, A).

Definición 5.2.3. Dado $n \geqslant 0$ se define el siguiente funtor:

$$Var^n : \mathscr{Top}_2 \longrightarrow \mathscr{Set} \tag{5.7}$$

$$(X, A) \longmapsto Var^n(X, A)$$

donde $Var^n(X, A) = \{f | f$ es una variedad singular con frontera de dimensión n sobre $(X, A)\}$, y dado un morfismo $\varphi : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ en $\mathscr{Top}_2$, se define

$$Var^n(\varphi) : Var^n(X, A) \longrightarrow Var^n(Y, B)$$

como

$$(M^n, \partial M^n) \xrightarrow{f} (X, A) \longmapsto (M^n, \partial M^n) \xrightarrow{\varphi \circ f} (Y, B) \tag{5.8}$$

Definición 5.2.4. Dadas dos variedades singulares de dimensión n con frontera sobre (X, A), $f : (M^n, \partial M^n) \longrightarrow (X, A)$ y $g : (N^n, \partial N^n) \longrightarrow (X, A)$, se dice que f y g son ***bordantes*** si existe una variedad diferenciable L^{n+1}, compacta, con frontera ∂L^{n+1} y un morfismo continuo $F : (L^{n+1}, \partial L^{n+1} - (M^n \coprod N^n)) \longrightarrow (X, A)$ tal que $M^n, N^n \subset \partial L^{n+1}$, $F|_{M^n} = f$, $F|_{N^n} = g$ y $F(\partial L^{n+1} - (M^n \coprod N^n)) \subset A$.

Definición 5.2.5. En $Var^n(X, A)$ se dice que dos variedades singulares de dimensión n con frontera sobre (X, A) están relacionadas, $f \sim g$, si y sólo si f y g son bordantes. A dicha relación se le llama ***bordismo de parejas***.

Aunque dicha definición a primera vista se ve muy diferente a su equivalente de la sección anterior, las demostraciones terminan siendo análogas.

Teorema 5.2.6. *La relación de bordismo de parejas es una relación de equivalencia.* $\square$

Definición 5.2.7. Al conjunto de clases de equivalencia de las variedades singulares con frontera bajo la relación de equivalencia de bordismo de parejas se denota por $\eta_n(X,A) = Var^n(X,A)/\sim$ y $[M^n, f]$ denota a la clase de equivalencia de $f : (M^n, \partial M^n) \longrightarrow (X,A)$.

Lema 5.2.8. *La operación en* $\eta_n(X,A)$ *dada por* $[M^n, f] + [N^n, g] = [M^n \amalg N^n, f \amalg g]$ *está bien definida.* $\square$

Lema 5.2.9. *Dados* (X,A) *en* $\mathscr{Top}_2$ *y* $n \geqslant 0$ *se tiene que* $\eta_n(X,A)$*, con la operación dada en el lema anterior, es un grupo abeliano.* $\square$

Definición 5.2.10. Dados (X,A) en $\mathscr{Top}_2$ y $n \geqslant 0$, al grupo abeliano $\eta_n(X,A)$ se le llama el ***grupo de bordismo de parejas no orientado de*** (X,A) ***de dimensión*** n.

Definición 5.2.11. Dado $n \geqslant 0$ se define el siguiente funtor

$$\eta_n : \mathscr{Top}_2 \longrightarrow \mathscr{Ab} \tag{5.9}$$

$$(X,A) \longmapsto \eta_n(X,A),$$

y a un morfismo $\varphi : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ en $\mathscr{Top}_2$ se define

$$\eta_n(\varphi) : \eta_n(X,A) \longrightarrow \eta_n(Y,B),$$

como

$$[M^n, f] \longmapsto [M^n, \varphi \circ f] \tag{5.10}$$

Lema 5.2.12. $\eta_n(\varphi) : \eta_n(X,A) \longrightarrow \eta_n(Y,B)$ *está bien definido y es un homomorfismo de grupos.* $\square$

Teorema 5.2.13. *η_* cumple el axioma de homotopía, es decir, dados dos morfismos $\varphi, \phi : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ en $\mathscr{Top}_2$ homotópicos, $H : \varphi \simeq \phi$. Entonces se tiene que:*

$$\eta_n(\varphi) = \eta_n(\phi) : \eta_n(X, A) \longrightarrow \eta_n(Y, B) \square$$

A continuación se probará que los grupos de bordismo de parejas cumplen otro de los axiomas de una teoría de homología, a saber, el axioma de exactitud.

Definición 5.2.14. Se define el ***homomorfismo de conexión*** de los grupos de bordismo como:

$$\partial_* : \eta_n(X, A) \longrightarrow \eta_{n-1}(A) \tag{5.11}$$

$$[M^n, f] \longmapsto [\partial M^n, f|_{\partial M^n}]$$

Observación. Para una variedad de dimensión n con frontera se tiene que su frontera es una variedad de dimensión $n-1$ sin frontera, en otras palabras, se cumple que $\partial(\partial M^n) = \emptyset$, para toda variedad M^n.

Teorema 5.2.15. *El homomorfismo de conexión no depende del representante.*

Demostración.
Sean $[M^n, f] = [N^n, g] \in \eta_n(X, A)$ entonces se tiene que existe L^{n+1} compacta con frontera ∂L^{n+1} y un morfismo continuo $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ tales que $M^n, N^n \subset \partial L^{n+1}$, $F|_{M^n} = f$, $F|_{N^n} = g$ y $F(\partial L^{n+1} - (M^n \amalg N^n)) \subset A$.

Algunas observaciones importantes son las siguientes:

1) ∂L^{n+1} es una variedad diferenciable, compacta, sin frontera y de dimensión n.

2) $\partial L^{n+1} - (M^n \amalg N^n)$ es una variedad diferenciable, compacta, con frontera y de dimensión n.

Se propone $\widetilde{L^n} = \partial L^{n+1} - (M^n \amalg N^n)$ y se define el morfismo continuo $\widetilde{F} : \widetilde{L^n} \longrightarrow A$ como $\widetilde{F} = F|_{\partial L^{n+1}-(M^n \amalg N^n)}$, el cual está bien definido ya que $F(\partial L^{n+1} - (M^n \amalg N^n)) \subset A$.

Así, $\partial\widetilde{L^n} \cong \partial M^n \amalg \partial N^n$, $\widetilde{F}|_{\partial M^n} = f|_{\partial M^n}$ y $\widetilde{F}|_{\partial N^n} = g|_{\partial N^n}$, lo cual implica que $[\partial M^n, f|_{\partial M^n}] = [\partial N^n, g|_{\partial N^n}] \in \eta_{n-1}(A)$. Entonces se tiene que:

$$\partial_*[M^n, f] = [\partial M^n, f|_{\partial M^n}] = [\partial N^n, g|_{\partial N^n}] = \partial_*[N^n, g]$$

□

Para probar que los grupos de bordismo cumplen tanto el axioma de exactitud como el axioma de escisión, necesitamos del siguiente lema.

Lema 5.2.16. *Dado $[M^n, f] \in \eta_n(X, A)$ y una variedad compacta y con fronteraN$^n \subset M^n$ tal que $f(M^n - \operatorname{int} N^n) \subset A$, se tiene que $[M^n, f] = [N^n, f|_{N^n}] \in \eta_n(X, A)$.*

Demostración.

Sea $L^{n+1} = M^n \times I$, se define $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ como $F = f \circ \pi$, donde $\pi : M^n \times I \longrightarrow M^n$ es la proyección en la variedad M^n. Ya sabemos que $\partial L^{n+1} \cong M^n \amalg M^n$ por lo que $M^m \amalg N^n \subset \partial L^{n+1}$ y esto implica que $N^n, M^n \subset \partial L^{n+1}$. Además se tiene que $F(\partial L^{n+1} - (M^n \amalg N^n)) \subset A$, ya que $\partial L^{n+1} - (M^n \amalg N^n) = M^n - N^n \subset M^n - \operatorname{int} N^n$. Por hipótesis se tiene que $f(M^n - \operatorname{int} N^n) \subset A$ y también se tiene que:

$$\begin{aligned} F|_{M^n} &= (f \circ \pi)|_{M^n} = f \\ F|_{N^n} &= (f \circ \pi)|_{N^n} = f|_{N^n} \end{aligned}$$

de lo cual se concluye que $[N^n, f|_{N^n}] = [M^n, f]$. □

Teorema 5.2.17. *η_* cumple el axioma de exactitud, es decir, si $i : A \hookrightarrow X$ y $j : X \hookrightarrow (X, A)$ son las inclusiones respectivas entonces la* *siguiente secuencia es exacta:*

$$\cdots \longrightarrow \eta_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \eta_n(A) \xrightarrow{\eta_n(i)} \eta_n(X)$$

$$\eta_n(X) \xrightarrow{\eta_n(j)} \eta_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \eta_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Demostración.

Para la exactitud de la secuencia hay que probar tres partes:

1) **P.D.**
$im(\partial_*) = \ker(\eta_n(i))$.

Para ver que $\eta_n(i) \circ \partial_* = 0$ se considera $[M^n, f] \in \eta_{n+1}(X,A)$. Entonces se tiene que $\eta_n(i) \circ \partial_*[M^n, f] = [\partial M^n, i \circ f|_{\partial M^n}]$, por lo que es suficiente verificar que $[\partial M^n, i \circ f|_{\partial M^n}] = [\emptyset, \emptyset] \in \eta_n(X)$. Pero sabemos que $\partial M^n \cong \partial M^n \amalg \emptyset$, $f|_{M^n} = f|_{M^n}$ y $f|_{\emptyset} = \emptyset$. Con lo que $L^n = M^n$ y $F = f : M^n \longrightarrow X$ sirven para verificar que $[\partial M^n, i \circ f|_{\partial M^n}] = [\emptyset, \emptyset]$.

Ahora, sea $[M^n, f] \in \ker(\eta_n(i)) \subset \eta_n(A)$. Se tiene que

$$\eta_n(i)[M^n, f] = [M^n, i \circ f] = [\emptyset, \emptyset] \in \eta_n(X),$$

de manera que existe N^{n+1} y $g : N^{n+1} \longrightarrow X$ tales que $\partial N^{n+1} \cong M^n \amalg \emptyset \cong M^n$ y $g|_{M^n} = i \circ f$, de donde se obtiene que $[N^{n+1}, g] \in \eta_{n+1}(X,A)$. Por consiguiente se tiene que:

$$\partial_*[N^{n+1}, g] = [\partial N^{n+1}, g|_{\partial N^{n+1}}] = [M^n, f]$$

ya que existe $\partial N^{n+1} \times I$ tal que $\partial(\partial N^{n+1} \times I) \cong \partial N^{n+1} \amalg M^n$ pues $\partial N^{n+1} \cong M^n \amalg \emptyset \cong M^n$ y además un morfismo $F : \partial N^{n+1} \times I \longrightarrow A$ definido como $F = g \circ \pi$, donde $\pi : \partial N^{n+1} \times I \longrightarrow N^{n+1}$ es la proyección en la variedad M^n, el cual cumple que:

$$\begin{aligned} F|_{\partial N^{n+1} \times \{0\}} &= (g \circ \pi)|_{\partial N^{n+1} \times \{0\}} = g|_{\partial N^{n+1}} \\ F|_{M^n \times \{1\}} &= (g \circ \pi)|_{M^n \times \{1\}} = g|_{M^n} = f \end{aligned}$$

Por lo tanto $[M^n, f] \in \mathrm{im}(\partial_*)$.

2) **P.D.** $\mathrm{im}(\eta_n(j)) = \ker(\partial_*)$.

Para ver que $\partial_* \circ \eta_n(j) = 0$ se considera $[M^n, f] \in \eta_n(X)$. Luego se tiene que $\partial_* \circ \eta_n(j)[M^n, f] = [\partial M^n, (i \circ f)|_{\partial M^n}]$, nuevamente basta demostrar que $[\partial M^n, (i \circ f)|_{\partial M^n}] = [\emptyset, \emptyset] \in \eta_{n-1}(A)$. Pero como $[M^n, f] \in \eta_n(X)$, esto quiere decir que $\partial M^n = \emptyset]$ y se sigue que $(i \circ f)|_{\partial M^n} = (i \circ f)|_{\emptyset} = \emptyset$.

Ahora, sea $[N^n, g] \in \eta_n(X, A)$ tal que $[N^n, g] \in \ker(\partial_*)$. Esto quiere decir que $\partial_*[N^n, g] = [\partial N^n, g|_{\partial N^n}] = [\emptyset, \emptyset]$, por lo que existe L^n y un morfismo continuo $F : L^n \longrightarrow A$ tal que $\partial L^n \cong \partial N^n \amalg \emptyset$ y $F|_{\partial N^n} = g|_{\partial N^n}$. Pero como $\varphi : \partial L^n \cong \partial N^n$, entonces se tiene que $F|_{\partial L^n} = g|_{\partial N^n}$. Ahora se define $M^n = N^n \cup_\varphi L^n$, entonces M^n es una variedad compacta y sin frontera. También se define $f : M^n \longrightarrow X$ como:

$$f(p) = \begin{cases} g(p) \text{ si } p \in N^n \\ F(p) \text{ si } p \in L^n. \end{cases}$$

que es claramente continua. Así, se tiene que $[M^n, f] \in \eta_n(X)$. Aplicando $\eta_n(j)$ se obtiene que:

$$\eta_n(j)[M^n, f] = [M^n, j \circ f] \overset{(i)}{=} [N^n, g],$$

donde la igualdad en (i) está dada por el lema 5.2.16. Por lo tanto $\mathrm{im}(\eta_n(j)) = \ker(\partial_*)$

3) **P.D.** $\mathrm{im}(\eta_n(i)) = \ker(\eta_n(j))$.

Primero se demostrara que $\eta_n(j) \circ \eta_n(i) = 0$. Por ser η_n un funtor tenemos que $\eta_n(j \circ i) = \eta_n(j) \circ \eta_n(i)$ entonces se tiene que:

$$\eta_n(j \circ i) : \eta_n(A) \longrightarrow \eta_n(X, A)$$

está dado por

$$[M^n, f] \longmapsto [M^n, (j \circ i) \circ f]. \tag{5.12}$$

Pero por el lema 5.2.16 y usando que $N^n = \emptyset$, se tiene que $\eta_n(j \circ i)[M^n, f] = [\emptyset, \emptyset]$.

Ahora, sea $[M^n, f] \in \ker(\eta_n(j)) \subset \eta_n(X)$ entonces

$$\eta_n(j)[M^n, f] = [M^n, j \circ f] = [\emptyset, \emptyset]$$

esto significa que existe variedad L^{n+1} y morfismo $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ tales que $M^n \subset \partial L^{n+1}$, $F|_{M^n} = f$ y $F(\partial L^{n+1} - M^n) \subset A$. En este caso, como M^n es una variedad sin frontera, se cumple que $[\ \partial L^{n+1} - M^n, F|_{\partial L^{n+1} - M^n}] \in \eta_n(A)$, ya que $\partial L^{n+1} - M^n$ es una variedad de dimensión n sin frontera y el morfismo $F|_{\partial L^{n+1} - M^n} : \big(\partial L^{n+1} - M^n\big) \longrightarrow A$ está bien definido.

Se verifica que $\eta_n(i)[\partial L^{n+1} - M^n, F|_{\partial L^{n+1} - M^n}] = [M^n, f]$ en $\eta_n(X)$, en efecto, existen una variedad L^{n+1} y un morfismo $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ tales que $\partial L^{n+1} \cong \big(\partial L^{n+1} - M^n\big) \amalg M^n$, $F|_{M^n} = f$ y $F|_{\partial L^{n+1} - M^n} = i \circ F|_{\partial L^{n+1} - M^n}$. Por lo tanto $\mathrm{im}(\eta_n(i)) = \ker(\eta_n(j))$.

$\square$

Para verificar el axioma de escisión echaremos mano del siguiente lema.

Lema 5.2.18. *Dada una variedad diferenciable y compacta M^n y dos conjuntos cerrados $P, Q \subset M^n$ tales que $P \cap Q = \emptyset$, existe una subvariedad $M_1^n \subset M^n$ tal que $P \subset M_1^n$, $M_1^n \cap Q = \emptyset$ y M_1^n es cerrado en M^n.*

Teorema 5.2.19. *η_* cumple el axioma de escisión, es decir, si (X, A) está $\mathscr{Top}_2$ y $\bar{U} \subset \operatorname{int} A$, entonces la inclusión $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo*

$$\eta_n(i) : \eta_n(X - U, A - U) \longrightarrow \eta_n(X, A) \tag{5.13}$$

Demostración.
Primero verificaremos que $\eta_n(i)$ es un epimorfismo. Sea $[M^n, f] \in \eta_n(X, A)$. Se definen $P = f^{-1}(X - \operatorname{int} A)$ y $Q = f^{-1}(\bar{U})$ que claramente cumplen $P \cap Q = \emptyset$. Usando el lema 5.2.18 se tiene que existe una subvariedad M_1^n de M^n tal que $P \subset M_1^n$ y $M_1^n \cap Q = \emptyset$. Con esto se ve que $f|_{M_1^n} : M_1^n \longrightarrow X - U$ es una variedad singular con

frontera de dimensión n sobre $(X-U, A-U)$. Ahora, por el lema 5.2.16 tenemos que $\eta_n(i)[M_1^n, f|_{M_1^n}] = [M^n, f]$ en $\eta_n(X, A)$.

Falta verificar que $\eta_n(i)$ es un monomorfismo. Sea $[M_1^n, f_1] \in \ker(\eta_n(i)) \subset \eta_n(X-U, A-U)$ por lo que se tiene que $\eta_n(i)[M_1^n, f_1] = [\emptyset, \emptyset]$ y entonces existen una variedad L^{n+1} y un morfismo $F : L^{n+1} \longrightarrow X$ tales que $M_1^n \subset \partial L^{n+1}, F|_{M_1^n} = f_1$ y $F(\partial L^{n+1} - M_1^n) \subset (A-U)$. Se definen los cerrados $P_1 = F^{-1}(X - \operatorname{int} A)$ y $Q_1 = F^{-1}(\bar{U})$. Nuevamente sucede que $P_1 \cap Q_1 = \emptyset$, por lo que usando el lema 5.2.18 se tiene que existe una subvariedad L_1^{n+1} de L^{n+1} tal que $P_1 \subset L_1^{n+1}$ y $L_1^{n+1} \cap Q_1 = \emptyset$. Así $[M_1, f_1] = [\emptyset, \emptyset]$ en $\eta_n(X, A)$, con lo cual se ve que $\ker(\eta_n(i)) = \{[\emptyset, \emptyset]\}$. $\square$

El último axioma que falta verificar es el axioma de dimensión. En su artículo Quelques propriétés globales des variétés differentiables. *Commentarii Mathematici Helvettici*, (28): 17-86, 1954, René Thom logró una descripción bastante completa de η_*, el cual le valió la medalla Fields en 1958.

Teorema 5.2.20 (René Thom)**.** *El anillo η_* es isomorfo a un anillo de polinomios sobre $\mathbb{Z}_2$ en un número infinito de variables de dimensión q para cada $q \neq 2^r - 1, r \geqslant 1$, i.e., $\eta_* \cong \mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_5, \ldots]$.*

Demostración.
Ver [23]. $\square$

Sea $*$ un espacio topológico que conste de un solo punto, entonces por el teorema 5.2.20 se tiene que:

1) $\eta_0(*) \cong \mathbb{Z}_2$
2) $\eta_1(*) \cong 0$
3) $\eta_2(*) \cong \mathbb{Z}_2$
4) $\eta_3(*) \cong \mathbb{Z}_2$
5) $\eta_4(*) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
6) $\eta_5(*) \cong \mathbb{Z}_2$
7) $\eta_6(*) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
8) $\eta_7(*) \cong \mathbb{Z}_2$
9) etc.

Con esto observamos que η_* no cumple el axioma de dimensión, por lo que η_* es una teoría no ordinaria de homología.

Bibliografía

[1] Marcelo Aguilar y Octavio Alberto Agustín Aquino. Notas de topología algebraica.

[2] Marcelo Aguilar, Samuel Gitler, y Carlos Prieto. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer, 2002.

[3] Marcelo Aguilar y Carlos Prieto. Notes of homotopical homology and cohomology.

[4] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Springer, 1972.

[5] Albrecht Dold. *Metodi Moderni di Topologia Algebrica*. Quaderni dei gruppi di ricerca matematica del consiglio nazionale delle ricerche, 1973.

[6] Jesus Gonzalo Pérez. *Variedades y Geomtretría: Un curso breve*. Ediciones de la universidad autónoma de Madrid, 2010.

[7] Brayton Gray. *Homotopy theory: An Introduction to Algebraic Topology*. Academic Press, 1975.

[8] Marvin J. Greenberg y John R. Harper. *Algebraic Topology: A first coursed. Revised*. Perseus, 1981.

[9] Victor Guillemin y Alan Pollack. *Topología Diferencial*. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[10] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[11] Peter John Hilton y Urs Stammbach. *A Course in Homological Algebra*. Springer, 1971.

[12] Morris W. Hirsh. *Differential Topology*. Springer, 1976.

[13] Klaus Heiner Kamps y Timothy Porter. *Abstract Homotopy and Simple Homotopy Theory*. World Scientifc Publishing, 1997.

[14] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, segunda edición, 2011.

[15] Saunders Mac Lane. *Categories for the working Mathematician*. Springer, segunda edición, 1978.

[16] Luis Javier Hernández Paricio. *Un ejemplo de teoría de homotopía en los grupos abelianos*. Universidad de la Rioja, 2008. Tesis Doctoral.

[17] Carlos Prieto. *Topología Básica*. Fondo de Cultura Economica, 2005.

[18] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer, 1988.

[19] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer, cuarta edición, 1995.

[20] Edwin Henry Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 1981.

[21] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry, volume one*. Publish or Perish, inc, tercera edición, 2005.

[22] Robert M. Switzer. *Algebraic Topology Homology and Homotopy*. Springer, 1975.

[23] René Thom. Quelques propriétés globales des variétés differentiables. *Commentarii Mathematici Helvettici*, (28):17–86, 1954.

[24] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1994.